



MARCELO AMARO E SILVA

**Transformações Geométricas no Ensino
Fundamental e Médio**

Santo André, 2013



Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcelo Amaro e Silva

Transformações Geométricas no Ensino Fundamental e Médio

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO AMARO E SILVA E ORIENTADA PELO PROF. DR. DANIEL MIRANDA MACHADO.

Santo André, 2013

Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo analisar e identificar, com base nos documentos curriculares oficiais, nacionais e do estado de São Paulo, o ensino das Transformações Geométricas, bem como apresentar algumas sugestões para a inserção deste tema nestes documentos, com maior ênfase nos anos finais da educação básica (ensino médio).

Para complementar este trabalho, foram examinados, também, os materiais didáticos fornecidos aos alunos, verificando-se, assim, como este tópico é abordado nestes objetos, servindo, pois, como base para a montagem de algumas propostas de atividades e demonstrando que este tema não necessariamente precisa ser apresentado quando inserido no bloco de Geometria.

Palavras-chaves: Transformações Geométricas, Isometrias, Homotetias.

Abstract

This research aimed to analyze and identify, based on the official curriculum documents, national and state of São Paulo, the teaching of Geometric Transformations and make some suggestions for the inclusion of this issue in these documents, with greater emphasis in the final years of basic education (high school).

To complement this work, we examined also the teaching materials provided to the students, checking out as well, as this topic is covered in these objects, serving thus as a base for mounting some proposals activities and demonstrating that this theme does not necessarily need to be presented when inserted into the block geometry.

Keywords: Geometric Transformations, Isometries, Homotheties.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, que me deu forças para chegar até aqui.

A minha esposa Flávia, pelo carinho, pelo incentivo, pela compreensão, pelo apoio, pelo auxílio, pela amizade, enfim, por estar ao meu lado sempre, ajudando-me em todos os momentos.

Aos meus filhos Arthur e Henrique que, mesmo pequenos, compreenderam minhas ausências e sempre me receberam com abraço quando retornava para casa.

Aos meus pais Marcílio e Glória pelo dom da vida e pelo apoio que sempre deram aos meus estudos.

Ao Professor Doutor Daniel Miranda Machado, que me aceitou como orientando, que me auxiliou muito na confecção desta pesquisa, que me apoiou e me incentivou constantemente. Posso dizer que, se este trabalho foi concluído, foi em boa parte graças a ele. Meus sinceros agradecimentos.

Aos Professores Doutores Armando Caputi, João Carlos da Motta Ferreira, Rafael de Mattos Grisi, Rodney Carlos Bassanezi e Sinuê Dayan Barbero Lodovici que participaram de nossa caminhada ao longo desta formação.

A todos os companheiros deste curso, em especial aos amigos e amigas Clayton, Guilherme, Agnaldo, Carlos Tofolis, Jeovah, Samuel, Cintia, Mariane e Roberta.

Aos membros da banca.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.

Sumário

1	A Geometria e seus Aspectos Históricos	15
2	Transformações Geométricas	21
2.1	Isometrias	22
2.1.1	Translações	26
2.1.2	rotações	27
2.1.3	Reflexões	29
2.1.4	Outras Isometrias (ou Isometrias Compostas)	32
2.2	Homotetias	33
2.2.1	Propriedades das Homotetias	33
3	PCN's, Currículo de SP e Livros Didáticos	37
3.1	Parâmetros Curriculares Nacionais	38
3.1.1	Parâmetros Curriculares Nacionais - 1° ao 4° Ano do Ensino Fundamental	38
3.1.2	Parâmetros Curriculares Nacionais - 5° ao 8° Ano do Ensino Fundamental	39
3.1.3	Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+) - Ensino Médio	41
3.2	Proposta Curricular e Currículo do Estado de São Paulo	43
3.2.1	Proposta Curricular do Estado de São Paulo	44
3.2.2	Currículo do Estado de São Paulo	45
3.3	Livros Didáticos	47
3.3.1	A Conquista da Matemática[28]	47
3.3.2	Matemática: Bianchini[29]	48
3.3.3	Matemática[30]	48
3.3.4	Matemática - Volume Único[31]	48
3.3.5	Matemática - Paiva[32]	49
3.3.6	Conexões com a Matemática[33]	49
4	Propostas de Atividades	51
4.1	Atividades para o 3° Ciclo	51
4.1.1	Atividades de Introdução para o Conceito de Simetria	51
4.1.2	Atividades de Introdução para o Conceito de Homotetia	54
4.1.3	Atividades de Introdução para o Conceito de Isometria	55
4.2	Atividades para o 4° Ciclo	56
4.2.1	Isometrias e Homotetias	56

Sumário

4.3	Atividades para Ensino Médio	58
4.3.1	Transformações Geométricas e os Gráficos das Funções . .	58
4.3.1.1	Atividades de Funções	61
4.3.2	Transformações Geométricas e a Geometria Analítica . . .	63
4.3.2.1	Atividades de Geometria Analítica	63
5	Considerações Finais	67
A	Grades Curriculares	73
B	Soluções Esperadas para as Atividades	93

Introdução

Este trabalho tem como objetivo a análise do ensino de transformações geométricas, tendo como base os parâmetros curriculares oficiais, nacionais e do estado de São Paulo.

No primeiro capítulo apresentamos os aspectos históricos da geometria, englobando o tema desta pesquisa.

No segundo capítulo abordamos os conceitos de transformações geométricas, apresentando seus aspectos matemáticos, geométricos e algébricos.

No terceiro capítulo são feitas as análises dos documentos oficiais curriculares, mencionados no início deste capítulo, sendo apresentados os anos onde ocorrem o ensino de transformações geométricas. É neste capítulo, também, que se encontram as análises de livros didáticos, e dos cadernos do Estado de São Paulo, quanto a ocorrência de transformações geométricas, comparando-os com as indicações do parâmetros curriculares e currículos oficiais abordados nesta pesquisa.

No quarto capítulo apresentaremos sugestões de atividades, mencionando os anos onde podem ser aplicados, dando sugestões, quando possível, de inserções deste conteúdo no currículo de ensino.

No quinto capítulo faremos as considerações finais e apresentaremos as conclusões do trabalho.

1 A Geometria e seus Aspectos Históricos

Não é possível determinar ao certo quando começaram os estudos da geometria. Heródoto dizia que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do rio Nilo. Já Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lares é que tinha conduzido ao estudo de geometria. Não podemos dizer que Heródoto ou Aristóteles estão errados com relação aos motivos que levaram ao início do estudo desta área do saber, mas, o que se acredita é que a mesma teve início, provavelmente, em tempos longínquos da antiguidade e que foi crescendo gradativamente até atingir o que conhecemos hoje, como podemos ver em desenhos e figuras feitas pelo homem neolítico que já tinha preocupações com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria.



[34]

China, período neolítico, cultura Yangshao (c. 3000-1500 a.C.)
Diâmetro: 35,3 cm
CCCM, Lisboa, inv. 653

Figura 1.1: Terracota pintada

1 A Geometria e seus Aspectos Históricos

Simples observações e necessidades de vida do homem primitivo, tais como, comparar formas e tamanhos e reconhecer configurações, podem ter dado origem as primeiras noções e descobertas geométricas. Este conceito foi chamado por Eves de “geometria subconsciente”.

Noções de distância e de figuras geométricas simples podem ter sido originadas da necessidade de se delimitar a terra. Noções de vertical e horizontal, bem como as propriedades de retas, teriam sido verificadas em construções. Curvas e círculos, sólidos e superfícies também devem ter sido observados na natureza, como o contorno do sol, o tronco de uma árvore, dentre outros.

No princípio o homem só se preocupava com problemas geométricos concretos e individuais, sem se preocupar se os mesmos tinham alguma ligação. Com o decorrer do tempo, a inteligência humana tornou-se capaz de relacionar e extrair propriedades de objetos após determinado número de observações, e esta geometria foi chamada por Eves de “geometria científica”.

Não se sabe quanto tempo levou para a transição entre os dois tipos de geometria mas unanimemente dizem, os escritores que se ocupavam deste assunto, que esta ocorreu no vale do rio Nilo e a mesma foi defendida também por Heródoto.

Eles diziam que este rei dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornara menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira parece-me que a geometria teve origem, sendo mais tarde levada a Hélade.
[2, p. 3]

Os registros mais antigos do homem sobre geometria são as tábulas de argila desenterradas na Mesopotâmia que datam, acredita-se, 3000 a.C, que estão relacionadas com a mensuração prática. Muitos exemplos concretos mostram que os babilônios, no período de 2000-1600 a.C. conheciam regras para cálculos de áreas de algumas figuras planas e o teorema pitagórico também já era conhecido.

Já sobre a geometria egípcia as fontes de informações mais importantes são os papiros de Moscow e Rhind que datam aproximadamente de 1850-1650 a.C. Neles se encontram problemas onde sua maioria são sobre fórmulas de mensuração para cálculo de áreas de terras e volumes de celeiros.

A principal fonte de informações sobre a geometria grega antiga é o Sumário eudemiano de Proclus. Segundo o mesmo, a geometria grega teve início com o trabalho de Tales de Mileto (624 - 548a.C.). O que se sabe sobre ele é muito pouco, seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585a.C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade. Tales era considerado um homem de rara inteligência, o primeiro dos “sete sábios” da antiguidade. A ele foi associado a utilização de métodos dedutivos em geometria e fundador da geometria demonstrativa.

Pitágoras (560 - 480 a.C.) e o pitagórico Hipócrates de Quios também são mencionados neste Sumário. Pitágoras nasceu em Gamos, próximo de Mileto e durante suas peregrinações absorveu informações matemática e astronômicas, bem como religiosas. Retornando a Grécia fixou-se em Crotona e fundou uma sociedade secreta com bases matemáticas e filosóficas que tinha como lema “Tudo é número”. O símbolo de sua sociedade era um pentagrama.

Os geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (~300 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.) e Apolônio (~225 a.C.). Pode-se dizer que quase tudo que se fez de significativo em geometria até os dias de hoje foi originando no trabalho de um destes sábios. É por causa deles que o período entre 300 a.C. e 200 a. C. foi denominado a “Idade Áurea” da matemática grega.

A obra mais importante de Euclides foi Os Elementos, composta de 13 livros que não trata somente de geometria mas também de álgebra e teoria dos números. Os livros de I a IV tratam de geometria plana elementar. O livro V apresenta a teoria de proporções de Euclides. O livro VI aplica-se a semelhança de figuras planas. Os livros de VII a IX são dedicados a teoria dos números. O livro X contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos. Por fim, os livros de XI a XIII são os dedicados a geometria sólida. Estes livros constituem a mais importante obra matemática e o texto mais influente de todos os tempos.

O que se sabe sobre Arquimedes é que ele provavelmente tenha estudado por algum tempo com os discípulos de Euclides em Alexandria mas que viveu e morreu em Siracusa. Ele é considerado o maior matemático da Idade Helenística e de toda a antiguidade. Durante a Segunda Guerra Púnica a cidade em que vivia se viu envolvida no embate entre Roma e Cartago e neste período inventou máquinas de guerra para manter o inimigo a distância. Foi morto por um soldado romano apesar de ordens de poupar sua vida.

Apolônio escreveu uma obra chamada *Resultado Rápido*, agora perdida, que parece ter tratado os processos rápidos de calcular. Há ainda muitas outras obras perdidas dele inclusive seis das obras que estavam incluídas nos tratados mais avançados de Euclides, numa coleção chamada “Tesouro de análise”. Apolônio mereceu dos antigos o nome de “o Grande Geômetra”.

Após esta ascensão da geometria houve longo período onde quase nada foi produzido de novo. No final dos tempos antigos, Roma dominava e os centros gregos foram sendo dizimados pelas tropas romanas, a situação era sufocante e desencadeou um declínio do pensamento criativo. Roma, durante sua longa história, pouco contribuiu para a ciência e filosofia, muito menos para a matemática.

Com a queda do Império Romano no fim do século V e que se estendeu até o século XI, o ensino quase deixou de existir. Durante este período os maiores estudiosos matemáticos eram os hindus e os árabes mas que não deram grandes contribuições para a geometria.

O século XIV também foi improdutivo para a matemática. Foi o século da peste negra que dizimou parte da população europeia e o século que se desenrolou a Guerra dos Cem Anos.

No século XV as atividades matemáticas se centraram principalmente em ci-

1 A Geometria e seus Aspectos Históricos

dades da Itália, Nurembergue, Viena, Praga e Europa Central. Eram voltadas a aritmética, álgebra e trigonometria devido as necessidades do comércio, navegação, astronomia e agrimensura. Nurembergue tornou-se o centro da publicação de livros.

No século XVI houve um estímulo para o desenvolvimento da geometria com a tradução do *Comentário sobre Euclides, Livro I*, de Proclus em 1533. Federico Commandino (1509-1575) traduziu para o latim os quatro livros da obra *Seções cônicas* de Apolônio em 1566. Commandino também fez uma tradução de *Os Elementos* de Euclides. Com estas traduções era de se esperar que mais cedo ou mais tarde novamente gerasse interesse sobre a geometria. A maior parte da Europa Ocidental agora participava do desenvolvimento da matemática mas a figura principal desta época foi um francês chamado Francois Viète (1540-1603). Viète não era matemático por vocação pois havia estudado direito, somente em suas horas livres se dedicava a matemática, mesmo assim fez contribuições à aritmética, álgebra, trigonometria e geometria.

Depois deste período estéril da geometria, em 1639 Gérard Desargues (1591-1661) publicou um notável tratado original sobre seções cônicas que explorava a idéia de projeção mas este trabalho foi ignorado pelos matemáticos da época. Somente Blaise Pascal (1623-1662) e Phillippe de Lahire (1640-1718) se interessaram e continuaram os estudos sobre o assunto. A reintrodução de considerações projetiva em geometria só ocorreu no final do século XVIII quando Gaspard Monge (1746-1818) criou a geometria descritiva, mas o verdadeiro ressurgimento da geometria projetiva só foi empreendido por Jean-Victor Poncelet (1788-1867), um dos estudiosos da geometria que estava a volta de Monge.

Enquanto isso, de outro lado, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) concebiam as idéias de geometria analítica. Eles substituíram os pontos do plano por pares de números e as curvas por equações. A tarefa de se resolver um problema em geometria é transferido para uma tarefa de se resolver o mesmo problema em álgebra. Não se sabe ao certo quem inventou a geometria analítica. A atribuição a Descartes da invenção se embasa em uma publicação do mesmo em 1637 intitulada *La géométrie*, o terceiro e último apêndice. A atribuição a Fermat baseia-se em uma carta escrita em 1636 na qual afirma que suas idéias haviam tido início a sete anos antes.

Com a morte de Desargues, Fermat e Pascal o matemático de maior relevância da França passa a ser Phillippe de Lahire que era atraído pela geometria pura. Publicou em 1685 um livro intitulado *Secciones Conicae*.

Arthur Cayley (1821-1895) desenvolveu a teoria da invariância e seu desenvolvimento da geometria n-dimensional tem sido aplicada em física no estudo de espaço-tempo.

Euclides, em sua obra *Os Elementos*, construiu seu sistema em cinco postulados. Dentre eles, o quinto postulado ocupou geométricos por muito tempo, cerca de dois mil anos, donde tentavam deduzi-lo dos demais postulados. Foi a partir do século XIX que alguns matemáticos trabalhando de modo separados estabeleceram a independência do quinto postulado e assim criaram novas geometrias

consistentes, aplicáveis a espaços curvos, conhecidas como não-euclidianas, como a geometria esférica e a hiperbólica. Estes matemáticos famosos são Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), Janos Bolyai (1802-1860) e posteriormente Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Em 1872, Felix Klein (1849-1925), em sua aula inaugural propôs um programa de estudos de geometria que ficou conhecido como *Erlanger Programm* (Programa de Erlanger). Klein mostrou que o conceito de grupo podia ser usado para caracterizar diferentes geometrias. De maneira simplificada, o programa sustenta que a geometria é a investigação das propriedades das figuras que se mantém inalteradas quando as figuras passam por um grupo de transformações. Para ele, as homotetias e semelhanças constituíam o grupo principal da geometria euclidiana e as isometrias formavam um subgrupo das semelhanças, como características das transformações geométricas que não alteram as propriedades das figuras.

2 Transformações Geométricas

“Uma transformação geométrica no plano é uma aplicação bijetora de um conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo” [8, p. 20]. Sendo T uma transformação no plano Π uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, temos que para todo ponto P pertencente ao plano temos um ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua imagem por T .

Uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é bijetiva quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é injetiva quando pontos distintos $P \neq Q$ em Π tem sempre imagens distintas $T(P) \neq T(Q)$, em outras palavras, $T(P) = T(Q)$ implica $P = Q$. Por outro lado, T é sobrejetiva quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P , ou seja, para todo ponto P_1 em Π existe P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Um resultado imediato de T ser uma bijeção é que toda transformação geométrica tem uma inversa, isto é, sempre é possível desfazer uma transformação aplicando a ela sua inversa. $T^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$, ou seja, para todo ponto P_1 em Π , sua imagem $T^{-1}(P_1)$ pela inversa T^{-1} é o único ponto P de Π tal que $T(P) = P_1$.

Pode-se também aplicar às transformações outras transformações. Esta operação é denominada de composta. Sejam duas transformações $S, T : \Pi \rightarrow \Pi$, a composta $S \circ T : \Pi \rightarrow \Pi$ é a transformação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $S(T(P))$. Por definição, $(S \circ T)(P) = S(T(P))$. Assim, $S \circ T$ consiste em aplicar primeiro a transformação T e em seguida aplicar a transformação S .

Um caso particular de composta é a transformação identidade que consiste em aplicar a transformação inversa a sua transformação, ou seja, transforma cada ponto em si próprio. a transformação identidade é o elemento neutro da operação composta. Por definição tem-se $\text{Id}(P) = P$ para todo ponto P em Π .

Dada uma bijeção $T : \Pi \rightarrow \Pi$, tem-se:

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{Id},$$

pois,

$$T(T^{-1}(P_1)) = T(P) = P_1$$

e

$$T^{-1}(T(P)) = T^{-1}(P) = P$$

As transformações geométricas podem ser trabalhadas utilizando pontos e suas coordenadas ou com auxílio de vetores para que sejam determinadas as imagens

destes pontos. Esta variação entre as teorias variam muito de autor para autor como veremos nas teorias de isometrias e homotetias.

Cabe aqui dizer que **Vetor** é um segmento de reta orientado, no qual se distinguem uma origem e uma extremidade. É uma classe de equipolência de segmentos de reta orientados, que possuem todos a mesma intensidade (denominada norma ou módulo), mesma direção e mesmo sentido.

2.1 Isometrias

Isometria (do grego *isos* = igual e *metria* = medida) é uma transformação geométrica em que são conservadas todas as medidas (distâncias entre pontos e amplitude dos ângulos).

Sendo P e Q pontos quaisquer do plano Π , se aplicarmos a eles uma transformação geométrica T então teremos:

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$$

Abaixo faremos um breve estudo das propriedades fundamentais das isometrias.

Teorema: Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é injetiva

Demonstração: [4, p. 140]:

Com efeito, se

$$T(P) = T(Q)$$

então

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$$

logo

$$P = Q$$

Propriedade 1: Toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares e conserva a ordenação destes pontos colineares (Figura 1.1).

Demonstração: [4, p. 140]:

Sejam P e Q pontos distintos de Π e $T : \Pi \rightarrow \Pi$ uma isometria. Se $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$ então T transforma todo ponto R do segmento PQ num ponto R_1 do segmento P_1Q_1 .

Com efeito, como R pertence ao segmento PQ, temos

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$$

sendo T uma isometria, temos

$$d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$$

$$d(P_1, R_1) = d(P, R)$$

$$d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$$

Logo

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1)$$

Portanto, R_1 pertence ao segmento de reta P_1Q_1 .

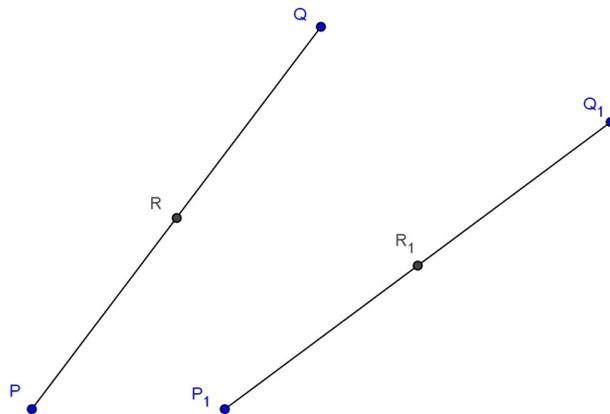


Figura 2.1: Propriedade 1: Ponto colinear R levado no ponto colinear R_1 por isometria

Propriedade 2: A imagem de uma reta r por uma isometria T é uma reta $r_1 = T(r)$.

Demonstração: [4, p. 140 e 141]:

Sejam P, Q pontos distintos de r e $P_1 = T(P)$, $Q_1 = T(Q)$ suas imagens por T . Chamemos de r_1 a reta que passa pelos pontos P_1 e Q_1 . Dado qualquer outro ponto R da reta r , afirmamos que sua imagem $R_1 = T(R)$ deve pertencer a reta r_1 . Para verificar, suponhamos que Q esteja entre P e R , ou se P já, Q pertence ao segmento PR . Então, Q_1 está no segmento de reta P_1R_1 , logo R_1 pertence a reta r_1 que liga P_1 a Q_1 . Os demais casos são tratados analogamente.

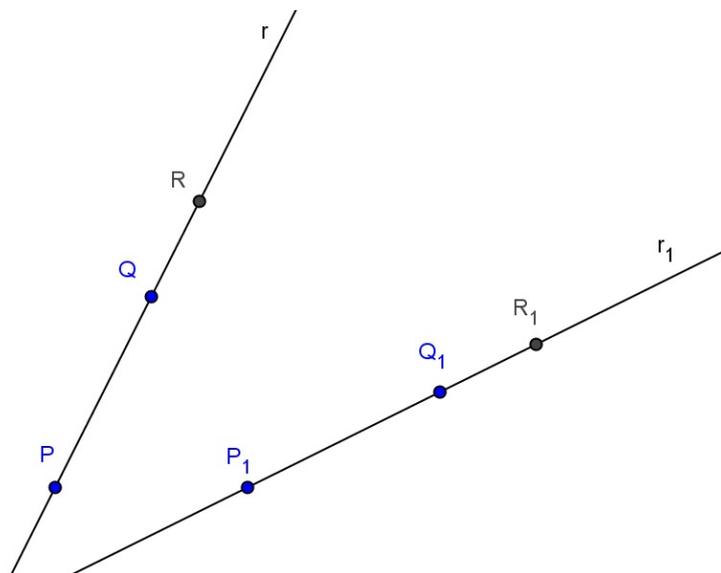


Figura 2.2: Propriedade 2: Reta $r_1 = T(r)$ obtida por isometria da reta r

Propriedade 3: Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.

Demonstração: [4, p. 141]:

Se $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria e as retas r, s do plano Π são paralelas, suas imagens $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ devem ser paralelas pois se existisse um ponto P_1 ao mesmo tempo em r_1 e em s_1 teríamos $P_1 = T(P)$, com P em r e $P_1 = T(Q)$, com Q em s . Sendo T injetiva, isso obrigaria $P = Q$, e então as retas r e s teriam um ponto $P = Q$ em comum, contradizendo o fato de que são retas paralelas.

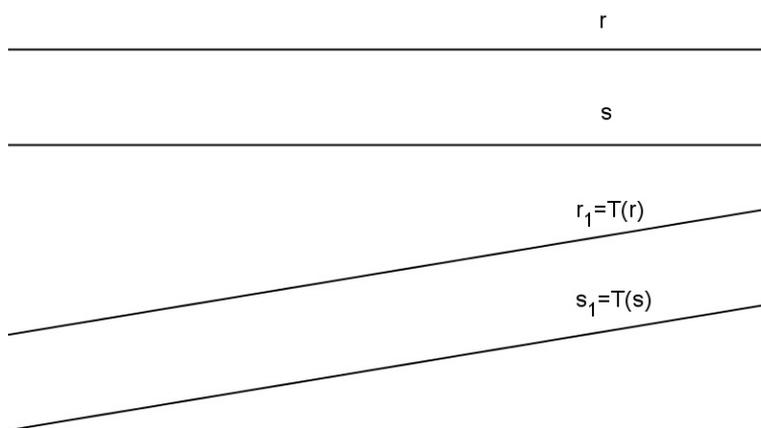


Figura 2.3: Propriedade 3: Retas paralelas $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ obtidas por isometria das retas paralelas r e s

Propriedade 4: Toda isometria transforma um triângulo retângulo nouro

triângulo retângulo.

Demonstração: [4, p. 141]:

Sejam $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria e ABC um triângulo retângulo em A . Pondo $A_1 = T(A)$, $B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$, o Teorema de Pitágoras assegura que:

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

Como T preserva distâncias, segue-se que:

$$d(B_1, C_1)^2 = d(A_1, B_1)^2 + d(A_1, C_1)^2$$

Em outras palavras, as isometrias transformam retas perpendiculares em retas perpendiculares, ou seja, preservam ângulos retos.

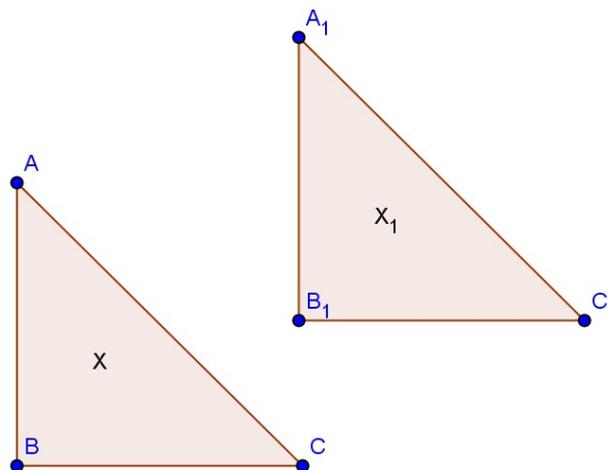


Figura 2.4: Propriedade 4: Triângulo retângulo $X_1 = T(X)$ obtida por isometria do triângulo X

Propriedade 5: Toda isometria preserva ângulos.

Demonstração:

Como verificado na propriedade 4, toda isometria transforma triângulo retângulo em triângulo retângulo, ou seja, $A_1 = T(A)$, $B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$. Assim temos que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ tem lados iguais pois T preserva as distâncias. Logo tem ângulos iguais.

Demodo geral, qualquer isometria T transforma um sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$. Além disso, T transforma um ponto qualquer P do plano noutro ponto $P_1 = T(P)$, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são as mesmas coordenadas de P no sistema OXY .

2 Transformações Geométricas

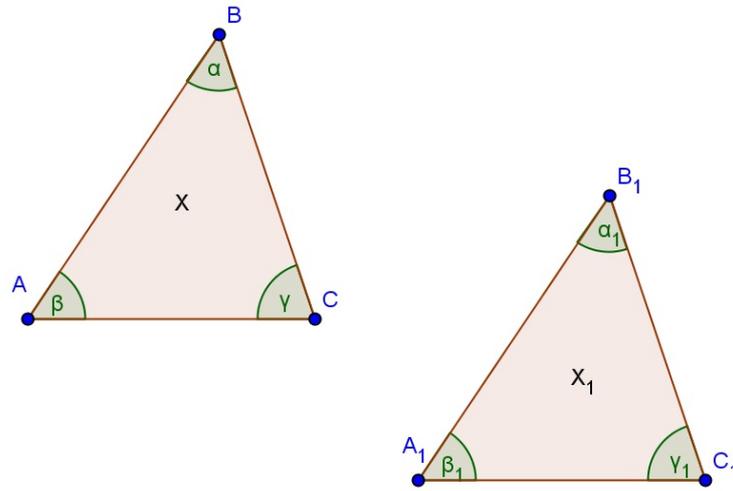


Figura 2.5: Propriedade 5: Todos os ângulos do triângulo X são congruentes aos ângulos do triângulo $X_1 = T(X)$

2.1.1 Translações

As isometrias mais simples são as translações.

Translação é a transformação que leva um ponto P em outro ponto Q . Vale observar que a translação que leva um ponto a outro é única, ou seja, existe um único vetor v que transforma P em $Q = P + v = T_v(P)$.

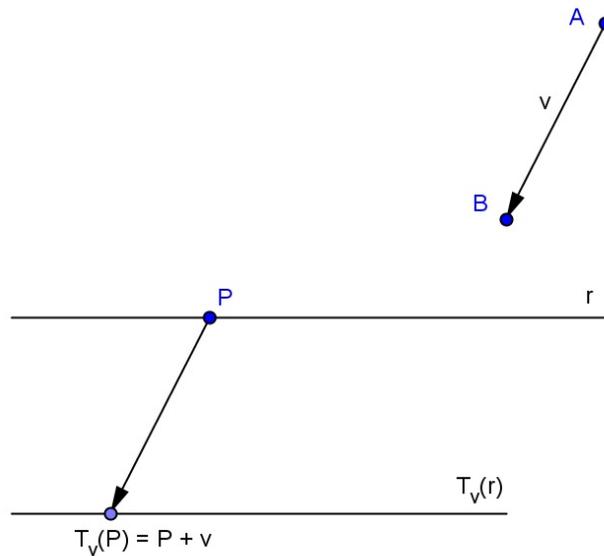


Figura 2.6: Translação do ponto P no ponto $T_v(P)$

A translação $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$, determinada pelo vetor v , é a translação

que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$. Como sabemos, se $v = AB$ então $P + v = Q$ é o ponto que o segmento orientado PQ é equipolente a AB . [4, p. 142]

A translação transforma uma figura X em outra figura $T_v(X) = P + v$ que é obtida transladando-se os pontos P de X pelo mesmo vetor v .

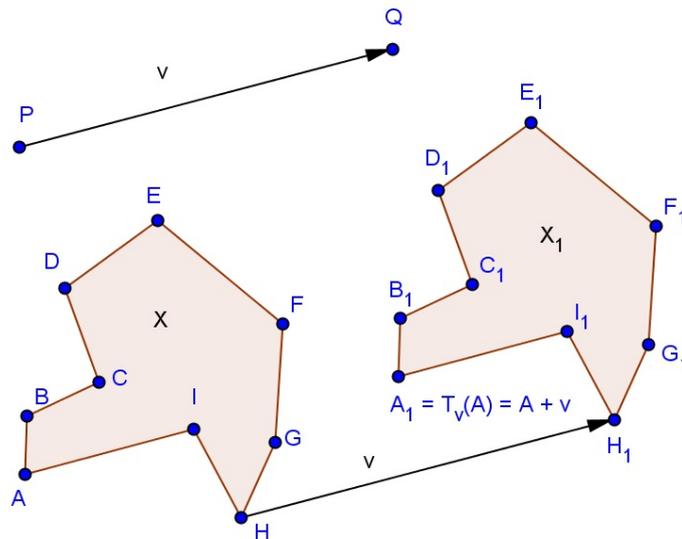


Figura 2.7: Translação da figura X na figura X_1 pelo vetor v

Em particular, a reta r é transformada na reta $r_1 = T(r)$, paralela a r , aplicando-se a todos os pontos de r o vetor v .

2.1.2 Rotações

Outro tipo de isometria é a rotação. Esta isometria transforma pontos do plano por meio de movimento giratório de mesma medida, em torno de um ponto determinado, chamado de centro da rotação.

Sejam O um ponto do plano Π e α um ângulo orientado. A rotação de centro O e ângulo α é a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano Π o ponto P_1 tal que os segmentos OP e OP_1 são congruentes e os ângulos $\widehat{POP_1}$ e α também são congruentes.

A rotação de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com

$$x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

e

$$y_1 = x \cdot \operatorname{sen} \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

2 Transformações Geométricas

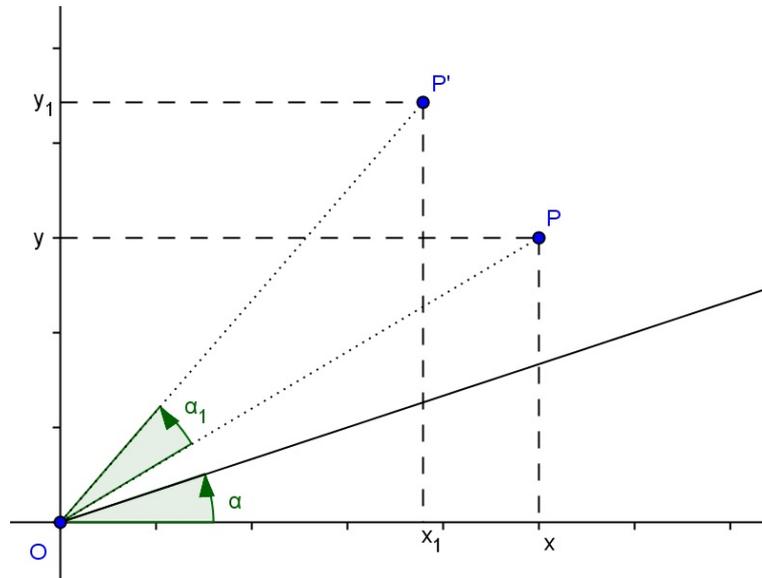


Figura 2.8: Rotação do ponto P no ponto P_1 com centro em O e ângulo α

São propriedades da rotação:

- A distância de qualquer ponto da figura a ser transformada ao centro de rotação e a distância entre a imagem deste ponto ao mesmo centro é sempre a mesma.
- A rotação não inverte o sentido de pontos lineares ou colineares.
- O ângulo α de rotação e o ângulo obtido pelas semirretas que passam por um ponto do objeto matemático e sua imagem e o centro de rotação são congruentes.
- O objeto matemático e sua imagem são congruentes.

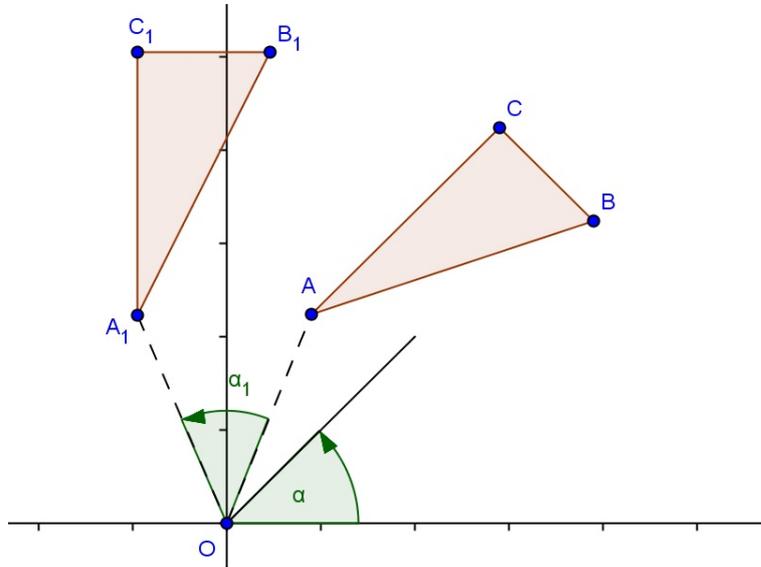


Figura 2.9: Rotação do objeto matemático com centro em O e com ângulo de rotação α

2.1.3 Reflexões

A reflexão é um tipo de isometria em que cada ponto da figura original e sua respectiva imagem estão a uma mesma distância de uma reta, chamada de eixo de reflexão. Este eixo é perpendicular à reta que contém os pontos.

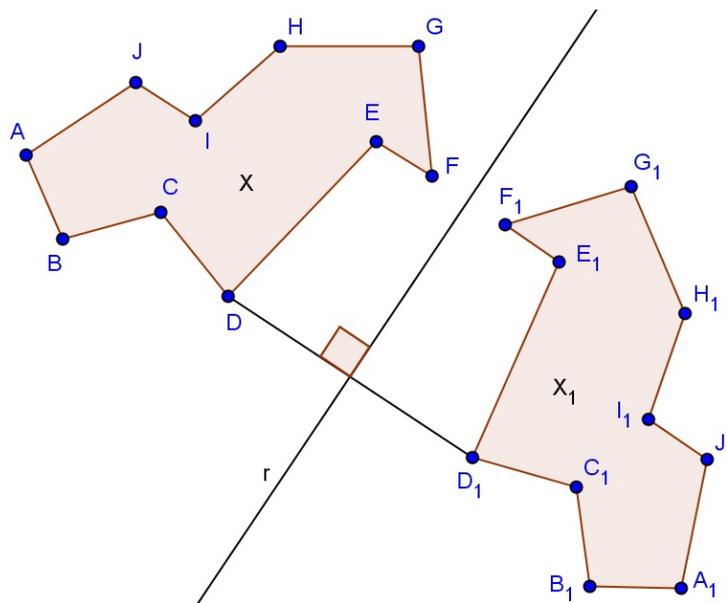


Figura 2.10: Reflexão da figura X em torno da reta r

As propriedades observadas neste tipo de isometria são:

2 Transformações Geométricas

- A distância de um ponto ao eixo de reflexão e a distância da imagem deste ponto ao eixo de reflexão são iguais.
- Os pontos do eixo de reflexão não se movem por efeito da reflexão.
- É uma isometria negativa pois altera a orientação dos ângulos, isto é, inverte a orientação do plano.

Segundo Lima (1992), a reflexão em torno da reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P_1 = T(P)$, simétrico de P em relação a r .

O ponto P_1 chama-se simétrico do ponto P em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento PP_1 . Se P pertence a r dizemos que seu simétrico em relação a r é ele próprio.

Sendo o sistema de eixos ortogonais OXY . Caso OX coincida com

$$x_1 = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot x + \frac{2a}{1 + a^2} \cdot (y - b)$$

e

$$y_1 = \frac{2a}{1 + a^2} \cdot x + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot (y - b) + b$$

o eixo de reflexão r então o ponto $P = (x, y)$ terá como reflexão T o ponto $P_1 = T(P) = (x, -y)$. Reciprocamente, se OY coincidir com r , o ponto $P = (x, y)$ terá como reflexão T o ponto $P_1 = T(P) = (-x, y)$.

Podemos analisar a reflexão em torno de uma reta de duas maneiras, caso o eixo de reflexão passe pela origem ou caso contrário.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. A reflexão T , em torno da reta r , que passa pela origem e faz ângulo α como o eixo OX , transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que:

$$x_1 = x \cdot \cos(2\alpha) + y \cdot \sen(2\alpha) \text{ (I)}$$

$$y_1 = x \cdot \sen(2\alpha) - y \cdot \cos(2\alpha) \text{ (II)}$$

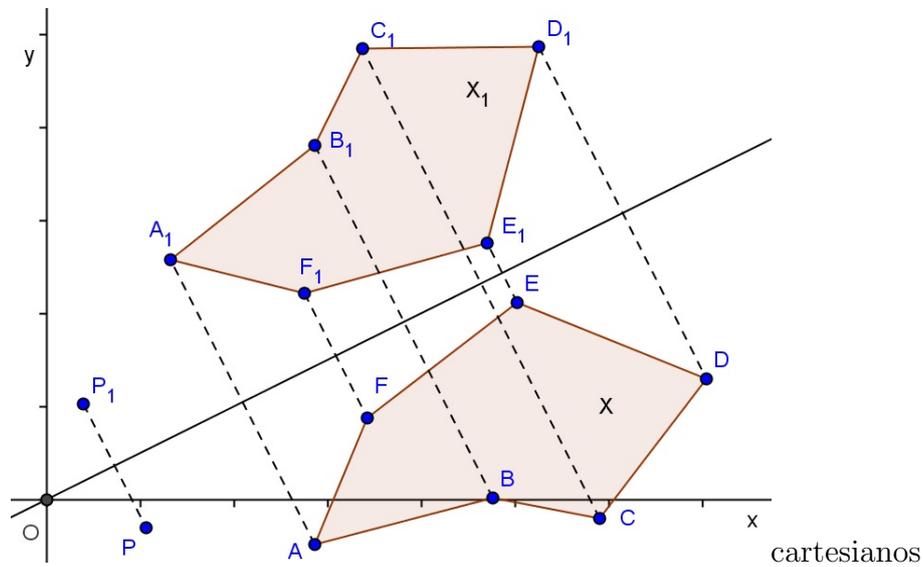


Figura 2.11: Reflexão em torno de uma reta r que passa pela origem O dos eixos ortogonais

Para as demais retas que não passam pela origem temos a seguinte equação da reta r , $y = ax + b$, que tem inclinação $\alpha = \text{tg}\alpha$ e corta o eixo y no ponto de ordenada b .

No caso anterior, apresentamos as equações para a determinação das coordenadas do ponto P_1 quando o eixo de reflexão passava pela origem. Para deixarmos este caso parecido com o anterior, podemos transladar a reta r para a reta r_1 que passa pela origem e tem equação $y = ax$, que é paralela a $y = ax + b$.

Dado o ponto $P = (x, y)$, para determinarmos a imagem deste pela reflexão T em torno de r , em primeiro lugar faremos uma translação vertical de vetor $-v = (0, -b)$, obtendo $P' = (x, y - b)$, ou seja, a distância de P' a reta r_1 é a mesma que a distância entre P em relação a reta r .

Em seguida refletimos o ponto P' em torno da reta r_1 utilizando, para isso, as equações (I) e (II), obtendo assim o ponto P'' de coordenadas:

$$x'' = x \cdot \cos(2\alpha) + (y - b) \cdot \text{sen}(2\alpha) \quad (\text{III})$$

$$y'' = x \cdot \text{sen}(2\alpha) - (y - b) \cdot \cos(2\alpha) \quad (\text{IV})$$

Por fim, basta dar a translação de vetor $v = (0, b)$ ao ponto P'' chegando assim ao ponto $P_1 = T(P) = (x_1, y_1)$.

Para ficarmos com as equações somente em função de x , y , a e b substituímos

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$\text{sen}(2\alpha) = \frac{2a}{1 + a^2}$$

2 Transformações Geométricas

nas equações (III) e (IV), respectivamente e ficamos com as equações

$$x_1 = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot x + \frac{2a}{1 + a^2} \cdot (y - b)$$

$$y_1 = \frac{2a}{1 + a^2} \cdot x + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot (y - b) + b$$

que representam as equações da reflexão em torno da reta r .

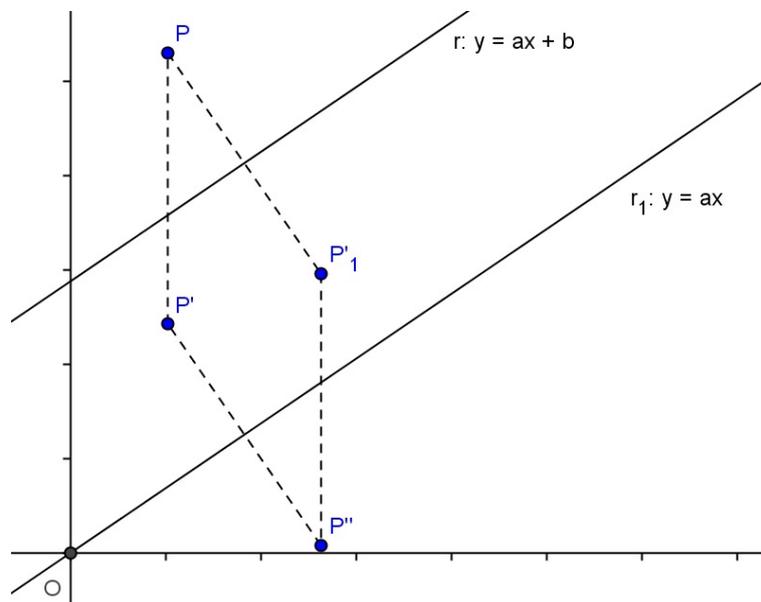


Figura 2.12: Reflexão em torno de uma reta r que não passa pela origem dos eixos ortogonais

2.1.4 Outras Isometrias (ou Isometrias Compostas)

A composição de duas ou mais isometrias também é uma isometria, ou seja, pode-se refletir uma figura e em seguida transladá-la e esta transformação geométrica ainda continuará sendo uma isometria. Este caso particular é chamado de **reflexão deslizante**.

Outros casos são:

- rotação e translação;
- reflexão e rotação;
- reflexão, rotação e translação;
- etc.

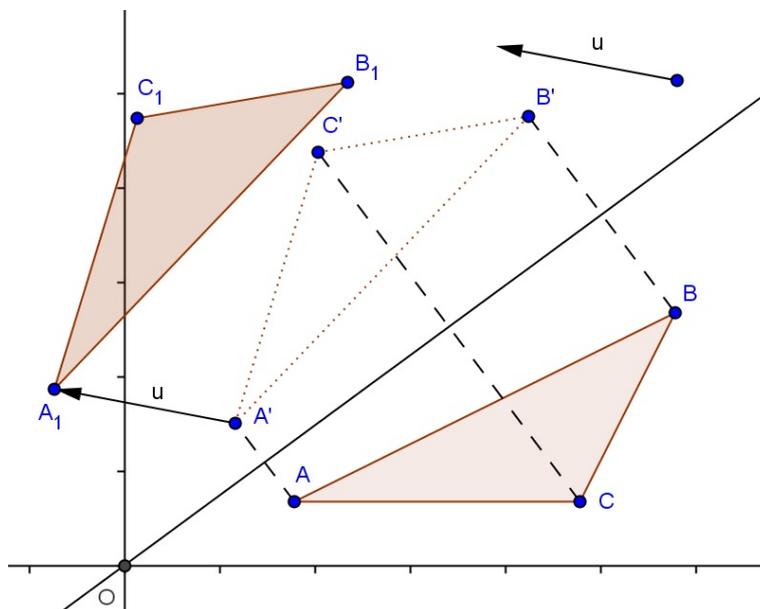


Figura 2.13: Reflexão em torno de uma reta r e translação pelo vetor u . (reflexão deslizante)

2.2 Homotetias

Homotetia é a transformação $H : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa cada ponto P em Π o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$, onde r é um número real chamado de razão e O é o centro da homotetia. Toda homotetia é uma semelhança.

Dados os pontos P, Q no plano, com $H(P) = P_1$ e $H(Q) = Q_1$, temos

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OQ} - r \cdot \overrightarrow{OP} = r \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = r \cdot \overrightarrow{PQ}$$

logo

$$d(H(P), H(Q)) = |\overrightarrow{P_1Q_1}| = r \cdot |\overrightarrow{PQ}| = r \cdot d(P, Q).$$

2.2.1 Propriedades das Homotetias

Propriedade 1: Se $r = 1$ a homotetia H é uma identidade.

Demonstração:

De fato, dado o ponto P no plano, com $H(P) = P_1$, temos então que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$. Como $r = 1$, temos que $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} \iff P_1 = P$, ou seja, $H(P) = P$ para todo P .

Propriedade 2: A inversa H^{-1} de uma homotetia H , é a homotetia de centro O e de razão $\frac{1}{r}$.

Demonstração: Dado P um ponto do plano, chamando de K a homotetia de centro em O e razão $\frac{1}{r}$ e H a homotetia também de centro O e de razão r . Efetuando a composta $K(H(P))$ temos,

2 Transformações Geométricas

$$H(P) = P_1 \text{ e } \overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$$

Aplicando a segunda homotetia temos $\frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{r} \cdot r \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$. Assim $K(H(P)) = P$ e $K = H^{-1}$ é a transformação inversa de H , cqd.

Além destas propriedades, algumas observações com relação a razão devem ser apresentadas:

- Se $r > 1$, as figuras obtidas por esta transformação são figuras ampliadas com relação a figura original.
- Se $0 < r < 1$, as figuras obtidas por esta transformação são figuras reduzidas com relação a figura original.
- Se $-1 < r < 0$, as figuras obtidas por esta transformação são figuras reduzidas com relação a figura original e refletidas em relação ao centro da homotetia.
- Se $r = -1$, as figuras obtidas por esta transformação são figuras refletidas, ou rotacionadas de 180° , de mesmo tamanho da figura original.
- Se $r < -1$, as figuras obtidas por esta transformação são figuras ampliadas com relação a figura original e refletidas em relação ao centro da homotetia.

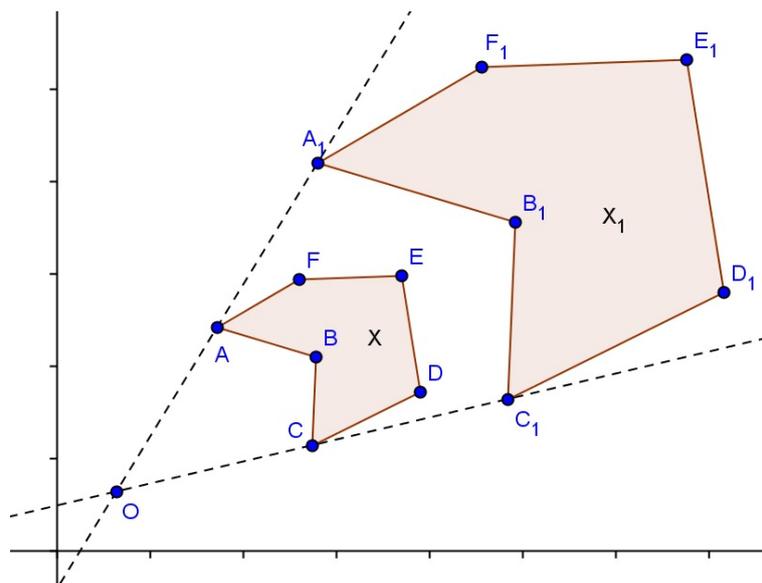


Figura 2.14: Homotetia de centro O e razão $r > 1$

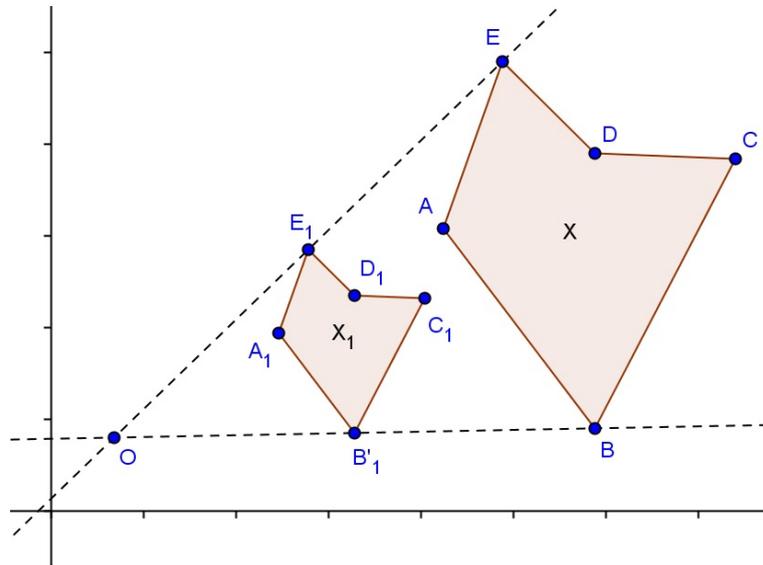


Figura 2.15: Homotetia de centro O e razão $0 < r < 1$

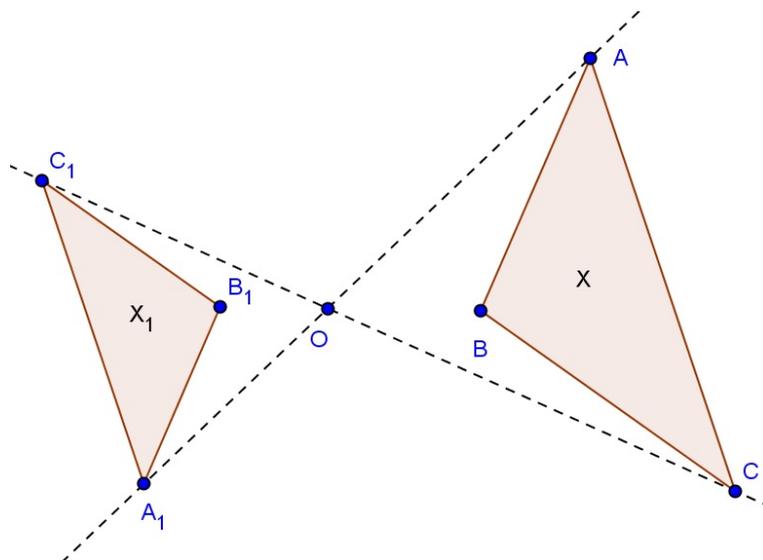


Figura 2.16: Homotetia de centro O e razão $-1 < r < 0$

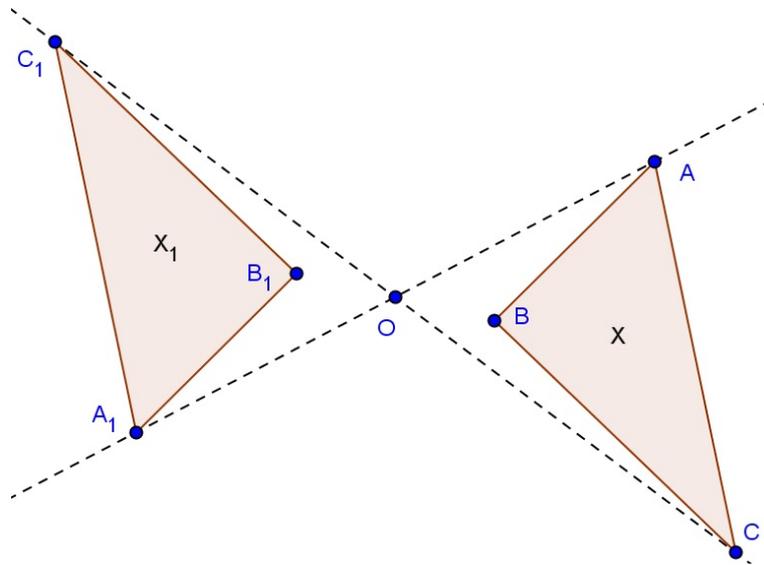


Figura 2.17: Homotetia de centro O e razão $r = -1$

Homotetia é a transformação $H : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa cada ponto P em Π o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$, onde r é um número real chamado de razão e O é o centro da homotetia. Toda homotetia é uma semelhança.

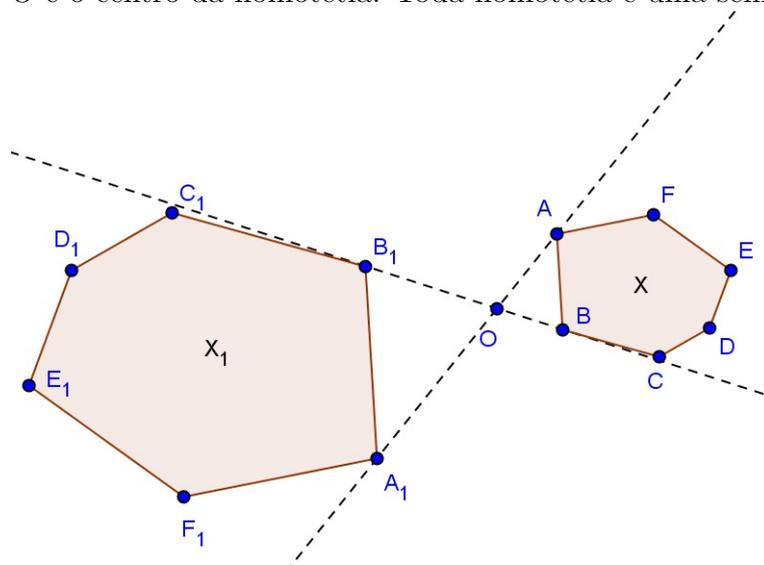


Figura 2.18: Homotetia de centro O e razão $r < -1$

3 Estudo das Propostas Curriculares Nacionais, do Currículo do Estado de São Paulo e de Livros Didáticos

Introdução

A instalação da República no Brasil e o surgimento de idéias de um plano que tratasse da educação para todo o território nacional aconteceram simultaneamente.

Em 1932 um grupo de educadores lançou um manifesto que ficou conhecido como “Manifesto dos Pioneiros da Educação”. Propunham a reconstrução educacional e este documento teve grande repercussão e motivou uma campanha que resultou na inclusão, em 1934, de um artigo específico na Constituição Brasileira. O artigo 150 declarava ser competência da União “fixar o plano nacional de educação”.

Somente em 1962 surgiu o primeiro Plano Nacional de Educação, elaborado na primeira vigência da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Esta sofreu revisões em 1965, 1966 e 1967.

Com a Constituição Federal de 1988 ressurgiu a idéia de um plano nacional de longo prazo e em 1998 o Poder Executivo enviou ao Congresso Nacional uma mensagem relativa ao projeto de lei que “Institui o Plano Nacional de Educação”. Este plano tinha como objetivos a elevação do nível de escolaridade da população, a melhoria da qualidade de ensino, a redução das desigualdades sociais e a democratização do ensino público.

Paralelamente a este Plano Nacional de Educação, em 1995 começaram a ser elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais. Os PCN’s são apresentados não como um currículo e sim como um subsídio para apoiar o projeto da escola na elaboração do seu programa curricular, ou seja, tem como finalidade principal equalizar a educação nacional, servindo como um importante material de consulta e de discussão.

Em 2007, no estado de São Paulo, foi criado o programa “São Paulo Faz Escola” e tem como foco a implantação de um currículo pedagógico único para todas as escolas da rede pública estadual. Este programa consiste da entrega de um mesmo material didático para toda a rede e todos seguem o mesmo plano de

aula. Acredita-se que como todas as unidades escolares contam com o mesmo currículo pedagógico, isso auxilia na melhoria da qualidade de ensino pois coloca todos os alunos da rede estadual no mesmo nível de aprendizado.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Como mencionado anteriormente, os PCN's não são apresentados em forma de currículo e sim como material de consulta para a elaboração do mesmo.

Estes parâmetros são divididos em ciclos que abrangem todos os anos da educação básica conforme disposto abaixo:

- 1° Ciclo - 1ª e 2ª série do ensino fundamental;
- 2° Ciclo - 3ª e 4ª série do ensino fundamental;
- 3° Ciclo - 5ª e 6ª série do ensino fundamental;
- 4° Ciclo - 7ª e 8ª série do ensino fundamental;
- Ensino Médio.

Nos PCN's, os conteúdos de matemática para o ensino fundamental foram organizados em quatro blocos de conteúdos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento de Informação. O tema Transformações Geométricas encontra-se no bloco de Espaço e Forma.

3.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - 1° ao 4° Ano do Ensino Fundamental

Nas orientações para o 1° ciclo não há nenhuma menção ao assunto estudado, mas podemos destacar os objetivos e conteúdos de geometria pois os mesmos servem como a construção e o alicerce para o aprendizado de transformações geométricas:

Objetivos:

- Perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, que envolvem descrições orais, construções e representações. [10, p. 47]

Conteúdos:

- Construção e representação de formas geométricas. [10, p. 51]
- Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos, sem uso obrigatório de nomenclatura. [10, p. 51]

Para o 2° ciclo, dentre todos os objetivos de geometria podemos destacar:

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Objetivo:

- Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções. [10, p. 56]

Conteúdos:

- Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades. [10, p. 60]
- Identificação de simetria em figuras tridimensionais. [10, p. 60]

Podemos salientar neste ciclo, dentre as orientações didáticas para este bloco de conteúdo, que a construção do conhecimento geométrico aqui apresentado se faz principalmente da observação de objetos e formas geométricas na natureza. Portanto, devemos explorar e incentivar atividades em que os alunos valorizem os aspectos geométricos do meio em que os mesmo estejam inseridos.

O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por aparência física, em sua totalidade, e não por suas artes ou propriedades. [10, p. 82]

Um trabalho constante de observação e construção de formas é que levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas. Para tanto, diferentes atividades podem ser realizadas: compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não outras, etc. [10, p. 82]

3.1.2 Parâmetros Curriculares Nacionais - 5° ao 8° Ano do Ensino Fundamental

O 3° ciclo destaca visar o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio de:

- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. [11, p. 65]
- estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representação. [11, p. 65]

Salienta-se que, neste ciclo, os alunos ampliam o conhecimento sobre geometria e deve-se trabalhar com problemas mais complexos, sendo importante enfatizar noções de direção e sentido, de ângulo, paralelismo, perpendicularismo, classificações das figuras geométricas, relações das figuras e suas representações planas, exploração das figuras, etc.

Destaca-se também que, neste ciclo, um aspecto que merece atenção é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e outros instrumentos.

Os conceitos e procedimentos que envolvem transformações geométricas neste ciclo são:

3 PCN's, Currículo de SP e Livros Didáticos

- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície). [11, p. 73]

- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro, da área). [11, p. 73]

O 4º ciclo destaca visar o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio de:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; [11, p. 81]

- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança; [11, p. 82]

O que pretende-se, neste ciclo, é que os alunos consigam manusear e construir figuras geométricas, a fim de que se possam fazer conjecturas e identificar propriedades sobre as mesmas. Para isso, é importante, neste bloco, que se desenvolvam atividades que permitam aos alunos perceber que, pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em outra.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem fornecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). [11, p. 86]

Neste ciclo, espera-se que o aluno tenha seus primeiros contatos com o raciocínio dedutivo.

Engloba-se no 4º ciclo, os conceitos e procedimentos listados neste PCN:

- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composição destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). [11, p. 89]

Este bloco de conteúdos contempla o estudo de formas e destaca a importância do estudo de transformações geométricas para o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial.

Várias são as observações e conclusões sobre o ensino de transformações geométricas para este bloco apresentado no PCN, destacando-se entre elas:

- As transformações geométricas permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa. Podem-se propor atividades de comparação de figuras onde sejam identificadas quais os movimentos necessários para se chegar a segunda figura a partir da primeira. Estas atividades podem fazer uso de figuras encontradas em pisos, azulejos, tapetes, etc.
- As transformações geométricas são um ótimo ponto de partida para a construção das noções de congruência.
- O estudo de transformações que envolvem ampliação e redução é um bom ponto de apoio para o conhecimento de simetrias.

3.1.3 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+) - Ensino Médio

Diferente dos PCN's voltados ao Ensino Fundamental, divididos em ciclos, o PCN para o Ensino Médio é um só, mas dividido em três áreas do conhecimento: Linguagens e Códigos; Ciências Humanas; e Ciências da Natureza e a Matemática e suas Tecnologias. Nesta última área são inseridas as disciplinas de Física, Química, Biologia e, como já identificado no nome da área, a Matemática.

Neste PCN dá-se ênfase as articulações entre as áreas do conhecimento, levando em consideração que, quando tratamos, por exemplo, algum assunto matemático, podemos estar contextualizando linguagens que podem ser atribuídas à área de Linguagens e Códigos, ou quando trabalhamos funções e gráficos, podemos usar exemplos reais do dia-a-dia como dados geográficos e estes podem ser atribuídos à área de Ciências Humanas.

A articulação entre as áreas é uma clara sinalização para o projeto pedagógico da escola. Envolve uma sintonia de tratamentos metodológicos e, no presente caso, pressupõe a composição do aprendizado de conhecimentos disciplinares com o desenvolvimento de competências gerais. Só em parte essa integração de metas formativas exige, para sua realização, projetos interdisciplinares, concentrados em determinados períodos, nos quais diferentes disciplinas tratem ao mesmo tempo de temas afins. Mais importante do que isso é o estabelecimento de metas comuns envolvendo cada uma das disciplinas de todas as áreas, e o serviço de desenvolvimento humano dos alunos e também dos professores.[15, p. 16]

As disciplinas que compõem a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias são ciências que têm em comum a investigação da natureza, os

3 PCN's, Currículo de SP e Livros Didáticos

desenvolvimentos tecnológicos e compartilham linguagens para a representação de fenômenos.

Em suma, a articulação da área de Ciências da Natureza e da Matemática com as áreas de Linguagens e Códigos, Ciências Humanas e com ela própria, se faz de acordo com três competências especificadas abaixo:

- Representação e comunicação;
- Investigação e compreensão;
- Contextualização sócio-cultural.

Cada uma destas competências envolvem uma gama de, como chamaremos aqui, subcompetências, conforme listadas abaixo:

Representação e comunicação: [15, p. 27]

- Reconhecer e utilizar adequadamente na forma oral e escrita símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem específica.

- Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.

- Consultar, analisar e interpretar textos e comunicação de ciência e tecnologia veiculados por diferentes meios,

- Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.

- Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.

Investigação e compreensão: [15, p. 30]

- Identifica em cada situação-problema as informações variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.

- Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.

- Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.

- Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.

- Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.

Contextualização sócio-cultural: [15, p. 32]

- Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.

3.2 Proposta Curricular e Currículo do Estado de São Paulo

- Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.
- Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico e contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.
- Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esses conhecimentos no exercício da cidadania.

No âmbito dos PCN's, após a exposição das disciplinas em forma de áreas de conhecimento, são apresentadas as disciplinas separadamente cada uma com seus objetivos, competências e especificidades.

A disciplina de matemática está dividida em três eixos ou temas estruturadores: Álgebra, números e funções; Geometria e medidas; Análise de dados. As transformações geométricas estão inseridas nas competências de **investigação e compreensão**, ou pelo menos há indícios de que isso acontece, dentro do bloco temático de Geometria e Medidas, que compreende o estudo de geometrias planas, espacial, métrica e analítica. Em **interações, relações e funções**, uma das divisões da competência citada acima, podemos ver que há uma preocupação com o tema desta pesquisa.

- Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. [15, p. 116]

No ensino fundamental deveriam ter sido tratados, de acordo com os devidos PCN's, as transformações geométricas na forma de primeiras reflexões através de experimentações e deduções. No ensino médio, também de acordo com este documento, é esperado que haja um aprofundamento destas idéias.

Há, neste documento, uma proposta de organização de temas e unidades para os três anos do ensino médio, conforme **Anexo 1**, onde o tema de transformações geométricas pode estar inserido tanto no primeiro quanto no terceiro ano, ou pode ser que nem esteja sendo contemplado em nenhum dos anos devido a grande abertura dada na apresentação dos temas.

3.2 Proposta Curricular e Currículo do Estado de São Paulo

Além dos PCN's, apresentados no capítulo anterior, alguns, ou todos estados, possuem seus próprios currículos. Estes são elaborados e formulados tomando como base parâmetros nacionais e, como tal, visa a igualdade do ensino em toda a região por ele abrangida.

No caso do Estado de São Paulo, os parâmetros para esta educação equalitária estão divididos em duas partes. A primeira é a Proposta Curricular e a segunda é o Currículo propriamente dito.

Descreveremos a seguir estes dois documentos, dando ênfase, sempre que possível, ao objeto desta pesquisa.

3.2.1 Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Elaborado no ano de 2008, esta proposta teve como objetivo a organização do ensino em todo o estado. É baseado no aprendizado por competências¹ e habilidades².

Nesta proposta, bem como nos PCN's, as disciplinas estão alocadas em áreas, determinadas pela proximidade entre as mesmas. Um ponto diferente entre estes dois documentos é que, enquanto nos parâmetros nacionais as áreas estão divididas em três, onde a Matemática está inserida nas "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias", na proposta do estado, a Matemática tem sua própria área. As justificativas para esta diferença já era discutida anteriormente na elaboração dos PCN's e foi retomada na elaboração desta proposta em específico, tendo como três razões principais:

- A matemática pensada como um conjunto de linguagens e códigos deveria estar inserida na área onde está também a Língua Portuguesa. "A matemática compõe com a língua materna um par fundamenta, mas com caráter complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro." [18, p. 38]

- A matemática, inserida na área de Ciências conforme PCN's, mesmo sendo importante para a expressão científica, constitui um conhecimento específico da educação básica.

- A matemática como área específica pode facilitar a transformação de informação em conhecimento.

Tendo estabelecido onde a matemática se encaixa, ou seja, em sua própria área, esta proposta apresenta, esta disciplina dividida em quatro grandes temas: **Números; Geometria; Medidas; e Tratamento de Informação**. Por fim, expõe um quadro de conteúdos por série, para o ensino fundamental e para o ensino médio, separadamente, conforme **Anexo 2** e **Anexo 3**.

- 5^a série - não há nenhuma menção ao tema estudado.
- 6^a série - as transformações geométricas aparecem no segundo bimestre, no tema de "simetria".
- 7^a série - não há nenhuma menção ao tema estudado.

¹ "Competência é a faculdade de mobilização de um conjunto de recursos cognitivos como saberes, habilidades e informações para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações." (Perrenoud)

² Habilidades, em educação, são os meios pelo qual se pretende atingir os objetivos.

3.2 Proposta Curricular e Currículo do Estado de São Paulo

- 8^a série - as transformações geométricas aparecem no terceiro bimestre, no tema de “semelhança”.
- 1^a série do ensino médio - não há nenhuma menção ao tema estudado.
- 2^a série do ensino médio - não há nenhuma menção ao tema estudado, mas a mesma pode estar incluída no tema de “elementos da geometria de posição” no quarto bimestre.
- 3^a série do ensino médio - as transformações geométricas aparecem no terceiro bimestre, no tema de “composição: translações e reflexões”.

3.2.2 Currículo do Estado de São Paulo

No ano de 2010, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo elaborou um material denominado Currículo do Estado de São Paulo, sendo a versão mais atual a edição de 2011 que foi utilizada nesta pesquisa. Este documento nada mais é do que seu antecessor com novo nome e algumas mudanças que só aparecem a partir da metade do documento. Para se ter uma idéia, até a página 25 do anterior e a 24 deste documento está praticamente a mesma coisa, com pequenas alterações, mas a essência continua a mesma. A diferença entre eles aparece somente após as páginas citadas onde o primeiro continua fazendo uma explanação das demais áreas do conhecimento e o Currículo salta para assuntos relacionados à matemática.

Nesta nova parte ainda assim continua o mesmo texto, só que agora as páginas equivalentes são a página 37 da proposta curricular com a página 25 do currículo, mudando somente o tema deste conteúdo.

Ainda seguindo o mesmo contexto, aparece agora uma das diferenças entre este e seu antecessor. Diferentemente do anterior com quatro grandes temas, este tem apenas três: **Números**, **Geometria** e **Relações**.

Outra grande diferença que aparece a partir deste ponto é que todos os temas estão sendo amplamente comentados, dando destaque que neste já está sendo mencionado o ensino de nove anos. Aparece, dentre estes comentários sobre geometria uma menção, mesmo que pequena sobre tópicos de transformações geométricas.

As primeiras idéias associadas ao plano cartesiano podem - e devem - estar presentes já no Ensino Fundamental, na 5^a série/6^o ano ou na 6^a série/7^o ano, ainda que por meio de localização de pontos em mapas, ou pelo estudo de simetrias, ampliações e reduções de figuras no plano coordenado; [20, p. 42]

Como os demais documentos relacionados à Educação, esta não foge a regra e também dá ênfase a busca pela construção das competências, conduzidas pelos conteúdos, competências essa como a capacidade de expressão, capacidade de

3 PCN's, Currículo de SP e Livros Didáticos

compreensão, capacidade de argumentação, capacidade propositiva, capacidade de contextualizar e capacidade de abstrair.

Por fim, são apresentados quadros de conteúdos, (**Anexos de 4 a 10**) que são bem parecidos aos conteúdos em livros didáticos. Cabe ressaltar que, diferentemente de outros documentos, este currículo, possuidor de três temas, procura, nestes quadros, fazer uma inter-relação entre eles.

Os conteúdos apresentados nestes quadros estão bem discriminados, tendo para cada um, uma lista de outros subtópicos e com suas respectivas habilidades. É de fácil observação quando da inclusão do tema desta pesquisa conforme serão apresentados abaixo:

Na 5^a série/6^o ano do ensino fundamental não há menção de conteúdos pertinentes às transformações geométricas, porém, no quadro do 3^o bimestre há uma habilidade correspondente ao tema estudado.

Compreender a idéia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares. [20, p. 58]

No quadro da 6^a série/7^o ano do ensino fundamental há, agora, no conteúdo para o 2^o bimestre, o tópico de “Simetrias” mencionado como tema a ser estudado bem como sua habilidade correspondente.

Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia. [20, p. 59]

No conteúdo do 3^o bimestre para o 8^a série/9^o ano do ensino fundamental, o assunto relacionado com as transformações geométricas é aqui apresentado como “O conceito de semelhanças” e possui ainda uma habilidade correspondente.

Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes. [20, p. 64]

Encontramos, no conteúdo para o 2^o ano do ensino médio, mais especificamente no 1^o bimestre, uma habilidade que, mesmo não estando relacionada nos temas de geometria, pode ser considerado como assunto relacionado ao objeto de estudo.

Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x) + c$ a partir do gráfico de $y = \text{sen}x$, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos. [20, p. 67]

Apresentado no conteúdo para o 3^o ano do ensino médio, relacionado no 3^o bimestre, está o tema de “Composição: translações e reflexões”, cuja habilidade esperada está descrita abaixo.

Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias e inversões).

Os demais anos da educação básica não contemplam os conteúdos de transformações geométricas.

3.3 Livros Didáticos

Atualmente, todos os alunos e professores da educação básica pública das redes federal, estaduais, municipais e do Distrito Federal, recebem livros didáticos gratuitos.

Existem, hoje, dois programas que são responsáveis pela avaliação, seleção e distribuição destes livros, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), cujo responsável pela política de execução é o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

O PNLD, como conhecemos, começou em 1985, entretanto, este é o programa mais antigo de distribuição de obras didáticas aos estudantes pois teve início em 1929 com outra denominação. O PNLEM teve início em 2004.

Um ponto interessante destes programas é que a escolha dos livros didáticos é feita pelos professores e esta escolha é feita a cada três anos. Sendo assim, escolhemos algumas coleções do ensino fundamental II e do ensino médio para verificarmos quanto a incidência das transformações geométricas.

As coleções escolhidas foram:

- A Conquista da Matemática; Giovanni Jr, J. R.; Catrucci, B.; 6^o, 7^o, 8^o e 9^o ano; FTD, 2009. (PNLD 2011, 2012, 2013)
- Matemática: Bianchini; Bianchini, E; 6^o, 7^o, 8^o e 9^o ano; Moderna, 2011. (PNLD 2014, 2015, 2016)
- Matemática; Dante, L. R.; 1^o, 2^o e 3^o ano do ensino médio; Ática, 2004. (PNLEM 2006, 2007, 2008)
- Matemática, volume único; Paiva, M.; 1^o, 2^o e 3^o ano do ensino médio; Moderna, 2005. (PNLEM 2009, 2010, 2011)
- Matemática - Paiva; Paiva, M.; 1^o, 2^o e 3^o ano do ensino médio; Moderna, 2009. (PNLEM 2012, 2013, 2014)
- Conexões com a Matemática - obra coletiva; Barroso, J. M.; 1^o, 2^o e 3^o ano do ensino médio; Moderna, 2010. (PNLEM 2012, 2013, 2014)

3.3.1 A Conquista da Matemática[28]

Estes livros foram disponibilizados para a escolha do PNLD de 2011.

Esta coleção apresenta, em seus dois primeiros livros, pouco conteúdo direcionado à geometria, o que parece ser compensado nos dois últimos, que estão repletos deste tema.

Dentre os conteúdos de geometria, no livro elaborado ao 9^o ano podemos encontrar um capítulo sobre “Semelhanças”. Neste capítulo podemos observar o uso de transformações geométricas, na forma de ampliação e redução, em figuras,

3 PCN's, Currículo de SP e Livros Didáticos

polígonos e, com maior ênfase, em triângulos. No final deste capítulo há uma pequena referência ao tema de Homotetia, tema este, que envolve as transformações usadas.

Não foram encontradas nenhuma referência às isometrias (translação, rotação e reflexão) nem às simetrias.

3.3.2 Matemática: Bianchini[29]

Esta coleção só está sendo distribuída para análise e está disponível para seleção para o PNLD 2014.

Esta obra tem boa quantidade de geometria distribuída em seus quatro livros.

Quanto às transformações geométricas, podemos encontrá-la nos três últimos volumes, 7^o, 8^o e 9^o ano.

No livro para o 7^o ano existe um capítulo voltado à “Simetria e ângulos” com muitos exemplos, explicações bem elaboradas e boa quantidade de exercícios bem variados. Cabe ressaltar que só foram comentadas as simetrias axiais, sem se fazer referência alguma às simetrias centrais, ou de rotação.

No livro para o 8^o ano existe um capítulo voltado ao “Estudo dos polígonos”, onde podemos encontrar, dentro da “Congruência de polígonos”, o tema de transformações geométricas. Elas são apresentadas para demonstrar transformações que geram figuras congruentes e são elas: reflexão, translação e rotação.

No livro para o 9^o ano existe um capítulo voltado às “Figuras semelhantes” que nada mais é do que a continuação do capítulo de “Simetria”, do livro do 7^o ano, de maneira mais aprofundada. Encontra-se, agora, a apresentação de homotetia para ampliação, redução e inversão.

No geral, os exercícios são bem elaborados e com boa diversidade.

3.3.3 Matemática[30]

Esta coleção fez parte do PNLEM de 2006 e ainda é usada como referência por alguns professores da rede estadual de ensino.

O único capítulo que podemos encontrar algo relacionado com transformações geométricas é o de “Noções de geometria plana”, encontrado no livro elaborado para o 1^o ano do ensino médio.

Não foi encontrado nada sobre isometrias em nenhum dos três livros.

3.3.4 Matemática - Volume Único[31]

Este livro fez parte do PNLEM de 2009.

Uma vantagem deste tipo de livro é a de se adaptar facilmente aos mais variados currículos e planos de aulas, por ser volume único. Por outro lado, traz a desvantagem de se ter uma obra completa para ser utilizada, no máximo, um terço de seu conteúdo.

Quanto as geometrias das transformações, apenas o capítulo que fala sobre “Semelhança de figuras planas” pode ser relacionado ao tema de estudo. Mesmo neste capítulo, não há nenhuma referência ao tema do trabalho, nem a ampliações ou reduções. Apresenta somente três exemplos o capítulo termina.

3.3.5 Matemática - Paiva[32]

Esta coleção faz parte do PNLEM em vigor.

A diferença básica entre esta obra e a anterior, deste mesmo autor, é que o anterior era distribuído em volume único. Alguns assuntos foram acrescentados, temas foram redistribuídos nos volumes, ao contrário do anterior que não havia esta preocupação.

Não foram encontrados assuntos relacionados com isometrias.

3.3.6 Conexões com a Matemática[33]

Esta coleção também fazia parte do acervo para escolha do PNLEM em vigor.

O que podemos dizer sobre esta obra é que a mesma acompanha bem de perto o disposto no currículo do estado de São Paulo. Seus conteúdos são bem divididos e bem dispostos no volume.

Com relação às geometrias das transformações, esta obra também não o apresenta.

4 Propostas de Atividades

Com base nos dados encontrados nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no Currículo do Estado de São Paulo, apresentaremos neste capítulo, propostas de atividades para as séries/anos do ensino fundamental II e para o ensino médio.

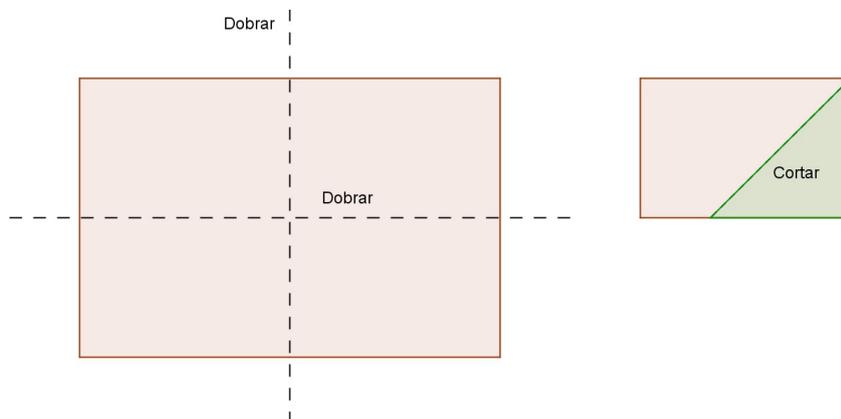
4.1 Atividades para o 3º Ciclo

De acordo com os documentos anteriormente citados, nas 5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano do ensino fundamental, os conteúdos a serem trabalhados sobre transformações geométricas são: simetrias (axiais e de rotação), homotetiais (ampliação e redução) e isometrias (reflexão, translação e rotação).

4.1.1 Atividades de Introdução para o Conceito de Simetria

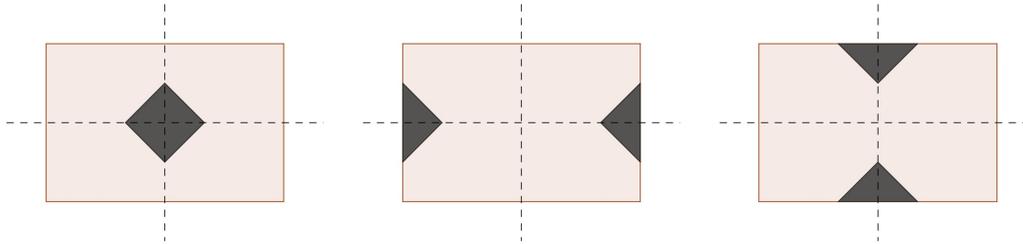
- Quando uma figura é dividida por uma reta, chamada de eixo de simetria, em duas partes geometricamente iguais, dizemos que esta figura tem **simetria axial**.
- Quando uma figura é rotacionada, com amplitude inferior a 360° , em torno de um ponto localizado internamente a mesma, se a figura obtida coincidir com a figura original, dizemos que esta figura tem **simetria de rotação**.

1. Dobre uma folha de sulfite duas vezes e corte conforme apresentado abaixo. Abra a folha e verifique. O que podemos dizer sobre a figura obtida?

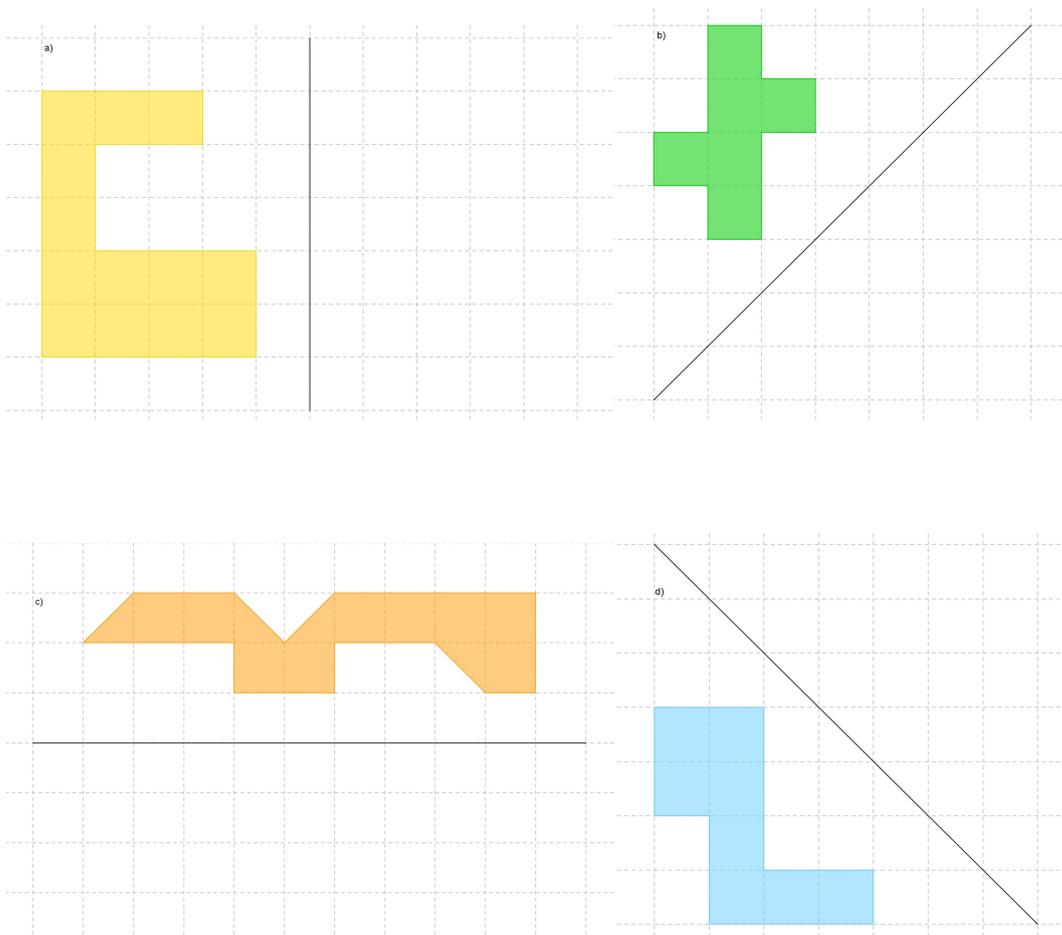


4 Propostas de Atividades

2. Dobre novamente uma folha de sulfite duas vezes, conforme atividade anterior, e, com apenas um corte, tente obter uma das figuras abaixo.

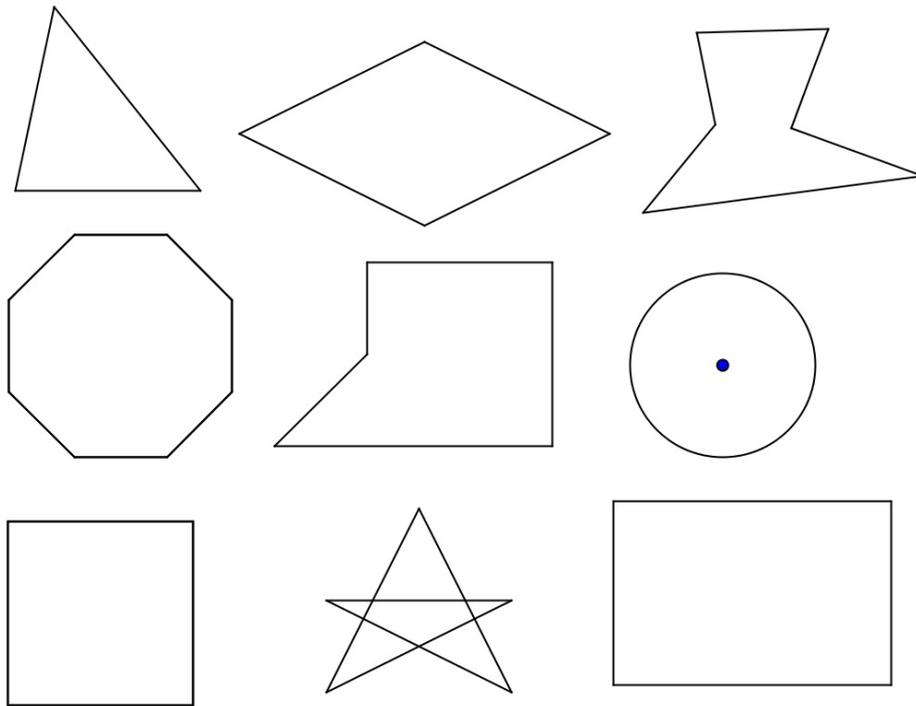


3. Dadas as figuras abaixo, faça a simetria axial com relação aos seus respectivos eixos de reflexão.



4. Dadas as figuras abaixo, pinte as figuras que possuem simetria de rotação.

4.1 Atividades para o 3º Ciclo



5. No dia a dia também encontramos figuras simétricas. Classifique as figuras abaixo como **simetria axial** ou **simetria de rotação**.



[23]



[26]



[22]



[24]



[25]

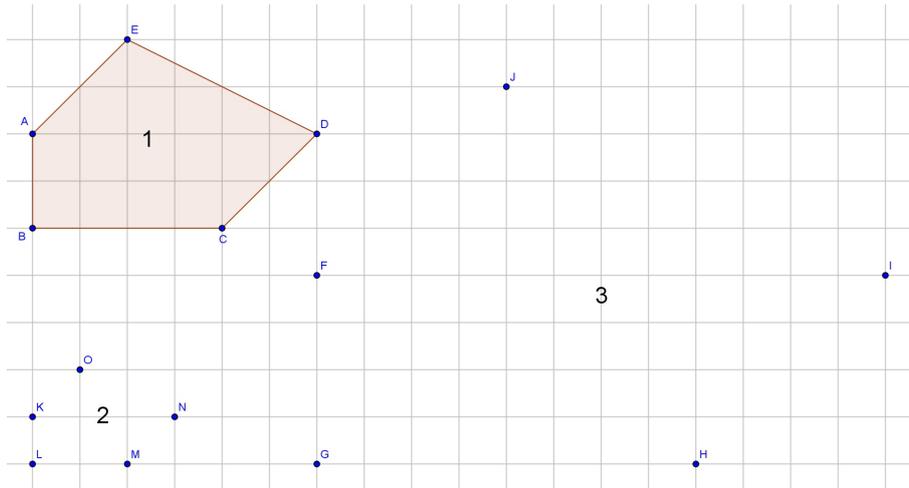


[21]

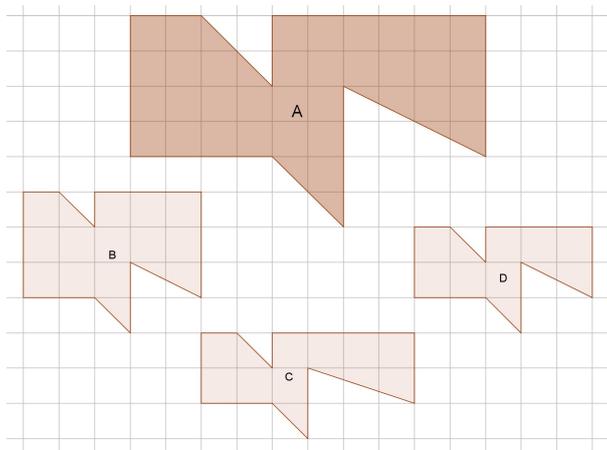
4.1.2 Atividades de Introdução para o Conceito de Homotetia

As homotetias a serem trabalhadas nesta etapa do ensino são as ampliações e reduções.

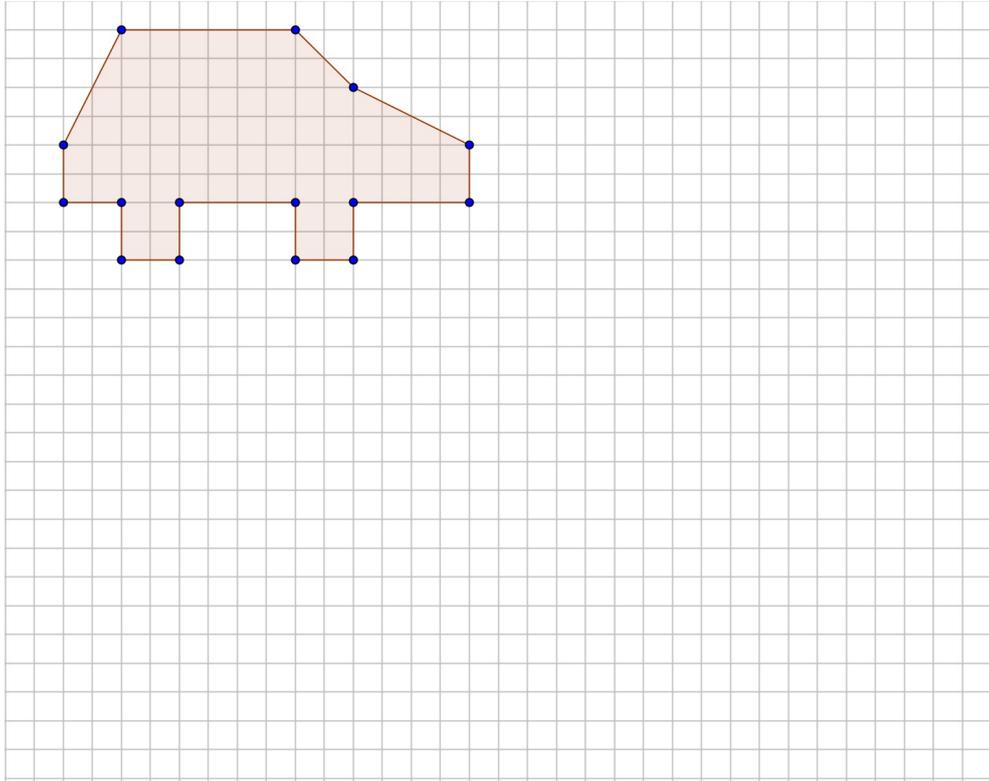
1. Com o uso de uma régua, ligue os pontos em ordem alfabética.



- a) Quais as diferenças entre as figuras 2 e 3 encontradas e a figura 1?
 - b) Qual a relação entre a figura 2 e a figura 1?
 - c) E entre a figura 3 e a figura 1?
 - d) Verificando agora os ângulos das três figuras, o que podemos dizer sobre eles?
2. Qual a figura semelhante a figura A? Qual é a relação entre elas?



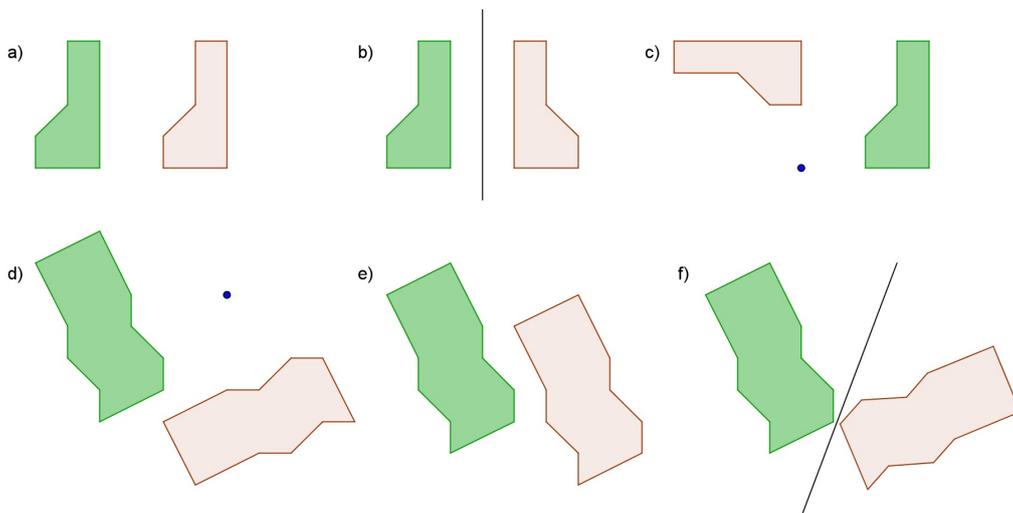
3. Construa, no papel quadriculado, uma ampliação e uma redução da figura dada. Pinte as figuras obtidas.



4.1.3 Atividades de Introdução para o Conceito de Isometria

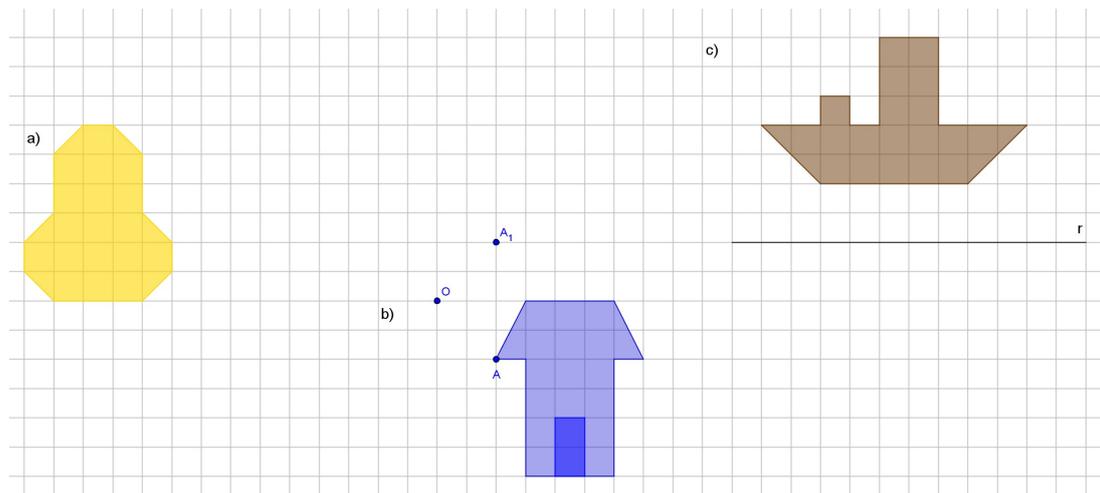
Isometrias são transformações geométricas que conservam todas as medidas da figura movimentada. São elas: reflexão, translação e rotação.

1. Observe as figuras abaixo. As figuras na cor verde são as originais que foram movimentadas. Qual a transformação de cada uma delas?



4 Propostas de Atividades

2. Dadas as figuras abaixo, faça o que se pede para cada uma delas.



- Faça a translação da figura para a direita, sendo que cada ponto novo esteja a uma distância de 6 unidades de seu ponto original.
- Faça a rotação da figura com ângulo de 90° , no sentido anti-horário, em torno do ponto O . (Dica: utilize o ponto A_1 como ponto de referência)
- Faça a reflexão da figura em relação ao eixo de simetria r

4.2 Atividades para o 4º Ciclo

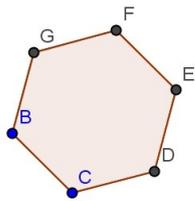
Os conteúdos apresentados no ciclo anterior também tem destaque nas 7ª série/8º ano e 8ª série/9º ano do ensino fundamental, de acordo com os currículos estudados. As homotetiais (ampliação e redução) e isometrias (reflexão, translação e rotação), neste estágio, devem ser aprofundados.

4.2.1 Isometrias e Homotetias

- Dado A , o centro da homotetia, faça o que se pede para cada figura:

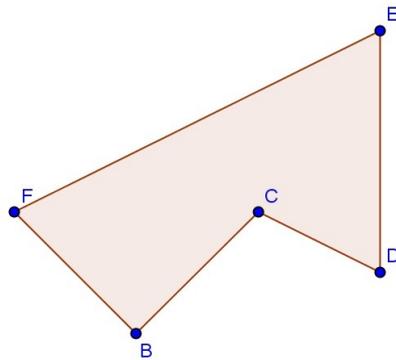
4.2 Atividades para o 4º Ciclo

a)

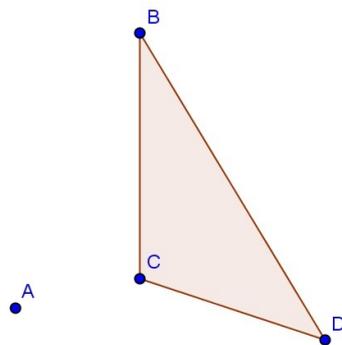


A

b) A

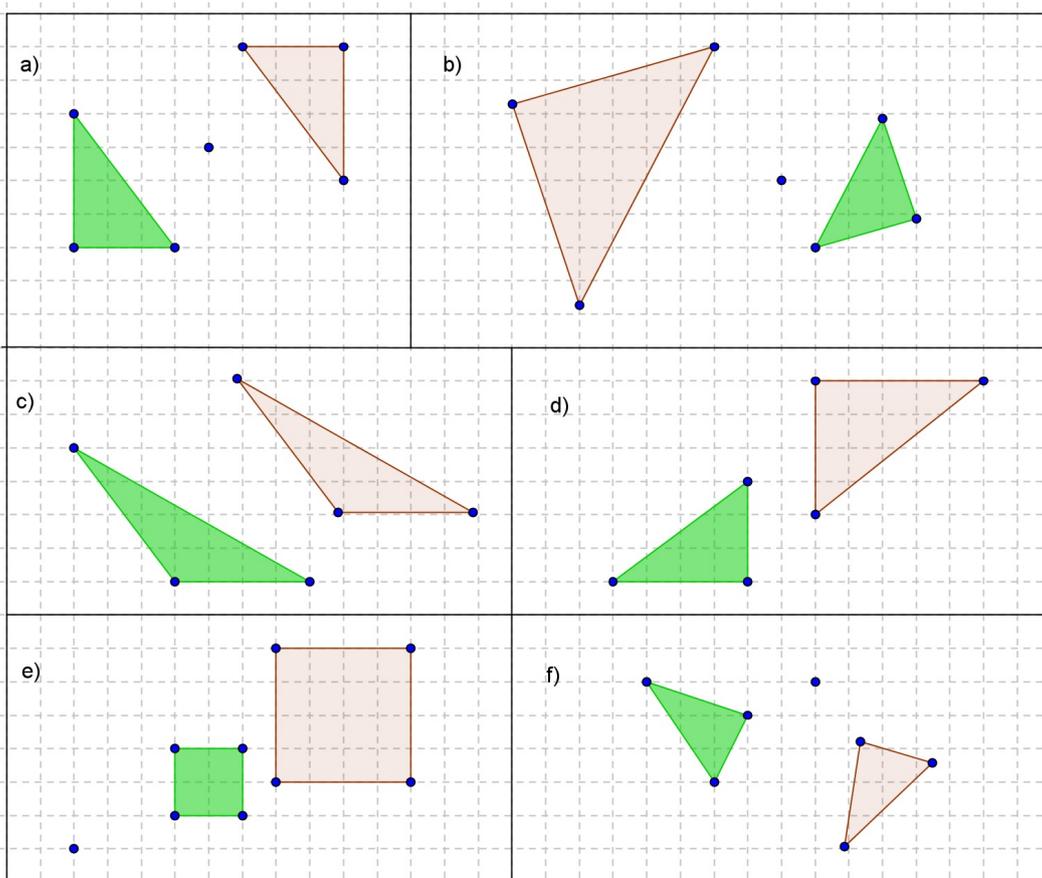


c)



4 Propostas de Atividades

- ampliação da figura com razão $r = 2$
 - redução da figura com razão $r = \frac{1}{2}$
 - inversão da figura com razão $r = -1$
2. Determine, em cada caso, se as figuras são congruentes ou semelhantes e indique o tipo de transformação geométrica encontrada. (Obs.: As figuras originais são as verdes)



4.3 Atividades para Ensino Médio

Poucas são as referências sobre transformações geométricas nos documentos curriculares para o ensino médio, no entanto, espera-se que haja um aprofundamento dos assuntos, que o olhar para estes conteúdos seja direcionado, agora, para novas análises, quantificações, previsões e identificação de desvios.

4.3.1 Transformações Geométricas e os Gráficos das Funções

O uso de transformações geométricas no plano pode auxiliar na construção de gráficos de funções.

4.3 Atividades para Ensino Médio

Sendo conhecidos um conjunto de gráficos simples e aplicando conhecimentos de transformações geométricas do plano, podemos obter diversos outros gráficos derivados destes. Também podemos identificar características que os mesmos apresentem em comum.

Antes de iniciarmos com a sugestão das atividades, apresentaremos algumas considerações importantes para o estudo de funções com o uso de transformações geométricas.

1. Dada uma função $f(x)$ qualquer, se substituirmos a variável x por $-x$ teremos como resultado uma função $g(-x)$ tal que seu gráfico será uma reflexão vertical do gráfico de $f(x)$ com relação ao eixo y .

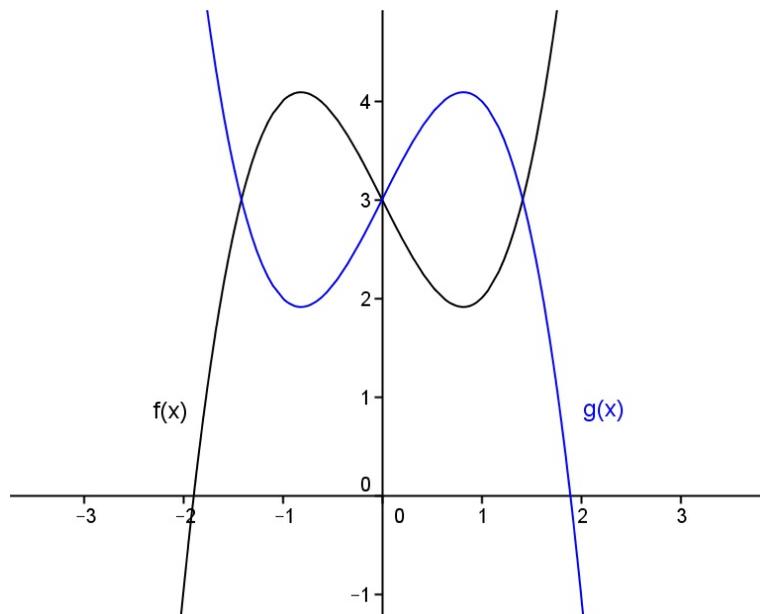


Figura 4.1: Reflexão vertical

2. Dada uma função $f(x)$ qualquer, se multiplicarmos esta função por -1 , teremos como resultado uma função $g(x) = -f(x)$ tal que seu gráfico será uma reflexão horizontal do gráfico de $f(x)$ com relação ao eixo x .

4 Propostas de Atividades

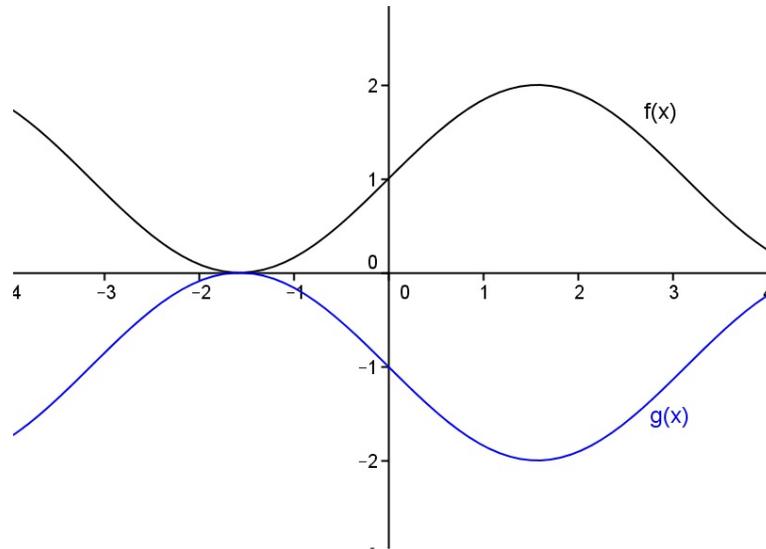


Figura 4.2: Reflexão horizontal

3. Dada uma função $f(x)$ qualquer, se substituirmos x por $(x \pm k)$, com $k \in \mathbf{R}$, teremos como resultado uma função $g(x)$ tal que seu gráfico será uma translação horizontal do gráfico de $f(x)$. O deslocamento será de k unidades para direita se $(x - k)$ e k unidades para a esquerda se $(x + k)$.

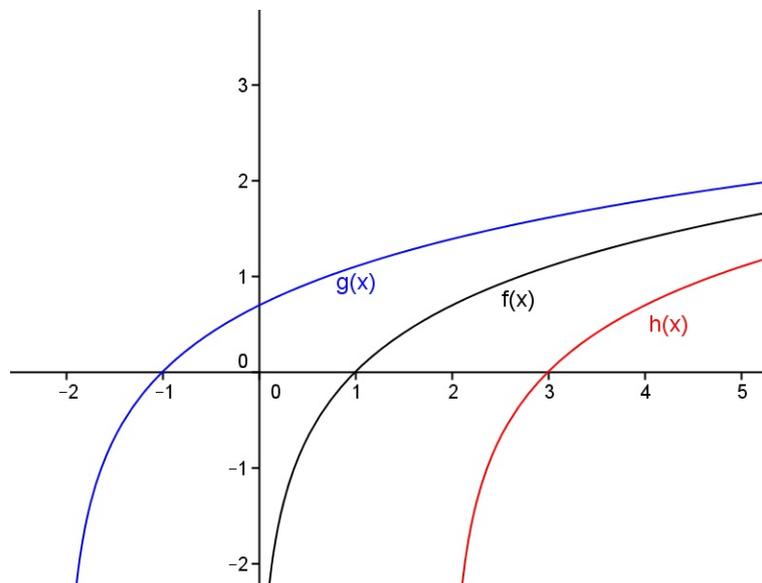


Figura 4.3: Translação horizontal

4. Dada uma função $f(x)$ qualquer, se substituirmos $f(x)$ por $f(x) \pm k$, com $k \in \mathbf{R}$, teremos como resultado uma função $g(x) = f(x) \pm k$ tal que seu gráfico será uma translação vertical do gráfico de $f(x)$. O deslocamento será de k unidades para cima se $f(x) + k$ e k unidades para baixo se $f(x) - k$.

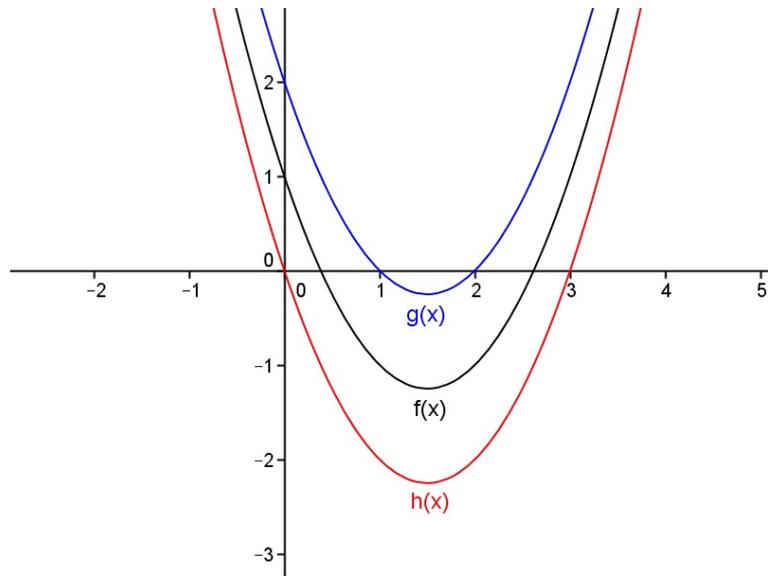
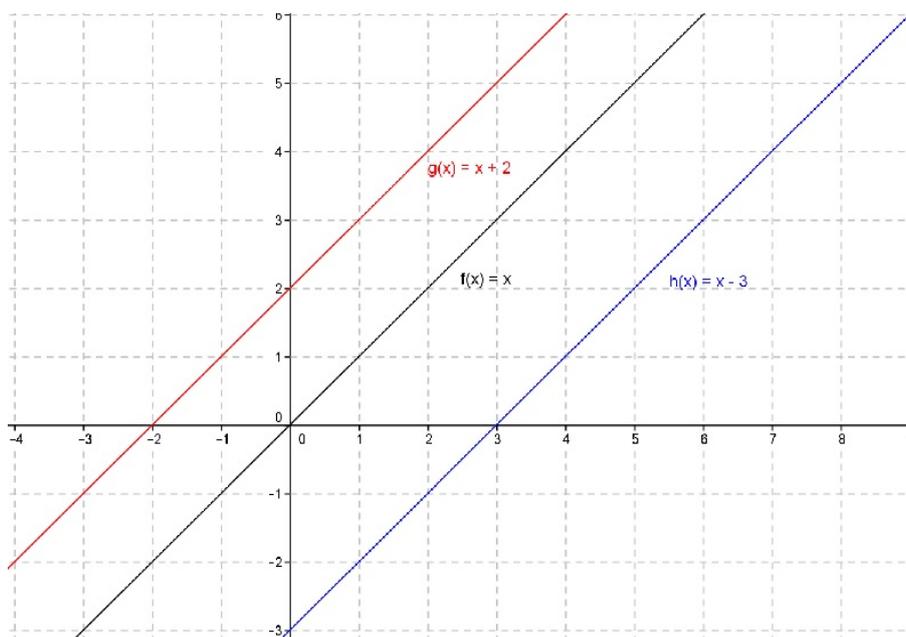


Figura 4.4: Translação vertical

4.3.1.1 Atividades de Funções

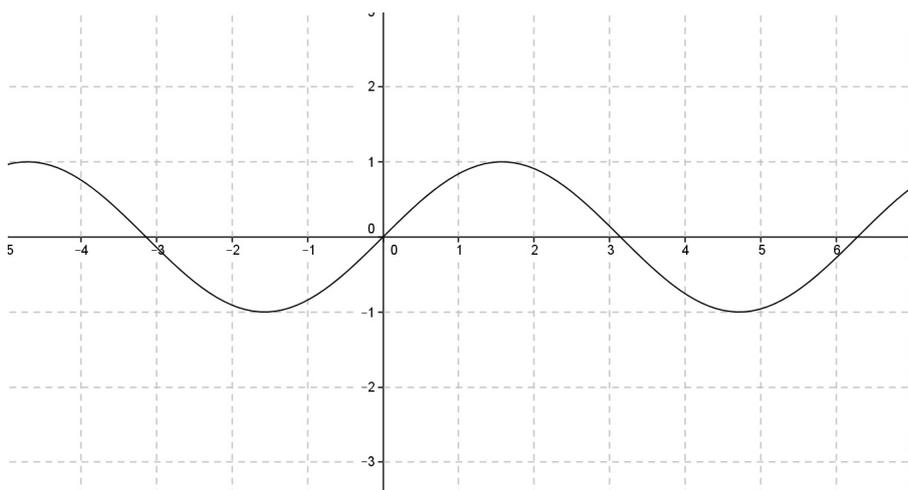
1. Dadas as funções $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x - 3$ representadas no gráfico abaixo, pedem-se:



4 Propostas de Atividades

- A partir de $f(x) = x$, que conclusões pode-se tirar de $g(x)$ e $h(x)$?
- Transladando-se $f(x)$ verticalmente 5 unidades para cima e horizontalmente uma unidade para a direita, como ficarão os gráficos destas novas funções? E quais serão estas novas funções?
- Como podemos obter a função $k(x) = 2x + 3$ a partir da função $f(x)$? Construa o gráfico desta função.
- Qual a função que representa a reflexão de $m(x) = 2x + 6$ em relação ao eixo x ? E ao eixo y ? Como são os gráficos destas funções?

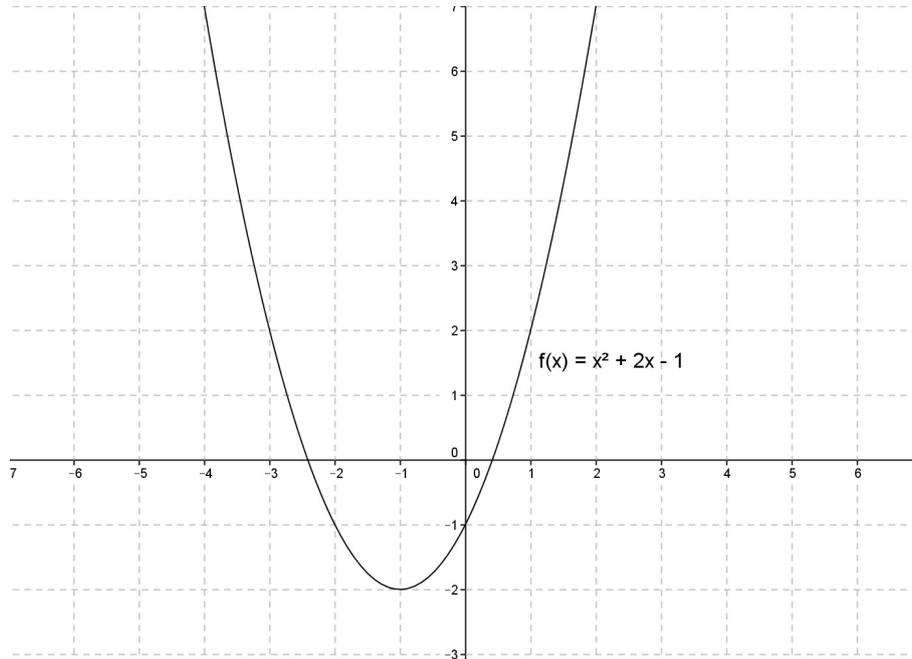
2. Dado o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ abaixo, determine o que se pede:



- O que acontece quando transformamos a função $f(x)$ em $f_1(x) = \text{sen}(x) + 2$? Esboce o gráfico da função $f_1(x)$.
- E em $f_2(x) = \text{sen}(x + 2)$? Esboce o gráfico da função $f_2(x)$.
- E em $f_3(x) = 2\text{sen}(x)$? Esboce o gráfico da função $f_3(x)$.
- Com base nos itens anteriores, esboce o gráfico da função $f_4(x) = 3.\text{sen}(x + 1) + 1$ e indique as transformações ocorridas.

3. Dada a função do 2º grau $f(x) = x^2 + 2x - 1$ determine o que se pede:

4.3 Atividades para Ensino Médio



- Translade $f(x)$ verticalmente 4 unidades para cima e indique a nova função.
- Translade $f(x)$ verticalmente 2 unidades para baixo e indique a nova função.
- Translade $f(x)$ horizontalmente 5 unidades para a direita e indique a nova função.
- Translade $f(x)$ horizontalmente 3 unidades para a direita e indique a nova função.
- Translade $f(x)$ horizontalmente 4 unidades para a direita e verticalmente 2 unidades para cima e indique a nova função.
- Faça a reflexão de $f(x)$ em relação ao eixo x e indique a nova função.
- Faça a reflexão de $f(x)$ em relação ao eixo y e indique a nova função.
- Translade a função do item f) em 2 unidades para cima e 2 unidades para a direita e indique a nova função.

4.3.2 Transformações Geométricas e a Geometria Analítica

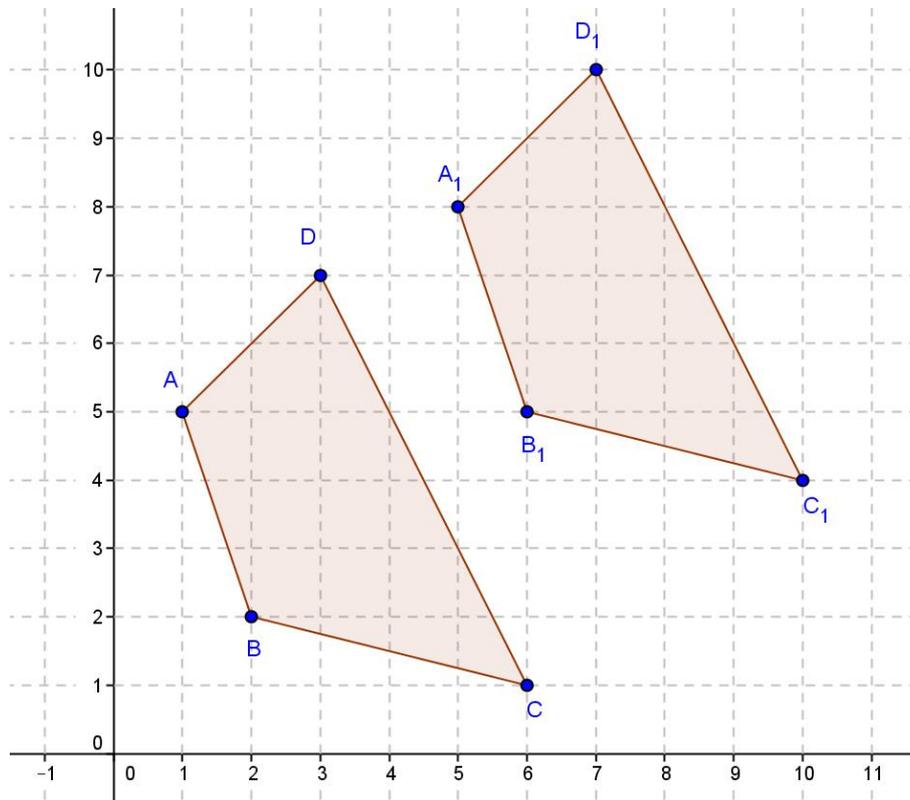
As transformações geométricas também podem ser estudadas aliadas aos conceitos de geometria analítica.

Os conceitos de ponto e reta, distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta, distância entre retas, ponto médio, podem ser usados para resolver problemas relacionados ao assunto da pesquisa, conforme mostraremos nesta subseção.

4.3.2.1 Atividades de Geometria Analítica

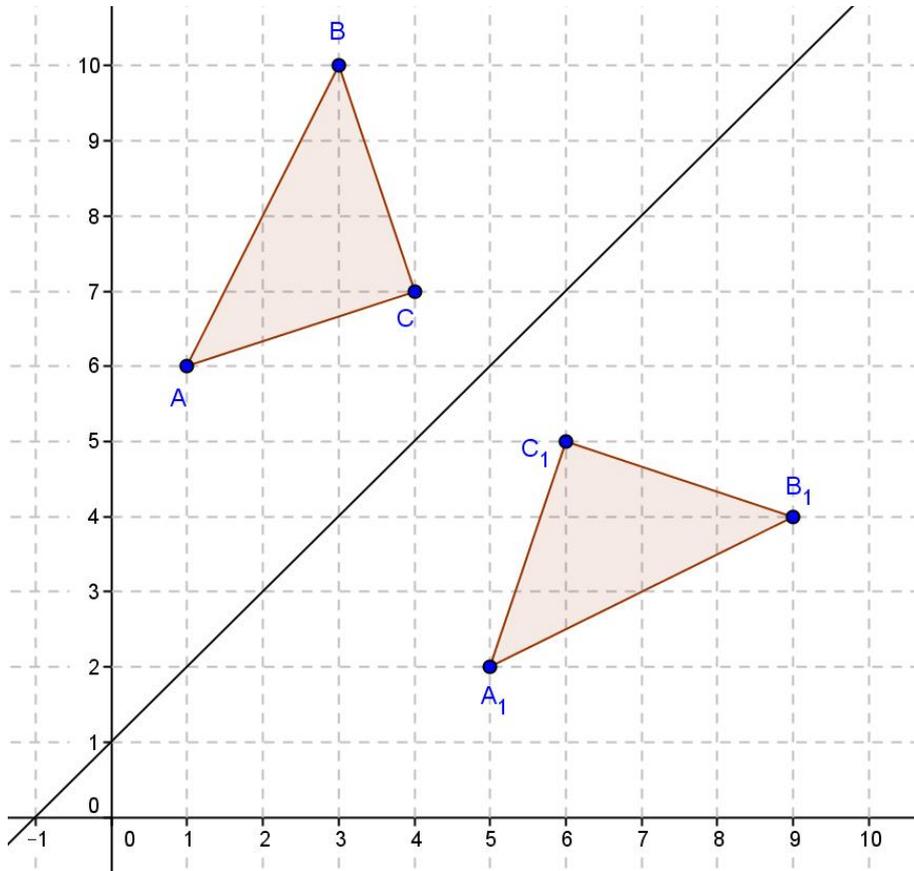
- Sabendo que os polígonos $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ são congruentes, prove que $A_1B_1C_1D_1$ pode ser obtido pela translação de $ABCD$.

4 Propostas de Atividades

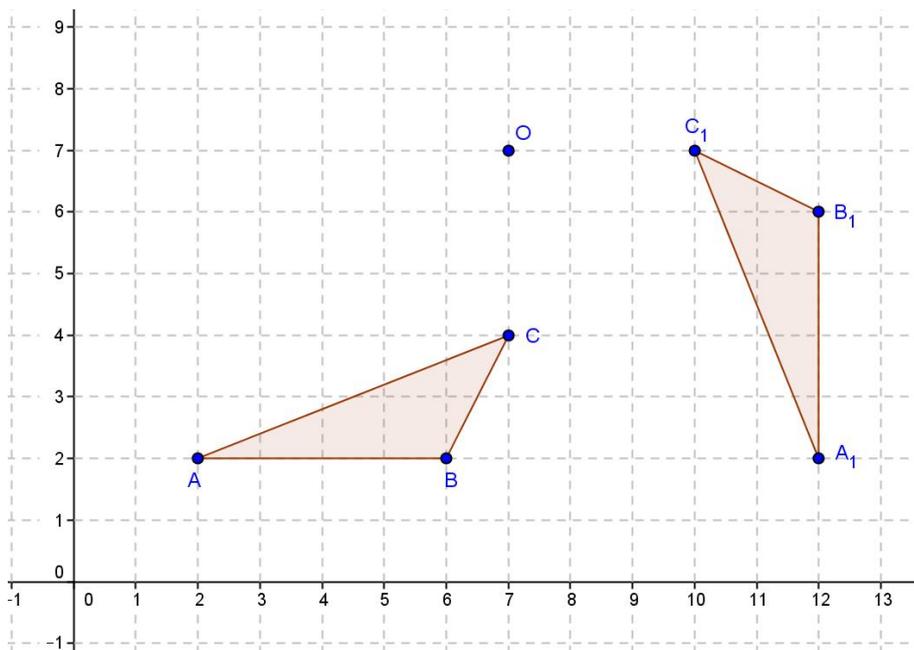


2. Verifique se os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são congruentes e, caso sejam, determine o tipo de transformação geométrica que os relacionam. Prove suas respostas.

4.3 Atividades para Ensino Médio



3. Prove que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são congruentes e que o triângulo $A_1B_1C_1$ pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC em torno do ponto O .



5 Considerações Finais

Seguimos, em nossa pesquisa, um percurso, passando, inicialmente, por uma breve história da Geometria, englobando o tema de estudo. Em seguida foram apresentadas teorias matemáticas das geometrias das transformações mais comuns. Dando sequência, foram pesquisados os documentos curriculares oficiais vigentes para o Estado de São Paulo e, neles, localizados os temas referentes transformações geométricas para cada série/ano da educação básica. Para complementar os dados da pesquisa, acrescentamos um estudo sobre algumas coleções de livros didáticos fornecidos gratuitamente pelo governo federal aos alunos. Estes livros tiveram uma grande importância para o trabalho pois, a partir deles, tivemos a oportunidade de verificar como e com qual intensidade o assunto de transformações chegam à sala de aula.

Concluímos, com base nos dados encontrados, que o objeto de estudo tem destaque nos parâmetros curriculares nacionais e nos currículos do estado de São Paulo, desde o início da educação básica (ensino fundamental I) até o final (ensino médio). Em cada etapa aparece de uma forma diferente, sendo que há indicações de que estes assuntos sejam aprofundados gradativamente conforme se avançam nos anos de estudo. Para o ensino fundamental sugerem-se que sejam trabalhadas as transformações em conjunto com construções e com noções de congruências e semelhanças. Para o ensino médio são esperadas análises críticas sobre o assunto.

Ao contrário dos documentos oficiais, os livros didáticos, abordados na pesquisa, trazem pouco conteúdo de transformações geométricas, com excessão de uma coleção de ensino fundamental II.

Mabuchi[9], em 2000, apresentou em sua pesquisa as transformações geométricas como “um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares”. Hoje, treze anos depois, este tema ainda tem pouca incidência na educação, de acordo com as obras verificadas.

Concluído o trabalho, apresentamos várias atividades para os diversas séries/anos da educação básica. Para o ensino fundamental II não há nada de novo, todos os exercícios são, de alguma forma, conhecidos. Foram incluídos nesta pesquisa por não terem sido encontrados nos livros didáticos. Para o ensino médio, sugerimos que as transformações geométricas sejam trabalhadas em conjunto com funções, que, de acordo com o currículo do estado de São Paulo, estão inseridas, por partes, nos três anos do ensino médio. Nos PCN's não existem menção de que as geometrias das transformações sejam ensinadas em conjunto com as funções mas no currículo do estado de São Paulo existe uma referência a esta prática. Também incluímos atividades para que este tema seja trabalhado em

5 *Considerações Finais*

conjunto com a geometria analítica, mais precisamente, quando do ensino de ponto e reta, distâncias entre pontos e entre ponto e reta, ponto médio e temas correlacionados.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B.; *Tópicos de HISTÓRIA DA MATEMÁTICA para uso em sala de aula - Cálculo*, Atual Editora, 1993.
- [2] EVES, H.; *Tópicos de HISTÓRIA DA MATEMÁTICA para uso em sala de aula - Geometria*, Atual Editora, 1994.
- [3] LIMA, E. L.; *Isometrias*, SBM, 1996.
- [4] LIMA, E. L.; *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios - Geometria Analítica, Vetores e Transformações Geométricas*, SBM, 2002.
- [5] MARTIN, G. E.; *Transformation Geometry - An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag New York, 1982.
- [6] YAGLOM, I. M.; *Geometric Transformations I*, Yale University, 1962.
- [7] YAGLOM, I. M.; *Geometric Transformations II*, Yale University, 1968.
- [8] LEDERBERGER-RUOFF, E. B.; *Isometrias e ornamentos do plano euclidiano*, Atual Editora, 1982.
- [9] MABUCHI, S. T.; *Transformações Geométricas - A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*, 2000.
- [10] BRASIL, S. E. F.; *Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série)*, MEC/SEF, 1997.
- [11] BRASIL, S. E. F.; *Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série) - Matemática*, MEC/SEF, 1997.
- [12] BRASIL, S. E. F.; *Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série)*, MEC/SEF, 1998.
- [13] BRASIL, S. E. F.; *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série) - Matemática*, MEC/SEF, 1998.

Referências Bibliográficas

- [14] BRASIL, S. E. F.; *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, MEC/SEF, 2000.
- [15] BRASIL, S. E. F.; *PCN+ (Ensino Médio) - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, MEC/SEF, 2007.
- [16] BÁSICA, S. E.; *Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, MEC/SEB, 2006.
- [17] SÃO PAULO, S.E.; *Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: Língua Portuguesa e Matemática - Ciclo I*, FDE, 2008.
- [18] SÃO PAULO, S.E.; *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental II e Médio)*, SEE, 2008.
- [19] SÃO PAULO, S.E.; *Currículo do Estado de São Paulo: Ciências da Natureza e suas Tecnologias*, SE, 2011.
- [20] SÃO PAULO, S.E.; *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias*, SE, 2011.
- [21] CORUJA; Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria>
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [22] TIGRE; Disponível em: <http://belasimetricas.wordpress.com/page/3/>;
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [23] BORBOLETA; Disponível em: <http://geometrivia.edublogs.org/eportfolios/geometria-e-o-mundo/>;
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [24] ESTRELA; Disponível em: <http://fabianaeaarte.blogspot.com.br/2012/01/simetria-e-assimetria.html>;
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [25] FLOR; Disponível em: <http://artesatividades.blogspot.com.br/2011/06/simetria-e-assimetria.html>;
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [26] PRATO; Disponível em: http://obviousmag.org/archives/2010/05/laura_zindel_e-os
Acessado em 13 de setembro de 2013.
- [27] PNLD/PNLEM; Disponível em: <http://www.fnde.gov.br>;
Acessado em 14 de setembro de 2013.
- [28] GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B.; *A Conquista da Matemática - 6º, 7º, 8º e 9º ano*, FTD, 2009.

Referências Bibliográficas

- [29] BIANCHINI, E.; *Matemática: Bianchini - 6º, 7º, 8º e 9º ano*, Moderna, 2011.
- [30] DANTE, L. R.; *Matemática - 1º, 2º e 3º ano do ensino médio*, Ática, 2004.
- [31] PAIVA, M.; *Matemática - 1º, 2º e 3º ano do ensino médio, volume único*, Moderna, 2005.
- [32] PAIVA, M.; *Matemática - Paiva - 1º, 2º e 3º ano do ensino médio*, Moderna, 2009.
- [33] BARROSO, J. M.; *Conexões com a Matemática (obra coletiva) - 1º, 2º e 3º ano do ensino médio*, Moderna, 2010.
- [34] Cerâmica chinesa; Disponível em: <http://cccm.pt>, Acessado em 13 de setembro de 2013.

A Grades Curriculares

Anexo 1

Uma organização dos temas e suas unidades por séries do ensino médio, proposta no PCN.[15, p. 128]

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Anexo 2

Conteudos de matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental - Ciclo II. [18, p. 52 a 55]

Matéria licenciada exclusivamente à Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

	5ª Série	6ª Série	7ª Série	8ª Série
1º Bimestre	<p>Números naturais</p> <ul style="list-style-type: none"> Múltiplos e divisores. Números primos. Operações básicas (+, -, x, ÷). Introdução às potências. <p>Frações</p> <ul style="list-style-type: none"> Representação. Comparação e ordenação. Operações. 	<p>Sistemas de numeração</p> <ul style="list-style-type: none"> Sistemas de numeração na Antigüidade. O sistema posicional decimal. <p>Números negativos</p> <ul style="list-style-type: none"> Representação. Operações. <p>Números racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> Representação fracionária e decimal. Operações com decimais e frações (complementos). 	<p>Números racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> Transformação de decimais finitos em frações. Dízimas periódicas e fração geratriz. <p>Potenciação</p> <ul style="list-style-type: none"> Propriedades para expoentes inteiros. Problemas de contagem. 	<p>Números reais</p> <ul style="list-style-type: none"> Conjuntos numéricos. Números irracionais. Potenciação e radiciação em R. Notação científica.

	5ª Série	6ª Série	7ª Série	8ª Série
2º Bimestre	<p>Números decimais</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representação. • Transformação em fração decimal. • Operações. <p>Sistemas de medida</p> <ul style="list-style-type: none"> • Medidas de comprimento, massa e capacidade. • Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade. 	<p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ângulos. • Polígonos. • Circunferência. • Simetrias. • Construções geométricas. • Poliedros. 	<p>Expressões algébricas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equivalências e transformações. • Produtos notáveis. • Fatoração algébrica. 	<p>Álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equações do 2º grau: resolução e problemas. <p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Noções básicas sobre função. • A idéia de variação. • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.

É dia licenciada exclusivamente à Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

	5ª Série	6ª Série	7ª Série	8ª Série
3º Bimestre	<p>Formas geométricas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Formas planas. • Formas espaciais. <p>Perímetro e área</p> <ul style="list-style-type: none"> • Unidades de medida. • Perímetro de uma figura plana. • Cálculo de área por composição e decomposição. • Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas. 	<p>Proporcionalidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. • Conceito de razão. • Porcentagem. • Razões constantes na geometria: Pi. • Construção de gráficos de setores. • Problemas envolvendo probabilidade. 	<p>Equações</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de equações de 1º grau. • Sistemas de equações e resolução de problemas. • Inequações do 1º grau. <p>Gráficos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano. 	<p>Proporcionalidade na geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • O conceito de semelhança. • Semelhança de triângulos. • Razões trigonométricas.

É dia licenciada exclusivamente à Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

	5ª Série	6ª Série	7ª Série	8ª Série
4º Bimestre	<p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e construção de gráficos e tabelas. • Média aritmética. • Problemas de contagem. 	<p>Álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uso de letras para representar um valor desconhecido. • Conceito de equação. • Resolução de equações. • Equações e problemas. 	<p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Tales. • Teorema de Pitágoras. • Área de polígonos. • Volume do prisma. 	<p>Corpos redondos</p> <ul style="list-style-type: none"> • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. • Volume e área do cilindro. <p>Probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de contagem e introdução à probabilidade.

Anexo 3

Conteudos de matemática por série e bimestre do Ensino Médio. [18, p. 56 a 59]

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
1º Bimestre	<p>Números e seqüências</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos. • Regularidades numéricas: seqüências. • Progressões aritméticas e progressões geométricas. 	<p>Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fenômenos periódicos. • Funções trigonométricas. • Equações e inequações. • Adição de arcos. 	<p>Geometria analítica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. • Ponto e reta: distância. • Circunferência: equação. • Reta e circunferência: posições relativas. • Cônicas: noções e aplicações.

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
2º Bimestre	<p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relação entre duas grandezas. • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau. • Função de 2º grau. 	<p>Matrizes, determinantes e sistemas lineares</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matrizes: significado como tabelas, características e operações. • A noção de determinante de uma matriz quadrada. • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento. 	<p>Equações algébricas e números complexos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equações polinomiais. • Números complexos: operações e representação geométrica. • Propriedades das raízes de uma equação polinomial. • Relações de Girard.

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
3º Bimestre	<p>Funções exponencial e logarítmica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Crescimento exponencial. • Função exponencial: equações e inequações. • Logaritmos: definição e propriedades. • Função logarítmica: equações e inequações. 	<p>Análise combinatória e probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. • Probabilidade simples. • Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. • Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos. • Probabilidade condicional. • Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. 	<p>Estudo das funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Qualidades das funções. • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões. • Inversão.

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
4º Bimestre	<p>Geometria-Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos. 	<p>Geometria métrica espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elementos de geometria de posição. • Poliedros, prismas e pirâmides. • Cilindros, cones e esferas. 	<p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda. • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.

Anexo 4

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental [20, p. 57 e 58]

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Números naturais</p> <ul style="list-style-type: none"> Múltiplos e divisores Números primos Operações básicas (+, -, ·, ÷) Introdução às potências <p>Frações</p> <ul style="list-style-type: none"> Representação Comparação e ordenação Operações 	<ul style="list-style-type: none"> Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação) Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações Saber realizar as operações de adição e subtração de frações de modo significativo
2º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Números decimais</p> <ul style="list-style-type: none"> Representação Transformação em fração decimal Operações <p>Sistemas de medida</p> <ul style="list-style-type: none"> Medidas de comprimento, massa e capacidade Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade 	<ul style="list-style-type: none"> Compreender o uso da notação decimal para representar quantidades não inteiras, bem como a ideia de valor posicional Saber realizar e compreender o significado das operações de adição e subtração de números decimais Saber transformar frações em números decimais e vice-versa Saber realizar medidas usando padrões e unidades não convencionais; conhecer diversos sistemas de medidas Conhecer as principais características do sistema métrico decimal: unidades de medida (comprimento, massa, capacidade) e transformações de unidades

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Formas geométricas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Formas planas • Formas espaciais <p>Perímetro e área</p> <ul style="list-style-type: none"> • Unidades de medida • Perímetro de uma figura plana • Cálculo de área por composição e decomposição • Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas • Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações • Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras • Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares
4º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e construção de gráficos e tabelas • Média aritmética • Problemas de contagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender informações transmitidas em tabelas e gráficos • Saber construir gráficos elementares (barras, linhas, pontos) utilizando escala adequada • Saber calcular, interpretar e utilizar informações relacionadas às medidas de tendência central (média, mediana, moda) • Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem • Compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem

Anexo 5

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental [20, p. 59 e 60]

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Sistemas de numeração</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sistemas de numeração na Antiguidade • O sistema posicional decimal <p>Números negativos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representação • Operações <p>Números racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> • Representação fracionária e decimal • Operações com decimais e frações (complementos) 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências • Compreender a relação entre uma fração e a representação decimal de um número, sabendo realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com decimais • Saber realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, compreendendo o significado das operações realizadas • Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos • Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos
2º Bimestre	<p>Geometria</p> <p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de n lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Proporcionalidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais • Conceito de razão • Porcentagem • Razões constantes na Geometria: π • Construção de gráficos de setores • Problemas envolvendo probabilidade 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferentes contextos, compreendendo a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais • Saber resolver problemas variados, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais • Reconhecer e saber utilizar o conceito de razão em diversos contextos (proporcionalidade, escala, velocidade, porcentagem etc.), bem como na construção de gráficos de setores • Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes • Saber resolver problemas simples envolvendo a ideia de probabilidade (porcentagem que representa possibilidades de ocorrência)
4º Bimestre	<p>Números</p> <p>Álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uso de letras para representar um valor desconhecido • Conceito de equação • Resolução de equações • Equações e problemas 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o uso de letras para representar valores desconhecidos, em particular, no uso de fórmulas • Saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica • Compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta • Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações • Conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa

Anexo 6

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental [20, p. 61 e 62]

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Números racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> • Transformação de decimais finitos em fração • Dízimas periódicas e fração geratriz <p>Potenciação</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propriedades para expoentes inteiros • Problemas de contagem 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões • Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima • Compreender a utilidade do uso da linguagem das potências para representar números muito grandes e muito pequenos • Conhecer as propriedades das potências e saber realizar de modo significativo as operações com potências (expoentes inteiros)
2º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Expressões algébricas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equivalências e transformações • Produtos notáveis • Fatoração algébrica 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar operações simples com monômios e polinômios • Relacionar as linguagens algébrica e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra, particularmente no caso dos produtos notáveis • Saber atribuir significado à fatoração algébrica e como utilizá-la na resolução de equações e em outros contextos • Compreender o significado de expressões envolvendo números naturais por meio de sua representação simbólica e de seu significado geométrico ($2n$ é um número par, $2n + 1$ é um número ímpar, a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$ etc.)

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Equações</p> <ul style="list-style-type: none"> Resolução de equações de 1º grau Sistemas de equações e resolução de problemas Inequações de 1º grau <p>Gráficos</p> <ul style="list-style-type: none"> Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano 	<ul style="list-style-type: none"> Compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações Saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º grau Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas Saber resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas pelos métodos da adição e da substituição, sabendo escolher de forma criteriosa o caminho mais adequado em cada situação Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares
4º Bimestre	<p>Geometria</p> <p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> Teorema de Tales Teorema de Pitágoras Área de polígonos Volume do prisma 	<ul style="list-style-type: none"> Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

Anexo 7

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental [20, p. 63 e 64]

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Números reais</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos • Números irracionais • Potenciação e radiciação em R • Notação científica 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais • Saber representar os números reais na reta numerada • Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional • Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais • Compreender o significado e saber utilizar a notação científica na representação de números muito grandes ou muito pequenos
2º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equações de 2º grau: resolução e problemas <p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Noções básicas sobre função • A ideia de variação • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos • Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau • Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Proporcionalidade na Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos
4º Bimestre	<p>Geometria/Números</p> <p>Corpos redondos</p> <ul style="list-style-type: none"> • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo • Volume e área do cilindro <p>Probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problemas de contagem e introdução à probabilidade 	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes • Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência • Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro • Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo • Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

Anexo 8

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 1ª série do Ensino Médio [20, p. 65 e 66]

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Números</p> <p>Números e sequências</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: sequências • Progressões aritméticas e progressões geométricas 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível • Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos
2º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º grau • Função de 2º grau 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decréscimo e a taxa de variação • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decréscimo, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Funções exponencial e logarítmica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações 	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos
4º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Geometria-Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas

Anexo 9

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 2ª série do Ensino Médio [20, p. 67 e 68]

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fenômenos periódicos • Funções trigonométricas • Equações e inequações • Adição de arcos 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas • Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos • Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a \sin(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = \sin x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c • Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos
2º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Matrizes, determinantes e sistemas lineares</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matrizes: significado como tabelas, características e operações • A noção de determinante de uma matriz quadrada • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, <i>pixels</i> etc.) • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Números</p> <p>Análise combinatória e probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> • Princípios multiplicativo e aditivo • Probabilidade simples • Arranjos, combinações e permutações • Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos • Probabilidade condicional • Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento • Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas • Saber resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos simples repetidos, como os que conduzem ao binômio de Newton • Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triângulo de Pascal
4º Bimestre	<p>Geometria</p> <p>Geometria métrica espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elementos de geometria de posição • Poliedros, prismas e pirâmides • Cilindros, cones e esferas 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos • Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres

Anexo 8

Quadro de conteúdos e habilidades de matemática, 3ª série do Ensino Médio [20, p. 69 e 70]

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Geometria/Relações</p> <p>Geometria analítica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas
2º Bimestre	<p>Números</p> <p>Equações algébricas e números complexos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Equações polinomiais • Números complexos: operações e representação geométrica • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial • Relações de Girard 	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss • Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Estudo das funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Qualidades das funções • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação • Composição: translações e reflexões • Inversão 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1ª e de 2ª graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões) • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de $f(x)$ por unidade a mais de x), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e
4º Bimestre	<p>Números/Relações</p> <p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos • Medidas de tendência central: média, mediana e moda • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão • Elementos de amostragem 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas • Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda • Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão • Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos • Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente; utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares

B Soluções Esperadas para as Atividades

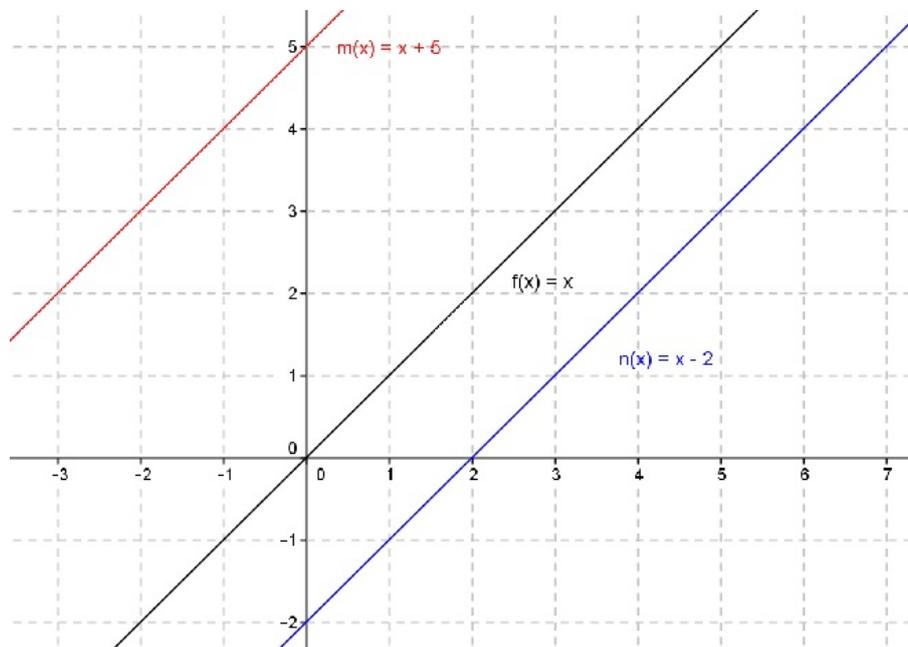
4.3.1.1 Atividades de Funções

1. a)

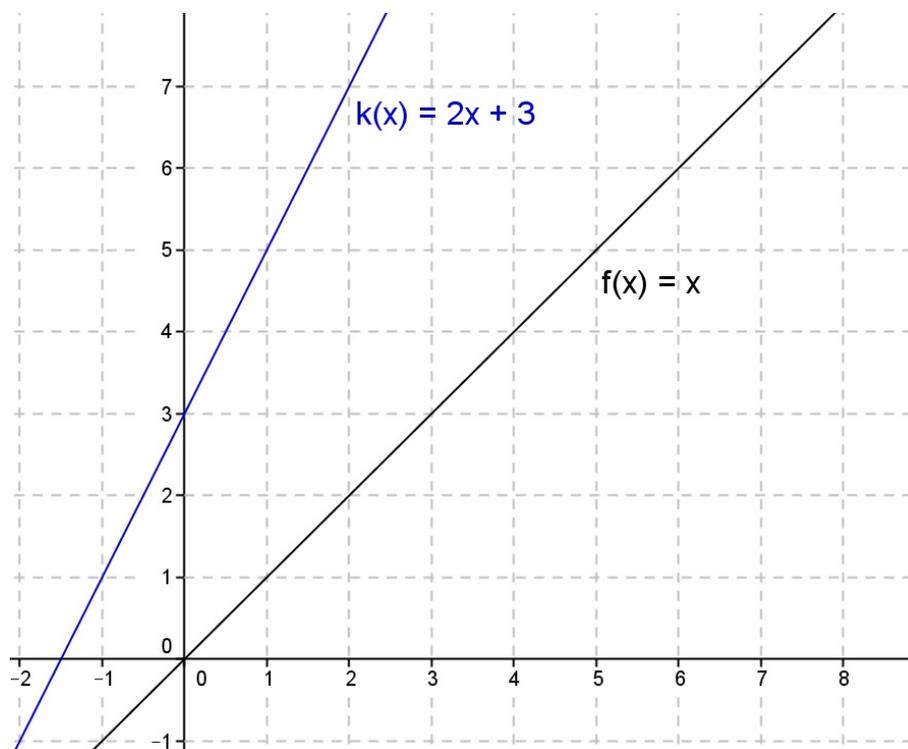
- $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são paralelas, que prova-se igualando-se $f(x) = g(x) \iff x = x + 2 \iff 0 = 2$, ou seja, $f(x)$ e $g(x)$ não possuem ponto em comum, portanto paralelas. Demais casos podem-se ser verificados analogamente.
- $g(x)$ está a esquerda (ou acima) de $f(x)$ e $h(x)$ está a direita (ou abaixo) de $f(x)$.
- $g(x)$ pode ser obtida transladando-se $f(x)$ horizontalmente duas unidades para a esquerda ou verticalmente duas unidades para cima. Analogamente, $h(x)$ pode ser obtida transladando-se $f(x)$ horizontalmente três unidades para a direita ou verticalmente três unidades para baixo.

b) As novas funções serão $m(x) = x + 5$ e $n(x) = x - 2$

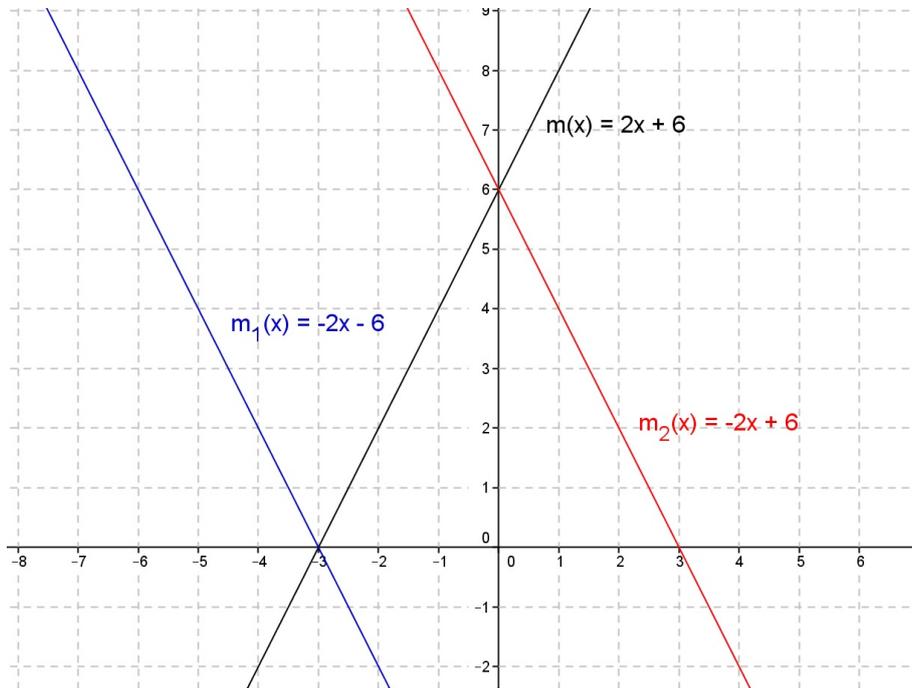
B Soluções Esperadas para as Atividades



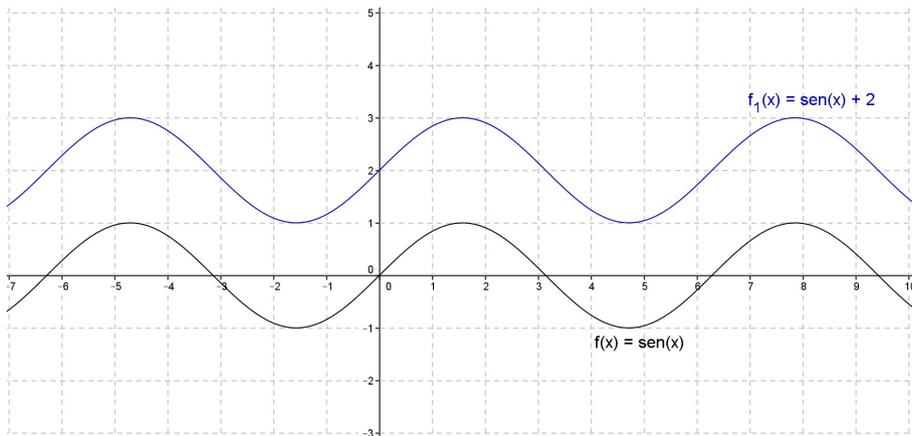
c) Rotacionando $f(x)$ no sentido anti-horário e transladando-a 3 unidades no sentido vertical para cima.



d) $m_1 = -2x - 6$ reflexão de $m(x)$ em relação ao eixo x e $m_2 = -2x + 6$ em relação ao eixo y .

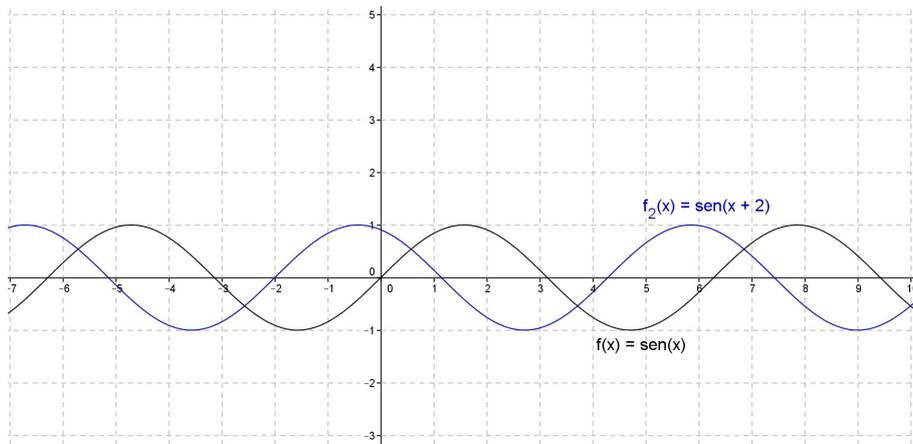


2. a) A função $f(x)$ é transladada 2 unidades na vertical para cima.



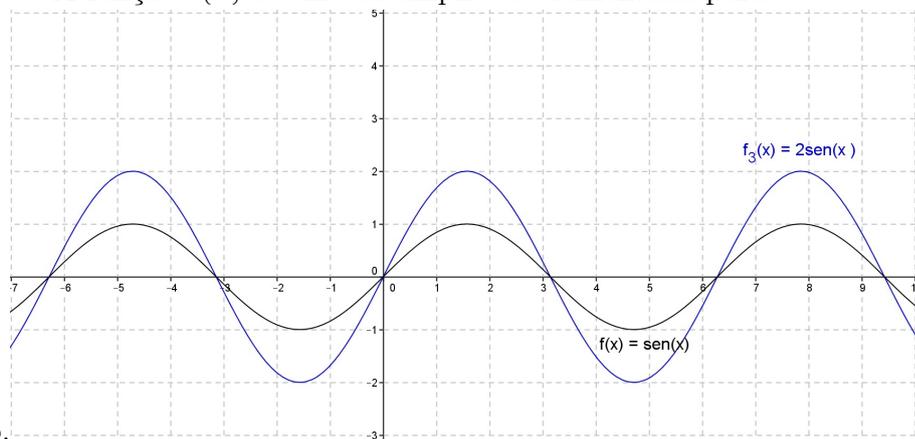
b) A função $f(x)$ é transladada 2 unidades na horizontal para esquerda.

B Soluções Esperadas para as Atividades



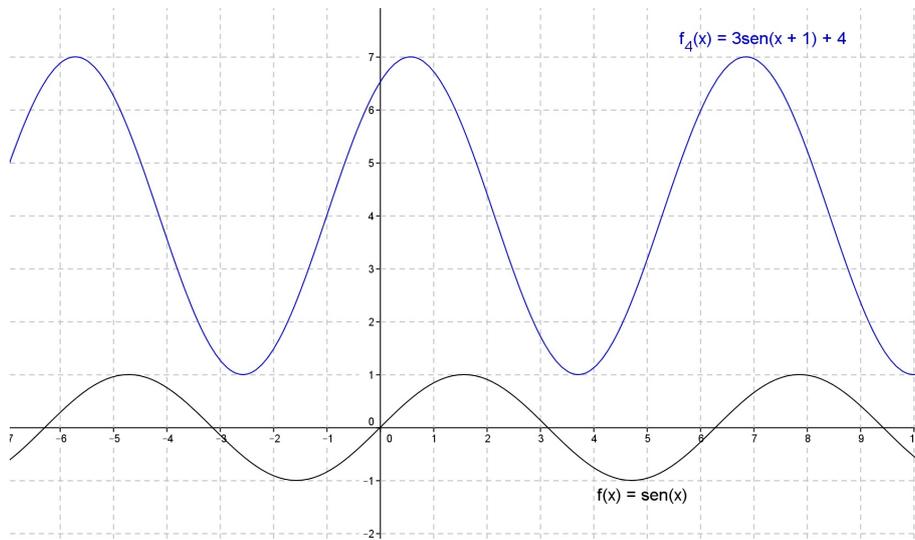
c) A função $f(x)$ tem sua amplitude aumentada para o dobro.

A função $f(x)$ é tem sua amplitude aumentada para o



dobro.

d) A função $f(x)$ é transladada verticalmente em 4 unidades para cima, horizontalmente 1 unidade para a esquerda e tem sua amplitude aumentada para o triplo.

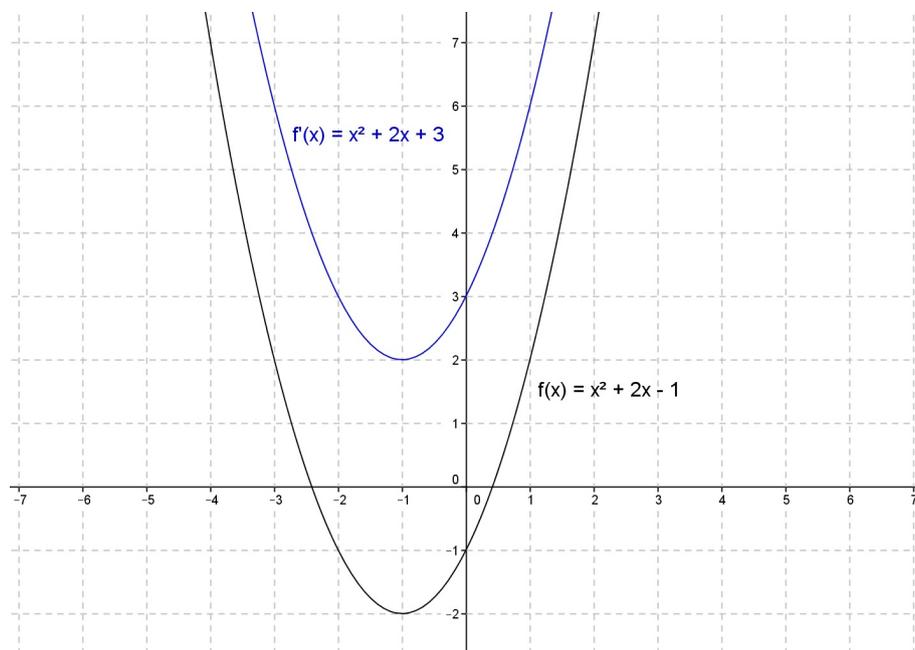


3. a) Para transladar verticalmente 4 unidades para cima basta fazer

$$f'(x) = f(x) + 4$$

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1) + 4$$

$$f'(x) = x^2 + 2x + 3$$



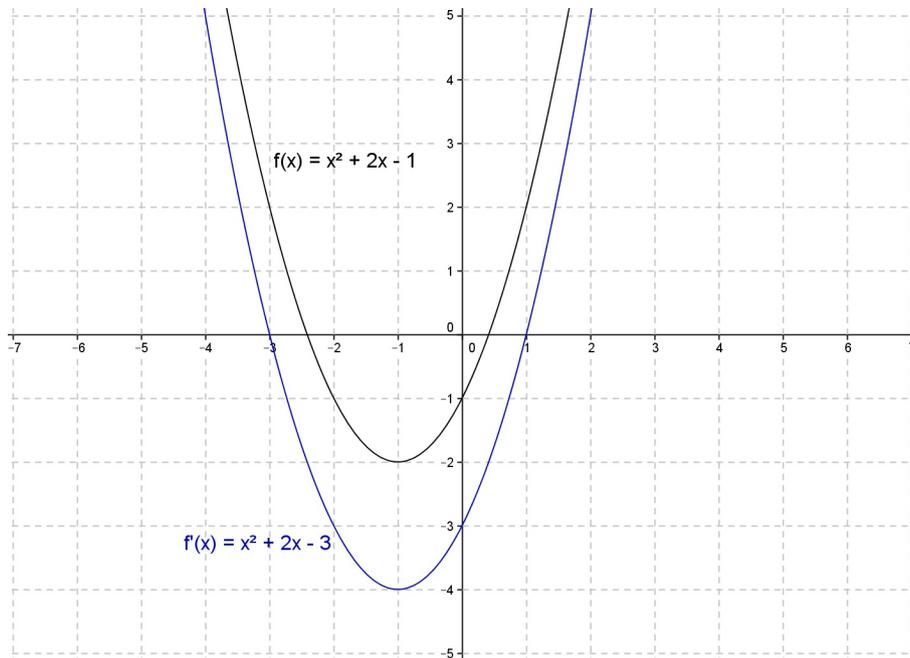
b) Para transladar verticalmente 2 unidades para baixo basta fazer

$$f'(x) = f(x) - 2$$

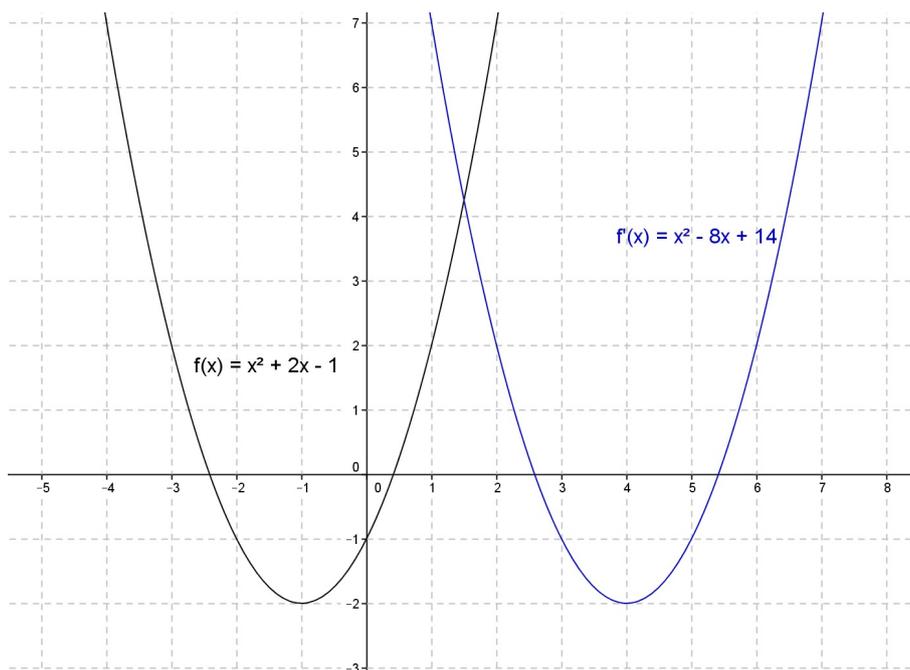
$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1) - 2$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

B Soluções Esperadas para as Atividades



- c) Para transladar horizontalmente 5 unidades para direita basta fazer
 $f'(x) = f(x - 5)$
 $f'(x) = (x - 5)^2 + 2(x - 5) - 1$
 $f'(x) = x^2 - 8x + 14$

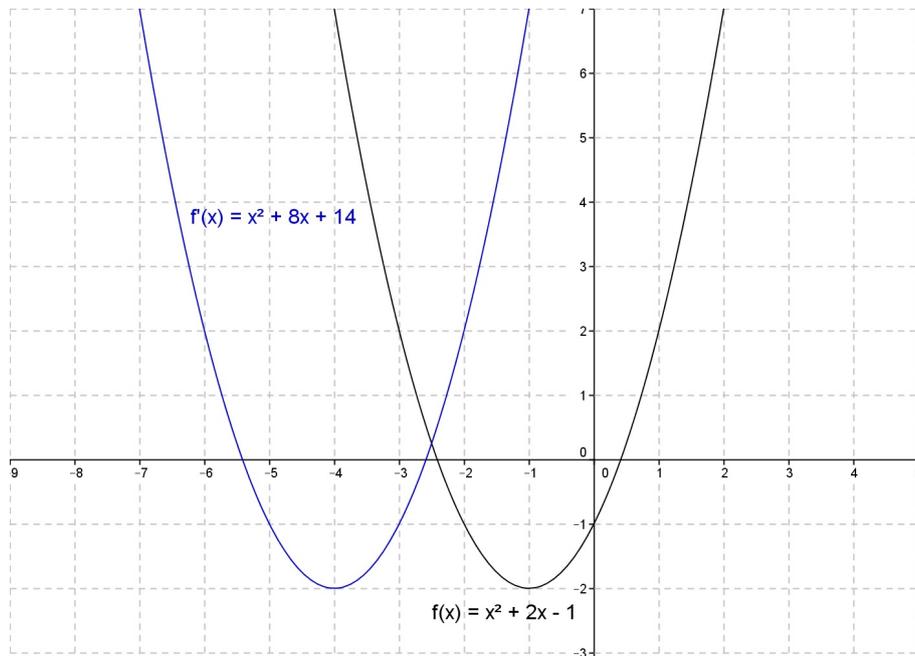


d) Para transladar horizontalmente 3 unidades para esquerda basta fazer

$$f'(x) = f(x + 3)$$

$$f'(x) = (x + 3)^2 + 2(x + 3) - 1$$

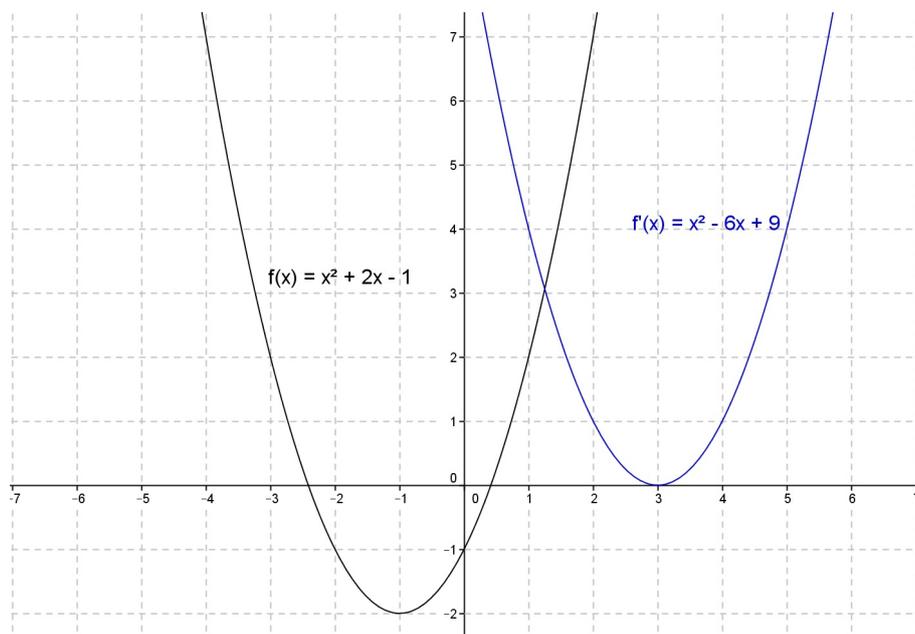
$$f'(x) = x^2 + 8x + 14$$



e) Para transladar horizontalmente 4 unidades para direita e 2 unidades verticalmente para cima basta fazer $f'(x) = f(x - 4) + 2$

$$f'(x) = ((x - 4)^2 + 2(x - 4) - 1) + 2$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 9$$

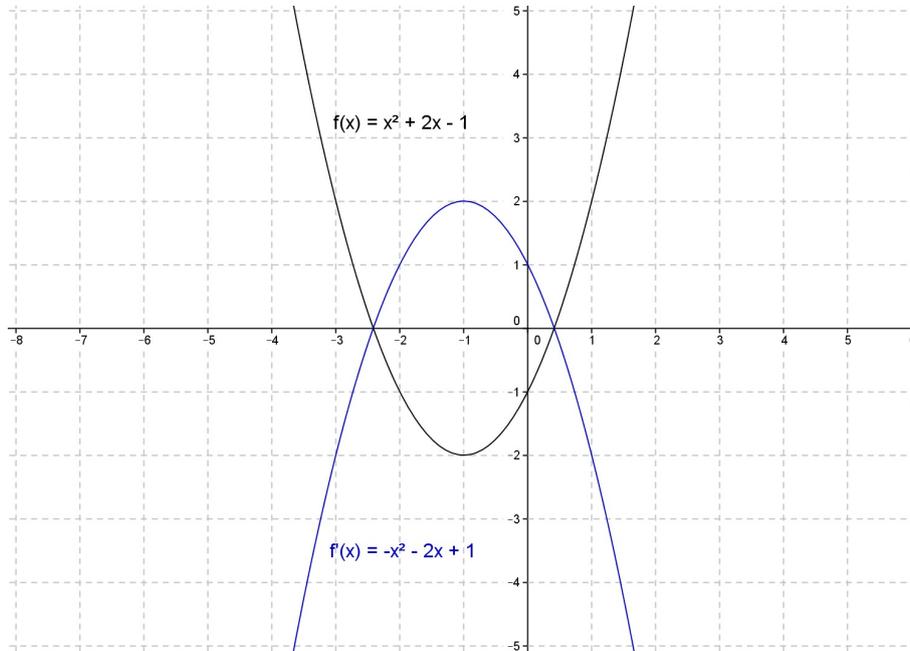


B Soluções Esperadas para as Atividades

f) Para refletir em relação ao eixo x basta fazer $f'(x) = -f(x)$

$$f'(x) = -(x^2 + 2x - 1)$$

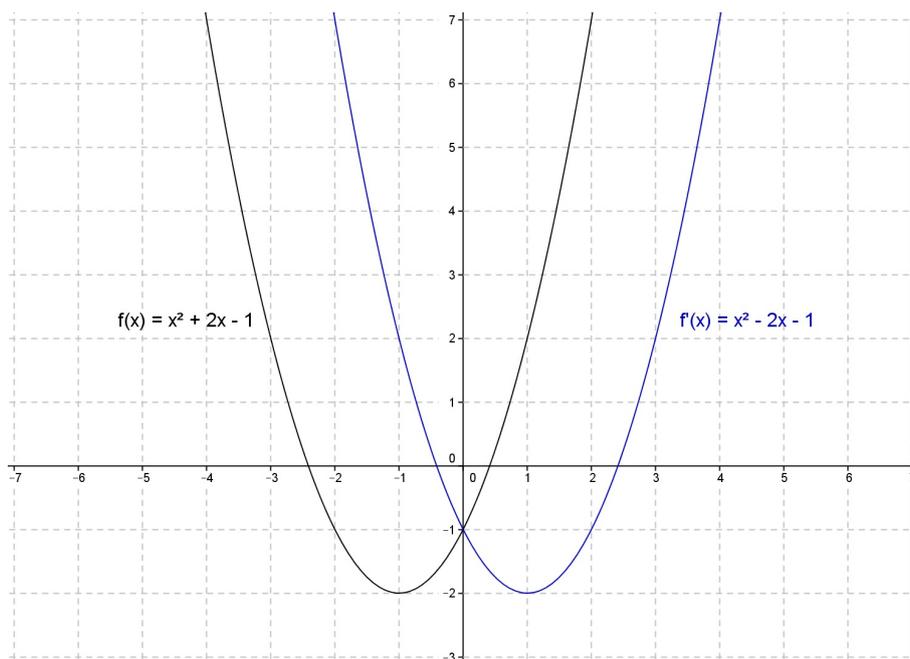
$$f'(x) = -x^2 - 2x + 1$$



g) Para refletir em relação ao eixo y basta fazer $f'(x) = f(-x)$

$$f'(x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1$$

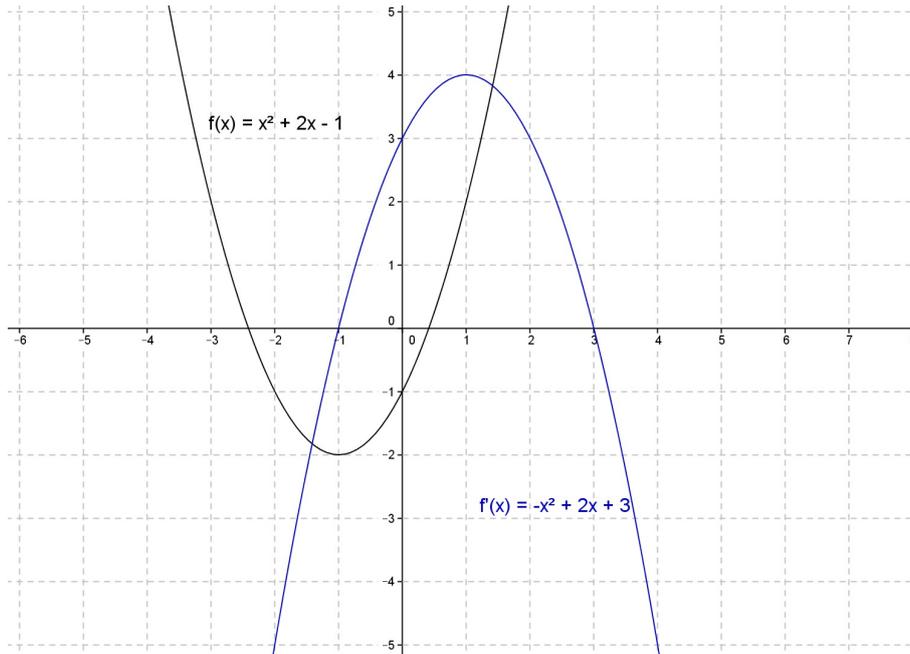
$$f'(x) = x^2 - 2x - 1$$



h) Para refletir em relação ao eixo x , transladar verticalmente 6 unidades para cima e 2 unidades para a direita basta fazer $f'(x) = -f(x - 2) + 2$

$$f'(x) = -((x - 2)^2 + 2(x - 2) - 1) + 2$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 4 - 2x + 4 + 1 + 2$$

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3$$


4.3.2.1 Atividades de Geometria Analítica

1. Sendo $ABCD \equiv A_1B_1C_1D_1$, para que $A_1B_1C_1D_1$ seja obtido por translação de $ABCD$ devemos ter $d(AA_1) = d(BB_1) = d(CC_1) = d(DD_1)$.

Assim, fazendo a distância entre dois pontos para cada caso teremos:

$$AA_1 = \sqrt{(x_A - x_{A_1})^2 + (y_A - y_{A_1})^2}$$

$$AA_1 = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 - 8)^2}$$

$$AA_1 = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$AA_1 = \sqrt{16 + 9}$$

$$AA_1 = 5$$

Analogamente

$$BB_1 = \sqrt{(2 - 6)^2 + (2 - 5)^2} = 5$$

$$CC_1 = \sqrt{(6 - 10)^2 + (1 - 4)^2} = 5$$

$$DD_1 = \sqrt{(3 - 7)^2 + (7 - 10)^2} = 5$$

Assim $d(AA_1) = d(BB_1) = d(CC_1) = d(DD_1) = 5$, como queríamos demonstrar.

B Soluções Esperadas para as Atividades

2. Para termos $\Delta ABC \equiv \Delta A_1 B_1 C_1$ devemos ter $AB \equiv A_1 B_1$, $AC \equiv A_1 C_1$ e $BC \equiv B_1 C_1$, assim

$$d(AB) = d(A_1 B_1)$$

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_{A_1} - x_{B_1})^2 + (y_{A_1} - y_{B_1})^2}$$

$$\sqrt{(1 - 3)^2 + (6 - 10)^2} = \sqrt{(5 - 9)^2 + (2 - 4)^2}$$

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{20}$$

Analogamente

$$d(AC) = d(A_1 C_1)$$

$$\sqrt{(1 - 4)^2 + (6 - 7)^2} = \sqrt{(5 - 6)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

e

$$d(BC) = d(B_1 C_1)$$

$$\sqrt{(3 - 4)^2 + (10 - 7)^2} = \sqrt{(9 - 6)^2 + (4 - 5)^2}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

Portanto $\Delta ABC \equiv \Delta A_1 B_1 C_1$.

Pela disposição das figuras e pela reta que passa entre elas, há uma indicação de que a transformação geométrica seja uma reflexão.

Chamemos esta reta de r , tomemos dois pontos dela, $P = (-1, 0)$ e $Q = (0, 1)$, e determinemos, então, a equação fundamental desta reta.

Em primeiro lugar o coeficiente angular $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1$$

Agora a equação da reta, substituindo um ponto, por exemplo P , e o coeficiente angular m em $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - (0) = 1(x - (-1))$$

Assim, a equação desta reta r é $y - x - 1 = 0$

Para verificar se há reflexão entre os dois triângulos, existem, agora, pelo menos dois caminhos prováveis para se chegar ao resultado. Pode-se determinar a distância entre os pontos e suas respectivas imagens à reta ou pode-se determinar o ponto médio entre os pontos e suas respectivas imagens e verificar se estes pertencem a reta r .

Apresentaremos aqui a segunda resolução.

Ponto médio de AA_1 é $M_{AA_1} = (x_M, y_M)$

$$M_{AA_1} = \left(\left(\frac{5+1}{2} \right), \left(\frac{2+6}{2} \right) \right)$$

$$M_{AA_1} = (3, 4)$$

Do mesmo modo encontramos $M_{BB_1} = (6, 7)$ e $M_{CC_1} = (5, 6)$.

Por fim, basta verificar se $M_{AA_1}, M_{BB_1}, M_{CC_1} \in r$.

Então, substituindo estes pontos na equação da reta r

$$M_{AA_1} = (3, 4)$$

$$y - x - 1 = 0$$

$$(4) - (3) - 1 = 0$$

$$M_{BB_1} = (6, 7)$$

$$(7) - (6) - 1 = 0$$

$$M_{CC_1} = (5, 6)$$

$$(6) - (5) - 1 = 0$$

Portanto, $\Delta A_1 B_1 C_1$ é a reflexão de ΔABC .

3. Para termos $\Delta ABC \equiv \Delta A_1 B_1 C_1$ devemos ter $AB \equiv A_1 B_1$,
 $AC \equiv A_1 C_1$ e $BC \equiv B_1 C_1$, assim

$$d(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (2 - 2)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{(-4)^2 + (-0)^2}$$

$$d(AB) = 4$$

fazendo o mesmo para

$$d(A_1 B_1) = \sqrt{(x_{A_1} - x_{B_1})^2 + (y_{A_1} - y_{B_1})^2}$$

$$d(A_1 B_1) = \sqrt{(12 - 12)^2 + (2 - 6)^2}$$

$$d(A_1 B_1) = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$$

$$d(A_1 B_1) = 4$$

temos

$$d(AB) = d(A_1 B_1)$$

Analogamente,

$$d(AC) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$d(AC) = \sqrt{(2 - 7)^2 + (2 - 4)^2}$$

$$d(AC) = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}$$

$$d(AC) = \sqrt{29}$$

fazendo o mesmo para

$$d(A_1 C_1) = \sqrt{(x_{A_1} - x_{C_1})^2 + (y_{A_1} - y_{C_1})^2}$$

$$d(A_1 C_1) = \sqrt{(12 - 10)^2 + (2 - 7)^2}$$

$$d(A_1 C_1) = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2}$$

$$d(A_1 C_1) = \sqrt{29}$$

temos

$$d(AC) = d(A_1 C_1)$$

Novamente,

$$d(BC) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d(BC) = \sqrt{(6 - 7)^2 + (2 - 4)^2}$$

$$d(BC) = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$$

$$d(BC) = \sqrt{5}$$

fazendo o mesmo para

$$d(B_1 C_1) = \sqrt{(x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2}$$

$$d(B_1 C_1) = \sqrt{(12 - 10)^2 + (6 - 7)^2}$$

$$d(B_1 C_1) = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$d(B_1 C_1) = \sqrt{5}$$

temos

$$d(BC) = d(B_1 C_1)$$

Portanto $\Delta ABC \equiv \Delta A_1 B_1 C_1$.

B Soluções Esperadas para as Atividades

Para verificar se $\Delta A_1B_1C_1$ é obtido pela rotação de ΔABC , basta determinar a distância dos pontos do ΔABC ao ponto O comparar com a distância dos pontos do $\Delta A_1B_1C_1$ ao ponto O respectivamente.

Assim

$$d(AO) = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$d(AO) = \sqrt{(2 - 7)^2 + (2 - 7)^2}$$

$$d(AO) = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$$

$$d(AO) = \sqrt{50}$$

fazendo o mesmo para

$$d(A_1O) = \sqrt{(x_{A_1} - x_O)^2 + (y_{A_1} - y_O)^2}$$

$$d(A_1O) = \sqrt{(12 - 7)^2 + (2 - 7)^2}$$

$$d(A_1O) = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2}$$

$$d(A_1O) = \sqrt{50}$$

temos

$$d(AO) = d(A_1O)$$

Analogamente,

$$d(BO) = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}$$

$$d(BO) = \sqrt{(6 - 7)^2 + (2 - 7)^2}$$

$$d(BO) = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}$$

$$d(BO) = \sqrt{26}$$

fazendo o mesmo para

$$d(B_1O) = \sqrt{(x_{B_1} - x_O)^2 + (y_{B_1} - y_O)^2}$$

$$d(B_1O) = \sqrt{(12 - 7)^2 + (6 - 7)^2}$$

$$d(B_1O) = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}$$

$$d(B_1O) = \sqrt{26}$$

temos

$$d(BO) = d(B_1O)$$

e

$$d(CO) = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2}$$

$$d(CO) = \sqrt{(7 - 7)^2 + (4 - 7)^2}$$

$$d(CO) = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$d(CO) = 3$$

fazendo o mesmo para

$$d(C_1O) = \sqrt{(x_{C_1} - x_O)^2 + (y_{C_1} - y_O)^2}$$

$$d(C_1O) = \sqrt{(10 - 7)^2 + (7 - 7)^2}$$

$$d(C_1O) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$$

$$d(C_1O) = 3$$

$$d(CO) = d(C_1O)$$

Portanto, $\Delta A_1B_1C_1$ é a rotação de ΔABC .