UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Thiago dos Santos Silva

Conceito de Função Aplicado ao Estudo de Sequências Através de uma Cartilha Interativa Elaborada com o Canva

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Thiago dos Santos Silva

Conceito de Função Aplicado ao Estudo de Sequências Através de uma Cartilha Interativa Elaborada com o Canva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB
Agosto/2024

S586c Silva, Thiago dos Santos.
Conceito de função aplicado ao estudo de sequências através de uma cartilha interativa elaborada com o Canva / Thiago dos Santos Silva. – Campina Grande, 2024.
177 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Profa. Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida”.
Referências.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Funções e Sequências Numéricas. 3. Educação Matemática. 4. Cartilha Interativa. 5. Tecnologia. I. Almeida, Deise Mara Barbosa de. II. Título.

CDU 51(07)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Thiago dos Santos Silva

Conceito de função aplicado ao estudo de sequências através de uma cartilha interativa elaborada com o Canva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 30 de agosto de 2024:

Documento assinado digitalmente
gov.br DEISE MARA BARBOSA DE ALMEIDA
Data: 02/09/2024 09:16:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr(a). Deise Mara B. de Almeida
Orientadora - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br EULINA COUTINHO SILVA DO NASCIMENTO
Data: 02/09/2024 11:18:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr(a). Eulina Coutinho Silva do Nascimento
Membro Externo - UFRRJ

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSEFA ITAILMA DA ROCHA
Data: 02/09/2024 09:36:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr(a). Josefa Itailma Rocha
Membro Interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Dedico este trabalho à minha mãe Suenia dos Santos Silva, que sempre fez de tudo por mim e acreditou que este momento chegaria; Ao meu irmão Lucas dos Santos Batista, que está sempre ao meu lado, nos momentos de alegria e nos mais difíceis fazendo toda diferença. À minha esposa Patrícia Bezerra do Nascimento Silva, que também jamais duvidou que venceríamos juntos esta etapa e sempre me apoiou em todos os momentos; À minha filha Gabriela do Nascimento Silva, que para sempre será a minha melhor alegria e maior motivação. Amo vocês!
Também gostaria de dedicar a duas pessoas que, embora não estejam mais entre nós, permanecem vivas em meu coração e na minha mente: o meu pai Antonio Paulo da Silva (in memoriam) e a minha irmã Adelma Silva Nascimento (in memoriam).
O amor, a lembrança e a saudade de vocês, jamais passarão!

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Deus pelo dom da vida e por estar comigo em todos os momentos. Pelo seu tão grande amor, pelo cuidado incansável e pelo renovo diário de suas misericórdias. Muito obrigado por me permitir chegar aqui e por ter me capacitado durante todo o Mestrado. Sem Ti, eu nada seria! E a Ti, seja dada toda honra e toda glória!

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha Orientadora, Prof(a). Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida, pela dedicação e valiosas contribuições, as quais enriqueceram imensamente esta Dissertação. Sua competência, paciência, seu apoio e incentivo incansáveis, foram fundamentais para a realização deste trabalho. Muito obrigado por todo o aprendizado e crescimento que pude alcançar sob sua orientação durante esta trajetória. Serei eternamente grato por não ter desistido de mim, professora!

Agradecer também às professoras Dr(a). Eulina Coutinho Silva do Nascimento e Dr(a). Josefa Itailma da Rocha, por terem aceitado o convite para fazer parte da Banca Examinadora e, sobretudo, pela disposição em avaliar este trabalho. Obrigado pelas valiosas contribuições, sugestões e críticas construtivas, que foram essenciais para o aprimoramento desta Dissertação. Agradeço por compartilharem seu tempo, conhecimento e experiência para enriquecer ainda mais este estudo.

Também gostaria de agradecer à Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) por oferecer com excelência o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Gostaria de externar o meu agradecimento ao nosso Coordenador do curso, o professor Dr. Romildo Nascimento de Lima, pelo apoio e dedicação durante toda esta trajetória. Seu comprometimento e disposição para nos auxiliar em todas as etapas foram essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço por ter sido tão acessível e atencioso, fornecendo sempre valiosas orientações.

Aos meus professores, expresso meu profundo reconhecimento ao trabalho de vocês e minha total gratidão por todo conhecimento compartilhado durante as aulas. Obrigado pelos conselhos, paciência, dedicação e por compartilharem conosco a alegria de cada conquista que obtivemos ao longo do curso. Em especial, ao Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo, Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, Dr. José de Arimatéia Fernandes, Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho, Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho e Dr. José Fernando Leite Aires. Que grandes fontes de inspiração!

Aos meus colegas da turma PROFMAT-UFCG-2022, expresso minha sincera gratidão pela parceria, companheirismo e apoio ao longo do curso. Agradeço por todas as trocas de conhecimento, pelas discussões inspiradoras e pela amizade que formamos nesse tempo tão precioso. Que Deus abençoe abundantemente a cada um. Vocês são inesquecíveis! Em especial, aos queridos Antônio Marcos Barbosa, Geovane Tavares Nogueira, Renato Machado de Sousa e Silvana Oliveira Silva Santos.

Gostaria de agradecer ao apoio das equipes gestoras que passaram pela Escola Professora Maria Lúcia Alves durante o nosso projeto e, em especial, aos alunos da turma 2ª série A - 2024, por terem aceitado a aplicação do nosso recurso educacional, mesmo diante das tantas adversidades.

Aos meus amigos que sempre torceram por mim, agradeço profundamente pelo apoio e incentivo de cada um. Obrigado por estarem sempre ao meu lado. Vocês foram fundamentais! Em especial, a Luandersson de Sousa Brilhante, Allysson Araújo da Silva, Rafael Augusto Albuquerque Macedo, Fábio Silva de Azevedo e Antônio Geraldo da Silva Barbosa, que tantas vezes me ajudaram com suas palavras cheias de sabedoria e atitudes que jamais serão esquecidas! Muito obrigado, meus irmãos!

Agradeço as pessoas da minha família que sempre me apoiaram e acreditaram em mim. Em especial ao meu irmão Lucas dos Santos Batista e as minhas tias Solange dos Santos Silva e Sônia Maria dos Santos Silva. O amor de vocês foi a minha fortaleza ao longo desta caminhada. Vocês são fundamentais na minha vida! Muito obrigado por tudo!

À minha mãe Suenia dos Santos Silva, minha eterna gratidão por seu amor incondicional, apoio constante e por acreditar em mim em todos os momentos. Seu exemplo de força, dedicação e amor foi e continuará sendo minha maior inspiração. Obrigado por ser tão presente na minha vida e por estar ao meu lado em cada passo desta jornada. Sou muito grato por você não apenas me incentivar mas, verdadeiramente, acreditar que eu poderia concluir esta etapa. Este trabalho é, em grande parte, resultado do seu apoio e das suas palavras de encorajamento. Te amarei para sempre “do tamanho do Sistema Solar”, mãe!

À minha filha Gabriela do Nascimento Silva, meu agradecimento mais profundo por ser a minha maior fonte de inspiração e motivação. Seu sorriso e alegria trazem luz aos meus dias e me dão forças para continuar. Agradeço por sua compreensão nos momentos de ausência em virtude deste trabalho. Você ainda é tão pequena para entender essas coisas, mas tenho certeza que um dia, entenderá! Cada momento ao seu lado, minha filha, reforça o quanto vale a pena todo o meu esforço. Você enche a minha vida de amor e propósito! Amo você, Gabi!

E à minha esposa Patrícia Bezerra do Nascimento Silva, meu profundo agradecimento por seu amor, paciência e apoio incondicional ao longo desta jornada. Suas orações, seu otimismo através de tantas palavras de encorajamento, sua compreensão nas vezes em que precisei estar ausente mesmo estando muitas vezes tão próximo, foram fundamentais para a realização deste trabalho. Obrigado pela presença constante e por acreditar em mim, mesmo nos momentos mais desafiadores. Seu companheirismo e dedicação tornaram possível a realização deste sonho antigo. Este trabalho é tão seu quanto meu. Muito obrigado por ser aquela mola que me arremessa ao sucesso!

"Seja forte e corajoso!
Não se apavore nem desanime,
pois o Senhor, o seu Deus,
estará com você por onde quer que andares."
(Bíblia Sagrada, Josué 1:9)

Resumo

A noção de função é uma das mais importantes da e para a Matemática e o estudo de sequências numéricas também tem a sua relevância nesta Ciência, no entanto, o ensino destes conceitos apresenta desafios significativos. Embora a definição de sequências numéricas esteja explicitamente conectada às funções, grande parte dos materiais didáticos apresentam esses temas de forma separada, dando a impressão de serem assuntos desvinculados. O objetivo principal deste trabalho é promover a aprendizagem de função e sequências numéricas e favorecer a compreensão das conexões existentes entre estes conceitos. Reconhecendo que o uso da tecnologia no ensino de Matemática pode trazer inúmeros benefícios, como melhorar o engajamento e a aprendizagem dos estudantes, e levando em consideração que a tecnologia na sala de aula não se restringe apenas a dispositivos digitais e internet, mas inclui qualquer recurso que possa facilitar o aprendizado, desenvolvemos uma Cartilha Interativa para auxiliar professores e estudantes no ensino e aprendizagem de funções e sequências numéricas. Criada na plataforma de design gráfico, Canva, a Cartilha Interativa busca oferecer uma ferramenta inovadora que integra esses conceitos de forma prática e acessível, promovendo uma compreensão mais aprofundada e dinâmica, transformando os estudantes em participantes ativos na construção do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Funções e sequências numéricas. Tecnologia. Cartilha Interativa.

Abstract

The concept of function is one of the most important in and for Mathematics, and the study of numerical sequences also holds significant relevance in this field. However, teaching these concepts presents considerable challenges. Although the definition of numerical sequences is explicitly connected to functions, many educational materials present these topics separately, giving the impression that they are unrelated subjects. The main objective of this work is to promote the learning of functions and numerical sequences and to foster an understanding of the connections between these concepts. Recognizing that the use of technology in teaching Mathematics can bring numerous benefits, such as improving student engagement and learning, and considering that technology in the classroom is not limited to digital devices and the internet, but includes any resource that can facilitate learning, we developed an Interactive Guidebook to assist teachers and students in teaching and learning functions and numerical sequences. Created using the Canva graphic design platform, the Interactive Guidebook aims to offer an innovative tool that integrates these concepts in a practical and accessible way, promoting a deeper and more dynamic understanding, transforming students into active participants in the construction of their own knowledge.

Keywords: Functions and numerical sequences. Technology. Interactive Guidebook.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de Quadros

Sumário

1 Introdução

A Matemática contribui, essencialmente, para o desenvolvimento das civilizações. É uma linguagem universal que fornece ferramentas específicas para resolver problemas e revelar padrões que ajudam a entender os fenômenos mais diversos. Sua importância ultrapassa os muros das salas de aula, pois colabora com o progresso da humanidade, favorece os constantes avanços tecnológicos e ainda nos ajuda a compreender o mundo em que vivemos.

No vasto universo matemático, encontra-se um dos conceitos fundamentais desta Ciência: o conceito de função.

> Da potência desse conceito como instrumento matemático, [...] necessário para o estudo da nova realidade da Ciência — a noção de lei natural — traz consigo, como não pode deixar de ser, um conjunto de ideias e concepções que lhe são inerentes (CARAÇA, 1952).

Ao longo da História, o conceito de função passou por diversas transformações e evoluções. Muitos matemáticos contribuíram, durante séculos, com inúmeras definições, notações e/ou representações para que esse conceito pudesse chegar na forma que o conhecemos atualmente. Está presente em muitas áreas do conhecimento humano, como na Física, na Economia, na Medicina, na Engenharia, na Computação, entre outras, mas é a sua relação intrínseca com tantos outros conceitos da própria Matemática que me fascina.

Já o ensino de Matemática, especialmente nas escolas públicas, é marcado por inúmeros desafios enfrentados por professores e estudantes, sendo boa parte deles, associados à carência de recursos educacionais adequados. Além disso, a abordagem abstrata, descontextualizada e desconexa dos conceitos matemáticos durante as aulas, contribui para altas taxas de desmotivação e desinteresse, especialmente entre aqueles estudantes que já enfrentam dificuldades em acompanhar o ritmo das aulas.

De um lado, alguns professores se esforçam para proporcionar uma educação Matemática de qualidade e precisam, na maioria das vezes, adaptar-se a condições desfavoráveis de trabalho, como turmas super lotadas e à falta de apoio pedagógico adequado. E do outro lado, para boa parte dos estudantes, a dificuldade em compreender conceitos matemáticos complexos é exacerbada pela falta de acesso a métodos de ensino tecnológicos e atrativos que provoquem significado ao que é estudado.

Reconhecendo os inúmeros desafios enfrentados diariamente nas escolas, associados à carência de bons recursos pedagógicos, e representando um esforço na busca por metodologias inovadoras que contribuam com o ensino da Matemática, desenvolvemos uma Cartilha Interativa voltada para o ensino e aprendizagem de função e sequências numéricas. Este projeto nasceu da necessidade de superar as limitações dos métodos tradicionais, que muitas vezes não conseguem engajar os alunos ou facilitar a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

Neste trabalho veremos como o conceito de função se relaciona com o estudo das sequências numéricas mas que, lamentavelmente, esta conexão ainda é tão pouco explorada nas aulas de Matemática. A maioria dos livros didáticos até abordam corretamente a definição funcional[1] de sequências numéricas, no entanto, este acaba sendo o único momento em que ocorre alguma menção ao conceito de função durante toda a abordagem subsequente desse tema.

O recurso educacional se distingue por promover uma abordagem interativa e participativa, desafiando a ideia convencional de que a tecnologia educacional deve estar associada ao digital. Ao contrário, demonstramos que tecnologia pode ser qualquer recurso que potencialize o aprendizado e o engajamento dos estudantes. Esperamos que o uso da Cartilha Interativa, possa ajudar a desenvolver o protagonismo e a despertar o interesse dos estudantes, uma vez que eles são estimulados a participar ativamente no processo de ensino.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é analisar o processo de ensino-aprendizagem de função e sequências numéricas através de uma ferramenta tecnológica e acessível, que promova um ambiente educacional de discussões e interações durante o estudo desses temas e suas inter-relações.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Oferecer uma ferramenta tecnológica e de fácil acesso, para explorar o conceito de função, suas notações e suas múltiplas representações de maneira dinâmica e envolvente;
- Construir gráficos, identificar variáveis dependentes e independentes, determinar domínio, contra-domínio, imagem e lei de correspondência de sequências numéricas tornando as aulas de Matemática mais integradas;
- Investigar as conexões existentes entre Função Afim e Progressão Aritmética promovendo a aprendizagem e a reflexão dos estudantes.

[1] Relativo à função.

1.2 Organização

Esta Dissertação foi organizada em 6 capítulos. No Capítulo 1 introduzimos o nosso trabalho apresentando os objetivos e a sua estrutura. O Capítulo 2 começa a fundamentação teórica com uma análise do processo de ensino e aprendizagem na Matemática, destacando a perspectiva da BNCC para o ensino de funções e sequências numéricas. No Capítulo 3 é feita uma abordagem aprofundada de funções e sequências numéricas, explorando suas definições, notações, representações, aplicações, resultados e as conexões entre esses conceitos, finalizando a fundamentação teórica. O recurso educacional que desenvolvemos é apresentado no Capítulo 4. Neste capítulo, começamos discutindo a plataforma Canva utilizada para elaborar a Cartilha Interativa e apresentamos as soluções de todos os problemas nela contidos. Já o Capítulo 5 são mencionados os aspectos metodológicos utilizados na Pesquisa e traz uma breve reflexão sobre os dissabores enfrentados na escola pública. Além disso, apresenta a análise dos dados coletados, juntamente com os primeiros resultados obtidos. As considerações finais estão no Capítulo 6 o qual também dedicamos algumas palavras para uma reflexão.

2 Ensino e Aprendizagem

A Matemática desempenha um papel fundamental no mundo atual, fornecendo as ferramentas e estruturas necessárias para compreender, modelar e resolver uma variedade de problemas em ciência, tecnologia, saúde, sustentabilidade, e diversas outras áreas do conhecimento. Mas apesar disto, o seu ensino é cercado por inúmeros percalços, em todos os níveis de educação.

No âmbito do ensino de Matemática no Ensino Básico, sobretudo na escola pública, esses desafios vão desde a precariedade da estrutura física das escolas, associada a falta de recursos educacionais didáticos e/ou tecnológicos de qualidade, como também, a baixa perspectiva de boa parte dos alunos em ver, nos estudos, uma oportunidade de ascensão nas suas condições de vida, o que favorece a falta de interesse e em alguns casos, assim como na realidade a qual faço parte, chega até a ocasionar o abandono escolar.

Além disso, a abordagem que predomina a maior parte do tempo nas aulas de Matemática, consiste num ensino tradicional, caracterizado pela transmissão de informações, em que o professor apresenta o objeto de conhecimento, resolve alguns exemplos, atribui exercícios aos alunos e repete esse processo para o objeto de conhecimento seguinte. De acordo com Lavigne, Higuchi e Oliveira (2013, p. 1), "a maneira como, muitas vezes, é ensinada, através de aulas artificiais e mecânicas, acaba dificultando o processo de aprendizagem".

Muitas vezes esta conduta é o reflexo do professor que não entende a maneira pela qual o estudante aprende, ou seja, como a aprendizagem acontece. É fundamental valorizar os conhecimentos prévios que os estudantes já possuem acerca do que ainda vai ser ensinado, como reforça o trecho a seguir

> Nunca se ensina no vazio, no nada; quando se ensina uma coisa, sobre essa "uma coisa" já existem cognições, ideias, competências, mais ou menos corretas, mais ou menos bem fundamentadas: não se pode deixar de partir desse conhecimento preliminar para atingir a conceitualização (D'AMORE, 2007, p. 65).

Entender como ocorre, cognitivamente, a construção do conhecimento, é essencial para melhor usufruir dos métodos e dos recursos tecnológicos a serem utilizados nas aulas de Matemática. O uso de recursos tecnológicos no processo educacional é indispensável nos dias atuais, pois as inovações tecnológicas são fundamentais, também, para a educação. Segundo Pontes (2019 apud OLIVEIRA; COSTA, 2023, p. 280), "a utilização de Tecnologias Digitais, em sala de aula, fortalece a relação professor-aluno e diminui drasticamente as defasagens entre o ensino tradicional e a realidade do educando".

Diariamente professores de Matemática são questionados/confrontados pelos seus alunos acerca da utilidade dos assuntos que são estudados, um após o outro, nas suas vivências cotidianas. Acreditamos que um dos grandes desafios do ensino de Matemática, seja minimizar o quantitativo de aulas monótonas e propiciar significado ao que é estudado, levando "os alunos a construírem uma aprendizagem voltada para a realidade, na qual eles participem como sujeitos ativos do conhecimento" (LAVIGNE; HIGUCHI; OLIVEIRA, 2013, p. 3).

Diminuir a disparidade existente entre o que é ensinado nas escolas e o que, de fato, é aplicado pelos alunos fora da sala de aula não é uma tarefa fácil. Todavia, a tecnologia sendo utilizada de forma responsável e inovadora, pode se tornar uma grande aliada nesse processo.

> O professor não deve entender as novas tecnologias de ensino apenas como um recurso didático inovador, mas sim reconhecer a importância dessas inovações no contexto educacional e, principalmente, no cotidiano dos alunos, essa visão favorecerá o processo de ensino e aprendizagem nos diversos setores da educação (OLIVEIRA; COSTA, 2023, p. 280).

Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que os estudantes possam

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2018, p. 531).

Embora a aula de Matemática possa favorecer a aprendizagem, não é ela, sozinha, fator determinante para garantir que o estudante aprenda, pois são muitos os fatores que podem favorecer o insucesso na aprendizagem. A ausência de uma abordagem integrada de conteúdos que estão inter-relacionados com outros, é um exemplo que ilustra bem essa situação.

Muitos professores ainda utilizam em suas práticas docente, o ensino isolado dos objetos de conhecimento, deixando de explorar, mesmo quando possível, as relações existentes entre os temas estudados, fazendo parecê-los desconexos e, aparentemente, independentes para a maioria dos alunos, sobretudo, quando "o estudante constrói, de maneira ativa, seu próprio conhecimento, interagindo com o ambiente e organizando suas construções mentais", (D'AMORE, 2007, p. 75).

Acreditamos que, infelizmente, muitos professores de Matemática do Ensino Médio, acabam sendo (mal) influenciados pela maneira com a qual os livros abordam, por exemplo, funções e sequências numéricas, quando pouco (ou nada) exploram, as conexões existentes entre esses conceitos matemáticos.

Consideramos de grande importância que o professor deva explorar, sempre que for possível, as relações que existem entre os diferentes objetos de conhecimento. Isso pode favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e do apreço deles pela Matemática, fazendo com que a percebam “como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados.”, (BRASIL, 2018, p. 540).

Após ser aprovada em 20 de dezembro de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei de número 9.394/96, foram publicados no ano seguinte, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para os anos iniciais do Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano. Esses documentos que foram desenvolvidos para nortear a elaboração dos currículos das escolas eram considerados, na época, como modelos de referência para a Educação do Brasil.

Em 1998, foram publicados os PCNs para os anos finais do Ensino Fundamental, ou seja, dos atuais 6º ao 9º ano, e nos anos

> 2000, são lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), em quatro partes, com o objetivo de cumprir o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias (Ministério da Educação, 2024).

Um dos princípios pelos quais os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) se embasaram, para a área de Matemática no Ensino Fundamental, era no fato de que

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (Brasil, 1998, p. 57).

Para o Ensino Médio, um dos objetivos do ensino de Matemática presentes nos PCNs, era fazer com que o aluno pudesse “estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo” (BRASIL, 2000, p. 42).

Observemos que no nosso documento mais atual, o qual não apenas orienta, mas normatiza o que os estudantes brasileiros devem desenvolver durante o período que estiverem na Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), reitera a importância da integração entre os conteúdos estudados, ou seja, recomenda a exploração das conexões entre os diversos conceitos matemáticos durante as aulas.

No Ensino Fundamental, a BNCC baseia-se na ideia de que

> a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2018, p. 276).

E, relativamente ao Ensino Médio,

> a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018, p. 527).

Acreditamos que a abordagem nas aulas de Matemática buscando mostrar aos alunos como muitos objetos de conhecimento estão interligados e como podem ser aplicados em uma variedade de contextos da vida real, pode ser crucial para melhorar o desempenho e a compreensão desses estudantes, além de contribuir com a apreciação por esta Ciência, como um sistema interconectado de ideias e aplicações.

Este estudo concentra-se na aplicação do conceito de função no contexto das sequências numéricas, destacando as relações existentes entre Progressão Aritmética e Função Afim, presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio, mas que é tão pouco explorado nas aulas de Matemática e curiosamente, até omitido em boa parte dos livros didáticos.

Diante dessa concepção, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe que os alunos consigam "identificar e associar sequências numéricas (PA) a Funções Afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (EM13MAT507)" (BRASIL, 2018, p. 541).

Analogamente, a habilidade 47, específica dos componentes, contida no Organizador Curricular de Pernambuco, sugere "identificar e associar Progressões Aritméticas (PA) a Funções Afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos (EM13MAT507PE47)" (PERNAMBUCO, 2021, p. 195).

Para contribuir com este trabalho, analisamos o documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e investigamos como o ensino de funções e sequências numéricas é proposto atualmente durante a Educação Básica. Vamos apresentar os anos, a unidade temática e os objetos de conhecimento envolvidos em que cada etapa do ensino de funções e sequências numéricas, além das expectativas para as habilidades a serem desenvolvidas em cada uma dessas etapas.

Verificamos na BNCC que tanto o estudo de função como o de sequências numéricas fazem parte da Unidade Temática "Álgebra", cuja finalidade é o

> desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, [...]. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (BRASIL, 2018, p. 270).

2.1 O ensino de função na perspectiva da BNCC

Embora o estudo de função para o Ensino Fundamental apareça na BNCC somente no último ano desta etapa de ensino, a noção intuitiva de função é explorada por meio da resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, sobretudo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) (BRASIL, 2018). A noção de proporcionalidade é introduzida aos estudantes do 4° ano do Ensino Fundamental como uma forma de entender a multiplicação. Nesse estágio, eles começam a aprender como a multiplicação pode ser usada para resolver problemas que envolvem uma relação proporcional entre diferentes quantidades, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Proporcionalidade no 4º ano do Ensino Fundamental.

4º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 286-287)

O Quadro 2 mostra que no 5° ano os estudantes aprofundam o estudo da proporcionalidade direta entre grandezas. Eles são estimulados a resolver problemas que envolvem relações proporcionais, compreendendo como variações em uma grandeza influenciam outra de forma direta.

Quadro 2 – Proporcionalidade no 5º ano do Ensino Fundamental (Álgebra).

5º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Grandezas diretamente proporcionais.	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 290-291)

O estudo de proporcionalidade aparece novamente no 5° ano, envolvido na Unidade Temática "Geometria", quando os estudantes aprendem a proporcionalidade dos lados de figuras semelhantes, conforme indicado no Quadro 3.

Quadro 3 – Proporcionalidade no 5º ano do Ensino Fundamental (Geometria).

5º ANO - Unidade Temática: Geometria	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 296-297)

No 6° ano, o conceito de proporcionalidade é posto nas Unidades Temáticas "Números" e "Grandezas e Medidas". O Quadro 4 apresenta as relações proporcionais no estudo de porcentagens.

Quadro 4 – Proporcionalidade no 6º ano do Ensino Fundamental (Números).

6º ANO - Unidade Temática: Números	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”.	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 300-301)

O Quadro 5, por sua vez, expõe a relação diretamente proporcional entre as grandezas perímetro e medida do lado de um quadrado.

Quadro 5 – Proporcionalidade no 6º ano do Ensino Fundamental (Grandezas e Medidas).

6º ANO - Unidade Temática: Grandezas e Medidas	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 302-303)

Já o Quadro 6 vemos que no 7° ano, os estudantes utilizam expressões algébricas para representar relações entre grandezas direta e inversamente proporcionais. Isso envolve a manipulação de variáveis para descrever como uma quantidade varia proporcionalmente em relação a outra.

Quadro 6 – Proporcionalidade no 7º ano do Ensino Fundamental.

7º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 306-307)

O Quadro 7 mostra que na Unidade Temática "Geometria", os estudantes do 9° ano exploram o teorema de Pitágoras e utilizam relações de proporcionalidade em retas paralelas cortadas por secantes por meio da resolução de problemas.

Quadro 7 – Proporcionalidade no 9º ano do Ensino Fundamental (Geometria).

9º ANO - Unidade Temática: Geometria	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 318-319)

No 9° ano do Ensino Fundamental os estudantes também aprofundam o estudo de proporcionalidade direta e inversa através da resolução de problemas envolvendo duas ou mais grandezas, como indicado no Quadro 8.

Quadro 8 – Proporcionalidade no 9º ano do Ensino Fundamental.

9º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 316-317)

Entender o conceito de função e suas múltiplas representações é o que está proposto para os estudantes no 9° ano do Ensino Fundamental. O Quadro 9 destaca que a compreensão deste conceito deve se dar como relação unívoca entre duas variáveis, isto é, quando cada valor de uma variável depende de um único valor de outra variável.

Quadro 9 – Funções no 9º ano do Ensino Fundamental.

9º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 316-317)

Para o Ensino Médio a BNCC sugere um conjunto de habilidades que favorecem o desenvolvimento de cinco Competências Específicas da Área de Matemática e Suas Tecnologias. Citaremos todas as competências e habilidades que estão relacionadas ao ensino e aprendizagem de função bem como, seguindo as sugestões deste documento, de Proporcionalidade.

No Quadro 10, podemos observar a habilidade acerca de função para a Competência Específica 1.

Quadro 10 – Funções no Ensino Médio (Competência 1).

ENSINO MÉDIO	
Competência Específica 1	**Habilidade(s)**
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.	(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 524-525)

As habilidades relativas à função, para a Competência Específica 3, estão expostas no Quadro 11.

Quadro 11 – Funções no Ensino Médio (Competência 3).

ENSINO MÉDIO	
Competência Específica 3	**Habilidade(s)**
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros. (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com Funções Logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as Funções Seno e Cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 527-528)

O Quadro 12, mostra todas as habilidades sobre função, para a Competência Específica 4.

Quadro 12 – Funções no Ensino Médio (Competência 4).

ENSINO MÉDIO	
Competência Específica 4	**Habilidade(s)**
Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das Funções Exponencial e Logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas. (EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das Funções Seno e Cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT405) Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 530-531)

Por fim, podemos observar no Quadro 13, todas as habilidades relacionadas a função para a Competência Específica 5.

Quadro 13 – Funções no Ensino Médio (Competência 5).

ENSINO MÉDIO	
Competência Específica 5	**Habilidade(s)**
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de Funções Quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a Funções Afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 532-533)

2.2 O ensino de sequências numéricas na perspectiva da BNCC

A BNCC chama de aprendizagens essenciais para a Educação Infantil o conjunto de comportamentos, habilidades, conhecimentos e de vivências que favoreçam a aprendizagem e o desenvolvimento em cinco campos de experiências (BRASIL, 2018). No campo de experiência denominado “ESPAÇOS, TEMPOS, QUANTIDADES, RELAÇÕES E TRANSFORMAÇÕES” encontra-se o ponto de partida do ensino das sequências através de um dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para as crianças entre 4 anos e 5 anos e 11 meses, como mostra o Quadro 14.

Quadro 14 – Sequências numéricas na Educação Infantil.

EDUCAÇÃO INFANTIL
Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações
(EI03ET07) Relacionar números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 52)

O estudo de sequências numéricas é abordado em seis dos nove anos do Ensino Fundamental, sendo do 1° ao 4° ano na parte inicial, e retomado durante o 7° e o 8° ano, na parte final desta etapa de ensino.

Durante o 1° ano do Ensino Fundamental os alunos são incentivados a identificar padrões em sequências formadas por figuras, objetos, etc. Além de observar as regras de certas sequências recursivas, como mostra o Quadro 15.

Quadro 15 – Sequências numéricas no 1º ano do Ensino Fundamental.

1º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 278-279)

Podemos observar no Quadro 16 que durante o 2° ano os estudantes são estimulados a criar sequências repetitivas e recursivas e inserir termos faltantes nelas. Além disso, são levados a identificar e expressar regularidades de sequências através de códigos, de ilustrações ou simplesmente da linguagem verbal.

Quadro 16 – Sequências numéricas no 2º ano do Ensino Fundamental.

2º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 282-283)

Já no Quadro 17 que durante o 3° ano, os estudantes continuam identificando e descrevendo padrões em sequências Numéricas recursivas. É neste momento que eles começam a utilizar operações elementares para representar a lei de correspondência de uma sequência.

Quadro 17 – Sequências numéricas no 3º ano do Ensino Fundamental.

3º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 286-287)

Os estudantes do 4° ano farão manipulações com operações elementares para perceber os padrões envolvidos nas sequências recursivas. Já o Quadro 18, detalha como os estudantes perceberão as sequências que serão formadas a partir de operações de múltiplos de um número natural e de números com o mesmo resto ao serem divididos por um número natural.

Quadro 18 – Sequências numéricas no 4º ano do Ensino Fundamental.

4º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 290-291)

Após uma pausa de dois anos com o estudo de sequências numéricas, é no 7° ano que os estudantes retomam esse conceito de modo mais aprofundado. Neste momento, como mostra o Quadro 19, eles farão o uso da linguagem algébrica para identificar as sequências que são recursivas e representar padrões existentes nelas.

Quadro 19 – Sequências numéricas no 7º ano do Ensino Fundamental.

7º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 306-307)

No 8° ano os estudantes seguem reconhecendo os padrões de sequências numéricas ou não, e, como podemos observar no Quadro 20, serão motivados a criar fluxogramas capazes de prever os próximos termos de sequências recursivas e não recursivas.

Quadro 20 – Sequências numéricas no 8º ano do Ensino Fundamental.

8º ANO - Unidade Temática: Álgebra	
Objeto(s) de Conhecimento(s)	**Habilidade(s)**
Sequências recursivas e não recursivas.	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 312-313)

A BNCC não faz nenhuma menção às sequências numéricas para o Ensino Médio. Entretanto, na competência específica de número 5 desta etapa da Educação Básica, sugere duas habilidades, uma das quais já citada neste capítulo, que envolvem os objetos de conhecimento: Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Função Afim e Função Exponencial, como podemos observar no Quadro 21.

Quadro 21 – Estudos de sequências numéricas para o Ensino Médio.

ENSINO MÉDIO	
Competência Específica 5	**Habilidade(s)**
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a Funções Afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 540-541)

Com base na análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na investigação de como o ensino de funções e sequências numéricas é proposto atualmente durante a etapa da Educação Básica, pudemos constatar que a integração desses conteúdos é um dos pontos essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

Através da apresentação das competências específicas e das habilidades de cada ano, relatamos todas as fases do ensino de funções e sequências numéricas, desde e Educação Infantil até o Ensino Médio e identificamos os objetos de conhecimento e as expectativas de aprendizagem que são esperadas nas unidades temáticas envolvidas.

Observamos que, tanto funções quanto sequências numéricas, são objetos de conhecimento fundamentais da Unidade Temática Álgebra, e reforçam a importância de uma abordagem estruturada e contínua para o ensino desses conceitos. A partir dessa compreensão, podemos afirmar que o ensino de funções e sequências numéricas contribui para a construção de um conhecimento sólido e integrado, preparando os estudantes de forma mais eficaz para futuros desafios na Matemática.

3 Função e Sequências Numéricas

3.1 Função

Muitos fenômenos no mundo real envolvem relações entre grandezas que variam e estão conectadas, sejam duas, três ou n quantidades distintas, a depender do contexto envolvido. A necessidade de compreender como uma quantidade pode depender ou variar em relação a outra, é essencial para modelar e decifrar padrões de alguns fenômenos, sejam eles físicos, econômicos, biológicos, tecnológicos, entre outros.

Para compreender as ideias associadas ao conceito de função, tais como dependência, transformação, correspondência e relação entre duas (ou mais) grandezas variáveis, precisamos entender como estas quantidades distintas, interagem e se relacionam mutuamente. Tais quantidades são chamadas de *variável independente* e *variável dependente*, sendo as quais, muitas vezes, representadas por x e y (ou $f(x)$), respectivamente. Dizer que $y = f(x)$ depende de x é o mesmo que dizer que $y = f(x)$ está em função de x.

Aliás, consideramos importante fazer uma breve discussão acerca do significado da igualdade $y = f(x)$ a qual, muitas vezes, alunos e até professores, apenas a reproduzem mecanicamente sem compreender o seu real sentido no contexto das funções. Tal abordagem faremos nos Exemplos 1 e 2.

Todas os resultados aqui apresentados, estão fundamentadas nas literaturas (LIMA, 2006), (LIMA, 2013), (LIMA et al., 2023), (MORGADO; CARVALHO, 2015), (MUNIZ NETO, 2013) e (MUNIZ NETO, 2022).

Definição 3.1. *Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função definida de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x").*

Note que, os autores Lima et al. (2023), utilizam a Teoria dos Conjuntos para definir função, na qual, os elementos x e y dos conjuntos X e Y, representam, nessa ordem, as variáveis independentes e dependentes mencionadas acima. Em Lima (2013), o autor afirma que "deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$".

Na Definição 3.1 o domínio é o conjunto X e o contra-domínio, o conjunto Y. A lei de correspondência da função é o algoritmo que descreve como a variável dependente está relacionada à variável independente e, no estudo de funções, esta lei é, geralmente, uma expressão matemática. De acordo com Lima et al. (2023) "para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva)

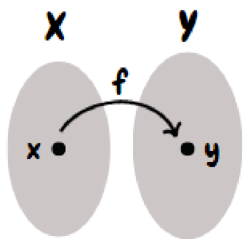
x em $f(x)$". Compreender esses "três ingredientes", as nomenclaturas, os significados dessas notações e suas múltiplas representações é essencial para o entendimento do conceito de função.

Neste trabalho, todas as funções apresentadas serão reais, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto dos números reais. Além disso, consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Exemplo 1. *Por que dizemos que $f(x) = y$?*

Podemos observar na Figura 1 que a função $f : X \to Y$ em que $x \in X$ e $y \in Y$, a notação $f(x)$ significa a imagem de x por f, como já discutimos anteriormente. Então, dizer que $f(x) = y$ é o mesmo que dizer: a função f aplicada no valor x é igual a y, ou a imagem de x é igual a y, ou ainda, o valor da função aplicado em x, vale y.

Figura 1 – Representação de f de x é igual a y.

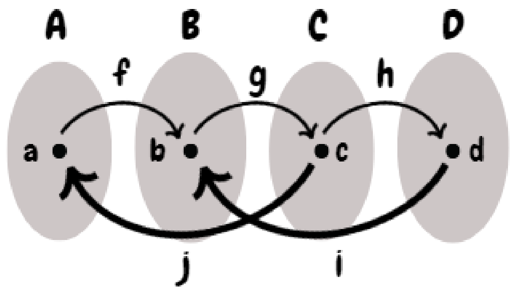


Fonte: Autor

Exemplo 2. *Funções aplicadas num valor do domínio, iguais às suas imagens.*

Analisando a Figura 2, observamos que na função $f : A \to B$, a função f aplicada no valor a é igual a b, ou seja, $f(a) = b$. Na função $g : B \to C$, a imagem de b é igual a c, ou seja, $g(b) = c$. Na função $h : C \to D$, o valor desta função aplicado em c, é d, ou seja, $h(c) = d$. Na função $i : D \to B$, a função i aplicada no valor d é igual a b, ou seja, $i(d) = b$. E, finalmente, na função $j : C \to A$, o valor desta função aplicado em c, corresponde a a, ou seja, $j(c) = a$.

Figura 2 – Representações de funções aplicadas em valores dos seus domínios.



Fonte: Autor

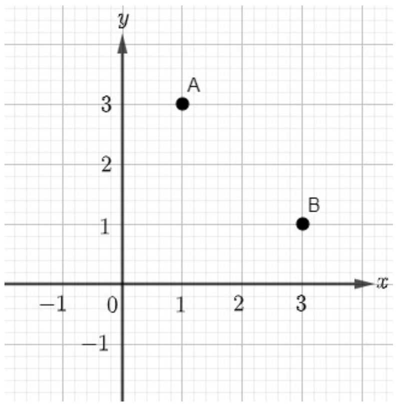
Antes de falarmos um pouco mais sobre domínio de funções, gostaríamos de fazer uma breve discussão acerca dos conceitos básicos de par ordenado, produto cartesiano e gráfico de funções. O primeiro destes pode ser compreendido como algo formado por dois objetos quaisquer em que a noção de ordem entre esses dois objetos seja respeitada. Sendo assim, o par ordenado $(-2, 5)$ é diferente do conjunto $\{-2, 5\}$, pois $\{-2, 5\} = \{5, -2\}$ enquanto $(-2, 5) \neq (5, -2)$.

Segundo os autores Lima et al. (2023), "um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a *primeira coordenada de* p e um objeto y, chamado a *segunda coordenada de* p". Dois pares ordenados serão iguais apenas quando tiverem as primeiras coordenadas iguais e as segundas coordenadas também iguais. Vale destacar que é inadequado atribuir o significado de par ordenado a um ponto do plano cartesiano quando, na verdade, o ponto é a representação gráfica do seu par ordenado correspondente.

Exemplo 3. *Pares ordenados* $a = (1, 3)$ *e* $b = (3, 1)$.

Como podemos observar, enquanto no par ordenado $a = (1, 3)$ a primeira entrada vale 1 e a segunda, é 3, no par ordenado $b = (3, 1)$, temos a primeira entrada sendo 3 e a segunda, igual a 1. Os pontos A e B, mostrados no plano cartesiano da Figura 3, representam os gráficos dos pares ordenados $a = (1, 3)$ e $b = (3, 1)$, respectivamente.

Figura 3 – Gráfico dos pares ordenados $a = (1, 3)$ e $b = (3, 1)$.



Fonte: Autor

Definição 3.2. *Dados conjuntos não vazios* X *e* Y*, seu produto cartesiano é o conjunto* $X \times Y$ *(lemos* X *cartesiano* Y*) formado por todos os pares ordenados* (x, y) *cuja primeira coordenada* x *pertence a* X *e cuja segunda coordenada* y *pertence a* Y*, ou seja*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \, e \, y \in Y\}.$$

Quando X é um conjunto finito com m elementos e Y é um conjunto finito com n elementos, ou seja, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, o conjunto $X \times Y$

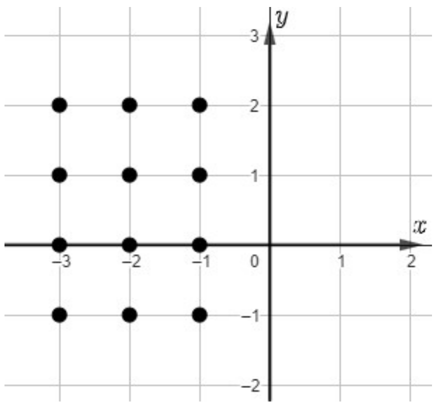
também é finito e possui $m \cdot n$ elementos, como podemos observar na disposição dos pares ordenados do produto cartesiano $X \times Y$ a seguir

$$\begin{array}{c}(x_1,y_1)(x_1,y_2)(x_1,y_3)\cdots(x_1,y_n)\\(x_2,y_1)(x_2,y_2)(x_2,y_3)\cdots(x_2,y_n)\\(x_3,y_1)(x_3,y_2)(x_3,y_3)\cdots(x_3,y_n)\\\vdots\quad\quad\vdots\quad\quad\vdots\quad\quad\quad\vdots\\(x_m,y_1)(x_m,y_2)(x_m,y_3)\cdots(x_m,y_n).\end{array}$$

Exemplo 4. *Sejam $A = \{-3,-2,-1\}$ e $B = \{-1,0,1,2\}$. Vamos encontrar o conjunto $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x,y) tais que $x \in A$ e $y \in B$.*

Ora, o produto cartesiano será o conjunto $A \times B = \{(-3,-1),(-3,0),(-3,1),(-3,2),$ $(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}$. Notemos que o número de elementos do conjunto A é 3, a quantidade de elementos do conjunto B é 4 e o número de elementos de $A \times B$ é igual a $3 \cdot 4 = 12$. Na Figura 4 podemos observar os pontos que representam o gráfico de cada par ordenado de A cartesiano B.

Figura 4 – Gráfico do produto cartesiano $A \times B$.

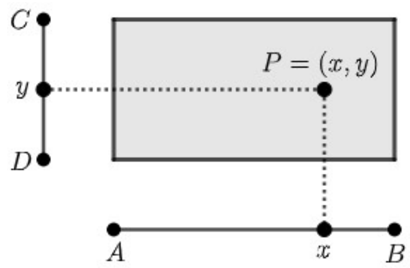


Fonte: Autor

Exemplo 5. *Considere os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, perpendiculares entre si. O que podemos concluir a respeito do produto cartesiano entre esses segmentos?*

Chamando de x todos os pontos do segmento $\overline{AB}$ e de y, os pontos de $\overline{CD}$, podemos interpretar o produto cartesiano $AB \times CD$ como sendo o retângulo formado por todos os pontos $P = (x,y)$ de interseção das perpendiculares traçadas nos pontos x e y, como mostra a Figura 5. Cada elemento (x,y) de $AB \times CD$ será representado, geometricamente, pelos pontos que formam o retângulo mencionado.

Figura 5 – Interpretação do gráfico de $AB \times CD$.



Fonte: Autor

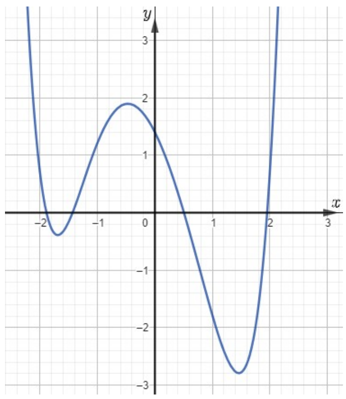
Agora que falamos de par ordenado e de produto cartesiano, estamos prontos para definir gráfico de funções.

Definição 3.3. *O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto G_f do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim,*

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Para que um subconjunto $G \subset X \times Y$ qualquer, seja considerado gráfico de uma função faz-se necessário que para cada $x \in X$ exista um único $y \in Y$ tal que o par $(x, y) \in G$. A Figura 6 mostra o gráfico de uma função real de variável real, $f : X \to Y$, com $X \subset \mathbb{R}$ pois, para todo $x \in X$ existe um, e somente um, $y \in Y$ tal que o par (x, y) pertence a $X \times Y$ com $y = f(x)$.

Figura 6 – Gráfico de uma função real de variável real $f : X \to Y$.



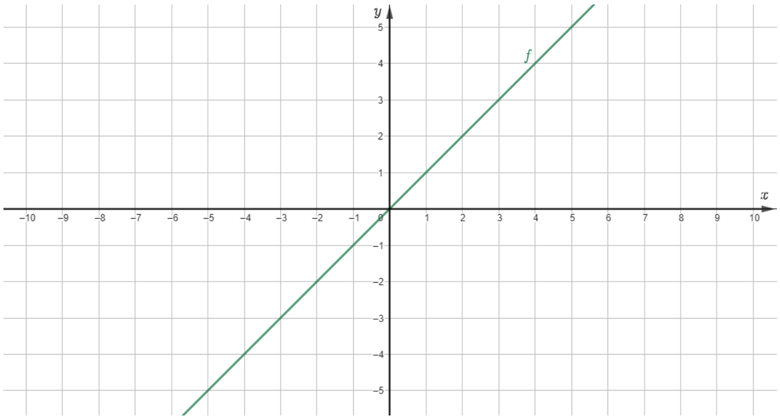
Fonte: Autor

O domínio de uma função f, o qual representaremos por $D(f)$, é o conjunto de todos os valores de x para os quais f é definida. Dessa forma, precisamos ficar atentos à lei de correspondência da função para que saibamos restringi-lo, quando necessário. Para os quatro exemplos a seguir, consideraremos as funções $f, g, h, i : D \to \mathbb{R}$. Vamos determinar o domínio de cada uma delas, considerando as suas leis de correspondências dadas.

Exemplo 6. *Função de D em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.*

A Figura 7 mostra o gráfico da função f. Note que não há quaisquer restrições para o domínio desta função, pois para quaisquer valores reais que queiramos, esta função associa tal valor a ele mesmo, portanto, $D(f) = \mathbb{R}$. A função f, é conhecida por Função Identidade, sobre a qual falaremos mais adiante.

Figura 7 – Gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

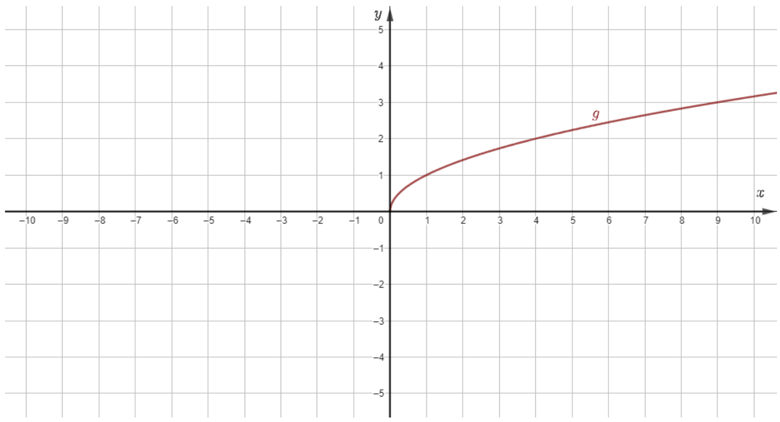


Fonte: Autor

Exemplo 7. *Função de D em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$.*

Analisando o gráfico da função g, representado na Figura 8, podemos perceber que o seu domínio não pode assumir valores negativos, pois $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$ se $x < 0$. Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

Figura 8 – Gráfico da função $g : D \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x}$.

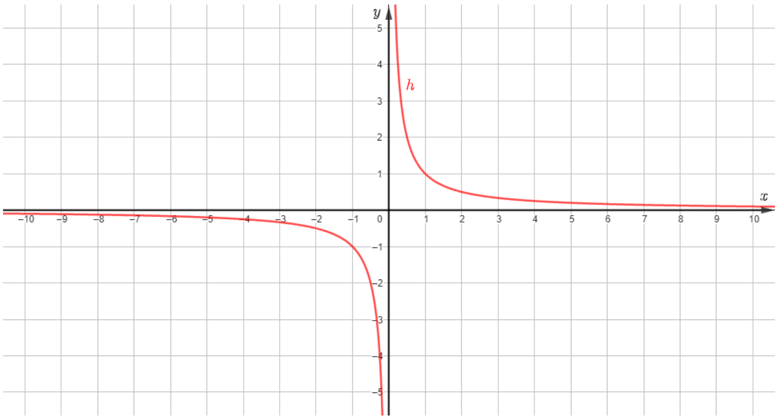


Fonte: Autor

Exemplo 8. *Função de D em $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x}$.*

O gráfico da função h está exposto na Figura 9. Nele podemos verificar que para que esta função fique bem definida, o domínio pode assumir todo valor real, exceto o número 0, uma vez que, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x \neq 0$. Assim, $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Figura 9 – Gráfico da função $h : D \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{1}{x}$.

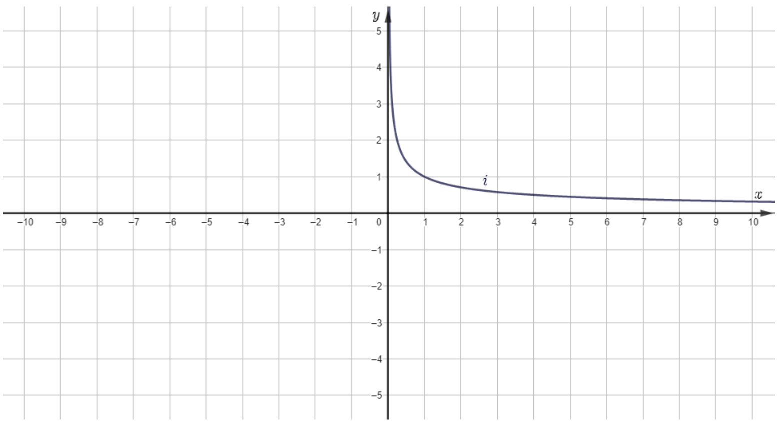


Fonte: Autor

Exemplo 9. *Função de D em $\mathbb{R}$ definida por $i(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.*

Por fim, observe no gráfico da Figura 10 que além de valores não-negativos, o domínio da função i também é restrito para o número 0. Esta função fica bem definida apenas com valores positivos do domínio, portanto, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. É importante destacar que tomando valores de x cada vez mais próximos de 0 pela direita, a curva do gráfico de i se aproxima cada vez mais do eixo vertical, mas apesar disto, jamais tocará este eixo.

Figura 10 – Gráfico da função $i : D \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



Fonte: Autor

Por via de regra, quando o domínio é omitido, fica implícito que trata-se do maior subconjunto dos números reais para o qual poderá se definir a função. No entanto, recomendamos explicitá-lo sempre, especialmente ao lidar com situações em que a função pode não estar definida para todos os valores reais, como vimos nos Exemplos 7, 8 e 9, acima.

Nessa conjuntura, queremos destacar a diferença entre domínios contínuos e discretos de funções. Os conceitos de continuidade e discretude são intrínsecos à Matemática, mas apesar de serem comumente estudados na Matemática do Ensino Superior, também aparecem no Ensino Básico, embora sejam pouco ou quase nunca explorados.

Enquanto o termo contínuo tem o significado de "ininterrupto" ou "o que não tem interrupção", o vocábulo discreto, remete a algo que é "separado" ou "posto à parte". Para Oliveira e Hoyos (2018), "Em uma expressão matemática usamos símbolos e letras para representar as operações e as variáveis envolvidas. As variáveis podem ser quantitativas ou qualitativas. Uma variável quantitativa pode ser contínua ou discreta". Oliveira e Hoyos (2018) discutem uma aplicação que ilustra de maneira intuitiva ambos os conceitos.

> O tempo é uma variável contínua, ininterrupta, pois sabemos que o tempo não pára. Entretanto, a marcação do tempo por um relógio digital não é feita de modo contínuo. Um relógio digital em cujo visor aparece apenas as horas, os minutos e os segundos, salta abruptamente de 10:25:40 (dez horas, vinte e cinco minutos e quarenta segundos) para 10:25:41 (dez horas, vinte e cinco minutos e quarenta e um segundos) e depois para 10:25:42 e assim sucessivamente. Ou seja, não há tempo algum entre, por exemplo, 10:25:40 e 10:25:41 para esse relógio digital. Neste sentido, podemos dizer que a variável "tempo" é contínua enquanto a variável "marcação do relógio" é discreta (OLIVEIRA; HOYOS, 2018, p. 3).

No que diz respeito aos domínios contínuos e discretos de funções, tal diferença, está relacionada à natureza dos conjuntos de valores de entrada (variáveis independentes) para os quais a função fica definida. Enquanto em um domínio contínuo, a função é definida para todos os valores de um intervalo qualquer de números reais, no domínio discreto, a função fica definida apenas para valores específicos dele. Em outras palavras, há "saltos" no caso em que o domínio da função é discreto, o que pode ser melhor observado na sua representação gráfica, o que faremos mais adiante. Ambos os domínios têm aplicações em diferentes contextos matemáticos e a escolha entre um ou o outro, vai depender do fenômeno que está sendo estudado.

Vejamos, a seguir, dois exemplos de funções em que no Exemplo 10 o domínio será contínuo e no Exemplo 11, discreto.

Exemplo 10. *A Senoide.*

Chamamos de Função Seno a função trigonométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, a qual chamaremos de Função Seno. Por se tratar de uma função trigonométrica os valores reais do domínio, são todos os arcos x do ciclo trigonométrico, dados em graus ou em radianos. O contradomínio é $\mathbb{R}$ e a imagem são números reais y pertencentes ao contradomínio $\mathbb{R}$, tais que $-1 \leq y \leq 1$. A Tabela 1 mostra alguns valores do domínio escolhidos aleatoriamente e o seu correspondente aplicado na função f, isto é, suas imagens.

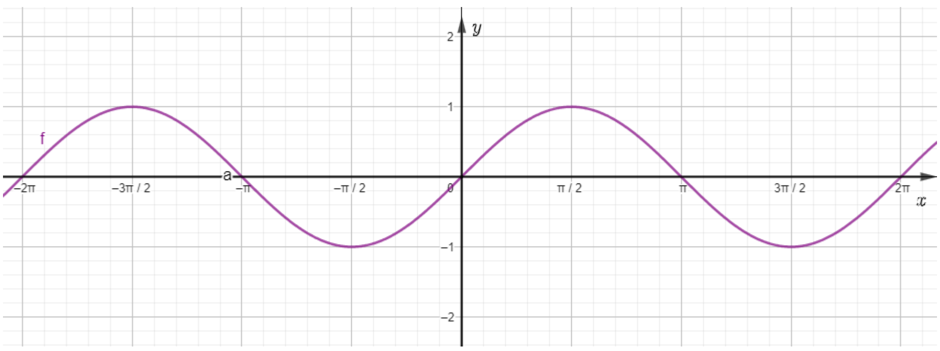
Tabela 1 – Valores do seno de alguns arcos.

Graus	Radianos	$f(x) = \operatorname{sen} x$
-1140°	$-{}^{19\pi}/_{3}$	$-{}^{\sqrt{3}}/_{2}$
-900°	-5π	0
-560°	$-{}^{28\pi}/_{9}$	$-0,34202\ldots$
-90°	$-{}^{\pi}/_{2}$	-1
0°	0	0
30°	${}^{\pi}/_{6}$	$\frac{1}{2}$
450°	${}^{5\pi}/_{2}$	1
1032°	${}^{86\pi}/_{15}$	$-0,74314\ldots$
1305°	${}^{29\pi}/_{4}$	$-{}^{\sqrt{3}}/_{2}$

Fonte: Autor.

Podemos verificar que não há quaisquer restrições para o domínio de f, uma vez que, cada elemento x do domínio, está relacionado a um único número real $f(x) = y$ do contradomínio. Note ainda que, por ter domínio contínuo, a Função Seno é contínua para todos os valores de qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ e sua representação gráfica consiste em uma curva suave sem interrupções como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.



Fonte: Autor

Antes de apresentar o Exemplo 5, traremos três definições do estudo de funções: As Funções Injetivas (ou Injetoras), Sobrejetivas (ou Sobrejetoras) e Bijetivas (ou Bijetoras).

Definição 3.4. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se Injetiva quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando*

$$x_1, x_2 \in X, \ \text{com } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 3.5. *Diz-se que uma função $f : X \to Y$ é Sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, uma função f é dita Sobrejetiva, quando o seu conjunto imagem é igual ao seu contradomínio.*

Definição 3.6. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca, entre X e Y quando é ao mesmo tempo Injetiva e Sobrejetiva.*

Exemplo 11. *A Contagem.*

Considere o conjunto finito $S = \{\bigstar, ♀, ♪, \heartsuit, \square, ☼, \spadesuit, \triangle, \infty, \blacklozenge, ♂, \bigcirc, \clubsuit\}$, cujos elementos são símbolos aleatórios. Pergunta-se: Quantos elementos possui S? É claro que, sem nenhum esforço e em poucos segundos, encontramos facilmente a solução desse problema: 13, que representa a quantidade de elementos desse conjunto. Mas o que de fato nos interessa aqui, é fazermos uma breve discussão acerca da ideia funcional que está envolvida na contagem e, mais do que isso, compreendê-la como uma função de domínio discreto.

Uma das primeiras habilidades matemáticas que nós desenvolvemos no início da nossa vida é a contagem. E sempre foi assim desde os primórdios. Caraça (1952) destaca a relevância da contagem como atividade indispensável à sobrevivência humana em quaisquer circunstâncias e período de tempo.

> Toda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exigem que, a cada momento, se façam contagens. [...] Se o homem vivesse isolado, sem vida de relação com os outros homens, a necessidade da contagem diminuiria, mas não desapareceria de todo; [...] Mas, à medida que a vida social vai aumentando de intensidade, isto é, que se tornam mais desenvolvidas as relações dos homens uns com os outros, a contagem impõe-se como uma necessidade cada vez mais importante e mais urgente (CARAÇA, 1952, p. 3).

A contagem, muito presente no nosso cotidiano, é uma aplicação de uma Função Bijetiva, conforme veremos na definição a seguir.

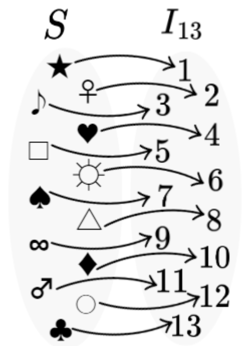
Definição 3.7. *Contar um conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os de um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$. Quando é possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto finito e que n é o número cardinal ou número de elementos de X.*

Ainda nas palavras de Morgado e Carvalho (2015), "uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma Função Bijetiva $f : X \to Y$, ou seja, uma regra que associa a cada elemento de X um elemento de Y de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X". Repare que as afirmações dos autores *"uma regra que associa a cada elemento de X um elemento de Y"* e *"cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X"* são exatamente as condições necessárias para que f seja injetiva e sobrejetiva, respectivamente.

Como $S = \{$★, ♀, ♪, ♥, □, ☼, ♠, △, ∞, ♦, ♂, ○, ♣$\}$ é um conjunto não vazio, de elementos distintos, pela Definição 3.7, a contagem dos seus elementos pode ser expressa como uma função $f : S \to \mathbb{N}$, em que $f(x)$ é o número natural associado ao $x \in S$ que está sendo contado. De acordo com Morgado e Carvalho (2015), "o resultado da contagem (ou seja, o número cardinal de X) é sempre o mesmo, não importando a contagem que seja feita".

Para ilustrar este fato, vamos realizar a contagem dos elementos do conjunto S de três formas diferentes. Na primeira, iremos contar tais elementos na ordem da esquerda para a direita, considerando a maneira que eles estão distribuídos em S. A Figura 12 representa esta contagem.

Figura 12 – Contagem da esquerda para a direita dos elementos do conjunto S.



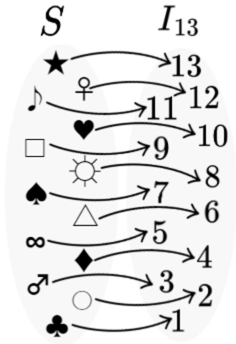
Fonte: Autor

Note que a imagem de cada elemento do domínio vai indicando a quantidade dos elementos de S no momento que está sendo feita a contagem

$$f(★) = 1, f(♀) = 2, \cdots, f(○) = 12, f(♣) = 13.$$

Agora, contaremos esses elementos na ordem da direita para a esquerda, considerando a forma que estão distribuídos em S. Na Figura 13 podemos ver esta contagem.

Figura 13 – Contagem da direita para a esquerda dos elementos do conjunto S.



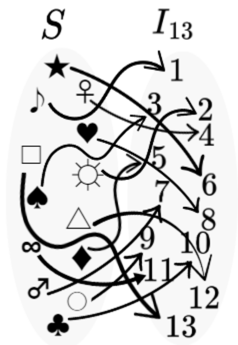
Fonte: Autor

Mais uma vez podemos observar que cada elemento do domínio vai indicando a quantidade dos elementos de S no momento que está sendo feita a contagem

$$f(\clubsuit) = 1, f(\bigcirc) = 2, \cdots, f(\text{♀}) = 12, f(\bigstar) = 13.$$

E finalmente, vamos contar estes elementos de maneira aleatória, considerando o modo que estão distribuídos em S. Podemos observar esta contagem na Figura 14.

Figura 14 – Contagem aleatória dos elementos do conjunto S.



Fonte: Autor

Repare novamente que todo elemento do domínio vai indicando a quantidade dos elementos de S no momento que está sendo feita a contagem

$$f(\text{♪}) = 1, f(\text{☼}) = 2, \cdots, f(\triangle) = 12, f(\square) = 13.$$

As Figuras 12, 13 e 14 mostram que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre elementos dos conjuntos S e I_{13}. Portanto, quaisquer que sejam os modos de escolher $x \in S$ para contar os seus elementos, sempre encontraremos 13 como última imagem, significando que 13 seja o número de elementos do conjunto S.

> Podemos dizer que a contagem se realiza fazendo corresponder sucessivamente, a cada objeto da coleção, um número da sucessão natural. Encontramo-nos assim em face da operação de "fazer corresponder",

> uma das operações mentais mais importantes e que na vida de todos os dias utilizamos constantemente. Esta operação de "fazer corresponder" baseia-se na ideia de correspondência que é, sem dúvida, uma das ideias basilares da Matemática (CARAÇA, 1952, p. 6).

Podemos perceber que a contagem é, de fato, modelada como uma função, cuja lei de correspondência é atribuir números naturais consecutivos, a partir do 1, aos elementos do conjunto que desejamos contar. O domínio desta função, que representa o conjunto que está sendo contado, é discreto, pois os seus elementos são sempre associados a números naturais (no contra-domínio da função), que é o conjunto apropriado para contar.

O conceito de bijetividade ou correspondência biunívoca que é fundamental na contagem, é igualmente essencial no estudo de Funções Inversas.

> Genericamente, dentre todas as funções $f : X \to Y$, o caso de uma bijeção é o melhor possível. Realmente, nesse caso os elementos de X e Y estão em correspondência biunívoca, ou seja, a cada elemento de X corresponde um único elemento de Y via f, e vice-versa. Quando isso ocorre, podemos obter uma outra função $g : Y \to X$, simplesmente exigindo que $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$ (MUNIZ NETO, 2022, p. 35).

Definição 3.8. *Diz-se que a função $g : Y \to X$ é a Inversa da função $f : X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.*

O Teorema 3.1 exposto a seguir, reforça que uma função f qualquer definida de X para Y é inversível se, e somente se, for bijetiva.

Teorema 3.1. *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção dada. A Função Inversa de f é a função $g : Y \to X$ tal que, para $x \in X$ e $y \in Y$, temos $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que se $f : X \to Y$ admitir inversa, então, f é uma correspondência biunívoca entre X e Y. De fato, se $g(f(x)) = x$ para qualquer que seja $x \in X$ temos,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

e, portanto, f é injetiva.

Além disso, f também é sobrejetiva pois, $f(g(y)) = y$ é válido para todo $y \in Y$, uma vez que, considerando $y \in Y$ qualquer, assumimos $g(y) = x \in X$ e teremos $f(x) = y$. Como a função é injetiva e sobrejetiva, então f é uma correspondência biunívoca.

Por outro lado, e de maneira recíproca, vamos mostrar que se $f : X \to Y$ é uma bijeção entre X e Y então, f admite a Função Inversa $g : Y \to X$. Ao definir a função g podemos verificar que tomando a função f sobrejetiva, tem-se que, para todo $y \in Y$, existe algum $x \in X$ tal que, $f(x) = y$, sendo este x único devido ao fato de f

também ser injetiva. Considerando $g(y) = x$, temos que $g : Y \to X$ é a função que faz corresponder a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que para todo $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ e, portanto, a função f é inversível. ■

Pudemos observar que uma função g é inversa da função f se, e só se, f é inversa de g. Também queremos destacar que a inversa de uma função f qualquer é única. De fato, suponhamos $g, h : Y \to X$ inversas de f. Vamos mostrar que g e h são a mesma função. Dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim,

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y) \Rightarrow g(y) = h(y), \forall y \in Y.$$

Portanto, as funções g e h são iguais. Como a função inversa de f é única, geralmente a representamos por f^{-1}. Vejamos um exemplo de Função Inversa.

Exemplo 12. *Dados os conjuntos* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $Y = \{3, 5, 7, 9, 11\}$*, consideremos a função* f *definida de* X *em* Y *por* $f(x) = 2x + 1$*.*

Note que os pares ordenados $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$ fazem parte da função f, pois

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

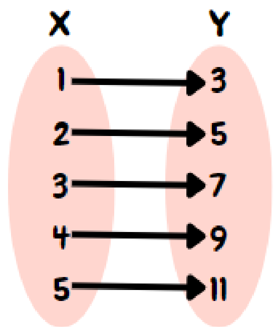
$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Podemos perceber na Figura 15 que a função f é Bijetiva e, pelo Teorema 3.1, é inversível.

Figura 15 – Função f definida de X em Y.



Fonte: Autor

Permutando x e y na função f, obtemos f^{-1},

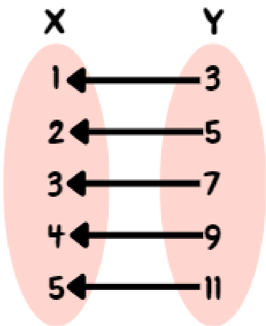
$$x = 2y + 1 \Rightarrow x - 1 = 2y \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}.$$

Repare que os pares ordenados $\{(3,1),(5,2),(7,3),(9,4),(11,5)\}$ fazem parte da função f^{-1}, pois

$$f^{-1}(3) = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$f^{-1}(5) = \frac{5-1}{2} = 2$$
$$f^{-1}(7) = \frac{7-1}{2} = 3$$
$$f^{-1}(9) = \frac{9-1}{2} = 4$$
$$f^{-1}(11) = \frac{11-1}{2} = 5.$$

A Figura 16 mostra uma representação da Função Inversa f^{-1}.

Figura 16 – Função f^{-1} definida de Y em X.



Fonte: Autor

Encontramos em (MENEZES NETO, 2021) algumas aplicações de conceitos matemáticos à Criptografia, entre eles, utilizando Função Inversa. Recomendamos essa sugestão ao leitor que se interessar. Vejamos agora nas Definições 3.9 e 3.10 quando uma função qualquer é dita crescente ou decrescente.

Definição 3.9. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ chama-se Função Crescente quando*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Definição 3.10. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ chama-se Função Decrescente quando*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

Há um único tipo de função em que, aumentos iguais dados para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, corresponderão aumentos iguais de $f(x_1)$ e $f(x_2)$. A esta função damos o nome de Afim.

Definição 3.11. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Função Afim quando existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

A constante a, é denominada *taxa de variação*, e pode ser obtida através do conhecimento das imagens de x_1 e x_2 (para quaisquer que sejam $x_1 \neq x_2$ pertencentes ao domínio de f), isto é, dos valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Ora, para x_1 e x_2, $x_1 \neq x_2$, temos que

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b.$$

Fazendo $f(x_2) - f(x_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ &= ax_2 - ax_1 \\ &= a(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A constante b, por sua vez, que pode ser chamada de *valor inicial*, é a imagem de 0 na função f, ou seja, b é o resultado que a Função Afim assume quando $x = 0$ (LIMA, 2013). Assim,

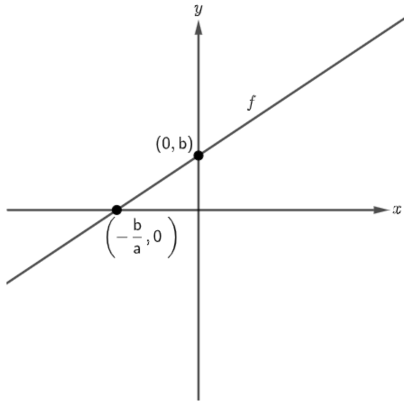
$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b.$$

Fazendo $f(x) = 0$, encontramos o número $-\frac{b}{a}$ que é chamado de *zero da função*. Alguns autores também chamam este número de *raiz da função*. Obtemos esse resultado da seguinte forma

$$f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow -b = ax \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

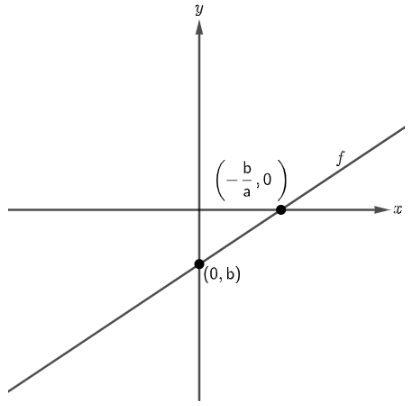
Como o valor de x que o gráfico da Função Afim toca o eixo das abscissas é $-\frac{b}{a}$ e o valor de y que este mesmo gráfico toca o eixo das ordenadas é b, as coordenadas dos pontos do gráfico de f, que intersectam os eixos dos x e dos y são, nessa ordem, $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e $(0, b)$. Para $a > 0$, as Figuras 17 e 18 mostram essas coordenadas nos gráficos da função f, quando $b > 0$ e $b < 0$, respectivamente.

Figura 17 – Gráfico da Função Afim para $a > 0$ e $b > 0$.



Fonte: Autor

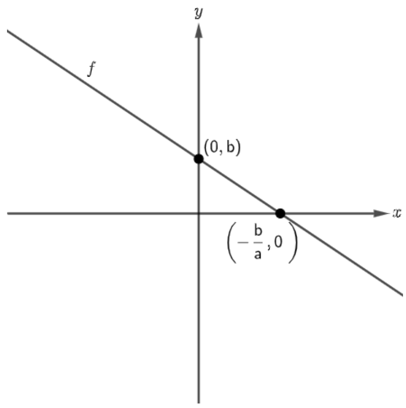
Figura 18 – Gráfico da Função Afim para $a > 0$ e $b < 0$.



Fonte: Autor

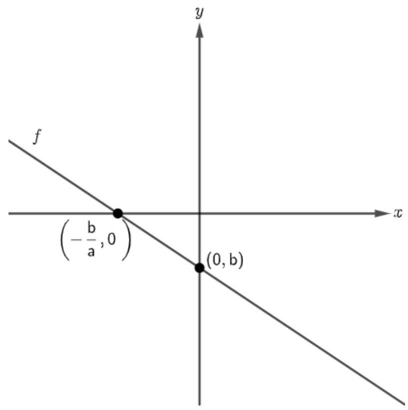
E para $a < 0$, as Figuras 19 e 20 exibem tais coordenadas nos gráficos da função f, quando $b > 0$ e $b < 0$, respectivamente.

Figura 19 – Gráfico da Função Afim para $a < 0$ e $b > 0$.



Fonte: Autor

Figura 20 – Gráfico da Função Afim para $a < 0$ e $b < 0$.

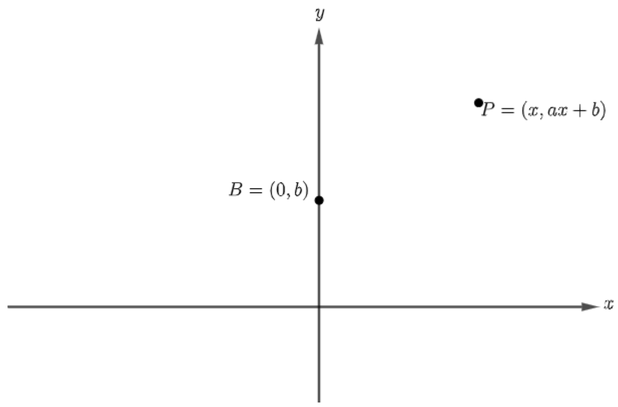


Fonte: Autor

Teorema 3.2. *O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $x \mapsto ax + b$ é sempre uma reta.*

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, vamos considerar inicialmente dois pontos B e P, representados na Figura 21, cujas coordenadas são, nessa ordem, $(0, b)$ e $(x, ax + b)$.

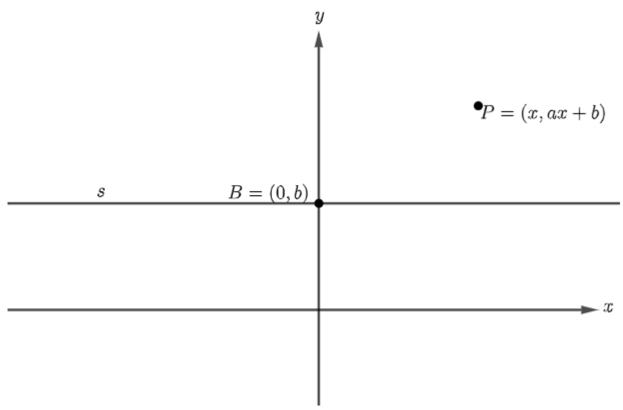
Figura 21 – Valor inicial b e um ponto P qualquer do gráfico de f.



Fonte: Autor

É fácil ver que ambos os pontos pertencem ao gráfico de f, pois $f(0) = b$ é o ponto do gráfico que intersecta o eixo das ordenadas e $f(x) = ax + b$ representa um ponto para qualquer x no domínio da Função Afim. Traçando a reta s, passando por B e paralela ao eixo das abscissas, obtemos o gráfico da Figura 22.

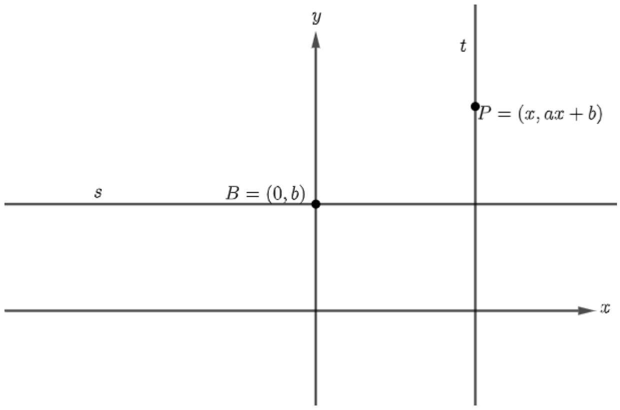
Figura 22 – Reta s que passa pelo ponto B e é paralela ao eixo x.



Fonte: Autor

Agora, traçando a reta t, passando por P e paralela ao eixo das ordenadas, obtemos o gráfico mostrado na Figura 23.

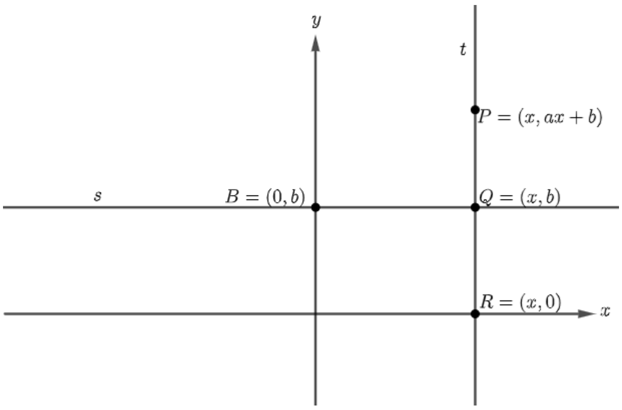
Figura 23 – Reta t que passa pelo ponto P e é paralela ao eixo y.



Fonte: Autor

Chamando de Q o ponto de interseção das retas s e t e indicando por R, o ponto de interseção da reta t com o eixo das abscissas, podemos verificar na Figura 24 que $\overline{BQ} = x$, $\overline{QR} = b$ e $\overline{PR} = ax + b$.

Figura 24 – Medidas dos segmentos $\overline{BQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{PR}$.



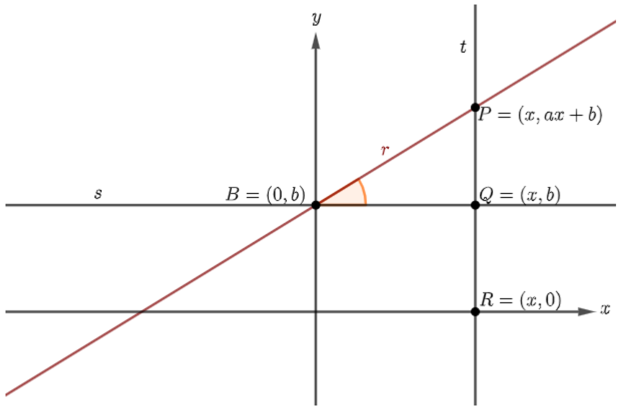
Fonte: Autor

Como $\overline{PQ} = \overline{PR} - \overline{QR}$, implica $\overline{PQ} = ax + b - b = ax$. Então, a razão de $\overline{PQ}$ para $\overline{BQ}$ é

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{ax}{x} = a.$$

A Figura 25, mostra a reta r que passa por B e P.

Figura 25 – Reta r que passa por B e P.



Fonte: Autor

No triângulo BPQ, repare que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo $P\hat{B}Q$, é sempre uma constante real, igual a taxa de variação da Função Afim. Ora, para que esse ângulo não se altere, é necessário que, quaisquer que sejam os pontos do gráfico de f, só poderão se mover, se estiverem sobre uma reta (a reta r). ■

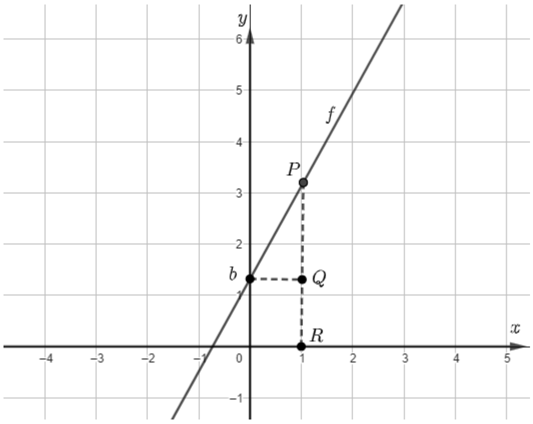
Analisando o gráfico de uma Função Afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ conseguimos, facilmente, identificar no seu gráfico a constante $b = f(0)$, pois, como já vimos, é sempre no valor b que a reta do gráfico de f corta o eixo vertical. Talvez, seja esta a razão, dessa constante ser chamada de valor inicial. No entanto, como podemos identificar e compreender, a taxa de variação a, no gráfico da Função Afim? Vamos utilizar um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema **??**.

Seja P o ponto do gráfico de f para $x = 1$. Dessa forma,

$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b.$$

Analisando a Figura 26, podemos verificar que se $\overline{PR} = a + b$ e $\overline{QR} = b$ então, $\overline{PQ} = a$. Dessa forma, a taxa de variação indica o quanto a função varia (cresce, se mantém constante ou decresce) cada vez que x aumenta uma unidade.

Figura 26 – Representação gráfica da taxa de variação.



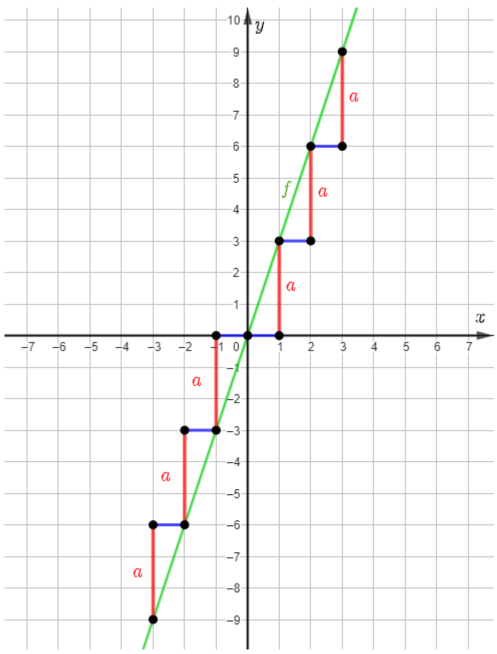
Fonte: Autor

Vejamos nos exemplos 13, 14 e 15, a seguir, a taxa de variação das funções f, g e h, cujos domínios e contradomínios são os reais. Em cada figura, as cores verde, azul e vermelha representam, nessa ordem, os gráficos dessas funções, os aumentos de uma unidade em x e as suas taxas de variações correspondentes.

Exemplo 13. *Taxa de variação de uma Função Afim crescente.*

Analisando a Figura 27 podemos perceber no gráfico da função f, que a cada aumento de uma unidade no x, a função aumenta 3 unidades em $f(x)$. Portanto, a taxa de variação desta função é $a = 3$.

Figura 27 – Taxa de variação de uma Função Afim crescente.



Fonte: Autor

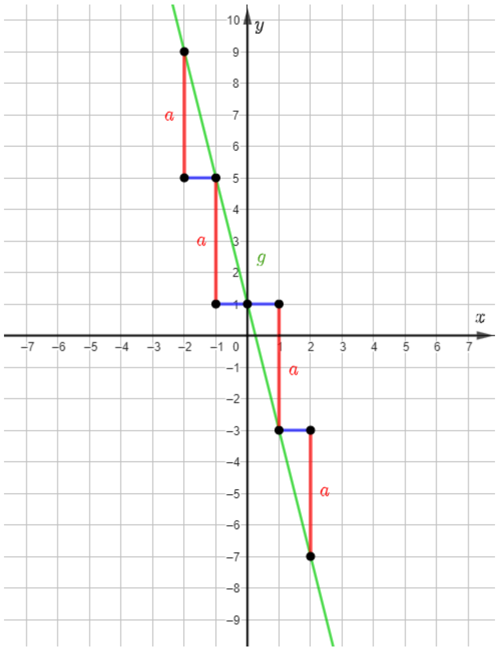
Como para $x = 0$ esse gráfico intersecta o eixo das ordenadas também em $y = 0$, temos que, o valor inicial $b = 0$. Dessa forma, a lei de correspondência desta função é facilmente interpretada por $f(x) = 3x$.

A função f é um caso particular de Função Afim, chamada de *Função Linear*, conforme veremos brevemente.

Exemplo 14. *Taxa de variação de uma Função Afim decrescente.*

No gráfico de g, indicado na Figura 28, podemos observar que, a cada aumento de uma unidade em x, a função diminui 4 unidades em $g(x)$ e, por este fato, dizemos que a taxa de variação desta função é $a = -4$.

Figura 28 – Taxa de variação de uma Função Afim decrescente.



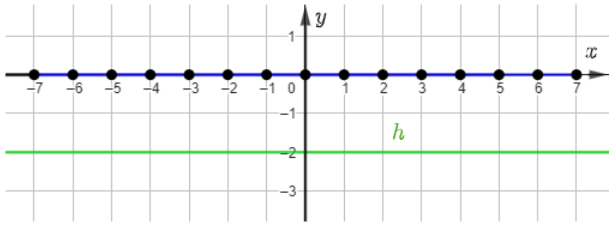
Fonte: Autor

Além disso, temos que o gráfico de g corta o eixo vertical em $y = 1$, ou seja, $b = 1$. Assim, a lei de correspondência desta função é $g(x) = -4x + 1$.

Exemplo 15. *Taxa de variação de uma Função Afim constante.*

Analisando o gráfico da função h exibido na Figura 29, percebemos que sempre que aumentamos uma unidade em x, a função h não aumenta e nem diminui, ou seja, mantém-se constante para todo valor do seu domínio.

Figura 29 – Taxa de variação de uma Função Afim constante.



Fonte: Autor

Neste caso, podemos dizer que a taxa de variação desta função é $a = 0$. O gráfico mostra que $y = -2$ quando $x = 0$, ou seja, o valor inicial $b = -2$. Assim, a lei de correspondência desta função é $h(x) = -2$.

Gostaríamos de fazer uma observação sobre uma nomenclatura que consideramos importante. Mesmo nos dias atuais alguns livros de Matemática, especialmente livros didáticos, ainda tratam erroneamente o termo *taxa de variação* como sinônimo de *coeficiente angular*. Lima (2013) explica o motivo pelo qual não devemos confundir essas terminologias e ainda destaca onde, de fato, é apropriado utilizar esses termos.

> Se a Função Afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número a de *coeficiente angular* da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é *taxa de variação* (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta (LIMA, 2013, p. 83).

Acreditamos que seja essencial, professores de Matemática exercerem criticidade em relação à forma como os livros apresentam os conceitos. Além disso, também consideramos relevante valorizar o ensino pleno dos objetos de conhecimento, dando importância não apenas a Matemática que está sendo ensinada mas ao significado, a grafia e a pronúncia correta dos vocábulos que estão sendo estudados.

A seguir mostraremos alguns casos particulares de Funções Afins.

Definição 3.12. *Uma Função Afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Função Linear quando $b = 0$, ou seja, $f(x) = ax$ para todo $a \in \mathbb{R}^*$.*

A Função Linear é o modelo matemático apropriado para modelar e resolver os problemas de proporcionalidade. Quando dizemos que $f(x) = ax$ $(y = ax)$, para todos os valores reais de x, estamos afirmando com outras palavras, que a variável y é diretamente proporcional à variável x, desde que exista um número a conhecido como *constante de proporcionalidade* que mantenha essa relação verdadeira para todos os valores de x (LIMA et al., 2023).

Como $b = 0$, a reta do gráfico dessa função, necessariamente passará pela origem do plano cartesiano como vimos, por exemplo, na Figura 27.

Definição 3.13. *Uma Função Afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Função Identidade quando $a = 1$ e $b = 0$, ou seja, $f(x) = x$.*

Quando a taxa de variação de uma Função Linear é igual a 1, temos um caso particular da Função Linear, a Função Identidade, que associa todo elemento do seu domínio a ele próprio. O gráfico desta função é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, é uma linha reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e tem uma inclinação de 45° em relação ao eixo horizontal.

Como cada elemento do domínio tem um único correspondente no contradomínio (o seu igual), podemos verificar que elementos diferentes do domínio jamais terão imagens iguais, por isto, esta função é injetora. Por outro lado, todo elemento no contradomínio é correspondido o próprio elemento no domínio, fazendo com que a imagem desta função seja exatamente igual ao seu contradomínio. Dessa forma, a Função Identidade é sobrejetora e, portanto, bijetora. Note ainda que a Função Identidade é a sua própria inversa, pois $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x no domínio de f.

Definição 3.14. *Uma Função Afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se constante quando $a = 0$, ou seja, $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Esta é a função em que a saída (variável dependente) não depende da entrada (variável independente) pois o valor da função é sempre o mesmo para todos os valores do domínio. Como a taxa de variação é nula, a linha reta do seu gráfico é sempre paralela ao eixo horizontal, conforme exposta na Figura 29. É claro que se $b = 0$, o gráfico da função $f(x) = 0$ é a reta coincidente ao eixo das abscissas.

3.2 Sequências Numéricas

O estudo de sequências numéricas é muito relevante para a Matemática e no nosso cotidiano, é muito comum lidar com diversas situações envolvendo sequências (ou sucessões). Citaremos alguns exemplos.

Exemplo 16. *Sequência dos dias da semana*

$$(domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado).$$

Exemplo 17. *Sequência dos meses do ano*

$$(janeiro, fevereiro, março, \cdots, novembro, dezembro).$$

Exemplo 18. *Sequência dos anos bissextos do século XXI em diante*

$$(2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, \cdots).$$

Cada informação da sequência é também conhecida como *termo* e é conveniente utilizar variáveis indexadas para representá-los. Assim, a_n é o n-ésimo termo da sequência, isto é, o n^{o} número da lista, conforme descrito por (MUNIZ NETO, 2013). Dessa forma, a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo, a_3, o terceiro, e assim sucessivamente. Aliás, de acordo com o Dicionário Online de Português, a palavra sucessivamente significa "de modo sucessivo, contínuo; sem interrupção; ordenadamente;", entre outros.

Analisando da esquerda para a direita, os termos das sequências dos Exemplos 16 e 17, podemos identificar o primeiro, o segundo, até o seu último termo, sem dificuldades. Também vale destacar que nem toda sequência possui os seus termos formados apenas por números, no entanto, quando isso ocorre, a chamamos de *sequência numérica* ou *sequência de números reais*, como é o caso da sequência mostrada no Exemplo 18.

Queremos destacar uma sutil diferença entre as representações de conjuntos e de sequências. Enquanto conjuntos têm elementos que ficam entre chaves, as sequências possuem termos, conforme já mencionamos, os quais ficam entre parenteses. Como não há quaisquer exigências no que diz respeito a ordem dos elementos de um conjunto, $\{1, 9, 8, 6\}$ e $\{9, 6, 1, 8\}$, por exemplo, são iguais. No entanto, os termos das sequências são ordenados e, desse modo, $(1, 9, 8, 6)$ é diferente de $(9, 6, 1, 8)$.

Uma sequência numérica é, como as próprias palavras sugerem, uma lista ordenada de números reais, que pode ser finita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ ou infinita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, conforme traremos mais detalhes a posteriori. Essa lista é uma função de domínio discreto, como veremos na definição a seguir.

Definição 3.15. *Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Note que, a Definição 3.15, diz que uma sequência numérica é uma função em que o domínio é o conjunto dos números naturais, o contra-domínio, o conjunto dos números reais e a lei de correspondência é $a(n) = a_n$. Em Lima (2013), o autor reforça que sequência é a função pela qual faz corresponder a cada número natural n o número real a_n, chamado n-ésimo termo da sequência, isto é,

$$1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, 3 \mapsto a_3, \cdots, n \mapsto a_n.$$

Ora, se toda sequência é uma função, e como já discutimos anteriormente, toda função possui necessariamente "três ingredientes" que são domínio, contra-domínio e lei de correspondência, então, por transitividade, toda sequência consta desses mesmos ingredientes.

Quando o domínio da sequência é formado por números naturais de 1 até n, ou seja, $D(a) = I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, estamos diante da Sequência Finita de n termos $a : I_n \to \mathbb{R}$. Já se o domínio for o conjunto dos números naturais, isto é, $D(a) = \mathbb{N}$, teremos a Sequência Infinita $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. De acordo com Muniz Neto (2013) também é comum denotá-las por $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ ou $(a_k)_{k \geq 1}$, quando elas são finitas ou infinitas, respectivamente, e a_k representa o k^{o}, isto é, o k-ésimo termo da sequência.

Utilizaremos alguns exemplos de sequências numéricas para explorar esse objeto de estudo.

Exemplo 19. *Sequência de Fibonacci $(f_n)_{n \geq 1}$ em que,*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots).$$

Exemplo 20. *Sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ em que,*

$$(37, 5, 39, 61, 13, 22, \cdots).$$

Algumas sequências são definidas por recorrência, ou seja, uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) seu(s) antecessor(es) imediato(s). Quando isso ocorre, podemos dizer também que a sequência foi definida recursivamente, como é o caso da sequência do Exemplo 19. Note que a Sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 3. \end{cases}$$

Para $n = 3$, tem-se

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2.$$

Para $n = 4$, tem-se

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3.$$

Para $n = 5$, tem-se

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5.$$

Para $n = 6$, tem-se

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8.$$

Para $n = 7$, tem-se

$$f_7 = f_6 + f_5 = 8 + 5 = 13.$$

E assim, sucessivamente. Portanto, a Sequência de Fibonacci definida recursivamente é $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots)$.

Mas existem outras maneiras de definir uma sequência. Elas tanto podem ser *aleatórias*, como também através de *fórmulas posicionais*, isto é, quando admitem uma fórmula fechada. Uma sequência é Aleatória, quando não é possível prever nenhum dos seus termos, exatamente como ocorre no Exemplo 20. Perceba que não há nenhum padrão ou regularidade entre os seus termos, o que torna impossível saber qual será o sétimo, o oitavo, ou qualquer outro termo dessa sequência.

Definição 3.16. *Dizemos que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ está definida por uma fórmula posicional se os valores $a_n \in \mathbb{R}$ forem dados por uma fórmula em n.*

Vamos discutir sobre a fórmula posicional, isto é, a fórmula fechada da "sequência dos anos bissextos do século XXI em diante", abordada no Exemplo 18, um dos primeiros que utilizamos para abrir esta seção,

$$(2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, \cdots).$$

Os anos bissextos são números múltiplos de 4 e, além disso, ocorrem sempre de quatro em quatro anos. Chamando de x_n a sequência formada pelos anos bissextos a partir do século XXI, temos que $x_1 = 2004$, pois este século teve início no ano de 2001, que juntamente com os anos 2002 e 2003, não são múltiplos de 4. Podemos determinar o termos que quisermos dessa sequência, através da fórmula $x_n = 4n + 2000$. Assim, se quisermos saber o 50° termo desta sequência, basta fazermos

$$x_{50} = 4 \cdot 50 + 2000 = 200 + 2000 = 2200.$$

Exemplo 21. *Sequência $(h_n)_{n\geq 1}$ em que,*

$$(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \cdots).$$

Ora, a fórmula posicional da sequência do Exemplo 21, é

$$h_n = \begin{cases} n, se\ n\ ímpar \\ (-1)^{n-1}n, se\ n\ par \end{cases}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela fórmula posicional desta sequência, o 1925° e o 1910° termos são, respectivamente, $p_{1925} = 1925$ e $p_{1910} = -1910$.

Exemplo 22. *Sequência $(d_n)_{1\leq n\leq 10}$ em que,*

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}\right).$$

Já a fórmula posicional da sequência do Exemplo 22, é

$$d_n = \frac{n}{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}, n \leq 10.$$

É claro que a sequência $(d_n)_{1\leq n\leq 10}$ possui apenas dez termos. Mas, se não houvesse restrição para n teríamos, por exemplo, que o *septingentésimo trigésimo sexto* e o *milésimo terceiro* termos seriam, $d_{736} = \frac{736}{737}$ e $d_{1003} = \frac{1003}{1004}$, nessa ordem.

Exemplo 23. *Sequência dos números primos positivos $(p_n)_{n\geq 1}$ em que,*

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \cdots).$$

Exemplo 24. *Sequência $(r_n)_{1\leq n\leq 10}$ dos números irracionais positivos, formada por raízes quadradas de números inteiros menores do que 20*

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}\right).$$

Quando a sequência admite uma fórmula posicional, é evidente que tal fórmula representa a lei de correspondência da sequência. O mesmo ocorre quando a sequência é definida por meio de uma recorrência. Mas o que dizer sobre as sequências apresentadas nos Exemplos 23 e 24? Possuem lei de correspondência? Julgamos pertinente fazer esse tipo de indagação, sobretudo em sala de aula, pois ao realizar algumas tentativas frustradas em determinar uma fórmula fechada para alguma dessas sequências, é natural que, por descuido, surjam respostas afirmando que não!

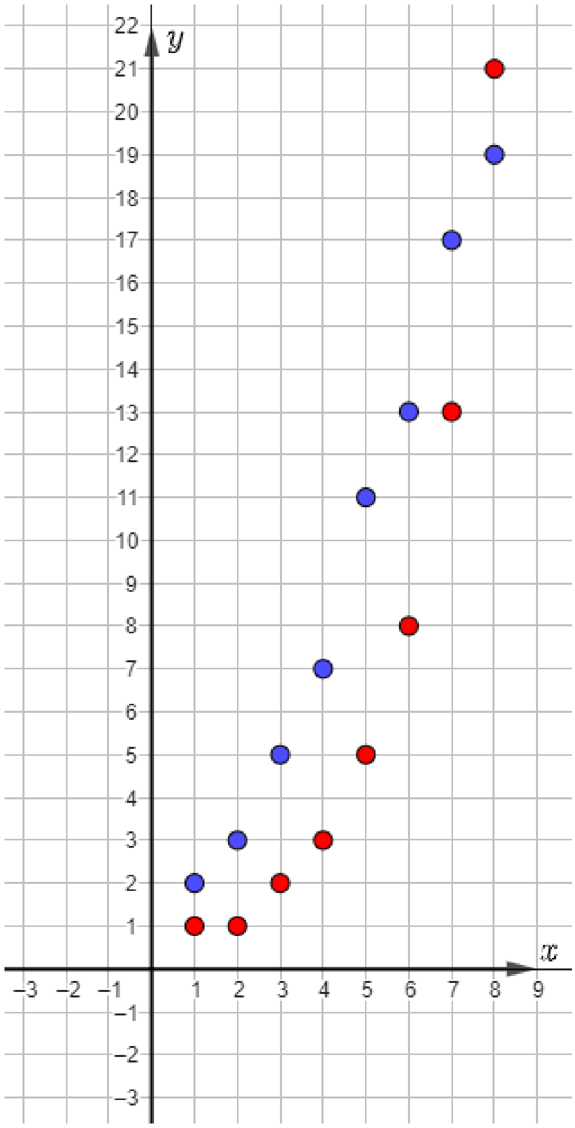
Ora, sabemos que para toda sequência, há não apenas domínio e contra-domínio, mas também lei de correspondência. Recordemos também que não há obrigatoriedade alguma para que a lei de formação de uma função seja uma fórmula fechada.

Há mais de 2000 anos atrás, o matemático grego Euclides de Alexandria conseguiu provar que existe uma quantidade infinita de números primos. No entanto, até os dias atuais, nunca foi encontrada uma fórmula fechada para estes números, o que torna este problema um dos mais enigmáticos e desafiadores do mundo. Mesmo ainda não existindo uma fórmula posicional para esses números, perceba que a regra *"sequência formada por números primos positivos"*, mesmo que apresentada na sua linguagem verbal, faz corresponder a cada número natural um número primo, ou seja, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 5$, $\cdots$, o que caracteriza como lei de correspondência da sequência do Exemplo 23.

De semelhante modo, repare que a lei de correspondência do Exemplo 24, *"a sequência deverá conter números irracionais positivos, que sejam raízes quadradas de números inteiros menores do que 20"* é suficiente para descrever como as variáveis dependentes, que são as raízes quadradas cujos radicandos inteiros positivos não sejam quadrados perfeitos, estejam relacionadas às variáveis independentes 1 para o primeiro termo, 2 para o segundo termo, até o 15 para o décimo quinto termo, pertencentes ao domínio da sequência.

A Figura 30 mostra parte dos gráficos das Sequências dos Números Primos Positivos e de Fibonacci, cujos pontos estão destacados nas cores azul e vermelha, respectivamente. As coordenadas dos pontos da Sequência dos Números Primos Positivos são $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $\cdots$, $(8, 19)$ enquanto as coordenadas dos pontos da Sequência de Fibonacci, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $\cdots$, $(8, 21)$.

Figura 30 – Gráficos das Sequências dos Números Primos e de Fibonacci para $x \in I_8$.



Fonte: Autor

Como as sequências possuem domínio discreto, não se pode traçar quaisquer linhas interligando algum desses pontos. Não faz sentido porque há saltos entre uma váriável independente e outra. Observe que nos Exemplos 22 e 24 as sequências são finitas cujos domínios são, nessa ordem, os conjuntos I_{10} e I_{15}. Enquanto as sequências dos Exemplos 19, 20, 21 e 23, são infinitas e, portanto, seus domínios são $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais.

Prosseguindo com o estudo das sequências numéricas, abordaremos as Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), que são casos especialmente curiosos dessas sequências. Focaremos apenas na primeira, devido ao propósito deste trabalho.

Definição 3.17. *Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é comumente, representada pela letra r.*

Se r for maior do que zero, dizemos que a PA é crescente mas, se r for igual a zero, então a PA é constante e, finalmente, se r for menor do que zero, dizemos que a PA é decrescente. As sequências numéricas $\left(2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4, \cdots\right)$, $(\pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \cdots)$ e $(25, 21, 17, 13, 9, 5)$, são exemplos de Progressões Aritméticas de razões $\frac{1}{3}$, 0 e -4. Portanto são crescente, constante e decrescente, respectivamente.

O resultado que iremos enunciar a seguir é conhecido como Termo Geral de uma Progressão Aritmética.

Teorema 3.3. *Numa Progresão Aritmética em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Demonstração. Vamos demonstrar utilizando o Princípio de Indução Finita.

i) Para $n = 1$, temos

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r \text{ (sentença verdadeira).}$$

ii) Suponhamos a validade da fórmula para $n = k$ e provaremos que vale para $n = k + 1$.

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \text{ (hipótese de indução).} \tag{3.1}$$

Por definição, temos que

$$a_{k+1} = a_k + r. \tag{3.2}$$

Substituindo a Equação 3.1 na Equação 3.2, e colocando r em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (a_1 + (k-1) \cdot r) + r \\ &= a_1 + [(k-1) + 1]r \\ &= a_1 + [(k+1) - 1]r. \end{aligned}$$

Portanto, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Pelo Teorema 3.3, podemos escrever qualquer termo da PA, a partir do segundo, em função do primeiro termo a_1 e da razão r. Assim,

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 + r \\ a_3 & = & a_1 + 2 \cdot r \\ a_4 & = & a_1 + 3 \cdot r \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Esses resultados também podem ser observados da seguinte forma. Considere uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$ cuja razão vale r.

Note que $a_2 - a_1 = r$, implica

$$a_2 = a_1 + r. \tag{3.3}$$

Do mesmo modo, $a_3 - a_2 = r$, implica

$$a_3 = a_2 + r. \tag{3.4}$$

Substituindo a Equação 3.3 na Equação 3.4, temos

$$a_3 = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r. \tag{3.5}$$

Analogamente, perceba que $a_4 - a_3 = r$, implica

$$a_4 = a_3 + r. \tag{3.6}$$

De modo similar, substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.6, temos

$$a_4 = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r. \tag{3.7}$$

Estes resultados continuarão sendo sempre verdadeiros pois utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma PA, obtemos

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 + r \\ a_3 & = & a_2 + r \\ a_4 & = & a_3 + r \\ \vdots & = & \vdots \\ a_n & = & a_{n-1} + r. \end{array}$$

Somando parcela a parcela, essas $n - 1$ igualdades, ficamos com

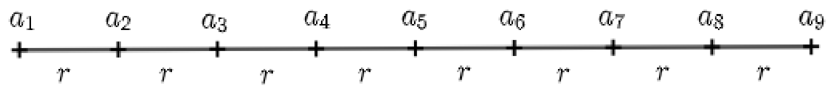
$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n - 1) \cdot r \tag{3.8}$$

Cancelando os termos iguais da Equação 3.8, obtemos

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Agora, iremos explorar uma maneira eficiente de representar os termos de uma Progressão Aritmética: organizando-os ao longo de uma linha reta, dividida em intervalos de comprimento igual à razão da PA, como mostra a Figura 31.

Figura 31 – Representação de uma PA de razão r.



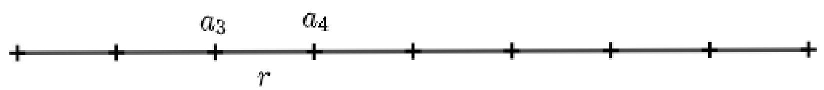
Fonte: Autor

Veremos agora alguns exemplos de Progressão Aritmética que podem ser facilmente interpretados e resolvidos quando representamos os seus termos sob uma linha reta. A ideia central aqui é compreender a relação existente entre os termos de uma PA sem a necessidade do uso de quaisquer fórmulas.

Exemplo 25. *Represente em uma reta o deslocamento do 3º para o 4º termo de uma Progressão Aritmética.*

Para avançar um único termo em uma PA, basta somar uma vez a razão, como mostra a Figura 32. Como estamos interessados em sair do terceiro para o quarto termo, temos $a_4 = a_3 + r$, pois ao passar de a_3 para a_4 avançamos um único termo.

Figura 32 – Deslocando-se um termo na Progressão Aritmética.



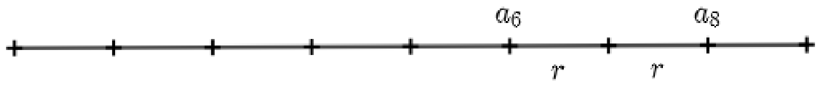
Fonte: Autor

Note que se quiséssemos retroceder um termo, ou seja, voltar do 4º termo para o 3º, por exemplo, em uma PA qualquer, teríamos apenas que subtrair uma vez a razão ficando com $a_3 = a_4 - r$.

Exemplo 26. *Represente em uma reta o deslocamento do 6º para o 8º termo de uma Progressão Aritmética.*

Agora, para avançar dois termos em uma Progressão Aritmética, basta somar duas vezes a razão, conforme exposto na Figura 33. Desta vez, como estamos interessados em sair do sexto para o oitavo termo, temos $a_8 = a_6 + 2r$, pois ao passar de a_6 para a_8 avançamos dois termos.

Figura 33 – Deslocando-se dois termos na Progressão Aritmética.



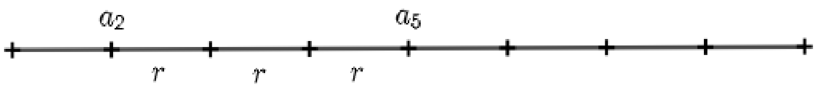
Fonte: Autor

Perceba que se quiséssemos retroceder dois termos, ou seja, voltar do 8º para o 6º termo, em uma PA qualquer, teríamos simplesmente que subtrair duas vezes a razão ficando com $a_6 = a_8 - 2r$.

Exemplo 27. *Represente em uma reta o deslocamento do 2º para o 5º termo de uma Progressão Aritmética.*

Desta vez para avançar três termos em uma PA, basta somar três vezes a razão, como exibido na Figura 34. Ora, como estamos interessados em sair do segundo para o quinto termo, temos $a_5 = a_2 + 3r$, pois ao passar de a_2 para a_5 avançamos três termos.

Figura 34 – Deslocando-se três termos na Progressão Aritmética.



Fonte: Autor

Repare que se quiséssemos retroceder três termos, ou seja, voltar do 5º para o 2º termo em uma PA qualquer, teríamos somente que subtrair três vez a razão ficando com $a_2 = a_5 - 3r$. Vamos agora explorar, no Teorema 3.4, a soma de todos os termos de uma Progressão Aritmética finita.

Teorema 3.4. *Sendo a_1 o primeiro termo, a_n o n-ésimo termo e n o número de termos de uma Progressão Aritmética de razão r, a soma S de todos os seus termos é*

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Considere $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r. Chamando de S a soma de todos os termos dessa PA e escrevendo duas vezes essa expressão, uma na ordem crescente e a outra, na ordem decrescente dos seus termos, ficamos com

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Somando termo a termo essas expressões, obtemos

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Por outro lado, em uma PA a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos, por isso, cada parênteses pode ser trocado pela soma dos extremos como faremos a seguir

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Mas, as n adições feitas anteriores são todas iguais, e portanto podemos escrever

$$2S = (a_1 + a_n)n \quad \Rightarrow \quad S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

■

Vamos utilizar a expressão que fornece a soma de todos os termos de uma PA finita para encontrar a lei de correspondência de duas sequências notáveis, as quais veremos nos exemplos 28 e 29 a seguir.

Exemplo 28. *Sequência dos Números Triangulares* $(t_n)_{n\geq 1}$ *em que,*

$$(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \cdots).$$

Exemplo 29. *Sequência dos Números Quadrangulares* $(q_n)_{n\geq 1}$ *em que,*

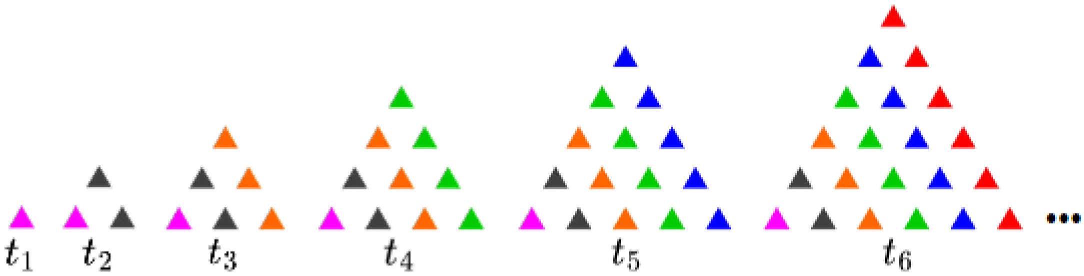
$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \cdots).$$

Analisando a Sequência dos Números Triangulares $(t_n)_{n\geq 1}$, apresentada no Exemplo 28, podemos verificar que cada termo n é obtido através da soma de todos os números naturais de 1 até n. Ou seja,

$$\begin{aligned}
t_1 &= 1 \\
t_2 &= 1 + 2 = 3 \\
t_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\
t_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
t_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\
t_6 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \\
\vdots &= \qquad\quad \vdots \\
t_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n
\end{aligned}$$

A Figura 35 mostra a formação de parte da Sequência dos Números Triangulares.

Figura 35 – Representação da Sequência dos Números Triangulares.



Fonte: Autor

É fácil ver que a fórmula posicional da sequência $(t_n)_{n\geq 1}$ é a soma dos n primeiros números naturais de 1 até n. Como $(1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$ é uma PA de razão 1, para obtermos a lei de correspondência da Sequência dos Números Triangulares, basta calcular a soma dos termos dessa PA, utilizando

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{3.9}$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos

$$a_n = 1 + (n-1)1 \Rightarrow a_n = n. \tag{3.10}$$

Agora, substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.9) ficamos com

$$S = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Logo, a lei de correspondência da Sequência dos Números Triangulares é

$$(t_n)_{n\geq 1} = \frac{n^2+n}{2}. \tag{3.11}$$

Assim, podemos encontrar facilmente o número triangular que queiramos. Por exemplo, o centésimo número triangular é

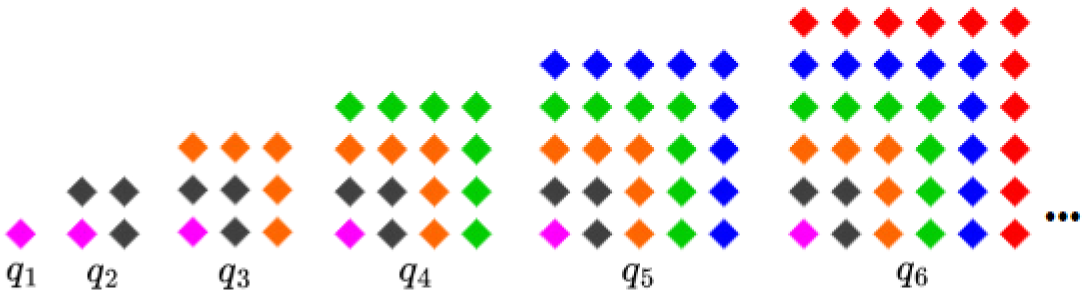
$$t_{100} = \frac{(1+100)100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Já o Exemplo 29, mostra que a Sequência dos Números Quadrangulares $(q_n)_{n\geq 1}$, é gerada a partir da soma de números ímpares positivos.

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1\\
q_2 &= 1+3=4\\
q_3 &= 1+3+5=9\\
q_4 &= 1+3+5+7=16\\
q_5 &= 1+3+5+7+9=25\\
q_6 &= 1+3+5+7+9+11=36\\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots\\
q_n &= 1+3+5+7+9+\cdots+n
\end{aligned}$$

Na Figura 36 podemos observar a formação de parte da Sequência dos Números Quadrangulares.

Figura 36 – Representação da Sequência dos Números Quadrangulares.



Fonte: Autor

Perceba que a soma dos números ímpares positivos de 1 até n simboliza a fórmula posicional da sequência $(q_n)_{n\geq 1}$. Dado que a PA $(1,3,5,7,9,\cdots)$ possui razão 2, para obtermos a lei de correspondência da Sequência dos Números Quadrangulares, basta calcular a soma dos termos dessa PA. Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos

$$a_n = 1 + (n-1)2 \Rightarrow a_n = 2n - 1. \tag{3.12}$$

Substituindo a Equação (3.12) na expressão da soma dos termos de uma PA exibida na Equação 3.9, ficamos com

$$S = \frac{[1+(2n-1)]n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Portanto, a lei de correspondência da Sequência dos Números Quadrangulares é

$$(q_n)_{n\geq 1} = n^2. \tag{3.13}$$

De posse da fórmula posicional, podemos encontrar o número quadrangular que quisermos. Dessa forma, o milésimo número quadrangular, por exemplo, é

$$q_{1000} = 1000^2 = 1000000.$$

Há também uma relação muito interessante entre os números triangulares e quadrangulares a qual queremos destacar. A soma de dois números triangulares consecutivos quaisquer resulta sempre em número quadrangular. Vejamos alguns exemplos.

Somando o segundo número triangular com o primeiro, obtemos o segundo número quadrangular

$$t_2 + t_1 = 3 + 1 = 4 = q_2.$$

Somando o terceiro número triangular com o segundo, obtemos o terceiro número quadrangular

$$t_3 + t_2 = 6 + 3 = 9 = q_3.$$

Somando o décimo primeiro número triangular com o décimo, obtemos o décimo primeiro número quadrangular

$$t_{11} + t_{10} = 66 + 55 = 121 = q_{11}.$$

Somando o vigésimo quarto número triangular com o vigésimo terceiro, obtemos o vigésimo quarto número quadrangular

$$t_{24} + t_{23} = 300 + 276 = 576 = q_{24}.$$

Calculando a soma entre dois números triangulares consecutivos quaisquer, utilizando a Equação (3.11), obtemos

$$t_n + t_{n-1} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - 2n + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Mas, pela Equação (3.13) $n^2 = q_n$. Portanto, a soma entre dois números triangulares consecutivos quaisquer resulta sempre em um número quadrangular, ou seja,

$$t_n + t_{n-1} = q_n.$$

Há algumas conexões muito interessantes entre Progressão Aritmética e Função Afim que iremos destacar. As relações entre esses objetos de conhecimento infelizmente ainda são pouco abordadas em alguns dos livros didáticos e, talvez por esta razão, acabam sendo pouco exploradas nas aulas de Matemática.

Se pensarmos em uma Função Afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ e discretizarmos o seu domínio, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(n) = an + b, \tag{3.14}$$

faz corresponder a cada natural n o valor de a_n gerando uma Progressão Aritmética de razão a e primeiro termo $a + b$.

Assim como na Função Afim de domínio discreto, a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética qualquer é também dada por um polinômio em n, pois

$$a_n \;=\; a_1 + (n-1)r \;=\; a_1 + rn - r \;=\; rn + (a_1 - r). \tag{3.15}$$

Se compararmos as Equações (3.14) e (3.15) podemos fazer duas constatações. A primeira é que

$$an = rn \Leftrightarrow r = a,$$

ou seja, a razão da Progressão Aritmética é igual a taxa de variação da Função Afim de domínio discreto. E a segunda, é que

$$b = a_1 - r \Rightarrow a_1 = r + b,$$

mas como $r = a$, tem-se que $a_1 = a + b$, ou seja, o primeiro termo da PA é igual a soma das constantes reais da Função Afim.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 30. *Escreva a PA associada a Função Afim $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = 3n - 8$.*

É fácil identificar que a taxa de variação da função f e o seu valor inicial são, respectivamente, $a = 3$ e $b = -8$. Como $r = a$, temos uma PA crescente de razão $r = 3$. Por outro lado, o primeiro termo é

$$a_1 = a + b = 3 + (-8) = -5.$$

Portanto, a PA procurada é

$$(-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \cdots).$$

Exemplo 31. *Encontre a PA associada a Função Afim $g : I_8 \rightarrow \mathbb{Z}$, sabendo que $g(n) = -5n + 6$.*

Como $a = -5$ temos uma PA decrescente de razão $r = -5$. Além disso, $b = 6$ e

$$a_1 = a + b = -5 + 6 = 1.$$

Ou seja, a solicitada PA, é

$$(1, -3, -8, -13, -18, -23, -28, -33).$$

Exemplo 32. *Defina a Função Afim f, associada a PA* $(3, 19, 35, 51, 67, \cdots)$.

A PA possui razão $19 - 3 = 16$, mas como $r = a$, a taxa de variação da função associada é $a = 16$. Por outro lado, sabemos que $a_1 = 3$ e

$$a_1 = a + b \Rightarrow 3 = 16 + b \Rightarrow b = -13.$$

Além disso, a PA é infinita o que nos leva a concluir que o seu domínio é o conjunto dos números naturais portanto, ficará assim definida a função f

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ f(n) = 16n - 13.$$

Exemplo 33. *Considere a Progressão Aritmética* $(37, 33, 29, 25, 21)$. *Defina a Função Afim h, associada a ela.*

Note que a PA dada possui somente cinco elementos e, por isso, o domínio da função h é I_5, isto é, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Temos também que $33 - 37 = -4$ é a razão da Progressão Aritmética que é também igual a taxa de variação de h. Por fim, como

$$a_1 = a + b \Rightarrow 37 = -4 + b \Rightarrow b = 41.$$

Logo, a função h ficará bem definida por

$$h : I_5 \to \mathbb{R}, \ h(n) = -4n + 41.$$

Os dois últimos exemplos evidenciam a Definição 3.15, ou seja, que $f(n)$ e $h(n)$ são, de fato, iguais a a_n. No Exemplo 32, temos $f(n) = 16n - 13 = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Enquanto no Exemplo 33 é verdade que $h(n) = -4n + 41 = a_n$ para n igual a 1, 2, 3, 4 ou 5.

Veremos agora o que acontece com a Função Afim de domínio discreto quando aumentamos uma unidade na variável independente. Ora, ja vimos que toda PA $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ em que $f(n) = an + b = a_n$ é a discretização de uma Função Afim, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$. Se aumentarmos uma unidade em n então, será aumentado a unidades em $f(n) = a_n$.

De fato, aumentando-se uma unidade no n, temos

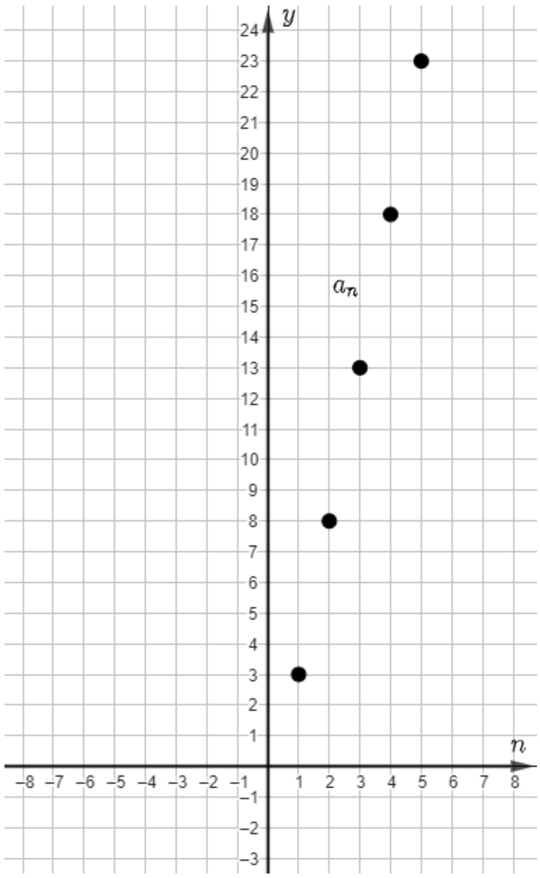
$$\begin{aligned} f(n+1) &= a(n+1) + b \\ &= an + a + b \\ &= (an + b) + a \\ &= f(n) + a. \end{aligned}$$

Perceba que, como $a = r$ e $f(n) = a_n$, esse aumento de uma unidade na variável independente n, faz corresponder o aumento de r unidades na PA a_n.

Exemplo 34. *Analise os gráficos da Progressão Aritmética* $(3, 8, 13, 18, 23, \cdots)$ *e da sua Função Afim associada.*

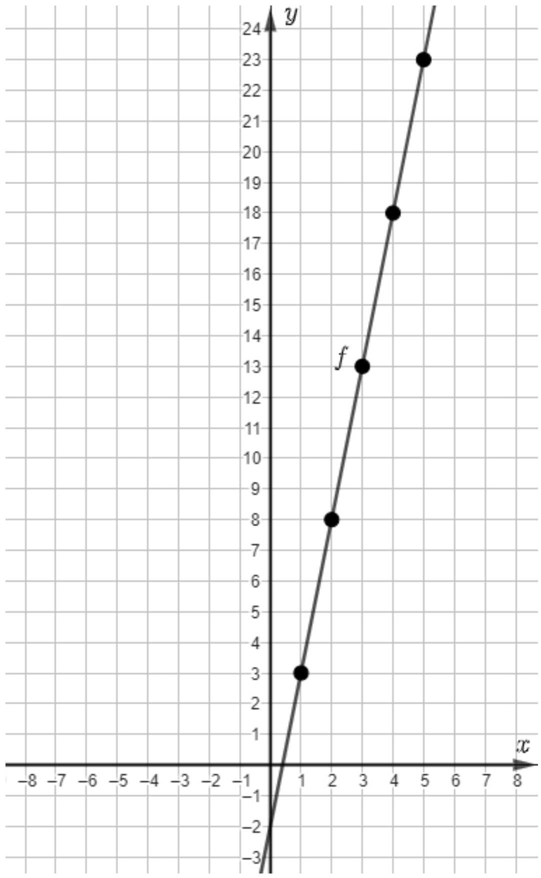
Observando o gráfico da Figura 37, podemos ver que cada vez que é aumentado uma unidade em n, aumenta-se 5 unidades em $f(n) = a_n$. Já na Figura 38, percebemos que devido a função possuir domínio contínuo, o seu gráfico é a reta que passar por todos os pontos da PA, a_n cuja razão é 5.

Figura 37 – Gráfico de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 5n - 2$.



Fonte: Autor

Figura 38 – Gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 2$.



Fonte: Autor

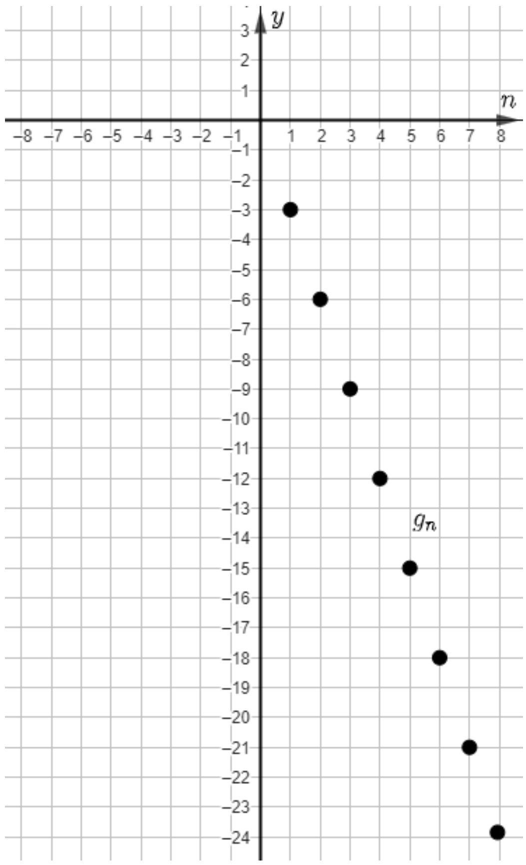
Como o domínio é discreto, o gráfico da PA é formado por uma sequência de pontos alinhados e equidistantes do plano cujas coordenadas são $(1, 3)$, $(2, 8)$, $(3, 13)$, $(4, 18)$, $(5, 23)$, $\cdots$. Por outro lado, o domínio da Função Afim f é contínuo e o seu gráfico é a linha reta que passa por todos os pontos do gráfico da Progressão Aritmética.

Exemplo 35. *Analise os gráficos da Progressão Aritmética* $(-3, -6, -9, -12, -15, -18, \cdots)$ *e da sua Função Afim associada.*

De modo análogo ao exemplo anterior, note que no gráfico da Figura 39, sempre que aumentamos uma unidade em n, é diminuído 3 unidades em $g(n) = a_n$. Na Figura

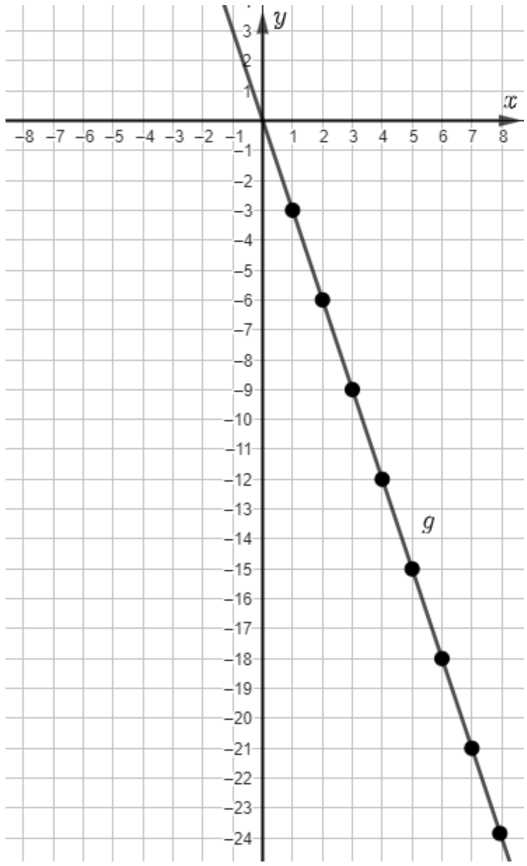
40, vemos que o domínio dessa função, que é linear, é contínuo e, por isto, o seu gráfico é a reta que passa por todos os pontos da PA, a_n de razão -3.

Figura 39 – Gráfico de $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $g(n) = -3n$.



Fonte: Autor

Figura 40 – Gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -3x$.



Fonte: Autor

O gráfico da PA a_n, é formado por uma sequência de pontos do plano, alinhados e equidistantes, cujas coordenadas são $(1, -3)$, $(2, -6)$, $(3, -9)$, $(4, -12)$, $(5, -15)$, $(6, -18)$, $(7, -21)$, $(8, -24)$, $\cdots$. O domínio da Função Afim g, por sua vez, é contínuo e o seu gráfico é a linha reta que passa por todos os pontos do gráfico da PA.

Outra conexão importante entre esses objetos de conhecimento é que Função Afim leva PA em PA, ou seja, tomando valores de uma Progressão Aritmética qualquer, de razão r, para o domínio $D(f)$ de uma Função Afim, $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, f transforma os elementos de $D(f)$ em outra Progressão Aritmética, de razão $a \cdot r$, conforme veremos a seguir.

Seja $x_1, x_2, x_3, \cdots \in D$, uma Progressão Aritmética de razão r. Assim,

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \cdots = r.$$

Como $f(x) = ax + b$ e $y = f(x)$, então

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$$

$$y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$$

$$y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = f(x_{n-1}) = ax_{n-1} + b$$

$$y_n = f(x_n) = ax_n + b$$

$$\vdots$$

De fato,

$$(ax_1 + b), (ax_2 + b), (ax_3 + b), \cdots, (ax_{n-1} + b), (ax_n + b), \cdots = y_1, y_2, y_3 \cdots, y_{n-1}, y_n, \cdots$$

é uma Progressão Aritmética de razão $a \cdot r$, pois

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) = ar$$

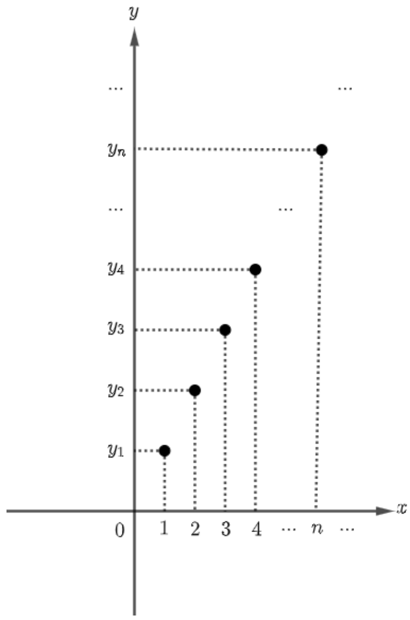
$$y_3 - y_2 = (ax_3 + b) - (ax_2 + b) = ax_3 + b - ax_2 - b = ax_3 - ax_2 = a(x_3 - x_2) = ar$$

$$\vdots$$

$$y_n - y_{n-1} = (ax_n + b) - (ax_{n-1} + b) = ax_n + b - ax_{n-1} - b = ax_n - ax_{n-1} = a(x_n - x_{n-1}) = ar.$$

Em particular, o conjunto dos números naturais é uma PA de razão 1. Dessa forma, a imagem de uma Função Afim qualquer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, isto é, $f(1) = y_1, f(2) = y_2, f(3) = y_3, \cdots, f(n) = y_n, \cdots$, está, necessariamente, em PA, evidenciando que toda Função Afim de domínio discreto gera uma Progressão Aritmética. Assim, os pontos de coordenadas $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \cdots, (n, y_n) \cdots$, estão alinhados, são equidistantes entre si e fazem parte do gráfico da Progressão Aritmética $a_n = ax + b$, como podemos observar na Figura 41.

Figura 41 – Gráfico da Progressão Aritmética $a_n = ax + b$.



Fonte: Autor

Exemplo 36. *Na entrada da função* $f : D \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = -20x + 5$ *vamos inserir, nesta ordem, os termos da Progressão Aritmética* $(9, 4, -1, -6, -11, -16, \cdots)$.

Tomando para o domínio $D(f)$, os termos da PA dada, teremos:

$$\begin{aligned}
f(9) &= -20 \cdot 9 + 5 = -180 + 5 = -175 \\
f(4) &= -20 \cdot 4 + 5 = -80 + 5 = -75 \\
f(-1) &= -20 \cdot (-1) + 5 = 20 + 5 = 25 \\
f(-6) &= -20 \cdot (-6) + 5 = 120 + 5 = 125 \\
f(-11) &= -20 \cdot (-11) + 5 = 220 + 5 = 225 \\
f(-16) &= -20 \cdot (-16) + 5 = 320 + 5 = 325 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A imagem de f é a Progressão Aritmética $(-175, -75, 25, 125, 225, 325, \cdots)$ cuja razão vale $125 - 25 = 100$. De fato, esta razão é igual ao produto $a \cdot r$, pois a taxa de variação da função dada é $a = -20$ e a razão da PA dada é $r = -5$, ou seja, $(-20) \cdot (-5) = 100$.

4 Recurso Educacional: Cartilha Interativa

A Cartilha Interativa é um recurso inovador que busca integrar a tecnologia nas aulas de Matemática, visando não apenas facilitar a compreensão dos conceitos estudados, mas também promover um ambiente de aprendizagem engajador e eficaz para os estudantes durante a construção do seu conhecimento.

Foi desenvolvida através da plataforma de design gráfico Canva, com o objetivo de promover a interação dos estudantes ao ensino e aprendizagem de função e sequências numéricas, explorando as inter-relações entre esses conceitos. A plataforma Canva proporcionou uma abordagem acessível e dinâmica para criar conteúdos educacionais visualmente atrativos, incluindo elementos interativos como exercícios práticos, vídeos, gráficos entre outros.

4.1 Canva

Lançado em 2013, o Canva é uma ferramenta digital que permite criar designs gráficos online. Até a presente data, o software está ativo em 190 países, encontra-se disponível em mais de 100 idiomas diferentes, possui mais de 130 milhões de usuários ativos mensalmente e foram criados mais de 15 bilhões de designs. De acordo com o seu site, "é uma plataforma online de design e comunicação visual que tem como missão colocar o poder do design ao alcance de todas as pessoas do mundo, para que elas possam criar o que quiserem e publicar suas criações onde quiserem" (CANVA, 2024).

Uma das competências gerais da Educação Básica, de acordo com a BNCC, é que o estudante consiga

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9).

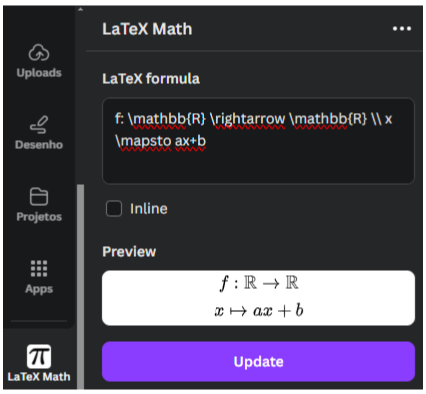
Dessa forma, acreditamos que o Canva seja um excelente aliado nesse processo, uma vez que, esses alunos podem ser motivados a aprender, estimulados a desenvolver a criatividade e o pensamento crítico, e ser alcançados não apenas na sala de sala física, mas também no ambiente virtual e em tempo real.

O Canva atua oferecendo a sua plataforma em uma vasta diversidade de setores, tais como, no Design Gráfico profissional, nas Empresas e Startups, em Organizações sem fins lucrativos, nas Mídias Sociais, entre outros. Além disso, possui algumas versões para atender as diferentes necessidades dos seus usuários, o "Canva Grátis", o "Canva Pro", "Canva For Education", o "Canva Equipes", o "Canva Enterprise", mas é a sua atuação no campo da educação que queremos destacar.

O "Canva For Education" ou em tradução livre, "Canva Para Educação", é uma versão desenvolvida especificamente para atender às necessidades de professores e estudantes. Ele oferece uma variedade de recursos e ferramentas voltados para o ambiente escolar, permitindo a criação de materiais educacionais envolventes e de alta qualidade como, por exemplo, apresentações, gráficos, infográficos, folders, pôsteres, cartazes e outros materiais pedagógicos. Com os recursos próprios de edições disponíveis nesta versão, professores podem criar aulas e/ou atividades começando do zero, ou escolher algum dos milhares de modelos educacionais disponíveis, e totalmente editáveis, que estão prontos para serem utilizados em qualquer disciplina.

No Canva For Education é possível criar turmas online e inserir estudantes e outros professores, através de um link de convite, ou de um código (ambos gerados pelo Canva), ou via e-mail. Ou ainda, importando os alunos do Google Classroom ou Google Sala de Aula, caso exista. Também é possível criar apresentações com vídeo, como vídeo-aulas, através do "estúdio de gravação" próprio da plataforma, editar arquivos em formato .pdf, utilizar a ferramenta "quadro branco" que é excelente para auxiliar no planejamento de aulas e de projetos, criar sites, e muito mais. Além disso, dentro da própria plataforma, estão disponíveis várias aplicações extremamente úteis como, por exemplo, o *LaTeX Math*, ideal para inserir e editar textos matemáticos com alta performance. A Figura 42 mostra um exemplo de como podemos manipular expressões matemáticas usando o LaTeX disponível no Canva.

Figura 42 – Utilizando o LaTeX na plataforma Canva.



Fonte: Canva

Através do Canva For Education, professores e estudantes da Educação Básica podem ter acesso a recursos "premium" do Canva, de maneira totalmente gratuita. Segundo a plataforma, "aqui no Canva, achamos que aprender é uma dádiva. É por isso que o Canva for Education é gratuito para professores e alunos qualificados, está disponível em todo o mundo e não está restrito a nenhum país" (CANVA, 2024).

Atualmente, o Canva não está disponível livremente para professores e alunos do Ensino Superior. De acordo com as diretrizes de elegibilidade da plataforma, são considerados "qualificados" para usufruir dessa versão, apenas os professores e alunos que estão ativos no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. É necessário comprovar o vínculo com alguma instituição de Ensino Básico que seja reconhecida pelo Governo, através de um cadastro na plataforma com envio de alguma documentação (declaração da escola, contracheque, entre outros), que certifique a atual relação do usuário com o seu trabalho na Educação. E a cada 3 anos, é solicitado uma nova atualização no cadastro do usuário, a fim de renovar por mais 3 anos o acesso ao Canva For Education.

4.2 Cartilha Interativa

Com o avanço tecnológico fomos levados a associar que a tecnologia está diretamente associada a aparelhos tecnológicos como computadores, smartphones, tablets, e ao uso da internet. No entanto, de acordo com Oliveira e Costa (2023) "a tecnologia é qualquer artefato ou técnica que o ser humano inventa para ampliar e aumentar seus poderes, facilitar seu trabalho ou sua vida ou simplesmente trazer-lhe maior satisfação e prazer". Seguindo este pensamento, este trabalho propõe como ferramenta tecnológica uma Cartilha Interativa, que na verdade a interatividade está ligada a interação direta do aluno com a Cartilha e não com o meio digital, apesar de também incluir opcionais relacionados como complementação.

Levando em conta a carência de bons recursos educacionais em muitas escolas, especialmente nas públicas, elaboramos uma tecnologia acessível como proposta de material pedagógico que apoia professores e estudantes no ensino e aprendizado. A nossa Cartilha não é apenas um material didático que trás explicações, aborda exemplos e propõe exercícios. Favorece uma experiência interativa, desenvolvida para engajar os alunos na construção do seu próprio conhecimento, promovendo a compreensão de função e sequências numéricas de forma integrada.

Utilizando a plataforma de design fácil de usar, Canva, a Cartilha Interativa combina textos, gráficos, animações e exercícios interativos que estimulam a aprendizagem ativa dos estudantes. Fornece explicações claras e diretas dos conceitos, sem abrir mão do rigor matemático. São dicas, explicações que se interligam com imagens e/ou palavras-chave, construção de mapa mental, definições, exemplos, demonstrações, investigação com o uso da calculadora, algumas aplicações dos conceitos estudados e vários exercícios de completar, de pintura, de representações e de criptografia, entre outras oportunidades de interação. Além disso, trás também algumas comunicações com ferramentas digitais, como vídeos, plataforma de simulações interativas, planilhas eletrônicas, etc, através de Códigos QR.

A nossa Cartilha Interativa é um recurso que estimula o pensamento crítico e o raciocínio lógico por meio da interatividade. Não só promove o aprendizado de conceitos matemáticos, mas também prepara os estudantes para aplicar esses conhecimentos em situações reais, estando alinhada à BNCC, que durante a trajetória escolar dos estudantes, sugere e espera que eles consigam

> utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p. 475).

A Cartilha pode ser um recurso valioso para utilizar em sala de aula pois é um material que, através da plataforma Canva, pode ser totalmente editável pelo professor antes de ser impresso, permitindo adaptações às particularidades individuais de suas turmas e à realidade de cada contexto educativo. Dessa forma, o tempo de preparação das aulas pode ser otimizado oportunizando aos professores focar mais na interação e no acompanhamento do progresso dos estudantes. Os links de visualização e edição da Cartilha serão fornecidos posteriormente.

A Cartilha Interativa foi dividida em 6 capítulos. A partir deste ponto até o final desta seção, destacaremos em **negrito** os títulos de cada capítulo e em *itálico* os subtítulos contidos em cada um. O Capítulo 1, intitulado **Conceito de Função**, aborda as *Noções Básicas* deste conceito. Os estudantes são estimulados a refletirem o que ocorre com certos elementos (tanto objetos como números) ao serem transformados em outros por meio de uma regra e são levados a manipular a representação de Diagrama de Flechas. É apresentada a definição de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e as definições de Domínio, Contra-domínio, Imagem e Lei de correspondência. Além disso, é discutido o significado de símbolos que representam notações do estudo de funções.

Já o Capítulo 2 da Cartilha, cujo título é **Função**, explora com mais detalhes esse objeto de conhecimento matemático. É investigado o conceito de *Bijetividade*, através das definições de Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva, além das suas representações através de Diagramas de Flechas e Gráficas. É explorado também o comportamento das funções em relação ao seu *Crescimento*, através das definições de Função Crescente e Decrescente. O segundo capítulo da Cartilha Interativa, também investiga *Função Inversa*, explorando a sua definição e representação em Diagrama de Flechas. As diferenças entre os conceitos *Contínuo vs Discreto* são abordados neste capítulo, por meio de ideias intuitivas de continuidade e discretude, que também serão exploradas através de uma sugestão de atividade envolvendo *Matemática nas Artes Visuais*. E é trabalhado o estudo de *Domínios Contínuos e Domínios Discretos de funções* através da construção de gráficos.

O título do Capítulo 3 da Cartilha Interativa é **Sequências Numéricas**. São discutidas *Noções Básicas* desde as triviais, como as posições dos termos dispostos ordenadamente em uma sequência, como também a importância do uso de variáveis indexadas para representar esses termos. Além disso, destaca a diferença nos significados e nas notações de elementos para conjuntos e termos para as sequências. É discutido também a maneira de definir recursivamente uma sequência numérica. Tanto a definição de *Sequência ou Sucessão* como a discussão sobre domínio de sequências finitas ou infinitas são estudados no terceiro capítulo. Ademais, aborda a *Lei de Correspondência* de uma sucessão e quando elas são aleatórias ou definidas através de fórmulas posicionais. São representados no plano cartesiano o *Gráfico* de uma sequência numérica qualquer.

No Capítulo 4 da Cartilha, cujo título é **Função Afim**, é apresentada a Definição desta função e analisado o modelo das coordenadas de quaisquer que sejam os pontos do seu gráfico. É neste capítulo que é respondida a pergunta: *"Por que o gráfico é sempre uma reta?"* através da demonstração, por construção, de um Teorema. Também é dada toda atenção às *Constantes reais a e b* da Função Afim, abordando suas nomenclaturas, seus significados no gráfico e suas relações com o zero da função. Os *Casos Particulares* de Função Afim são estudados: Função Linear, Função Identidade e Função Constante. E é neste quarto capítulo que é explorado uma aplicação de *Criptografia com Função Afim Inversa.*

Intitulado **Progressão Aritmética**, o Capítulo 5 da Cartilha, explora as *Noções Básicas* como a definição de PA, enfatizando o significado de razão e a sua relação com os tipos de progressões aritméticas: crescente, constante ou decrescente. Este capítulo explora o significado de *Termo Geral* sem fazer o uso de fórmulas e destaca diferentes representações para os termos de uma PA e as relações entre eles. Este capítulo utiliza a *A ideia de Gauss* para construir o raciocínio da *Soma dos termos de uma* PA *finita.*

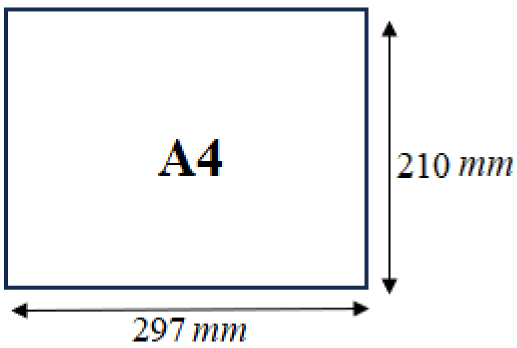
O Capítulo 6 da Cartilha, por sua vez, cujo título é **Conexão entre Função Afim e PA**, analisa que toda Progressão Aritmética é a restrição de uma Função Afim cujo domínio é o conjunto dos números naturais, ou seja, *Função Afim com entrada natural gera uma PA*. Além disso, é explorado que a Progressão Aritmética possui razão igual a taxa de variação da Função Afim e o seu primeiro termo corresponde a soma da taxa de variação com o valor inicial desta função. É abordada a *Taxa de Variação vs Razão da PA*, destacando a integração desses conceitos e investigado uma Progressão Aritmética a_n qualquer quando é dado um aumento de uma unidade sobre n. Neste capítulo será construído *Gráfico* de PA e também será abordado que *Função Afim leva PA em PA*. No final o Capítulo 6, buscamos fazer uma revisão final do que foi estudado, *Revisitando Conceitos.*

Na próxima seção iremos comentar cada página da Cartilha explorando o seu conteúdo inserido e as soluções (anotações, pinturas, resoluções de exercícios, entre outras) de todas as ações propostas que os estudantes devem responder.

4.3 Comentários e Soluções da Cartilha Interativa

O formato da Cartilha foi idealizado para ser impresso em folhas de papel ofício do tamanho A4, na configuração "livreto" e com orientação "paisagem". A Figura 43 mostra a representação de uma folha de papel ofício nesse tamanho. Uma vez estando na direção horizontal, ou seja, na orientação "paisagem", será possível imprimir quatro páginas da Cartilha por folha, considerando que as impressões serão feitas nos dois lados da folha de papel (frente e verso).

Figura 43 – Representação de uma folha de papel A4 na orientação paisagem.



Fonte: Autor.

Como as dimensões do papel A4, são $297mm$ por $210mm$, e considerando que serão duas páginas por folha, então cada página da Cartilha medirá $148.5mm$ por $210mm$. Para visualizar nossa Cartilha Interativa, acesse o link <bit.ly/3S5o85a>. Para editar na plataforma Canva, utilize o *link de modelo* do template, disponível em <bit.ly/3XZO2v1> e transforme a maneira como você ensina e aprende Matemática! Lembrem-se de estar atentos às letras maiúsculas e minúsculas dos links, pois elas fazem diferença.

4.3.1 Capítulo 1: Conceito de Função

O Capítulo 1 tem como finalidade apresentar as noções básicas do conceito de função. São exploradas algumas ideias associadas a esse conceito, tais como: correspondência, relação entre grandezas variáveis e transformação. E abordadas as notações comuns, bem como, os significados de: domínio, contradomínio, imagem e lei de correspondência, além de variáveis dependentes e independentes.

Na Página 1, que pode ser vista na Figura 44, investigamos intuitivamente, uma das ideias associadas ao conceito de função: a transformação. Para isto, utilizamos uma das simulações interativas para Matemática, desenvolvida pela *University os Colorado Boulder*, cujo link está disponível no código QR presente no canto inferior direito da página.

Figura 44 – Página 1 da Cartilha.

Fonte: Autor.

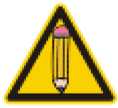
A simulação escolhida apresenta uma máquina que transforma os objetos de entrada, conforme o que ela foi programada para fazer e exibe-os na saída. Nesta página, supomos que a máquina foi programada para rotacionar os objetos de entrada, em 90^{o} no sentido horário e questionamos a posição na saída da máquina, para os objetos nas três situações apresentadas no exemplo 1.

Para cada situação, o aluno terá que escolher a única resposta correta, entre os itens A, B, C ou D. O estudante responderá corretamente se

- para a Situação 1, marcar a opção **D**;
- para a Situação 2, marcar a opção **C**;
- para a Situação 3, marcar a opção **A**.

Queremos chamar atenção de um detalhe importante da nossa Cartilha Interativa! Criamos uma imagem, formada por um triângulo que contém um lápis grafite no meio, como podemos observar na Figura 45, para alertar os estudantes sobre a realização de alguma interação na Cartilha.

Figura 45 – Alerta de interação a ser feita na Cartilha.

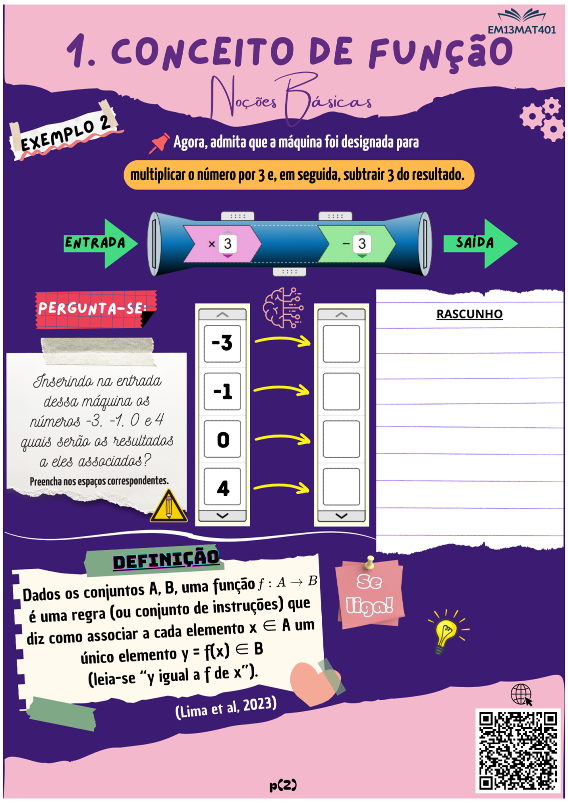


Fonte: Autor.

Portanto, todas as vezes que esta imagem aparecer, é um indicativo de que há alguma ação para o estudante fazer, podendo ser algum resultado, alguma palavra, a seleção de algum item, alguma pintura, ou qualquer outra interação. A cor amarela remete a atenção para que os estudantes possam identificar que, naquele momento, há algo a ser feito por eles.

Antes de trazer a definição formal de função, baseada na Teoria dos Conjuntos, a Página 2 da Cartilha, representada na Figura 46, continua abordando de maneira intuitiva o conceito de função. Trazendo a mesma máquina de transformações apresentada na sua página anterior, desta vez, no lugar de objetos quaisquer, são inseridos números na entrada da máquina.

Figura 46 – Página 2 da Cartilha.



Fonte: Autor.

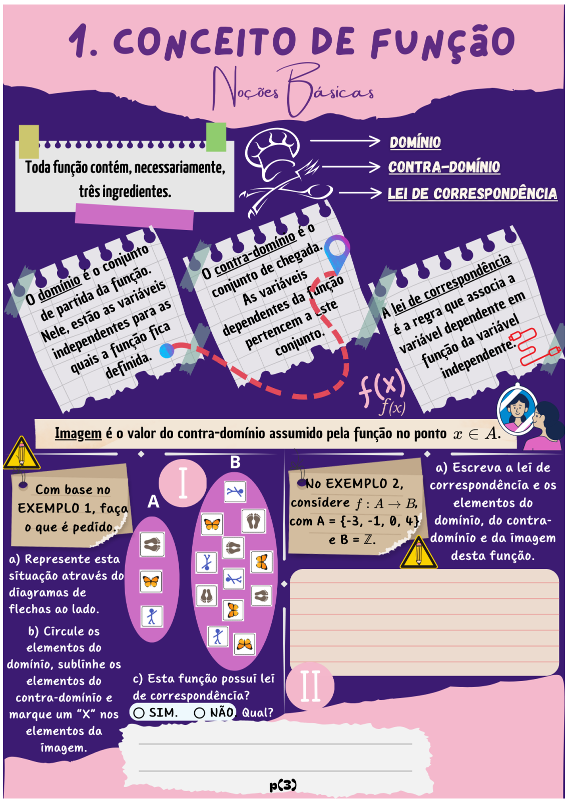
No exemplo 2, os números $-3, -1, 0$ e 4 que entrarão na máquina, serão multiplicados por 3 e, em seguida, terão o seu produto subtraído de 3 unidades, a qual exibirá o resultado final na sua saída. Espera-se que o estudante consiga encontrar os valores correspondentes aos que são dados, fazendo

$$\begin{aligned}
(-3) \cdot 3 - 3 = -9 - 3 &= -12; \\
(-1) \cdot 3 - 3 = -3 - 3 &= -6; \\
0 \cdot 3 - 3 = 0 - 3 &= -3; \\
4 \cdot 3 - 3 = 12 - 3 &= 9.
\end{aligned}$$

Perceba na Figura 46, que já temos uma representação muito próxima ao diagrama de flechas, tão usual no estudo de função. No final da página 2 da Cartilha é apresentada a definição de funções.

A página 3, aborda os três "ingredientes" essenciais para que uma função possa ser definida: o domínio, o contra-domínio e a lei de correspondência. Também é neste momento, que é discutido o significado de imagem e faz-se uma reflexão acerca das variáveis dependentes e independentes, conforme mostra a Figura 47.

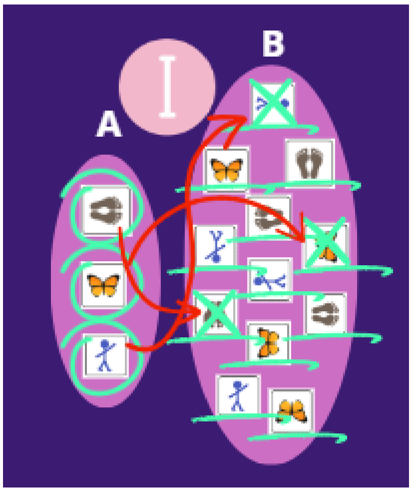
Figura 47 – Página 3 da Cartilha.



Fonte: Autor.

As interações que são solicitadas nesta página, são baseadas no exemplo 1 da página 1 e no exemplo 2 da página 2. Para responder adequadamente aos itens (a) e (b), da parte I, referentes ao exemplo 1, o estudante deverá fazer como ilustrado na Figura 48, onde podemos observar o diagrama de flechas e os elementos circulados do domínio, sublinhados do contra-domínio e marcados com X da imagem, propostos nos itens a) e b) da parte I.

Figura 48 – Soluções dos itens (a) e (b) da parte I.



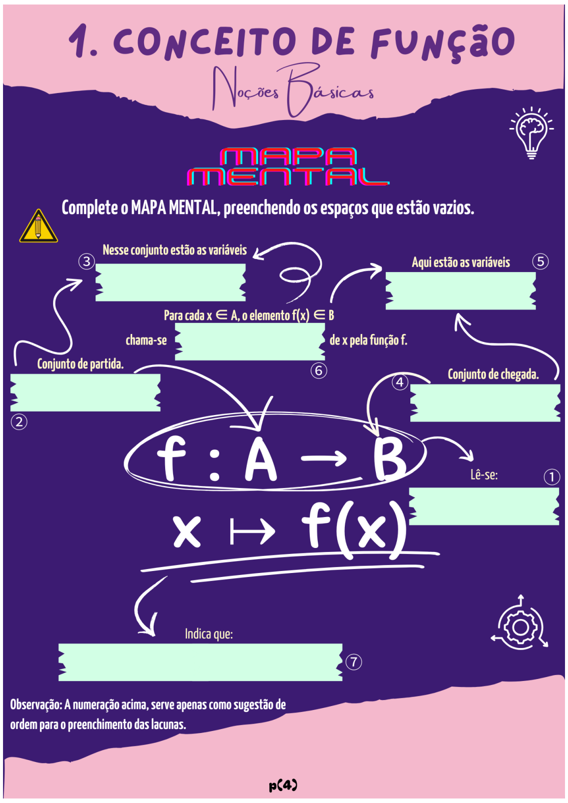
Fonte: Autor.

Relativamente ao item (c), esperamos que o estudante responda, seguramente, que **sim**! Principalmente após serem realizadas, nesta mesma página, as discussões acerca dos três "ingredientes" de toda e qualquer função, sendo um deles, a lei de correspondência. Para esta função, a sua lei de correspondência é **"o objeto será rotacionado 90° no sentido horário"** ou quaisquer outras variações que não alterem o seu sentido semântico.

Na parte II, temos uma função f definida de A em B, com $A = \{-3, -1, 0, 4\}$ e $B = \mathbb{Z}$. Considerando $x \in A$ e $y \in \mathbb{Z}$, temos como **lei de correspondência** a relação $y = 3x - 3$; os **elementos do domínio** sendo os números $-3, -1, 0, 4$; os **elementos do contra-domínio**, o conjunto $\mathbb{Z}$; e os **elementos da imagem**, os valores $-12, -6, -3, 9$.

Finalizamos o Capítulo 1, com o mapa mental da página 4 da Cartilha, mostrado na Figura 49, envolvendo as principais noções, notações e nomenclaturas do que foi estudado até o momento. Discutiremos as soluções da cada parte deste mapa mental, seguindo a ordem que sugerimos na Cartilha.

Figura 49 – Página 4 da Cartilha.



Fonte: Autor.

1. No espaço associado ao número 1, o estudante deverá informar a leitura da notação "$f : A \to B$", escrevendo simplesmente **f de A em B** ou **Função definida de A para B**;

2. Já no espaço do número 2, o estudante deverá informar o nome do "conjunto de partida" que está representado por A. Assim, basta escrever a palavra **Domínio**;

3. O espaço de número 3, está relacionado com o espaço de número 2. Nele, o estudante deverá informar o tipo de variável pertencente ao conjunto de partida da função, completando a frase: "Neste conjunto estão as variáveis **independentes**";

4. O estudante deverá informar o nome do "conjunto de chegada", que está representado por B, no espaço associado ao número 4. Desta forma, eles devem escrever a terminologia **Contra-domínio**;

5. Já o espaço correspondente ao número 5, se relaciona com o espaço correspondente ao número 4. Desta vez, o estudante deverá informar o tipo de variável pertencente ao conjunto de chegada da função, completando a frase: **Dependentes**;

6. No espaço de número 6 é dada a definição de um notável objeto do estudo das funções. É proposto aos estudantes que eles informem este objeto completando a frase: "Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se **imagem** de x pela função f";

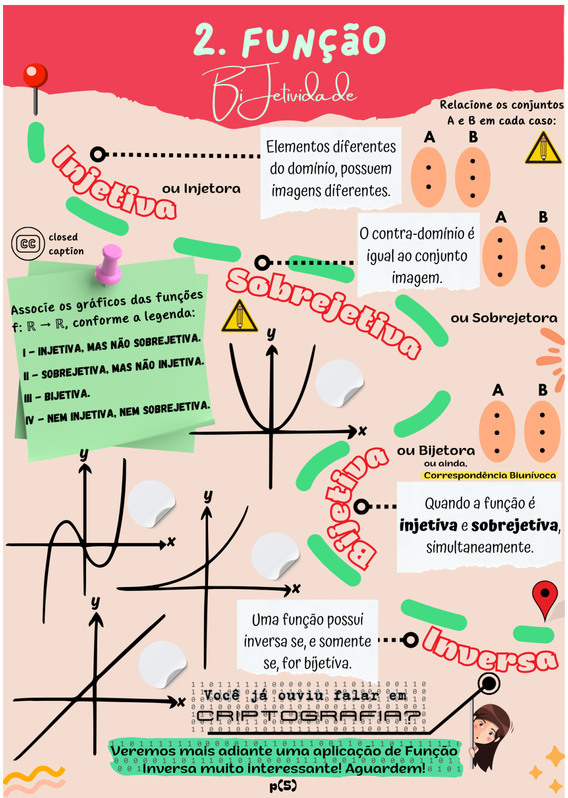
7. O espaço de número 7 sugere dos estudantes o significado na notação "$x \mapsto f(x)$". Eles devem escrever **a função leva** x **em** $f(x)$ ou f **transforma** x **em** $f(x)$.

4.3.2 Capítulo 2: Função

O estudo de funções é aprofundado no Capítulo 2 da Cartilha Interativa. Veremos as definições das Funções Injetiva, Sobrejetiva, Bijetiva, Crescente, Decrescente e Inversa. Discutiremos o conceito de correspondência biunívoca e faremos também uma reflexão acerca de domínios contínuos e discretos de funções.

Na Página 5 da Cartilha, exibida na Figura 50, é explicado o significado de bijetividade (ou correspondência biunívoca), através das definições de Funções Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva. Durante esse processo serão exploradas as suas representações por meio de diagramas de flechas e de gráficos.

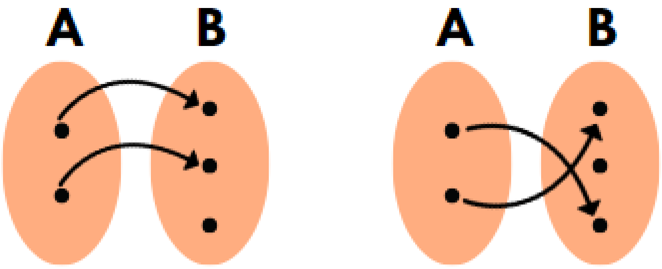
Figura 50 – Página 5 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Discutiremos, inicialmente, as possíveis representações com diagramas de flechas, das Funções Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva, apresentadas nesta ordem, na página. A Figura 51, mostra duas das possíveis representações que os estudantes podem escolher, para a **Função Injetiva**, considerando os conjuntos A e B que são dados.

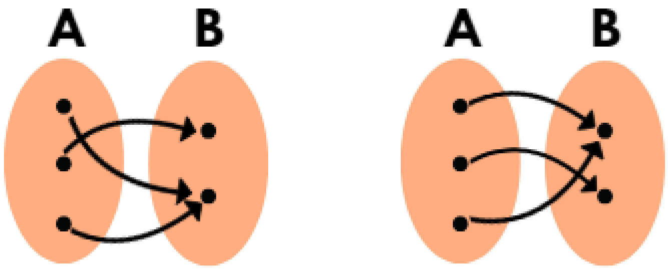
Figura 51 – Função Injetiva de A e B.



Fonte: Autor.

Ao passo que, na Figura 52, estão indicadas duas das possíveis representações, para a **Função Sobrejetiva**, considerando os conjuntos A e B fornecidos, que poderiam ser escolhidas pelos estudantes.

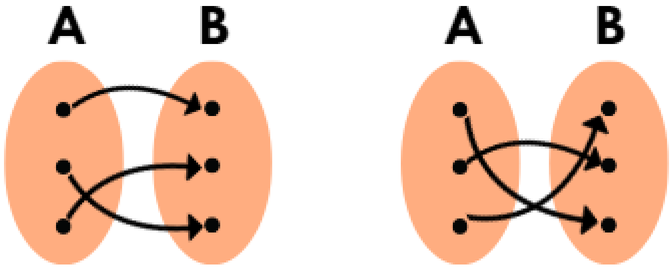
Figura 52 – Função Sobrejetiva de A e B.



Fonte: Autor.

A Figura 53, por sua vez, mostra duas das representações possíveis, que podem ser escolhas dos estudantes, para a **Função Bijetiva**, considerando os conjuntos A e B que foram dados.

Figura 53 – Função Bijetiva de A e B.



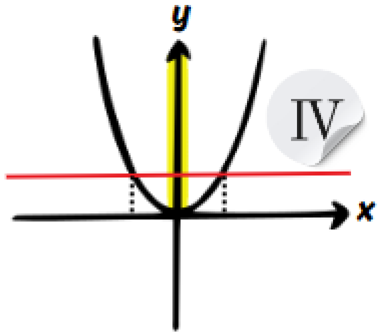
Fonte: Autor.

Consideramos importante analisar junto aos estudantes, as funções definidas de A para B, nos três casos que acabamos de mostrar. Na Figura 51, o número de elementos do conjunto A é menor do que o número de elementos do conjunto B, portanto, nenhuma Função Injetiva de A em B será também sobrejetiva. Já na Figura 52, o número de elementos do conjunto A é maior do que o número de elementos do conjunto B, sendo assim, nenhuma Função Sobrejetiva de A em B poderá ser injetiva. A Figura 53 por sua vez, mostra que o número de elementos dos conjuntos A e B é igual. Logo, esta é a única condição que possibilita uma função ser, ao mesmo tempo, Injetiva e Sobrejetiva.

Falaremos agora a respeito das representações gráficas das Funções Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva. Todos os gráficos dados na página 5 da Cartilha, representam funções cujo domínio e contra-domínio, são ambos, o conjunto dos números reais. Ao lado de cada um deles, há um espaço em branco, que o estudante deverá escrever um dos algarismos I, II, III ou IV, de acordo com a legenda disponível na Cartilha.

No primeiro gráfico, exibido na Figura 54, verificamos que é possível traçar alguma reta, paralela ao eixo das abscissas, que intersecta o gráfico da função em mais de um ponto. Dessa forma, há valores diferentes no domínio que possuem a mesma imagem. Assim, esta função não pode ser injetiva. Além disso, é fácil ver que a imagem desta função está apenas na parte de cima do gráfico, ou seja, é composta apenas por números reais não-negativos. Com isso, em nenhum momento haverá alguma parte do gráfico desta função no 3º ou 4º quadrantes. No entanto, o seu contra-domínio é formado por todos os números reais, logo, esta função não será sobrejetiva. Como a função não é Injetiva e nem Sobrejetiva, de acordo com a legenda dada, o estudante deverá escrever no espaço em branco o algarismo IV.

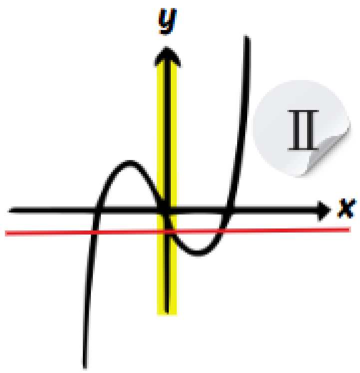
Figura 54 – Gráfico de uma função que não é Injetiva e nem Sobrejetiva.



Fonte: Autor.

No segundo gráfico, mostrado na Figura 55, verificamos que também é possível construir alguma reta paralela ao eixo horizontal, que intersecta o gráfico da função em mais de um ponto. Dessa forma, esta função não poderá ser injetiva pois há valores diferentes no domínio que possuem imagens iguais. Podemos observar também que a imagem desta função é exatamente igual ao contra-domínio. Como ambos são iguais ao conjunto dos números reais, pode-se concluir que esta função é sobrejetiva. Sendo sobrejetiva e não invetiva, pela legenda, o estudante terá que escrever o algarismo II no espaço em branco.

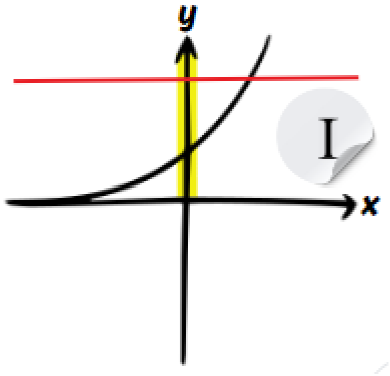
Figura 55 – Gráfico de uma Função Sobrejetiva, mas não injetiva.



Fonte: Autor.

No terceiro gráfico, exposto na Figura 56, podemos observar que toda reta traçada, paralela ao eixo das abscissas que toca o gráfico da função, fará isso em um único ponto. Com isso entendemos que qualquer valor do domínio, corresponde uma imagem diferente. Portanto temos o gráfico de uma função injetiva. Por outro lado, a imagem desta função é formada somente por números reais não-negativos, enquanto o contra-domínio, são todos os números reais. Desse modo, esta função não pode ser sobrejetiva. Como é injetiva mas não é sobrejetiva, conforme a legenda, o estudante terá que escrever o algarismo I no espaço em branco.

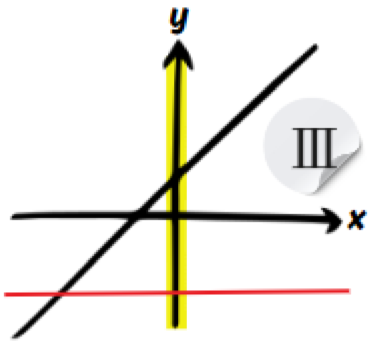
Figura 56 – Gráfico de uma Função Injetiva, mas não sobrejetiva.



Fonte: Autor.

Por fim, no quarto gráfico, apresentado na Figura 57, notamos que quaisquer retas que traçarmos paralela ao eixo horizontal, toca o gráfico da função em somente um ponto, ou seja, todo valor do domínio dessa função, está associado a uma imagem diferente. Logo, temos o gráfico de uma Função Injetiva. Por outro lado, temos que a imagem desta função e o contra-domínio são ambos iguais ao conjunto dos números reais, portanto, esta função é Sobrejetiva. Por ser, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva, temos uma Função Bijetiva. Segundo a legenda, o estudante terá que escrever o algarismo III no espaço em branco.

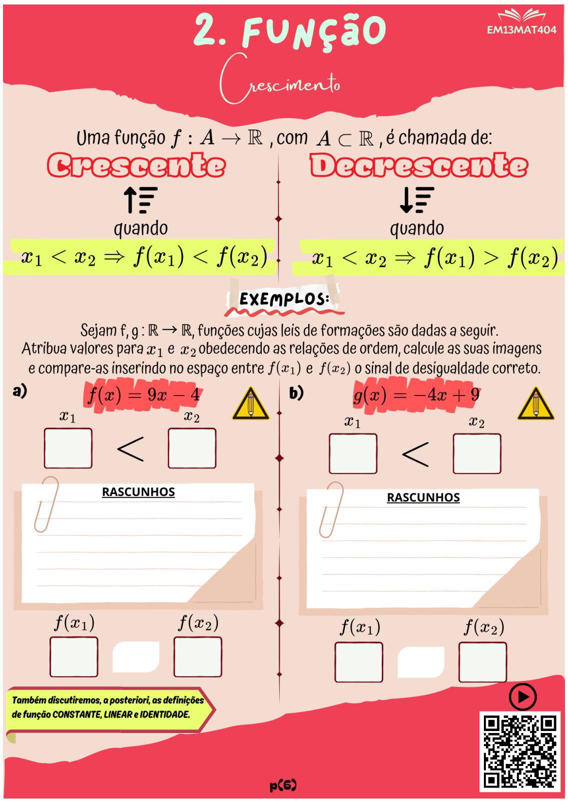
Figura 57 – Gráfico de uma Função Bijetiva.



Fonte: Autor.

A Página 6 da Cartilha, trás as definições de função crescente e decrescente, como podemos ver na Figura 58.

Figura 58 – Página 6 da Cartilha.



Fonte: Autor.

O objetivo do exemplo apresentado nos itens (a) e (b), é fazer o estudante investigar a veracidade das implicações envolvidas nas definições de função crescente e decrescente. Por serem funções definidas nos reais para os reais, o estudante terá que escolher, em cada exemplo, dois números reais quaisquer, x_1 e x_2, de modo que $x_1 < x_2$, e inseri-los nos espaços correspondentes.

A função dada no item (a) é tal que $f(x) = 9x - 4$. Supondo que as escolhas do estudante tenham sido, por exemplo, os números, 3 e 2. Então, para que tenhamos $x_1 < x_2$, é necessário que $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. O estudante poderá utilizar a parte destinada aos rascunhos para calcular as imagens dos números 2 e 3 e escrevê-las no espaço destinado a elas da seguinte forma

$$f(2) = 9 \cdot 2 - 4 = 18 - 4 = 14,$$

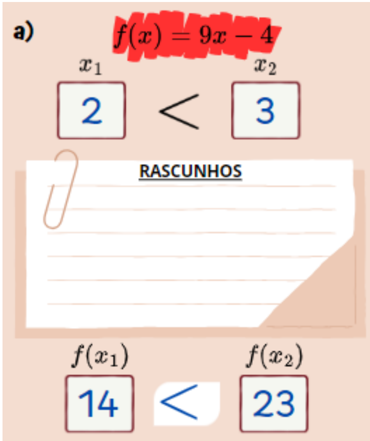
$$f(3) = 9 \cdot 3 - 4 = 27 - 4 = 23.$$

Comparando as imagens obtidas de x_1 e x_2, constataremos a validade da implicação

$$2 < 3 \Rightarrow 14 < 23,$$

como mostra a Figura 59.

Figura 59 – Possível constatação para a Função Crescente.



Fonte: Autor.

No item (b) a função é dada por $g(x) = -4x + 9$. Considerando que as escolhas do estudante sejam, por exemplo, os números -5 e -1, então, $x_1 = -5$ e $x_2 = -1$, pois $x_1 < x_2$. Calculando as imagens desses números, ele deverá encontrar

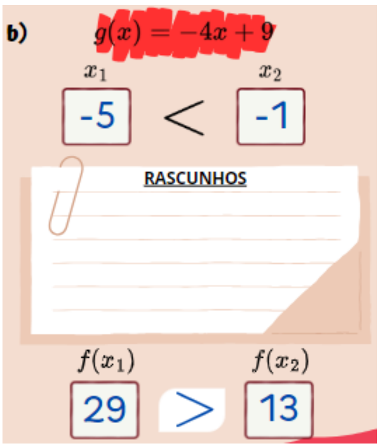
$$g(-5) = -4 \cdot (-5) + 9 = 20 + 9 = 29,$$

$$g(-1) = -4 \cdot (-1) + 9 = 4 + 9 = 13,$$

e escrever nos espaços apropriados da Cartilha, como podemos observar na Figura 60. Comparando as imagens obtidas de -5 e -1 pela função g, esse estudante irá reconhecer a veracidade da implicação

$$-5 < -1 \Rightarrow 29 > 13.$$

Figura 60 – Possível constatação para a Função Decrescente.



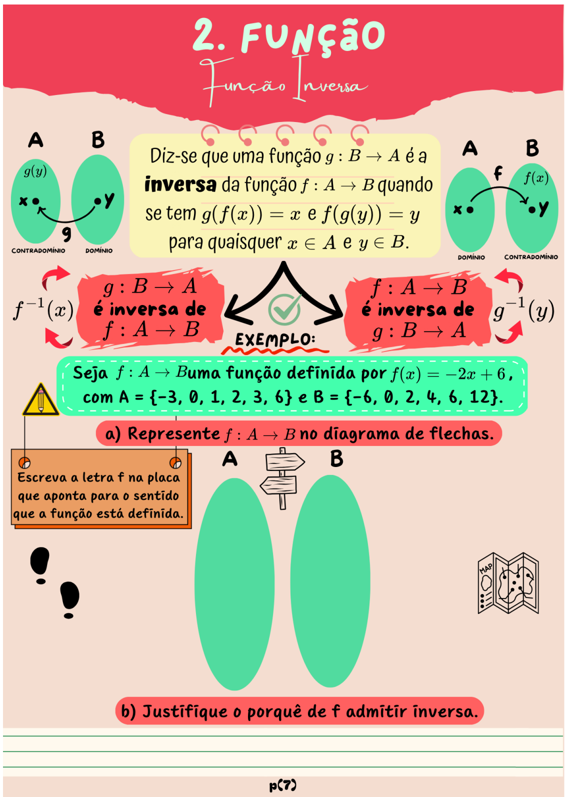
Fonte: Autor.

No final desta página, disponibilizamos no código QR o vídeo “As desventuras da Mãe Joana” do projeto da Unicamp, *Matemática Multimídia*. Neste vídeo, o escritor

Euclides da Cunha aparece para a protagonista, a vidente "Mãe Joana", e utiliza o estudo de funções para modelar e compreender os problemas financeiros enfrentados por ela.

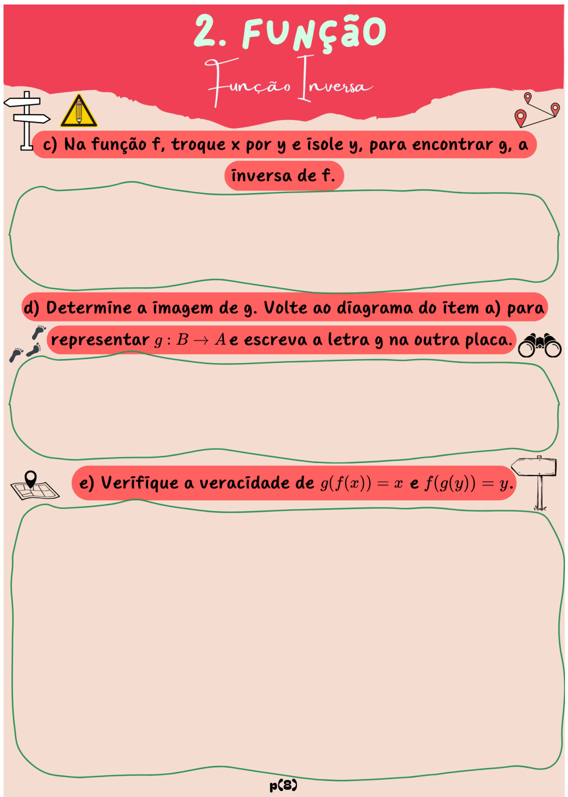
O estudo de Função Inversa é discutido nas páginas 7 e 8 da Cartilha, que estão expostas nas Figuras 61 e 62, respectivamente. A definição é dada na página 7, onde também são iniciados os exemplos, que continuam e terminam na página 8.

Figura 61 – Página 7 da Cartilha.



Fonte: Autor

Figura 62 – Página 8 da Cartilha.



Fonte: Autor

No exemplo proposto, é dada uma função $f : A \to B$ em que $A = \{-3, 0, 1, 2, 3, 6\}$ e $B = \{-6, 0, 2, 4, 6, 12\}$ com $f(x) = -2x + 6$. Conforme sugerido no item (a), para fazer a representação da função f com diagramas de flechas, iniciaremos com o cálculo inicial da imagem de cada elemento do domínio, como a seguir

$$f(-3) = -2 \cdot (-3) + 6 = 6 + 6 = 12;$$

$$f(0) = -2 \cdot 0 + 6 = 0 + 6 = 6;$$

$$f(1) = -2 \cdot 1 + 6 = -2 + 6 = 4;$$

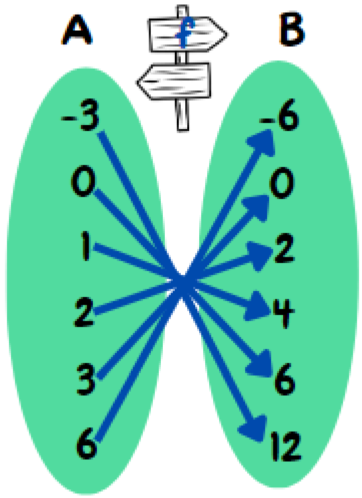
$$f(2) = -2 \cdot 2 + 6 = -4 + 6 = 2;$$

$$f(3) = -2 \cdot 3 + 6 = -6 + 6 = 0;$$

$$f(6) = -2 \cdot 6 + 6 = -12 + 6 = -6.$$

A Figura 63 mostra uma maneira que o estudante poderá escolher representar a função f, escrevendo esta letra na placa de cima pois a função é definida de A para B, ou seja, as flechas partem dos elementos do conjunto A e chegam nos elementos do conjunto B.

Figura 63 – Diagrama de flechas da função f.



Fonte: Autor.

O estudante que completar o item (a) perceberá, sem maiores dificuldades, que a função f é bijetiva e, portanto, será inversível. Então, no item (b), basta ele escrever que a função possuirá inversa devido ao fato de ser ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva, ou simplesmente, bijetiva. O item (c), é proposto para encontrar a lei de correspondência da Função Inversa de f, isto é, a função $g : B \to A$. Trocando x por y em $y = -2x + 6$ e isolando o "novo" y, obtemos

$$x = -2y + 6;$$

$$2y = -x + 6;$$

$$y = \frac{-x+6}{2}.$$

Logo,

$$g(y) = \frac{-y+6}{2} \text{ ou } f^{-1}(x) = \frac{-x+6}{2}.$$

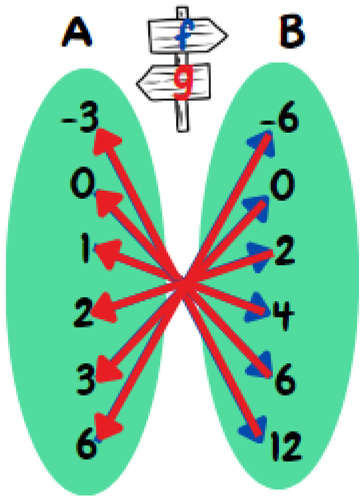
Agora um breve comentário sobre estas duas notações. Sendo $x \in A$ e $y \in B$, em ambas notações, o domínio da Função Inversa é o conjunto B. Embora $g(y) = \frac{-y+6}{2}$ não deixe dúvidas com relação aos valores de y pertencerem ao seu domínio, não devemos nos confundir com a segunda representação, achando que os valores de x em $f^{-1}(x) = \frac{-x+6}{2}$ pertence ao conjunto A, pois, na verdade trata-se da Função Inversa de f, e neste caso, os valores de entrada (as variáveis independentes) da função f^{-1} são todos os $y \in B$.

Para determinar a imagem da Função Inversa, conforme solicitado no item (d), basta substituir os valores do seu domínio em $g(y) = \frac{-y+6}{2}$, conforme podemos observar a seguir

$$g(-6) = \frac{-(-6)+6}{2} = \frac{6+6}{2} = \frac{12}{2} = 6;$$
$$g(0) = \frac{-0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$
$$g(2) = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$
$$g(4) = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$
$$g(6) = \frac{-6+6}{2} = \frac{0}{2} = 0;$$
$$g(12) = \frac{-12+6}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

A Figura 64 mostra a representação da Função Inversa no mesmo diagrama do item (a). Como g é definida de B para A, o estudante deverá escrever esta letra na placa de baixo. Agora, podemos observar que as flechas partem dos elementos do conjunto B e chegam nos elementos do conjunto A.

Figura 64 – Diagrama de flechas da função g.



Fonte: Autor.

Ao utilizar os mesmos diagramas para fazer as representações da função e de sua inversa, acreditamos que isso possa favorecer a compreensão desses conceitos.

No item (e) são propostas duas constatações indicadas na definição de Função Inversa, para serem investigadas. Para mostrar que $g(f(x)) = x$, o estudante deve substituir na função g, a função f, como mostram as equações a seguir

$$g(f(x)) = \frac{-(-2x+6)+6}{2} = \frac{2x-6+6}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Por outro lado, para mostrar que $f(g(y)) = y$, o estudante deve substituir na função f, a função g fazendo

$$f(g(y)) = -2 \cdot \left(\frac{-y+6}{2}\right) + 6 = \left(\frac{2y-12}{2}\right) + 6 = y - 6 + 6 = y.$$

A partir da página 9 da Cartilha é iniciado o estudo de domínios contínuos e discretos de funções. Inicialmente, trouxemos duas ideias intuitivas que podem ser associadas aos conceitos de continuidade e discretude. Inspirado em Oliveira e Hoyos (2018), a primeira ideia que abordamos nesta página é o "tempo", como mostra a Figura 65.

Figura 65 – Página 9 da Cartilha.

Fonte: Autor.

Nesta página da Cartilha, o estudante terá que completar as duas frases, escrevendo apenas uma palavra em cada uma delas.
Primeira frase:

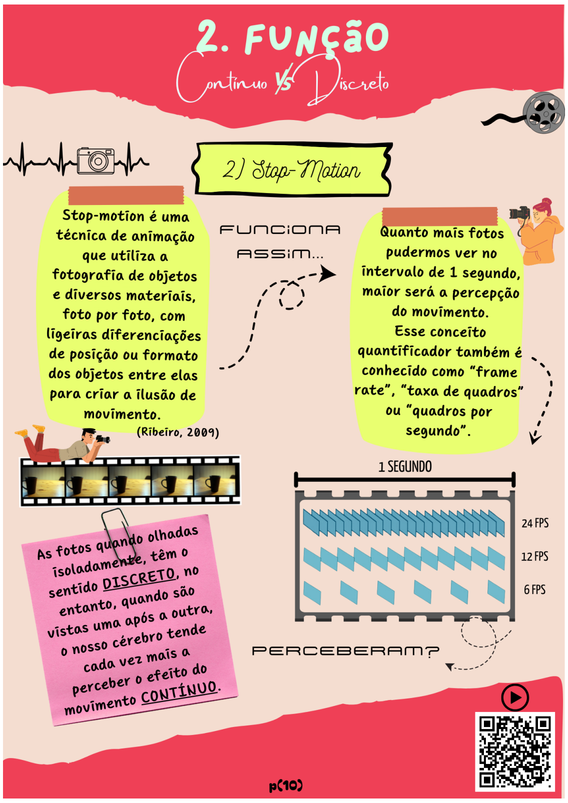
"... a variável tempo, é considerada **contínua**."

Segunda frase:

"... a marcação do tempo é uma variável **discreta**."

A segunda ideia propõe o uso da técnica de "Stop Motion" para facilitar a compreensão das noções matemáticas de contínuo e discreto. As páginas 10 e 11 da Cartilha são de caráter informativo, sem necessidade de fazer anotações. Ambas podem ser vistas nas Figuras 66 e 67. Apresentamos o significado da técnica de "Stop Motion" na página 10 da Cartilha, e trazemos na página 11, uma proposta de atividade inovadora para ser realizada, em grupos, pelos estudantes no ambiente escolar.

Figura 66 – Página 10 da Cartilha.



Fonte: Autor

Figura 67 – Página 11 da Cartilha.

Fonte: Autor

No final da página 10 da Cartilha ainda disponibilizamos através do código QR o vídeo "STOP MOTION para iniciantes - AULA COMPLETA", produzido e apresentado pelo diretor e animador Pedro Iuá, com o apoio do Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado de Cultura e Economia Criativa do Rio de Janeiro, através da Lei Aldir Blanc. Sugerimos a produção de um vídeo curto, utilizando a técnica de animação, "Stop Motion". Para essa produção, indicamos o uso da versão gratuita do aplicativo *Stop Motion Studio* que está disponível tanto para o sistema Android como também para o iOS. A Figura 68 mostra a logomarca deste aplicativo.

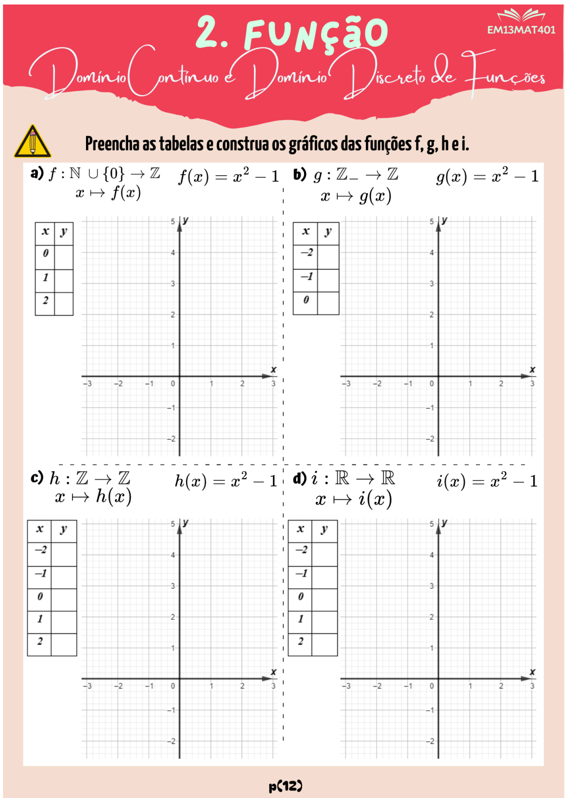
Figura 68 – Logo do aplicativo Stop Motion Studio.

Fonte: Google Play.

O *Stop Motion Studio* exporta o arquivo produzido nos formatos MP4, GIF, folioscópio, entre outras opções. Este último citado é um documento que exibe todas as fotografias e/ou imagens utilizadas no vídeo e o Stop Motion Studio gera esse documento no formato .pdf em apenas um clique. Para esta atividade, sugerimos aos estudantes que fossem entregues os arquivos MP4 e o folioscópio. Esperamos que os estudantes consigam relacionar cada fotografia, vista isoladamente, com a ideia discreta, e a ilusão de movimento gerada por várias fotografias (feitas com ligeiras diferenciações de formato ou de posição), com a ideia contínua.

Finalizando o Capítulo 2, a página 12 da Cartilha propõe a representação gráfica de quatro funções diferentes que embora possuam a mesma lei de correspondência, $x \mapsto x^2 - 1$, são definidas em diferentes conjuntos de partida e de chegada, como mostra a Figura 69.

Figura 69 – Página 12 da Cartilha.



Fonte: Autor.

No item (a), o domínio da função $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ onde $f(x) = x^2 - 1$, é o conjunto formado pelos elementos $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Todavia, os estudantes utilizarão neste exemplo apenas os valores do domínio 0, 1 e 2, disponíveis na tabela fornecida. Calculando suas imagens pela função f, os estudantes encontrarão

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

A Tabela 2 mostra como os estudantes devem completar a tabela dada no item (a) utilizando os valores encontrados.

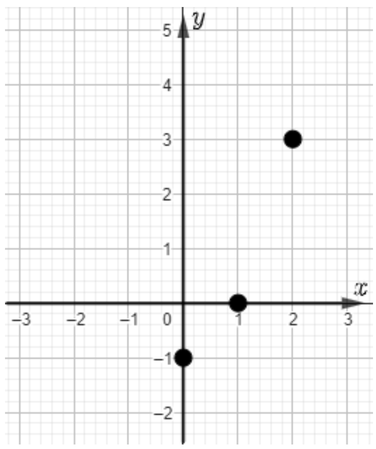
Tabela 2 – Alguns valores da função f da página 12.

x	y
0	-1
1	0
2	3

Fonte: Autor.

Parte do gráfico da função f, que é proposto na Cartilha, está exposto na Figura 70.

Figura 70 – Gráfico da função f da página 12 da Cartilha.



Fonte: Autor.

No item (b), o domínio da função $g : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{Z}$ onde $g(x) = x^2 - 1$, é o conjunto formado pelos elementos $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$. No entanto, os estudantes devem utilizar neste exemplo apenas os valores do domínio -2, -1 e 0, contidos na tabela dada. Ao calcular os valores assumidos pela função g, eles irão encontrar

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(-1) &= (-1)^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(0) &= 0^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

A Tabela 3 ilustra como os estudantes devem preencher a tabela do item (b) utilizando os valores encontrados.

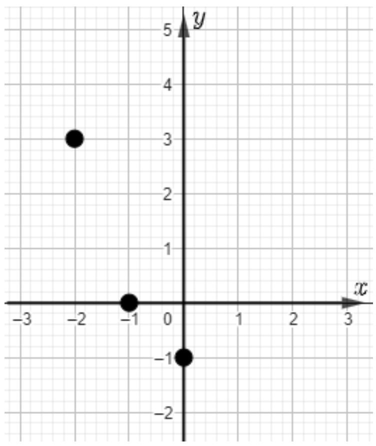
Tabela 3 – Alguns valores da função g da página 12.

x	y
-2	3
-1	0
0	-1

Fonte: Autor.

Parte do gráfico da função g, que é proposto na Cartilha, está exposto na Figura 71.

Figura 71 – Gráfico da função g da página 12 da Cartilha.



Fonte: Autor.

No item (c), o domínio da função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ em que $h(x) = x^2 - 1$, é o conjunto formado pelos elementos $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Contudo, neste exemplo os valores o domínio que os estudantes devem utilizar, são -2, -1, 0, 1 e 2 indicados na tabela dada. Calculando as imagens desses valores através da função h, eles vão obter

$$\begin{aligned} h(-2) &= (-2)^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(-1) &= (-1)^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h(0) &= 0^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(1) &= 1^2 - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0;
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
h(2) &= 2^2 - 1 \\
&= 4 - 1 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Podemos observar na Tabela 4 como os estudantes devem preencher a tabela disposta no item (c)

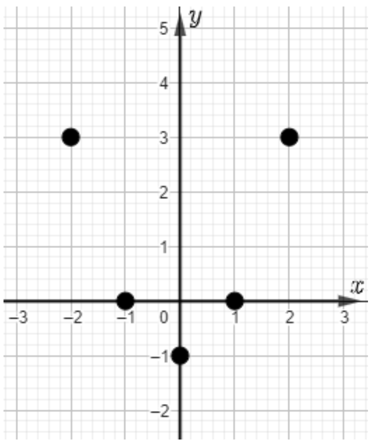
Tabela 4 – Alguns valores da função h da página 12.

x	y
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Fonte: Autor.

Parte do gráfico da função h, que é proposto na Cartilha, está exposto na Figura 72.

Figura 72 – Gráfico da função h da página 12 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Finalmente no item (d), o domínio da função $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $i(x) = x^2 - 1$, é o conjunto formado por todos os números reais. Mas, os estudantes utilizarão neste exemplo, os mesmos valores do item anterior para o domínio -2, -1, 0, 1 e 2 dados na tabela. Após calcularem os valores assumidos pela função i, espera-se que os estudantes encontrem

$$\begin{aligned} i(-2) &= (-2)^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i(-1) &= (-1)^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i(0) &= 0^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(1) &= 1^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i(2) &= 2^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

A Tabela 5 ilustra a como os estudantes devem completar a tabela do item (d).

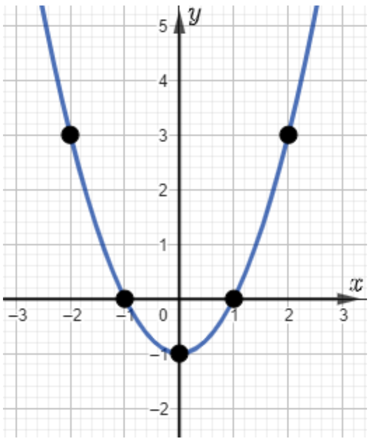
Tabela 5 – Alguns valores da função i da página 12.

x	y
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Fonte: Autor.

Parte do gráfico da função i, que é proposto na Cartilha, está exposto na Figura 73.

Figura 73 – Gráfico da função i da página 12 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Esperamos que os estudantes percebam que apesar das Tabelas 4 e 5 das funções h e i, respectivamente, serem guais os seus gráficos são diferentes. Além disso, acreditamos que seja importante refletir que as funções f, g e h possuem seus domínios discretos, enquanto o domínio da função i é contínuo.

4.3.3 Capítulo 3: Sequências Numéricas

Concentramos a abordagem do Capítulo 3 da Cartilha Interativa, na definição de sequências, explorando a sua relação com o conceito de função. Abordamos noções básicas, tais como, as notações e representações das sequências, e investigamos algumas das suas conexões existentes com as funções. Abordamos também sua lei de correspondência, por meio do estudo de sequências definidas por recorrências, fórmulas fechadas e sequências aleatórias, bem como, outro tipo de representação muito importante: a construção de gráficos de sequências numéricas.

A página 13 da Cartilha, exibida na Figura 74, trás três exemplos e algumas explicações para completar. Destacamos em **negrito**, todas as respostas que os estudantes devem escrever nos espaços vazios. O primeiro exemplo trás a sequência dos meses do ano que são formados por 31 dias:

(janeiro, **março**, **maio**, julho, **agosto**, outubro, **dezembro**)

Figura 74 – Página 13 da Cartilha.

Fonte: Autor.

Já o segundo exemplo, aborda a sequência formada por todos os anos bissextos do século XXI.

$$(\mathbf{2004}, \mathbf{2008}, \mathbf{2012}, 2016, \mathbf{2020}, \mathbf{2024}, 2028, \mathbf{2032}, \cdots)$$

Antes de apresentar o terceiro exemplo, a Cartilha destaca a importância do uso de variáveis indexadas para representar os termos de uma sequência. Neste momento, os estudantes devem completar os espaços vazios informando o significado das variáveis indexadas destacadas, escrevendo para

a_1 (a índice 1): **primeiro termo**;
a_2 (a índice 2): **segundo termo**;
a_n (a índice n): n**-ésimo termo**.

O terceiro exemplo trás uma sequência definida recursivamente: a Sequência de Fibonacci. O estudante deverá preencher os sete primeiros termos desta sequência, utilizando a fórmula de recorrência dada

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3. \end{cases}$$

Temos que $a_1 = a_2 = 1$. Para os cálculos de a_3 até a_7, fazemos

$$\begin{aligned} a_3 &= a_{3-1} + a_{3-2} \\ &= a_2 + a_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_4 &= a_{4-1} + a_{4-2} \\ &= a_3 + a_2 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_5 &= a_{5-1} + a_{5-2} \\ &= a_4 + a_3 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5; \end{aligned}$$

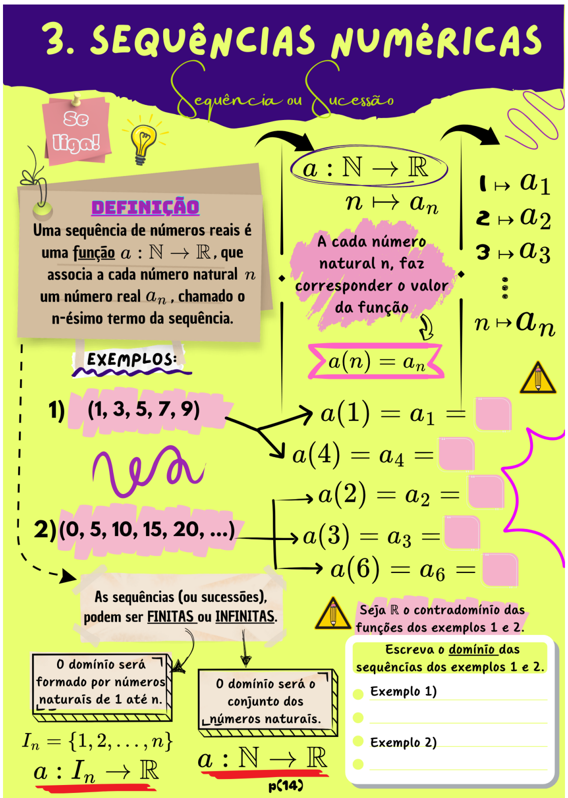
$$\begin{aligned} a_6 &= a_{6-1} + a_{6-2} \\ &= a_5 + a_4 \\ &= 5 + 3 \\ &= 8; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_7 &= a_{7-1} + a_{7-2} \\ &= a_6 + a_5 \\ &= 8 + 5 \\ &= 13. \end{aligned}$$

Portanto, o estudante deverá escrever

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{13}, \ldots).$$

Na página 14 da Cartilha, conforme mostra a Figura 75, é apresentada a definição de sequências numéricas e a partir dela, é retratada a sua ligação com as funções. Também é feita uma abordagem sobre domínio de sequências.

Figura 75 – Página 14 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Sobre o exemplo 1 desta página, que trás a sequência finita $(1, 3, 5, 7, 9)$, os estudantes devem completar as informações acerca dos termos dela, fazendo

$$a(1) = a_1 = 1;$$
$$a(4) = a_4 = 7.$$

Relativamente ao exemplo 2 desta página, que trás a sequência infinita $(0, 5, 10, 15, 20, \cdots)$, os estudantes também devem completar as informações acerca dos seus termos, escrevendo

$$a(2) = a_2 = 5;$$
$$a(3) = a_3 = 10.$$

Acreditamos que seja importante fazer uma reflexão com os estudantes acerca do sexto termo em diante desta sequência. Pois, mesmo havendo um certo padrão entre eles, os cinco primeiros termos fornecidos não nos garantem que trata-se da sequência formada pelos múltiplos não-negativos de 5 e, neste caso, necessitaríamos de mais informações para determinar o sexto termo. Porém, esta reflexão não nos impede de considerar os termos desta sequência sendo os múltiplos de 5, e assim

$$a(6) = a_6 = 25.$$

O domínio das sequências dos exemplos 1 e 2 são, nesta ordem, I_5 e $\mathbb{N}$.

A lei de correspondência de uma sequência é o objeto central dos estudos na página 15 da Cartilha. A página inteira foi dividida em duas colunas como mostra na Figura 76.

Figura 76 – Página 15 da Cartilha.

Fonte: Autor.

Na primeira coluna o estudante precisa, inicialmente, completar os balões vazios indicando os “três ingredientes” de uma função, que são, **domínio**, **contra-domínio** e **lei de correspondência**, conforme estudados na página 3 da Cartilha, mostrada na Figura 47. Em seguida, esperamos que o estudante possa concluir, através da relação de transitividade, e anotar no espaço correspondente, que **toda sequência possui domínio, contra-domínio e lei de correspondência**.

Na segunda coluna, há dois exemplos que os estudantes devem resolver. Para o primeiro, eles precisarão de um dado honesto. Apresentamos a seguir, três possíveis sequências que os estudantes poderiam escrever na Cartilha. Com base nos lançamentos do dado, eles poderiam encontrar

$$(3, 1, 1, 4, 3, 5, \ \ldots);$$

$$(2, 5, 2, 2, 4, 5, \ \ldots);$$

$$(6, 1, 1, 4, 1, 4, \ \ldots).$$

Os estudantes devem marcar as opções que afirmam **não** ser possível prever o sétimo e nem outro termo qualquer desta sequência. A lei de correspondência desta sequência, que o estudante irá escrever no espaço apropriado, é toda representação verbal que tenha o mesmo significado de **cada termo será obtido pelo número apresentado na face superior durante o lançamento de um dado honesto**.

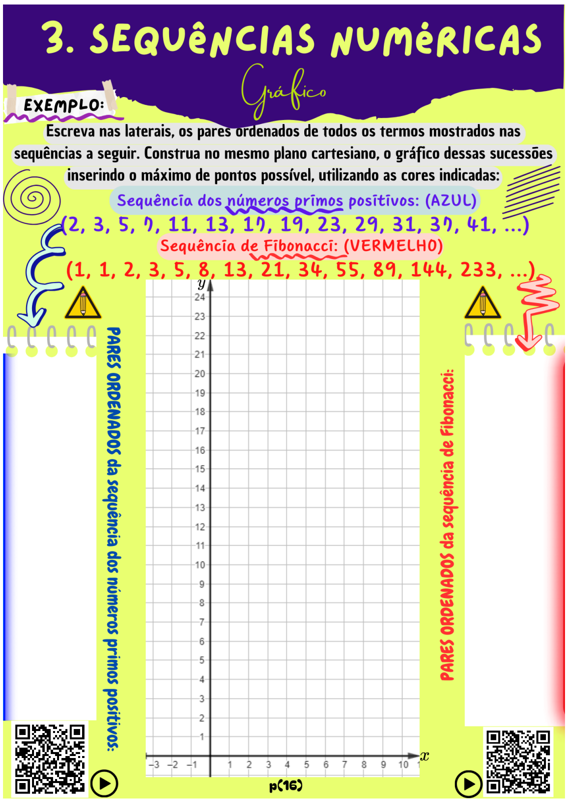
O segundo exemplo trás a sequência dos cubos perfeitos positivos. Nela os estudantes devem completar os espaços vazios, escrevendo

$$(1, 8, \mathbf{27}, \mathbf{64}, 125, \mathbf{216}, \ \ldots),$$

e marcar as opções **sim**, pois é possível prever o sétimo ou qualquer outro termo desta sequência. Considerando $n \in \mathbb{N}$ e a_n um termo qualquer desta sequência, uma maneira de expressar a sua lei de correspondência é $a_n = n^3$. Outra maneira, que também está correta, é tomarmos $x \in \mathbb{N}$ e y um termo qualquer da sequência, sua lei de correspondência poderá representada por $y = x^3$.

A página 16 da Cartilha trata da construção de gráficos de sequências, Figura 77.

Figura 77 – Página 16 da Cartilha.

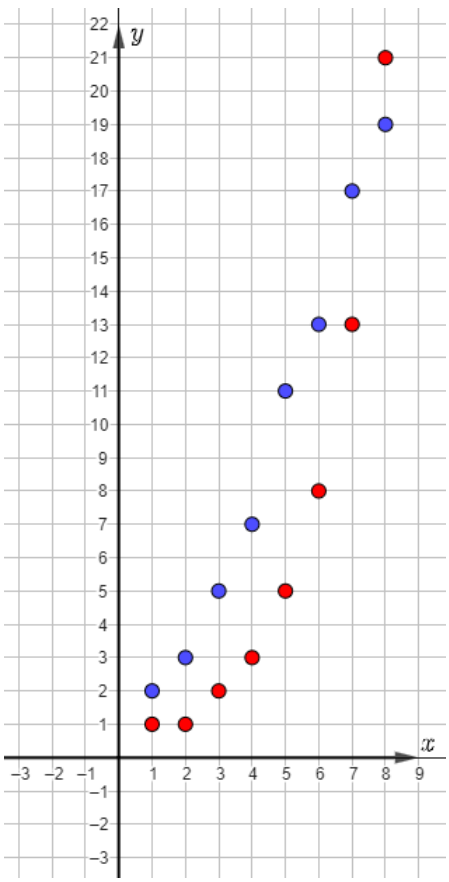


Fonte: Autor.

São apresentadas duas sequências numéricas: A sequência dos Números Primos Positivos e a Sequência de Fibonacci. É proposto aos estudantes que utilizem o mesmo plano cartesiano para representar graficamente ambas as sequências. Nas laterais desta página, eles devem escrever os pares ordenados de todos os termos que são mostrados nas duas sequências.

Os pares ordenados da Sequência dos Números Primos Positivos, que deverão ser escritos do lado esquerdo, são: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$, $(5, 11)$, $(6, 13)$, $(7, 17)$, $(8, 19)$, $(9, 23)$, $(10, 29)$, $(11, 31)$, $(12, 37)$ e $(13, 41)$. Já os pares ordenados da Sequência de Fibonacci, que deverão ser escritos do lado direito, são: $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 5)$, $(6, 8)$, $(7, 13)$, $(8, 21)$, $(9, 34)$, $(10, 55)$, $(11, 89)$, $(12, 144)$ e $(13, 233)$. O gráfico de ambas as sequências, que os estudantes devem construir nesta página da Cartilha, encontra-se disponível na Figura 78.

Figura 78 – Gráficos das Sequências dos Números Primos e de Fibonacci para $x \in I_8$



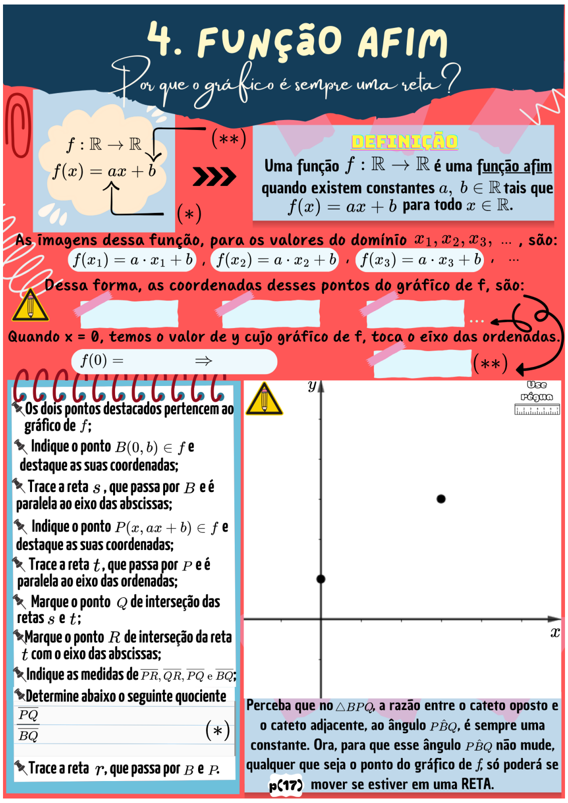
Fonte: Autor.

No final desta página são apresentados dois vídeos através de códigos QR, produzidos pela BBC News Brasil, intitulados *O enigma dos números primos, cuja solução ameaçaria a internet* e *O que é a Sequência de Fibonacci e por que é chamada de 'código secreto da natureza'*.

4.3.4 Capítulo 4: Função Afim

O Capítulo 4 da Cartilha Interativa, aborda o estudo da Função Afim. Nele, investigamos as constantes reais a e b, mencionadas em sua definição, como também o porquê de seu gráfico ser sempre uma linha reta. São explorados os casos particulares de Função Afim: Função Linear, Identidade e Constante. Além disso, abordamos uma aplicação de Função Afim inversa envolvendo criptografia. A Figura 79 ilustra a página 17 da Cartilha.

Figura 79 – Página 17 da Cartilha.



Fonte: Autor.

As primeiras anotações sugeridas aos estudantes, dizem respeito as coordenadas dos pontos do gráfico da Função Afim, para os valores x_1, x_2 e x_3 do domínio. Portanto, eles devem escrever nos três espaços correspondentes, as coordenadas

$$(x_1, a \cdot x_1 + b), \quad (x_2, a \cdot x_2 + b) \quad \text{e} \quad (x_3, a \cdot x_3 + b).$$

Logo em seguida, é proposto o mesmo raciocínio para o valor do domínio igual a zero. No primeiro espaço, os estudantes devem preencher, aplicando a entrada "0" na Função Afim, ou seja,

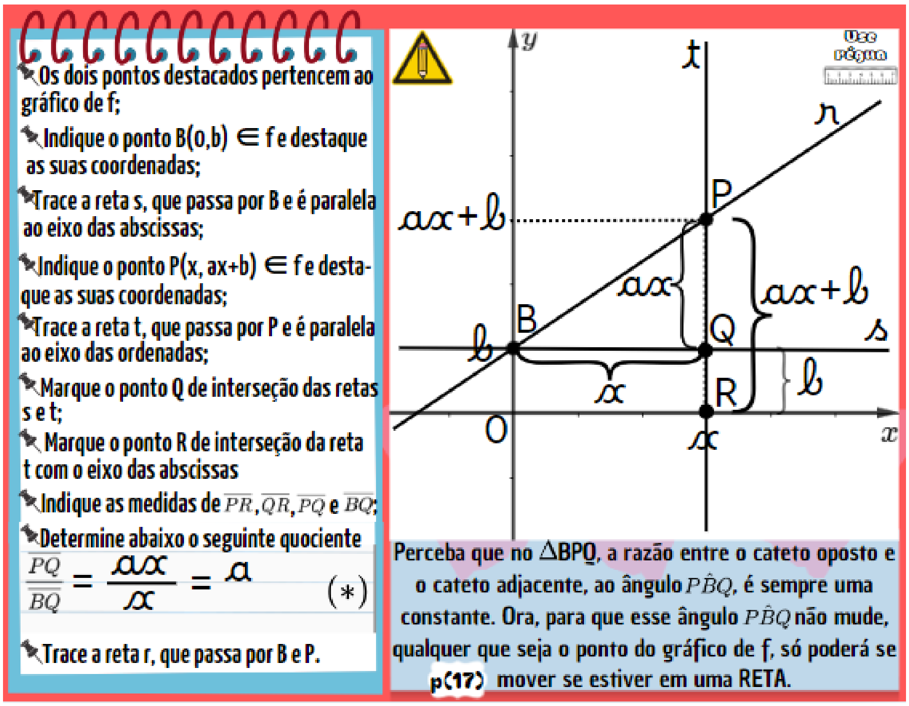
$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b,$$

e, no segundo espaço, ao lado, escrevendo as coordenadas do ponto para $x = 0$, como $(0, b)$.

Note que, neste momento, há a presença de $(**)$ para associar ao segundo coeficiente real, b, indicado na lei de correspondência da Função Afim apresentada no início desta página. A discussão sobre o motivo pelo qual o seu gráfico ser sempre uma linha reta, encerra esta página da Cartilha. É proposto aos estudantes uma demonstração por construção do Teorema 3.2.

Após seguir todas as instruções da Cartilha, as anotações dos estudantes estarão de acordo com a Figura 80.

Figura 80 – Anotações de uma demonstração por construção.

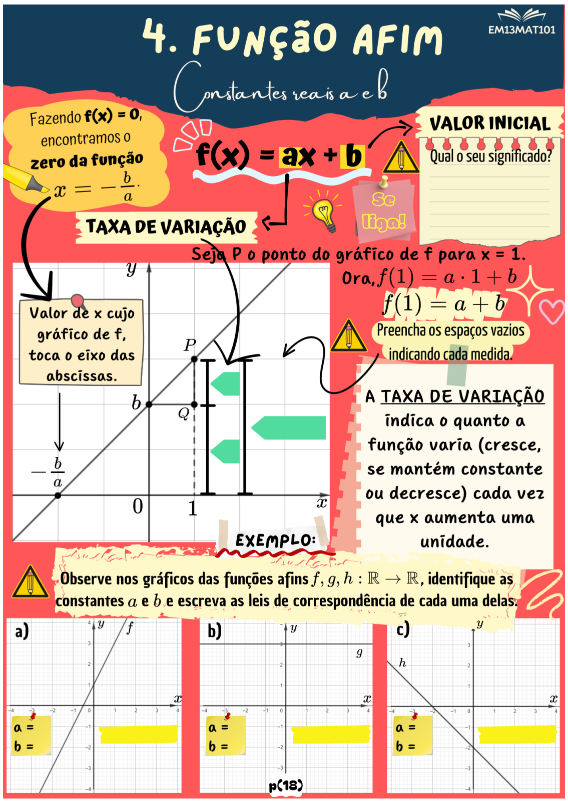


Fonte: Autor.

Perceba que a presença de $(*)$ nas anotações, relaciona esta parte da demonstração com o primeiro coeficiente real, a, de $f(x) = ax + b$ (cujos domínio e contradomínio são $\mathbb{R}$), tratada no início da página. Embora estes coeficiente sejam os objetos principais de estudos da página seguinte, a página 17 já torna possível percebê-los, inclusive, no gráfico utilizado.

Como mencionado, na página 18, o estudo se concentra nas constantes reais a e b, denominadas *taxa de variação* e *valor inicial* da Função Afim, respectivamente. A Figura 81, trás esta página da Cartilha.

Figura 81 – Página 18 da Cartilha.

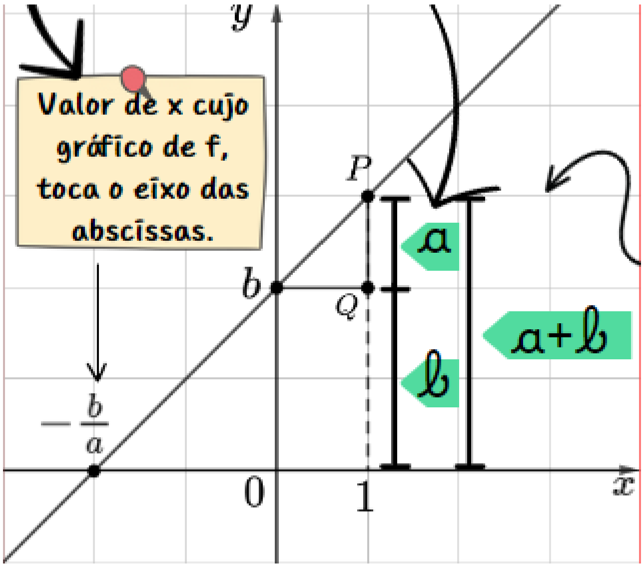


Fonte: Autor.

Além da nomenclatura das constantes reais a e b, é apresentado o número $-\frac{b}{a}$, conhecido por zero da função, valor pelo qual a reta do gráfico intersecta o eixo horizontal. Na sua primeira anotação, o estudante irá responder o significado do coeficiente b, isto é, do valor inicial. Deverá escrever que significa **o valor que o gráfico da Função Afim toca o eixo vertical**.

De maneira similar as anotações feitas na página anterior, indicadas na Figura 80, a atual página da Cartilha explora o comportamento do gráfico desta função. Nesta análise, ao invés de considerar um valor arbitrário de x, é investigado o caso específico em que $x = 1$. Após chegarem a conclusão de que $f(1) = a + b$, os estudantes devem anotar nos três espaços indicados na cor verde, as medidas correspondentes, como mostra a Figura 82. No exemplo proposto os estudantes devem analisar o gráfico das funções e identificar as constantes reais a e b para escrever a lei de correspondência de cada uma delas.

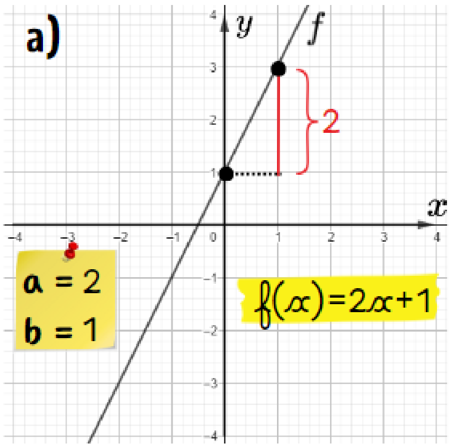
Figura 82 – Significado da taxa de variação.



Fonte: Autor.

A Figura 83, mostra o gráfico do item (a) e o que os estudantes devem escrever nos espaços vazios. O que está indicado em vermelho é meramente explicação. Olhando o eixo das ordenadas, identificamos facilmente o valor inicial da função, $b = 1$. Também é fácil ver que a taxa de variação a, mostra que a função f aumenta duas unidades quando x aumenta uma. Portanto, $a = 2$ e a lei de formação desta função é $f(x) = 2x + 1$.

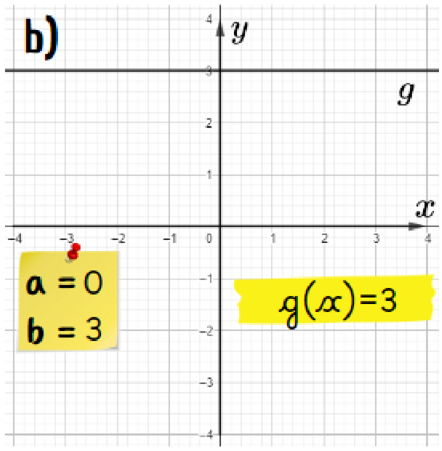
Figura 83 – Identificando no gráfico as constantes reais da função f.



Fonte: Autor.

O gráfico do item (b), com as anotações que devem ser feitas pelos estudantes, é exibido na Figura 84. Observando o eixo das ordenadas, pode-se constatar que $b = 3$. Já a taxa de variação de g é $a = 0$, pois na medida em que x aumenta uma unidade, a função mantém-se sempre constante. Logo, a lei de formação desta função é $g(x) = 3$.

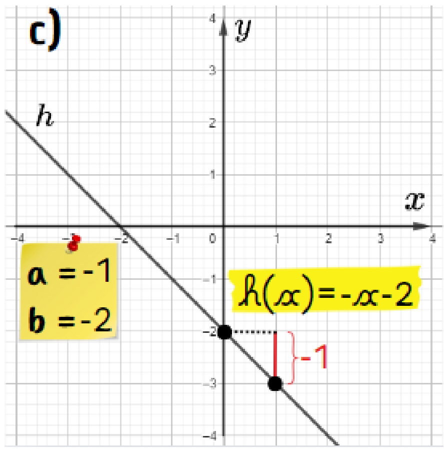
Figura 84 – Identificando no gráfico as constantes reais da função g.



Fonte: Autor.

Por fim, no gráfico que é exibido na Figura 85, podemos observar a função proposta no item (c) e as anotações que os estudantes devem fazer nos espaços apropriados. Novamente, o que está indicado em vermelho é meramente explicativo. Analisando o eixo das ordenadas, percebe-se sem dificuldades o valor inicial da função, $b = -2$. Também é fácil notar que a taxa de variação a, indica que a função h diminui uma unidade conforme x aumenta uma, portanto, $a = -1$, e a lei de formação desta função é $h(x) = -x - 2$.

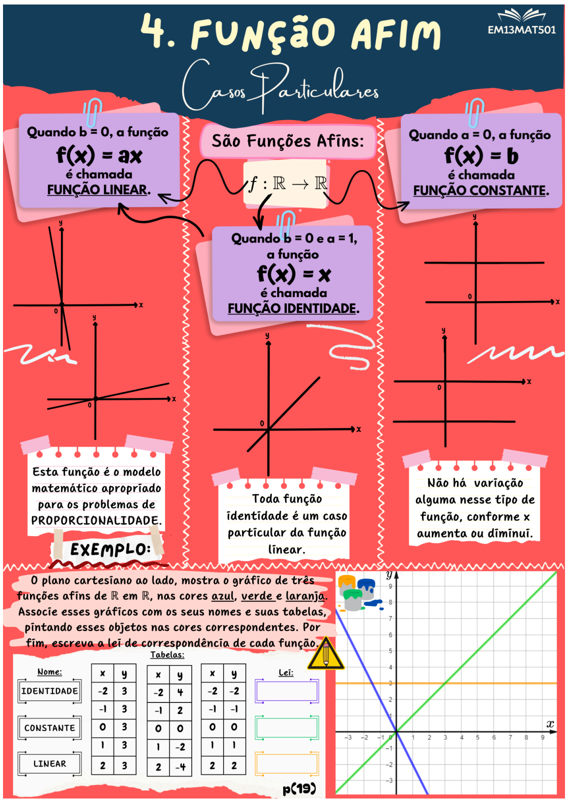
Figura 85 – Identificando no gráfico as constantes reais da função h.



Fonte: Autor.

A página 19 da Cartilha, explora os casos particulares da Função Afim: a Função Linear, a Função Identidade e a Função Constante, como mostra a Figura 86.

Figura 86 – Página 19 da Cartilha.



Fonte: Autor.

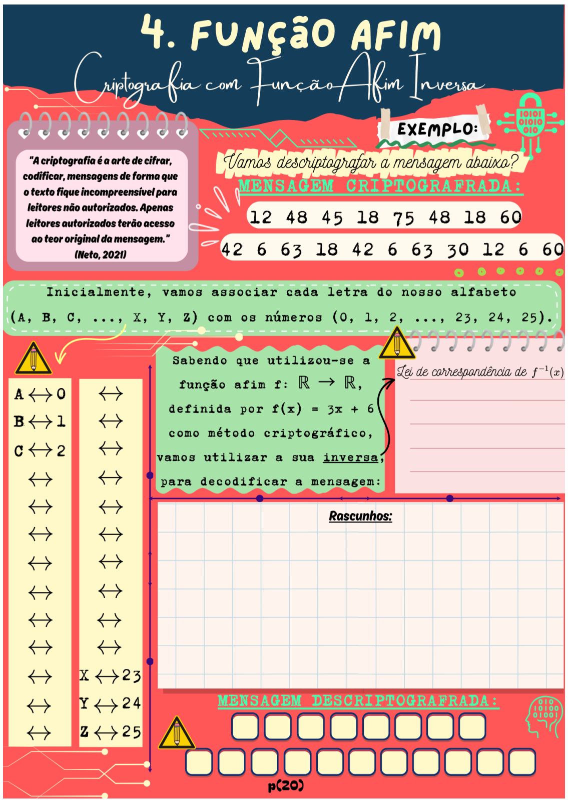
Feita a abordagem desses conceitos, são apresentados aos estudantes os gráficos de três funções, de ℝ em ℝ, construídos no mesmo plano cartesiano, cada um numa cor diferente. Além disso, são dados os nomes dos três casos particulares da Função Afim, estudados, e também três tabelas contendo valores. É solicitado aos estudantes que associem o gráfico da função a sua tabela e ao seu nome, pintando estes elementos nas mesmas cores e que, por fim, escrevam a lei de correspondência de cada função. A Figura 87, mostra a solução deste problema.

Figura 87 – Solução da página 19 da Cartilha.

Fonte: Autor.

Finalizando o estudo de Função Afim a página 20, indicada na Figura 88, trás a “Criptografia com Função Afim inversa”, uma aplicação de Função Inversa enunciada na página 5 da Cartilha.

Figura 88 – Página 20 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Os estudantes são desafiados a descriptografarem uma mensagem, utilizando a Função Afim inversa. Para isto, eles devem inicialmente preencher os espaços vazios das tabelas da cartilha, associando cada letra ao seu número natural correspondente, conforme mostra a Figura 89.

Figura 89 – Valor numérico de cada letra no método criptográfico.

A↔0	N↔13
B↔1	O↔14
C↔2	P↔15
D↔3	Q↔16
E↔4	R↔17
F↔5	S↔18
G↔6	T↔19
H↔7	U↔20
I↔8	V↔21
J↔9	W↔22
K↔10	X↔23
L↔11	Y↔24
M↔12	Z↔25

Fonte: Autor.

Em seguida, devem encontrar a lei de correspondência da inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 3x + 6$. Como trata-se de uma Função Afim definida dos reais para os reais, ela é bijetiva e, portanto, admite inversa. Os estudantes deverão utilizar o espaço específico para encontrar a $f^{-1}(x)$. Trocando x por y na função $y = 3x + 6$ e isolando o "novo" y, obterão,

$$x = 3y + 6 \Rightarrow x - 6 = 3y \Rightarrow \frac{x-6}{3} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-6}{3}.$$

A seguir, vemos a mensagem criptografada.

12 48 45 18 75 48 18 60

42 6 63 18 42 6 63 30 12 6 60

De acordo com a Cartilha, para descriptografar a mensagem, basta que os estudantes apliquem essas numerações na Função Inversa. Os resultados obtidos correspondem as letras da mensagem original, segundo a tabela mostrada na Figura 89. Todos os cálculos que os estudantes deverão realizar na Cartilha, são

$$\begin{aligned} f^{-1}(12) &= \frac{12-6}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \\ &\mapsto \textbf{C}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}(48) &= \frac{48-6}{3} \\ &= \frac{42}{3} \\ &= 14 \\ &\mapsto \textbf{O}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(45) &= \frac{45-6}{3} \\ &= \frac{39}{3} \\ &= 13 \\ &\mapsto \textbf{N}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}(18) &= \frac{18-6}{3} \\ &= \frac{12}{3} \\ &= 4 \\ &\mapsto \textbf{E}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(75) &= \frac{75-6}{3} \\ &= \frac{69}{3} \\ &= 23 \\ &\mapsto \textbf{X}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}(60) &= \frac{60-6}{3} \\ &= \frac{54}{3} \\ &= 18 \\ &\mapsto \textbf{S}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(42) &= \frac{42-6}{3} \\ &= \frac{36}{3} \\ &= 12 \\ &\mapsto \textbf{M}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}(6) &= \frac{6-6}{3} \\ &= \frac{0}{3} \\ &= 0 \\ &\mapsto \textbf{A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(63) &= \frac{63-6}{3} \\ &= \frac{57}{3} \\ &= 19 \\ &\mapsto \textbf{T}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1}(30) &= \frac{30-6}{3} \\ &= \frac{24}{3} \\ &= 8 \\ &\mapsto \textbf{I}. \end{aligned}$$

Portanto, a mensagem decodificada será:

C O N E X Õ E S

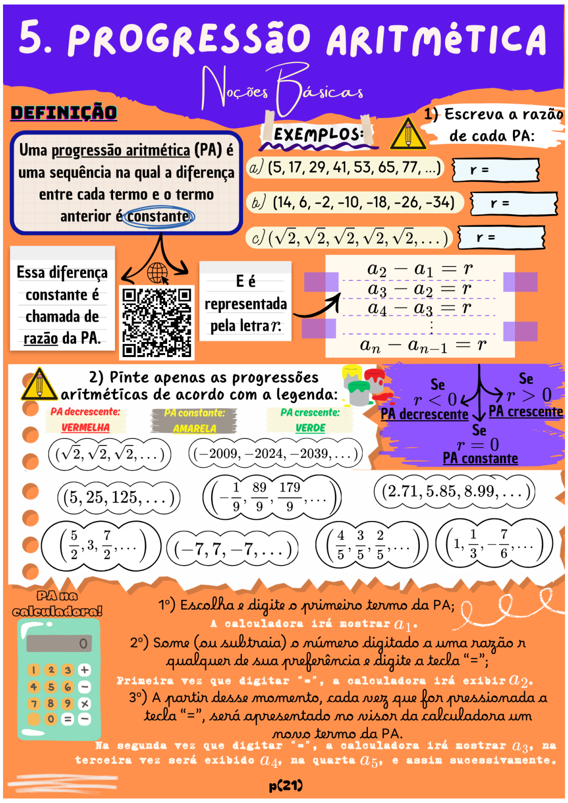
M A T E M Á T I C A S

4.3.5 Capítulo 5: Progressão Aritmética

No Capítulo 5 abordamos as Progressões Aritméticas (PAs). Investigamos noções básicas como sua definição e exploramos a ideia de diferença comum da razão da progressão, associando a ela, os tipos de PAs: crescente, constante ou decrescente. Buscamos fazer a construção do termo geral e da soma de todos os termos de uma Progressão Aritmética a partir da análise de casos particulares até chegar nas generalizações.

A página 21 apresenta a definição de PA e uma explicação dos tipos dessas progressões. Além disso, trás dois exemplos, uma investigação com o uso de calculadora e um código QR, como mostra a Figura 90.

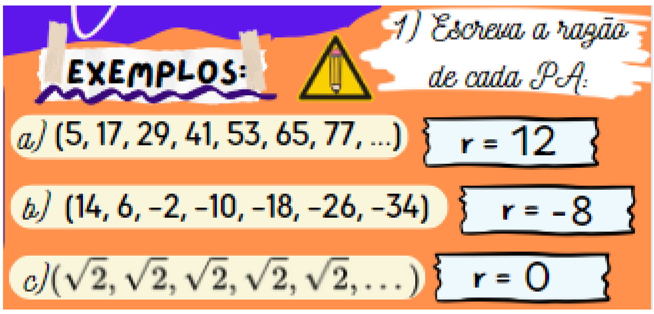
Figura 90 – Página 21 da Cartilha.



Fonte: Autor.

No primeiro exemplo, os estudantes devem informar a razão das três PAs dadas. Fazendo, por exemplo, $17 - 5 = 12$ no item (a), $6 - 14 = -8$ no item (b) e $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ no item (c), eles preencherão os espaços específicos da Cartilha como mostra a Figura 91.

Figura 91 – Solução do Exemplo 1 da página 21.



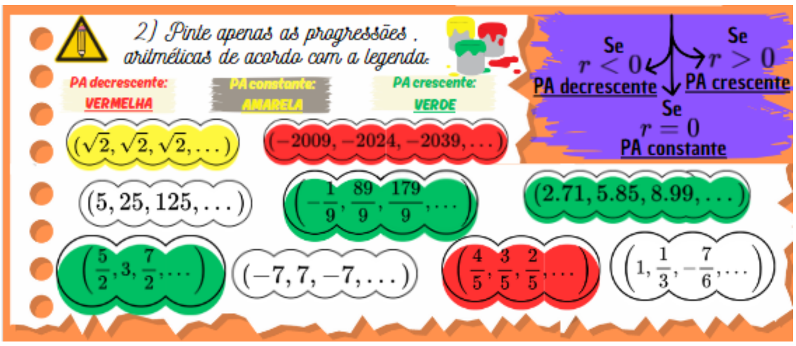
Fonte: Autor.

Já no segundo exemplo são dadas 9 sequências infinitas, as quais os estudantes devem pintá-las nas cores vermelha, amarela e verde, indicando PAs decrescente, constante e crescente, respectivamente. Vamos analisar cada uma delas.

- A sequência $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \cdots)$ é uma PA de razão $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, sendo assim, é constante e neste caso, deve ser pintada de amarelo;
- A sequência $(-2009, -2024, -2039, \cdots)$ é uma PA decrescente, pois sua razão $-2024 - (-2009) = -2039 - (-2024) = -15$ e desse modo, deve ser pintada na cor vermelha;
- A sequência $(5, 25, 125, \cdots)$ não é uma PA pois $25 - 5 = 20$ é diferente de $125 - 25 = 100$. Neste caso, esta sequência não deverá ser pintada de cor alguma;
- A sequência $\left(-\frac{1}{9}, \frac{89}{9}, \frac{179}{9}, \cdots\right)$ é uma PA cuja razão vale $\frac{89}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{179}{9} - \frac{89}{9} = 10$. Logo, trata-se de uma PA crescente e deverá ser pintada na cor verde;
- A sequência $(2.71, 5.85, 8.99, \cdots)$ também é uma PA crescente, pois sua razão $5.85 - 2.71 = 8.99 - 5.85 = 3.14$ e consequentemente, deve ser pintada na cor vermelha;
- A sequência $\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \cdots\right)$ também deverá ser pintada de verde, uma vez que, possui razão $3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$, sendo uma PA crescente;
- A sequência $(-7, 7, -7, \cdots)$ não será pintada de nenhuma cor, pois $7 - (-7) = 14$ é diferente de $-7 - 7 = -14$. Dessa forma, não é uma Progressão Aritmética;
- A sequência $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \cdots\right)$ é uma PA de razão $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$. Portanto, será pintada de vermelho já que trata-se de uma PA decrescente;
- A sequência $\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{7}{6}, \cdots\right)$ também não é uma PA pois $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ é diferente de $-\frac{7}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}$. Por isso, não deverá ser pintada de nenhuma cor.

A Figura 92, mostra as sequências que devem ser pintadas nas cores corretas.

Figura 92 – Solução do Exemplo 2 da página 21.



Fonte: Autor.

No final da página 21 da Cartilha há uma sugestão de investigação para ser realizada com o auxílio da calculadora. Caso a escola possua esses equipamentos o professor pode levá-los para a sala de aula. Do contrário, caso os estudantes possuam um aparelho celular e seja permitido o seu uso para fins pedagógicos na escola, esta atividade poderá ser feita também com a calculadora do celular. Os detalhes desta investigação estão descritos na Cartilha, no entanto, utilizaremos um exemplo para ilustrá-la. Suponhamos que o estudante escolha digitar o número 123 na calculadora, este será o primeiro termo da PA.

Neste momento, o estudante decidirá se vai somar ou subtrair com outro número também de sua preferência. Se utilizar a adição formará uma PA crescente e do contrário, caso escolha a subtração, irá formar uma PA decrescente. Suponhamos que o estudante escolha subtrair 17. Pressionando a tecla de resultado da calculadora "=", o visor da calculadora exibirá o segundo termos da PA, no nosso exemplo, $123-17 = 106$.

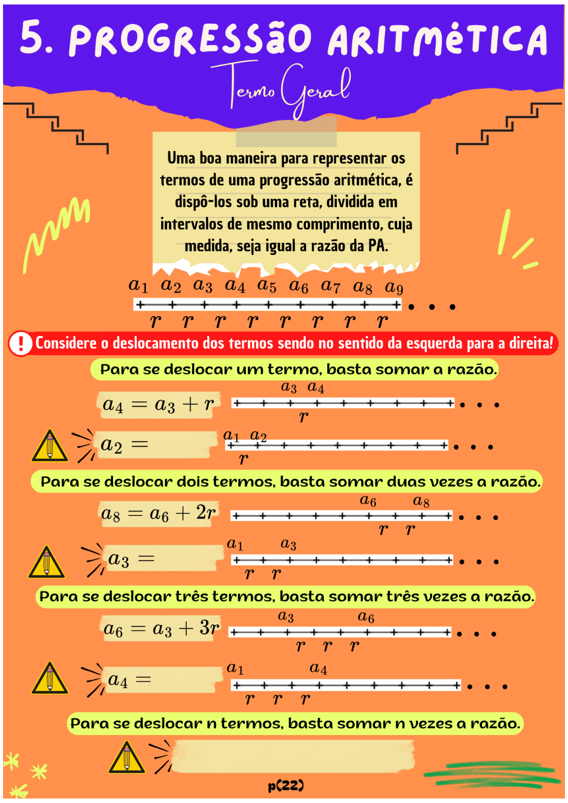
A partir deste momento, todas as vezes que for pressionada a tecla "=", a calculadora irá mostrar um novo termo da Progressão Aritmética, ou seja, 89, 72, 55, etc. Portanto a PA hipotética, de razão -17, que utilizamos para ilustrar esta atividade de investigação é

$$(123, 106, 89, 72, 55, 38, 21, 4, -13, -30, -47, -64, -81, \cdots).$$

O código QR disponível nesta página, direciona a um dos recursos matemáticos gratuitos sobre Progressões Aritméticas, da plataforma britânica *Trasum Mathematics*, em que os estudantes são submetidos ao primeiro de quatro níveis de exercícios sobre PA.

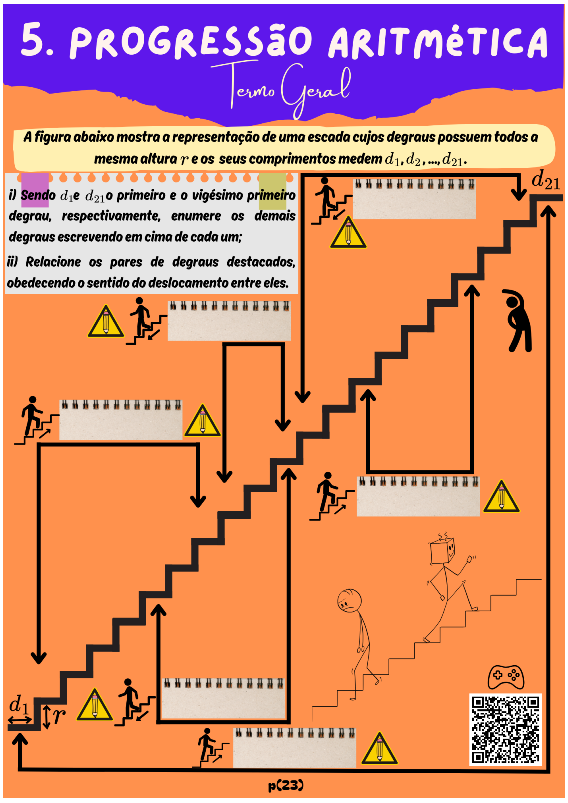
As páginas 22 e 23 da Cartilha sugerem duas representações diferentes para os termos de uma PA e as utilizam para explorar o termo geral da Progressão Aritmética. A Figura 93 utiliza uma linha reta com os termos da PA igualmente espaçados entre si e a Figura 94, manipula uma escada para representar esses termos.

Figura 93 – Página 22 da Cartilha.



Fonte: Autor

Figura 94 – Página 23 da Cartilha.



Fonte: Autor

Como informado na página 22 da Cartilha, os deslocamentos propostos entre um termo e outro são feitos sempre no sentido da esquerda para a direita. Para o primeiro exercício, o estudante deverá relacionar o primeiro com o segundo termo, escrevendo no espaço correspondente

$$a_2 = a_1 + r.$$

No segundo exercício, o estudante vai relacionar o primeiro com o terceiro termo, anotando no espaço apropriado

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot r.$$

Já no terceiro exercício, o estudante irá relacionar o primeiro com o quarto termo, informando no espaço adequado

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot r.$$

Mantendo este padrão, espera-se que o estudante consiga generalizar esta situação no quarto exercício, relacionando o primeiro com o n-ésimo termo, registrando no espaço próprio

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Os degraus da escada utilizada para representar os termos de uma Progressão Aritmética, indicada na página 23 da Cartilha, tem o mesmo comprimento $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{21}$ e mesma altura, igual à razão da PA. Os estudantes devem inicialmente nomear cada degrau entre o 1° e o 21°, utilizando as variáveis indexadas $d_2, d_3, d_4, \cdots, d_{20}$. Em seguida, devem relacionar os degraus indicados pelas setas respeitando o sentido do deslocamento (subindo ou descendo a escada), conforme é indicado em cada imagem. Vamos analisar cada situação descrevendo os exemplos propostos na ordem da parte superior da página para a parte inferior da mesma.

- Para descer do 20° para o 12° degrau temos

$$d_{12} = d_{20} - 8 \cdot r.$$

- Para descer do 11° para o 9° degrau temos

$$d_9 = d_{11} - 2 \cdot r.$$

- Para subir do 2° para o 8° degrau temos

$$d_8 = d_2 + 6 \cdot r.$$

- Para subir do 14° para o 18° degrau temos

$$d_{18} = d_{14} + 4 \cdot r.$$

- Para descer do 11° para o 6° degrau temos

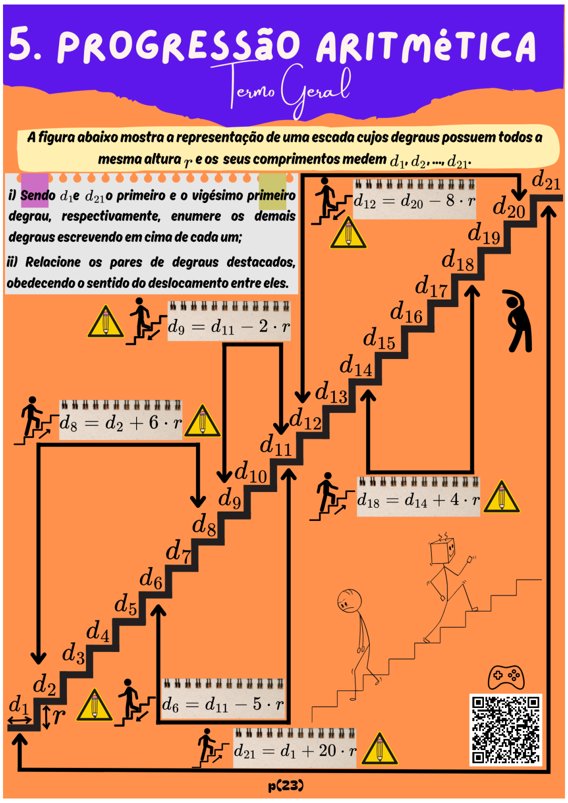
$$d_6 = d_{11} - 5 \cdot r.$$

- Para subir do 1° para o 21° degrau temos

$$d_{21} = d_1 + 20 \cdot r.$$

A Figura 95, mostra a página 23 da Cartilha com as anotações que deverão ser feitas pelos estudantes.

Figura 95 – Página 21 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Ao final da página 23 da Cartilha, incluímos um código QR que direciona para a plataforma israelense de jogos educativos matemáticos, *Matific*. No link temos o jogo "Complete Sequências Aritméticas" no qual o estudante deve informar a quantidade correta de blocos necessária para preencher os espaços vazios da Progressão Aritmética fornecida.

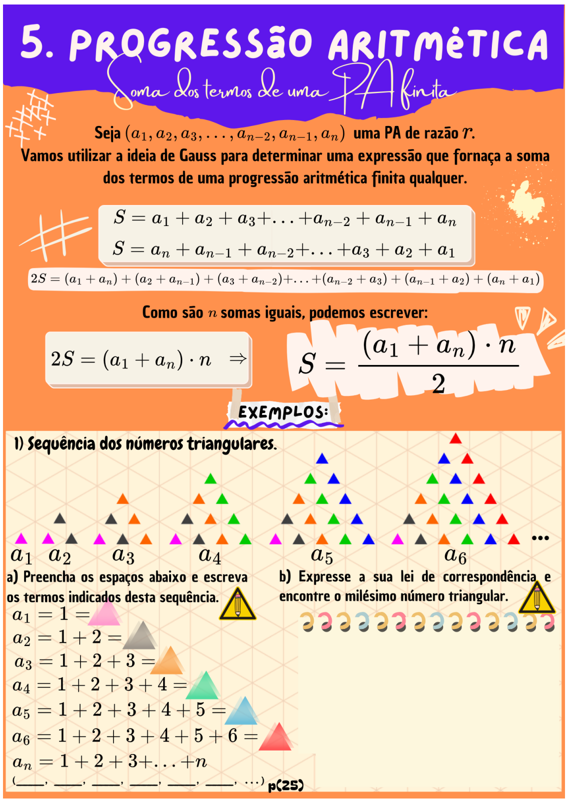
Na página 24, que podemos observar na Figura 96, a Cartilha se apropria de História da Matemática para explicar como Carl Friedrich Gauss, um matemático alemão que viveu nos séculos XVIII e XIX, somou uma longa sequência numérica de forma engenhosa e rápida, ainda na sua infância. Nesta página da Cartilha, os estudantes são incentivados à leitura não havendo quaisquer outras interações a serem realizadas. A ideia notável de Gauss, é a base da demonstração da soma dos termos de uma Progressão Aritmética que é explorada nas três páginas seguintes que encerram o capítulo 5.

Figura 96 – Página 24 da Cartilha.

Fonte: Autor.

A página 25 da Cartilha está indicada na Figura 97. Nesta página fazemos a demonstração da fórmula que permite calcular a soma de todos os termos de uma Progressão Aritmética finita.

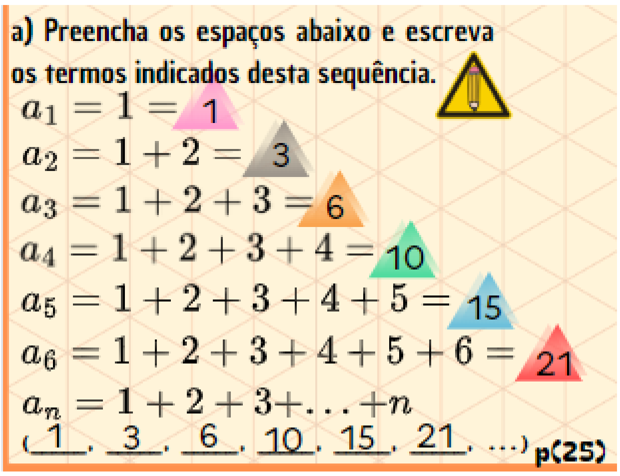
Figura 97 – Página 25 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Logo em seguida é apresentada no exemplo 1 a Sequência dos Números Triangulares. No **item (a) do exemplo 1**, é solicitado aos estudantes que preencham os espaços vazios indicando cada termo e a representação da sequência apresentada. A Figura 98 mostra as anotações que devem ser feitas por eles.

Figura 98 – Solução do item (a) do Exemplo 1 da página 25.



Fonte: Autor.

Para solucionar a primeira parte do problema proposto no **item (b) do exemplo**

1 da página 25, devemos expressar a lei de correspondência da Sequência dos Números Triangulares. Neste momento espera-se que o estudante perceba o padrão envolvido na sequência dada, ou seja, que cada termo n é obtido pela soma dos números naturais de 1 até n. Além disso, espera-se também que o estudante perceba, que a sequência dos números naturais $(1, 2, 3, \cdots, n)$ é uma PA de razão igual a 1.

Para calcular a soma dos termos da Progressão Aritmética $(1, 2, 3, \cdots, n)$, que corresponde a lei da sequência proposta, o estudante deverá utilizar a fórmula provada na página 25 da Cartilha, indicada na Figura 97, isto é,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \tag{4.1}$$

Mas como $r = 1$, $a_1 = 1$ e $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, tem-se

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1 + (n-1) \cdot 1 = 1 + n - 1 = n. \tag{4.2}$$

Substituindo a Equação (4.2) na Equação (4.1), o estudante encontrará a lei de correspondência procurada,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + n) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}. \tag{4.3}$$

Ora, pelo item (a) do exemplo 1 a sequência é dada por $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, portanto,

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}. \tag{4.4}$$

Vamos utilizar a Equação (4.4) para determinar o milésimo número triangular e resolver a segunda parte do item (b) do exemplo 1 da página 25. Assim,

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1000^2 + 1000}{2} = 500500.$$

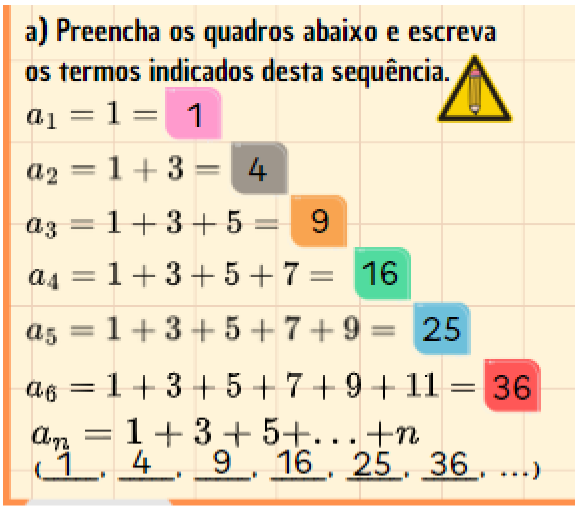
A Figura 99 mostra a página 26 da Cartilha. Nesta página é apresentado o exemplo 2 que aborda a Sequência dos Números Quadrangulares e iniciada uma discussão acerca da conexão existente entre a atual sequência e a dos Números Triangulares vista no exemplo anterior.

Figura 99 – Página 26 da Cartilha.

Fonte: Autor.

Para o **item (a) do exemplo 2**, novamente é solicitado aos estudantes que escrevam nos espaços vazios cada um dos termos e a representação da Sequência dos Números Quadrangulares. A Figura 100 mostra as anotações que devem ser feitas por eles.

Figura 100 – Solução do item (a) do Exemplo 2 da página 26.



Fonte: Autor.

O **item (b) do exemplo 2** desta página, é proposto aos estudantes expressar a lei de correspondência da Sequência dos Números Quadrangulares e encontrar o 100° termo desta sequência.

Para solucionar a primeira parte deste problema os estudantes devem notar a regularidade envolvida na Sequência dos Números Quadrangulares, isto é, que cada termo n da Sequência dos Números Quadrangulares é obtido através da soma dos n primeiros números ímpares positivos começando do 1. Ademais que a sequência $(1, 3, 5, \cdots, n)$ é uma PA de razão igual a 2. Para encontrar a lei da sequência proposta o estudante deve calcular a soma dos termos da Progressão Aritmética $(1, 3, 5, \cdots, n)$, utilizando a fórmula demonstrada na página 25 da Cartilha, indicada na Figura 97, isto é,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \tag{4.5}$$

Mas desta vez, $r = 2$, $a_1 = 1$ e $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, tem-se

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1. \tag{4.6}$$

Substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.5), o estudante encontrará a lei de correspondência procurada,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[1 + (2n - 1)] \cdot n}{2} = \frac{[n + 2n^2 - n]}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2. \tag{4.7}$$

Ora, pelo item (a) do exemplo 2 a sequência é dada por $a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + n$, portanto,

$$a_n = n^2. \tag{4.8}$$

Vamos utilizar a Equação (4.8) para determinar o centésimo número quadrangular e solucionar a segunda parte do item (b) do exemplo 2 da página 26. Assim,

$$a_n = n^2 = 100^2 = 10000.$$

No final da página 26 a Cartilha explora a relação que existe entre as Sequências dos Números Triangulares e Quadrangulares. Isto ocorre no primeiro de cinco itens que continuarão na página seguinte. No **item (I)**, os estudantes são orientados e escrever em parte de uma planilha fornecida os dez primeiros termos de três sequências numéricas: Naturais, Triangulares e Quadrangulares. A Figura 101 mostra a planilha preenchida.

Figura 101 – Solução do item (I) da página 26.

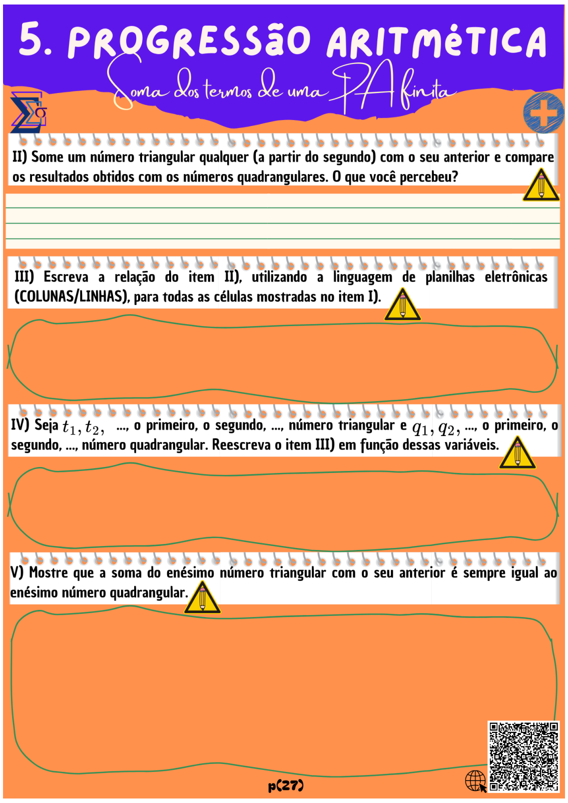
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Números Naturais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Números Triangulares (T_n)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
3	Números Quadrangulares (Q_n)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Fonte: Autor.

O código QR disponível no final da página 26 da Cartilha, acessa a planilha completa “Planilha_Cartilha_Interativa_Thiago_PROFMAT_UFCG” elaborada e armazenada no *Google Planilhas*. O estudante poderá observar vários outros números destas sequências simplesmente clicando e arrastando para a direita a alça de preenchimento, que é o cursor do mouse quando posicionado no canto inferior direito de qualquer célula. Para o funcionamento adequado, o estudante deverá arrastar para a direita as células na seguinte ordem: C1, C2 e B3.

A página 27 é exibida na Figura 102, onde é finalizada a discussão sobre a conexão entre os números triangulares e os números quadrangulares. O **item (II)** propõe o estudante escolher algum número triangular e adicionar ao número triangular anterior a ele. Realizada esta operação ele deve comparar a soma obtida com os números quadrangulares. Para tomar essas decisões ele poderá analisar a planilha da Figura 101 disponível na página 26 da Cartilha.

Figura 102 – Página 27 da Cartilha.



Fonte: Autor.

Para efeito de ilustração vamos considerar três possíveis escolhas

$$6 + 3 = 9, \quad 21 + 15 = 36 \quad \text{e} \quad 55 + 45 = 100.$$

Espera-se que o estudante perceba que, pelo menos para os números escolhidos, a soma entre dois números triangulares consecutivos está resultando em um número quadrangular.

- Na soma $6 + 3 = 9$ podemos observar que o segundo triangular adicionado ao primeiro triangular tem como resultado o segundo quadrangular;
- Na soma $21+15 = 36$ temos que o sexto triangular adicionado ao quinto triangular tem como resultado o sexto quadrangular;
- Na soma $55 + 45 = 100$ verificamos que o décimo triangular adicionado ao nono triangular resulta no décimo quadrangular.

No **item (III)** o estudante irá representar a relação percebida entre todos os números triangulares e quadrangulares distribuídos na planilha do item (I), utilizando a linguagem de planilha eletrônica para indicar cada célula. Assim, o estudante irá escrever

$$C2 + B2 = C3, \quad D2 + C2 = D3, \quad E2 + D2 = E3,$$
$$F2 + E2 = F3, \quad G2 + F2 = G3, \quad H2 + G2 = H3,$$
$$I2 + H2 = I3, \quad J2 + I2 = J3, \quad K2 + J2 = K3.$$

Para responder o **item (IV)**, os estudantes deverão utilizar as variáveis indexadas $t_1, t_2, \cdots$, para representar os números triangulares e $q_1, q_2, \cdots$, para representar os números quadrangulares. Dessa forma, as relações expressas no item (III), serão

$$t_2 + t_1 = q_2, \quad t_3 + t_2 = q_3, \quad t_4 + t_3 = q_4,$$
$$t_5 + t_4 = q_5, \quad t_6 + t_5 = q_6, \quad t_7 + t_6 = q_7,$$
$$t_8 + t_7 = q_8, \quad t_9 + t_8 = q_9, \quad t_{10} + t_9 = q_{10}.$$

Finalmente, no **item (V)**, o estudante irá usar as leis de correspondências das Sequências dos Números Triangulares e Quadrangulares, que estão nas Equações (4.4) e (4.8). Fazendo as mudanças de variável, utilizando t_n para a Sequência dos Números Triangulares e q_n para a Sequência dos Números Quadrangulares, temos

$$\begin{aligned}
t_n + t_{n-1} &= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} \\
&= \frac{2n^2}{2} \\
&= n^2 \\
&= q_n.
\end{aligned}$$

Ao escanear o código QR no final da página 27 da Cartilha, o estudante será direcionado a um questionário do site *Mathopolis* que revisa Progressão Aritmética de forma interativa. Esta plataforma, que é hospedada em Cingapura, oferece uma diversidade de exercícios, jogos e atividades para reforçar conceitos matemáticos de maneira prática, divertida e totalmente gratuita.

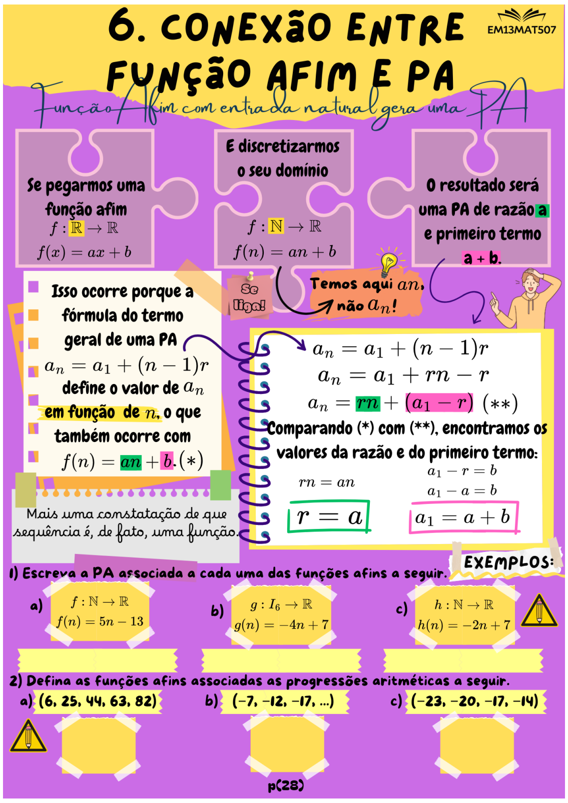
4.3.6 Capítulo 6: Conexão entre Função Afim e PA

O capítulo final da Cartilha aborda a Matemática integrada, explorando a ligação entre Função Afim e Progressão Aritmética. Analisa-se como uma Função Afim pode gerar uma Progressão Aritmética e, quando isso ocorre, de que maneira essa progressão se relaciona com as constantes reais da função.

Além disso, os estudantes investigarão, tanto o que acontece com uma Progressão Aritmética quando há um aumento de uma unidade na variável independente da Função Afim que gera esta PA, como também o que ocorre com uma Função Afim, quando inserimos no seu domínio somente termos de uma Progressão Aritmética qualquer.

Neste sexto capítulo será explorada a construção de gráficos de Progressões Aritméticas e de suas Funções Afins correspondentes, favorecendo a visualização das conexões estudadas entre esses conceitos. A página 28 da Cartilha exibida na Figura 103, mostra que toda Função Afim com entrada natural, gera uma Progressão Aritmética de razão igual a taxa de variação dessa função, e primeiro termo, igual a soma das constantes reais dela.

Figura 103 – Página 28 da Cartilha.



Fonte: Autor.

No primeiro exemplo os estudantes terão que escrever nos espaços vazios a Progressão Aritmética relacionada as Funções Afins, de domínio discreto, que são dadas. A função f mostrada no **item (a) do exemplo 1** possui domínio $\mathbb{N}$, o que nos leva a concluir que sua Progressão Aritmética é infinita. Outrossim, como a lei de correspondência da função é $f(n) = 5n - 13$, podemos dizer que a razão da PA é 5 e o primeiro termo vale $5 + (-13) = -8$. Portanto, a Progressão Aritmética associada a função f é

$$(-8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots).$$

Já o domínio da função g dada no **item (b) do exemplo 1** é I_6 e, neste caso, a PA relacionada a esta função é finita e possui 6 termos. Por outro lado, a lei de correspondência desta função é $g(n) = -4n + 7$ e, por consequência, a razão da Progressão Aritmética vale -4 e o primeiro termo é igual a $-4 + 7 = 3$. Logo, a PA associada a função g é

$$(3, -1, -5, -9, -13, -17).$$

Por fim, a função h apresentada no **item (c) do exemplo 1** também possui domínio $\mathbb{N}$ e, consequentemente, a sua Progressão Aritmética será infinita. Ora, a lei de correspondência da função é $h(n) = -2n + 7$ e desse modo, concluímos que a razão da PA é -2 e o primeiro termo é $-2 + 7 = 5$. Portanto, a Progressão Aritmética associada a função h é

$$(5, 3, 1, -1, -3, -5, \dots).$$

Já no segundo exemplo os estudantes farão o caminho inverso em relação ao exemplo anterior, ou seja, dadas as Progressões Aritméticas, terão que definir suas Funções Afins associadas. Por serem sequências numéricas, os estudantes podem considerar o contradomínio sendo o conjunto dos números reais. No **item (a) do exemplo 2** é dada a PA $(6, 25, 44, 63, 82)$. Os estudantes podem chamar de f a sua Função Afim associada. Por ser finita com 5 termos, o domínio desta função é I_5. A taxa de variação de f será $25 - 6 = 19$ que é a razão da Progressão Aritmética, então $a = 19$. Já o valor inicial da função, indicado por b, será obtido fazendo $a_1 = a + b$, ou seja, $6 = 19 + b$ que implica $b = -13$. Portanto, a função f será assim definida

$$f : I_5 \to \mathbb{R}$$

$$f(n) = 19n - 13.$$

A Progressão Aritmética $(-7, -12, -17, \dots)$ é dada no **item (b) do exemplo 2**. Chamando de g a sua Função Afim associada, espera-se que os estudantes percebam que o domínio desta função é $\mathbb{R}$, pois é uma PA infinita. O valor de a que corresponde a taxa de variação da função g, será $-12 - (-7) = -5$ que é a razão da PA. E o valor inicial b, será facilmente encontrado fazendo $a_1 = a + b$, ou seja, $-7 = -5 + b$ que implica em $b = -2$. Logo, a função g será definida

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(n) = -5n - 2.$$

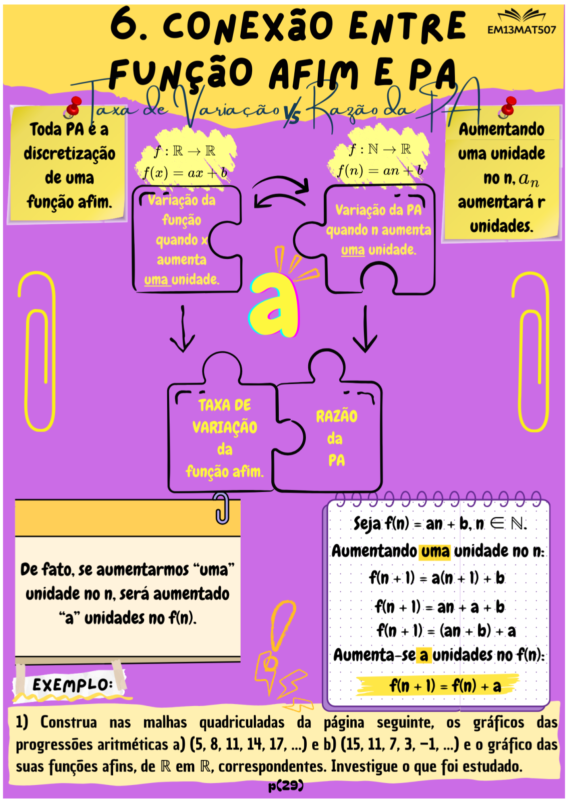
Finalmente no **item (c) do exemplo 2** temos a PA também finita, $(-23, -20, -17, 14)$. Supondo que os estudantes chamem de h a Função Afim associada. Por ter apenas 4 termos, o domínio desta função será I_4. A taxa de variação da função h será $a = 3$, pois equivale a razão da Progressão Aritmética, $-20 - (-23) = 3$. Além disso, o valor inicial da função será $b = -26$, uma vez que, $a_1 = a + b$ tem-se $-23 = 3 + b$. Então, a função h será assim definida

$$h : I_4 \to \mathbb{R}$$

$$h(n) = 3n - 26.$$

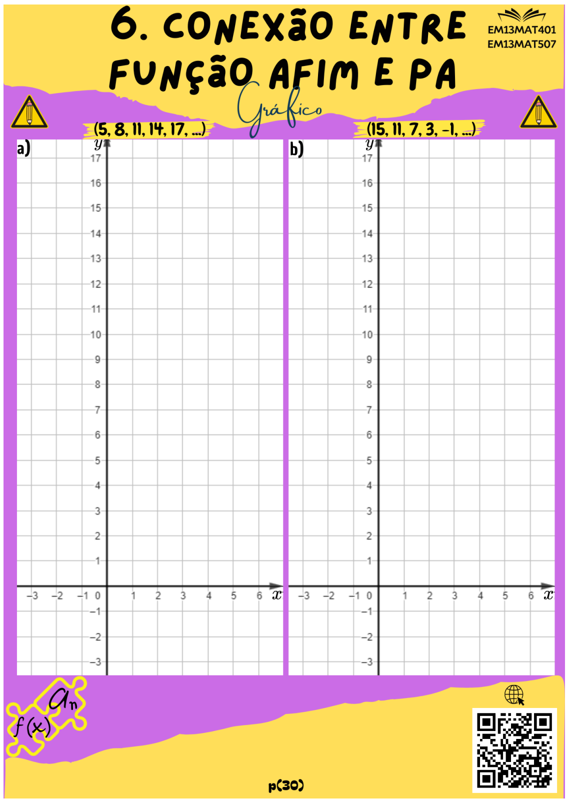
As páginas 29 e 30 da Cartilha estão representadas, nessa ordem, nas Figuras 104 e 105. É explorada na página 29 a conexão entre a taxa de variação da Função Afim e a Progressão Aritmética. Além da investigação do que ocorre com a Função Afim, restrita aos números naturais, na medida em que é dado um aumento de uma unidade na sua variável independente. No final da página 29 da Cartilha é proposto um exemplo para ser solucionado na página 30.

Figura 104 – Página 29 da Cartilha.



Fonte: Autor

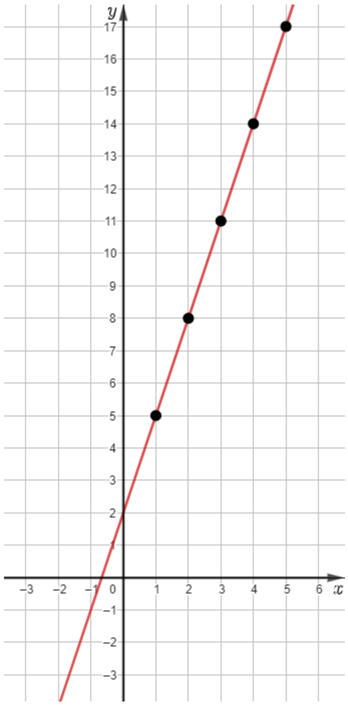
Figura 105 – Página 30 da Cartilha.



Fonte: Autor

A Progressão Aritmética dada no **item (a)** é $(5, 8, 11, 14, 17, \ldots)$. Então, as coordenadas $(1, 5)$, $(2, 8)$, $(3, 11)$, $(4, 14)$, $(5, 17)$, $\ldots$, representam os pontos de parte do gráfico desta PA. Espera-se que o estudante perceba que o gráfico desta Progressão Aritmética não se limita apenas aos cinco pontos marcados. Por outro lado, a linha reta que passa por esses pontos, representa o gráfico da Função Afim associada a PA dada, definida dos reais para os reais, por $f(x) = 3x + 2$. Os gráficos da Progressão Aritmética e da Função Afim do item (a), estão representados na Figura 106. Ao analisarem a Figura 106, esperamos que os estudantes consigam perceber que o gráfico da PA é a restrição do gráfico da Função Afim aos naturais $\mathbb{N}$. E que cada aumento de uma unidade dado em $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder um aumento, igual a razão da PA, de 3 unidades na Progressão Aritmética $f(n)$.

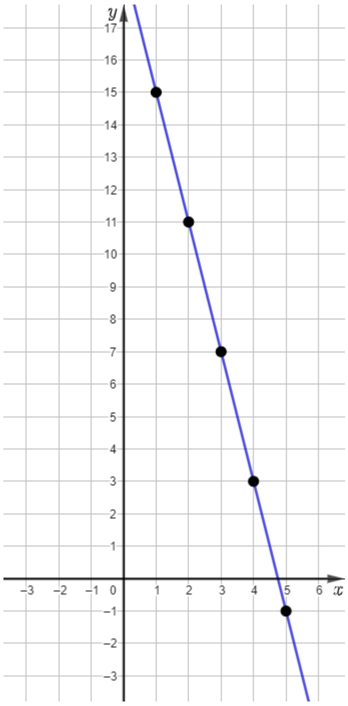
Figura 106 – Solução do item (a) da página 30.



Fonte: Autor.

No **item (b)** a PA dada né $(15, 11, 7, 3, -1, \dots)$. Assim, os pontos cujas coordenadas são $(1, 15)$, $(2, 11)$, $(3, 7)$, $(4, 3)$, $(5, -1)$, $\dots$, representam parte do gráfico desta Progressão Aritmética. Esperamos que os estudantes percebam que o gráfico desta PA não se limita apenas aos cinco pontos marcados. Por outro lado, a linha reta que passa por esses pontos, representa o gráfico da Função Afim associada a PA dada, definida dos reais para os reais, por $g(x) = -4x + 19$. Os gráficos da Progressão Aritmética e da Função Afim do item (b), estão representados na Figura 107. Ao analisarem a Figura 107, esperamos que os estudantes consigam perceber que o gráfico da PA foi o gráfico da Função Afim restringido ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. E que cada aumento de uma unidade dado em $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder um decréscimo, igual a razão da PA, de -4 unidades na Progressão Aritmética $f(n)$. O código QR localizado no final da página 30 da Cartilha direciona para um material da plataforma educacional interativa *GeoGebra*.

Figura 107 – Solução do item (b) da página 30.



Fonte: Autor.

A página 31 da Cartilha exposta na Figura 108, discutirá que a única função que transforma termos quaisquer de uma Progressão Aritmética em termos de outra Progressão Aritmética, é a Função Afim. É discutido que se o domínio de uma Função Afim $f(x) = ax + b$ for uma PA de razão r então a imagem de f será outra PA de razão $a \cdot r$.

Figura 108 – Página 31 da Cartilha.

Fonte: Autor.

No final da página 31 é apresentado um problema muito semelhante ao primeiro que foi proposto nesta Cartilha. Explorando a ideia de transformação do conceito de função, através do exemplo que utiliza uma "máquina de transformações", no **item (a)** os estudantes são levados a introduzir nesta máquina os termos da PA $(-7, -2, 3, 8, 13, 18, 23)$. Como a máquina foi programada para transformar todos os valores da sua entrada por meio da função $f(x) = 4x + 1$, os estudantes devem calcular os valores da saída da máquina e preencher a sequência obtida, fazendo

$$\begin{aligned}
f(-7) &= 4 \cdot (-7) + 1 = -28 + 1 = -27 \\
f(-2) &= 4 \cdot (-2) + 1 = -8 + 1 = -7 \\
f(3) &= 4 \cdot 3 + 1 = 12 + 1 = 13 \\
f(8) &= 4 \cdot 8 + 1 = 32 + 1 = 33 \\
f(13) &= 4 \cdot 13 + 1 = 52 + 1 = 53 \\
f(18) &= 4 \cdot 18 + 1 = 72 + 1 = 73 \\
f(23) &= 4 \cdot 23 + 1 = 92 + 1 = 93.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência obtida é

$$(-27, -7, 13, 33, 53, 73, 93).$$

Para responder o **item (b)** os estudantes devem identificar três informações e preencher na tabela dada: a taxa de variação a da função que foi programada na máquina, a razão r da PA fornecida no item (a) e o produto entre esses dois valores $a \cdot r$. Ora, a taxa de variação da função é facilmente identificada: 4. A razão da PA $(-7, -2, 3, 8, 13, 18, 23)$ é $8 - 3 = 5$. E o produto entre a taxa de variação da função e a razão da PA vale $4 \cdot 5 = 20$. A Tabela 6 mostra a solução do item (b). Esperamos que os estudantes percebam que $a \cdot r = 20$ é, de fato, a razão da Progressão Aritmética obtida na saída da máquina, $(-27, -7, 13, 33, 53, 73, 93)$.

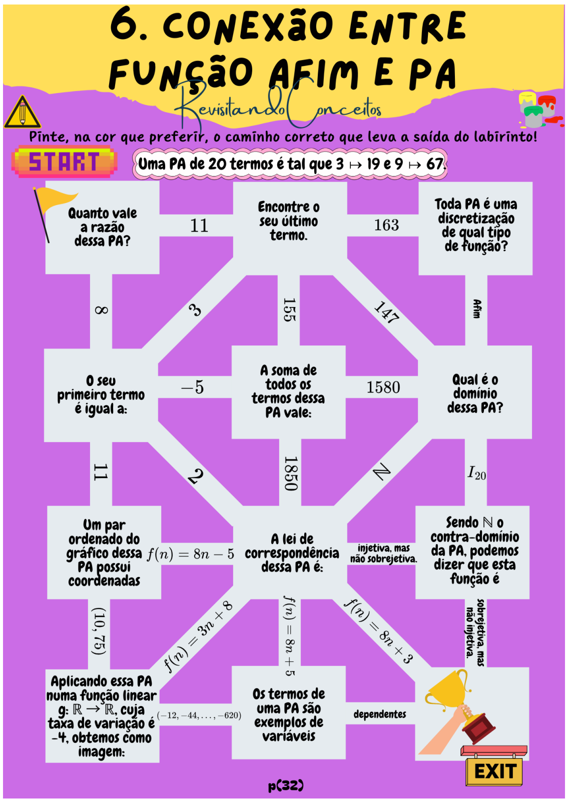
Tabela 6 – Tabela do exemplo da página 31.

a	r	$a \cdot r$
4	5	20

Fonte: Autor.

A página 32 é a última da Cartilha. Esta página trás uma atividade de labirinto, como podemos observar na Figura 109, cujo objetivo é descobrir o único caminho correto que leva a saída do mesmo.

Figura 109 – Página 32 da Cartilha.

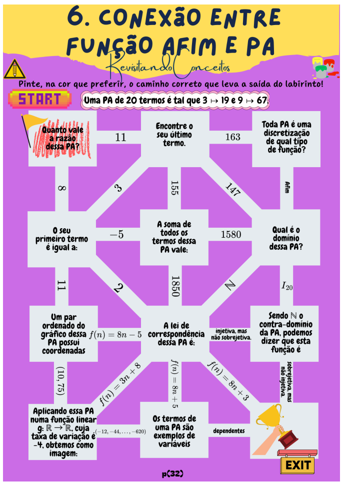


Fonte: Autor.

Nesta atividade o estudante deve pintar o quadro que contém a pergunta, na cor que preferir, e resolver a questão proposta. Após isso, ele deve pintar o espaço que contém a solução encontrada e o novo quadro, o qual possui uma nova pergunta, que está interligado à última solução. Repetindo esse procedimento um número finito de vezes, o estudante encontrará o único caminho correto que leva a saída do labirinto.

Na parte de cima do labirinto, centralizado na página, é dada uma Progressão Aritmética cujo terceiro termo é 19 e o nono termo vale 67. Para iniciar esta atividade, o estudante deverá pintar o primeiro quadro que possui a palavra *START* que encontra-se na primeira linha e primeira coluna do labirinto, o qual contém o primeiro problema do caminho a ser percorrido, como mostra a Figura 110. Neste quadro, é proposto aos estudantes encontrarem a razão da PA fornecida.

Figura 110 – Primeiro problema do labirinto da página 32.



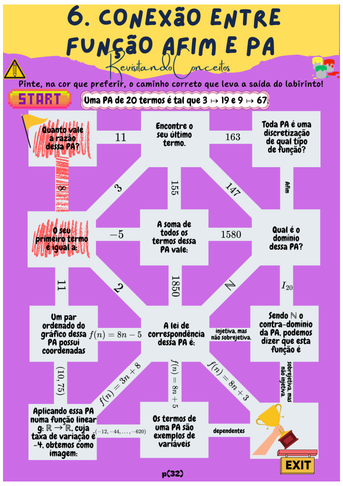
Fonte: Autor.

Uma das maneiras de determinar a razão da PA proposta no primeiro problema sem fazer o uso de fórmulas, por exemplo, é imaginar os termos da Progressão Aritmética dispostos sob uma linha reta dividida em intervalos de comprimentos iguais a razão da PA. Conforme estudado no capítulo 5 da Cartilha Interativa, para se deslocar do 3° termo para o 9°, basta somar 6 vezes a razão, ou seja

$$a_9 = a_3 + 6r \Rightarrow 67 = 19 + 6r \Rightarrow r = 8.$$

Após encontrar a razão da Progressão Aritmética e pintar o resultado encontrado, o labirinto chegará ao segundo quadro do caminho, o qual encontra-se na segunda linha e primeira coluna do labirinto, Figura 111. Neste quadro, é solicitado aos estudantes encontrarem o primeiro termo da PA fornecida.

Figura 111 – Segundo problema do labirinto da página 32.



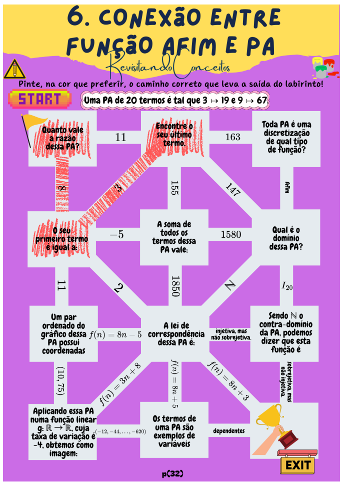
Fonte: Autor.

Para resolver o segundo problema, o estudante pode utilizar o raciocínio análogo ao anterior. Relacionando, por exemplo, o primeiro termo com o terceiro, é fácil ver que para sair do 1° para o 3° termo basta somar 2 vezes a razão, ou seja,

$$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 19 = a_1 + 2 \cdot 8 \Rightarrow a_1 = 3.$$

Uma vez encontrado o 1° termo da PA, o labirinto será pintado como mostra a Figura 112, chegando ao terceiro quadro, localizado na primeira linha e segunda coluna do labirinto. No terceiro problema os estudantes devem encontrar o último termo da Progressão Aritmética dada.

Figura 112 – Terceiro problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

Desta vez, vamos supor que o estudante escolha resolver este problema utilizando a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética qualquer

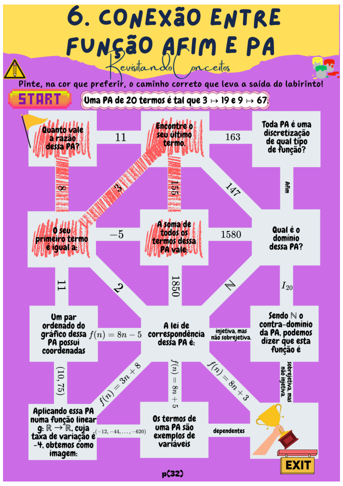
$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

Já temos $a_1 = 3$ e $r = 8$. Como esta PA possui 20 termos, temos que $n = 20$. Assim, o 20° termo é

$$a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_{20} = 155.$$

Depois de encontrar o último termo da Progressão Aritmética, o labirinto deverá ser pintado conforme indicado na Figura 113, chegando ao quarto problema, cuja localização é a segunda linha e segunda coluna do labirinto. Neste problema, os estudantes devem encontrar a soma de todos os termos da PA fornecida.

Figura 113 – Quarto problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

Para encontrar a soma dos 20 termos da Progressão Aritmética, os estudantes podem utilizar a expressão

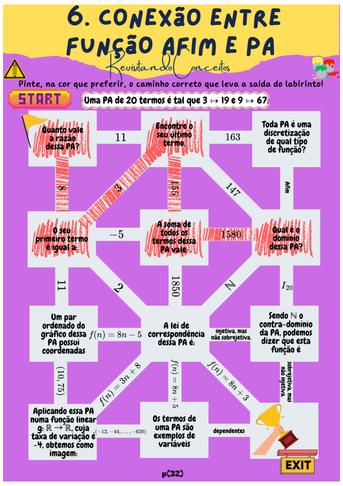
$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Visto que $a_1 = 3, a_{20} = 155$ e $n = 20$, temos

$$S = \frac{(3 + 155) \cdot 20}{2} \Rightarrow S = 1580.$$

Ao encontrar a soma dos termos dessa Progressão Aritmética e pintar conforme mostra a Figura 114, o labirinto chegará ao seu quinto problema, contido na segunda linha e terceira coluna do labirinto. Neste momento os estudantes são desafiados a encontrar o domínio da PA.

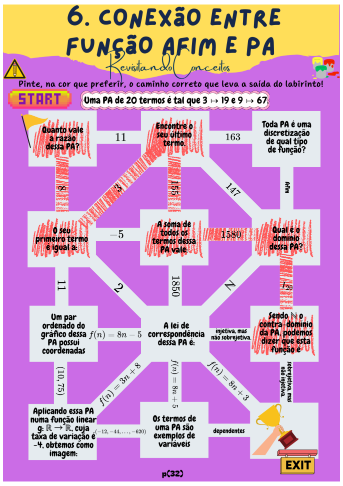
Figura 114 – Quinto problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

Ora, a Progressão Aritmética é finita e possui 20 termos. Portanto, o seu domínio será o conjunto dos números naturais de 1 até 20, isto é, I_{20}. Sendo assim, o estudante será levado ao sexto quadro, posicionado na terceira linha e terceira coluna do labirinto. A pintura que deverá ser feita pelos estudantes está indicada na Figura 115.

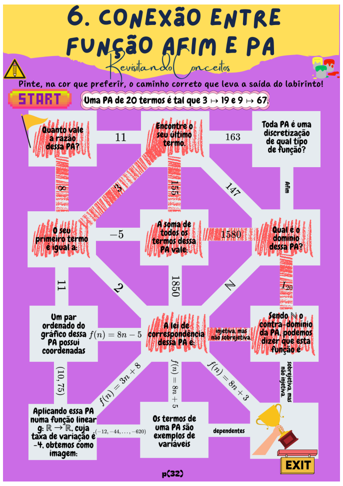
Figura 115 – Sexto problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

O sexto problema considera que o contra-domínio da PA é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Como pela solução do quinto problema, o domínio da Progressão Aritmética é o conjunto I_{20}, esta função é injetiva, pois quaisquer elementos de I_{20} possuem, necessariamente, imagens diferentes que são os termos da progressão. Por outro lado, nem todo número natural faz parte da PA, fazendo com que a função não seja sobrejetiva, uma vez que seu contra-domínio é diferente do conjunto imagem. Após informar que a função é injetiva mas não sobrejetiva, o estudante irá pintar o labirinto de acordo com a Figura 116. Assim, chegará ao sétimo quadro situado na terceira linha e segunda coluna do labirinto, que pergunta sobre a lei de correspondência da Progressão Aritmética.

Figura 116 – Sétimo problema do labirinto da página 32.



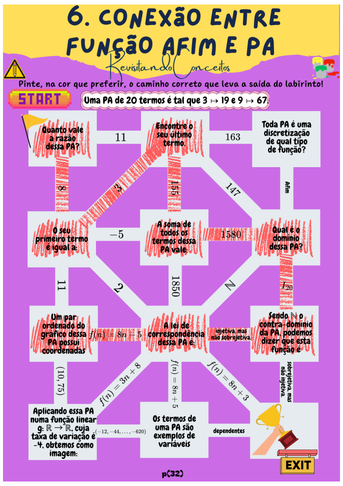
Fonte: Autor.

Para encontrar a lei de correspondência desta Progressão Aritmética, os estudantes devem identificar as constantes reais a e b e substituí-las na expressão $f(n) = an + b$. Como a taxa de variação a é igual a razão obtida no primeiro problema do labirinto, tem-se que $a = 8$. Por outro lado, o valor inicial b pode ser determinado através da relação $a_1 = a + b$. Ora, do segundo problema deste labirinto, tem-se que $a_1 = 3$ então, $3 = 8 + b$ e isto implica que $b = -5$. Dessa forma,

$$f(n) = 8n - 5.$$

A Figura 117 mostra a pintura que os estudantes devem fazer. Neste momento, eles chegarão ao 8° problema localizado na terceira linha e primeira coluna do labirinto, o qual questiona as coordenadas de um par ordenado do gráfico dessa PA.

Figura 117 – Oitavo problema do labirinto da página 32.



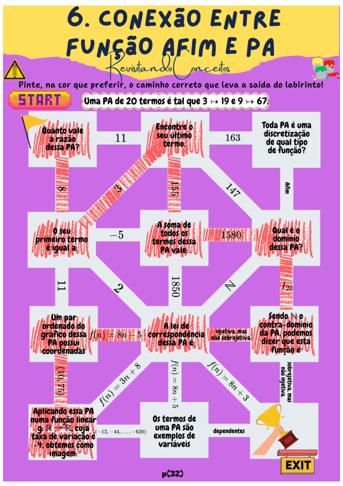
Fonte: Autor.

O único par ordenado disponível no labirinto é o $(10, 75)$. Mas, de fato, este é um dos pontos do gráfico da Progressão Aritmética, pois

$$a_{10} = 3 + (10 - 1) \cdot 8 \quad = \quad 3 + 9 \cdot 8 \quad = \quad 3 + 72 \quad = \quad 75.$$

Após se certificar que o décimo termo da PA é 75 o estudante terá certeza de que o par ordenado $(10, 75)$ faz parte do gráfico da Progressão Aritmética. Neste caso, o labirinto será pintado como mostra a Figura 118. O nono problema encontra-se na quarta linha e primeira coluna do labirinto e pergunta o que acontece se a PA dada for aplicada numa Função Afim do tipo Linear.

Figura 118 – Nono problema do labirinto da página 32.



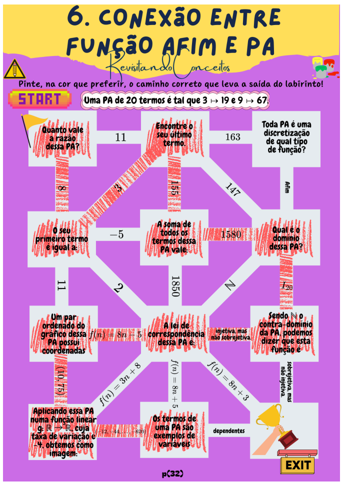
Fonte: Autor.

Espera-se que os estudantes percebam que se uma Função Afim g, definida nos reais para os reais, for Linear e possuir taxa de variação igual a -4, então sua lei de correspondência será $g(x) = -4x$. Aplicando a Progressão Aritmética $(3, 11, 19, \cdots, 139, 147, 155)$ na função g, os estudantes encontrarão

$$\begin{aligned} g(3) &= -4 \cdot 3 = -12, \\ g(11) &= -4 \cdot 11 = -44, \\ \vdots &= \quad \vdots \quad = \vdots \\ g(155) &= -4 \cdot 155 = -620. \end{aligned}$$

Assim, os números formados pelo conjunto imagem da Função Linear g fazem parte da PA $(-12, -44, -76, \cdots, -556, -588, -620)$. Então o labirinto será pintado de acordo com a Figura 119. O décimo e último quadro do labirinto, esta posicionado na quarta linha e segunda coluna do mesmo. O problema nele contido questiona o tipo de variável de uma Progressão Aritmética.

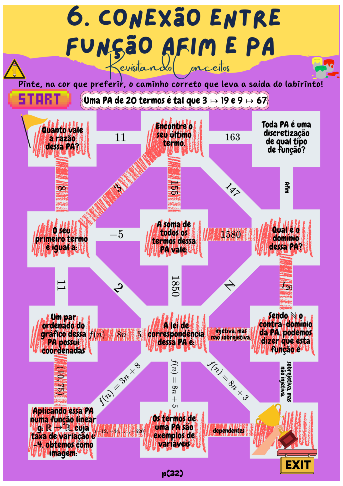
Figura 119 – Décimo problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

Esperamos que os estudantes recodem que os termos de quaisquer sequências numéricas representam as imagens de uma função de domínio discreto igual ao conjunto dos números naturais. Portanto, são as variáveis dependentes. E dessa maneira, os estudantes chegarão a saída do labirinto pelo caminho correto, como mostra a Figura 120.

Figura 120 – Solução do problema do labirinto da página 32.



Fonte: Autor.

Ao longo da Cartilha Interativa escolhemos, propositalmente, uma representação incomum para a numeração das suas páginas, cuja ideia foi envolver o conceito de função conectado às sequências numéricas. Se tomarmos a sequência formada pelos números naturais $(1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$, isto é, $\mathbb{N}$ para a numeração das páginas, e $\mathbb{K}$ o conjunto formado por todos os designs possíveis já criados na plataforma Canva, e a cada $n \in \mathbb{N}$ fizermos corresponder a página $p(n) = \textit{página de número } n$, teremos uma "função página" $p : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ em que, o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o contra-domínio o conjunto $\mathbb{K}$ dos designs elaborados no Canva, e a lei de correspondência é a regra "associar página a cada número natural n". A sua imagem $p(n)$ é a própria página da Cartilha Interativa que pode ser vista e manuseada, as quais pertencem a $\mathbb{K}$. Consideramos importante que esse tipo de reflexão seja feita em sala de aula pois acreditamos que adotar uma abordagem não convencional, pode favorecer a aprendizagem do que está sendo estudado e ainda ampliar o conhecimento dos estudantes em diferentes contextos.

A Cartilha Interativa visa não somente facilitar o trabalho do professores, mas despertar o interesse dos estudantes para aprender função e sequências numéricas, transformando-os em sujeitos críticos, participantes e ativos no desenvolvimento do seu conhecimento.

5 Aspectos Metodológicos e Análise de dados

5.1 Tipo de Pesquisa

Para desenvolver este estudo, foi utilizada a Metodologia de Quase-Experimento com um desenho de pré-teste/pós-teste. Esse tipo de pesquisa envolve a medição dos resultados antes e depois de uma intervenção. No nosso caso, utilizamos a Cartilha Interativa, permitindo a comparação dos desempenhos e a avaliação do impacto da intervenção.

5.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa foi feita na Escola Professora Maria Lúcia Alves situada na zona urbana de Santa Cruz do Capibaribe-PE, a qual faz parte da Gerência Regional de Educação Agreste Centro Norte - Caruaru e pertence à Secretaria de Educação e Esporte de Pernambuco - SEE. Fica localizada na R. Profª. Ivani Batista da Silva, 313 - Nova Santa Cruz, 55190-000 no Estado de Pernambuco.

5.3 Sujeitos da Pesquisa

A turma escolhida foi a 2ª série A, do Ensino Médio, do turno da manhã, turma formada por 43 alunos. O critério adotado para a escolha desta turma, foi utilizar a Cartilha Interativa como forma de revisar conceitos que foram estudados no ano letivo anterior e consolidar a aprendizagem daqueles que porventura não tivessem sido estudados.

5.4 Instrumento de Pesquisa: Cartilha Interativa

Para avaliar o impacto da intervenção educacional neste estudo, foi desenvolvida e utilizada uma Cartilha Interativa como principal instrumento de pesquisa. A Cartilha Interativa foi projetada com o objetivo de oferecer o uso de uma tecnologia no ensino e aprendizagem de função e sequências numéricas explorando os conceitos e suas correlações através da interação dos estudantes com este recurso.

5.5 Parafraseando Nelson Rodrigues: "A escola como ela é..."

A partir deste momento, peço licença ao leitor para falar em primeira pessoa. Nasci e resido em Campina Grande, cidade do interior da Paraíba. Mas sou servidor público da Rede Estadual de Ensino do Estado de Pernambuco, desde fevereiro de 2019. Atuo na Escola Professora Maria Lúcia Alves, que fica localizada no município de Santa Cruz do Capibaribe, região do Agreste Pernambucano e que dista, aproximadamente, 108 quilômetros de Campina Grande-PB.

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2022, a população de Santa Cruz do Capibaribe-PE é de pouco mais de 98,2 mil habitantes. As atividades econômicas que predominam neste município são a indústria e o comércio, representando um dos maiores polos de confecção e comercialização de roupas do país.

Atualmente, das sete escolas estaduais deste município, seis delas ofertam Ensino em jornada de tempo Integral, ou Semi-Integral ou ainda de Ensino Técnico, cujas cargas-horárias são superiores às jornadas de Ensino Regular, no que diz respeito ao tempo de permanência dos estudantes dentro da escola. Consequentemente, apenas uma escola de Santa Cruz do Capibaribe-PE oferece o Ensino Regular: a Escola Professora Maria Lúcia Alves.

Em uma realidade onde a maioria dos estudantes matriculados, busca conciliar seus estudos com a rotina de trabalho, assim como "novos alunos" que diariamente procuram, sem sucesso, vagas na única escola de Ensino Regular da cidade, é até esperado que apresente níveis consideravelmente baixos de aprendizagem.

Segundo dados obtidos pela plataforma *CAEd/UFJF* (Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora), responsável pela Avaliação e Monitoramento da Educação de Pernambuco, mostram que os resultados da escola na avaliação externa conhecida como SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco), são notadamente preocupantes.

O SAEPE, que verifica se os estudantes desenvolveram as habilidades necessárias em Língua Portuguesa e Matemática para cada etapa de ensino, adota uma escala de proficiência que é calculada com base na Teoria da Resposta ao Item (TRI), e é classificada em algum dos quatro níveis de desempenho: Elementar I, Elementar II, Básico ou Desejável. Cada nível reflete o conjunto de habilidades e tarefas que os estudantes são ou não capazes de realizar.

Os resultados em Matemática, no SAEPE de 2023, indicam que os estudantes da 3ª série do Ensino Médio da Escola Professora Maria Lúcia Alves, encontravam-se 57% no Elementar I, 27% no Elementar II, 12% no Básico e apenas 3% no padrão de desempenho Desejável. Já no ano anterior, eram 60% no Elementar I, 26% no Elementar II, 11% no Básico e também 3% no padrão de desempenho Desejável.

Por outro lado, e não menos importante, a Escola Professora Maria Lúcia Alves foi fundada no ano de 1982 para atender turmas isoladas que funcionavam em algumas casas e garagens de Santa Cruz do Capibaribe-PE. Era de responsabilidade do Município e atendia alunos da pré-escola à então quarta série do Ensino Fundamental. No ano seguinte, foi Estadualizada através do Decreto nº 8.491, publicado no Diário Oficial em 12 de março de 1983 e desde então, jamais passou por quaisquer reformas significativas de reestruturação. Uma escola que foi planejada e construída para o início da década de 80, funciona atualmente, com sua infraestrutura visivelmente marcada pelo desgaste natural do tempo.

É diante deste cenário que estávamos prontos para aplicar a nossa Cartilha Interativa. Mas para a nossa infelicidade e frustração, na semana em que iniciamos a aplicação do nosso recurso educacional, tivemos inevitavelmente, que interromper. Naqueles dias, era dado início a um processo de Intervenção que a escola passara, devido a inúmeras denúncias feitas à Gerência Regional de Educação (GRE) Agreste Centro Norte, órgão da Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco, responsável pela Escola Professora Maria Lúcia Alves. Tais denúncias eram, sobretudo, no contexto de problemas estruturais, os quais, citarei alguns: A escola não possuía ventiladores suficientes para atender todas as salas de aula (a maior parte delas lotadas) da escola; não tinha mesas suficientes para todos os alunos; sofria com a falta de funcionários, entre eles, a ausência de um profissional que trabalhasse na portaria; não possuía biblioteca; nem sequer água potável para os estudantes beberem; além dos muros da escola serem muito baixos, o que ocasionava diversos problemas relacionados à insegurança, entre inúmeros outros problemas.

Durante ao processo de Intervenção, acompanhamos de perto ao desligamento da então direção da escola, e passamos a ser liderados pela GRE. Para que fosse feito alguns reparos na estrutura física do prédio da escola, foi necessário, em comum acordo com a comunidade escolar (pais e responsáveis, estudantes e profissionais da Educação), que houvesse a suspensão das aulas presenciais dando início a um período de aulas remotas, modelo de aulas completamente inviável para aplicar o nosso recurso educacional. Pode até parecer que estou me contradizendo, mas infelizmente, este período durou apenas duas semanas. Logo em seguida, em meio a uma reforma completamente inacabada, foram retomadas as aulas presenciais.

Por quase um mês a escola funcionou presencialmente, mesmo sem as mínimas condições para o seu funcionamento. Mas, neste meio tempo novidades e melhorias puderam ser observadas: uma nova direção foi nomeada; aparelhos de ar-condicionados foram instalados na maioria das salas de aula; ventiladores foram colocados nas demais; uma biblioteca foi improvisada; um porteiro foi contratado; os estudantes passaram a ter acesso a água potável; e os muros que cercam a escola, até este momento que escrevo, estão sendo aumentados. Quanto ao número de mesas, até o momento, ainda continua sendo insuficiente para a demanda.

E foi assim, durante estes movimentados dias, que apliquei a nossa Cartilha Interativa. No entanto, conseguimos finalizar apenas os seus dois primeiros capítulos, em virtude dos poucos momentos favoráveis de aulas que tivemos pois logo nos aproximamos das atividades de encerramento do 2º bimestre, período pelo qual antecede o recesso escolar.

Essas palavras não foram escolhidas apenas para justificar o não cumprimento da totalidade da pesquisa, mas especialmente para todos aqueles que têm uma visão distorcida sobre a educação pública. A verdadeira compreensão do que é uma escola pública só é alcançada por aqueles que vivenciam sua realidade diariamente.

5.6 Aplicação do Recurso Educacional e Procedimento de Coleta de Dados

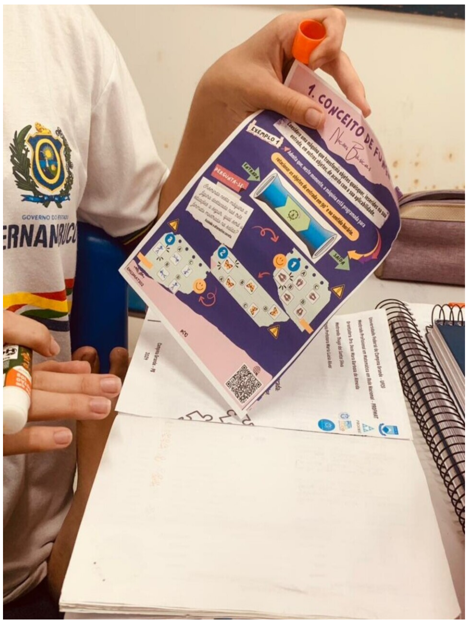
Considerando as diversas atividades interativas incluídas na Cartilha, julgamos mais adequado não entregá-la completa aos estudantes, a fim de manter constante a expectativa deles em relação ao conteúdo que seria explorado nos encontros posteriores. Para isso, tivemos a ideia de entregar apenas as páginas da Cartilha Interativa que seriam utilizadas no momento da aula, as quais deveriam ser coladas em um bloco de folhas fornecido fazendo assim, por exemplo, uma analogia ao uso de um álbum de figurinhas, onde o bloco representaria o álbum e as páginas da Cartilha Interativa, as figurinhas a serem coladas.

Cada estudante recebeu um bloco contendo 9 folhas de papel ofício do tamanho A4, juntas na posição "paisagem", dobradas ao meio e grampeadas no eixo vertical tomando a forma de um livreto. Receberam também uma cola branca do tipo bastão, personalizada com o seu nome, a fim de promover o uso consciente deste material escolar, tendo em vista que nos próximos encontros a mesma cola seria utilizada pelo mesmo estudante.

O início de cada aula transformava-se em uma verdadeira "força-tarefa". Diversos estudantes envolviam-se na distribuição dos materiais, como o bloco de folhas que gradativamente, após as colagens ía se transformando na Cartilha, e a cola bastão. Além disso, eles também participavam do recorte das páginas da Cartilha Interativa, que eram impressas duas idênticas por folha, além da entrega.

Mostraremos a seguir alguns registros dos primeiros momentos de aplicação da Cartilha Interativa. A Figura 121 mostra uma estudante se preparando para colar a página 1 da Cartilha Interativa.

Figura 121 – Estudante mostrando a página 1 da Cartilha Interativa antes de colar.



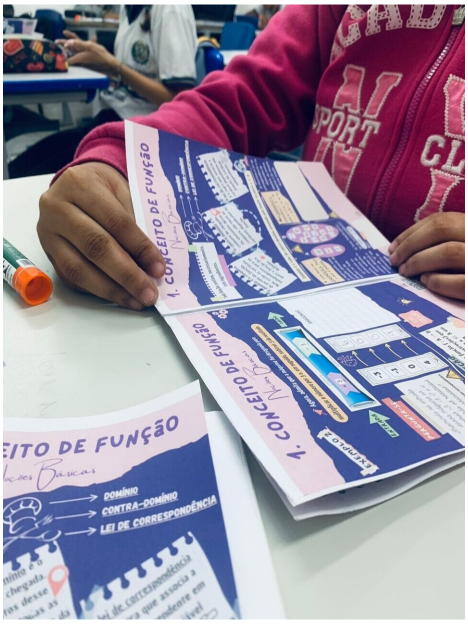
Fonte: Autor.

Na Figura 122 podemos ver outra estudante colando a página 3 da Cartilha Interativa, enquanto na Figura 123 observamos as páginas 2 e 3 já coladas no bloco de folhas.

Figura 122 – Estudante mostrando a página 3 da Cartilha Interativa antes de colar.

Fonte: Autor

Figura 123 – Estudante mostrando as páginas 2 e 3 da Cartilha Interativa já coladas.



Fonte: Autor

Assim que recebiam os materiais, a primeira ação dos estudantes era colar a(s) página(s) distribuída(s) no bloco de folhas. Após isto, realizávamos discussões acerca do conteúdo contido na(s) página(s) e era neste momento que os estudantes interagiam com a Cartilha. As Figuras 124 e 125 mostram dois estudantes realizando as anotações do Mapa Mental da página 4 da Cartilha Interativa.

Figura 124 – Estudante preenchendo o Mapa Mental da página 4 da Cartilha Interativa.

Fonte: Autor

Figura 125 – Outro estudante preenchendo o Mapa Mental da página 4 da Cartilha Interativa.

Fonte: Autor

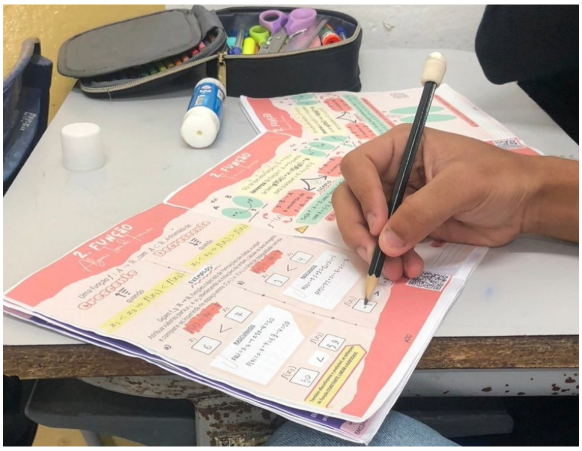
A Figura 126 mostra um estudante se preparando para realizar as primeiras anotações na página 5 que inicia o Capítulo 2 da Cartilha Interativa.

Figura 126 – Estudante interagindo com a página 5 da Cartilha Interativa.

Fonte: Autor.

Já a Figura 127 mostra um estudante investigando a propriedade de uma Função Decrescente, na página 6 da Cartilha Interativa.

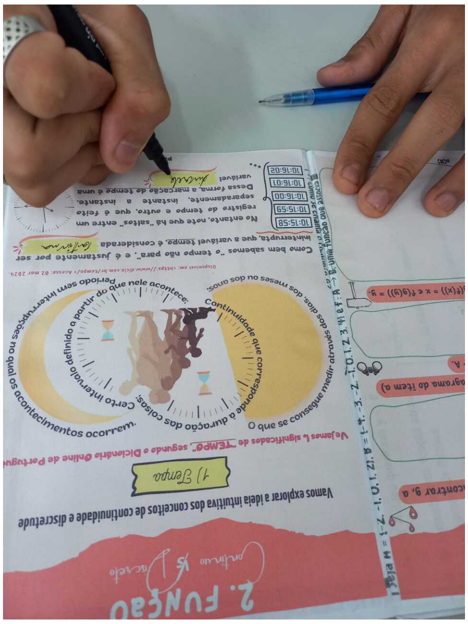
Figura 127 – Estudante interagindo com a página 6 da Cartilha Interativa.



Fonte: Autor.

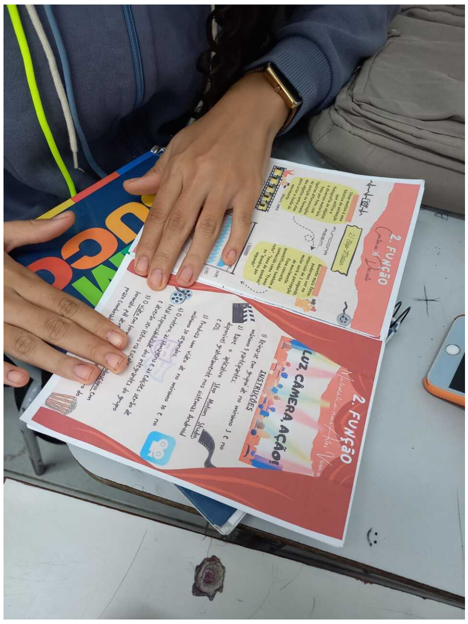
Podemos observar nas Figuras 128 e 129 dois estudantes interagindo com a Cartilha Interativa, conforme avançávamos para a parte final do Capítulo 2, através do estudo de noções intuitivas dos conceitos de continuidade e discretude.

Figura 128 – Estudante escrevendo na página 9 da Cartilha Interativa.



Fonte: Autor

Figura 129 – Outro estudante colando as páginas 10 e 11 da Cartilha Interativa.



Fonte: Autor

Em nenhum momento os estudantes levavam a Cartilha Interativa para casa. Ao final de cada aula em que a Cartilha era utilizada, todos os materiais da pesquisa, isto é, os blocos e as colas bastões eram recolhidos. Os próprios alunos se responsabilizavam pelo recolhimento. Eles só teriam acesso aos materiais novamente no próximo encontro de aplicação.

O envolvimento dos estudantes durante a aplicação da Cartilha Interativa superou significativamente as nossas expectativas iniciais. Ao iniciar as aulas, esperávamos contar com o auxílio de um número reduzido de alunos na distribuição dos materiais pedagógicos. Contudo, a cada encontro, o número de estudantes voluntários aumentava consideravelmente. Aproximadamente metade da turma se envolveu ativamente, auxiliando no recorte das páginas da Cartilha, que eram impressas em formato de duas por folha, bem como na distribuição dos demais materiais didáticos para a classe. E quando comparamos estes momentos com as aulas que foram ministradas no início do ano, durante o 1º Bimestre nesta mesma turma, só fica ainda mais evidenciado a disparidade entre os dois momentos.

Outro aspecto extremamente positivo desses encontros foi observar a participação ativa de vários alunos, que se engajavam em interações discursivas, contribuindo em voz alta para toda a turma. Além de discutirem as atividades propostas na Cartilha Interativa, de forma surpreendente, os estudantes também interagiram sobre questões que não haviam sido planejadas para discussão. Por exemplo, eles comentavam entre si e compartilhavam com os seus colegas informações contidas na Cartilha como definições, comentários e curiosidades que eles identificavam. Ademais, expressavam opiniões positivas sobre as ilustrações da Cartilha, que consideravam atraentes e agradáveis.

Ficamos igualmente impressionados ao observar a quantidade de alunos auxiliando os colegas que apresentavam dificuldades em alguma interação a ser feita na Cartilha, especialmente aqueles que, até então, não haviam demonstrado esse tipo de comportamento. Esse fato chamou não apenas a minha atenção, mas também de alguns dos próprios alunos da turma, que notaram essa postura colaborativa entre colegas mais tímidos e até mesmo entre alguns alunos que anteriormente mostravam menor motivação com os estudos.

5.7 Primeiros Resultados

Para coletar os dados da nossa pesquisa, planejamos inicialmente elaborar três questionários, cada um contemplando dois capítulos da Cartilha Interativa. O Questionário I abrangendo os Capítulos 1 e 2, o Questionário II cobrindo os Capítulos 3 e 4, e o Questionário III sendo destinado aos Capítulos 5 e 6.

A nossa proposta foi aplicar o mesmo questionário na turma em dois momentos distintos. Inicialmente, sem fornecer quaisquer explicações prévias ou revisão dos conteúdos, uma vez que, todos os temas presentes na Cartilha Interativa, fazem parte da grade de conteúdos do currículo de Pernambuco para a 1ª série do Ensino Médio. Além disso, confirmamos com a professora de Matemática da turma que tais conteúdos haviam sido incluídos anteriormente. E num segundo momento, após o uso da Cartilha Interativa, com o objetivo de comparar os resultados das duas aplicações e avaliar se, e em que medida, o nosso recurso educacional impactou o desempenho dos estudantes.

Disponível no Apêndice A, o Questionário I, teve um total de 35 questões, sendo as 20 primeiras, referentes ao Capítulo 1 da Cartilha, cujo título é "Conceito de Função" e as 15 últimas, envolvendo o Capítulo 2, intitulado "Função". Das 35 questões, 16 delas eram de múltipla escolha, 17 eram discursivas e 2 delas eram discursivas mas continham opções para serem escolhidas, simultaneamente. Dos 43 alunos da turma, 37 participaram deste momento de coleta de dados. Podemos observar, à direita da Figura 130 dois estudantes compartilhando a mesma mesa no momento da primeira aplicação do Questionário I.

Figura 130 – Turma realizando o Questionário I antes da aplicação da Cartilha (1).

Fonte: Autor.

E à esquerda da Figura 131, três estudantes realizando o Questionário I na mesa do professor, devido a quantidade insuficiente para a totalidade dos estudantes deste recurso básico na escola.

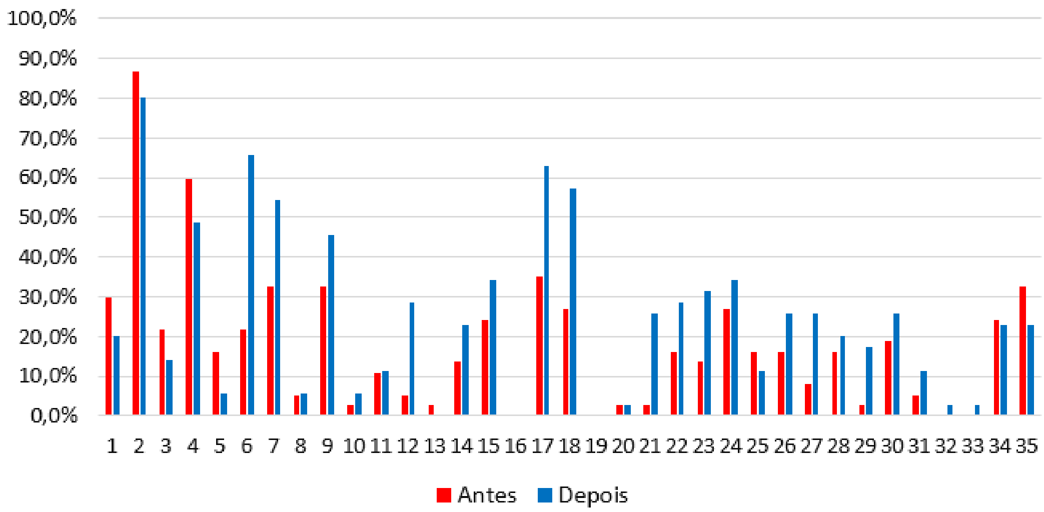
Figura 131 – Turma realizando o Questionário I antes da aplicação da Cartilha (2).

Fonte: Autor.

Devido às situações já descritas na Seção 5.5, infelizmente só conseguimos aplicar os Capítulos 1 e 2 da Cartilha Interativa com os estudantes e, consequentemente, apenas o Questionário I, foi realizado na íntegra. Não há registros fotográficos da segunda aplicação do Questionário I e cabe destacar que ocorreu durante a semana de avaliações da escola, no mesmo dia das provas de Matemática, Geografia e Arte. Além disso, vale destacar que o intervalo entre a última aula com a Cartilha Interativa, quando concluímos o segundo capítulo, e o dia da avaliação de Matemática foi de, no mínimo, 15 dias. Nesse dia, foi realizada a segunda aplicação do Questionário I, com a participação de apenas 35 dos 43 alunos da turma.

O gráfico da Figura 132 apresenta um comparativo entre a quantidade de acertos dos estudantes antes e depois da aplicação da Cartilha Interativa. Os resultados da primeira aplicação do Questionário I, realizada antes do uso da Cartilha Interativa, estão destacados em vermelho. Já os resultados da segunda aplicação, feita após a utilização da Cartilha, são apresentados em azul. Neste gráfico, a linha horizontal representa a numeração das questões do Questionário I, enquanto a linha vertical exibe o percentual de acertos para cada questão.

Figura 132 – Acertos no Questionário I antes e depois da Cartilha Interativa.



Fonte: Autor.

Analisando o gráfico e comparando os dois momentos — antes e depois da aplicação da Cartilha Interativa — constatamos que, das 35 questões, os alunos tiveram um desempenho inferior em 9 delas, mantiveram o mesmo rendimento em 2 questões, sem apresentar melhora ou piora, e apresentaram um desempenho superior em 24 questões. Das 24 questões que houve um melhor desempenho no Questionário I, é perceptível um crescimento considerável nas questões de número 6, 7, 12, 17, 18 e 21, que tratam de representação de função por meio de diagrama de flechas. Tratam também de notações e importantes conceitos para este estudo, como domínio e contra-domínio de funções, além da representação de uma função injetiva mas não sobrejetiva utilizando diagrama de flechas.

As questões 16 e 19 não apresentaram acertos em nenhum dos dois momentos que foram feitos os questionários. Percebemos durante as correções para a coleta dos dados, que a totalidade dos estudantes, traçavam os diagramas de flechas, inseriam corretamente os valores tanto no domínio como no contra-domínio, compreendiam a lei de correspondência da função que relacionava os valores do domínio ao seu quadrado no contradomínio, mas se confundiam ao associar os quadrados de -2 a -4 e de -1 a -1, ou seja, um erro elementar relacionado ao estudo básico de potenciação que comprometeu a construção correta do diagrama de flechas e a identificação da imagem desta função solicitados nessas questões.

Por outro lado, houve 9 questões que os estudantes haviam acertado antes da aplicação da Cartilha mas, surpreendentemente no segundo momento, após o uso do recurso educacional, não conseguiram obter o mesmo êxito. Ao refletirmos sobre essa queda de desempenho, nos questionamos se de fato os acertos iniciais representavam um conhecimento verdadeiramente consolidado pelos alunos. Além disso, se considerarmos que eles efetivamente possuíam esse conhecimento, até que ponto as circunstâncias já mencionadas, sob as quais realizaram o questionário, poderiam ter contribuído para os erros nessas questões? Um aspecto que chamou a nossa atenção foi que 5 dessas questões são, coincidentemente, as primeiras do Questionário I e, mais ainda, todas estão associadas ao mesmo contexto: Utilizar o conceito de função para analisar os valores dispostos em uma tabela e relacioná-los através de uma regra. Esses resultados nos levaram a refletir sobre a adequação dessas questões e das outras que também tiveram desempenhos insatisfatórios, a fim de replanejá-las para uma futura aplicação, deixando-as condizentes e alinhando-as melhor com a Cartilha Interativa.

Analisando esses dados quantitativos, podemos ser influenciados a acreditar que a interferência da Cartilha Interativa na aprendizagem dos estudantes tenha sido ínfima. Entretanto, conhecendo um pouco sobre a realidade da turma, da escola e, sobretudo, da cidade, e além disso, considerando as inúmeras adversidades enfrentadas antes e durante o período de aplicação da nossa Pesquisa — Questionário I e Cartilha Interativa —, muitas das quais não cabem ser descritas aqui, consideramos o progresso alcançado significativo. Os estudantes apresentaram maior interesse, motivação e participação nas nossas aulas.

Há bons resultados que não podem ser medidos ou quantificados. Como avaliar o brilho nos olhos de Marina, que refletia uma vontade de aprender que transbordava? Como é possível mensurar a concentração e a nobre disposição de Maciel em ajudar a todos que precisasse durante as aulas? E como dimensionar a dedicação de Hellen e o seu completo envolvimento nessas aulas? De que modo haveríamos de calcular a euforia e a solicitude de Maria Jayanne durante estes encontros? Também não é possível sequer estimar, o empenho de Pedro Henrique e o seu zelo com a Cartilha... Citei alguns exemplos mas poderia, facilmente, destacar o progresso individual observado em todos os estudantes da 2ª série A, 2024, da Escola Professora Maria Lúcia Alves.

Foi devido a estas e a tantas outras situações vivenciadas durante o turbulento período de aplicação do nosso recurso educacional, que sentimos a falta de também avaliar, qualitativamente, o nosso trabalho. Percebemos que medir apenas os resultados quantitativos não nos forneceu uma visão completa do impacto que tivemos. Por isto, destacaremos a seguir, algumas das frases que foram proferidas pelos estudantes durante a realização do nosso projeto. Tais frases refletiram o impacto positivo da participação, do engajamento e da aprendizagem dos alunos.

"Eu nunca pensei que aprender Matemática pudesse ser tão divertido! A Cartilha Interativa me mostrou que eu sou capaz de entender os assuntos muito mais do que eu imaginava."

"Esse projeto não só me ensinou sobre funções e sequências, mas também me fez perceber o quanto é bom compartilhar com os nossos colegas o que aprendemos."

"Nunca me senti tão envolvida com um conteúdo antes. As atividades da cartilha me prendiam do começo ao fim. A parte mais difícil sempre era aguardar o próximo encontro!"

"A cada aula eu ficava mais animada! Eu adorei fazer as colagens. Participar desse projeto foi maravilhoso!"

"Eu nunca pensei que aprender Matemática pudesse ser tão divertido! A Cartilha Interativa me mostrou que eu sou capaz de aprender muito mais do que eu imaginava."

Esses relatos refletiram o impacto emocional e pessoal do nosso projeto, evidenciando aspectos qualitativos que vão além dos resultados quantitativos. Mostraram também como o projeto afetou a motivação, o engajamento e promoveu uma experiência de aprendizado mais profunda e significativa. Também não podemos deixar de destacar que os alunos apresentaram uma melhor compreensão de função e sequências numéricas.

6 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, investigamos o conceito de função e o estudo das sequências numéricas explorando as suas conexões existentes. Procuramos mostrar como as funções são essenciais para compreender a relação entre diferentes quantidades, enquanto as sequências numéricas revelam padrões e progressões que são fundamentais na Matemática. Por outro lado, refletimos o quanto tem sido um desafio constante a implementação de novas abordagens no ensino de Matemática devido a um problema estrutural persistente e atual — a carência de recursos pedagógicos de qualidade — principalmente nas escolas públicas. A ausência de materiais didáticos e tecnológicos adequados, dificulta a utilização de práticas pedagógicas inovadoras que possam contribuir com a aprendizagem dos estudantes.

O nosso principal objetivo foi consolidar a aprendizagem de função e sequências numéricas e, para isto, desenvolvemos um recurso didático tecnológico, que pudesse ser capaz de promover um ambiente de aprendizado mais ativo: a Cartilha Interativa. Através desta Cartilha, buscamos estimular a interação dos estudantes com o material, permitindo que eles pudessem construir seu próprio conhecimento durante o estudo de função, sequências numéricas e das suas conexões, através das abordagens e propostas interativas. Embora tenhamos conseguido aplicar apenas dois dos seis capítulos planejados, a ferramenta conseguiu promover um ambiente de aprendizado colaborativo, incentivando discussões e interações valiosas sobre os temas e suas inter-relações. Também foi possível explorar o conceito de função, suas notações e as suas diversas representações de forma dinâmica e atrativa. Dessa forma, apenas o primeiro objetivo específico foi cumprido de maneira eficaz e de acordo com as expectativas iniciais, já que os demais objetivos específicos estão relacionados aos capítulos finais da Cartilha Interativa, que não foram aplicados.

A Cartilha Interativa não foi apenas um recurso didático inovador, mas um convite à reflexão sobre como podemos repensar o uso da tecnologia no ensino. Esse trabalho nos ajudou a entender que utilizar recursos tecnológicos em sala de aula não está, necessariamente, associado à manipulações inseridas no contexto digital, através do uso de *hardwares* e *softwares*, mas, a tudo aquilo que possa fomentar um ambiente de aprendizado mais dinâmico e sobretudo, que possa contribuir para uma educação mais envolvente, reflexiva e eficaz.

Queremos destacar também que durante o desenvolvimento da Cartilha Interativa, enfrentamos vários desafios. Os quais envolveram, tanto a concepção do conteúdo interativo durante a produção deste recurso educacional, como principalmente, a difícil fase de implementação prática em sala de aula, que por muita persistência e dedicação conseguimos iniciar. No entanto, esses desafios nos trouxeram valiosos aprendizados: evidenciaram a importância de métodos de ensino que vão além das abordagens tradicionais, pois percebemos na prática, o quanto incentivou a participação ativa dos estudantes e, consequentemente, favoreceu uma notória evolução na compreensão dos conceitos estudados.

A análise comparativa dos questionários aplicados antes e depois do uso da Cartilha Interativa reforçou a eficácia do método, demonstrando que o recurso educacional contribuiu, com o engajamento e a aprendizagem dos estudantes, embora durante o processo, sentimos falta de uma avaliação qualitativa mais aprofundada, que poderia ter fornecido uma visão mais abrangente do impacto do projeto.

Este estudo reafirmou a importância da inovação no ensino de Matemática e também ofereceu uma perspectiva valiosa sobre como as tecnologias educacionais podem ser aproveitadas para criar experiências de aprendizagem mais ricas e engajadoras que ajudam a despertar a criticidade dos estudantes e por isto, estamos entusiasmados com o seu potencial para seguir melhorando o ensino da Matemática.

As possibilidades futuras para a Cartilha Interativa são promissoras. Pretendemos reaplicá-la em sua totalidade o mais breve possível, com o objetivo de gerar e publicar resultados completos, tanto quantitativos quanto qualitativos, abrangendo todos os aspectos do nosso recurso educacional. Isso nos permitirá uma análise mais aprofundada e precisa de sua eficácia. Além disso, queremos continuar aperfeiçoando este material e planejamos trabalhar na inserção de novas abordagens interativas envolvendo as conexões entre outros conceitos: Função Exponencial, Progressão Geométrica e os Juros Simples e Compostos estão entre os nossos próximos passos.

Referências

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental 5º ao 9º ano.* 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/pcn_ensino_fundamental_final.pdf>. Citado na página 24.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/PCNEM.PDF>. Citado na página 24.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Citado 17 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 82 e 85.

CANVA. *Plataforma online de design gráfico.* 2024. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática.* [S.l.]: Tipografia matemática, 1952. Citado 3 vezes nas páginas 19, 48 e 51.

D'AMORE, B. *Elementos de didática da matemática.* [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

LAVIGNE, T. A.; HIGUCHI, P. C. F.; OLIVEIRA, M. S. A contextualização no processo de ensino e aprendizagem da matemática. *VII Colóquio Internacional: Educação e Contemporaneidade*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

LIMA, E. et al. *A matematica do ensino médio.* 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2023. v. 1. (Coleção do professor de matemática, v. 1). Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 61.

LIMA, E. L. *Funções de uma variável.* 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1. Citado na página 39.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais.* 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2013. v. 7. (Coleção PROFMAT, v. 7). Citado 4 vezes nas páginas 39, 54, 61 e 63.

MENEZES NETO, J. L. d. *Primeiros passos em criptografia.* João Pessoa: Editora UFPB, 2021. E-book. ISBN 978-65-5942-143-5. Disponível em: <http://www.editora.ufpb.br/sistema/press/>. Citado na página 53.

Ministério da Educação. *Histórico da Base Nacional Comum Curricular.* 2024. Acessado em: 11 de julho de 2024. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico>. Citado na página 24.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta.* 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2015. v. 12. (Coleção PROFMAT, v. 12). Citado 2 vezes nas páginas 39 e 49.

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de matemática elementar*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2013. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 39, 63 e 64.

MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 51.

OLIVEIRA, E. V. de; HOYOS, M. G. C. Funções de variáveis discretas. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 104.

OLIVEIRA, I. da S.; COSTA, J. B. da. As tics como instrumentos dinamizadores nos processos de ensino e aprendizagem. *Rebena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem*, v. 5, p. 269–282, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 84.

PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco: Ensino Médio*. 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2023/11/CURRICULO_DE_PERNAMBUCO_DO_ENSINO-MEDIO-2021_Final.pdf>. Citado na página 25.

PONTES, E. A. S. Uma abordagem analítica da interpolação polinomial em um ambiente computacional: uma experiência prática no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação técnica. *Revista Thema*, v. 16, n. 1, p. 42–49, 2019. Citado na página 22.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário I

Este questionário contém um total de 35 questões, sendo que as 20 primeiras estão relacionadas ao primeiro capítulo da Cartilha Interativa, intitulado “Conceito de Função”, e as 15 últimas abordam o segundo capítulo, denominado “Função”.

I. Conceito de função

PROFMAT

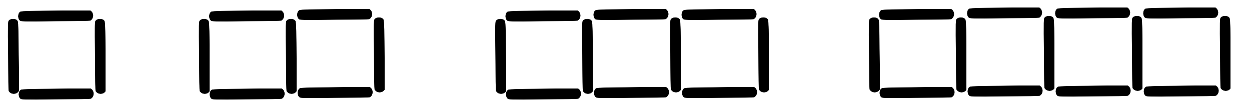
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Orientadora: Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida
Mestrando: Thiago dos Santos Silva

UFCG
SUPRA OMNES LUX LUCES

Aluno (a): ____

Informações para as questões de 1) a 5):

A sequência de quadrados a seguir foi construída com palitos de picolé. Note que o número de palitos utilizados varia de acordo com o número de quadrados.



Nº de Quadrados	Nº de Palitos
1	4
2	7
3	10
4	13
⋮	⋮

1) Sendo p o número de palitos, e q o número de quadrados, qual é a regra que relaciona o número de palitos em função do número de quadrados?

Ⓐ $p = 4q$ Ⓑ $p = q + 3$ Ⓒ $p = 4q - 1$ Ⓓ $p = 2q + 4$ Ⓔ $p = 3q + 1$

Mantendo esse mesmo padrão, quantos...

2) ...palitos serão necessários para formar 5 quadrados?

3) ...palitos serão necessários para formar 2025 quadrados?

4) ...quadrados é possível formar utilizando 25 palitos? Sobrará algum palito?

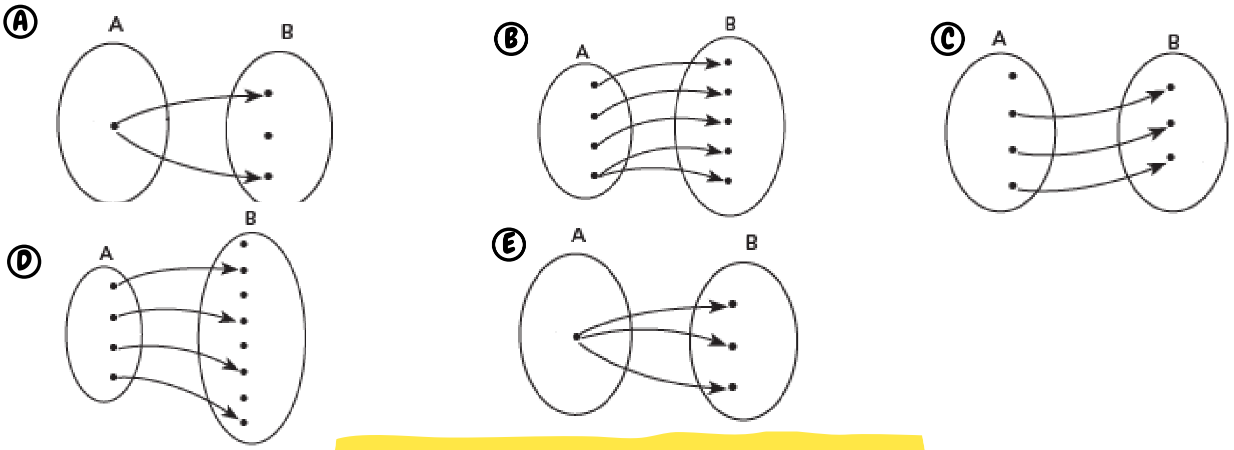
○ Sim. ○ Não.

5) ...quadrados é possível formar utilizando 2009 palitos? Sobrará algum palito?

○ Sim. ○ Não.

1. Conceito de função

6) Qual das relações representadas nos diagramas a seguir é uma função?



Informações para as questões de 7) a 13):

No estudo de funções lidamos com alguns símbolos que nos ajudam a atribuir significados ao conceito de função. Um deles é o apresentado abaixo.

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

7) Como se chama o conjunto A?

8) O que significa o conjunto A?

9) Como se chama o conjunto B?

10) O que significa o conjunto B?

11) Como é chamado o elemento f(x) de B para cada x de A?

12) Como se lê $f : A \to B$?

13) O que significa $x \mapsto f(x)$?

1. Conceito de função

14) Toda função contém, necessariamente, três ingredientes. São eles:

Ⓐ Domínio, contra-domínio e lei de correspondência.

Ⓑ Fórmula, tabela e variável independente.

Ⓒ Diagrama de flechas, gráfico e tabela.

Ⓓ Domínio, contra-domínio e imagem.

Ⓔ Domínio, imagem e gráfico.

15) Sobre as variáveis dependentes e variáveis independentes é correto afirmar que

Ⓐ as variáveis dependentes pertencem ao domínio.

Ⓑ as variáveis independentes pertencem ao domínio.

Ⓒ as variáveis independentes pertencem ao contra-domínio.

Ⓓ algumas variáveis dependentes pertencem ao domínio.

Ⓔ algumas variáveis independentes pertencem ao contra-domínio.

Informações para as questões de 16) a 20):

Seja A = {-2, -1, 0, 1, 2}, B = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} e $f : A \to B$, uma função que associa cada $x \in A$ o seu quadrado $y \in B$.

16) Represente esta função através de um diagrama de flechas.

Escreva...

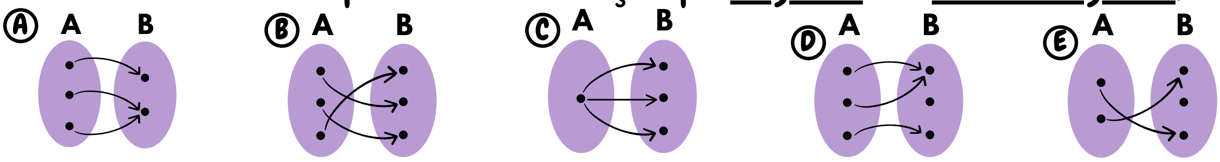
17) ...os elementos do domínio.

18) ...os elementos do contra-domínio.

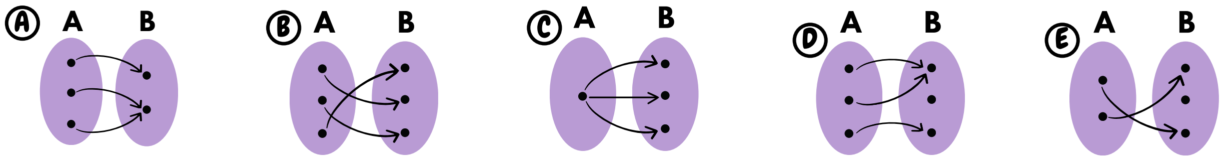
19) ...os elementos da imagem.

20) ...a regra que diz como associar os elementos de B em função dos elementos de A.

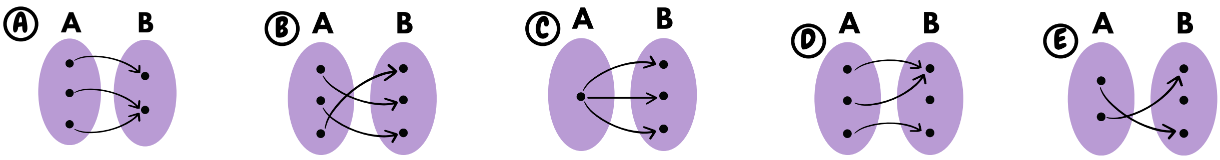
21) A única alternativa que mostra uma função que **é injetiva** mas **não é sobrejetiva**, é:



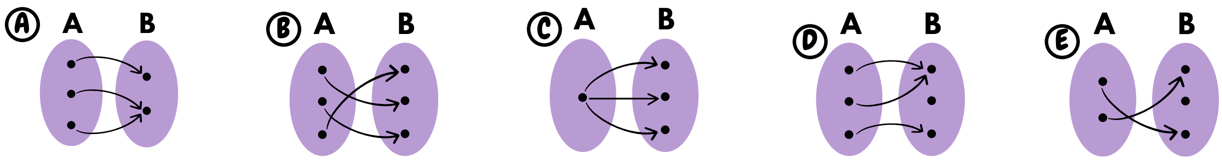
22) A única alternativa que mostra uma função que **é sobrejetiva** mas **não é injetiva**, é:



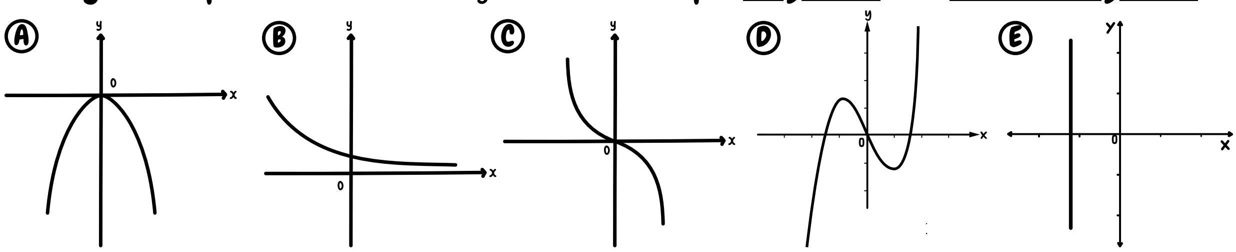
23) A única alternativa que mostra uma função que **é sobrejetiva** e **é injetiva**, é:



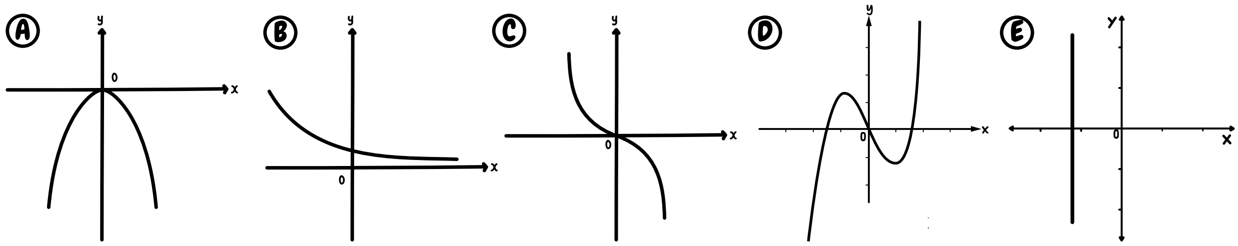
24) A única alternativa que mostra uma função que **não é sobrejetiva** e **não é injetiva**, é:



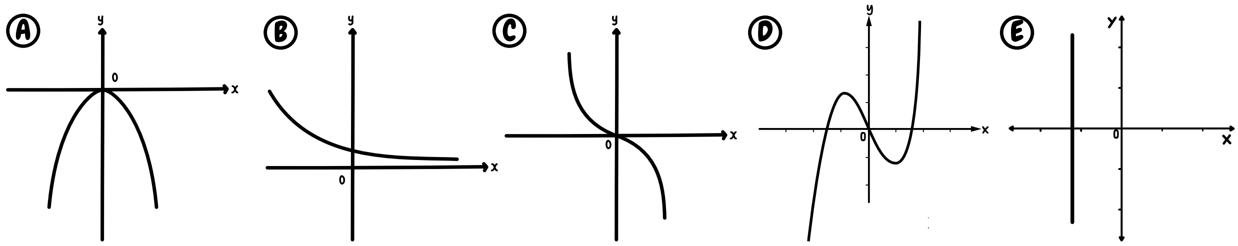
25) O gráfico que mostra uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que **é injetora** mas **não é sobrejetora**, é:



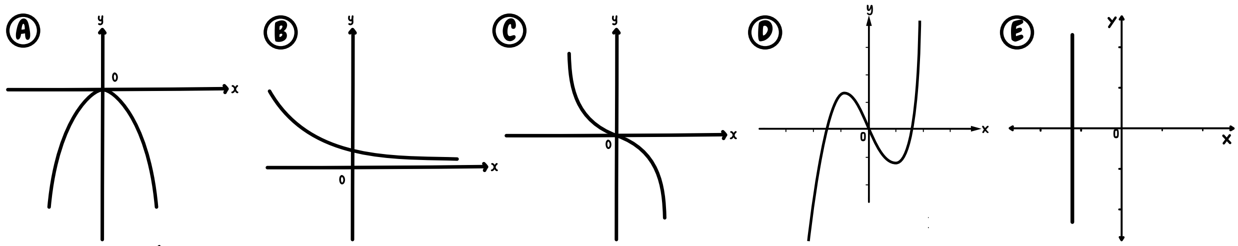
26) O gráfico que mostra uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que **é sobrejetora** mas **não é injetora**, é:



27) O gráfico que mostra uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que **é sobrejetora** e **é injetora**, é:



28) O gráfico que mostra uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que <u>não é sobrejetora</u> e <u>não é injetora</u>, é:



29) O que é uma função bijetiva?

30) A condição para que uma função seja invertível, isto é, admitir inversa, é

Ⓐ ser injetiva, mas não sobrejetiva.

Ⓑ ser sobrejetiva, mas não injetiva.

Ⓒ ser injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

Ⓓ não ser sobrejetora nem injetora.

Ⓔ não ser bijetora.

31) Se $f : A \to B$ é tal que $f(x) = 2x + 4$, então

Ⓐ $f^{-1}(x) = 4x + 2$

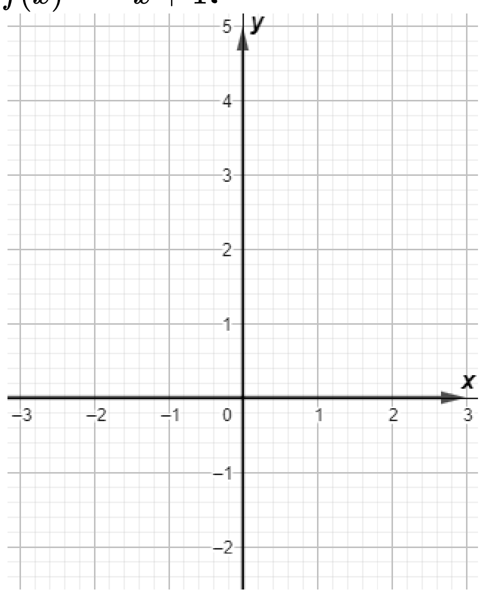
Ⓑ $f^{-1}(x) = -2x - 4$

Ⓒ $f^{-1}(x) = x - 6$

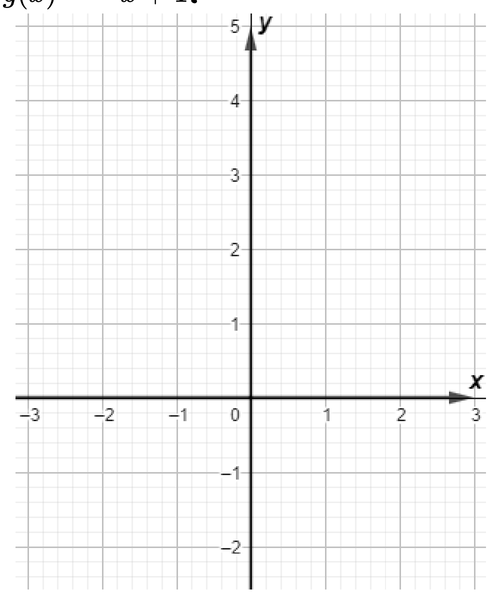
Ⓓ $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 4}{2}$

Ⓔ $f^{-1}(x) = \dfrac{-x - 4}{2}$

32) Construa no plano cartesiano a seguir o gráfico da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = -x + 1$.



33) Construa no plano cartesiano a seguir o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x + 1$.



34) A função f, apresentada na questão (32), possui domínio: ◯ Contínuo. ◯ Discreto.

35) A função g, apresentada na questão (33), possui domínio: ◯ Contínuo. ◯ Discreto.

RASCUNHOS