INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – CAMPUS SÃO PAULO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JÉSSICA MARIA MUSSI DE SOUZA

A NOÇÃO DE INFINITO: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

SÃO PAULO - SP
2024

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

JÉSSICA MARIA MUSSI DE SOUZA

A NOÇÃO DE INFINITO: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

SÃO PAULO - SP
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir ingressar em um programa de mestrado profissional, por ter me mantido firme, esperançosa e dedicada durante todo o tempo destinado a essa dissertação.

Agradeço também a minha família, namorado e amigos que sempre me apoiaram e incentivaram nos momentos em que passei mais dificuldades, estavam ao meu lado, me ajudando no que foi preciso.

E por fim, agradeço a todos os professores do Instituto Federal de São Paulo, campus São Paulo e Bragança e em especial ao meu orientador, Rogério Ferreira da Fonseca.

RESUMO

O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma sequência didática sobre cardinalidade de conjuntos infinitos, baseada na Teoria das Situações Didáticas, voltada para a Educação Básica. Um dos principais objetivos é investigar a utilização dessa sequência e destacar as potencialidades e os desafios em uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Para tanto, foram utilizados procedimentos metodológicos, em especial, elementos da pesquisa participante de cunho qualitativo, com quinze alunos do Ensino Médio de uma escola estadual. Os principais resultados indicam que mesmo com a dificuldade nas noções de inclusão e cardinalidade dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, a abordagem proporcionou um interesse maior por parte dos alunos nesses conteúdos, além de favorecer a relação entre professor e aluno e entre os próprios alunos, criando um ambiente propício, interativo e colaborativo, no qual os alunos desenvolveram autonomia, bem como superaram algumas dificuldades.

Palavras-chave: Teoria da Situações Didáticas; Conjuntos Infinitos; Cardinalidade; Educação Básica; Sequência de Atividades.

ABSTRACT

The present academic work deals with the development of a didactic sequence on the cardinality of infinite sets, based on the Theory of Didactic Situations, geared towards Basic Education. One of the main objectives is to investigate the use of this sequence and highlight the potentialialities and challenges, in a public school in the state of São Paulo. To this end, methodological procedures were used, in particular, elements of qualitative participant research, with fifteen high school students from a state school. The main results indicated that despite difficulties in understanding the inclusion and cardinality of natural, integer, rational, and real numbers, the approach increased students' interest in these concepts, in addition to improving the relationship between teacher and student and among the students themselves, creating a conducive, interactive and collaborative environment, in which students developed autonomy, as well as overcoming some difficulties.

Keywords: Theory of Didactic Situations; Infinite Sets; Cardinality; Basic Education; Activity Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$ - Conjunto de números naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto de números inteiros

$\subset$ - Contido

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

É com prazer que descrevo a seguir um pouco da minha trajetória pessoal, profissional e acadêmica.

Nasci no dia 28 de outubro de 1999, na cidade de Atibaia, interior de São Paulo. Minha família sempre morou na cidade de Mairporã, onde resido desde meu nascimento, iniciei meus estudos na rede pública municipal e concluí o Ensino Médio, no ano de 2016, em uma escola particular. Em 2017, iniciei minha carreira acadêmica no Instituto Federal de São Paulo, campus Bragança Paulista, cursando Licenciatura em Matemática, no período matutino, momento em que as noções de infinito se tornaram presentes em minha vida.

Perpassando pelas disciplinas obrigatórias da faculdade os conteúdos sobre infinito apareceram, mas sempre de uma maneira superficial, até a disciplina de Análise Real, na qual a cardinalidade dos conjuntos numéricos foi estudada de forma aprofundada.

Em meados de 2020, quando a pandemia se espalhou pelo mundo, as aulas presenciais foram suspensas num primeiro momento, retornando, de maneira remota, em outubro do mesmo ano. Por consequência, minha colação de grau ocorreu somente em abril de 2021, ainda de maneira online.

Ainda no ano de 2021, fiz a inscrição para professores contratados na Rede Estadual de Ensino e para o Exame Nacional de Acesso no Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Em março fui chamada para lecionar em duas escolas estaduais, de forma semi-presencial, e desde então atuo na Rede, na cidade de Mairiporã. Lecionei em todas as séries do Ensino Fundamental II e nos 1º e 2º anos do Ensino Médio, nas disciplinas de física e matemática.

Trabalhei também, durante um ano em um escola particular da cidade de Mairiporã, onde lecionava aulas de físicas para alunos dos 6º, 7º e 8º anos, contribuindo para minha experiência em rede privada.

Ingressei no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em 2022, com muita alegria e satisfação, pois considerava um mestrado com muitas dificuldades e acreditava que não conseguiria passar no Exame de Acesso logo na primeira tentativa. Foi um curso muito desafiador, que exigiu muito estudo e determinação. Em diversos momentos do curso, principalmente nas primeiras disciplinas, o conteúdo de conjuntos infinitos apareceu e foi mais fácil para mim, pois já tinha passado por isso na graduação.

Minha paixão pela matemática vem desde muito nova, sempre adorei a disciplina e tive professores ótimos que sempre me apoiaram e motivaram a ser como eles, além da minha família e amigos que sempre me incentivaram nos estudos. Na escola sempre ajudava os colegas de sala que tinham dúvidas e durante a graduação dava aulas particulares para pessoas conhecidas e ex-colegas da escola particular.

O brilho nos olhos aos ver os estudantes entenderem o conteúdo é o que me fascina e me encanta, motivada por isso e interessada em despertar nos alunos um entendimento significativo nas aulas de matemática, me propus a desenvolver uma atividade, proposta por Gonçalves (2023), baseada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), em sala de aula para os estudantes que lecionava no ano de 2023.

1 INTRODUÇÃO

Dada a dificuldade histórica dos alunos sobre o tema **infinito matemático**, relacionada à epistemologia das noções matemáticas, em específico as noções de inclusão e cardinalidade de conjuntos infinitos, Gonçalves (2023) elaborou uma sequência de atividades com o intuito de provocar e despertar os conhecimentos prévios dos estudantes e suas curiosidades sobre esses assuntos, corroborando a compreensão e construção de novos saberes. As atividades, no entanto, não foram aplicadas em sala de aula.

Com o objetivo de aplicar tais atividades, a partir de uma abordagem significativa que, de acordo com Moreira (1999), é um processo que relaciona uma nova informação com uma estrutura específica do conhecimento do estudante, buscando aproveitar todos os conhecimentos já adquiridos e a partir desses construir novas aprendizagens, realizamos uma investigação empírica, proporcionando momentos de construção de um conhecimento novo apoiado em conexões com o conhecimentos prévios. O intuito é contribuir com a aprendizagem dos alunos durante as aulas de matemática, principalmente em relação à noções que envolvem o conceito de infinito matemático.

De acordo com as algumas pesquisas, como Siqueira e Lorin (2020) e (2021) e Lorin e Batista (2023), desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática, a aprendizagem do conceito de “infinito” envolve a necessidade de superação de obstáculos epistemológicos. Isso, agregado a uma possível falta de motivação no estudo de noções matemáticas, bem como falta de dedicação e empenho, podem gerar obstáculos difíceis de serem superados no aprendizado de noções que envolvem o conceito de infinito, como os conjuntos numéricos.

Por meio da história da matemática é possível vislumbrar as controvérsias que envolvem a evolução da noção de infinito. Durante séculos, tudo que esbarrava na noção de “infinito” era desafiador, pois além da dificuldade em definir tal conceito, estava em jogo a disputa de questões filosóficas e religiosas, que apontavam paradoxos nas tentativas de validação da noção de infinito, como os paradoxos de Zenão[1].

No intuito de contribuir com estratégias que auxiliem na superação de

[1] Contradições ou oposições aparentes apresentadas por Zenão de Eleia, filósofo que procurava mostrar as constrovérsias presentes em diversas teses de sua época.

dificuldades relacionadas ao estudo introdutório da noção de infinito e procurando formas de tornar as aulas de matemática mais atrativas, propomos o uso de uma sequência didática que têm o potencial de desafiar e motivar os alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos. (...) Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (Brasil, 1998, p. 41-42)

Buscamos, através da sequência didática, provocar o uso dos conhecimentos prévios dos estudantes. De maneira espontânea e, também, direcionada, eles poderão utilizar diferentes procedimentos que, por sua vez, serão a base para que haja a construção de uma nova aprendizagem, ou seja, “um processo de interação, por meio do qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando este material e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem” (Moreira, 1999, p. 152).

A fim de buscarmos essa ancoragem nos conceitos já conhecidos e aprimorarmos os estudos em novos temas, a sequência didática baseia-se na “Teoria das Situações Didáticas”, de Brousseau (2008), na qual o aluno é protagonista do seu conhecimento, de modo que essas atividades motivem e desafiem os estudantes a desenvolvê-las, sendo o professor o mediador de todo esse processo.

Para tanto, foi proposto o desenvolvimento de atividades com a turma do 1º ano do Ensino Médio (2023), a qual cursava os 7º e 8º Anos em 2020 e 2021, período em que ocorreu a suspensão das aulas presenciais. Foi notória a não participação dos alunos nas atividades escolares remotas – fator que pode ter prejudicado a aprendizagem da classe em relação aos conteúdos – sendo pertinente, desse modo, o aprimoramento desses estudos. Segundo Gonçalves (2023), a sequência didática pode ser, inclusive, desenvolvida no Ensino Médio, já que pode contribuir no aprendizado dos estudantes.

Como objetivo geral, pretendemos trabalhar a motivação dos estudantes quanto aos estudos de noções matemáticas, por meio de questionamentos, debates, experimentações e argumentações, recorrendo a atividades que contrapõem o modelo de ensino que toma como base a apresentação de definições, exemplos e exercícios, respectivamente. Dentre os objetivos específicos, buscamos favorecer a construção de conhecimentos em relação à noção de infinito, mais especificamente, aperfeiçoar o entendimento e a interpretação dos estudantes sobre conjuntos infinitos e cardinalidade, além de investigar as potencialidades da sequência didática para promover a participação, a colaboração e a motivação dos alunos, assim como identificar possíveis desafios nesse percurso.

1.1 Organização da dissertação

Organizamos esse trabalho da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos uma breve revisão de literatura, que nos ajudará a entender melhor o panorama de investigações relacionadas à noção de infinito; no capítulo 2, discorremos sobre alguns elementos do referencial teórico, baseado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008), assim como destacamos os obstáculos epistemológicos de Bachelard (2005 [1996]) e as considerações acerca da dissertação de mestrado de Gonçalves (2023), na qual se encontram as atividades que foram aqui adaptadas. Nesse mesmo capítulo serão descritos os procedimentos metodológicos e o método de pesquisa. No terceiro capítulo são apresentadas as atividades adaptadas, da forma como foram realizadas, tendo como base o trabalho do Gonçalves (2023); no quarto capítulo tecemos algumas considerações acerca das atividades, a partir das respostas obtidas dos alunos, inserindo as percepções e os desafios encontrados durante sua realização, baseando-nos nas ideias de Brousseau (2008). E, por fim, versamos sobre as considerações finais, no qual relacionamos a teoria com a prática, apresentando os principais desafios epotencialidades.

1.2 Uma breve revisão bibliográfica

Na busca por melhor entender a problemática em que se insere nosso estudo, realizamos uma pesquisa sucinta sobre produções e contribuições acadêmicas acerca do tema infinito. Fizemos uma breve revisão bibliográfica, que consiste em sistematizar aspectos de interesse na literatura, sem a pretensão de esgotar o assunto.

Na sequência, apresentamos de forma organizada e selecionada alguns trabalhos que encontramos. Esses trabalhos nos ajudam a entender melhor as complexidades envolvidas na temática e contribuem com a justificativa do mesmo, deixando ainda conjecturas para outras investigações, uma vez que evidenciam o que já foi feito e o que ainda se pode fazer (Mendes; Pereira, 2021).

O levantamento da literatura foi realizado na base de dados do *Google* Acadêmico e no Portal de Periódicos/CAPES, entre os meses de maio e julho de 2024; com base nisso, foram selecionadas seis referências que corroboram esse estudo do infinito. Ressaltamos que a busca foi realizada considerando os anos de 2015 a 2023, com o intuito de trazer publicações recentes que versassem sobre o tema e que analisassem situações vivenciadas por professores e alunos que frequentemente lidam com esse tópico em sala de aula.

Os títulos apresentados a seguir apareceram a partir da busca dos seguintes termos: “ensino da noção de infinito” e “dificuldade da noção de infinito”, pois as buscas realizadas com a palavra-chave “infinito”, de maneira geral, resultavam em conteúdos mais amplos, que não tratavam apenas da matemática, mas sim de outros ramos de estudo, como filosofia e sociologia, fugindo, dessa forma, do escopo desta pesquisa.

No quadro abaixo apresentamos os autores, título dos trabalhos, tipo/gênero textual, ano de publicação e local de publicação:

Quadro 1 - Levantamento dos textos

	Nome do (a) autor (a)	Título do trabalho	Tipo e ano de publicação	Instituição ou revista
1.	Fernanda Kelly da Silva Siqueira e João Henrique Lorin	Obstáculos epistemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso de matemática.	Revista/2020	Revista Paranaense de Educação Matemática
2.	João Henrique Lorin e Irinea de Lourdes Batista	Uma discussão a respeito da natureza do conceito de infinito.	Revista/2023	Revista RIPEM – SBEM
3.	Fernanda Kelly da Silva Siqueira e João Henrique Lorin	Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras.	Revista/2021	Revista ACTIO: Docência em Ciências
4.	Ygor Faria Paranhos	Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico.	Dissertação/2023	UERJ
5.	Luiz Marcos Cavalcanti Pereira	A noção de infinito na educação básica: Reflexões e proposta.	Dissertação/2015	UNIGRANRIO
6.	Tatiana de Souza Lima Santos	O conceito de infinito: uma abordagem a partir de resolução de problemas.	Dissertação/2015	UFBA

Fonte: Elaboração própria.

Na sequência, teceremos algumas considerações acerca de cada um dos trabalhos indicados no Quadro 1. Identificaremos, de forma implícita ou explícita, em cada um deles, os seguintes elementos: objetivos, justificativas, referencial teórico, procedimentos metodológicos e principais resultados.

Iniciamos a análise dos dados pelos três primeiros artigos que tratam, de uma maneira geral, da conceituação do termo infinito: no artigo 1, dos autores Siqueira e Lorin (2020), o objetivo volta-se à investigação das respostas de uma pesquisa feita com ingressantes e concluintes de um curso de matemática, a fim de estabelecer uma relação entre as respostas dos alunos e os obstáculos referentes ao conceito de infinito, identificados em grande parte da literatura. Nesse artigo, os autores apontam cinco obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem do conceito de infinito,

> [...] são eles: infinito ilimitado, que considera todo e qualquer ente infinito é ilimitado; constrição ou achatamento da cardinalidade, que considera todos os conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade; parte-todo, que considera que o todo é sempre maior que uma de suas partes; estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas, que se apresenta como a dificuldade em aceitar a bijeção entre dois conjuntos infinitos, sendo um dos conjuntos, parte própria do outro e o limite é algo que se aproxima, mas não chega, que se configura em pensar o limite apenas por meio de aproximações e nunca finalizar o processo (Siqueira; Lorin, 2020, p. 569).

Com a leitura desse trabalho é possível perceber que, mesmo com alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática, a barreira formada quando se trata do tema infinito continua, mostrando que o caminho percorrido durante a história contribuiu para a dificuldade que encontramos hoje no ensino básico, ressaltando a importância de conhecermos os obstáculos epistemológicos.

Essa pesquisa, ainda, indica a necessidade de um tratamento adequado às noções de infinito, recomendando que o professor encontre maneiras para que o aluno supere as dificuldades relacionadas ao tema. Para isso, faz-se necessária a realização de atividades e a utilização de ferramentas que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem.

No artigo 2, publicado por Lorin e Batista (2023), é feito um levantamento histórico do conceito de infinito, a fim de identificar e descrever mudanças de seus significados no decorrer da história. O estudo resgata o pensamento grego antigo, perpassando pela obra de Bolzano, chegando até a teorização apresentada por Cantor, no intuito de justificar as dificuldades encontradas no ensino básico sobre o conceito de infinito, principalmente ao analisar os programas escolares.

Para Lorin e Batista (2023), a inadequação na educação básica a respeito do conceito de infinito pode dificultar ainda mais o seu entendimento, sendo, esse, um dos obstáculos mais complexos a ser superado no ensino de matemática. Nesse sentido, os autores enfatizam a necessidade de atividades e situações que construam uma linha de raciocínio para que os alunos consigam superar as dificuldades encontradas quando se trata do conceito apresentado.

O artigo 3, de Siqueira e Lorin (2021), aborda o conceito de "infinito atual" e "infinito potencial" em revistas brasileiras, apresentando uma revisão sistemática de literatura, na qual foram feitas buscas no site da CAPES, pelas palavras "infinito", "infinito atual", "infinito potencial", "Georg Cantor" e "epistemologia do infinito", com a finalidade de contribuir no delineamento de um panorama das discussões acerca do tema.

Após a separação do material, foi realizada uma divisão em duas unidades de contexto, sendo elas: ensino-aprendizagem do conceito de infinito na matemática e abordagem acerca da natureza do infinito. Os autores concluíram que há uma grande dificuldade, tanto dos professorres, quanto dos alunos, em diferenciar o infinito em potência e o infinito em ato (Siqueira; Lorin, 2021).

Levando em conta os três artigos citados acima, percebemos a necessidade de construir diferentes abordagens no ensino de infinito na educação básica, mostrando alguns dos principais desafios enfrentados por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem da noção de infinito.

Dando continuidade à revisão de literatura, abordaremos três dissertações, nas quais encontramos exemplos de abordagens que têm o potencial de contribuir com o ensino e a aprendizagem da noção de infinito em sala de aula. Tais abordagens se fazem necessárias para romper com o modelo de ensino de matemática baseado, exclusivamente, em aulas expositivas, que seguem a forma de apresentação de definições, exemplos e exercícios, sem a participação ativa dos estudantes.

Assim, na dissertação 4, apresentada por Paranhos (2023), encontramos uma maneira de apresentar o conceito de infinito de forma lúdica, a partir de contação de histórias, algumas delas encontradas no trabalho de Chalom e Weiss (2019) e outras criadas pelo próprio autor, inspirado pela história célebre do "Hotel de Hilbert" [2], com o objetivo de possibilitar uma melhor compreensão do finito e do infinito matemático para crianças do nível básico de ensino.

[2] Uma de suas exemplificações para distinguir características de um conjunto finito e de um conjunto infinito, apresenta um hotel com número finitos de quartos, com todos esses quartos ocupados, não havendo lugar para novos hospédes, comparado com um hotel com um número infinito de quartos, onde a lotação não seria um problema.

Paranhos (2023) desenvolve formalmente a teoria dos números naturais, apresentando definições de conjuntos finitos e infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis, números cardinais, entre outros, para basear e fomentar todas as histórias de criação própria. Como principais resultados, destaca a elaboração das suas histórias, que explicam algumas definições e propriedades de forma lúdica e prazerosa para os estudantes, além de contribuir, segundo o autor, “como fonte bibliográfica e inspiração para outras pessoas, professores ou não, na elaboração de mais histórias” (Paranhos, 2023, p.121).

Na dissertação 5, apresentada por Pereira (2015), foi realizado um levantamento de dados para analisar de que forma o conceito de infinito é apresentado nos materiais didáticos do ensino médio, nas escolas públicas do Rio de Janeiro, além de demonstrar um produto educacional, contendo um conjunto de atividades e textos para utilização em salas de aula com o ensino médio e colaborar com o ensino desse conceito.

Após análise, Pereira (2015) conclui que o material didático possui um conteúdo mínimo para se construir um aprendizado eficaz sobre o conceito de infinito, visto que não foi dado o foco necessário. Os autores do material ressaltam que o professor pode criar ambientes com maior aprofundamento para a construção de um conhecimento, a partir de diálogos, interpretações e da aplicação do conceito em situações do dia a dia (Pereira, 2015).

A sexta dissertação indicada no Quadro 1, de Santos (2015), tem também como objetivo auxiliar os professores no ensino-aprendizagem do conceito de infinito, além de despertar o interesse dos alunos, pretendendo chegar a esse objetivo a partir de uma sequência de problemas e de situações-problema que envolvam o conceito de infinito.

As atividades desenvolvidas abrangem tanto problemas clássicos, inspirados em paradoxos da antiguidade, quanto problemas desafiadores apresentados em Olímpiadas de Matemática, que tratam de cardinalidade e bijeção, por exemplo (Santos, 2015). Outra proposta de se trabalhar esse conceito em sala de aula é abordada na dissertação: trazer desafios para os estudantes, a partir de enunciados criativos e pertinentes.

A partir dos trabalhos citados anteriormente, percebemos, em evidência, a necessidade de outras estratégias de ensinar o conceito de infinito. Muitos trabalhos apresentam atividades e sugerem potencialidades para apresentar o conteúdo, mas não as realizam, de fato, em sala de aula; a falta do estudo empírico acaba não indicando quais as reações dos alunos, as respostas, a análise dessas respostas, se a abordagem diferenciada foi pertinente ao conceito de infinito e se contribuiu, minimamente, para a superação dos obstáculos epistemológicos.

Ressaltamos a importância de uma pesquisa empírica, na qual o pesquisador aplica e analisa uma atividade juntamente com os alunos. Sabemos que muitos professores/pesquisadores usam diversas estratégias de ensino, mas raramente apresentam isso em um trabalho acadêmico, o que reforça mais ainda a necessidade da nossa pesquisa.

Deste modo, com o objetivo de desenvolver uma atividade em sala de aula, para que possamos observar na prática como os alunos agem e reagem ao serem expostos a esse tema, optamos pela aplicação de uma sequência de atividades, nos baseando na Teoria das Situações Didáticas, de Brosseau (2008), feita por Gonçalves (2023).

O que proporciona uma pesquisa inédita, no sentido de aplicação de uma atividade com 15 alunos de uma escola estadual, com a intenção de analisar as respostas dos estudantes, ainda que existam diferentes trabalhos, com várias possibilidades de encaminhamentos, essa pesquisa contribuirá e servirá de referência para a comunidade acadêmica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 Referencial Teórico

Para Brousseau (2008), uma situação didática é aquela que leva em consideração todo o contexto social no qual o aluno está inserido, incluindo o professor e a comunidade escolar. Nessa teoria, o personagem principal é o aluno, que deve ter um papel ativo, enquanto o professor tem a responsabilidade de mediar e orientar os estudantes, fazendo questionamentos e organizando o trabalho desenvolvido, além de ser o encarregado por direcionar as respostas dos alunos e acrescentar algo, se necessário – sem desconsiderar o processo de aprendizagem, que se torna um fator principal para a construção e evolução do saber matemático.

Para entendermos melhor é preciso definir as situações didáticas e adidáticas, consoante Brousseau (2008). Para o autor, as situações didáticas são compostas por todo o contexto, que envolve professor, aluno e sistema educacional, com o intuito de ensinar um saber matemático ou, ainda, controlar a aprendizagem desse saber. Nesse sentido, as interações dos alunos dependem de todo o processo que precisa ser feito para o desenvolvimento dessa situação, sendo o jogo de interações do aluno e seu meio, que envolve o professor, definido como situação didática (Brousseau, 2008).

As situações adidáticas se referem à autonomia do aluno para o desenvolvimento do seu aprendizado. O próprio estudante, a partir de seus conhecimentos prévios, sua relação com o meio e todo o contexto que o cerca, responderá as atividades ou resolverá os problemas. Segundo Brousseau (2008):

> [...] O aluno sabe que o o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se *adidática.* (Brousseau, 2008, p. 35, grifo do autor)

O autor ressalta que definir as etapas de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização, que serão base para o referencial teórico e para a análise da aplicação da sequência didática, a partir das quais os alunos vão avançando no decorrer das atividades, se fazem necessárias para a efetiva realização de um projeto dialético e tendem a provocar o funcionamento do saber e dos conhecimentos, que serão transformados em saberes (Brousseau, 2008).

Cada situação pode ser considerada uma fase diferente, com funções específicas. Na **situação didática de devolução**, por exemplo, o professor propõe ao aluno parte da responsabilidade de uma situação de aprendizagem ou de um problema. Nesse caso, o interesse do aluno pelo ensino precisa acontecer, sendo necessário criar um ambiente em que o estudante se sinta confortável e motivado para buscar uma resposta para o problema estabelecido; o conhecimento não é transmitido diretamente do professor para o aluno, mas aos poucos o professor instiga os alunos para que eles busquem possíveis soluções para o problema proposto e façam suas próprias conjecturas.

Já na **situação didática de ação**, no momento em que o estudante decide uma forma de realização da sequência, ele escolhe o melhor método ou a melhor forma de resolução, a partir de suas formulações, hipóteses e sugestões, baseado, também, na sua própria motivação. O aluno decide a maneira de agir e age.

Na **situação didática de formulação**, o processo de aprendizagem passa a ser mais formalizado, dando início a uma construção mais teórica do saber matemático. Nessa fase também há uma busca por uma linguagem mais própria da matemática, com o intuito de conseguir expressar seu entendimento:

> A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação (Brousseau, 2008, p. 29).

Em relação à **situação didática de validação**, o professor media as explicações e justificativas feitas pelos alunos, nesse momento, obrigatoriamente, com uma linguagem matemática apropriada, na busca de demonstrar que seu entendimento está correto, sendo essa construção integralmente teórica. O emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. “[...] Juntos encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele” (Brousseau, 2008, p. 30).

Por fim, temos a **situação didática de institucionalização**, na qual o papel do professor aparece de forma mais explícita e é fundamental para o fechamento e a consolidação do processo de aprendizagem. Nessa situação, o professor direciona as formulações dos alunos, apresenta mais informações, se necessário, e consegue identificar se o assunto abordado foi, de fato, entendido pelos estudantes. É importante ressaltar que essa situação pode acontecer tanto em uma situação de ação – quando se reconhece o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência – como em uma formulação (Brousseau, 2008). Ademais, é nesse momento que o professor relaciona o conteúdo, com outros temas trabalhados:

> O fato de o aluno "oficialmente" levar em conta o objeto de conhecimento e de o professor considerar a aprendizagem do aluno é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático: esse duplo reconhecimento é o objeto da institucionalização (Brousseau, 2008, p. 102).

Destacamos que esta última situação não foi apresentada no início dos estudos de Brousseau, pois ele entendia que apoiado nas situações apresentadas anteriormente seria o suficiente. Entretanto, no decorrer de seus estudos, percebeu que os professores sentiam a necessidade de um fechamento, de uma revisão daquilo que era apresentado durante a atividade e, só assim, poderiam seguir para o próximo conteúdo. Em virtude disso, foi acrescentada a situação de institucionalização.

Assim, no decorrer das situações, o aluno deixa de ser um mero receptor de conhecimento, e passa a ser um grande formulador de hipóteses e, enquanto isso acontece, o professor age como um mediador do processo de construção do conhecimento. Ao final, o professor retoma o seu papel e organiza todas as formulações feitas pelos estudantes. Brousseau (2008) ressalta que o papel do professor também é institucionalizar.

As análises dos resultados também serão feitas a partir da teoria de Brousseau (2008), portanto, durante a análise do desenvolvimento das sequências, serão apresentadas mais informações sobre os diferentes aspectos relacionados às situações didáticas e suas etapas. Vale ressaltar que as situações didáticas não são ferramentas separadas e distintas; cada uma delas é considerada como uma etapa para identificação e validação do aprendizado. É a partir delas que, em uma sequência de atividades, é possível proporcionar ao aluno uma aprendizagem.

Baseado nessa teoria, Gonçalves (2023) desenvolveu uma sequência de atividades, também objeto deste trabalho, que iremos desenvolver com uma turma de alunos, com objetivo de analisar as potencialidades e desafios da mesma. A aplicação foi realizada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Segundo o currículo do Estado de São Paulo, os conteúdos de números reais e conjuntos são trabalhados nesse ano, o que possibilita o desenvolvimento de uma situação didática nessa turma.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) “é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidade da Educação Básica” (Brasil, 2018, p. 7) e trabalhar as competências e habilidades desse documento é obrigatório, contemplando a melhor maneira da formação dos estudantes. Alcançar essas habilidades usando a teoria das sequências didáticas é uma forma diferente de abordar alguns conteúdos, tentando formas que sejam distintas do método tradicional, onde só o professor transmite determinadas informações e o aluno é um simples receptor do conhecimento.

Com o intuito de superar os obstáculos epistemológicos que, segundo Bachelard (2005), são conflitos, problemas ou estagnação que causam a não aprendizagem de uma determinada habilidade, serão utilizadas as sequências didáticas para aperfeiçoar o conhecimento dos alunos no tema “Números Reais”.

Dessa forma, com a sequência desenvolvida baseada na teoria das sequências didáticas, aliada a uma implantação objetiva do currículo vigente, além do objetivo de superar os desafios já citados, esperamos desenvolver um aprendizado mais satisfatório durante as aulas de matemática.

Oferecer uma aula pertinente e interessante para os estudantes é mais uma maneira de tentar romper com os métodos tradicionais de ensinar matemática, com a intenção de transformar a aprendizagem em um processo descontraído, mas sem romper com as intenções didáticas. Para Almeida (2019), um meio sem intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição dos conhecimentos pelos sujeitos, ou seja, é necessário que o professor possibilite um ambiente organizado e preparado para conseguir que os estudantes reflitam e progridam da maneira esperada.

2.2 Procedimentos metodológicos

A metodologia deste trabalho é qualitativa, do tipo experimental, e baseia-se no desenvolvimento de uma sequência de atividades, conforme proposto por Gonçalves (2023). Através da técnica de documentação direta, na qual o pesquisador faz o levantamento de dados na própria escola, juntamente com os estudantes, a partir de uma pesquisa de campo, definida por Lakatos (2017), pretendemos angariar informações sobre as dificuldades dos estudantes, a fim de verificarmos o nível de aprendizagem.

Para tanto, os estudantes responderam a sete questões abertas, de maneira livre, e a professora-pesquisadora organizará e analisará as respostas. Essa análise será feita a partir dos resultados esperados por Gonçalves (2023), comparada com as respostas dadas pelos alunos e articulada ao referencial teórico da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008).

Para início da pesquisa de campo, foram feitas a leitura e estudo aprofundados da dissertação de Gonçalves (2023), além da análise e adaptações das atividades propostas em seu trabalho. Após isso, realizamos buscas por referenciais teóricos que embasassem a Teoria das Situações Didáticas e a superação dos obstáculos epistemológicos, especificamente com os trabalhos de Brousseau e Bachelard.

A justificativa para a realização de uma atividade baseada na Teoria das Situações Didáticas se deve à dificuldade que os alunos enfrentam quando expostos ao tema das noções de infinito[3]. Além disso, os seis trabalhos apresentados na revisão bibliográfica mostraram as dificuldades de estudantes e professores em relação ao ensino e a aprendizagem desta noção.

Pensando na dificuldade dos alunos em assimilar o conceito de infinito e de cardinalidade e a fim de trazermos uma metodologia diferenciada para as aulas de matemática, na qual a aula não é somente expositiva e centrada no professor, o problema da pesquisa consiste em responder a seguinte questão: como abordar a noção de infinito na Educação Básica, no ensino de conceitos matemáticos, como conjuntos numéricos, inclusão e cardinalidade, de modo que seja possível confrontar os obstáculos epistemológicos e favorecer a aprendizagem dos estudantes?

Para abordar esse tema de forma significativa, de acordo com Moreira (1999), é necessário procurar e constatar evidências da compreensão significativa, por meio de questões e problemas apresentados de uma maneira nova e não familiar, para que uma nova informação se relacione com a estrutura do conhecimento e assim seja possível compreender o novo aprendizado.

Essa pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), sob n° 6.550.171, aprovado no dia 04 de dezembro de 2023. Após aprovação, a atividade foi realizada nos dias seguintes e a análise dos resultados foi feita nos meses posteriores.

[3] Conforme indicado por Sampaio (2009), na última questão de seu trabalho revela-se a grande dificuldade em relação à cardinalidade ao se tratar de conjuntos infinitos.

Realizamos uma pesquisa de campo com 15 alunos do 1º ano A, em uma escola localizada na cidade de Mairiporã - São Paulo. A sequência didática construída por Gonçalves (2023) possui uma série de oito atividades, porém por escolha nossa, realizamos as 7 primeiras, desenvolvidas em 5 aulas de 45 minutos, aplicadas no horário destinado às aulas de matemática.

3 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

No trabalho de Gonçalves (2023), no capítulo 6, é apresentada a proposta de sequência didática, na qual o autor descreve com detalhes as sugestões e os direcionamentos de cada atividade, além de retratar, no apêndice, cada uma delas, prontas para serem desenvolvidas. Apresentamos, a seguir, as atividades que adaptamos para aplicação em aula com os estudantes:

Atividade 1: Imaginem o conjunto formado por todos os alunos da turma de vocês, o qual podem chamar, por exemplo, de conjunto A. Em seguida, considere o conjunto formado pelos alunos desta turma que gostam de matemática, que podem chamar de conjunto M.

a) Qual desses conjuntos é maior, o conjunto A ou o conjunto M? Por quê?
b) Eles poderiam ter o mesmo tamanho? Explique em que situação isso ocorreria.
c) Podemos afirmar que o conjunto M está contido no conjunto A? Justifique.
d) E, você, consegue imaginar alguma situação em que o conjunto A estaria contido no conjunto M? Qual?

Atividade 2: Imaginem dois conjuntos, por exemplo, um formado pelos alunos do 1º ano A (conjunto A) e outro formado pelos alunos do 1º ano B (conjunto B). Pensem em formar duplas de alunos que não sejam da mesma turma, ou seja, cada aluno do 1º ano A fará par com um aluno do 1º ano B. Agora respondam:

a) O que podemos afirmar, a respeito do tamanho desses conjuntos, se algum aluno do 1º ano A ficar sem dupla?
b) E se for aluno do 1º ano B?
c) E se não sobrar nenhum aluno sem dupla?
d) Podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?

Atividade 3: Considere, agora, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Brasil, as quais recebem a denominação de “brasileiras”, a esse conjunto daremos o nome de B; e, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Estado de São Paulo, denominadas “paulistas”, o qual será chamado de conjunto P. Considerando que a população do Brasil sempre cresça mais (em quantidade absoluta) que a população do Estado de São Paulo, comente sobre as questões a seguir:

a) Podemos afirmar que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B? Por quê?
b) Todo paulista é brasileiro? E todo brasileiro é paulista?
c) Com base no item anterior, podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro?

Atividade 4: Cada estudante recebe dois canudos de plástico, em seguida, a turma é separada em grupos, direcionados pelo professor. Cada grupo constrói uma forma geométrica utilizando todos os canudos recebidos, de forma que os canudos fiquem encostados uns nos outros, ponta com ponta, fechando uma linha/figura, formando, por exemplo, um polígono. Comparem as figuras feitas e respondam às seguintes questões:

a) A forma geométrica de qual grupo possui mais canudos?
b) Podemos afirmar que uma delas está contida na outra?
c) Considerando cada canudo como uma unidade de medida de comprimento, quais os perímetros das formas geométricas de cada grupo?

Atividade 5: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto formado pelos números naturais, e X o conjunto formado por todos os números quadrados perfeitos. Conversem sobre as questões abaixo:

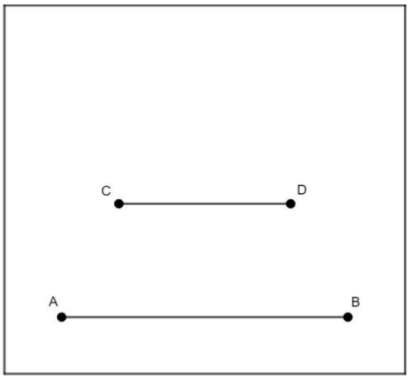
a) Qual desses dois conjuntos é maior? Ou seja, qual deles tem mais elementos?
b) Explique como chegou à conclusão apresentada no item anterior.

Atividade 6: Comparem as quantidades de elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{N}$ (naturais), por meio dos seguintes questionamentos:

a) Qual conjunto tem mais elementos: o dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o dos números naturais $\mathbb{N}$?
b) Qual dos dois conjuntos é maior?
c) É possível estabelecer uma relação biunívoca entre os dois conjuntos?
d) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está contido no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$? Quais são os elementos do conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$? Justifique suas respostas.

Atividade 7: A partir da figura com dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, AB e CD, como no exemplo abaixo:

Figura 1 – Atividade 7 - a



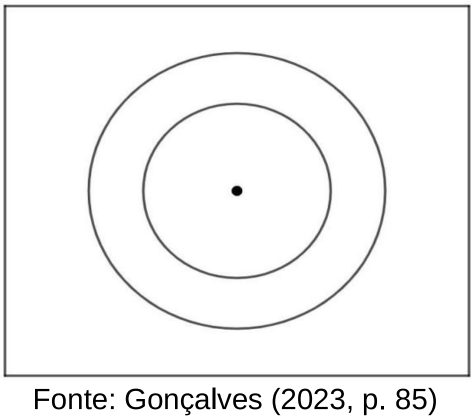
Fonte: Gonçalves (2023, p. 84)

a) Qual dos dois segmentos tem comprimento maior?
b) Qual deles tem mais pontos?
c) Onde existem mais pontos, no segmento de reta AB da figura, no segmento CD, em uma reta ou em um plano?
d) Qual dos conjuntos a seguir possui mais elementos, ou seja, qual é o maior?

- A: conjunto dos pontos que formam um segmento de reta.
- B: conjunto dos pontos que formam uma reta.
- C: conjunto dos pontos que formam um quadrado.
- D: conjunto dos pontos que formam um plano.
- E: conjunto dos pontos que formam um cubo.

Atividade 8: Sabemos que, assim como os polígonos, as circunferências são formadas por infinitos pontos. Com base neste fato, podemos propor o seguinte problema: Considere as duas circunferências concêntricas da Figura a seguir. Qual delas possui mais pontos?

Figura 2 – Atividade 8 - a



Fonte: Gonçalves (2023, p. 85)

Apresentamos as atividades aos alunos em uma folha impressa e expusemos, também, na televisão da sala de aula. Conforme avançavam nos exercícios, realizávamos a passagem dos slides, preparados para essa tarefa.

Em todas as atividades, retiramos as indicações que o autor deixou e colocamos apenas os enunciados das questões e as alternativas, para melhor entendimento dos estudantes. Na atividade dois, trocamos a "série" para turmas do "1º ano A" e "1º ano B", deixando-a mais próxima à realidade dos estudantes que realizariam a sequência.

Na atividade quatro, compreendemos que não seria viável a utilização dos calçados dos estudantes, por receio de uma possível vergonha ou constrangimento. No intuito de evitarmos esse problema, utilizamos canudos de plástico – que podem ser reutilizados e são de fácil manuseio –, possibilitando que os estudantes pudessem fazer as figuras na própria carteira. Das atividades de número cinco a sete, apenas retiramos as indicações feitas ao professor.

A atividade oito, apresentada anteriormente, não foi aplicada em sala de aula, por escolha nossa, já que entendemos ser suficiente os exercícios descritos de um a sete para explicar a relação de conjuntos infinitos e cardinalidade, além do fato de que esta última atividade (de número oito) suscitaria a explicação de outros conceitos envolvendo geometria.

Ressaltamos que as atividades foram realizadas gradativamente, conforme a progressão dos estudantes, e a cada novo raciocínio construído, colocávamos as informações na lousa, além de retomarmos alguns conceitos para auxiliar na construção do aprendizado.

4 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A escola contemplada pela pesquisa possui em seu cronograma algumas atividades que devem ser desenvolvidas durante o final do ano letivo, como diversos projetos próprios e avaliações externas, o que ocasionou um número menor de participantes durante a realização da sequência didática. Assim, os encontros voltados para o desenvolvimento deste trabalho foram reduzidos e ocorreram entre os dias 05 e 12 de dezembro de 2023.

4.1 Fase de planejamento

A partir da liberação do projeto pelo Comitê de Ética em Pesquisa, que aconteceu no dia 04 de dezembro, organizamos e planejamos as aulas da semana para sua aplicação.

O primeiro ano do Ensino Médio possui cinco aulas semanais de matemática e esse foi o tempo que planejamos para a realização as atividades. Deduzimos que as primeiras quatro atividades seriam realizadas de forma mais prática e que os estudantes conseguiriam fazer, sem maiores dificuldades, em no máximo duas aulas. Já as atividades de cinco a sete, acreditamos que os alunos teriam maiores dificuldades por envolver os conjuntos e a relação do infinito em retas e planos, então optamos por deixar três aulas para essas atividades restantes.

Como sugestão de Gonçalves (2023), cada atividade deveria ser realizada em duas aulas, sendo a primeira aula para perpassar pelas situações didáticas de devolução, ação e de formulação e a segunda aula para realizar as situações de validação e institucionalização.

Nesse sentido de desenvolvimento, planejamos cada atividade, listadas de um a sete, como uma situação didática, ou seja, em cada uma delas foram realizadas as cinco etapas, percorrendo as respostas dos alunos e a institucionalização dos objetos matemáticos. Para essa turma, entendemos ser suficiente uma aula para cada duas atividades, válidas para as atividades de um a quatro, já que essas sequências serviriam como preparação para as demais, para as quais reservamos uma aula cada.

4.2 Resultados esperados em cada atividade

Em relação à atividade um, esperamos que os alunos aprimorem seus conhecimentos sobre as noções de inclusão e cardinalidade de conjuntos, isto é, que eles respondam que o conjunto A é maior ou igual ao conjunto M, pois o número de alunos que gostam de matemática pode ser igual ao número de alunos da turma e exemplifiquem casos em que esse evento ocorra.

Na segunda atividade, segundo Gonçalves (2023), o objetivo é trabalhar sobre a noção de relação entre os elementos de dois conjuntos, envolvendo também a noção de inclusão e a possibilidade de estabelecer a relação biunívoca quando ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade, ou seja, esperamos que os estudantes relacionem a turma do 1º A com a do 1º B, comparando a quantidade de estudantes, pensando na formação de pares, percebendo qual turma tem mais pessoas e, a partir disso, as relacionem com a noção de inclusão.

Na terceira atividade, a ideia é reforçarmos as mesmas noções de inclusão e cardinalidade, mas com conjuntos maiores, que são a quantidade de pessoas nascidas no Brasil e as nascidas em São Paulo. Esperamos que eles respondam que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B e que consigam explicar por qual motivo isso é verdadeiro.

Já na atividade quatro, o principal objetivo é que os alunos entendam a noção de tamanho, referente ao número de elementos de cada conjunto formado a partir dos grupos. Sendo essa atividade mais aberta, é possível criar diferentes grupos e esperamos que os alunos percebam que a maior figura geométrica formada é a do grupo que tiver mais estudantes.

A partir da atividade cinco, as comparações serão feitas entre conjuntos infinitos e as relações de inclusão e cardinalidade também. Nessa atividade, esperamos que os alunos percebam que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros têm a mesma cardinalidade, pois é possível estabelecer uma relação biunívoca entre eles.

Na sexta atividade, esperamos que os alunos compreendam que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, apesar de ambos terem o mesmo número de elementos.

E, por fim, na atividade sete, esperamos que nos itens A, B e C, os alunos assimilem que dois segmentos de reta, de tamanhos diferentes, têm o mesmo número de pontos, ou seja, são conjuntos de pontos com o mesmo número de elementos. No item D, é importante que os estudantes apresentem justificativas para comprovar a igualdade de números de pontos em todos os casos que são apresentados na questão.

4.3 Fase de implementação

No dia da realização das atividades havia 19 alunos em sala. Vale ressaltar que um dos alunos não é alfabetizado e realizou uma atividade adaptada, enquanto outro aluno não participou efetivamente da aula, uma vez que optou por ficar o tempo todo no celular, sem se enturmar com nenhum grupo durante as dinâmicas. A atividade entregue por ele estava respondida de modo objetivo, assinalado, e o documento precisou ser entregue à Coordenação da escola.

Iniciamos a aula falando sobre a atividade, explicando sua utilização e entregando as autorizações que precisavam ser assinadas para que pudéssemos utilizar as respostas para análise e escrita da dissertação. Infelizmente, dois participantes não entregaram a autorização e não obtivemos mais contato, precisando ser, essas duas atividades, excluídas das análises. Ao final, foram analisadas 15 atividades, duas delas incompletas; na primeira não constou a atividade sete e na segunda não constou as atividades cinco, seis e sete.

As trê primeiras atividades foram realizadas pelos alunos de forma individual e, depois, finalizaram as atividades seguintes em grupo. Antes de iniciarmos, registramos na lousa algumas informações sobre determinados assuntos que os alunos poderiam ter esquecido, questionando-os em voz alta e recebendo devolutivas no mesmo momento, registrando, também, na lousa.

Escrevemos uma explicação, da forma como os estudantes descreveram os conjuntos numéricos naturais e inteiros, além de colocarmos o número de alunos presentes e, desses presentes, o número de alunos que gostavam de matemática. Dos 19 alunos presentes em sala de aula, apenas cinco levantaram a mão afirmando que gostavam da disciplina e anotamos esse dado na lousa.

Isto posto, começamos as atividades, tomando como base as instruções do trabalho de Gonçalves (2023), no qual o professor sempre instiga e direciona os estudantes para que tenham autonomia e intencionalidade na realização das questões.

4.4 Algumas considerações sobre as respostas

Na primeira atividade da sequência didática fomos direcionando os estudantes a imaginarem um conjunto formado pelo total de alunos da sala e um conjunto formado apenas pelos alunos que gostam de matemática. Ressaltamos a relação com grupo, criando uma condição favorável para a aprendizagem e instigando-os a perceber que faziam parte da situação-problema. Após isso, delimitamos um tempo para que os alunos respondessem as quatro questões da atividade. Nesse primeiro momento, não apresentamos uma resposta pronta aos alunos, apenas problematizamos, no intuito de que buscassem sozinhos a solução para o problema.

No item A, 11 estudantes responderam que o conjunto formado por todos os alunos da sala era o conjunto maior, justificando que eram poucos aqueles que gostavam de matemática. Os demais acharam que o conjunto M era maior.

Na letra B, todos os alunos afirmaram que os conjuntos poderiam ter o mesmo tamanho, variando as respostas entre “sim, se eles fossem iguais” e “se todos os alunos da sala gostassem de matemática”.

No item C, apenas três alunos afirmaram que o conjunto M não estaria contido no conjunto A e esses mesmos alunos não justificaram suas respostas. Por fim, no item D, quatro alunos não responderam, pois alegaram que não entenderam a situação, ou não sabiam. Outros quatro estudantes pensaram no fato dos alunos não gostarem realmente de matemática e responderam “sim, se a matemática fosse mais simples” e apenas três deles disseram que não há uma situação em que o conjunto A estaria contido no conjunto M, pois A seria o todo.

Nessa primeira sequência foi possível percebermos que os alunos ficaram muito motivados a partir da fase de devolução e foram respondendo em seguida, em voz alta, tecendo conjecturas e compartilhando seus pensamentos com os colegas, contemplando as fases de ação e formulação. As justificativas feitas pelos alunos que responderam corretamente alcançaram a expectativa da fase de validação.

Após isso, seguimos com a fase de institucionalização, formalizando a noção de inclusão entre conjuntos, da seguinte forma: se todos os elementos de um conjunto X são também elementos do conjunto Y, então dizemos que X está incluído em Y, ou que X está contido em Y, representado por $X \subset Y$. Dessa forma, conseguimos fazer com que os alunos relembrassem os termos “incluído” e “contido”. O objetivo principal dessa atividade, de acordo com Gonçalves (2023), é permitir que os estudantes aprimorem seus conhecimentos sobre as noções de inclusão e cardinalidade.

Iniciamos a atividade dois como a anterior, pela fase de devolução, estimulando os alunos a imaginarem um conjunto formado pelos estudantes de sua própria sala e outro conjunto formado pelos alunos da turma do 1º ano B.

No item A, todos os alunos entenderam a proposta e afirmaram que se um aluno do 1º ano A ficasse sem dupla, significaria que o tamanho dos conjuntos não seria igual e que o conjunto A seria maior. Já no item B, apenas três alunos responderam que no 1º ano B constariam mais pessoas – acreditamos que devido ao fato de não entenderem a formulação da pergunta. No item C, todos os estudantes que realizaram a atividade responderam que se não sobra nenhum aluno sem dupla, significa que as duas salas têm o mesmo tamanho.

Por fim, no item D, um aluno não respondeu a questão e todo o restante variou as respostas em “não tem nenhuma intersecção entre eles”, “a intersecção é vazia”, ou ainda, “eles não têm nada em comum”. Destacamos que neste item surgiu uma dúvida sobre a formulação da pergunta de letra D) “podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?”: o estudante questionou se os conjuntos a que o exercício se referia eram os conjuntos das turmas ou o conjunto formado a partir da criação das duplas. Fizemos a explicação e a dúvida foi sanada.

Nessa sequência, os estudantes já estavam habituados com a forma de responder, então facilmente passaram pelas etapas de ação, formulação e validação, pois pensaram, responderam em voz alta, conversaram entre si e responderam com a linguagem apresentada na primeira situação.

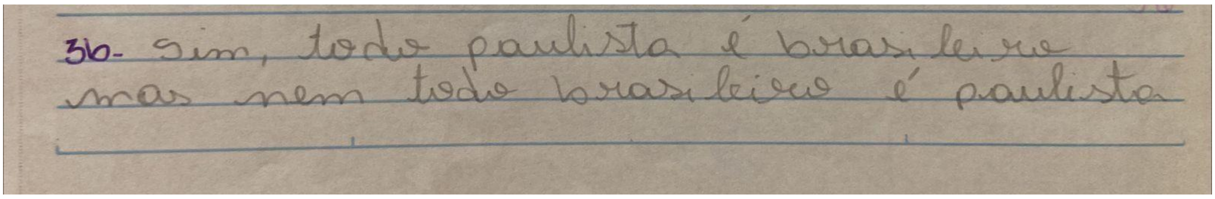
Após a entrega de todas as respostas, mostramos na lousa a relação de intersecção entre conjuntos, escrevendo que a intersecção entre conjuntos significa que os elementos pertencem a dois ou mais conjuntos simultaneamente e que a intersecção é vazia quando os conjuntos adotados não apresentam elementos em comum. Fizemos algumas explicações, sintetizando o conteúdo e desenvolvendo a parte de institucionalização, além de salientar que a intersecção entre os conjuntos dessa questão é necessariamente vazia – o que, pelos resultados obtidos, ficou nítido que havia sido compreendido pelos estudantes.

Para iniciar a atividade três foi preciso explicar um pouco sobre a quantidade absoluta em relação às populações, então realizamos uma conversa breve acerca do assunto, atendendo à fase de devolução e, na sequência, solicitamos que os alunos respondessem os itens.

No item A, todos os alunos responderam que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B, pois no conjunto P está sendo considerado um estado e, no conjunto B, um país.

No item B, todos responderam que todo paulista é brasileiro, mas nem todo brasileiro é paulista, como podemos ver na imagem abaixo:

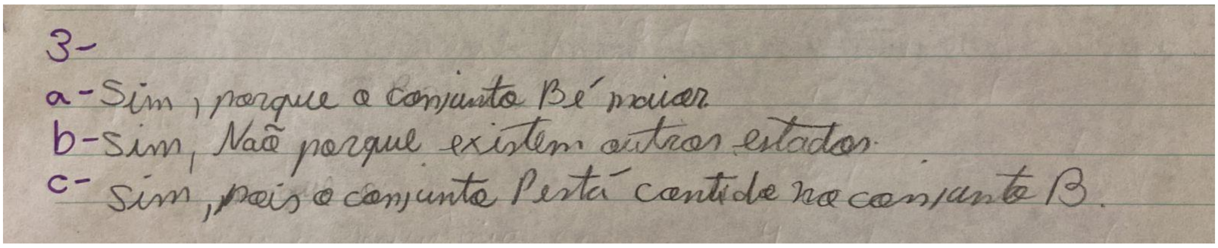
Figura 3 - Resposta ao item B



Fonte: Figura da autora.

No item C, apenas um aluno respondeu que um desses conjuntos não está contido no outro enquanto todo o restante da sala afirmou que o conjunto P está contido no conjunto B, conforme Figura 4:

Figura 4 - Resposta ao item C



Fonte: Figura da autora.

Nesta atividade, obtivemos o maior número de respostas corretas, sem dificuldades por parte dos alunos, constatando que o entendimento sobre a noção de inclusão e cardinalidade estava evoluindo a cada exercício. Como na sequência dois, os estudantes passaram facilmente pelos itens de ação, formulação e validação, escolhendo a melhor maneira de responder, conjecturando possíveis respostas e utilizando a linguagem matemática mais apropriada.

Visto que os alunos compreenderam bem esses exercícios, não precisamos explicar muitas coisas, realizamos apenas a retomada de alguns conceitos que estavam na lousa e os relacionamos com essa atividade, contemplando a fase de institucionalização oralmente.

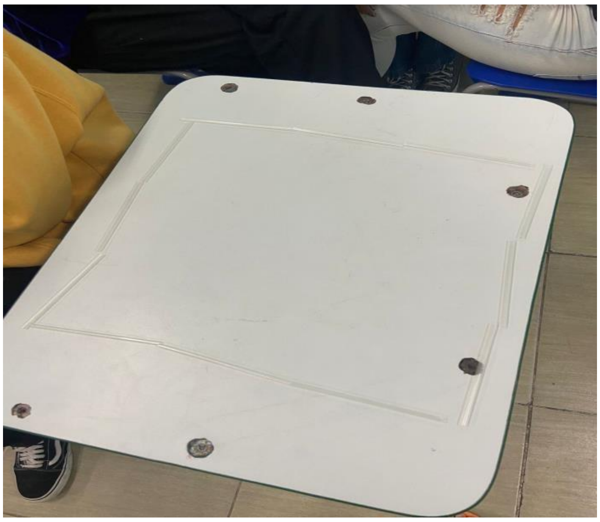
Passamos, então, para a atividade quatro, na qual dividimos as turmas em três grupos com diferentes números de integrantes. Entregamos dois pedaços de canudo para cada aluno e solicitamos que construíssem na própria mesa uma forma geométrica utilizando o material recebido e, após a construção, que respondessem as perguntas comparando as figuras construídas por cada grupo.

O primeiro grupo construiu um decágono, o segundo grupo construiu um quadrado e o terceiro grupo construiu um octógono, como é possível observar nas imagens abaixo:

Figura 5 - Primeiro grupo: construção de um decágono

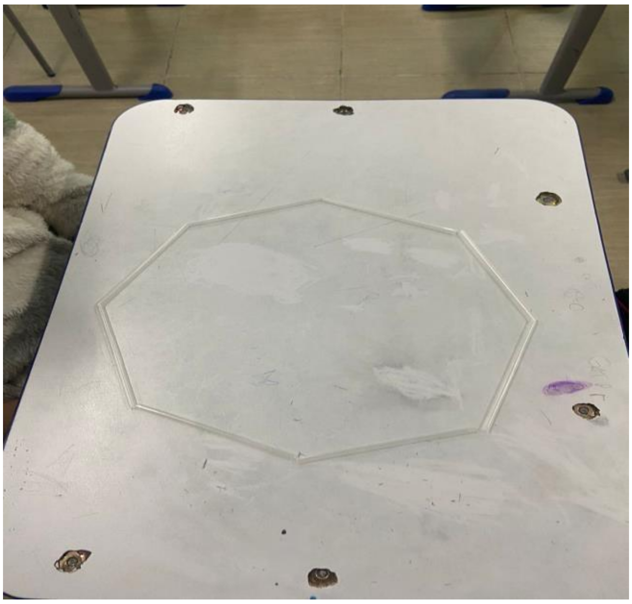
Fonte: Figura da autora.

Figura 6 - Segundo grupo: construção de um quadrado



Fonte: Figura da autora.

Figura 7 - Terceiro grupo: construção de um octógono

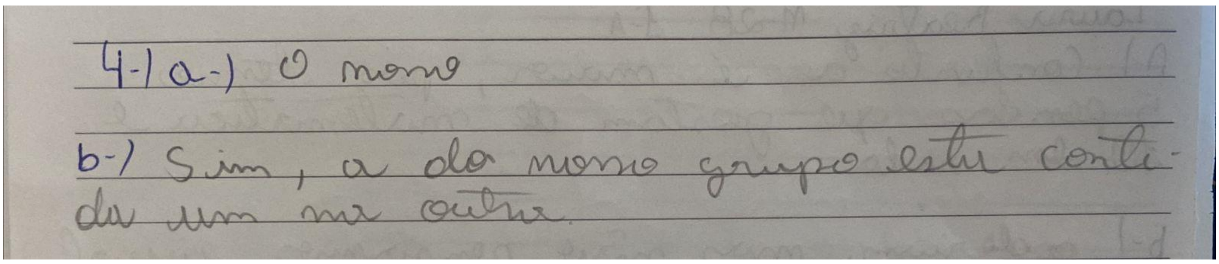


Fonte: Figura da autora.

Nessa atividade, achamos pertinente a diferenciação que o Grupo 2, apresentado na Figura 6, fez com a construção da figura geométrica, mostrando uma forma inovadora de pensamento. Os alunos disseram que queriam que a figura deles fosse um quadrado, então utilizaram todos os canudos recebidos para fazer a construção da figura.

Todos os alunos afirmaram que a forma geométrica que possuía mais canudos era o quadrado; apesar de ter apenas quatro lados, em cada lado tinham três canudos, o que resultava em um total de 12 canudos. No item B, todos responderam que é possível afirmar que uma delas está contida na outra e alguns alunos ainda exemplificaram, dizendo que o grupo com 8 canudos está contido no grupo com 12 canudos, como na imagem abaixo.

Figura 8 - Resposta ao item B sobre a quantidade de canudos



Fonte: Figura da autora.

No item C, todos disseram perfeitamente o perímetro de cada figura. Considerando que cada canudo indicava uma unidade de medida, o decágono teria perímetro igual a dez unidades de medida; o quadrado, 12 unidades de medida; e o octógono, oito unidades de medida, caracterizando a etapa de ação com a construção dos polígonos e a etapa de formulação com as conjecturas e conversas sobre o perímetro de cada figura. Uma vez compreendidas as noções de tamanho e número pelos alunos, caracterizamos, também, a etapa de validação, rememorando que suas colocações e questionamentos estavam corretos. Nessa sequência, a fase de institucionalização não foi atingida, pois as respostas foram entregues e os alunos seguiram para a atividade seguinte.

Na atividade cinco, apenas três alunos afirmaram que os conjuntos dos números naturais e o conjunto dos números inteiros têm o mesmo tamanho. Um aluno respondeu que são conjuntos cardinais, outro aluno disse que o conjunto dos números inteiros é maior e o restante da sala afirmou que o conjunto dos números naturais é maior, pois são números infinitos.

Nessa atividade pudemos perceber que a etapa de ação foi menos intensa do que nas atividades anteriores; os estudantes ficaram mais receosos e não deram tantas respostas oralmente. Como eles estavam reunidos em grupo, pedimos para que conversassem entre si, tentando aprimorar o raciocínio e na intenção de que conseguissem juntos alguma resposta, ainda que informal. Foi dessa maneira que os alunos conseguiram as respostas apresentadas anteriormente, contemplando a fase de formulação. Não percebemos nessa quinta atividade a validação dos alunos, já que eles ficaram confusos em comparar os conjuntos infinitos.

Em relação aos alunos que responderam que um dos conjuntos era maior, também foi notória a confusão ao abordar os conjuntos infinitos. Pressupomos, aqui, que eles não compreenderam a comparação entre conjuntos quando relacionado a conjuntos infinitos.

Após recolher as respostas, julgamos ser necessária uma explicação bem detalhada, dado que a fase de validação não estava precisa. Escrevemos na lousa a explicação sobre relação biunívoca, que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos, sendo que cada elemento de um conjunto está associado a um – e só um – elemento do outro conjunto. Fornecemos vários exemplos, utilizando o próprio conjunto dos números naturais e o conjunto já citado na atividade, para tentar contemplar da melhor maneira possível a fase de institucionalização.

Com o intuito de garantir um processo de aprendizagem significativo sobre o conceito de cardinalidade e a relação de inclusão entre conjuntos, são necessários os esquemas de ação e formulação que implicam processos de correção (validação) e, com isso, um melhor entendimento (Brousseau, 2008), principalmente nessa atividade, que foi o primeiro contato dos alunos com os conjuntos infinitos e as relações de inclusão e cardinalidade.

Esse tópico, com certeza, causou estranheza e confusão por parte dos alunos, que não estavam habituados a trabalhar com os conjuntos infinitos, e menos ainda a comparar o tamanho desses conjuntos, causando um desequilíbrio na construção do raciocínio. Por conta disso, nesse momento, se fez ainda mais necessário que a fase de institucionalização fosse bem trabalhada e definida, pois colocar o estudante nessa situação faz com que ele reflita sobre o que respondeu, pense em hipóteses diferentes e faça o uso da linguagem matemática.

Em seguida, iniciamos a atividade seis. Realizamos a fase de devolução, passando para os alunos a responsabilidade de responder os cinco itens, usando toda a explicação anterior. No item A, sete alunos afirmaram que o conjunto dos inteiros e dos naturais têm a mesma quantidade de elementos. Comparando com a atividade anterior, três alunos que não haviam entendido, passaram a compreender melhor: um aluno afirmou que o conjunto dos números naturais tem mais elementos e seis alunos disseram que o conjunto dos números inteiros tem mais elementos.

No item B, oito alunos afirmaram que os dois conjuntos têm o mesmo tamanho, não definindo nenhum deles como maior; dois disseram que os naturais são maiores e quatro alunos apontaram que o conjunto dos números inteiros são os maiores.

No item C, todos responderam que é possível construir uma relação biunívoca entre os dois conjuntos, afirmando que é aceitável tecer uma comparação entre eles. Já no item D, todos afirmaram que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros.

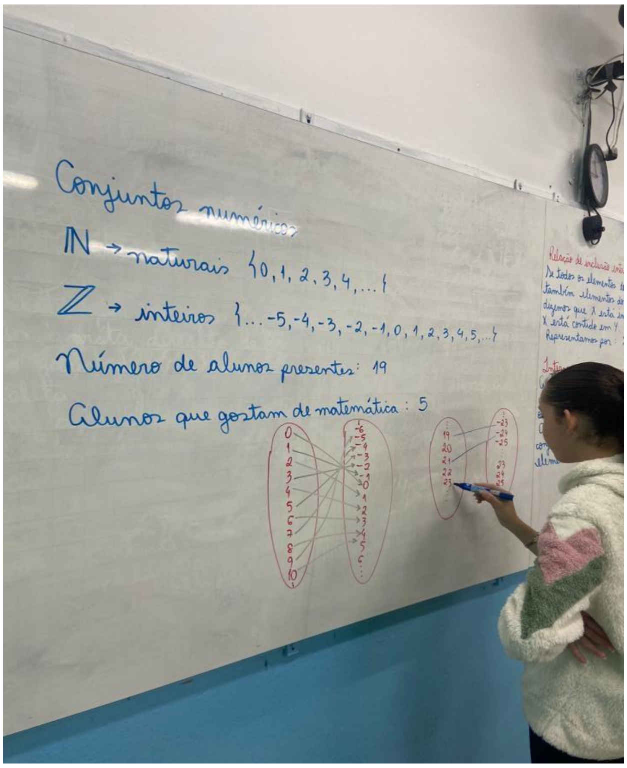
Quanto ao item E, apenas dois alunos responderam que ficaram apenas os números negativos na operação citada, o restante desenvolveu respostas gerais, como cópia da explicação que havíamos feito na lousa ou, ainda, que não havia valor numérico. São respostas de difíceis interpretações, uma vez que vários fatores poderiam estar envolvidos, como o não entendimento da explicação feita anteriormente – por alguns alunos estarem mexendo no celular e conversando sobre assuntos não pertinentes a aula –, além da distração durante a aplicação dessa sequência.

No decorrer dessa atividade, instigamos os alunos para que retomassem os conceitos que tínhamos trabalhado nas aulas anteriores e tentassem relacioná-los, mas, ainda assim, notamos que eles estavam tendo muita dificuldade. A maioria dos alunos não lembrava o significado da operação Z - N, então precisamos retomar esse tema, explicando que é a diferença entre os conjuntos Z e N, isto é, a representação dos elementos do conjunto Z que não aparecem no conjunto N.

A fase de ação nessa sequência foi bem desenvolvida, os estudantes estavam refletindo e fazendo questionamentos sobre o que tinham aprendido, porém a formulação não foi tão precisa, já que muitos ficaram com dúvidas em como responder e com receio de estarem errados e outros nem chegaram à fase de validação pois não conseguiram utilizar a linguagem matemática apropriada para responder.

Ao final, já iniciando a fase de institucionalização, escrevemos a relação biunívoca entre o conjunto dos inteiros e dos naturais na lousa e solicitamos que os estudantes tentassem fazer o mesmo no caderno. Caso alguém quisesse apresentar na lousa a sugestão, poderia ficar à vontade; uma aluna se prontificou e apresentou na lousa da seguinte forma:

Figura 9 - Estudante resolvendo a questão apresentada na lousa



Fonte: Figura da autora.

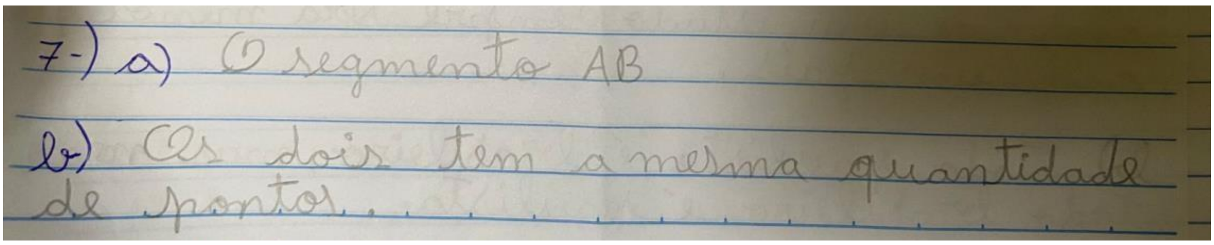
Neste momento, aproveitamos para diferenciar, precisamente, as noções de inclusão e de cardinalidade entre conjuntos infinitos, de acordo com Gonçalves (2023), para evitar a confusão criada pela intuição acostumada a operar com objetos finitos e pelos obstáculos epistemológicos que influenciam na aprendizagem dos alunos.

No item A da atividade sete, todos os alunos afirmaram que o segmento AB possui comprimento maior. Já no item B, sete alunos responderam que os dois segmentos têm a mesma quantidade de pontos e cinco deles afirmaram que o segmento AB possui mais pontos.

No item C, sete alunos afirmaram que todos têm infinitos pontos e cinco deles disseram que no plano havia mais pontos. Por fim, no item D, a turma ficou bem dividida: cinco alunos afirmaram que o maior é um plano, outros quatro alunos disseram que uma reta é maior, dois disseram que o maior seria um cubo e um aluno não respondeu.

Vale salientar que foi possível perceber o quanto os alunos ficaram confusos na realização da atividade. Conjecturamos que esse fato se deve à dificuldade dos alunos com a temática de conjuntos infinitos, à dificuldade de relacionar esse assunto a segmentos de retas e, ainda, aos obstáculos epistemológicos que não foram superados. Para exemplificar essa situação, apresentamos a seguir a resposta de uma aluna:

Figura 10 - Resposta ao exercício 7



Fonte: Figura da autora.

Essa mesma aluna colocou no item C somente a resposta “sim” para uma pergunta que precisava responder quais dos segmentos tinham mais pontos. Logo, temos uma resposta impossível de interpretar, pois a estudante percebeu que os dois segmentos de retas tinham o mesmo tamanho, mas não conseguiu relacionar isso com a quantidade de pontos em cada um deles.

Durante a realização deste exercício, os estudantes conversaram bastante entre si, percorrendo a questão da formulação, e decidiram que cada um colocaria uma resposta diferente para saber quem estaria certo. Foi especulado por eles se era possível colocar nenhuma das opções citadas e apenas orientamos que pensassem nos itens anteriores e em tudo que fora trabalhado durante as aulas, e respondessem da forma que julgassem melhor.

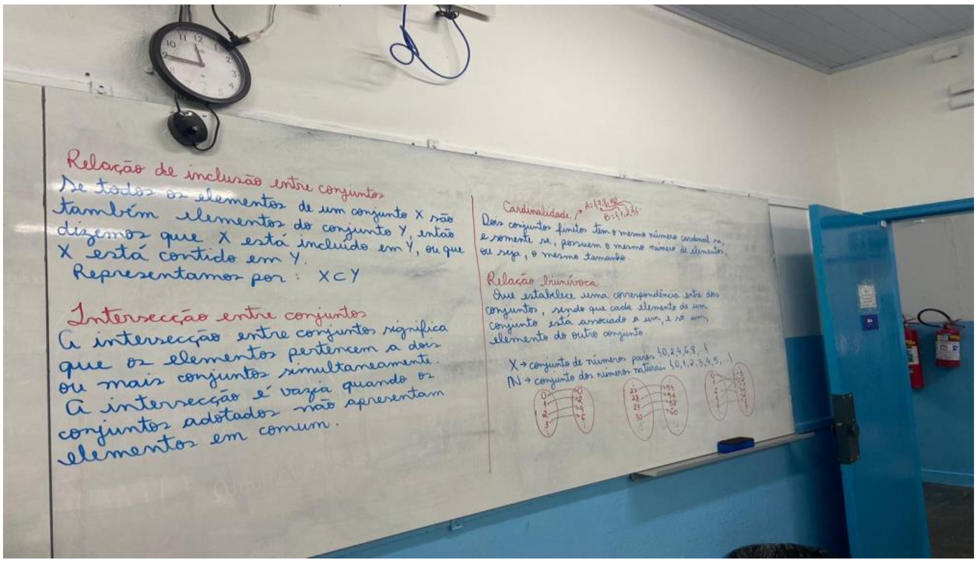
Após a entrega das respostas, intruímos a todos para que prestassem muita atenção na explicação, baseada nas ideias de Gonçalves (2023), e mostramos as figuras 7 A, 7 B, 8, 9 e 10 na lousa, a fim de que os estudantes compreendessem a noção de que ponto não tem dimensão e que não há um segmento maior do que o outro, e que comprimentos diferentes não significam quantidade de pontos diferentes.

Explicamos, ainda, que nos itens C e D, todos os casos têm o mesmo número de pontos; alertamos que nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos e comentamos sobre os casos nos quais não é possível construir uma relação biunívoca, dando o exemplo da relação entre os números naturais e os números reais. Assim, contemplamos a fase de institucionalização, que se fez cada vez mais necessária nas últimas atividades que envolviam conjuntos infinitos.

Após isso, lançamos um desafio aos alunos: tentar encontrar uma relação entre o conjunto dos números naturais e dos números reais. Falamos que eles poderiam entregar na aula seguinte, caso encontrassem, entretanto na sequência já responderam que não teria como, que era muito difícil, se não fosse impossível.

Abaixo, mostramos as relações e explicações abordadas em sala e a teoria apresentada na lousa como parte da situação didática de institucionalização:

Figura 11 - Teorias apresentadas aos estudantes



Fonte: Figura da autora.

4.5 Comentários dos participantes

Na aula seguinte às atividades, fizemos algumas perguntas orais aos alunos para sabermos a opinião deles sobre a realização da sequência didática. As perguntas foram:

1) O que você achou da atividade? Quais foram os maiores desafios?
2) Em qual exercício você encontrou mais dificuldade? O que você mais gostou durante a atividade?
3) Você tem alguma dica de melhoria ou sugestão em alguma das atividades?

No geral os alunos acharam essa atividade diferente das outras que realizam normalmente durante as aulas, disseram ser algo que fugia da rotina das tarefas do Centro de Mídias (aplicativo no qual os alunos realizam tarefas diariamente, de forma *on-line*) e trazia uma experiência diferente e divertida. Afirmaram que tinham que trabalhar bastante o raciocínio, o trabalho em grupo e que precisavam ter mais atenção nas explicações e nos conteúdos, inclusive de outras aulas. Disseram, ainda, que os maiores desafios foram entender algumas perguntas, compreender o que era necessário responder e que as principais dificuldades surgiram nas atividades seis e sete.

Os estudantes declararam ter gostado muito da interação entre os grupos, que possibilitou bastante diálogo e isso ajudou a focar no desenvolvimento da sequência. Toda essa devolutiva nos deixou bastante contente, pois um dos objetivos específicos do presente trabalho era promover a participação, a colaboração e a motivação dos alunos, que foi atingido com êxito.

4.6 Sugestões de alterações nas atividades

Com o intuito de melhorar o desenvolvimento da sequência de atividade, sugerimos algumas alterações simples em alguns itens, que podem aprimorar o entendimento dos estudantes e garantir um momento mais dinâmico.

A primeira sugestão refere-se ao item B da atividade dois: seria interessante somente reafirmar a pergunta do item A, da seguinte maneira: “E se for aluno do 1º ano B a ficar sem dupla?”.

No item D, para não decorrer dúvidas, como a que surgiu no momento do desenvolvimento da atividade, sugerimos a reformulação da pergunta, para que fique esclarecido quais os conjuntos que estão sendo comparados: “Podemos dizer que um dos conjuntos (A ou B) está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?”.

E, finalmente, no item D da atividade sete, nossa sugestão, baseada no desenvolvimento da turma, é que sejam itens cuja resposta dependa da marcação de uma dentre várias alternativas e que uma delas proponha que todos os conjuntos têm o mesmo número de elementos, para que se evite dúvidas no sentido de não ter a resposta que o aluno gostaria de colocar.

4.7 Conclusões das atividades

Durante todas as atividades foi notável a fase de devolução, na qual os estudantes tinham a responsabilidade e a autonomia de desenvolver as sequências, a partir dos questionamentos e indicações feitas no início das sete atividades.

Na situação didática de ação pudemos perceber a tomada de decisão dos alunos em cada atividade, principalmente na terceira e na quarta atividade – fase em que eles já estavam entendendo melhor as condições de inclusão e cardinalidade. A partir daí, demos início à busca pelo aprimoramento e rebuscamento da linguagem matemática, realizando a situação de formulação, na qual os estudantes demonstravam a maneira encontrada para resolver os problemas para os próprios colegas, integrantes do grupo e para a professora.

Com a apresentação das hipóteses e especulações feitas pelos alunos em toda a sequência didática, era feita a situação didática de validação. Baseado nessas respostas, orientávamos e direcionávamos os estudantes até chegarem em uma definição precisa, corrigindo as respostas que não atingiam o objetivo esperado.

Em todas as situações foram realizadas a fase de institucionalização. Nas primeiras atividades não foi necessária uma formalização na lousa, porque os alunos conheciam os conteúdos e sabiam realizar as atividades propostas. Entretanto, nas atividades finais que envolviam os conjuntos infinitos, foi preciso muitas explicações e exemplos para que se consolidasse as questões e pudéssemos continuar com as atividades seguintes.

Percebemos que mesmo sendo uma turma de Ensino Médio, os desafios aparecem, e superar a barreira que os estudantes têm em relação, principalmente, a conjuntos infinitos, é uma tarefa muito difícil, pois foi perceptível a dificuldade na formalização das respostas e na utilização da linguagem matemática apropriada.

Constatamos que a sequência didática foi importante para a turma do 1º Ano, pois havia propriedades sobre conjuntos que não estavam concretizadas na aprendizagem desses estudantes e, a partir das atividades, constatamos que eles conseguiram compreender e resolver os problemas.

Quanto à questão dos conjuntos infinitos e da cardinalidade, observamos que os alunos precisam de mais tempo, assimilação e formalização para compreenderem de forma precisa e para conseguirem comparar retas, planos e conjuntos numéricos infinitos de forma a não cometer o mesmo erro, entendendo o real significado da cardinalidade desses objetos matemáticos.

Ainda que tenha sido uma turma do Ensino Médio, é preciso, no mínimo, uma aula para a realização de cada atividade proposta por Gonçalves (2023). O tempo especulado é valioso e permite um melhor aproveitamento de cada item a ser desenvolvido. Durante o desenrolar das atividades, percebemos que faltou tempo para as fases de validação e institucionalização, já que, mesmo com as explicações, ficavam algumas dúvidas por parte dos estudantes, que em determinados momentos até queriam mais exercícios para confirmar que tinham entendido.

Devido ao fato da atividade ter sido realizada em dezembro, não tivemos muito tempo, considerando, também, que no calendário escolar já havia sido estabelecido compromissos de final de ano letivo. Apesar disso, foi proveitoso realizar essa atividade e, ainda que não tenhamos atingido todos os estudantes, sabemos que aqueles que participaram, gostaram muito e ficaram com brilho no olhar ao conseguirem realizar e resolver a proposta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou aplicar uma atividade em uma escola estadual da rede pública, com alunos do 1º Ano do Ensino Médio, envolvendo a noção de infinito em conjuntos numéricos, a fim de analisar suas potencialidades e desafios, a partir do trabalho proposto por Gonçalves (2023) e baseando-nos na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), além de proporcionar aos estudantes um melhor entendimento e interpretação dos conteúdos sobre conjuntos infinitos e cardinalidade, promovendo a participação, a colaboração e a motivação.

O experimento foi dividido em três etapas: planejamento, implementação e análise dos resultados. Trazer práticas diferenciadas para escola é o que pode tornar a aprendizagem mais significativa e interessante e uma possibilidade de fugir do sistema tradicional, no qual o professor é um transmissor do conhecimento e o estudante um receptor – e é nesse cenário que se encaixa o uso das situações didáticas de Broussau (2008).

Quando os alunos veem sentido nas atividades que realizam, o processo de aprendizagem se torna mais fácil, levando em consideração as relações do indivíduo com o meio ao qual está inserido, com o professor e com seus colegas de classe. Conforme aponta Santos (2019, p. 86), “é essencial conectar o ensino com a vida do aluno, dando a ele oportunidade de encontrar sentido naquilo que compõe o foco de estudo na sala de aula, pois quando eles veem sentido na atividade proposta a aprendizagem se torna mais significativa”.

Com as atividades, os alunos, em sua maioria, se mostraram pró-ativos e dispostos a realizarem as sequências, principalmente quando faziam parte do problema. Pudemos notar que os mais interessados conseguiam realizar as atividades com mais facilidade; nem todos os alunos se comprometeram da forma esperada, pois sabemos que alguns estudantes têm problemas pessoais que os prejudicam na escola.

É importante destacar que levando em conta as situações didáticas de devolução, ação e formulação é possível proporcionar um ambiente onde os estudantes são os principais responsáveis pelo seu processo de aprendizagem, tornando-os ativos e propensos a buscar seu conhecimento, além de fazê-los se sentirem mais confiantes no momento de apresentar as hipóteses.

Nas situações didáticas de validação e institucionalização, o professor media e dá sentido às especulações dos alunos, podendo apresentar teorias e definições com a linguagem matemática apropriada, o que permite trabalhar a autonomia dos alunos em sala de aula, sem perder a essência das explicações, da apresentação do conteúdo na lousa, corroborando o seu papel em campo, que é tão importante na vida dos estudantes.

Deste modo, utilizar uma sequência didática como proposta para o ensino de Matemática no Ensino Médio apresentou-se como uma boa alternativa educacional, dado a realização nas condições apresentadas, proporcionando um ensino diferenciado e de qualidade. Durante o relato da pesquisa, foi possível perceber que potencialidades e desafios foram perpassados. Contudo, as atividades trouxeram uma oportunidade de superar os obstáculos epistemológicos, que criam certas barreiras, e essa superação pôde acontecer de uma maneira participativa e significativa.

Embora tenham havido alguns desafios, consideramos uma ótima maneira de se trabalhar com os conteúdos de conjuntos infinitos. É uma proposta que pretendemos realizar com outras turmas, a partir da experiência que tivemos e baseado nas adaptações sugeridas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. A. **Sequência didática da proposição a aplicação**: uma análise das interações em sala de aula sob o ponto de vista das situações adidáticas. Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida. 2019. 225f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Trad. De Estela dos Santos Abreu. Contraponto: Rio de Janeiro, 2005 [1996].

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

CHALOM, G.; WEISS, A. **Teoria dos Conjuntos** – Uma introdução. IME-USP-Departamento de Matemática. 93f. 2019.

GONÇALVES, V. L. **Cardinalidade de conjuntos infinitos na educação básica**. Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca. 2023. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2023.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 8ª. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

LORIN, J. H.; BATISTA, I. L. Uma discussão a respeito da natureza do conceito de infinito. **RIPEM,** Brasília, v. 13, n. 2, p. 1-17, maio/ago. 2023.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educ. Matem. Pesq**. São Paulo, v. 22, n.3, p 196-228, 2021.

MOREIRA, M. A. A teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. *In:* MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999. p. 151-165.

PARANHOS, Y. F. **Histórias para contar**: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico. Orientador: Guido Gerson Espiritu Ledesma. 2023. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

PEREIRA, L. M. C. **A noção de infinito na educação básica**: reflexões e proposta. Orientador: Abel Rodolfo Garcia Lozano. Coorientador: Adriano Vargas Freitas. 2015. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) -

Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2015.

SAMPAIO, P. A. S. R. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009.

SANTOS, N. L. **Sala de aula invertida**: um experimento no ensino de Matemática. Orientador: Rodrigo Medeiros dos Santos. 2019. 108f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Ciências da Educação, Universidade Federal Do Oeste Do Pará, Santarém, 2019.

SANTOS, T. S. L. **O conceito de infinito**: uma abordagem a partir da resolução de problemas. Orientador: Evandro Carlos Ferreira dos Santos. 2015. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

SIQUEIRA, F. K. S. LORIN, J. H. Obstáculos epistemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso de matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 09, n.19, p. 555-577, jul./out. 2020.

SIQUEIRA, F. K. S. LORIN, J. H. Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras. **ACTIO,** Curitiba, v. 6, n. 2, p.1-16, maio/ago. 2021.