UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC NO ENSINO MÉDIO

JEGIANE CARLA FAVORETO MARIANO

ORIENTADORA: PROFA. DRA. ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO

Vitória – ES
2024

JEGIANE CARLA FAVORETO MARIANO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Vitória – ES
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Mariano, Jegiane Carla Favoreto, 1993-

M333p Uma proposta didática para o ensino de MMC e MDC no ensino médio / Jegiane Carla Favoreto Mariano. - 2024.

95 p. : il.

Orientadora: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Ensino médio. 2. Educação. 3. Números primos. 4. Mínimo divisor comum. 5. Máximo divisor comum. 6. Sequência didática. I. Quispe Ccoyllo, Rosa Elvira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

JEGIANE CARLA FAVORETO MARIANO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MMC E MDC NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Membros da Banca:

Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
(Orientadora – Universidade Federal do Espírito Santo – UFES)

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
(Examinador – Universidade Federal do Espírito Santo – UFES)

Prof. Dr. Napoleon Caro Tuesta
(Examinador – Universidade Federal da Paraíba – UFPB)

Vitória – ES
2024

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 26/07/2024 às 15:07:14

Folha de Assinaturas Jegiane Carla Favoreto Mariano

Data e Hora de Criação: 22/07/2024 às 10:18:17

Documentos que originaram esse envelope:
- Folha de Assinaturas Jegiane Carla Favoreto Mariano.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 187f8a8fcc73e15dc8618ff683cfa746f5e8d0d3c06dc4c5e943f4191a2caabd
[SHA512]: 5e74522658f3a19a7f42e4480ce093eab109cab884166a29d70d6bec30638b96fb537c8578ff9fe9da1691aaacf45a3739913a5f2543c48ad9399bfd7fbec2ae

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)
Data/Hora: 25/07/2024 - 19:08:00, IP: 179.82.179.112, Geolocalização: [-20.289945, -40.298086]
[SHA256]: adcee06547cb64038d79ebeab1ffee239940573a5430d3e1d92174375bab3b91

ASSINADO - Napoleón Caro Tuesta (napoleon.caro.tuesta@academico.ufpb.br)
Data/Hora: 26/07/2024 - 15:07:14, IP: 187.64.123.209
[SHA256]: 43df3dc30a53e1c061b1b0f66c6cce5d09b13d316f8d7817d7e6d0a0f74d5031

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 25/07/2024 - 18:55:12, IP: 200.137.65.109
[SHA256]: 12db4df586546b5f244cae30f8ba3ee022c2c951d972e4c343116129d0fb33df

Histórico de eventos registrados neste envelope

26/07/2024 15:07:14 - Envelope finalizado por napoleon.caro.tuesta@academico.ufpb.br, IP 187.64.123.209
26/07/2024 15:07:14 - Assinatura realizada por napoleon.caro.tuesta@academico.ufpb.br, IP 187.64.123.209
25/07/2024 19:08:00 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 179.82.179.112
25/07/2024 19:07:45 - Envelope visualizado por moacrosa@gmail.com, IP 179.82.179.112
25/07/2024 18:55:12 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.109
25/07/2024 18:55:03 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.109
25/07/2024 08:02:03 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
25/07/2024 08:02:03 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
22/07/2024 10:18:17 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” (Freire, 2003).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que a todo momento está comigo me ajudando a ser forte e possibilitando que eu amplie meus limites, me ajudando a vencer e superar cada desafio.

Aos meus pais, Alcemi Mariano e Maria de Lourdes Favoreto, pelo amor e carinho, por serem um verdadeiro exemplo, que sempre buscaram o melhor para seus filhos. Ao meu irmão, por todo incentivo ao longo desses anos.

Ao meu esposo Eduardo Cosme Borges, que me motiva, me inspira e não me deixa desistir.

Ao meu amigo e colega de mestrado, Patrik Leal, anjo que Deus colocou no meu caminho para estar comigo me ajudando a não desistir durante esses anos. Peça fundamental em toda a minha trajetória do mestrado.

À professora Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, agradeço por ter aceitado a tarefa de me orientar, me proporcionando crescimento pessoal e profissional.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, que exerceram a missão de contribuir com o nosso aprendizado e nos motivaram a buscar conhecimento. Em especial, à professora Dra. Julia Schaetzle Wrobel, por todo carinho e dedicação.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação acadêmica, na graduação e no PROFMAT.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho é constituído de uma sequência didática voltada para alunos da 1ª série do Ensino Médio, cujo propósito é consolidar o aprendizado do Máximo Divisor Comum (MDC) e do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), tópicos abordados previamente no Ensino Fundamental que são essenciais para a introdução de novos conteúdos. Esta sequência, baseada na resolução de problemas, projeta a revisão do MDC e MMC e, ainda, a ampliação do conhecimento de tópicos relacionados a esses assuntos, que nem sempre são abordados no ensino básico, como o Algoritmo de Euclides e o Teorema Chinês dos Restos. Para atingir esses objetivos, é analisada a abordagem desses conteúdos em dois livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Fundamental e aplicada uma avaliação diagnóstica a duas turmas da 1ª série do Ensino Médio da EEEM Arnulpho Mattos, no município de Vitória (ES), visando determinar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos temas em estudo. Com base nisso, foram planejadas aulas de revisão de conteúdos e aplicada uma avaliação final para determinar os conhecimentos adquiridos pelos alunos após a revisão. Por fim, os dados coletados em ambas as avaliações foram analisados para verificar o progresso dos alunos e a eficácia da sequência didática.

Palavras-chave: algoritmo de Euclides; Máximo Divisor Comum (MDC); Mínimo Múltiplo Comum (MMC); sequência didática; Teorema Chinês dos Restos.

ABSTRACT

This work consists of a didactic sequence aimed at first-year high school students, with the purpose of consolidating the learning of the Greatest Common Divisor (GCD) and the Least Common Multiple (LCM), topics previously covered in elementary school that are essential for the introduction of new content. This sequence, based on problem-solving, aims to review GCD and LCM and also to expand knowledge on topics related to these subjects that are not always addressed in basic education, such as Euclid's Algorithm and the Chinese Remainder Theorem. To achieve these objectives, the approach to these contents in two Mathematics textbooks used in elementary school is analyzed, and a diagnostic assessment is applied to two first-year high school classes at EEEM Arnulpho Mattos, in the city of Vitória (ES), aiming to determine the students' prior knowledge of the topics under study. Based on this, review classes were planned and a final assessment was applied to determine the knowledge acquired by the students after the review. Finally, the data collected from both assessments were analyzed to verify the students' progress and the effectiveness of the didactic sequence.

Keywords: Euclid algorithm; Greatest Common Divisor (GCD); Least Common Multiple (LMC); following teaching; Chinese Remainder Theorem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS, QUADROS E TABELAS

LISTA DE SIGLAS

CESGRANRIO	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
EEEM	Escola Estadual de Ensino Médio
FGV	Fundação Getúlio Vargas
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFAL	Instituto Federal de Alagoas
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MDC	Máximo Divisor Comum
MMC	Mínimo Divisor Comum
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PA	Progressão Aritmética
PIC	Programa de Iniciação Científica Jr.
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PISA	Programme for International Student Assessment (em inglês)
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEDU	Secretaria de Estado da Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi uma ferramenta útil para o ser humano enfrentar necessidades e obstáculos em diferentes situações do cotidiano, como pode revelar a História da Matemática.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. (Brasil,1998).

Nesse sentido, a escola é um pilar fundamental para a construção do conhecimento matemático, na medida em que possibilita um ensino com base em análises, discussões, apropriação de conceitos e formulação de ideias (PARANÁ, 2008), da mesma forma como proposto pela Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo (Sedu - ES) no Currículo de Matemática para a Educação Básica:

> A escola, de tempo parcial ou integral, deve estar comprometida com o desenvolvimento do sujeito em suas diferentes dimensões, promovendo situações de aprendizagem que articulem conhecimentos, habilidades e atitudes que possibilitem o desenvolvimento dos estudantes, o exercício de sua autonomia e, ao mesmo tempo, o estabelecimento do compromisso com a construção e melhoria do mundo em que vivem. (ESPÍRITO SANTO, 2018b, p. 19).

Enquanto contribuição para o desenvolvimento da sociedade, observamos a Matemática sendo aplicada em outras ciências, como Física, Química, Biologia e, principalmente, na área da tecnologia.

> É impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos, sem que a tecnologia tenha um papel destacado, e com a matemática tendo um papel dominante na sua formação. Dessa forma a matemática tem implicações importantes para o desenvolvimento e organização da sociedade, embora essas implicações sejam difíceis de identificar. (SKOVSMOSE, 2001).

Desse modo, visando contribuir com o ensino-aprendizagem dessa importante ciência no ensino básico, propomos uma sequência didática com os tópicos mais relevantes da aritmética, elaborada com base na vivência docente, na aquisição de conhecimentos e na análise de resultados de avaliações externas (Saeb e Pisa) do ensino de Matemática no Brasil.

> Chamamos de sequência didática o conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas que objetivam o entendimento sobre certo conteúdo ou tema de ciências. (KOBASHIGAWA, ATHAYDE, MATOS, CAMELO, & FALCONI, 2008).

Segundo Lima, em relação à sequência didática:

> […] acredita-se que, por meio desta estratégia, haja avanço na apropriação do ensino, que as concepções dos escolares possam ser conhecidas, permitindo as intervenções dos docentes assim que necessárias. (LIMA, 2018).

JUSTIFICATIVA

De acordo com os últimos resultados das avaliações externas do Pisa, de 2018 e 2022, e do Saeb de 2021, que são aplicadas em âmbito nacional, o ensino e aprendizagem da Matemática no Brasil ainda sofre defasagem em conteúdos tidos como base, como veremos no capítulo 1 deste trabalho.

Essa defasagem já havia sido observada por esta pesquisadora no decorrer dos oito (8) anos de atuação como professora de Matemática da Secretaria da Educação do Espírito Santo. Nesse período, foi percebida a grande dificuldade da maioria dos estudantes de compreender novos conceitos de Matemática ao chegarem ao Ensino Médio. Em razão disso, no início de cada ano letivo, há a necessidade de realizar a revisão de conteúdos do Ensino Fundamental, como as quatro operações com números inteiros e racionais, equação de primeiro grau, razão e proporcionalidade de grandezas, entre outros.

Assim, procurando formas de diminuir a defasagem no aprendizado da Matemática do Ensino Básico e corrigir lacunas no ensino-aprendizagem de conceitos básicos do Ensino Fundamental, propomos uma sequência didática baseada na resolução de problemas.

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. (POZO & ECHEVARRIA, 1998).

A sequência didática abordará os temas Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC), conceitos da aritmética dos números inteiros que são trabalhados, primeiramente, no Ensino Fundamental (6º e 7º anos), fase na qual os alunos executam os conceitos das operações matemáticas atrelados ao raciocínio lógico, com o intuito de resolver situações-problema do cotidiano da sociedade. O objetivo desta proposta é consolidar o aprendizado dos alunos relacionado à teoria envolvendo o MDC e MMC, e ainda auxiliar na compreensão de outros conteúdos curriculares como frações, equações, geometria, progressões e outros que se utilizam desses conceitos.

A escolha do tema da sequência didática surge após esta pesquisadora ingressar no PROFMAT, programa no qual são estudados e aprofundados diferentes tópicos da Matemática da Educação Básica, inclusive uma introdução à teoria dos números inteiros, abordada na disciplina de Aritmética, onde ocorre o aprimoramento em indução matemática, divisão e representação dos inteiros, Algoritmo de Euclides, aplicações do MDC, números primos etc. De forma geral, a aquisição desses conhecimentos propiciou o desenvolvimento de competências docentes que permitiram oferecer revisão de conteúdos e sanar dúvidas dos alunos em tópicos abordados no Ensino Fundamental. Essas ações visam facilitar a compreensão de novos conteúdos, mais avançados, que serão apresentados aos estudantes ao longo do Ensino Médio.

As atividades da sequência didática focam no cálculo do MDC por meio da divisão euclidiana; evidenciam a relação existente entre o MDC e o MMC de dois ou mais números inteiros; e trabalham apropriadamente a contextualização desses conceitos, em razão desta pesquisadora já ter observado que, quando são abordados problemas contextualizados envolvendo MDC ou MMC, a maioria dos alunos tem dificuldades, tanto para determinar o que utilizar para resolver o problema, quanto para calcular o MDC ou MMC após descobrir o que usar. “O que eu tenho que fazer?”, “O que eu vou usar?”, “É difícil!”, são algumas das perguntas ou comentários que surgem com frequência.

A respeito do objeto de estudo da sequência didática, em uma pesquisa nas dissertações do PROFMAT encontramos cinco (5) trabalhos com foco no tema MDC e MMC, a saber: **1**. *O estudo do MDC e MMC por meio de atividades com material concreto, jogos e a “plataforma”*, de *Arduino* do Luiz Carlos Lemos Junior da FURG (2019); **2**. *Resolução de problemas: uma estratégia metodológica para o ensino do MMC e do MDC*, de Vitório Batista Lima da Silva da UFBA (2019); **3**. *Uma extensão do MDC e MMC dos números inteiros aos comensuráveis*, de Steve Wanderson Calheiros de Araújo da UNIFAP (2016); **4**. *MMC e MDC: abordagem e resolução de problemas*, de Márcio Antônio Mota Pinto da UEMA (2015); e **5**. *Uma proposta de sequência didática para o ensino de MDC e MMC na educação básica*, de Eufélix Monteiro Maurício da UFES (2014).

No intuito de amenizar as dificuldades dos estudantes no aprendizado do conteúdo, esses estudos exploraram diversas metodologias. Entre as diferentes estratégias utilizadas, tem-se: o uso de material concreto, tecnologias e práticas pedagógicas fora da sala de aula, como no primeiro trabalho; resolução de exercícios voltados para o Ensino Fundamental para auxiliar professores ao iniciar os conteúdos de MMC e MDC, como no segundo caso; já no terceiro e no quarto trabalho, apresenta-se uma abordagem teórica mais ampla sobre o assunto. No terceiro, é generalizado o MDC e MMC para os comensuráveis, como extensão desses conceitos nos inteiros; e no quarto, é abordado as noções de conjuntos para servir como linguagem fundamental para o estudo desses tópicos. Ambos os trabalhos trazem propostas de exercícios resolvidos sobre o tema.

Por fim, destacando a quinta dissertação, de Eufélix Monteiro, que mais se assemelha com este trabalho, encontramos uma sequência didática com cálculo do MDC por meio da divisão euclidiana, divisibilidade, MMC e números primos por meio de listas de exercícios elaboradas como recurso pedagógico para professores da Educação Básica. Nesse trabalho, encontramos uma proposta didática aplicada aos estudantes de Ensino Médio e conteúdos voltados para os professores.

É importante ressaltar que a maioria dos trabalhos tem como foco a formação continuada de professores, ajudando e auxiliando o docente em seu trabalho em sala de aula.

OBJETIVO

Conforme mencionado previamente, o objetivo deste trabalho consiste em desenvolver uma sequência didática direcionada a alunos da 1ª série do Ensino Médio, a fim de consolidar o aprendizado de conteúdos relativos ao MDC e MMC, abordados no Ensino Fundamental, possibilitando seu uso nos conteúdos curriculares das próximas séries do Ensino Médio.

Temos como objetivos específicos trabalhar os conteúdos relacionados com o MDC e MMC, já estudados no Ensino Fundamental, de maneira mais detalhada e aprofundada do que encontramos nos livros didáticos do Ensino Fundamental, ampliando os tópicos e apresentando outros conteúdos, como números primos, Algoritmo de Euclides e Teorema Chinês dos Restos. Além disso, pretende-se analisar a eficácia da proposta elaborada e seu impacto no desenvolvimento das habilidades dos estudantes.

METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem experimental, por meio da proposição de uma sequência didática e da respectiva aplicação a alunos da 1ª série do Ensino Médio.

A sequência didática foi concebida para executá-la em três fases. A primeira compreende o estudo da abordagem do MDC e MMC tanto no Currículo Estadual de Matemática do Espírito Santo, quanto em livros didáticos (2) de Matemática utilizados no Ensino Fundamental, como também a aplicação de uma avaliação diagnóstica (Lista 1), a fim de obter informações dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos sobre os temas que são objeto de estudo. Esses dados possibilitam o planejamento das aulas de revisão de conteúdos, amoldado à defasagem dos estudantes e enfatizando os tópicos de maior dificuldade para os alunos. Para a segunda fase, serão oferecidas cinco aulas de revisão de conteúdos, de 50 minutos cada. Para finalizar, a última fase compreende a aplicação de uma avaliação final (Lista 2), cujos resultados serão analisados e comparados aos resultados da avaliação inicial, no intuito de avaliar o progresso dos alunos e a eficácia da sequência didática.

Cada avaliação (Lista 1 e 2) contém 10 questões, entre discursivas e objetivas. Essas questões foram extraídas de livros didáticos do Ensino Fundamental, do livro de Aritmética do PROFMAT, de exames de vestibulares e concursos públicos, e do material do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP, todas relacionadas ao tema de estudo. A coleta de dados foi realizada por meio da devolução por parte dos alunos da resolução individual das Listas de exercícios.

Para a condução das atividades, foram utilizados os seguintes recursos pedagógicos: um quadro branco e um Datashow para a projeção dos conteúdos durante as aulas de revisão.

O referencial teórico recomendado para fundamentar essa abordagem pode ser encontrado no capítulo 2 desta dissertação.

ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Na primeira fase da pesquisa, apresentada no capítulo 1, é evidenciada a defasagem no aprendizado de Matemática no Ensino Médio por meio de dados das avaliações externas – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, 2018 e 2022) e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb, 2021). Em seguida, é analisada a abordagem dos conteúdos Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum no Currículo Estadual de Matemática do Espírito Santo e nos livros didáticos *Matemática, ideias e desafios,* de Iracema e Dulce (2012), para o 6° ano; e *Matemática Bianchini*, de Edwaldo Bianchini (2018), para o 7º ano, ambos dedicados ao Ensino Fundamental.

No Capítulo 2, é apresentado o marco teórico relacionado ao MDC e MMC voltado para professores. Esse conteúdo possibilita aos docentes planejarem as aulas de revisão de tópicos após a realização da primeira avaliação diagnóstica (Lista 1). Nessa seção, são definidos: números primos, Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum, assim como são apresentados o Algoritmo de Euclides e o Teorema Chinês dos Restos, entre outros.

No Capítulo 3, são analisadas as questões, com as respectivas soluções, das duas listas de exercícios (avaliação diagnóstica e avaliação final da sequência didática), envolvendo temas relacionados ao Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum. Em seguida, são relatadas as atividades desenvolvidas em cada fase da sequência didática, aplicadas a 65 alunos da primeira série do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Médio Arnulpho Mattos, localizada no município de Vitória, no Espírito Santo.

No Capítulo 4, são mostrados os resultados da avaliação diagnóstica (Lista 1). Esses dados ajudaram no planejamento das aulas de revisão de conteúdo, que ocorreram após essa avaliação inicial. Nesta seção, também são apresentados os resultados da segunda avaliação (Lista 2), aplicada após a revisão dos conteúdos. Os resultados de ambas as avaliações foram comparados, a fim de verificar os avanços obtidos pelos alunos. Para finalizar, apresenta-se as considerações finais da pesquisa.

CAPÍTULO 1

Neste capítulo, será abordada a defasagem no ensino aprendizagem da Matemática com base nos dados das avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), de 2018 e 2022, e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), de 2021. Além disso, faz-se uma análise da abordagem dos conteúdos de MMC e de MDC no currículo de Matemática da rede estadual do Espírito Santo (2018b) e uma análise dos conteúdos de Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum em dois livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental.

1.1 DEFASAGEM NO ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), por meio do Pisa, em pesquisa realizada em 2018 de forma amostral com estudantes de 15 anos de idade, obteve que 68,1% dos estudantes brasileiros estão nos piores níveis de desenvolvimento (nível 1 e abaixo de 1). Destes, 41% dos alunos são incapazes de resolver questões envolvendo procedimentos do cotidiano nos contextos familiares, e apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes apresentou nível máximo de proficiência na área. No Quadro 1, está a descrição e o percentual de estudantes por nível de proficiência em Matemática do Pisa 2018 (A média do Brasil foi de 384).

Quadro 1 – Resultados por nível de proficiência - Pisa 2018

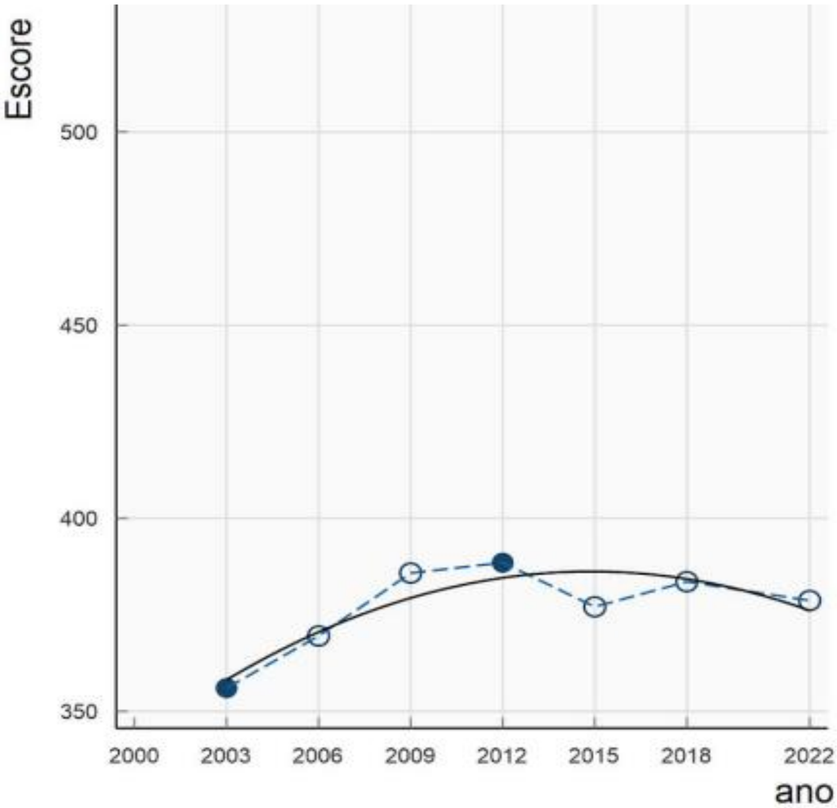
NÍVEL	ESCORE MÍNIMO	PERCENTUAL DE ESTUDANTES NO NÍVEL	CARACTERÍSTICAS DAS TAREFAS
6	669	OCDE: 2,4% Brasil: 0,1%	No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e transitar entre elas com flexibilidade. Evidenciam um pensamento e um raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão junto com um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais para desenvolver novas abordagens e estratégias que lhes permitam lidar com situações novas. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original.

5	607	OCDE: 8,5% Brasil: 0,8%	No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Conseguem trabalhar estrategicamente, utilizando um vasto e bem desenvolvido conjunto de habilidades de pensamento e de raciocínio, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. Começam a refletir sobre suas ações e são capazes de formular e de comunicar suas interpretações e raciocínios.
4	545	OCDE: 18,5% Brasil: 3,4%	No Nível 4, os estudantes são capazes de trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos em situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e de integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Conseguem utilizar seu conjunto limitado de habilidades e raciocinar com alguma perspicácia em contextos diretos. São capazes de construir e de comunicar explicações e argumentos com base em suas interpretações, argumentos e ações.
3	482	OCDE: 24,4% Brasil: 9,3%	No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Suas interpretações são seguras o suficiente para servirem de base à construção de um modelo simples ou à seleção e aplicação de estratégias simples de resolução de problemas. São capazes de interpretar e de utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente com base nelas. Demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais, e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos.
2	420	OCDE: 22,2% Brasil: 18,2%	No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados.
1	358	OCDE: 14,8% Brasil: 27,1%	No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.
Abaixo de 1		OCDE: 9,1% Brasil: 41,0%	A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas.

Fonte: Inep (2019)

Em 2022, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, de forma amostral, contemplou apenas 10.798 estudantes em 599 escolas, representando em torno de 2.263.000 estudantes com idade de 15 anos. Os resultados médios de 2022 estão apresentados no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Tendências no desempenho em Matemática (Pisa 2022)

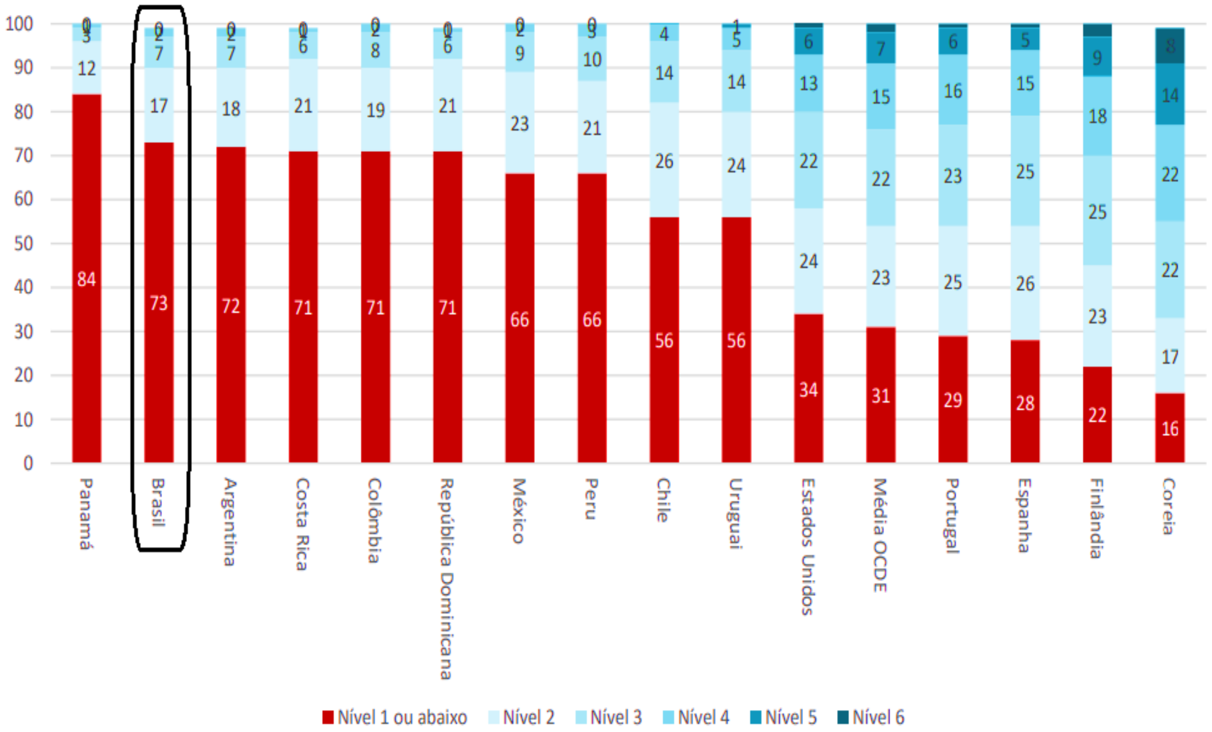


Fonte: Inep (2023a, p. 6)

A média de proficiência em Matemática no Brasil em 2022 foi de 379, praticamente os mesmos resultados de 2018 nesse mesmo componente curricular. No país, 73% dos estudantes brasileiros não alcançaram o nível 2 de proficiência em Matemática, considerado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) o nível básico para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. Assim, de acordo com o nível, esses estudantes podem interpretar e reconhecer, sem precisar de instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente.

Apenas aproximadamente 1% dos estudantes do Brasil tiveram alto desempenho em Matemática, o que significa que atingiram o Nível 5 ou 6 na Lista, como podemos observar no Gráfico 2.

Gráfico 2 – Distribuição dos estudantes na escala de proficiência nos países/economias selecionados em Matemática

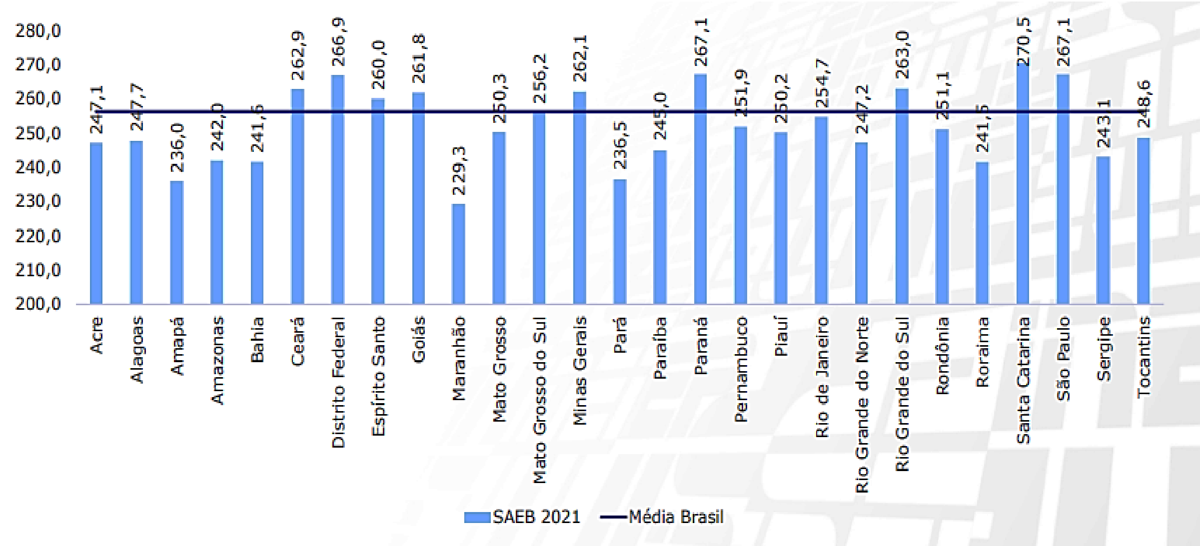


Fonte: Inep (2023b, p. 9)

Outra avaliação externa que subsidia a análise da qualidade do ensino da matemática é o Saeb, que permite ao Inep realizar um diagnóstico da Educação Básica brasileira e avaliar a qualidade das instituições de ensino por meio da avaliação externa aplicada a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada. Assim, para compor o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), juntam-se as médias de desempenho dos estudantes, apuradas no Saeb, com as taxas de aprovação, reprovação e evasão escolar apuradas no Censo Escolar.

No Gráfico 3, é possível observar a média da proficiência em matemática no 9° ano do Ensino Fundamental da prova do Saeb 2021. Dos 26 estados mais o Distrito Federal, apenas nove encontram-se acima da média do Saeb no Brasil, atingindo o nível 3 da proficiência matemática (de acordo com o Anexo, o nível 3 refere-se a um desempenho maior ou igual a 250 e menor do que 275). O Espírito Santo foi um desses estados que atingiu uma média (260) acima da média Brasil (256,26), junto do Ceará, Distrito Federal, Goiás, Minas Gerais, Paraná, Rio Grande do Sul, Santa Catarina e São Paulo.

Gráfico 3 – Proficiência em Matemática (Saeb 2021)



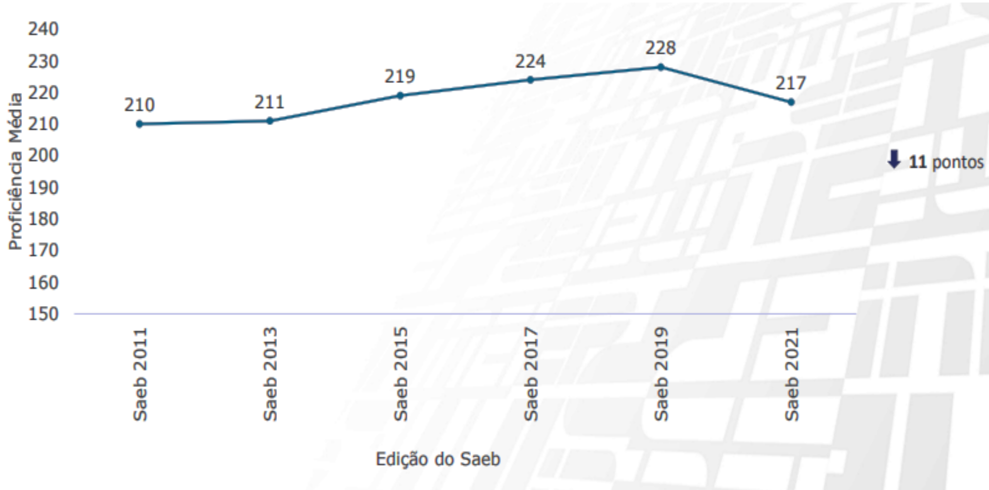
Fonte: Inep (2021)

De acordo com os dados de proficiência média no Saeb, a maioria dos estados brasileiros têm, na média, alunos até o nível 3, no qual o aluno consegue determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros; identificar reta numérica; reconhecer números racionais, representados na forma decimal e escrita; reconhecer a fração em figuras e fração irredutível; interpretar e associar dados em gráficos; reconhecer a planificação de um sólido simples e resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

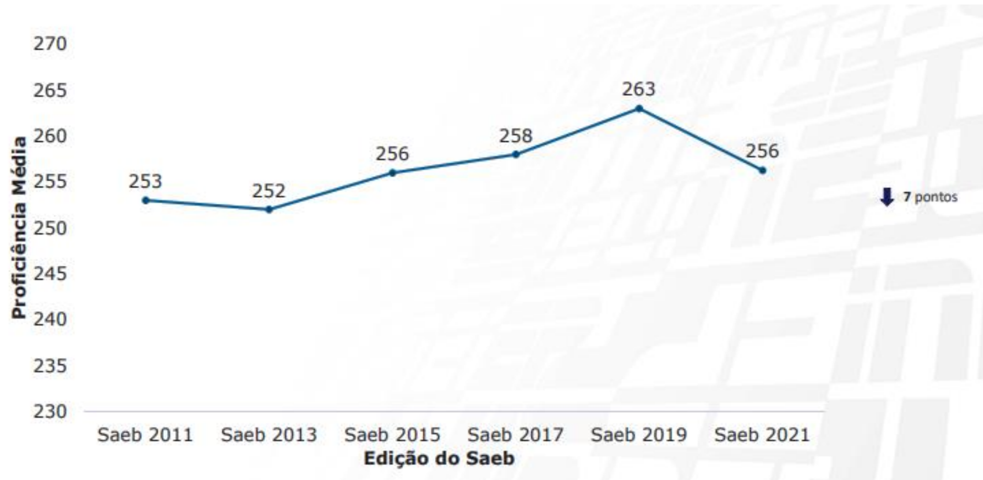
Nos gráficos a seguir, observamos a evolução das proficiências médias em Matemática no 5° e 9° ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, no período de 2011 a 2021, nas avaliações do Saeb no Brasil. A média foi melhorando ao longo dos anos (2011 - 2019), apesar desses resultados ainda estar longe dos níveis desejados, porém em 2021 houve reduções entre 7 e 11 pontos na média do Saeb, fruto do impacto da COVID 19 na escola brasileira que afastou os alunos da sala de aula de forma intermitente nos anos 2020 e 2021. O estado do Espírito Santo também teve uma queda de 11,1 pontos na proficiência média no Saeb, em Matemática, no 9º ano do Ensino Fundamental, passando de 271,1 em 2019 para 260 em 2021. Observamos ainda que em 2021, somente a proporção de 0,8% de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental se localizou no último nível desejado (nível 9), que é quando o desempenho nas avaliações é maior ou igual a 400, conforme Escala de Proficiência de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental (ANEXO A).

Gráfico 4 – Evolução das proficiências médias em Matemática no Saeb entre 2011 e 2021

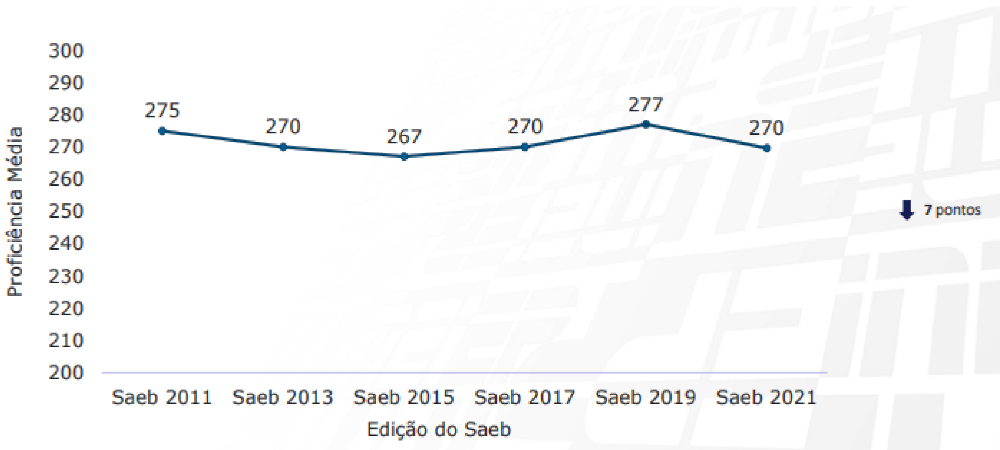
No 5° ano do Ensino Fundamental



No 9° ano do Ensino Fundamental



No Ensino Médio Tradicional



Fonte: Inep (2022)

Com base na análise anterior a respeito da proficiência em Matemática na prova do Saeb nos anos finais do Ensino Fundamental, constatamos a defasagem de assuntos estruturais da Matemática nos estudantes ao chegarem ao Ensino Médio.

Em razão disso, muitas vezes o professor, ao iniciar o estudo da Matemática no Ensino Médio, deve destinar parte de suas aulas para fazer a revisão de conteúdos do Ensino Fundamental. Essa lacuna de aprendizagem pode ser consequência de vários fatores, como por exemplo, falta de assimilação ou compreensão parcial por parte dos alunos dos temas abordados, conforme Brito e Oliveira:

> Temos como hipótese que a falta de hábitos de leitura, em que se destaca a de Língua materna, e de contextualização adequada dos problemas matemáticos, tanto pelos professores quanto pelos alunos leva os envolvidos no processo escolar a uma dificuldade de empatia para com os conteúdos dessa disciplina. Isso acarretaria baixo rendimento, desestímulo, reprovação, desistência e evasão escolar, tanto na escola básica quanto nas licenciaturas. (BRITO & OLIVEIRA, 2008).

Dessa forma, é necessário que o professor crie alternativas e mecanismos para suprir essas dificuldades antes de avançar com os conteúdos. Outro fator que dificulta o ensino da Matemática é o “algebrismo”, relativo à definição dada por J. Santos, França e Lúcia Santos para algebristas:

> Definiremos como algebrista; aquele que tem por interesse somente a parte algébrica pura, não tem proveito em buscar por hora à aplicação de suas demonstrações. Essa abstração para o aluno que não tem uma base em Matemática é prejudicial e traz mais confusão que a construção do seu conhecimento. (SANTOS, FRANCA, & SANTOS, 2007, p. 28).

O Saeb avalia a qualidade da educação oferecida aos estudantes pelas instituições de ensino e oferece benefícios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento das políticas educacionais com base nas evidências.

Nesse sentido, quanto ao estado de Espírito Santo, ao analisar de forma mais detalhada os resultados do Saeb 2021 para as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de 2021, encontramos os seguintes números, indicados no Quadro 1, nos três níveis: Municipal (Vitória), Estadual (Espírito Santo) e Nacional (Brasil).

Quadro 2 – Saeb 2021 - 9º ano do Ensino Fundamental

%	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9
Total município	21,54	13,93	17,04	17,36	15,02	9,87	3,66	1,21	0,37	0,00
Total estado	14,77	12,18	16,45	19,07	18,58	12,11	4,99	1,41	0,44	0,00
Total Brasil	14,7	13,1	16,6	18,2	17,5	11,8	5,3	2,0	1,4	0,00

Fonte: Inep (2021)

A proficiência com cálculos e o manuseio das operações com números inteiros se dá a partir do nível 3 (Saeb), ou seja, quando o desempenho é maior ou igual a 250 e menor que 275. A partir dos resultados do Saeb 2021, pode se constatar que 52,51% dos alunos da rede municipal de Vitória (9º ano do Ensino Fundamental) não dominam o assunto, portanto apresentam uma defasagem de conhecimento.

O ensino-aprendizagem da disciplina sempre foi muito questionado, pelo menos no Brasil.

> Desde o Brasil Colônia, a matemática era ensinada com base na memorização e na repetição exaustiva de exercícios (....) Aqui no país, cabia às escolas militares ensinar matemática com fins práticos, que envolviam o uso de armas de guerra e a construção de fortificações (...) Após essa data [1832, ano da Independência do Brasil], o saber matemático passou a fazer parte da formação geral das elites instruídas, basicamente funcionários de governo e profissionais liberais (...) A partir da década de 1930, identifica-se um primeiro movimento que buscou modernizar o ensino da matemática, liderado pelo engenheiro sergipano Euclides Roxo (1890-1950), professor de matemática e diretor do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Até então, não havia propriamente a disciplina de matemática nas escolas, mas, sim, cursos separados de álgebra, aritmética e geometria (...) Roxo também travou discussões com alguns de seus pares ao defender a diferenciação entre a matemática, como campo disciplinar, e o ensino de matemática. Essa distinção, que ajudou a pavimentar o ensino da matemática como área de pesquisa no Brasil, é considerada o marco inicial para a historiografia da educação matemática. (...) Uma pergunta foi se estabelecendo: quem é que tem autoridade para dizer o que deve ser ensinado nas escolas? Os matemáticos ou quem lida com o ensino de matemática? (PIERRO, 2022).

A esse respeito, após uma leve melhoria nos últimos anos (2011-2019), houve uma queda (2021) na proficiência média dos alunos em Matemática, conforme resultados das avaliações Pisa e Saeb, assim, é necessário que mudanças para o ensino como um todo ocorram, a fim de aplicar e alinhar os conteúdos teóricos às necessidades e às situações enfrentadas pela sociedade no cotidiano. Segundo Valente:

> Além de possuir a informação, é necessário desenvolver competências, que são impossíveis de ser simplesmente memorizadas. Essas competências

> devem ser construídas por cada aprendiz, na interação com objetos e com pessoas que coabitam o seu cotidiano. (VALENTE, 2011, p. 13).

O ensino aprendizagem da matemática precisa ser mais dinâmico, aceitável, compreensível e agradável aos alunos. Nesse sentido, afirma D'ambrósio:

> Sabe-se que a típica aula de Matemática, a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus, ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. Os alunos acreditam que a aprendizagem se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos, nada podendo gerar e criar, tornando o papel da disciplina passivo e desinteressante. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15).

No processo de ensino e aprendizagem, o estudante precisa ser motivado para ter entusiasmo em aprender os conteúdos. O educador tem o papel de intermediar e gerir conhecimentos. Sobre a motivação escolar, Tapia e Fita dizem que:

> A motivação escolar é algo complexo, processual e contextual, mas alguma coisa pode fazer para que os alunos recuperem ou mantenham seu interesse em aprender. A sociedade, aos órgãos públicos e a outras instituições cabe encontrar soluções. Aos professores e equipe docentes cabe a reflexão. (TAPIA & FITA, 2015, p. 9).

Os livros didáticos têm explorado cada vez menos o conceito e os processos práticos para os cálculos de MDC e MMC, o que é preocupante uma vez que esses conteúdos têm muitas aplicações práticas, inclusive no cotidiano dos alunos, ao mesmo tempo que são base de outros conteúdos matemáticos posteriores. Após a análise dos gráficos e das tabelas de proficiência mostrados até o momento, observamos que os conteúdos estruturantes da Matemática, incluindo o estudo do MDC e MMC, não podem ficar de fora do processo de aprendizagem dos alunos.

Em virtude da falta de aprofundamento dos livros didáticos, este trabalho tem como objetivo criar uma proposta didática para auxiliar docentes em suas aulas de ensino de MMC e MDC. Com isso, montamos um material que poderá servir de apoio aos professores que quiserem realizar uma proposta pedagógica com base nesses conceitos.

1.2 ABORDAGEM DE MMC E MDC NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESPÍRITO SANTO

> A Matemática enquanto campo do saber tem suas características bem peculiares no sentido do desenvolvimento intelectual, humano e científico, que vão desde as atividades cotidianas a questões bem mais complexas de cunho tecnológico. Ela cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Estes sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos,

> para a construção de representações significativas e para argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2017).

Ao longo da construção do conhecimento matemático, o estudante precisa ser estimulado e motivado a buscar a aprendizagem dos conteúdos, aplicando-os em sua vivência.

O currículo da rede estadual do estado do Espírito Santo foi atualizado em 2018 com o intuito de proporcionar uma educação mais ampla e universal, tendo o ambiente escolar como um local propício para o desenvolvimento da cidadania e da redução da desigualdade de condições. Conforme documento orientador da Secretaria de Educação, "O Espírito Santo esforça-se para superar contrastes sociais, vislumbrado na escola território propício ao desenvolvimento da cidadania e à promoção da dignidade humana". (ESPÍRITO SANTO, 2018b, p. 11).

Após a análise do currículo da rede estadual do estado do Espírito Santo, é possível concluir que a sistematização de aprendizagem é bem atual, pois associa objetos do conhecimento a habilidades e competências que devem ser trabalhadas durante as etapas de aprendizagem e, por fim, liga todo o conhecimento adquirido aos temas integradores. Pode-se evidenciar essa abordagem no trecho a seguir.

> [...] o Espírito Santo promove um currículo estruturado com identidade própria, mas legalmente embasado, a fim de oportunizar educação de qualidade a todos, por meio do desenvolvimento de habilidades e competências que promovam caráter ético, autônomo, crítico-reflexivo e emancipado, condições imprescindíveis à atuação em contextos educativos, no mundo do trabalho e na vida em sociedade. (ESPÍRITO SANTO, 2018a, p. 11).

De acordo com a estrutura da grade curricular de Matemática da Sedu, observou-se que os conteúdos de MMC e MDC são estudados no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. Observamos, no Quadro 3, conteúdos, objetivos, habilidades e competências referentes a cada ano escolar dos conteúdos no currículo da rede estadual do Espírito Santo.

Quadro 3 – Sistematização das aprendizagens essenciais

6° ano				
Campo temático	**Objeto do conhecimento**	**Habilidades**	**Competências específicas**	**Possibilidade de envolvimento**
				Temas integradores
Números	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural	Fluxograma para determinar a paridade de um número	**(CE02)** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de	**(TI12)** Trabalho, Ciência e Tecnologia

	Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos Mínimo Múltiplo Comum Máximo Divisor Comum	natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos Mínimo Múltiplo Comum Máximo Divisor Comum	produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo **(CE06)** Enfrentar situações -problemas em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). **(CE08)** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.	
7° ano				
Campo temático	**Objeto do conhecimento**	**Habilidades**	**Competências específicas**	**Possibilidade de envolvimento** **Temas integradores**
Números	Múltiplos e divisores de um número natural Mínimo Múltiplo Comum	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais,	**(CE02)** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo	**(TI12)** Trabalho, Ciência e Tecnologia.

	Máximo Divisor Comum	envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.	aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. **(CE05)** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.	

Fonte: (ESPÍRITO SANTO, 2018b)

Ao analisar a coluna de habilidades pretendidas, percebe-se a preocupação do currículo em orientar os professores a não apenas explicar as ferramentas aos alunos para resolução de problemas envolvendo o uso de MMC e MDC, como também oportunizar aos estudantes a criação de suas próprias questões sobre os temas que estão sendo abordados. Esse tipo de iniciativa é raro na aprendizagem da Matemática, pois na educação tradicional o aluno é condicionado apenas a resolver as questões e não a montá-las.

Outro ponto que merece destaque é o fato de o documento mencionar “por meio de estratégias diversas”, dando a ideia de que a Matemática é uma ferramenta por meio da qual a sociedade pode sonhar, moldar e construir caminhos para situações novas, mostrando, assim, que a disciplina é fundamental na evolução e no avanço da humanidade.

Na coluna das competências, destaca-se a importância de associar o estudo de MMC e MDC com as tecnologias atuais, bem como a necessidade de apresentar os resultados desses estudos em diversas formas: tabelas, gráficos, esquemas etc. Outro ponto de destaque é o fato de incentivar professores a fomentar momentos nas aulas em que os alunos possam trabalhar de forma cooperativa, para criar caminhos que levem à resolução de problemas propostos, contribuindo para uma educação libertadora e inovadora.

O currículo promove que o professor seja sujeito do processo educativo, intelectual, pesquisador, reflexivo e mediador, tendo o desafio de construir novas alternativas pedagógicas para a sua prática docente (ESPÍRITO SANTO, 2018a). Então, o educador tem de ser um mediador e não apenas uma pessoa que transmita conhecimento, pois cada vez mais é comprovado que a educação é um mecanismo dinâmico, na qual o aluno é o protagonista e o professor é um semeador do conhecimento e impulsionador de ideias. A educação deve ser tratada como peça fundamental para a transformação da sociedade, e o papel da escola deve ser o de formar cidadãos capazes de intervir e mudar situações ao seu redor, buscando um mundo mais justo e menos desigual.

1.3 ABORDAGEM DE MMC E MDC EM LIVROS DIDÁTICOS

Com base no estudo do currículo do Espírito Santo, escolhemos analisar a sequência do ensino dos conteúdos de MDC e MMC abordada nos livros de Iracema e Dulce (2012) para o 6º ano, e no livro de Bianchini (2018) para o 7º ano, ambas as obras dedicadas ao Ensino Fundamental.

Começando pelo livro de Iracema e Dulce (2012), a sequência adotada pelo livro A, no capítulo 3 com o título de "Números primos e a decomposição de números", é proposta da seguinte forma.

O autor deixa uma explicação para o professor orientando que "não há necessidade de dar ênfase a este conteúdo de MDC, pois são poucas suas aplicações no cotidiano dos alunos".

Definição do MDC.

Exemplo envolvendo dois números com seus divisores comuns e apresentação do máximo divisor comum entre eles.

Exemplo simples do conteúdo anterior.

Já a sequência adotada pelo mesmo livro, porém no capítulo 4, com o título de "Múltiplos comuns e o Mínimo divisor comum", é proposta da seguinte forma.

Começou com um exemplo de dois meninos, o Mauro e o Daniel, que treinavam futebol em um clube. Mauro treinava de 8 em 8 dias e Daniel de 12 em 12 dias. E pergunta que dia eles treinariam juntos.
Na resolução, escreveu os múltiplos de 8 e de 12, que correspondiam aos dias de treino dos meninos. E os múltiplos de 8 e 12 que são: 0, 24, 48,72, ... Portanto, eles se encontrarão depois de 24 dias.

Explica o procedimento de como calcular os múltiplos comuns de dois ou mais números.

Definição do MMC.

Exercícios simples para calcular o MMC entre dois números.

Exercícios simples para calcular o MMC entre dois números.

Sequência de exercícios simples e complementares com MMC.

Exercícios simples para calcular o MMC entre dois números.

Explica o processo de decomposição simultânea em fatores primos, pelo dispositivo prático com exemplo.

Na “Seção +” trabalha questão contextualizada com a utilização do MMC.

Explica o crivo de Erastóstenes, um método para encontrar os números primos criado por um matemático nascido na Grécia (267 a.C.-194 a.C.).

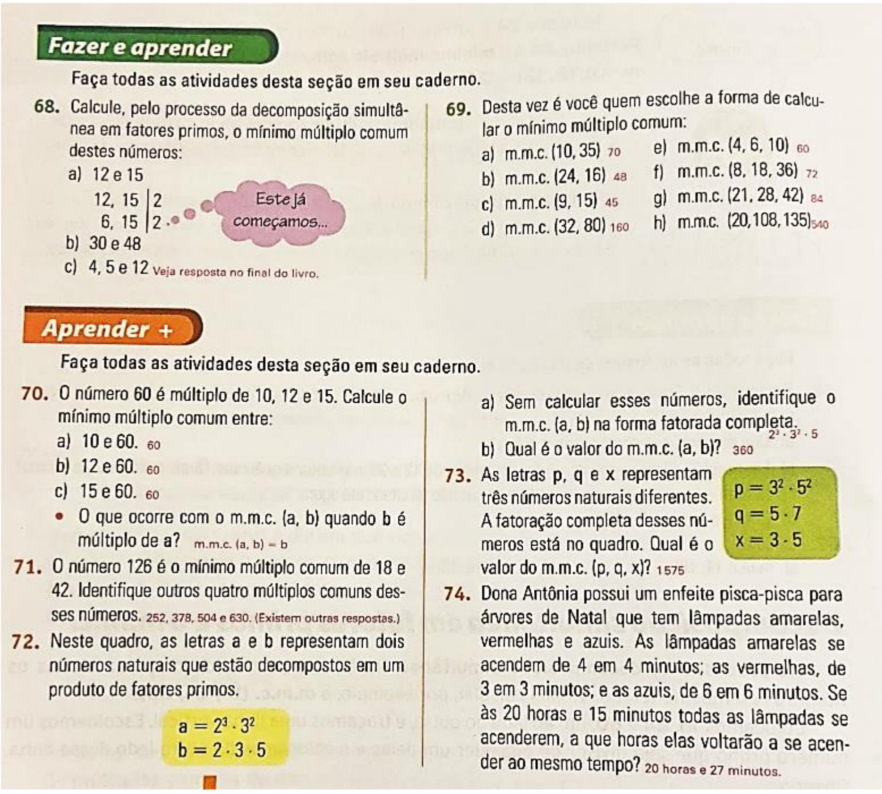
Encerra com uma sequência de exercícios sobre o conteúdo anterior.

O texto do livro de Iracema e Dulce (2012), utilizado no 6º ano do Ensino Fundamental, abordou o assunto de maneira bem resumida, direta e tradicional. As definições foram bem claras, porém com pouquíssimas ilustrações.

O conteúdo de MDC foi abordado em apenas uma página ao final do capítulo 3, utilizando o dispositivo direto para o cálculo, e depois foram propostos três exercícios simples, sem contextualização. As autoras deixam uma nota dizendo que o assunto não é tão utilizado no cotidiano dos estudantes e o professor não precisa dar ênfase ao tema.

No capítulo 4, as autoras começam contextualizando o conteúdo de MMC antes da definição. As questões propostas são em maioria simples e "mecânicas", como mostra a Figura 1. As perguntas são feitas de maneira direta, ou seja, sem nenhuma necessidade da interpretação pelo estudante. Há pouquíssimos exercícios com contextualizações associando o tema ao cotidiano dos estudantes.

Figura 1 – Reprodução do livro didático do 6º ano



Fazer e aprender

Faça todas as atividades desta seção em seu caderno.

68. Calcule, pelo processo da decomposição simultânea em fatores primos, o mínimo múltiplo comum destes números:

a) 12 e 15

12, 15 | 2
6, 15 | 2

Este já começamos...

b) 30 e 48

c) 4, 5 e 12 Veja resposta no final do livro.

69. Desta vez é você quem escolhe a forma de calcular o mínimo múltiplo comum:

a) m.m.c. (10, 35) 70
b) m.m.c. (24, 16) 48
c) m.m.c. (9, 15) 45
d) m.m.c. (32, 80) 160
e) m.m.c. (4, 6, 10) 60
f) m.m.c. (8, 18, 36) 72
g) m.m.c. (21, 28, 42) 84
h) m.m.c. (20,108,135) 540

Aprender +

Faça todas as atividades desta seção em seu caderno.

70. O número 60 é múltiplo de 10, 12 e 15. Calcule o mínimo múltiplo comum entre:

a) 10 e 60. 60
b) 12 e 60. 60
c) 15 e 60. 60

- O que ocorre com o m.m.c. (a, b) quando b é múltiplo de a? m.m.c. (a, b) = b

71. O número 126 é o mínimo múltiplo comum de 18 e 42. Identifique outros quatro múltiplos comuns desses números. 252, 378, 504 e 630. (Existem outras respostas.)

72. Neste quadro, as letras a e b representam dois números naturais que estão decompostos em um produto de fatores primos.

$a = 2^3 \cdot 3^2$
$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$

a) Sem calcular esses números, identifique o m.m.c. (a, b) na forma fatorada completa. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

b) Qual é o valor do m.m.c. (a, b)? 360

73. As letras p, q e x representam três números naturais diferentes. A fatoração completa desses números está no quadro. Qual é o valor do m.m.c. (p, q, x)? 1 575

$p = 3^2 \cdot 5^2$
$q = 5 \cdot 7$
$x = 3 \cdot 5$

74. Dona Antônia possui um enfeite pisca-pisca para árvores de Natal que tem lâmpadas amarelas, vermelhas e azuis. As lâmpadas amarelas se acendem de 4 em 4 minutos; as vermelhas, de 3 em 3 minutos; e as azuis, de 6 em 6 minutos. Se às 20 horas e 15 minutos todas as lâmpadas se acenderem, a que horas elas voltarão a se acender ao mesmo tempo? 20 horas e 27 minutos.

Fonte: Iracema e Dulce (2012)

Com a utilização do livro de Iracema e Dulce (2012), o professor precisará contextualizar os conteúdos dando sentido a eles, melhorando a compreensão e o entendimento dos alunos. A Sedu considera importante a “contextualização” dos conteúdos matemáticos para formar cidadãos críticos. No documento, é citado:

> [...] consideramos importante no ensino de Ciências Naturais os seguintes princípios metodológicos: Contextualização: procurar sempre a interação entre os conhecimentos escolares com a vida pessoal do aluno, com o mundo ou a sociedade em geral e com o próprio processo de produção de conhecimentos. Com esse fim, orientamos que as atividades/tarefas pedagógicas sejam organizadas a partir de projetos, temas geradores, mapas conceituais, problemáticas, eixos temáticos, etc. (ESPÍRITO SANTO, 2018a, p. 94).

O entendimento da Matemática por meio da contextualização pode ser uma estratégia de ensino utilizada pelo professor, vista também nas Orientações Curriculares Nacionais.

> A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83).

O segundo livro analisado foi o do autor Bianchini (2018), volume 2, utilizado no 7º ano do Ensino Fundamental.

A sequência adotada pelo livro no capítulo 2, com o título “Números racionais”, é proposta da seguinte forma.

A seção 5 começa com o exemplo de uma tabela que mostra o número de livros encomendados em três livrarias, em que um carregador precisava colocar o maior número possível de livros em cada pacote, sabendo que cada um deveria ter a mesma quantidade de livros. Encontrou-se os divisores comuns em cada opção e foi pegou o maior número como pedido na questão.

O capítulo inicialmente faz a abordagem sobre os números racionais e a apresentação da reta numérica, comparando os números racionais escritos na forma de fração e de decimal.

Os conteúdos de múltiplos, divisores de um número, os critérios de divisibilidade e números primos, com exemplos e exercícios contextualizados em cada conteúdo, são abordados no livro do 6º ano de Bianchini (2018) e na parte de “saber mais” o autor contextualiza o MDC e MMC, que serão trabalhados no livro do 7º ano.

Retornando ao capítulo 2 do livro do 7° ano.

Sequência de exercícios simples e contextualizados sobre divisores e MDC.

Explicação do cálculo do MDC pela decomposição em fatores primos utilizando o dispositivo prático.

Definição de MMC.

Sequência de exercícios propostos envolvendo MDC.

Sequência de exercícios propostos com questões diretas e outras contextualizadas.

Explica o procedimento do cálculo do MMC pela decomposição em fatores primos, utilizando o dispositivo prático em dois casos: decomposição de cada número separado e depois decomposição simultânea.

Sequência de exercícios propostos sobre o tema anterior.

Os exercícios complementares do final do capítulo trazem alguns exercícios que envolvem situações do cotidiano, como cinema.

Na parte do “diversificando”, sugere o jogo corrida dos números primos e ensina a jogá-lo.

O livro desenvolve o assunto de maneira detalhada, com a preocupação de relacionar o conteúdo com as situações do cotidiano, ou seja, utiliza sempre a contextualização dos conteúdos matemáticos, como mostra a Figura 2. As definições foram bem claras, com passo a passo e ilustrações. O autor incentiva os professores a promoverem discussões e propor diálogos sobre os temas com os alunos, visando valorizar “os conhecimentos e experiências que os estudantes adquiriram fora da escola, além de trazer, para a sala de aula, problemas cotidianos [...]” (SILVA & GARNICA, 2013, p. 72).

Figura 2 – Reprodução do livro didático do 7º ano

Considere a seguinte situação.

Um feirante sempre leva para a feira a mesma quantidade de ovos de galinha para vender. Ele sabe que colocando os ovos em embalagens para 12 ou para 18 ovos, não sobra nem falta ovo. Vamos calcular qual é o menor número de ovos que satisfaz essas condições.

Inicialmente, determinamos os múltiplos de cada um desses números:

- múltiplos de 12: **0**, 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, 108, 120, 132, ...
- múltiplos de 18: **0**, 18, **36**, 54, **72**, 90, 108, 126, ...

Os números que são múltiplos de 12 e também de 18 são chamados de **múltiplos comuns** de 12 e 18. São eles: 0, 36, 72, ...

Dos múltiplos comuns, diferentes de zero, o menor número é o 36. Assim, o menor número de ovos é 36.

O menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferente de zero, é chamado de **mínimo múltiplo comum** e representado pelas iniciais **mmc**.

Na situação apresentada, vimos que o mínimo múltiplo comum de 12 e 18 é 36, que se indica por:

mmc(12, 18) = 36

Fonte: Bianchini (2018)

Ao longo do capítulo, as questões propostas são bem elaboradas e contextualizadas, e o aluno precisa exercitar a interpretação antes de realizar os cálculos. Com isso, é possível melhorar a compreensão e o entendimento dos alunos e contribuir para a formação de cidadãos cada vez mais críticos.

> O Currículo do Espírito Santo reitera seu compromisso em valorizar a aprendizagem e suas diferentes formas de desenvolvimento, de respeitar o estudante em sua singularidade, integralidade e diversidade, de ampliar a leitura de mundo a partir do conhecimento científico trabalhado de modo significativo, de promover a contextualização e a problematização dos saberes, de fortalecer a relação professor-aluno num processo de mediação e diálogo, e de direcionar os esforços para a melhoria da qualidade em educação como um direito fundamental. (ESPÍRITO SANTO, 2018b, p. 20).

A abordagem do conteúdo do MMC e MDC aparece nos livros como uma complementação dos assuntos de divisores e múltiplos de um número natural. Encontramos um capítulo/unidade com esse tema, no qual identificamos a decomposição de um número, os múltiplos e os divisores desse número, a caracterização de números primos e a fatoração. Somente depois são incluídas as noções de MDC e MMC de dois ou mais números.

Passaremos agora a analisar os conteúdos de MDC e MMC de forma mais detalhada e aprofundada em comparação aos livros didáticos analisados, com a finalidade de auxiliar professores em suas propostas pedagógicas. Depois, será apresentada uma proposta didática sobre o conteúdo.

Para entender e aplicar o MMC e o MDC em problemas, é necessário a compreensão prévia dos conceitos de números inteiros e números primos, de acordo com as descrições dos níveis do Saeb.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo serão apresentados definições e resultados importantes para o conhecimento de professores do componente curricular de Matemática, antes de desenvolver a proposta didática com os estudantes que envolvem Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum. Em particular, serão tratados os conceitos relacionados com o Algoritmo de Euclides, Números primos e Teorema Chinês dos Restos por meio de definições, exemplos e demonstrações do livro de Hefez (2016).

2.1 MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

Sejam a, b e d números inteiros, dizemos que d divide a quando existe um número inteiro c, tal que $a = dc$. Quando d divide a, escreve-se $d \mid a$ e se diz que a é um múltiplo de d ou que d é um divisor de a ou que a é divisível por d.

O número d será dito um divisor comum de a e b, se $d \mid a$ e $d \mid b$.

O máximo divisor comum de a e b, será denotado por (a, b) e a definição respectiva a seguir é praticamente a definição dada por Euclides nos *Elementos* (2009).

Definição 2.1.1. Dizemos que um número inteiro $d \geq 0$ é o MDC de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i. d é divisor comum de a e b, e
ii. d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser enunciada também na forma:

ii'. Se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$.

O máximo divisor comum de dois números, se existir, é único. De fato, se d e d' são dois MDC de a e b, então $d \mid d'$ e $d' \mid d$. Sendo d e d' inteiros não negativos, implica que $d=d'$.

Agora, se $d > 0$ é o MDC de a e b, inteiros não nulos, então d é o maior dentre todos os divisores comuns de a e b. De fato, se c é um divisor comum qualquer de a e b, então $|c|$ divide d, daí, $c \leq |c| \leq d$, o que mostra que *d é o maior divisor comum de a e b*.

Lema 2.1.2. Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe e $(a, b) = (a, b - na)$.

Euclides utilizou esse lema para provar a existência do MDC de dois números inteiros.

Demonstração. Seja d = (a, b – na). Pela definição, d | a e d | (b – na), logo segue que, d divide b = (b – na) + na. Portanto, d é um divisor comum de a e b (α). Suponha que c seja um divisor comum qualquer de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e b – na e, portanto, c | d. (β). De (α) e (β), concluímos que d = (a, b). ■

A prova da existência do MDC de dois números inteiros é apresentada na Seção 2.3, uma vez que esta demonstração fornece um algoritmo para o cálculo do MDC, chamado de algoritmo de Euclides. Dessa forma, podemos admitir a existência do MDC de dois números inteiros a e b, não simultaneamente iguais a zero. Para o caso em que a = b = 0, temos o seguinte resultado: “(a, b) = 0 se, e somente se, a = b = 0”. (HEFEZ, 2016). (Observe que (0, 0) = 0, porque todo número inteiro divide zero). Logo, como mencionado previamente, o maior divisor comum de a e b é, de fato, o MDC de a e b, quando (a, b) > 0. No entanto, quando a = b = 0 não existe o maior divisor comum desses números.

Exemplo 1. Determine o MDC de 18 e 45.

Primeiro vamos determinar o conjunto dos divisores positivos de 18 e 45, respectivamente.

$$D\ (18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$D\ (45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Então, ao observarmos os divisores, percebemos que 9 é o maior inteiro positivo que divide os números 18 e 45, ou seja, (18, 45) = 9.

2.2 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

Definição 2.2.1. Diremos que um número inteiro m ≥ 0 é um mínimo múltiplo comum dos números inteiros a e b, se possuir as seguintes propriedades:

i. m é múltiplo comum de a e b, e
ii. se c é um múltiplo comum de a e b, então m | c.

O mínimo múltiplo comum de a e b será denotado por [a, b].

Se existir o MMC de a e b, este será único. De fato, se m e m' são dois mínimos múltiplos comum de a e b, então $m \mid m'$ e $m'|m$. Sendo m e m' não negativos, segue que m = m'.

Agora, se m é o MMC de a e b e c é um múltiplo comum de a e b, então pela definição, $m \mid c$. Portanto, se c é positivo, temos que $m \leq c$, mostrando que *m é o menor dos múltiplos comuns positivos de a e b*.

Uma vez que estamos admitindo a existência de (a, b), é possível mostrar a existência de [a,b] a partir da equação, $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$, quando $(a, b) > 0$. (HEFEZ, 2016). Quando $(a, b) = 0$, então $a = b = 0$ e, neste caso, $[a, b] = [0, 0] = 0$, uma vez que o único múltiplo de zero é zero. Assim, sempre existe o MMC de números inteiros a e b.

Exemplo 2. Determine o MMC de 18 e 45.

Vamos decompor em fatores primos os números dados.

$$18 = 2.3.3$$

$$45 = 3.3.5$$

Então, vemos que o menor múltiplo comum de 18 e 45 é o produto dos fatores em comum 3^2, com os fatores não comuns 2 e 5, que resulta $3^2.2.5=90$, ou seja, $[18, 45] = 90$. Também, a partir do conjunto dos múltiplos positivos de 18 e 45, respectivamente.

$$M(18) = \{18, 36, 54, 72, 90, 108, \ldots\}$$

$$M(45) = \{45, 90, 135, 180, 225, 270, \ldots\}$$

Obtemos o menor múltiplo positivo de ambos os números: 90.

Uma outra forma de calcular o MDC de 18 e 45 é utilizando a relação $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$. Do exemplo 1, $(18, 45) = 9$, logo $[18, 45] = \frac{|18.\ 45|}{9} = 90$.

2.3 ALGORITMO DE EUCLIDES

A seguir, será apresentada a prova construtiva da existência do MDC de dois números naturais, dada por Euclides nos Elementos, a qual pouco se aperfeiçoou em mais de dois milênios (HEFEZ, 2016).

Aqui não será provado que o maior divisor comum de a e b é o MDC de a e b, ou seja, esta prova da existência do MDC de a e b não é feita mostrando que o maior divisor comum de a e b é múltiplo de qualquer divisor comum de a e b.

Sejam a, b $\in \mathbb{N}$, supomos, sem perda de generalidade, que $b \le a$.

Se b = 1 ou b = a, ou ainda $b \mid a$, sabemos então que, (a, b) = b.

Suponhamos então que, $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Pelo Teorema da divisão Euclidiana (HEFEZ, 2016, p. 46), existem inteiros q_1 e r_1 tal que, $a = b.q_1 + r_1$, com $0 < r_1 < b$. Disso, temos dois possíveis resultados:

i) $r_1 \mid b$, que pelo Lema 2.1.2 implica em, $r_1 = (b, r_1) = \left(b, a - q_1.b\right) = (b, a)$ e encerra-se o algoritmo com r_1 sendo o MDC de a e b.

ii) $r_1 \nmid b$, logo é possível efetuarmos a divisão euclidiana de b por r_1, obtendo os inteiros q_2 e r_2, tal que, $b = r_1.q_2 + r_2$, com $0 < r_2 < r_1$. De onde podemos ter novamente dois resultados diferentes:

i') $r_2 \mid r_1$, e, novamente pelo Lema 2.1.2, $r_2 = (r_1, r_2) = \left(r_1, b - q_2.r_1\right) = (r_1, b) = \left(a - q_1.b\,, b\right) = (a, b)$, encerrando-se o algoritmo.

ii') $r_2 \nmid r_1$, logo efetuamos a divisão euclidiana de r_1 por r_2, daí existem inteiros q_3 e r_3, tal que, $r_1 = r_2.q_3 + r_3$, com $0 < r_3 < r_2$.

Continuando com este processo, obtemos uma sequência de números inteiros $\left(r_j\right)$, tal que $r_{j+1} \mid r_j$ e $0 \le r_{j+1} < r_j < b$, para cada j número natural. Além disso, (a, b) = $\left(r_j, r_{j+1}\right)$, para cada j natural. Se ocorresse $r_j > 0$, para todo j natural, então o conjunto $\left\{r_j; j \in N\right\}$ não possuiria menor elemento, o que contradiz o Princípio da Boa Ordem (HEFEZ, 2016, p. 10). Logo, existe um número natural i tal que $r_i > 0$ e $r_{i+1} = 0$. Portanto, $(a, b) = (r_i, r_{i+1}) = (r_i, 0) = r_i$.

O algoritmo pode ser realizado de uma maneira prática se, após efetuarmos a divisão $a = b.q_1 + r_1$, completarmos o diagrama a seguir.

	q_1	
a	b	
r_1		

Em seguida efetuamos a divisão $b = r_1.q_2 + r_2$ e anotamos no diagrama os resultados:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Esse procedimento se repete até encontrarmos (a, b).

	q_1	q_2	...	q_{i-1}	q_i	q_{i+1}
a	b	r_1	...	r_{i-2}	r_{i-1}	$r_i = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	...	r_i	0	

Exemplo 3. Calcule o MDC (845, 490) utilizando o algoritmo de Euclides.

	1	1	2	1	1	1	2	3
845	490	355	135	85	50	35	15	5
355	135	85	50	35	15	5	0	

Observe que os restos das divisões sucessivas podem ser escritos da seguinte maneira,

$$5 = 35 - 2.15$$
$$15 = 50 - 1.35$$
$$35 = 85 - 1.50$$
$$50 = 135 - 1.85$$
$$85 = 355 - 2.135$$
$$135 = 490 - 1.355$$
$$355 = 845 - 1.490$$

Ao substituir o valor dos restos, segue que,

$$5 = 35 - 2.15 = 35 - 2(50 - 1.35) = 3.35 - 2.50 = 3(85 - 1.50) - 2.50$$
$$= 3.85 - 5.50 = 3.85 - 5(135 - 1.85) = 8.85 - 5.135 = 8(355 - 2.135) - 5.135$$
$$= 8.355 - 21.135 = 8.355 - 21(490 - 1.355) = 29.355 - 21.490$$
$$= 29(845 - 1.490) - 21.490 = 29.845 - 50.490$$

Logo, MDC (845, 490) = 5 = (29) 845 + (-50) 490.

Observe que através do uso do Algoritmo de Euclides, de trás para frente, conseguimos escrever o MDC(845, 490) = 29.845 + (- 50).490, como soma de múltiplos dos dois números em questão. Esse processo nos conduz à Relação de Bézout.

Teorema 2.4.1 (Relação de Bézout). Considere a e b inteiros, não simultaneamente iguais a zero. Existem dois números inteiros m e n, de modo que (a, b) = m.a + n.b.

2.4 NÚMEROS PRIMOS

Sobre a origem da palavra primos, Coutinho (2008, p. 19), em seu livro *Criptografia,* afirma que "os gregos classificavam os números em primeiros ou indecomponíveis e secundários ou compostos. Os romanos apenas traduziram literalmente a palavra grega para primeiro, que em latim é primus".

Uma das definições mais usuais para números primos e compostos é a apresentada a seguir: "Um número natural diferente de 0 e de 1, e cujos únicos divisores positivos são 1 e ele mesmo, é chamado de número primo. Um número natural, diferente de 0 e de 1, que não é primo, é chamado de número composto (HEFEZ, 2016, p. 31). Por definição, o número 1 não é primo e nem composto."

O Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como um produto de números primos.

Definição 2.4.1. Um número natural diferente de 0 e de 1 que não é primo, é chamado de número composto.

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n, tal que, $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que, $n = n_1 . n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$.

Exemplo 4. Os números 7, 13 e 29 são primos, mas 85 e 115 não são, pois também são divisíveis por 5, logo são considerados números compostos.

Exemplo 5. Os divisores de um número composto são 1, o próprio número e um ou mais números naturais. Observando os divisores dos números compostos do exemplo anterior, temos que:

a) Os divisores naturais de 85 são 1, 5, 17 e 85;
b) Os divisores naturais de 115 são 1, 5, 23 e 115.

Da definição prévia podemos deduzir que: dados dois números primos p e q e um número inteiro a qualquer, decorrem os seguintes fatos:

- Se $p \mid q$, então $p = q$.

De fato, sendo q primo e $p \mid q$, então $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que, $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

- Se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$, isto é, o MDC de p e a é 1.

De fato, se $d = (p, a)$, então temos que $d \mid p$ e $d \mid a$. Sendo p primo resulta que, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$, consequentemente, $d = 1$.

Lema de Gauss 2.4.2. Sejam a, b e c números inteiros tais que $a \mid bc$ e $(a, b) = 1$. Então, $a \mid c$.

Demonstração. Por hipótese, $a \mid bc$, logo existe um número inteiro k tal que $bc = ak$. Como $(a, b) = 1$, pela Relação de Bézout, existem números inteiros r e s tais que $1 = ra + sb$. Então $c = c \cdot 1 = c(ra + sb) = c(ra) + s(bc) = (cr)a + s(ak) = a(cr + sk)$, ou seja, $c = at$, sendo t igual ao número inteiro $cr + sk$. Assim, $a \mid c$. ■

Proposição 2.4.3. **(Lema de Euclides)** Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração. Por hipótese, p é primo. Suponhamos que $p \nmid b$, logo $(p, b) = 1$. Mas, $p \mid ab$, então $p \mid a$, pelo Lema de Gauss. ■

A próxima proposição tem aplicação prática. Para determinar se um número n é primo, basta testarmos sua divisibilidade apenas pelos números primos menores do que ou iguais a $\sqrt{n}$.

Proposição 2.4.4. Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Se n é composto, então existe um primo p tal que $p \mid n$ e $p \leq \sqrt{n}$.

Demonstração. Por hipótese n é composto, logo existem a, b inteiros positivos tal que, $n = a.b$ com $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a \leq b$. A partir dessa condição temos: $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq ab \Rightarrow a^2 \leq n \Rightarrow a \leq \sqrt{n}$.

Como $a \geq 2$, então, pelo Teorema fundamental da Aritmética, existe um primo p tal que $p \mid a$. Como $a \mid n$, então $p \mid n$, além disso, $p \leq a \leq \sqrt{n}$. ■

Exemplo 6. Determine se 227 é um número primo ou um número composto.

Com a utilização de uma calculadora, o professor encontra $\sqrt{227} \cong 15,06665191733$.

Se p é primo e p ≤ $\sqrt{227}$, então p pode assumir os valores: 2, 3, 5, 7, 11 ou 13. Como 227 não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11 ou 13, então, pela proposição, 2.4.3, o número 227 não pode ser composto, logo, é primo.

2.5 TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS

Entre as histórias que abordam o surgimento do Teorema Chinês dos Restos, a mais comum atribui sua origem à necessidade prática dos generais chineses de contar os integrantes das suas tropas, para saber quantos soldados haviam sido perdidos nas batalhas. Os generais ordenavam que as tropas formassem várias colunas, antes e depois das batalhas, com um determinado tamanho, e depois contavam quantas sobravam. Faziam isso para vários tamanhos diferentes.

A primeira aparição do Teorema Chinês dos Restos foi em um manuscrito, no século III, conhecido como *Sun Zi Suanjing* ou "Manual de aritmética do mestre Sun", com o seguinte problema do resto: "Qual é o número que deixa restos 2, 3 e 2 quando dividido, respectivamente, por 3, 5 e 7?". A resposta dada pelo matemático chinês Sun-Tun para esse problema foi 23.

Para a resolução do problema acima, precisamos procurar as soluções pelo sistema de congruência. Para isso vamos precisar de algumas definições antes de enunciar e provar o Teorema Chinês dos Restos.

Definição de congruência 2.5.1. Seja m um número inteiro maior do que 1. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m, se a e b possuírem o mesmo resto quando divididos por m. Denotamos por: $a \equiv b \bmod m$.

Observe que se $a \equiv b \bmod m$, então pela definição 2.5.1, existem q_1, q_2 e r, inteiros com $0 \leq r < m$, tal que, $a = m.q_1 + r$ e $b = m.q_2 + r$, daí, $a - b = m(q_1 - q_2)$, isto é, $m \mid (a - b)$. Reciprocamente, supor que $m \mid (a - b)$, logo pela divisão euclidiana de a e b por m, existem q_1, q_2, r_1 e r_2 inteiros com $0 \leq r_1, r_2 < m$, tal que, $a = m.q_1 + r_1$ e $b = m.q_2 + r_2$, de onde obtemos que, $a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$. Como m divide $a - b$ e $m(q_1 - q_2)$, então divide $(r_1 - r_2)$. Mas $0 \leq |r_1 - r_2| < m$, logo $r_1 - r_2 = 0$, isto é, $r_1 = r_2$. Do exposto, é apresentada a seguir uma definição de congruência equivalente.

Definição 2.5.2. Se a e b são inteiros, dizemos que a é congruente a b módulo m (m > 1), se m | (a – b). Se m ∤ (a – b) dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos, $a \not\equiv b \bmod m$.

Exemplo 7. Da definição 2.5.2, por exemplo, $17 \equiv 3 \bmod 2$, pois 2 | (17 – 3).

Proposição 2.5.3. Sejam a, b, c, d, m $\in \mathbb{Z}$, com m > 1.

Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a+c \equiv b+d \bmod m$ e $ac \equiv bd \bmod m$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$. Logo temos que, m|b-a e m|d-c, segue-se que, m|(b – a) + (d – c) e, portanto, m|(b + d) – (a + c).

Note também que bd – ac = d(b – a)+ a(d – c), concluindo que m | bd – ac. ■

Corolário 2.5.4. Para todo n $\in \mathbb{N}$; a, b $\in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \bmod m$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \bmod m$.

A prova do Corolário 2.5.4 é imediata, por indução em n $\in \mathbb{N}$.

Lema 2.5.5. Se $ka \equiv kb \bmod m$ e (m, k) = 1, então $a \equiv b \pmod{m}$.

Demonstração. Como m | k (a – b) e (m, k) = 1, então, pelo Lema de Gauss, segue que, m | a – b. ■

Teorema 2.5.6. (Pequeno Teorema de Fermat). Se p é um número primo e a $\in \mathbb{Z}$, então $a^p \equiv a \bmod p$. Além disso, se p ∤ a, então $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Demonstração. Primeiramente, $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Logo existem duas possibilidades, p | a ou p ∤ a.

Se p | a, então p | $a^p - a$, logo $a^p \equiv a \bmod p$.

Se p ∤ a, então (a, p)= 1, pois p é primo. Considere o conjunto de inteiros B = {a, 2a, 3a, …, (p – 1)a}. Pelo Lema de Gauss, nenhum deles é divisível por p e, pelo Lema 2.5.5, quaisquer dois deles são incongruentes módulo p, assim, o conjunto dos restos dos elementos de B coincide com o conjunto dos restos não nulos na divisão por p, a saber, {1, 2, 3, … , p – 1}. Portanto,

$$a \cdot 2a \cdot 3a \ldots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (p-1) \bmod m,$$

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \bmod m.$$

Pelo Lema 2.5.5, podemos cancelar o termo $(p-1)!$ em ambos os lados pois $\big((p-1)!\,,\,p\big)=1$, concluindo assim a demonstração do teorema. ■

Exemplo 8. Vamos achar o resto da divisão de 237^{28} por 13.

Observe que $237 \equiv 3 \bmod 13$. Sendo 13 um número primo, segue pelo Pequeno Teorema de Fermat, que $237^{12} \equiv 1 \bmod 13$. Logo:

$237^{24} = \left(237^{12}\right)^2 \equiv 1 \bmod 13$ (1)

E que: $237^{4} \equiv 3^{4} \equiv 81 \equiv 3 \bmod 13$ (2)

De (1) e (2), temos que $237^{28} \equiv 3 \bmod 13$. Portanto, o resto da divisão é 3.

Teorema 2.5.7. Teorema Chinês dos Restos. Se $(m_i, m_j) = 1$, para todo m_i, m_j com $i \neq j$, então o sistema $X \equiv c_i \bmod m_i$, $i = 1, \ldots, r$ (1), possui única solução módulo $M = m_1 m_2 \ldots m_r$. As soluções são $x = M_1 y_1 c_1 + \ldots + M_r y_r c_r + tM$, onde $t \in \mathbb{Z}$, $M_i = \frac{M}{m_i}$ e y_i é solução de $M_i Y \equiv 1 \bmod m_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que x é uma solução simultânea do sistema $X \equiv c_i \bmod m_i$, para $i = 1,\ldots,r$ (1). De fato, como $m_i \mid M_j$, se $i \neq j$, e $M_i y_i \equiv 1 \bmod m_i$, segue-se que:

$$x = M_1 y_1 c_1 + \ldots + M_r y_r c_r \equiv M_i y_i c_i \equiv c_i \bmod m_i$$

Agora provaremos que x é solução única. Seja x' outra solução do sistema (1), então, $x \equiv x' \bmod m_i$, $\forall i$, $i = 1,\ldots,r$. Como $(m_i, m_j) = 1$, para $i \neq j$, segue-se que $[m_1,\ldots,m_r] = m_1 \ldots m_r = M$ e consequentemente temos que, $x \equiv x' \bmod M$, por causa da preposição que afirma que, $a \equiv b \bmod m_i$, $\forall\, i = 1,\ldots,r$, se, e somente se, $a \equiv b \bmod [m_1, \ldots, m_r]$.(HEFEZ, 2016, p. 171). ■

Exemplo 9. Ache todos os números inteiros que deixam restos 2, 3 e 4 quando divididos por 3, 4 e 5, respectivamente.

A partir dos dados do problema, temos o seguinte sistema de congruência:

$$x \equiv 2 \bmod 3$$
$$x \equiv 3 \bmod 4$$
$$x \equiv 4 \bmod 5$$

Além disso (3,4) = (3,5) = (4,5) = 1. Logo pelo Teorema Chinês dos Restos temos que, $M = 3.4.5 = 60$ e $M_1 = 4.5 = 20$, $M_2 = 3.5 = 15$, $M_3 = 3.4 = 12$.

Substituindo nas congruências:

$$M_1Y_1 \equiv 1 \bmod 3$$
$$M_2Y_2 \equiv 1 \bmod 4$$
$$M_3Y_3 \equiv 1 \bmod 5$$

temos que:

$$20Y_1 \equiv 1 \bmod 3$$
$$15Y_2 \equiv 1 \bmod 4$$
$$12Y_3 \equiv 1 \bmod 5$$

Então, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ e $y_3 = 3$, são soluções do sistema. Pelo teorema 2.5.7, a única solução módulo M = 60 é dada por:

$$X = M_1y_12 + M_2y_23 + M_3y_34 = 359 \equiv 59 \bmod 60.$$

Portanto, 59 é uma solução única módulo 60 e qualquer outra solução é da forma $x = 59 + 60\,t$, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$.

Para este exemplo, também podemos encontrar uma solução do sistema de congruências ao somar uma unidade ao sistema inicial:

$$x + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \bmod 3$$
$$x + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 0 \bmod 4$$
$$x + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0 \bmod 5$$

Como 3,4 e 5 são primos entre si, dois a dois, e dividem $x + 1$, isso acarreta que $60 = [3,4,5]$ divide $x + 1$, isto é, $x + 1 = 60\,t$, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$. Sendo $x = 59$ o menor inteiro positivo satisfazendo o sistema, quando t=1.

Exemplo 10. Ache o menor número natural que deixa restos 1, 3 e 5 quando dividido por 5, 7 e 9, respectivamente.

Solução. Precisamos encontrar o menor natural que:

dividido por 5 deixa resto 1;

dividido por 7 deixa resto 3;

dividido por 9 deixa resto 5.

O enunciado acima é interpretado no sistema:

$$x \equiv 1 \bmod 5$$
$$x \equiv 3 \bmod 7$$

$$x \equiv 5 \bmod 9$$

Utilizando o Teorema Chinês dos Restos: como (5,7) = (5,9)= (7,9)= 1, temos que M = 5.7.9 = 315, M_1 = 7.9 = 63, M_2 = 5.9 = 45 e M_3= 5.7 = 35.

Substituindo nas congruências:

$$M_1Y_1 \equiv 1 \bmod 5$$
$$M_2Y_2 \equiv 1 \bmod 7$$
$$M_3Y_3 \equiv 1 \bmod 9$$

Temos que:

$$63Y_1 \equiv 1 \bmod 5$$
$$45Y_2 \equiv 1 \bmod 7$$
$$35Y_3 \equiv 1 \bmod 9$$

E resolvendo obtemos, y_1 = 2, y_2 = 5 e y_3= 8. Logo, a única solução módulo M = 315 é dada por:

$$X = M_1y_11 + M_2y_23 + M_3y_35 = 2201 \equiv 311 \bmod 315.$$

Portanto, o menor natural é o 311.

De forma análoga ao exemplo anterior, podemos encontrar uma solução do sistema de congruências ao somar 4 unidades ao sistema inicial, obtendo:

$$x + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \bmod 5$$
$$x + 4 \equiv 3 + 4 \equiv 0 \bmod 7$$
$$x + 4 \equiv 5 + 4 \equiv 0 \bmod 9$$

Como 5,7 e 9 são primos entre si, dois a dois, e dividem x +4, isso acarreta que 315 = [5,7,9] divide x +4, isto é, x +4= 315 t, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$. Sendo x = 311 o menor inteiro positivo satisfazendo o sistema, quando t=1.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo apresentamos a proposta de exercícios abordando os conteúdos de Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Algoritmo de Euclides e Teorema Chinês do Resto elaborada para o desenvolvimento de atividades em sala de aula. Consideramos a Lista 1 como avaliação diagnóstica da sequência didática cujo objetivo foi avaliar conhecimentos prévios de 65 estudantes da 1ª série do Ensino Médio sobre os assuntos em questão. Esta lista é aplicada em uma aula. Já a Lista 2 tem como objetivo mostrar os conhecimentos adquiridos após a explicação em sala de aula dos conteúdos abordados na Lista 1, também foi prevista a aplicação da Lista 2 em uma aula, para os mesmos 65 alunos.

Visando uma melhor avaliação diagnóstica e final da sequência proposta, as questões das Listas foram analisadas previamente de forma individual neste capítulo, pois cada uma representa uma situação diferente de abordagem dos conteúdos. No próximo capítulo, serão apresentados os resultados obtidos na aplicação das atividades.

3.1 RESOLUÇÃO DA LISTA 1

A aplicação da primeira lista de exercícios foi planejada e executada com o intuito de averiguar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conteúdos de máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e suas aplicações. Com os resultados obtidos, o professor terá base para montar suas aulas de explicação dos conteúdos.

1. Determine o MDC e MMC, dos pares de números abaixo, usando a decomposição desses números em fatores primos.

Resolução.

a) 18 e 92.

$$
\begin{array}{r|l}
18,\ 92 & 2 \\
9,\ 46 & 2 \\
9,\ 23 & 3 \\
3,\ 23 & 3 \\
1,\ 23 & 23 \\
\hline
1,\ \ 1 & 2^2.3^2.\ 23 = 828
\end{array}
$$

Resposta: MMC(18, 92) = 828 e MDC(18, 92) = 2.

b) 20, 90, 150.

$$\begin{array}{r|l}
20,\ 90,150 & 2 \\
10,\ 45,\ 75 & 2 \\
5,\ 45,\ 75 & 3 \\
5,\ 15,\ 25 & 3 \\
5,\ \ 5,\ 25 & 5 \\
1,\ \ 1,\ \ 5 & 5 \\
1,\ \ 1,\ \ 1 & \\
\cline{2-2}
 & 2^2.3^2.\ 5^2 = 900
\end{array}$$

Resposta: MMC (20, 90, 150) = 900 e MDC (20, 90, 150) = 10.

c) 7325 e 8485.

$$\begin{array}{r|l}
7325,\ 8485 & 5 \\
1465,\ 1697 & 5 \\
293,\ 1697 & 293 \\
1,\ 1697 & 1697 \\
1,\ \ \ \ 1 & \\
\cline{2-2}
 & 5^2.\ 293\ .\ 1697 = 12\ 430\ 525
\end{array}$$

Resposta: MMC (7325, 8485) = 12 430 525 e MDC (7325, 8485) = 5.

O objetivo dessa questão é reconhecer o conceito de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de números naturais, além de utilizar a decomposição em fatores primos pelo dispositivo prático, tradicionalmente utilizado, no Ensino Fundamental.

2. (IBGE-2009) Um comerciante pretende acomodar 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho em caixotes que deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes. O menor número de caixotes que ele poderá usar é:

a) 7.

b) 10.

c) 17.

d) 30.

e) 60.

Resolução.

Temos 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho. Considerando que os caixotes deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes, então devemos determinar o maior divisor comum de 600 e 420 para utilizarmos o menor número de caixotes. Calculando o MDC (420,600) temos:

$$\begin{array}{r|l} 420,\ 600 & 2 \\ 210,\ 300 & 2 \\ 105,\ 150 & 2 \\ 105,\ \ 75 & 3 \\ 35,\ \ 25 & 5 \\ 7,\ \ \ 5 & 5 \\ 7,\ \ \ 1 & 7 \\ \hline 1,\ \ \ 1 & 2^2.3.5 = 60 = \text{MDC}(420,\ 600) \end{array}$$

Então, o número de latas por caixa será 60:

600 / 60 = 10 caixas para acomodar as latas de óleo de soja.

420 / 60 = 7 caixas para as latas de óleo de milho.

Resposta: 10 + 7 = 17 caixas ao total para acomodar, tanto as latas de óleo de soja, como as de óleo de milho.

O objetivo dessa questão é a contextualização do conceito de máximo divisor comum. O aluno precisa interpretar, diferenciar o MMC do MDC e depois calcular o MDC de dois números.

3. (FGV-2016) O resto da divisão do número 6^{2015} por 10 é igual a:

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 9.

Resolução.

Observe que pelo Teorema 2.53 obtemos:

$6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^2.6 \equiv 6.6 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6^3 \equiv 6 \pmod{10}$

Também pelo Corolário 2.54 : $6^4 = (6^2)^2 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}$

Por fim: $6^5 = 6^4.6 \equiv 6.6 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}$. Portanto concluímos que, $6^n \equiv 6 \pmod{10}$, para $1 \leq n \leq 5$. Logo:

$$6^{25} = (6^5)^5 \equiv 6^5 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^{100} = (6^{25})^4 \equiv 6^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^{400} = (6^{100})^4 \equiv 6^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^{403} = 6^{400}.\,6^3 \equiv 6.6^3 \equiv 6^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^{2015} = (6^{403})^5 \equiv 6^5 \equiv 6 \pmod{10}$$

Isto é, $6^{2015} \equiv 6 \pmod{10}$.

Resposta: o resto da divisão de 6^{2015} por 10 é igual a 6.

O objetivo dessa questão é encontrar o resto de uma divisão, utilizando para isso as propriedades de congruência.

4. (Cesgranrio-2021) Um casal está muito apaixonado, mas devido à distância de suas casas e ao regime de trabalho dos dois, eles não conseguem se encontrar com a frequência de que gostariam. A moça só tem folga aos sábados, e o rapaz trabalha três dias seguidos, folgando no quarto dia. Se hoje é terça-feira e é dia de folga do rapaz, quantas folgas dele cairão no sábado nos próximos 365 dias?

Resolução.

Vamos considerar que D_0 é a terça-feira na qual o rapaz folga, e os dias de D_1 até D_{365} são os próximos 365 dias. Sendo assim,

D_0 - Terça-feira na qual o rapaz folga.

D_1, D_2, D_3 - Quarta, quinta e sexta são os dias que o rapaz trabalha.

D_4 - Sábado com folga do rapaz.

O rapaz folga a cada 4 dias, e os sábados ocorrem a cada 7 dias, então o MMC de 4 e 7 representa o intervalo de tempo para que a folga do rapaz coincida com um sábado.

MMC (4,7) = 28, ou seja, a cada 28 dias o rapaz folga exatamente num sábado.

D_4 - Sábado de folga do rapaz

$D_4 + 28 = D_{32}$ - Sábado de folga do rapaz.

D_{60} - Novamente sábado de folga do rapaz.

E continuaremos assim até encontrarmos o último sábado que seja menor que D_{365}.

Então temos uma Progressão Aritmética (PA) com $a_1 = 4$ e razão $r = 28$.

(PA) = (4, 32, 60, …) onde o último elemento deve ser menor ou igual a 365.

Encontrando o enésimo termo dessa progressão aritmética cujo valor é menor ou igual a 365.

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$a_n = 4 + (n-1) . 28$$

Queremos $a_n \leq 365$

$$4 + (n-1) . 28 \leq 365$$

$$28n - 28 \leq 361$$

$$28n \leq 389$$

$$n \leq 389 / 28$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, da divisão $\frac{389}{28} \cong 13{,}89$, deduzimos o maior valor de $n = 13$, satisfazendo a desigualdade. Ou seja, o 13° sábado será o último.

Resposta: Temos um total de 13 sábados nos quais o rapaz também tira sua folga.

O objetivo dessa questão é a contextualização do conceito de mínimo múltiplo comum. O aluno precisa interpretar, diferenciar o MMC do MDC, observar que a sequência forma uma progressão aritmética e depois realizar cálculos.

5. (OBMEP) Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

Resolução.

Entre 1 e 2012 existem muitos números múltiplos de 6.

Eles formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 6 e último termo é 2010. Logo basta saber quantos termos tem esta PA cuja razão é 12.

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$2010 = 6 + (n - 1).6$$

$$2010 = 6 + 6n - 6$$

$$2010 = 6n$$

$$n = 335$$

Da mesma forma, entre 1 e 2012 existem muitos múltiplos de 15. Eles formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 15 e o último é 2010. Então,

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$2010 = 15+(n - 1).15$$

$$2010 = 15 + 15n - 15$$

$$2010 = 15n$$

$$n = 134$$

Temos então 335 + 134 números que são múltiplos de 6 ou de 15. Porém, existem alguns deles que são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo, que foram contados duas vezes.

Dado que [6,15] = 30, vamos ver quantos são esses múltiplos comuns para retirar do total. Eles formam uma PA cujo primeiro termo é 30 e o último é 2010, logo:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$2010 = 30+(n - 1).30$$

$$2010 = 30 + 30n - 30$$

$$2010 = 30n$$

$$n = 67$$

Resposta: 335 + 134 – 67 = 402 números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15.

O objetivo dessa questão é aplicar o conceito de múltiplo de um número, observar que a sequência forma uma progressão aritmética e que existem números que são múltiplos de 6 e de 15 ao mesmo tempo e estavam sendo contados duas vezes.

6. (OBMEP) Num cesto havia entre 50 e 60 ovos que, contados de 3 em 3, sobravam 2 e contados de 5 em 5 sobravam 4. Qual era o número de ovos?

Resolução.

Seja N a quantidade de ovos.

Se N dividido por 3 deixa resto 2, então N + 1 é múltiplo de 3. Da mesma forma, temos que N + 1 é múltiplo de 5. O primeiro múltiplo comum entre 3 e 5 é 15. Então, todos os múltiplos de 15 serão múltiplos comuns de 3 e 5 e, para o intervalo de 50 a 60, o único múltiplo de 15 é 60, que é o N + 1.

Resposta: O número de ovos no cesto era 59.

O objetivo dessa questão é montar e estruturar os critérios de divisibilidade dos números em questões do cotidiano.

7. (OBMEP) O MMC entre A e 78 é 156. Quantos são os possíveis valores de A?

Resolução.

O mínimo múltiplo comum de A e 78 é 156, isto é [A,78] = 156. Fatorando os números 78 e 156, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \\ \hline & 2^2.\ 3.13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \\ \hline & 2.\ 3.13 \end{array}$$

Como o termo « 2^2 » não aparece como fator de 78, então deve ser fator de A, daí temos as seguintes respostas:

$$A = 2^2 = 4$$

$$A = 3.2^2 = 12$$

$$A = 13.\ 2^2 = 52$$

Resposta: Os valores possíveis de A são 4, 12 e 52.

O objetivo dessa questão é aplicar o conceito de mínimo múltiplo comum na resolução de problemas.

8. (PROFMAT) Resolva a e equação:

$$90\ X + 28\ Y = 22$$

Resolução.

A equação tem solução inteira se (90,28) | 22. Dividindo ambos os membros da equação por 2 = (90,28) obtemos a equação equivalente 45X + 14Y = 11.

Encontrando primeiramente uma solução particular x_0,y_0 da equação 45X + 14Y = 11 pelo Algoritmo de Euclides, temos:

$$45 = 14.3 + 3$$

$$14 = 4.3 + 2$$

$$3 = 2.1 + 1$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos:

$$1 = 45.5 - 14.16$$

Portanto,

$$11 = 45.55 + 14.(-176)$$

Resposta: Logo, $x_0 = 55$ e $y_0 = -176$ é solução particular da equação e, consequentemente, as soluções são da forma:

$$x = 55 + 14t, \quad y = -176 - 45t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

O objetivo dessa questão é encontrar todas as soluções da equação utilizando o Algoritmo de Euclides.

9. (PROFMAT) Ache o menor número natural que deixa restos 1, 3 e 5 quando dividido por 5, 7 e 9, respectivamente.

Resolução.

Seja N um número que dividido por 5, 7 e 9, deixa resto 1, 3 e 5, respectivamente. Temos então:

$$N = 5k + 1$$

$$N = 7m + 3$$

$$N = 9n + 5$$

Onde k, m e n são números naturais. Observe que se somarmos 4 a cada equação, chegamos a um número que é múltiplo de 5, 7 e 9, melhorando o sistema,

$$N + 4 = 5k + 5$$

$$N + 4 = 7m + 7$$

$$N + 4 = 9n + 9$$

Temos então que N + 4 é múltiplo de 5, 7 e 9, e o menor desses múltiplos em comum é o MMC (5, 7, 9) = 315, isto é, N + 4 = MMC (5, 7, 9), logo:

N = MMC (5,7,9) - 4 = 315 - 4 = 311.

Resposta: N = 311 é o menor número natural procurado.

O objetivo dessa questão é aplicar o conceito de divisibilidade e mínimo múltiplo comum na resolução de problemas.

10. (PROFMAT) Dispomos de uma quantia de x reais menor do que 3000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra R$ 1,00; se a distribuirmos entre 12 pessoas, sobram R$ 2,00 e se a distribuirmos entre 13 pessoas, sobram R$ 3,00. De quantos reais dispomos?

Resolução.

Pode ser útil utilizar o seguinte fato: c é solução da congruência $ay \equiv b \bmod m$ se, e somente se c é solução da congruência $ry \equiv b \bmod m$ (*), onde r é o resto da divisão de a por m.

O número x de reais é uma solução do seguinte sistema de congruências:

$$X \equiv 1 \bmod 11$$

$$X \equiv 2 \bmod 12$$

$$X \equiv 3 \bmod 13$$

Com as notações do Teorema Chinês dos Restos, temos:

$$N = 11.12.13 = 1716$$

$$N_1 = 12.13 = 156$$

$$N_2 = 11.13 = 143$$

$$N_3 = 11.12 = 132$$

Precisamos determinar uma solução do sistema:

$$N_1Y_1 \equiv 1 \bmod 11$$

$$N_2Y_2 \equiv 1 \bmod 12$$

$$N_3Y_3 \equiv 1 \bmod 13$$

Utilizando o resultado (*), então podemos resolver o sistema:

$$2Y_1 \equiv 1 \bmod 11$$

$$11Y_2 \equiv 1 \bmod 12$$

$$2Y_3 \equiv 1 \bmod 13$$

Que possui a solução $(y_1, y_2, y_3) = (6,11,7)$ (achada por inspeção). Assim, as soluções do sistema de congruências são da forma:

$$x \equiv N_1y_1c_1 + N_2\, y_2c_2 + N_3\, y_3c_3$$

$$\equiv 156.\ 6.1 + 143.11.\ 2 + 132.\ 7.\ 3$$

$$\equiv 6854 \bmod 1716$$

A menor solução é dada pelo resto da divisão de 6854 por 1716, que é 1706. A próxima solução é 1706 + 1716 = 3422, que ultrapassa 3000.

Resposta: A solução procurada é 1706.

Outra resolução. Usando-se números negativos pode-se perceber, por inspeção, que −10 é solução do sistema de congruências. Então basta somar N = 1716 para se obter a primeira solução positiva (igual a 1706) e a seguinte, que ultrapassa 3000.

O objetivo dessa questão é aplicar o conceito de congruência e aplicar o Teorema Chinês dos Restos na resolução de problemas do cotidiano.

3.1 RESOLUÇÃO DA LISTA 2

A Lista 2 tem como foco os mesmos objetivos propostos nas questões da Lista 1, entre eles reconhecer o conceito de máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum de números naturais, critérios de divisibilidade, decomposição em fatores primos pelo dispositivo prático, progressão aritmética, aplicar o Pequeno Teorema de Fermat, o Algoritmo de Euclides, o Teorema Chinês dos Restos e a contextualização dos conteúdos abordados.

1. Determine o MDC e MMC, dos pares de números a seguir, usando a decomposição desses números em fatores primos.

Resolução.

a) 56 e 68

56, 68	2
28, 34	2
14, 17	2
7, 17	7
1, 17	17
1, 1	
	$2^3.7.17 = 952$

Resposta: MDC (56,68) = 4 e MMC (56,68) = 952.

b) 35, 115, 190

35, 115, 190	2
35, 115, 95	5
7, 23, 19	7
1, 23, 19	19
1, 23, 1	23
1, 1, 1	
	2.5.7.19.23 = 30 590

Resposta: MDC (35,115,190) = 5 e MMC (35,115,190) = 30 590.

c) 648 e 1218.

$$
\begin{array}{rr|l}
648, & 1218 & 2 \\
324, & 609 & 2 \\
162, & 609 & 2 \\
81, & 609 & 3 \\
27, & 203 & 3 \\
9, & 203 & 3 \\
3, & 203 & 3 \\
1, & 203 & 7 \\
1, & 29 & 29 \\
1, & 1 & \\
\hline
 & & 2^3.3^4.7.29 = 131\ 544
\end{array}
$$

Resposta: MDC (648, 1218) = 6 e MMC (648, 1218) = 131 544.

2. (IFAL-2018) Para equipar uma repartição pública, 216 computadores e 168 impressoras serão distribuídos por várias salas. A distribuição será feita de tal modo que o maior número de salas, sejam contempladas e que todas recebam a mesma quantidade de computadores e a mesma quantidade de impressoras, sem sobra de nenhum desses equipamentos. O número de impressoras que cada sala receberá é:

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

Resolução.

Seja n o número de salas que receberam a mesma quantidade de computadores e a mesma quantidade de impressoras, então $n|216$ e $n|168$. Para equipar o maior número de salas, devemos determinar o maior valor de n, isto é, o máximo divisor comum de 216 e 168. Decompondo esses números em fatores primos:

$$216 = 2.2.2.3.3.3$$

$$168 = 2.2.2.3.7$$

Os fatores comuns de 168 e 216 são 2^3 e 3, cujo produto resulta 24 = (216,168). Agora cada sala receberá $\frac{216}{24} = 9$ computadores e $\frac{168}{24} = 7$ impressoras.

Quanto maior o valor desse número (n), menor será o número de computadores e impressoras e mais salas poderão ser atendidas.

Resposta: O número de impressoras que cada sala receberá será 7.

3. (OBMEP) Determine o resto da divisão de 2^{257} por 7.

Resolução.

Sendo 7 um número primo e (2,7) = 1, então podemos usar o Pequeno Teorema de Fermat para deduzirmos que, $2^6 \equiv 1 \pmod 7$. Agora, pela divisão euclidiana 257 = 6.42+5, logo:

$$2^{257} = 2^{6.42+5} = \left(2^6\right)^{42} . 2^5 \equiv 1^{42} . 2^5 \pmod 7 \equiv 2^5 \pmod 7 \equiv 32 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$$

Resposta: O resto da divisão de 2^{257} por 7 é igual a 4.

4. (OBMEP) Ana, Berta e Catarina são médicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

Resolução.

Elas darão plantão novamente juntas após n dias, onde n é múltiplo comum de 6, 8 e 10. Em particular, o próximo plantão será após n_0 dias, a partir de hoje, sendo n_0 o menor desses múltiplos em comum.

Calculando o MMC de 6,8 e 10.

$$\begin{array}{r|l} 6,\ 8,\ 10 & 2 \\ 3,\ 4,\ 5 & 2 \\ 3,\ 2,\ 5 & 2 \\ 3,\ 1,\ 5 & 3 \\ 1,\ 1,\ 5 & 5 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 2^3.3.5 = 120 \end{array}$$

Resposta: Em 120 dias elas darão plantão juntas novamente.

5. (OBMEP) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

Resolução.

Considerando o conjunto cujos elementos são múltiplos de 3 maiores do que um, temos, M (3) = {3,6, 9, 12, 15, …}. Esses elementos formam uma PA, onde o primeiro, o enésimo e a razão da PA, são respectivamente:

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 2004$$

$$r = 3$$

Portanto, substituindo em $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$2004 = 3 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 668$$

Resposta: São 668 números inteiros.

6. Numa caixa de ferramentas havia entre 70 e 80 parafusos que, contados de 3 em 3, sobraram 2; e contados de 4 em 4 sobrou 1. Qual era o número de parafusos?

$$70 < x < 80$$

Resolução.

Seja N a quantidade de parafusos.

Se N dividido por 3 deixa resto 2, então N + 1 é múltiplo de 3. Se N dividido por 4, deixa resto 1, então N - 1 é múltiplo de 4.

Analisando os múltiplos de 4 no intervalo de 70 e 80, estes são: 72, 76 e 80. Desconsideramos o múltiplo 80 = N −1, pois N = 81 não está no intervalo requerido, logo as possibilidades para N são 73 e 77.

Como N + 1 é múltiplo de 3 e entre 70 e 80 temos os múltiplos de 3 sendo: 72, 75 e 78, logo, as possibilidades para N são 71, 74 e 77.

Portanto, N é igual a 77, pois 78 é múltiplo de 3 e 76 é múltiplo de 4.

Resposta: A quantidade de 77 parafusos havia na caixa.

7. O MMC entre A e 48 é 144. Quantos são os possíveis valores de A?

Resolução.

O mínimo múltiplo comum [A, 48] = 144. Fatorando o 48 e o 144, temos:

$$48 = 2^4.3$$

$$144 = 2^4 .3^2$$

Como o termo « 3^2 » é fator de 144, mas não do número 48, então ele será fator de A, daí temos as seguintes possibilidades:

$$A = 3^2 = 9$$

$$A = 2.3^2 = 18$$

$$A = 2^2.3^2 = 36$$

$$A = 2^3.\ 3^2 = 72$$

$$A = 2^4 . 3^2 = 144$$

Resposta: Os valores possíveis de A são 9, 18, 36, 72 e 144.

8. (PROFMAT) Resolva a equação:

$$24 X + 14 Y = 18$$

Resolução.

A equação tem solução inteira, se (24,14) |18. Dividindo ambos os membros da equação por 2 = (24,14), obtemos a equação equivalente 12X + 7Y = 9.

Encontrando uma solução particular x_0, y_0 da equação 12X + 7Y = 9, pelo Algoritmo de Euclides, temos:

$$12 = 7.1+5$$

$$7 = 5.1+2$$

$$5 = 2.2+1$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos:

$$1 = 12.3 - 7.5$$

Portanto, multiplicando por 9:

$$9 = 12.27 + 7.(-45)$$

Logo, $x_0 = 27$ e $y_0 = -45$ é solução particular da equação.

Resposta: A solução geral da equação é dada por:

$$x = 27 + 7t, \quad y = -45 - 12t \;;\; t \in \mathbb{Z}$$

9. (PROFMAT) Determine o menor número que dividido por 8, 18 e 20 deixa restos 1, 11 e 13, respectivamente.

Resolução.

Seja N um número que dividido por 8, 18 e 20 deixa resto 1, 11 e 13, respectivamente. Temos então:

$$N = 8k + 1$$

$$N = 18m + 11$$

$$N = 20n + 13$$

Onde, k, m e n são números naturais, quocientes das divisões respectivas. Observe que ao somar 7 em cada equação, obtemos que N+7 é múltiplo de 8, 18 e 20, respectivamente, assim melhorando o sistema,

$$N+7 = 8k + 8 = 8(k+1)$$

$$N+7 = 18m + 18 = 18(m+1)$$

$$N +7 = 20n + 20 = 20(n+1)$$

Logo, o menor valor de N+7 será o menor dos múltiplos de 8, 18 e 20, isto é, o MMC (8, 18, 20) = 360.

$$\text{MMC } (8,18,20) - 7 = 360 - 7 = 353$$

Resposta: Temos N = 353 como o menor número satisfazendo as condições do problema.

10. (PROFMAT) Um grupo de 30 pessoas formado por homens, mulheres e crianças, ganhou numa lotérica um prêmio de R$ 30.000,00, que é dividido entre elas da seguinte forma: cada homem recebe R$ 2.000,00, cada mulher recebe R$ 500,00, e cada criança recebe R$ 100,00. Qual é a quantidade de homens, mulheres e crianças no grupo?

Resolução.

Sejam X o número de homens, Y o número de mulheres e Z o número de crianças, então temos:

$X + Y + Z = 30 \quad (1)$

Do enunciado: $2000X + 500Y + 100Z = 30000$, que pode ser simplificado à equação:

$20X + 5Y + Z = 300 \quad (2)$

De (2) – (1), temos:

$19X + 4Y = 270 \quad (3)$

Então, pela divisão euclidiana entre 19 e 4 e a representação do MDC (19,4) =1, obtemos: $19(-1) + 4(5) = 1$, que ao multiplicar por 270: $19(-270) + 4(1350) = 270$, e pela divisão euclidiana de 1350 por 19, no intuito de determinar uma solução positiva da equação:

$19(-270) + 4(19.71+1) = 270$

$19(71.4 - 270) + 4(1) = 270$

$19(14) + 4(1) = 270$

Logo uma solução particular da equação (3) é $x_0=14$ e $y_0=1$, daí a solução geral da equação é da forma:

$$x =14 + 4t$$

$$y = 1 - 19t$$

$$z = 30 - x - y = 15 + 15t$$

Com $t \in \mathbb{Z}$.

Como x, y e z são números naturais, então, $1 \leq x, y, z \leq 30$, logo:

$1 \leq y \leq 30 \Rightarrow 1 \leq 1\text{-}19t \leq 30 \Rightarrow 0 \leq -19t \leq 30 \Rightarrow 0 \geq 19t \geq -30 \Rightarrow 0 \geq t \geq -\frac{30}{19}$

Portanto, a única possibilidade de o problema estar satisfeito ocorre quando $t = 0$, logo $x = 14$, $y = 1$ e $z = 15$. (Quando $t = -1$ temos, $z = 0$).

Resposta: Temos 14 homens, 1 mulher e 15 crianças.

CAPÍTULO 4

Neste capítulo veremos os resultados obtidos na execução da proposta didática compreendendo, primeiramente, a aplicação da Lista 1 (avaliação diagnóstica), cujas questões abordam conteúdos de MDC, o MMC, congruências e o Teorema Chinês dos Restos. A partir dos resultados dessa primeira avaliação, foram planejadas aulas visando reforçar temas em que os alunos têm maior dificuldade de aprendizagem e ainda apresentar novos tópicos relacionados ao Teorema da Divisão Euclidiana que não estão previstos no currículo do Ensino Básico. Além de consolidar o aprendizado desses conteúdos, a revisão tem o propósito de facilitar a compreensão de outros conteúdos curriculares que se utilizam desses conceitos e que são introduzidos ou ainda trabalhados no Ensino Médio como frações, equações, geometria, progressões e outros.

Com as aulas explicativas busca-se consolidar habilidades relativas a objetos de conhecimento, cuja abordagem é prevista no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, conforme a BNCC (2017).

Tabela 1 – Habilidades relacionadas aos temas em estudo

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6º Ano	Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06**) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
7º Ano	Múltiplos e divisores de um número natural	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Fonte: (BRASIL, Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017)

Após execução das aulas de apoio, é prevista a aplicação da Lista 2 (avaliação final), cujas questões abordam os mesmos assuntos da Lista 1.

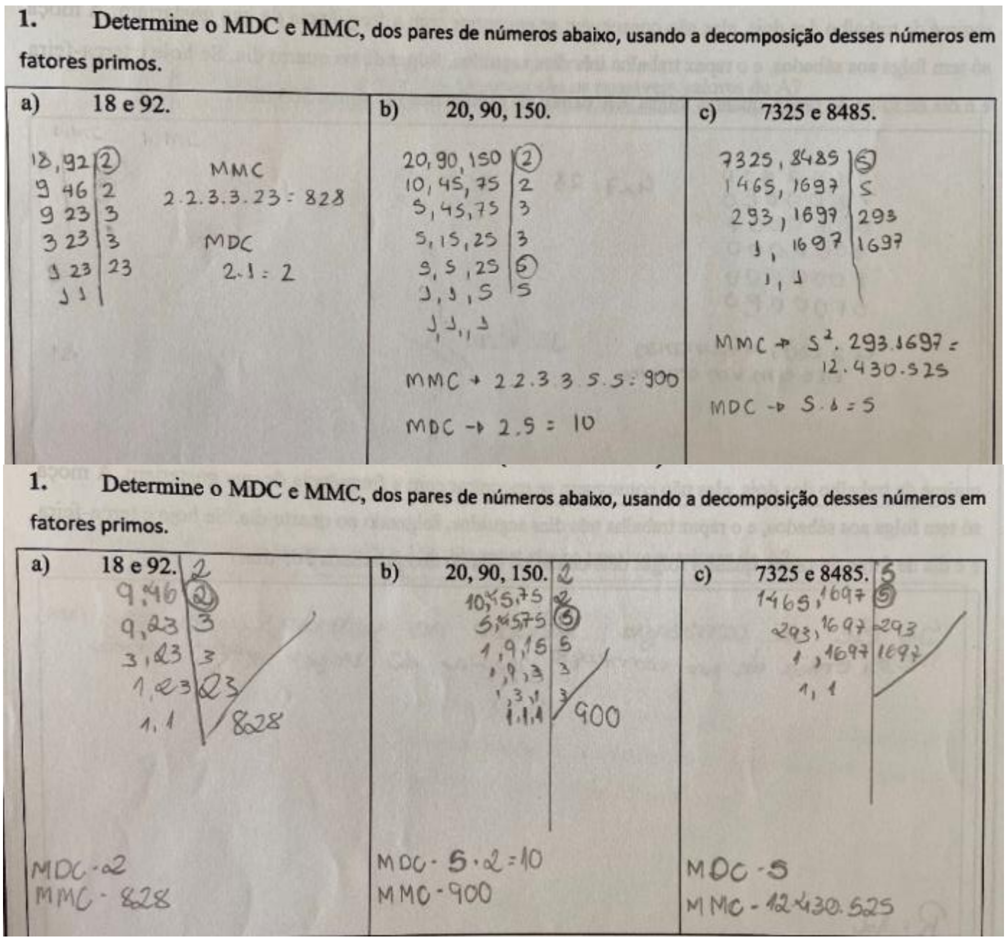
Esse conjunto de atividades foi executado no período de 01/09/2022 a 14/12/2022, em duas turmas da 1ª série do Ensino Médio do turno vespertino da escola EEEM Arnulpho Mattos, localizada no município de Vitória (ES). As Listas foram resolvidas individualmente por cada aluno, durante duas aulas de 50 minutos, para cada avaliação. A explicação dos conteúdos, após a primeira avaliação, ocupou 5 aulas de 50 minutos cada. No total, 65 alunos fizeram a Lista 1 e a Lista 2. A partir dos resultados da Lista 1, é revelado o conhecimento prévio dos alunos, e, depois da explicação dos conteúdos, através dos resultados da Lista 2, são analisados os conhecimentos adquiridos pelos estudantes.

4.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1.1 Primeira atividade - Lista 1

Questão 1: A maioria dos alunos acertaram a questão (45 acertos de 65, ou 69% do total), que utiliza o dispositivo direto para o cálculo de MDC e MMC, como mostram as resoluções na Figura 3.

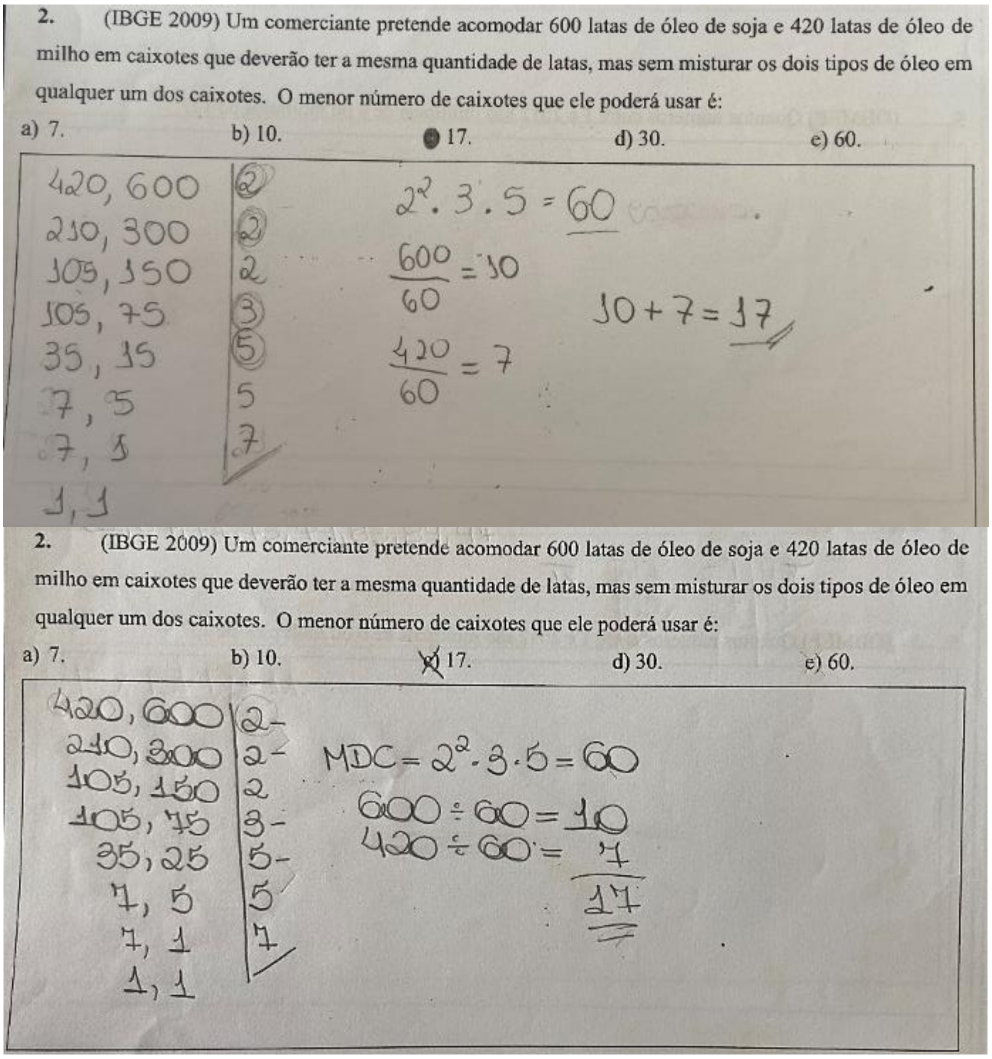
Figura 3 – Questão 1 da Lista 1



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 2: Um total de 32 alunos (49%) acertou a questão. Primeiramente, calcularam o MDC dos números, depois dividiram a quantidade de latas de cada óleo pelo MDC para encontrar o menor número de caixotes. Seguem duas resoluções na Figura 4.

Figura 4 – Questão 2 da Lista 1: acertos


2. (IBGE 2009) Um comerciante pretende acomodar 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho em caixotes que deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes. O menor número de caixotes que ele poderá usar é:

a) 7. b) 10. c) 17. d) 30. e) 60.

420, 600 | 2
210, 300 | 2
105, 150 | 2
105, 75 | 3
35, 15 | 5
7, 5 | 5
7, 1 | 7
1, 1

$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$\frac{600}{60} = 10$

$\frac{420}{60} = 7$

$10 + 7 = 17$

2. (IBGE 2009) Um comerciante pretende acomodar 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho em caixotes que deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes. O menor número de caixotes que ele poderá usar é:

a) 7. b) 10. c) 17. d) 30. e) 60.

420, 600 | 2
210, 300 | 2
105, 150 | 2
105, 75 | 3
35, 25 | 5
7, 5 | 5
7, 1 | 7
1, 1

$MDC = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$600 \div 60 = 10$

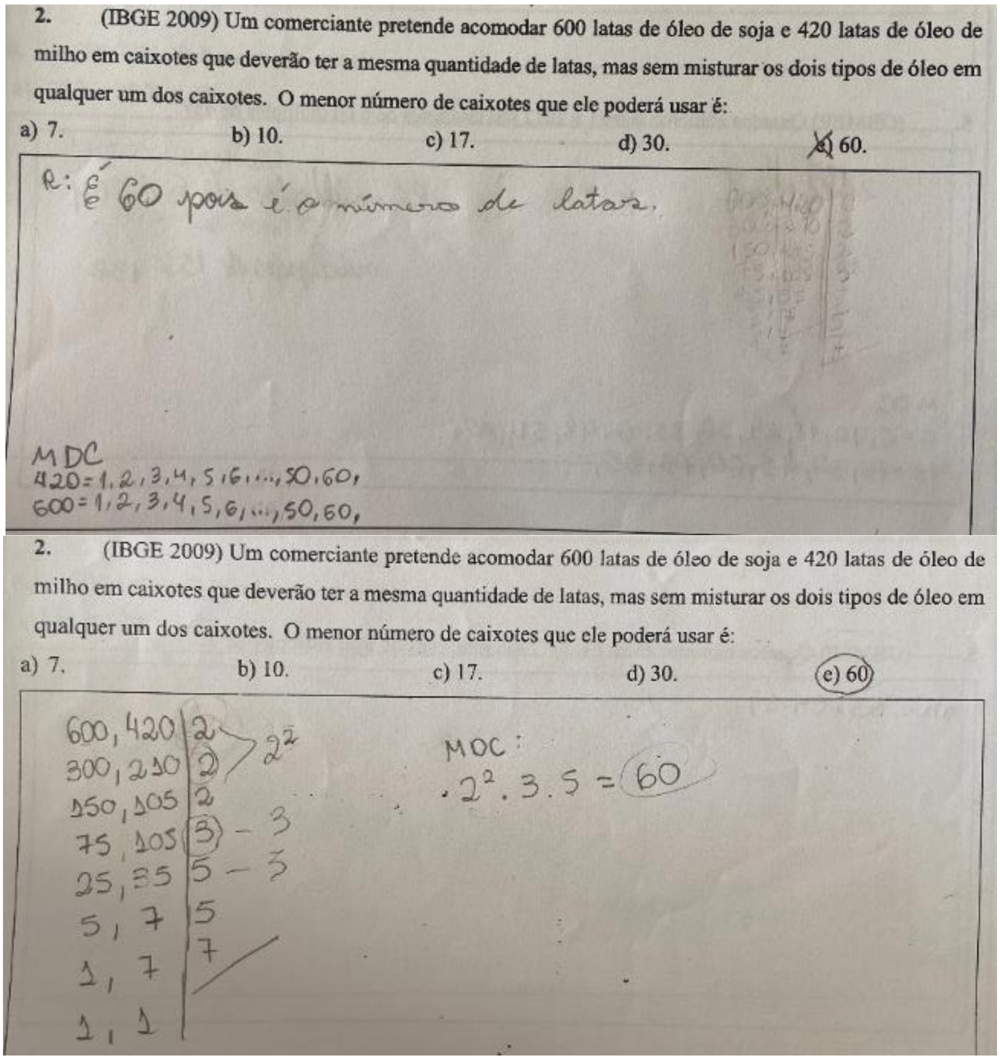
$420 \div 60 = 7$

17

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Um total de 10 alunos calcularam o MDC de 420 e 600, encontrando o número de latas por caixa, que era de 60, e acabaram marcando a alternativa errada (letra e) por falta de atenção à pergunta da questão, que pedia “o menor número de caixotes”. Seguem dois exemplos de resoluções na Figura 5.

Figura 5 – Questão 2 da Lista 1: erros



2. (IBGE 2009) Um comerciante pretende acomodar 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho em caixotes que deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes. O menor número de caixotes que ele poderá usar é:

a) 7. b) 10. c) 17. d) 30. e) 60.

R: É 60 pois é o número de latas.

MDC
420=1,2,3,4,5,6,...,50,60,
600=1,2,3,4,5,6,...,50,60,

2. (IBGE 2009) Um comerciante pretende acomodar 600 latas de óleo de soja e 420 latas de óleo de milho em caixotes que deverão ter a mesma quantidade de latas, mas sem misturar os dois tipos de óleo em qualquer um dos caixotes. O menor número de caixotes que ele poderá usar é:

a) 7. b) 10. c) 17. d) 30. e) 60

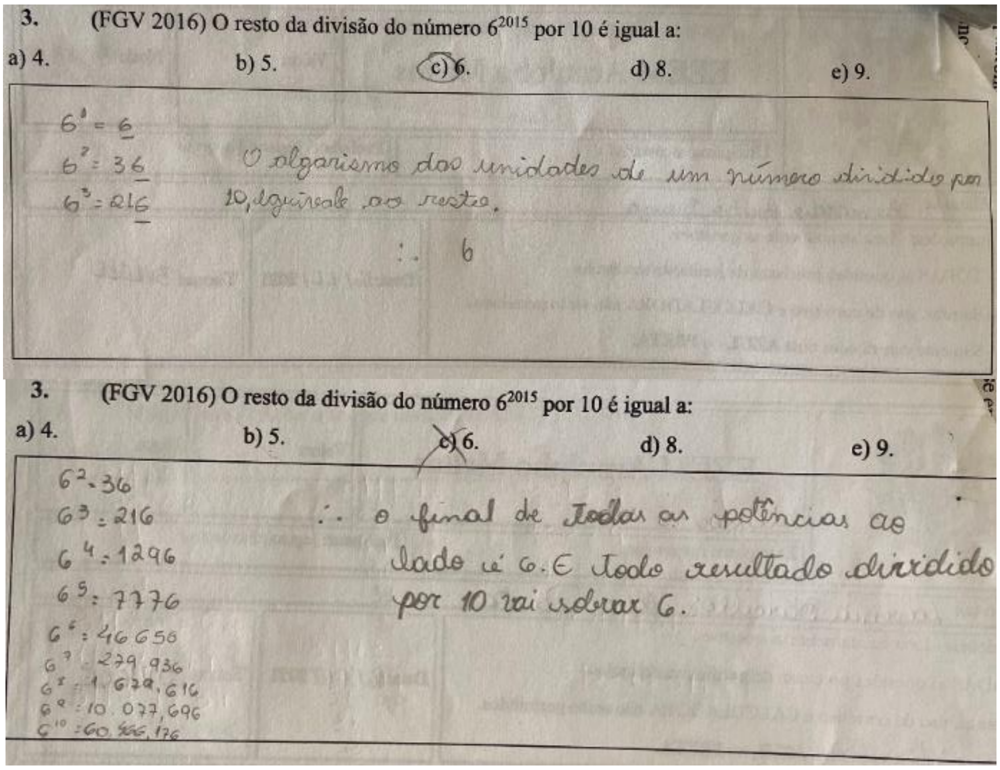
600, 420 | 2
300, 210 | 2
150, 105 | 2
75, 105 | 3
25, 35 | 5
5, 7 | 5
1, 7 | 7
1, 1 |

MDC: $2^2 . 3 . 5 = 60$

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 3: Com baixo índice de erro, 49 acertos (75%), os alunos utilizaram o raciocínio "o resto da divisão de um número por dez é o algarismo da unidade desse número". Além disso, a partir do cálculo das primeiras potências do 6 ($6^2 = 36$; $6^3 = 216$; $6^4 = 1296$; ...), deduziram que o algarismo das unidades (resto da divisão do número dado por 10) era sempre 6 e conjeturaram a generalização desse resultado. Algumas resoluções estão apresentadas na Figura 6.

Figura 6 – Questão 3 da Lista 1



3. (FGV 2016) O resto da divisão do número 6^{2015} por 10 é igual a:

a) 4. b) 5. c) 6. d) 8. e) 9.

$6^1 = 6$
$6^2 = 36$
$6^3 = 216$

O algarismo das unidades de um número dividido por 10, equivale ao resto.

∴ 6

3. (FGV 2016) O resto da divisão do número 6^{2015} por 10 é igual a:

a) 4. b) 5. c) 6. d) 8. e) 9.

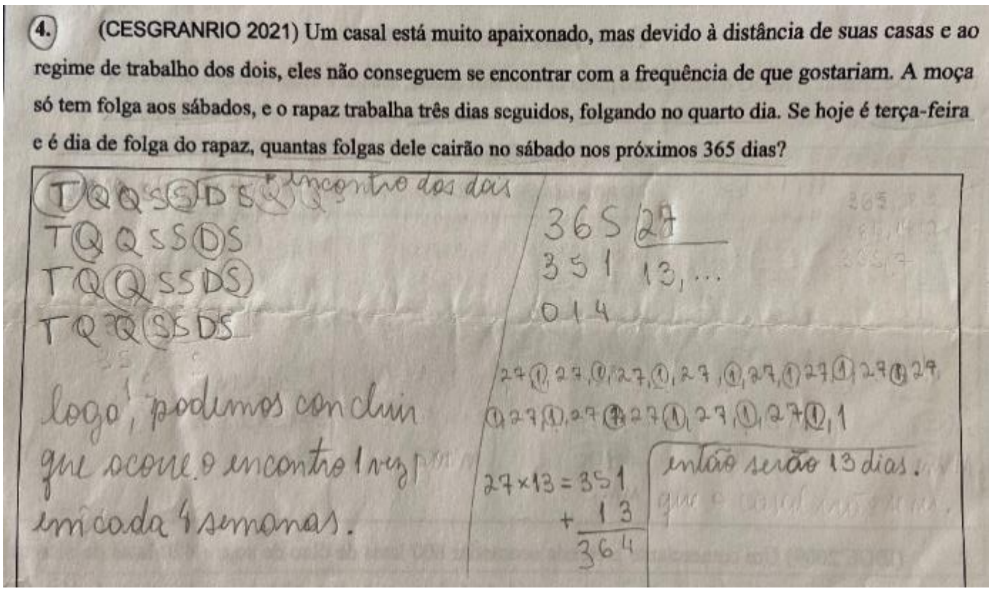
$6^2 = 36$
$6^3 = 216$
$6^4 = 1296$
$6^5 = 7776$
$6^6 = 46656$
$6^7 = 279936$
$6^8 = 1.679.616$
$6^9 = 10.077.696$
$6^{10} = 60.466.176$

∴ o final de todas as potências ao lado é 6. E todo resultado dividido por 10 vai sobrar 6.

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 4: Observamos o raciocínio dos alunos, que encontraram os dias de encontros do casal durante um mês e chegaram à conclusão de que eles se encontravam uma vez a cada quatro semanas. Logo, no vigésimo oitavo dia seria o encontro deles. Destacamos nas Figuras 7 e 8 algumas resoluções encontradas.

Figura 7 – Questão 4 da Lista 1



4. (CESGRANRIO 2021) Um casal está muito apaixonado, mas devido à distância de suas casas e ao regime de trabalho dos dois, eles não conseguem se encontrar com a frequência de que gostariam. A moça só tem folga aos sábados, e o rapaz trabalha três dias seguidos, folgando no quarto dia. Se hoje é terça-feira e é dia de folga do rapaz, quantas folgas dele cairão no sábado nos próximos 365 dias?

T Q Q S S D S Q ← encontro dos dias
T Q Q S S D S
T Q Q S S D S
T Q Q S S D S

logo, podemos concluir que ocorre o encontro 1 vez em cada 4 semanas.

365 | 27
351   13,...
014

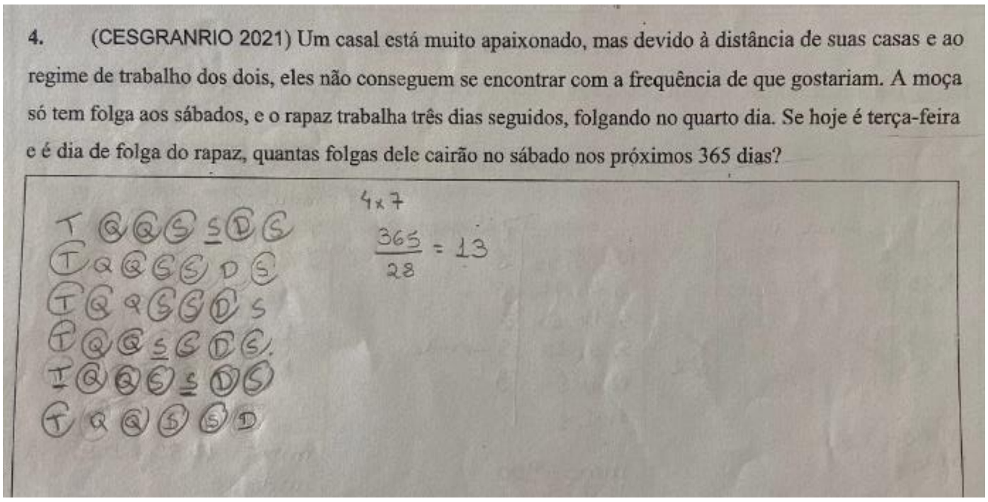
27 1 27 1 27 1 27 1 27 1 27 1 27 1 27
1 27 1 27 1 27 1 27 1 27 1 1

$27 \times 13 = 351$
$+ 13$
364

então serão 13 dias.

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Figura 8 – Questão 4 da Lista 1



4. (CESGRANRIO 2021) Um casal está muito apaixonado, mas devido à distância de suas casas e ao regime de trabalho dos dois, eles não conseguem se encontrar com a frequência de que gostariam. A moça só tem folga aos sábados, e o rapaz trabalha três dias seguidos, folgando no quarto dia. Se hoje é terça-feira e é dia de folga do rapaz, quantas folgas dele cairão no sábado nos próximos 365 dias?

T Q Q S S D S
T Q Q S S D S
T Q Q S S D S
T Q Q S S D S
T Q Q S S D S
T Q Q S S D

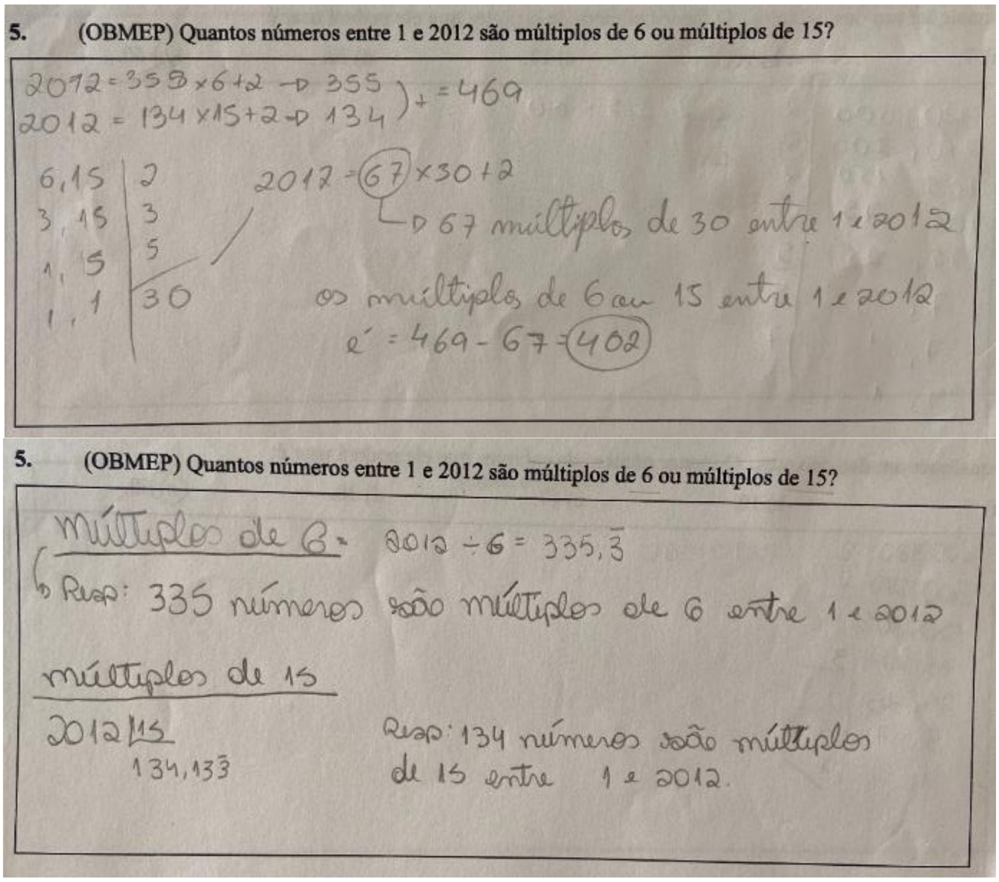
4x7

$\frac{365}{28} = 13$

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 5: Essa questão teve baixo índice de acertos, apenas 10 (15%), e com muitas questões em branco (60%). Muitos alunos calcularam os múltiplos de 6 e os múltiplos de 15, mas não tiraram os múltiplos da interseção, como mostram as resoluções da Figura 8.

Figura 9 – Questão 5 da Lista 1



5. (OBMEP) Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

2012 = 335 x 6 + 2 -> 335
2012 = 134 x 15 + 2 -> 134
+ = 469

6, 15 | 2
3, 15 | 3
1, 5 | 5
1, 1 | 30

2012 = 67 x 30 + 2
-> 67 múltiplos de 30 entre 1 e 2012

os múltiplos de 6 ou 15 entre 1 e 2012 é = 469 - 67 = 402

5. (OBMEP) Quantos números entre 1 e 2012 são múltiplos de 6 ou múltiplos de 15?

múltiplos de 6: 2012 ÷ 6 = 335,3̄
-> Resp: 335 números são múltiplos de 6 entre 1 e 2012

múltiplos de 15

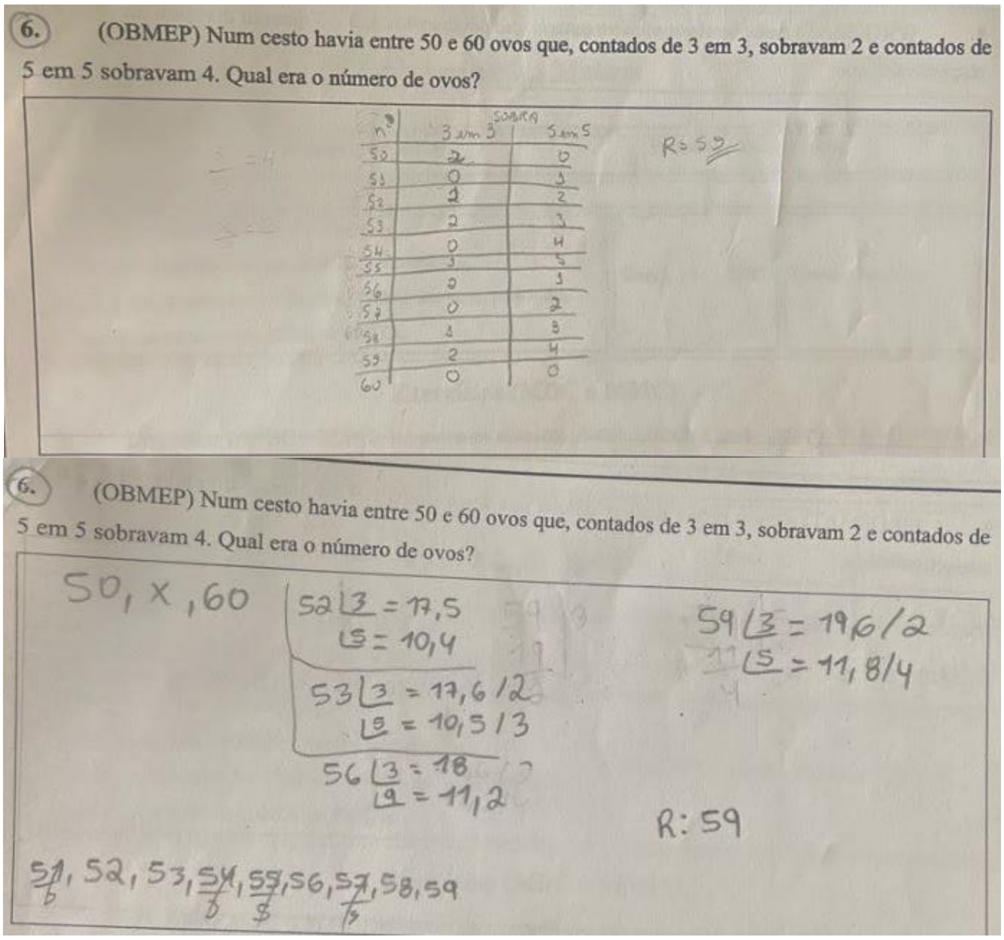
2012 | 15
134,133̄

Resp: 134 números são múltiplos de 15 entre 1 e 2012.

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 6: Um número considerável de alunos acertou a questão (25 alunos, ou 38%). Alguns deixaram em branco (31, ou 48%). Ao serem questionados do motivo, apontaram a dificuldade de interpretação. Na Figura 10, estão algumas das soluções encontradas.

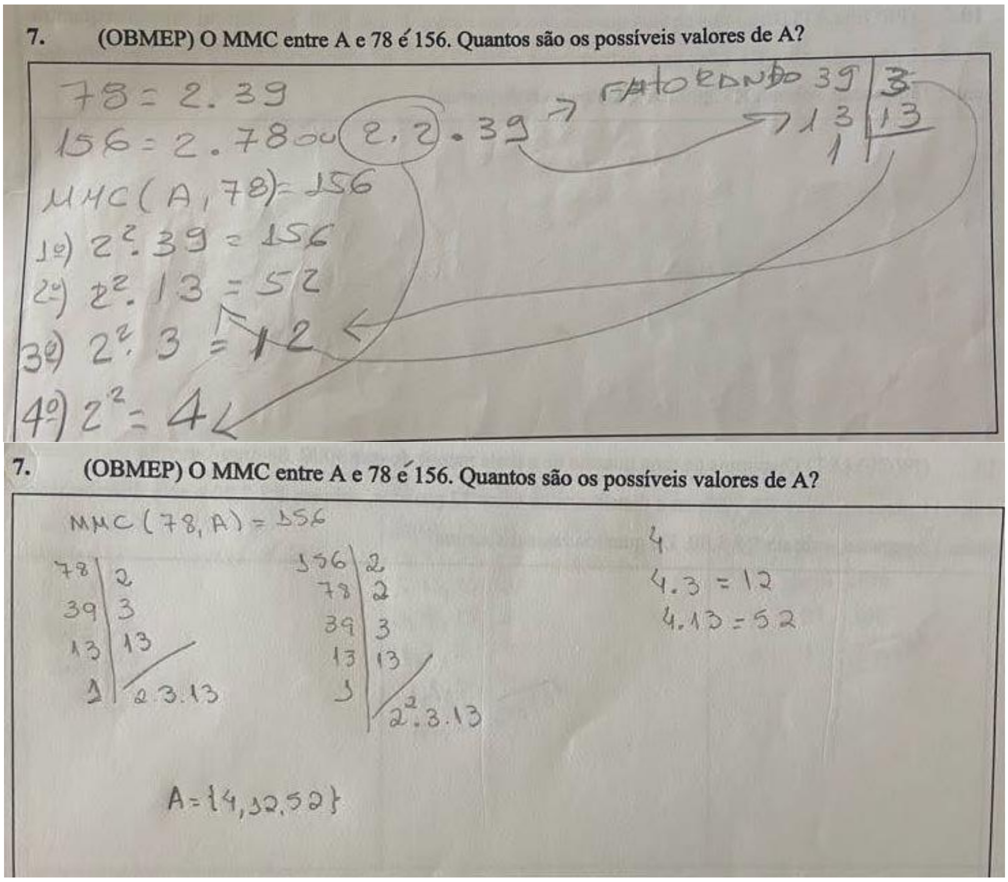
Figura 10 – Questão 6 da Lista 1



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 7: Apenas três alunos acertaram a questão. Algumas resoluções podem ser analisadas na Figura 11.

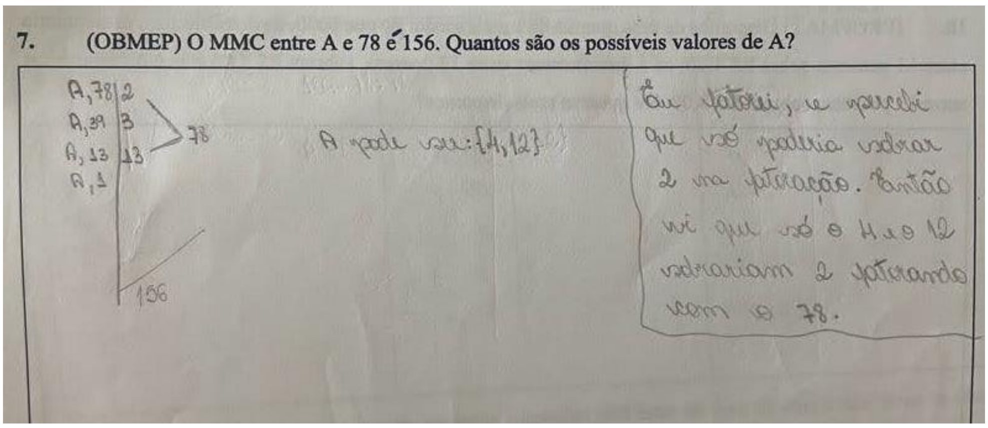
Figura 11 – Questão 7 da Lista: acertos



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

A quantidade de alunos que erraram (30, ou 46%) e deixaram em branco (32, ou 49%) essa questão, foi próxima. Segue uma resolução, na Figura 12, na qual o aluno encontrou dois possíveis valores de A, faltando ou esquecendo a possibilidade do número A ser igual a 52.

Figura 12 – Questão 7 da Lista 1: erros

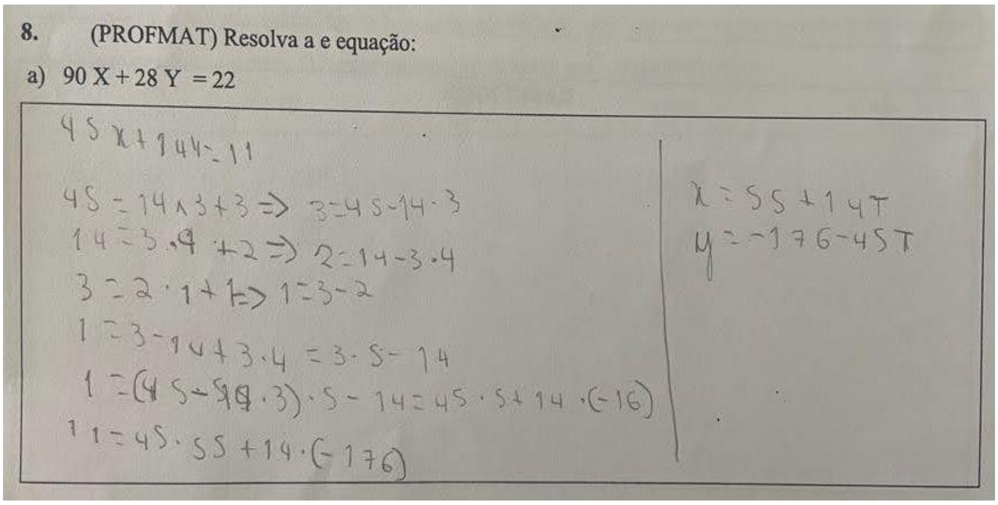


Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 8: Essa questão teve apenas um acerto, o conteúdo de Equações diofantinas não está sendo trabalhado no Ensino Fundamental. Não encontramos esse conteúdo no currículo estadual da Sedu nem nos livros didáticos, o que explica a dificuldade dos alunos, já que não aprenderam o conteúdo.

Na Figura 13 é mostrada a única solução encontrada, porém, vale destacar que resolução é de um aluno que faz parte do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Esse programa propicia premiados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) a entrarem em contato com interessantes questões no ramo da Matemática.

Figura 13 – Questão 8 da Lista 1


8. (PROFMAT) Resolva a e equação:

a) $90X + 28Y = 22$

$45x + 14y = 11$

$45 = 14 \cdot 3 + 3 \Rightarrow 3 = 45 - 14 \cdot 3$

$14 = 3 \cdot 4 + 2 \Rightarrow 2 = 14 - 3 \cdot 4$

$3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 2$

$1 = 3 - 14 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot 5 - 14$

$1 = (45 - 14 \cdot 3) \cdot 5 - 14 = 45 \cdot 5 + 14 \cdot (-16)$

$11 = 45 \cdot 55 + 14 \cdot (-176)$

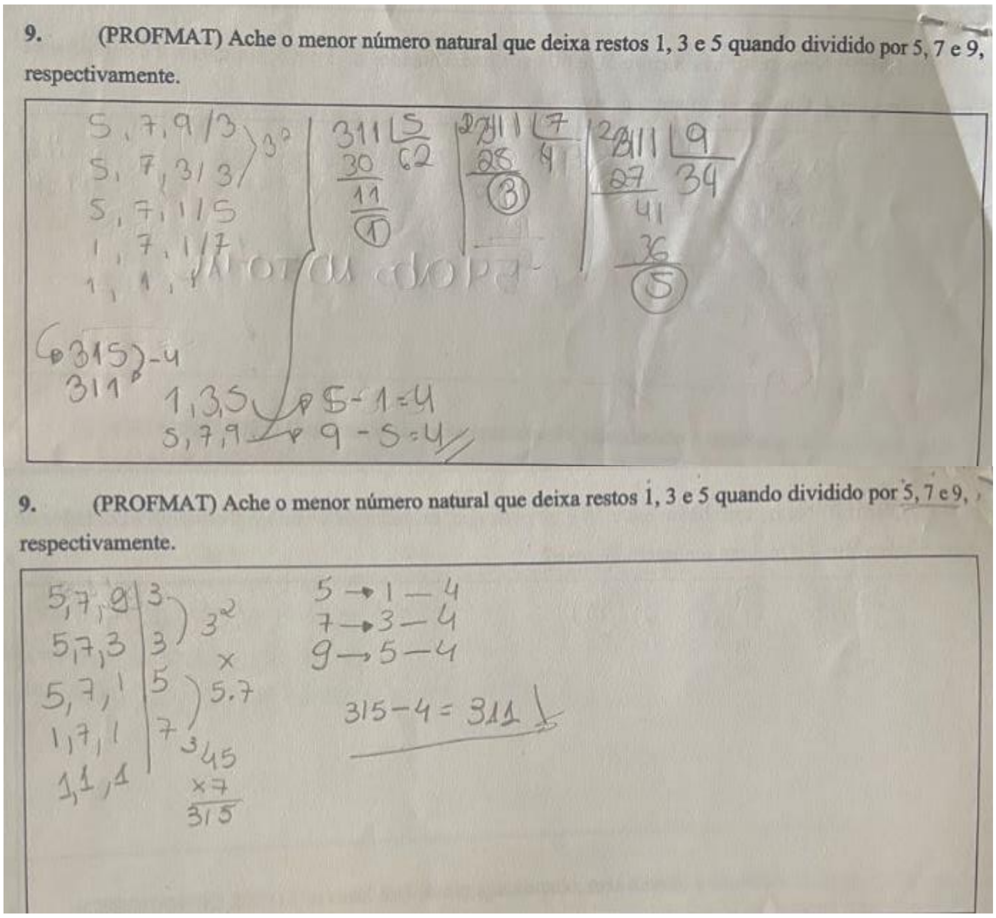
$x = 55 + 14T$

$y = -176 - 45T$

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 9: Observamos que os 12 (18%) alunos que acertaram essa questão tiveram raciocínios parecidos. Aparentemente esses alunos perceberam que ao somar 4 ao número procurado, ele se tornava múltiplo de 5,7 e 9, ainda, como o problema pedia o menor número natural, então calcularam o MMC desses números e no final subtraíram 4 unidades para determinar a resposta do problema. Algumas resoluções podem ser observadas na Figura 14.

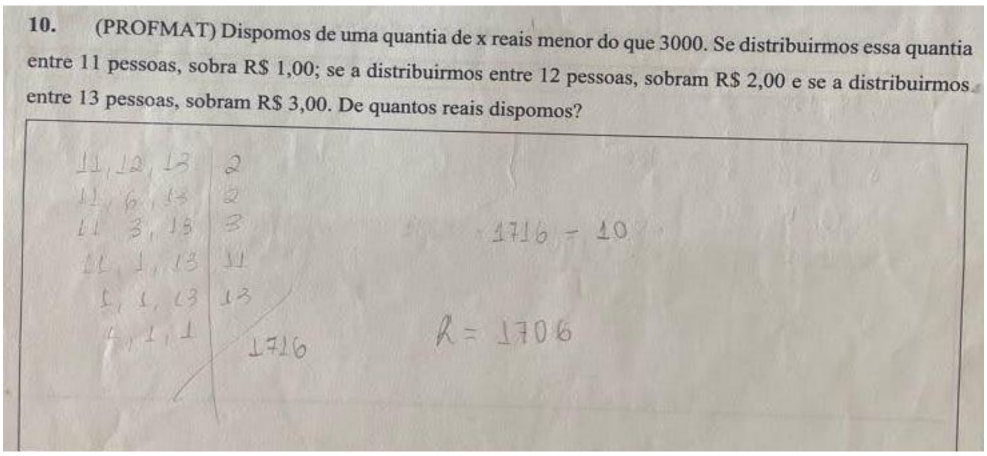
Figura 14 – Questão 9 da Lista 1



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 10: Essa questão teve apenas um acerto. Alguns alunos, ao serem questionados a respeito do porquê de terem deixado a questão em branco (58 em branco ou 89%), alegaram não ter respondido por falta de tempo e/ou dificuldade de interpretação. Na Figura 15 está a solução encontrada.

Figura 15 – Questão 10 da Lista 1

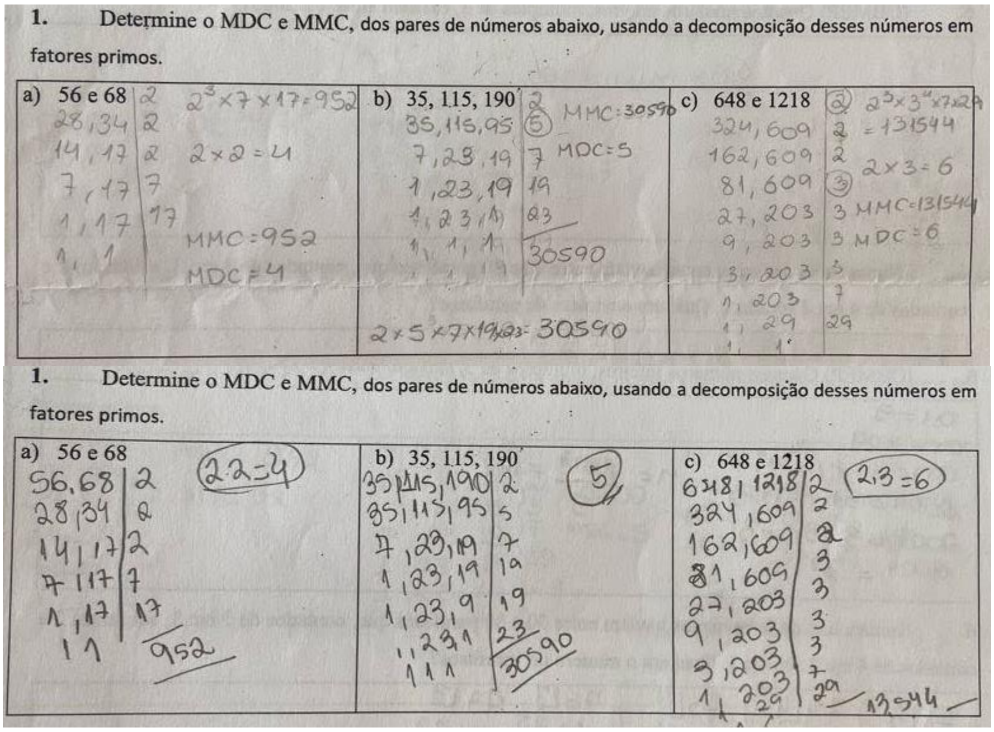


Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

4.1.2 Segunda atividade - Lista 2

Questão 1: A maioria dos alunos acertou a questão (55, ou 85%), que utiliza o dispositivo direto para o cálculo de MDC e MMC. Os poucos erros foram na divisão dos números ao longo dos cálculos. Na Figura 16 encontramos algumas resoluções.

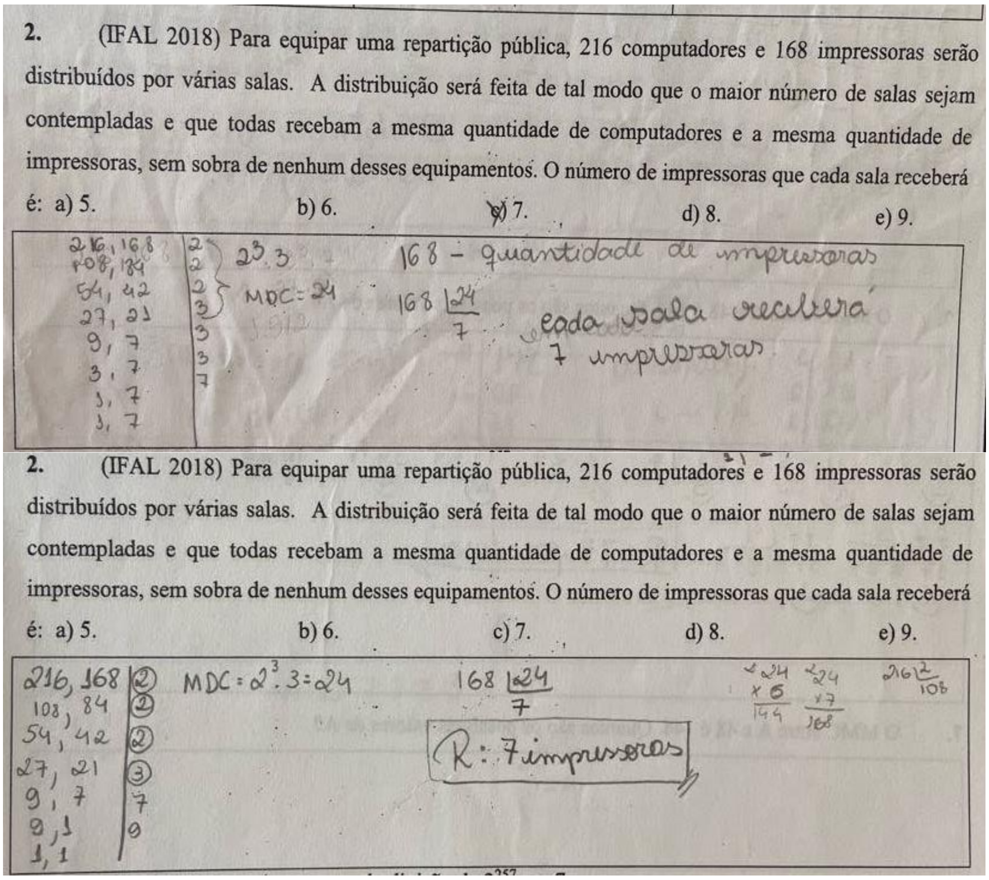
Figura 16 – Questão 1 da Lista 2



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 2: Um número considerável de alunos acertou a questão (48, ou 74%), utilizando a mesma lógica de resolução. Calcularam o MDC dos números e depois dividiram a quantidade de impressoras por 24 (MDC) para encontrar o número de impressoras que cada sala receberia. Na Figura 17 estão duas resoluções encontradas.

Figura 17 – Questão 2 da Lista 2



2. (IFAL 2018) Para equipar uma repartição pública, 216 computadores e 168 impressoras serão distribuídos por várias salas. A distribuição será feita de tal modo que o maior número de salas sejam contempladas e que todas recebam a mesma quantidade de computadores e a mesma quantidade de impressoras, sem sobra de nenhum desses equipamentos. O número de impressoras que cada sala receberá é: a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 9.

$2^3 \cdot 3$ MDC = 24

168 - quantidade de impressoras

cada sala receberá 7 impressoras

2. (IFAL 2018) Para equipar uma repartição pública, 216 computadores e 168 impressoras serão distribuídos por várias salas. A distribuição será feita de tal modo que o maior número de salas sejam contempladas e que todas recebam a mesma quantidade de computadores e a mesma quantidade de impressoras, sem sobra de nenhum desses equipamentos. O número de impressoras que cada sala receberá é: a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 9.

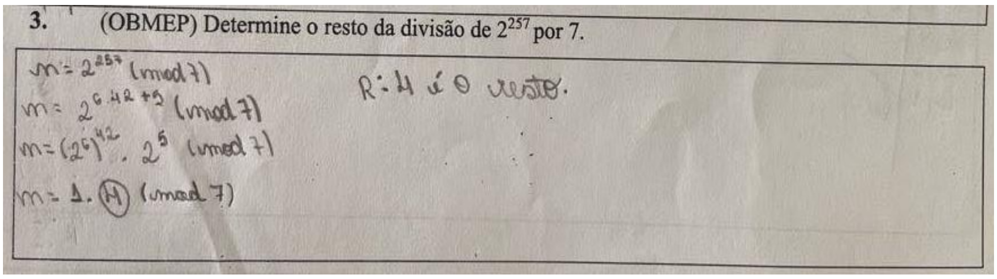
MDC = $2^3 \cdot 3 = 24$

R: 7 impressoras

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 3: Com a explicação do conteúdo programado nas aulas de reforço, após a avaliação diagnóstica, a maioria dos alunos fez uso de congruências e o pequeno Teorema de Fermat para a resolução dessa questão, como o esperado. Houve 48 acertos (74%). Na Figura 18, segue um exemplo desse tipo de resolução.

Figura 18 – Questão 3 da Lista 2



3. (OBMEP) Determine o resto da divisão de 2^{257} por 7.

$m = 2^{257} \pmod 7$

$m = 2^{6 \cdot 42 + 5} \pmod 7$

$m = (2^6)^{42} \cdot 2^5 \pmod 7$

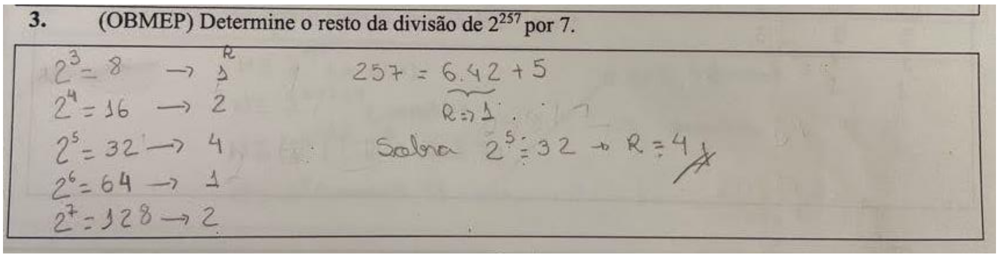
$m = 1 \cdot 4 \pmod 7$

R: 4 é o resto.

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Por outro lado, um total de 10 alunos utilizaram uma outra lógica de resolução, ao encontrar um padrão de restos da divisão de potências de 2 por 7, como mostra a Figura 19.

Figura 19 – Questão 3 da Lista 2



3. (OBMEP) Determine o resto da divisão de 2^{257} por 7.

R

$2^3 = 8 \rightarrow 1$

$2^4 = 16 \rightarrow 2$

$2^5 = 32 \rightarrow 4$

$2^6 = 64 \rightarrow 1$

$2^7 = 128 \rightarrow 2$

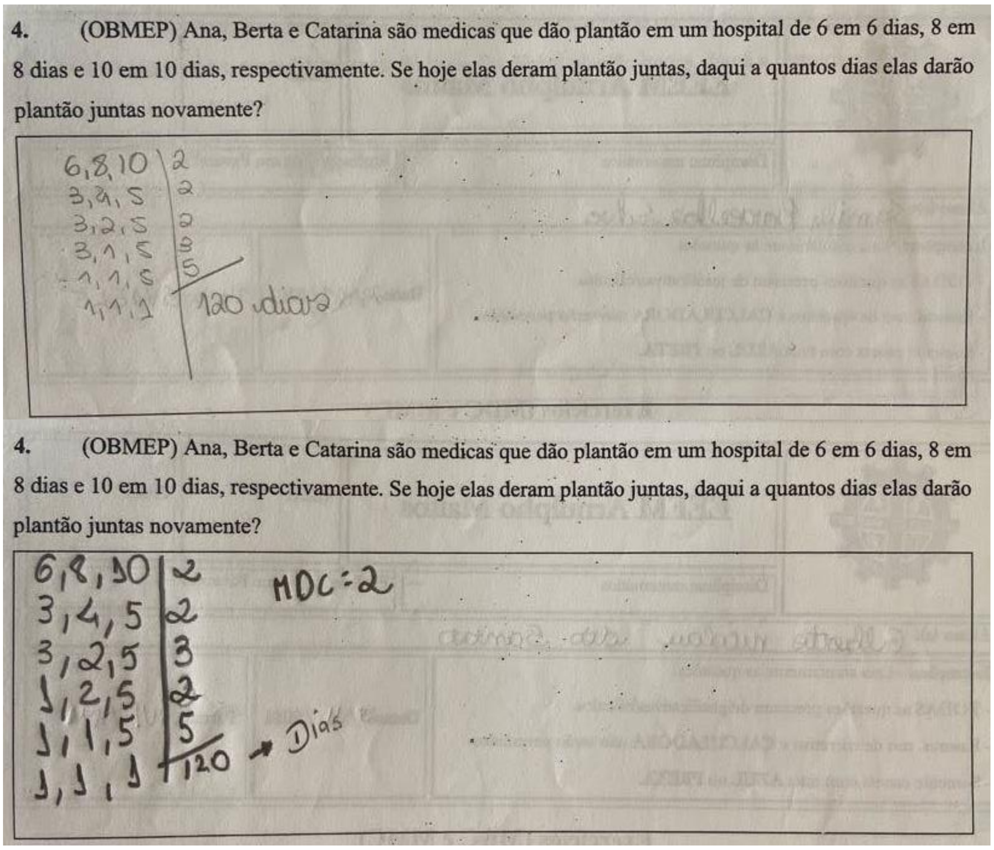
$257 = \underbrace{6.42}_{R \Rightarrow 1} + 5$

Sobra $2^5 \div 32 \rightarrow R = 4$

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 4: Observamos que a maioria dos alunos acertaram a questão (52, ou 80%), utilizando o cálculo de MMC entre 6,8 e 10. Podemos observar na Figura 20 algumas das resoluções encontradas.

Figura 20 – Questão 4 da Lista 2



4. (OBMEP) Ana, Berta e Catarina são medicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

6,8,10	2
3,4,5	2
3,2,5	2
3,1,5	3
1,1,5	5
1,1,1	120 dias

4. (OBMEP) Ana, Berta e Catarina são medicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

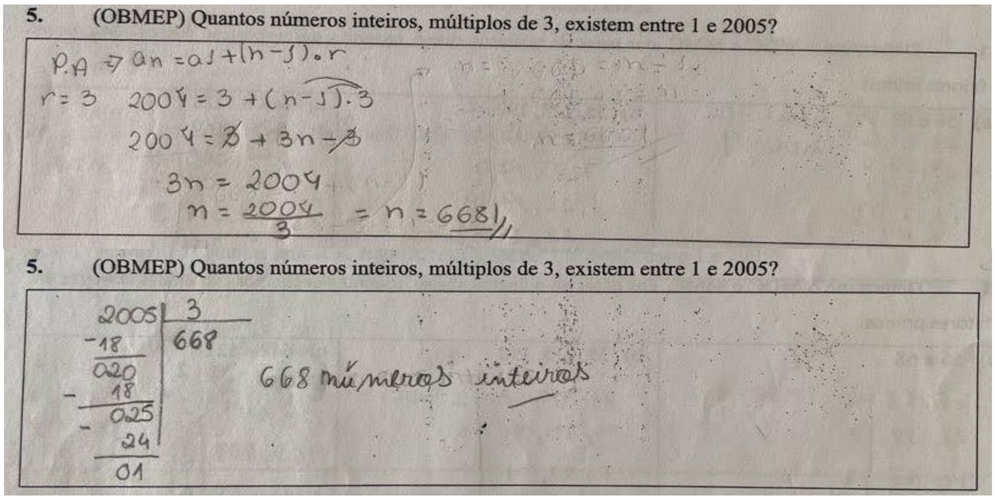
MDC = 2

6,8,10	2
3,4,5	2
3,2,5	3
1,2,5	2
1,1,5	5
1,1,1	120 → Dias

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 5: Entre os 55 acertos (85%), encontramos uma resolução em que o aluno percebeu que havia uma progressão aritmética e aplicou a fórmula. Em outra resolução, o aluno dividiu 2005 por 3. Seguem algumas das resoluções encontradas na Figura 21.

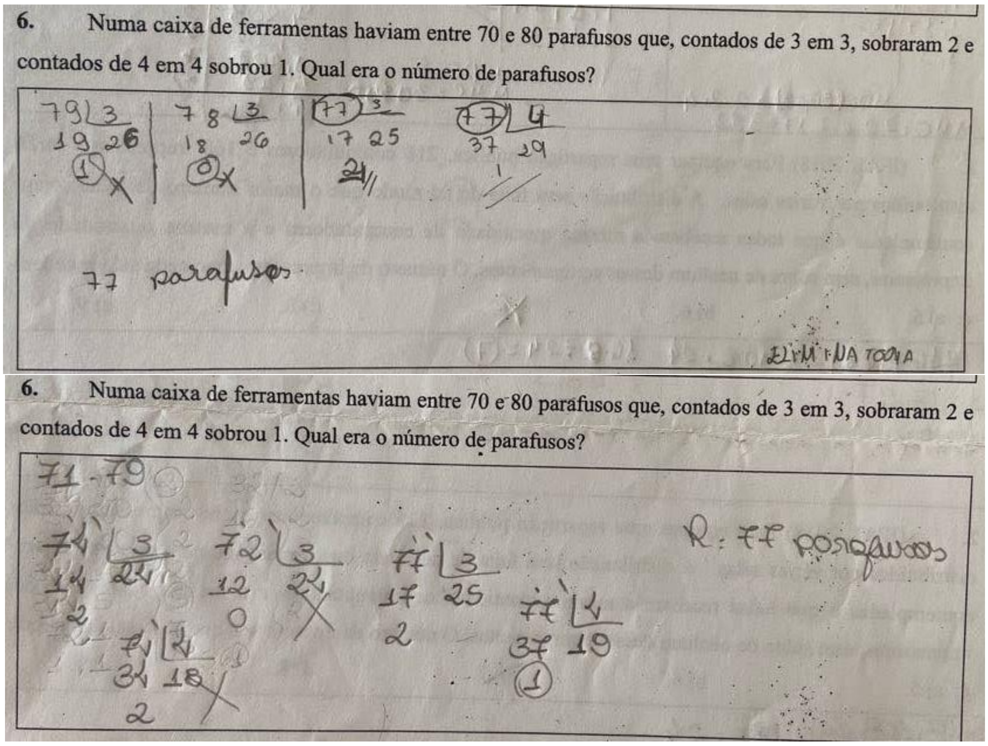
Figura 21 – Questão 5 da Lista 2



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 6: Um número considerável de alunos acertou a questão (38 acertos, ou 58%) resolvendo por tentativas. Havia entre 70 e 80 parafusos, logo poderiam ter 71,72,73,74,75,76,77,78 ou 79 parafusos na caixa, os alunos saíram dividindo e procurando o número que satisfazia as condições do problema. Numa nova questão, pode-se aumentar o comprimento do intervalo em que se encontra o número de objetos, para que o aluno utilize o conhecimento adquirido nas aulas sobre múltiplos. Seguem, na Figura 22, algumas resoluções encontradas.

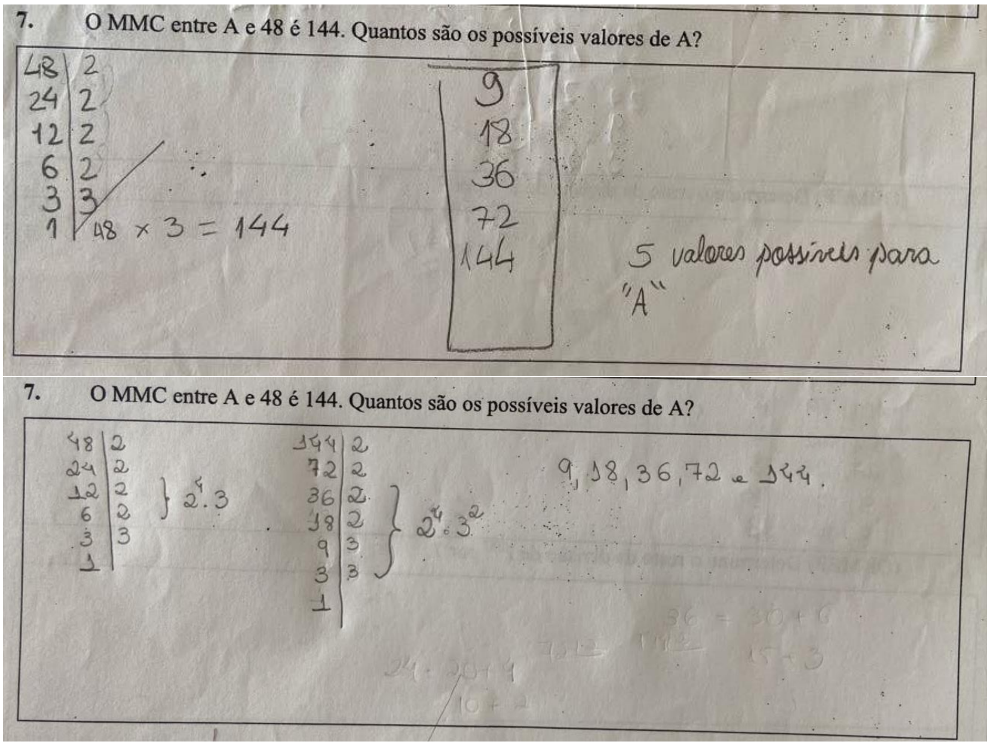
Figura 22 – Questão 6 da Lista 2



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 7: Essa foi a questão com menor índice de acertos, apenas 11 (17%). No entanto, quando comparamos os resultados com os da questão 7 da Lista 1, que teve muitas respostas em branco (32), nessa pelo menos mais alunos fizeram a fatoração dos números, mas não conseguiram concluir quais eram os possíveis valores de A. Para a segunda lista só houve 8 respostas em branco. Na figura 22 encontramos algumas resoluções.

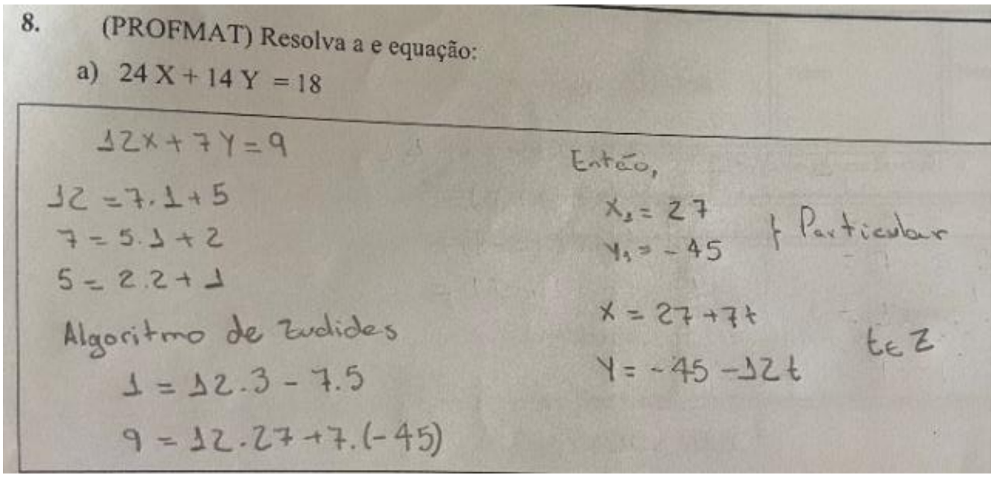
Figura 23 – Questão 7 da Lista 2



Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 8: Mais uma questão com baixo índice de acertos, apenas 12 (18%). Nessa questão, que aborda equações diofantinas, alguns alunos aplicaram o Algoritmo de Euclides, mas não conseguiram concluir. O conteúdo precisa ser trabalhado mais vezes ao longo das aulas para aumentar a prática. Comparando os resultados da questão 8 da Lista 1 e 2, do mesmo assunto, observamos que na primeira houve 44 respostas em branco, enquanto na segunda somente 13. Na Figura 24 encontramos uma resolução.

Figura 24 – Questão 8 da Lista 2



8. (PROFMAT) Resolva a e equação:

a) $24X + 14Y = 18$

$12x + 7Y = 9$

$12 = 7.1 + 5$

$7 = 5.1 + 2$

$5 = 2.2 + 1$

Algoritmo de Euclides

$1 = 12.3 - 7.5$

$9 = 12.27 + 7.(-45)$

Então,

$x_1 = 27$

$y_1 = -45$

} Particular

$X = 27 + 7t$

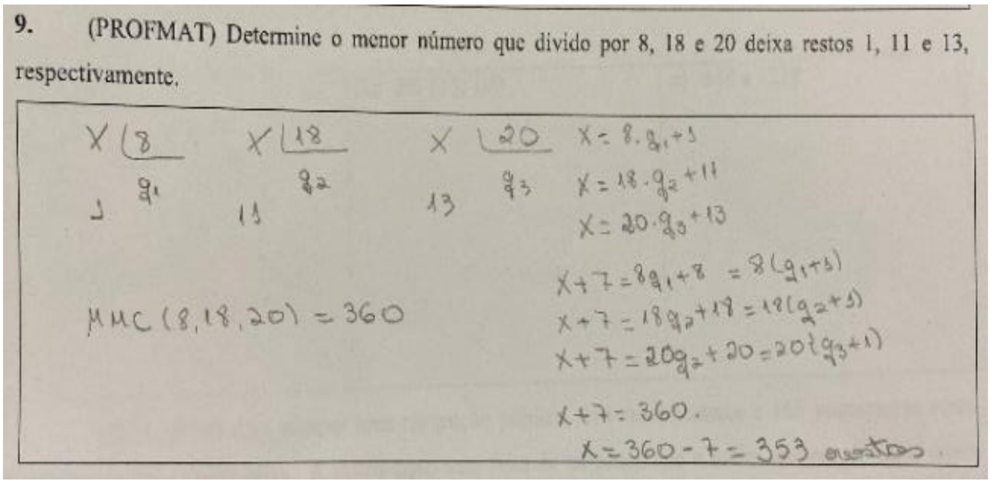
$Y = -45 - 12t$

$t \in \mathbb{Z}$

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 9: Observamos que os alunos tiveram raciocínios parecidos e não tiveram dificuldades para resolver essa questão. Um total de 52 alunos (80%) acertaram a questão. A Figura 25 apresenta uma resolução.

Figura 25 – Questão 9 da Lista 2



9. (PROFMAT) Determine o menor número que divido por 8, 18 e 20 deixa restos 1, 11 e 13, respectivamente.

$X \,|\underline{8}$, q_1, 1

$X \,|\underline{18}$, q_2, 11

$X \,|\underline{20}$, q_3, 13

$X = 8.q_1 + 1$

$X = 18.q_2 + 11$

$X = 20.q_3 + 13$

$X + 7 = 8q_1 + 8 = 8(q_1 + 1)$

$X + 7 = 18q_2 + 18 = 18(q_2 + 1)$

$X + 7 = 20q_3 + 20 = 20(q_3 + 1)$

$MMC(8, 18, 20) = 360$

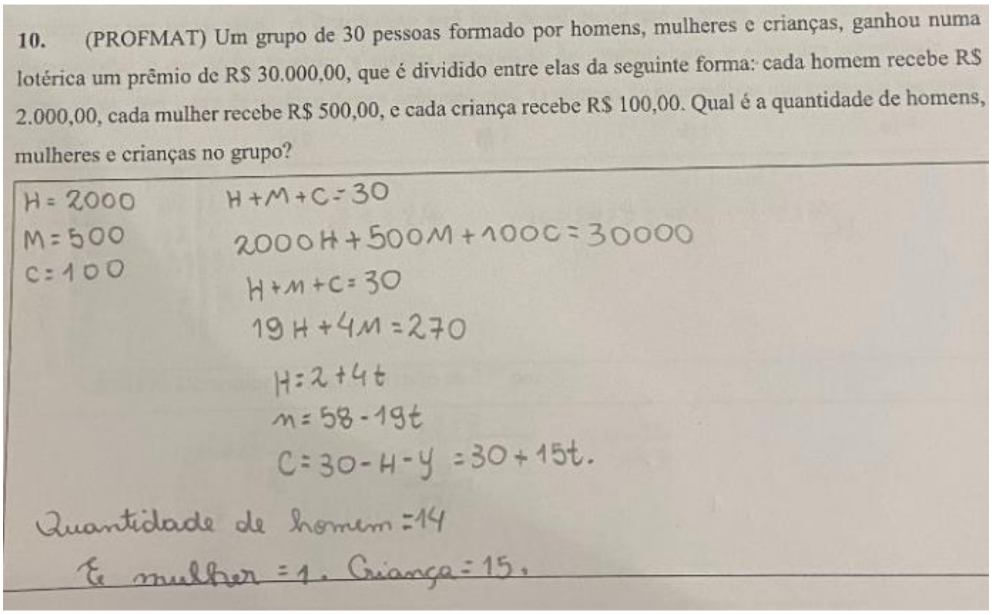
$X + 7 = 360.$

$X = 360 - 7 = 353$ ovostos

Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

Questão 10: Observamos que a maioria dos alunos tiveram raciocínios parecidos, sem dificuldades de resolução – 46 alunos acertaram (71%). A Figura 26 mostra uma das resoluções encontradas.

Figura 26 – Questão 10 da Lista 2



10. (PROFMAT) Um grupo de 30 pessoas formado por homens, mulheres e crianças, ganhou numa lotérica um prêmio de R$ 30.000,00, que é dividido entre elas da seguinte forma: cada homem recebe R$ 2.000,00, cada mulher recebe R$ 500,00, e cada criança recebe R$ 100,00. Qual é a quantidade de homens, mulheres e crianças no grupo?

H = 2000 H+M+C=30
M=500 2000H+500M+100C=30000
C=100
H+M+C=30
19H+4M=270
H:2+4t
m=58-19t
C=30-H-y =30+15t.
Quantidade de homem =14
E mulher =1. Criança =15.

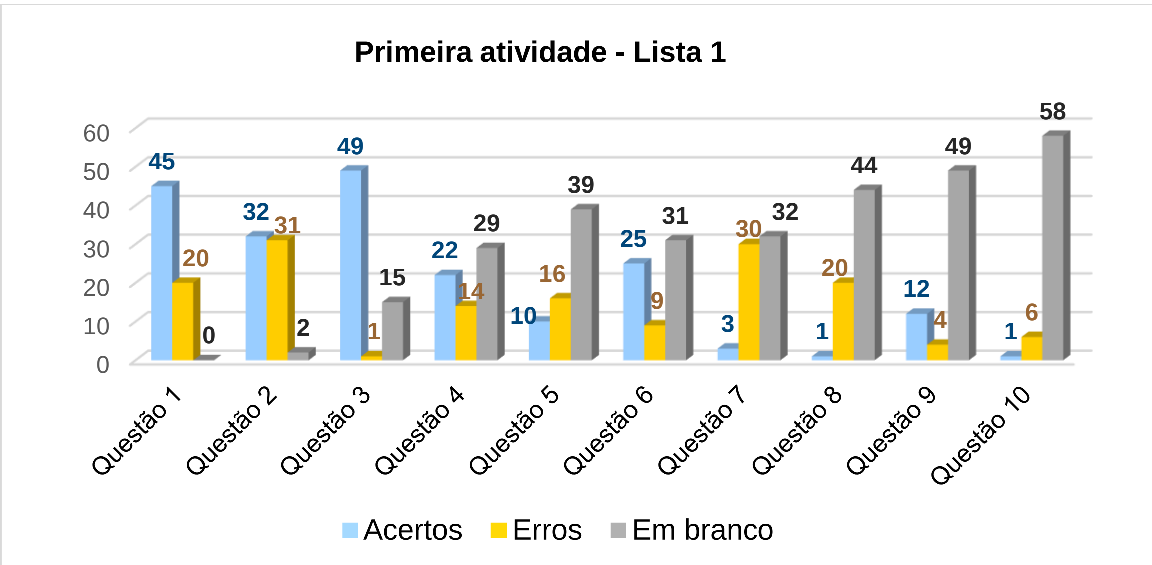
Fonte: Elaborado pela Autora com base nas respostas dos estudantes (2023)

4.2 GRÁFICOS DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES PRÁTICAS

Foram elaborados gráficos com o desempenho em cada uma das atividades para que seja possível observar os dados de cada questão individualmente de acordo com a quantidade de acertos, erros e questões em branco.

4.2.1 Desempenho da atividade 1

Gráfico 5 – Dados da Lista 1



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

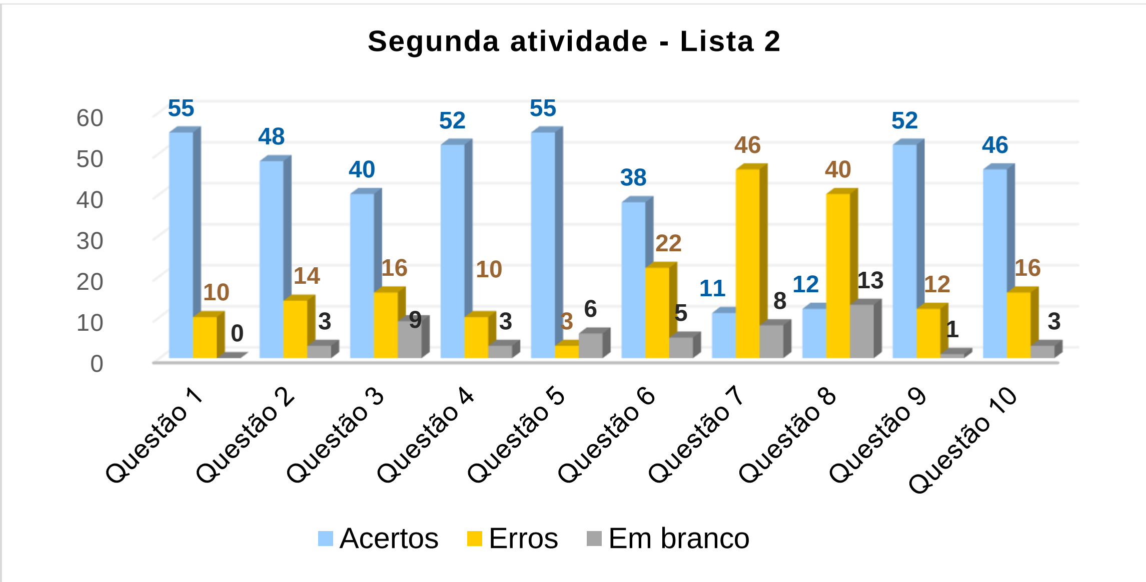
Pelo gráfico observamos que o maior índice de acertos foi nas questões 1 e 3 que correspondem ao cálculo de MDC e MMC na forma tradicional, e o uso do MDC em um problema contextualizado. As questões 2 e 7 apresentaram o maior índice de erro, provavelmente em razão da falta de atenção dos alunos quanto à pergunta da questão. Por exemplo: a questão 2 pedia o menor número de caixotes que poderia ser usado, os alunos calcularam o MDC (420, 600) = 60, que era o total de latas por caixa e marcaram essa alternativa com resposta. Embora essas duas questões apresentassem o maior índice de erro, isso pode ser interpretado positivamente, pois houve tentativa de resolução, diferente de resoluções em branco.

As questões 8, 9 e 10 foram as que os alunos mais deixaram em branco. Alguns disseram que o tempo não foi suficiente, e outros alegaram dificuldade de interpretação.

Antes de aplicar a Lista 2, todas as questões foram corrigidas durante as aulas de explicação dos conteúdos para sanar todas as dificuldades e dúvidas dos estudantes, proporcionando, assim, um melhor processo de ensino e aprendizado.

4.2.2 Desempenho da atividade 2

Gráfico 6 – Dados da Lista 2



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

Pelo gráfico observamos que os maiores índices de acertos foram nas questões 1,4,5 e 9. As questões 7 e 8 apresentaram o maior índice de erro. Os alunos começaram corretamente, mas não concluíram as questões. Ao serem questionados, os estudantes apontaram que não praticaram mais as atividades do conteúdo, ou tiveram preguiça de fazer ou não fizeram por falta de tempo.

Não tivemos tantas questões em branco como na primeira lista, pois muitos alunos ao menos tentaram realizar a atividade. De maneira geral, a Lista 2 obteve um número maior de acertos, portanto é visível notar que a explicação e a orientação sobre o conteúdo contribuíram para o domínio maior a respeito do tema. Uma sugestão seria a Lista 2 ser aplicada em duas aulas de 50 minutos (5 questões em cada aula), além da execução de mais aulas de explicação e exemplos relacionadas com a proposta didática, para que os alunos comecem a se familiarizar com a escrita e saibam justificar os cálculos.

As questões (3, 6, 7 e 8), que apresentaram maior índice de erros e relatos de dificuldades por parte dos estudantes durante os debates em sala de aula, foram corrigidas e esclarecidas em aula posterior, visando consolidar a aprendizagem.

Por meio desta proposta didática procura-se promover uma aprendizagem significativa, conforme Ausbel (MOREIRA, 2012), na qual o aluno do Ensino Médio possa relacionar o novo conhecimento com o conhecimento prévio do Ensino Fundamental, interpretando e integrando informações; enfatizando a compreensão de conceitos fundamentais, que atuam como âncoras para o entendimento de informações adicionais; e ressaltando a importância de conectar o novo conhecimento com o conhecimento relevante, já existente na mente do aprendiz, tornando o processo de aprendizado mais organizado.

Por fim, para uma aprendizagem duradoura é requerida prática, repetição, revisão, elaboração etc. A aprendizagem não é um acontecimento, mas sim um processo que se desenvolve ao longo do tempo (STAHL, et al., 2010). Uma vez que a aprendizagem resulta da forma como vivemos e acumulamos eventos ao longo do tempo e dos padrões que encontramos em tais eventos. (MAIESE, 2017) (KUKUSHKIN & CAREW, 2017).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma sequência didática direcionada a alunos da 1ª série do Ensino Médio, a fim de consolidar o aprendizado de conteúdos relativos a MDC e MMC abordados no Ensino Fundamental. De maneira mais detalhada e aprofundada do que a apresentação dos livros didáticos, o intuito foi ampliar os tópicos para além do Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum, estendendo o conteúdo para números primos, o Algoritmo de Euclides e o Teorema Chinês dos Restos.

Por meio de uma abordagem experimental, a sequência didática foi concebida em três fases. A primeira compreendeu o estudo da abordagem do MDC e MMC no Currículo Estadual de Matemática do Espírito Santo e em dois livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Fundamental, bem como a aplicação de uma avaliação diagnóstica (Lista 1), visando obter informações dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos sobre os temas que são objeto de estudo. Com os dados apresentados, foi criado o planejamento das aulas de revisão de conteúdos, focando na defasagem dos estudantes, com ênfase nos tópicos de maior dificuldade para os alunos. Para a segunda fase, foram oferecidas cinco aulas de revisão de conteúdos, de 50 minutos cada. Para finalizar, foi aplicada uma avaliação final (Lista 2), cujos resultados foram analisados e comparados aos resultados da avaliação inicial, a fim de avaliar o progresso dos alunos e a eficácia da sequência.

Ao final da sequência didática, observamos a eficácia da proposta elaborada e seu impacto no desenvolvimento das habilidades dos estudantes, pois a dificuldade apresentada pelos alunos na primeira atividade, quando eles só tinham os conhecimentos adquiridos ao longo do Ensino Fundamental, foi revertida. Em um segundo momento, após a explicação detalhada dos conteúdos, tivemos uma resolução das questões propostas com mais confiança e tranquilidade.

Esperamos que este trabalho possa contribuir, ainda que minimamente, para melhorar a qualidade da educação básica, tornando o processo de ensino de Matemática mais sólido.

Considerando que o objetivo deste trabalho era a produção de um material que pudesse auxiliar professores da educação básica e alunos do Ensino Médio, conclui-se que tal objetivo foi alcançado no grupo de alunos pesquisados, com base na análise do resultado encontrado na resolução das atividades da Lista 2. Constata-se, portanto, que a estratégia desenvolvida neste estudo apresenta uma base importante para o público-alvo, passível de melhorias, mas com resultados positivos.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. (2018). *Matemática* (9 ed., Vol. 2). São Paulo: Moderna.

BRASIL. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental.

BRASIL. (2006). *Orientações Curriculares Nacionais* (Vol. 2). Brasília, DF: Ministério da Educação/Secretaria da Educação Básica.

BRASIL. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias* (Vol. 2). Brasília, DF: Ministério de Educação/ Secretaria de Educação Básica.

BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* Brasilia: Ministério de Educação-MEC. Acesso em 28 de fevereiro de 2023, disponível em http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

BRITO, F., & OLIVEIRA, L. (2008). As dificuldades da interpretação de textos: algumas reflexões. *Anais do 16 Congresso de Leitura do Brasil*. Acesso em 13 de fevereiro de 2023, disponível em https://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss06_05.pdf.

COUTINHO, S. (2008). *Criptografia.* Rio de Janeiro: IMPA.

D'AMBRÓSIO, B. S. (1989). Como ensinar Matemática hoje? *Temas e Debates*, pp. 15-19. Acesso em 15 de junho de 2024, disponível em https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/td/article/view/2651/1846

ESPÍRITO SANTO. (2009). *Currículo Básico Escola Estadual: guia de implementação.* Vitória: Secretaria de Estado de Educação do Espírito Santo.

ESPÍRITO SANTO. (2018a). *Currículo do Espírito Santo: área de conhecimento Ciências da Natureza.* Vitória: SEDU.

ESPÍRITO SANTO. (2018b). *Currículo do Espírito Santo: área de conhecimento Matemática.* Vitória: SEDU.

EUCLIDES. (2009). *Os Elementos* (1 ed.). (I. Bicudo, Trad.) São Paulo: Unesp.

FREIRE, P. (2003). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

HEFEZ, A. (2016). *Aritmética.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM.

INEP. (2019). *Ministério de Educação.* (Inep/MEC, Ed.) Acesso em 7 de julho de 2022, disponível em Relatório Brasil no Pisa 2018: versão preliminar: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf.

INEP. (2022). *Diretoria da Avaliação da Educação Básica.* (Inep/MEC, Ed.) Acesso em 03 de março de 2023, disponível em Sistema de Avaliação da Educação Básica 2021: https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/apresentacao_saeb_2021.pdf.

INEP. (2023a). *Diretoria de Avaliação de Educação Básica.* (Inep/MEC, Ed.) Acesso em 7 de abril de 2023, disponível em Notas sobre o Brasil no PISA 2022: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/pisa_2022_brazil_prt.pdf.

INEP. (2023b). *Ministério da Educação.* (Inep/MEC, Ed.) Acesso em 7 de abril de 2024, disponível em Programa Internacional de Avaliação de Estudantes Pisa 2022: resultados: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/apresentacao_pisa_2022_brazil.pdf.

IRACEMA, M., & DULCE, S. (2012). *Comentários para Matemática: ideias e desafios* (Vol. 6). Rio de Janeiro: Saraiva.

KOBASHIGAWA, A., ATHAYDE, B., MATOS, K., CAMELO, M., & FALCONI, S. (2008). Estação Ciência: Formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Em Anais, *Seminário Nacional ABC na Educação Científica.* São Paulo.

KUKUSHKIN, N., & CAREW, T. (julho de 2017). Memory Takes Time. *Neuron, 95*, pp. 259-279. doi::10.1016/j.neuron.2017.05.029.

LIMA, D. F. (jan./abr. de 2018). A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de Física Moderna no Ensino Médio. *Triângulo, 11*, pp. 151-162. doi:10.18554

MAIESE, M. (março de 2017). Transformative Learning, Enactivism, and Affectivity. *Studies in Philosophy and Education, 36*, pp. 197-216. doi:10.1007/s11217-015-9506-z

MOREIRA, M. (março de 2012). Al final, que es aprendizaje significativo? *Revista Curriculum*, pp. 29-56.

PARANÁ. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática.* Paraná: Secretaria de Estado da Educação do Paraná.

PIERRO, B. d. (março de 2022). Revista Pesquisa FAPESP. *Embates teóricos marcaram história da educação matemática, 313*. São Paulo. Acesso em junho de 2024, disponível em https://revistapesquisa.fapesp.br/para-alem-de-teoremas-e-equacoes/

POZO, J., & ECHEVARRIA, M. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Em J. POZO, *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender.* Porto Alegre: Artmed.

SAEB. (2018). *Ministério de Educação.* (Inep/MEC, Ed.) Acesso em 07 de abril de 2023, disponível em Escala de proficiência de matemática 9º ano do Ensino Fundamental: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2018/MT_9EF.pdf.

SANTOS, J., FRANCA, K., & SANTOS, L. (2007). Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. *Dificuldades na aprendizagem de Matemática*. São Paulo: Centro Universitário Adventista de São Paulo.

SILVA, T., & GARNICA, A. (jan./jun. de 2013). A coleção Matemática - Curso Ginasial do SMSG: uma análise. *Amazônia: Revista de Educação em*

Ciências e Matemática, 9, pp. 51-74. Acesso em 15 de junho de 2024, disponível em https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2022/2377

SKOVSMOSE, O. (2001). *Educação Matemática crítica: a questão da democracia* (6 ed.). Campinas: Papirus.

STAHL, S., DAVIS, R., KIM, D., LOWE, N., CARLSON, R., FOUNTAIN, K., & GRADY, M. (agosto de 2010). Play it again: The master psychopharmacology program as an example of interval learning in bite-sized portions. *CNS spectrums*, pp. 358-371. Acesso em 2024 de junho de 23, disponível em https://www.researchgate.net/profile/Stephen-Stahl/publication/249008560_416-MPP_PlayItAgain/links/02e7e51e1f044483b7000000/416-MPP-PlayItAgain.pdf

TAPIA, J., & FITA, E. (2015). *A motivação em sala de aula: o que é, como faz* (3 ed.). São Paulo: Loyola.

VALENTE, J. (2011). Educação a distância: criando abordagens educacionais que possibilitam a construção do conhecimento. Em V. ARANTES, *Educação a distãncia: pontos e contrapontos.* São Paulo: Summus.

ANEXO A - ESCALA DE PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nível[1]	Descrição do Nível
Nível 1 Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225	Os estudantes provavelmente são capazes de: **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros.

Nível[1]	Descrição do Nível
	Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores. Analisar dados dispostos em uma tabela simples. Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Localizar um ponto em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas. Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada. Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. **GRANDEZAS E MEDIDAS** Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema. Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário. Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema. Localizar números inteiros negativos na reta numérica. Localizar números racionais em sua representação decimal. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.
Nível 5 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/ redução. Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **GRANDEZAS E MEDIDAS** Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. Determinar o volume através da contagem de blocos. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Associar uma fração com denominador dez à sua representação decimal. Associar uma situação problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares.

<table>
<tr><th>Nível[1]</th><th>Descrição do Nível</th></tr>
<tr><td></td><td>Determinar, em situação-problema, a adição e multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros.

Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros.

Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>Nível 6
Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350</td><td>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:
ESPAÇO E FORMA

Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais.

Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano.

Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência, com o apoio de figura.

Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações

Comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de seus respectivos ângulos opostos.

Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos.

GRANDEZAS E MEDIDAS

Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação problema.
Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

Reconhecer frações equivalentes.

Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa.

Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal.

Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais,

com constante de proporcionalidade não inteira.

Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha

parênteses, envolvendo números naturais.

Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou um acréscimo percentual.

Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.</td></tr>
</table>

Nível[1]	Descrição do Nível
Nível 7 Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus. Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes diferentes do primeiro. Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentido horário e anti-horário. Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras. Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos. **GRANDEZAS E MEDIDAS** Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras. Determinar a área de um retângulo em situações-problema. Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas. Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo, sem o apoio de figura. Converter unidades de medida de volume, de m^3 para litro, em situações-problema. Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema. Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes. Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros. Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros. Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros positivos e negativos. Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais. Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento. Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria. Associar uma fração à sua representação na forma decimal.

Nível [1]	Descrição do Nível
	Associar uma situação problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau. Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares e vice-versa. Resolver problemas envolvendo equação do 2º grau. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Determinar a média aritmética de um conjunto de valores. Estimar quantidades em gráficos de setores. Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas. Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano. Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.
Nível 8 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles, com o apoio de figura. **GRANDEZAS E MEDIDAS** Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema. Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram. Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal. Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal. Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais
Nível 9 Desempenho maior ou igual a 400	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

[1] A Prova Brasil não utilizou itens do 9º ano que avaliam as habilidades do Nível 0. Os estudantes do 9º ano com desempenho menor que 200 requerem atenção especial, pois ainda não demonstram habilidades muito elementares que deveriam apresentar nessa etapa escolar.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Uma proposta didática para o ensino de MMC e MDC no Ensino Médio”

Jegiane Carla Favoreto Mariano

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 25/07/2024 por:

____

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Orientador(a) – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Membro Interno – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Napoleón Caro Tuesta
Membro Externo – UFPB

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo – Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES │ 29075-910 │ (27) 4009-2474 │www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PMPM – profmat.ufes@gmail.com