UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

KELVIN SERRÃO DOS SANTOS

O Uso da Otimização nas Equações Quadráticas e Desigualdade das Médias como Ferramenta Didática no Ensino da Matemática

MANAUS, AGOSTO
2024

KELVIN SERRÃO DOS SANTOS

O Uso da Otimização nas Equações Quadráticas e Desigualdade das Médias como Ferramenta Didática no Ensino da Matemática

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.
Orientadora: Silvia Cristina Belo e Silva, Dra.

MANAUS, AGOSTO
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

K29ou Santos , Kelvin Serrão
O Uso da Otimização nas Equações Quadráticas e Desigualdade das Médias como Ferramenta Didática no Ensino da Matemática / Kelvin Serrão Santos . Manaus : [s.n], 2024.
67 f.: color.; 29 cm.

Dissertação - MPM - Matemática - Rede PROFMAT - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2024.
Inclui bibliografia
Orientador: Silvia Cristina Belo e Silva

1. Otimização . 2. Equação do segundo grau. 3. Médias. 4. Ensino. I. Silvia Cristina Belo e Silva (Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III. O Uso da Otimização nas Equações Quadráticas e Desigualdade das Médias como Ferramenta Didática no Ensino da Matemática

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, do Aluno **KELVIN SERRÃO DOS SANTOS,** matrícula nº **2291940006.**

Em 29 de agosto de 2024, às 09h, na Sala de Videoconferência da Escola Normal Superior no Município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Profa. Dra. Sílvia Cristina Belo e Silva, Prof. Dr. Naamã Galdino da Silva Neris (Participação Remota), e Profa. Dra. Neide Ferreira Alves, o aluno **KELVIN SERRÃO DOS SANTOS** apresentou a defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEA, intitulada: **"O Uso da Otimização nas Equações Quadráticas e Desigualdade das Médias como Ferramenta Didática no Ensino da Matemática".**

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado ao aluno e aos demais presentes.

Manaus, 29 de agosto de 2024.

Silvia Cristina Belo e Silva

Orientador

Neide Ferreira Alves

Membro Interno da Banca Avaliadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
NAAMA GALDINO DA SILVA NERIS
Data: 30/08/2024 09:22:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Membro Externo da Banca Avaliadora

Kelvin Serrão dos Santos

Mestrando

Dedico este trabalho a Deus!
À minha Mãe Ângela, pelo amor e pelo extraordinário empenho em me direcionar aos estudos.
Ao meu Pai Rênis, que sempre está ao meu lado e me dando conselhos.
À minha irmã Karina, que sempre me ajudou.
E à minha esposa Helen, por todo seu amor, companheirismo e por trilhar lado a lado comigo essa jornada.

Agradecimentos

Agradeço à minha professora orientadora doutora Silvia Cristina Belo e Silva, pela orientação, paciência e correções, sempre querendo meu melhor, me fazendo apto para concluir este trabalho.

Agradeço aos meus professores e professoras do PROFMAT, por compartilharem com brilhantismo o seu conhecimento e experiência, afim de me tornar um profissional melhor.

Resumo

A otimização tem ganhado cada vez mais espaço na matemática aplicada como ferramenta fundamental para encontrar boas soluções para problemas dos mais simples aos mais complexos. Sua aplicação é extensa, incluindo diversos campos como logística de produtos, custo e produção, alocação de equipes, entre outros. Geralmente a abordagem de problemas de otimização são iniciadas de derivadas. Este trabalho visa, mostrar como tornar as aulas do Ensino Médio mais atrativas e dinâmicas, trabalhando com problemas de otimização como aplicação de equações quadráticas e médias. Além de propiciar ao aluno um conhecimento mais significativo, tal ferramenta didática permite uma melhor fixação do conteúdo, auxiliando em provas como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), onde aparecem situações problemas que abordam estes assuntos. Portanto, ao final deste trabalho, será perceptível que a partir das Resoluções de Problemas é possível tornar a exposição de conteúdos da matemática mais interessantes e consequentemente despertar um maior interesse do aluno, uma vez que podem, de maneira concreta e palpável, enxergar a importância da Matemática na solução de problemas diários.

Palavras-chaves: Otimização, Equação do segundo grau, Médias, Ensino.

Abstract

Optimization has been gaining more and more space in applied mathematics as a fundamental tool for finding good solutions for problems ranging from the simplest to the most complex. Its application is extensive, including various fields such as product logistics, cost and production, team allocation, among others. Generally, the optimization problems approach begins with derivatives. This work aims to make high school classes more attractive and dynamic, working with optimization problems such as the application of quadratic and average equations. In addition to providing the student with more significant knowledge, it allows for better retention of the content, helping in tests such as ENEM (National High School Exam) and SAEB (Basic Education Assessment System), where problem situations arise that address these issues. Therefore, at the end of this work, it will be noticeable that using Problem Solving it is possible to make the presentation of mathematics content more interesting and consequently arouse greater interest on the part of the student, since they can concretely and palpably see the importance of Mathematics in solving daily problems.

Keywords: Optimization, Quadratic equation, Averages, Teaching.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é contribuir para uma abordagem mais ampla e significativa dos conteúdos de equações quadráticas e médias. O processo de utilização da otimização na sala de aula é uma ferramenta que pode auxiliar professores de matemática do ensino básico a mostrarem onde e como a matemática pode ser aplicada no cotidiano dos alunos.

Fazer o uso de questões que utilizam a contextualização matemática é uma metodologia que visa melhorar o processo ensino aprendizagem, assim sendo uma importante ferramenta no processo de otimização.

Para Vasconcellos,

> [..] contextualização é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que o conduza à sua compreensão (VASCONCELLOS, 2008, p.49).

Este trabalho foi aplicado na escola Municipal Professor Themistocles Pinheiro Gadelha, localizada na zona urbana de Manaus, com a intenção de desenvolver uma abordagem que mostrasse para os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental que a matemática não é apenas um processo de repetição, e sim, uma ferramenta que nos ajuda a formar um pensamento crítico e nos auxilia a buscar soluções para os problemas que iremos encontrar durante nossa jornada acadêmica e na vida real.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), recomenda-se que desde o Ensino Fundamental, sejam abordadas noções básicas de utilização das definições matemáticas, afim de solucionar problemas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN- Matemática, p.37-1998)

> “Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações, como em espaço, forma e medidas.
> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos.”

Com isso, os alunos concluem o ensino fundamental com muitas dúvidas de onde irão utilizar os conteúdos que foram aprendidos principalmente no ensino da matemática. Dessa forma, este trabalho busca mostrar onde podemos empregar os conteúdos de equação do 2° grau e Médias, aplicando na resolução de problemas de otimização.

No primeiro e segundo capítulo foi realizado um levantamento histórico do surgimento da equação do segundo grau e como as nações costumavam determinar sua solução no Período antes de Cristo. O terceiro capítulo mostra o que é um problema de otimização, como resolver e para que serve e como o professor pode utilizar essa ferramenta com apoio metodológico para cativar os alunos a interagirem nas aulas de matemática. O quarto e quinto capítulo mostrar o processo de otimização nas equações do segundo grau e nas Médias, e como é sua utilização em problemas que podem ser aplicados na vida real. O sexto capítulo mostra o processo de utilização da otimização no ensino superior.

Por fim, o último capítulo, apresenta a experiência em sala de aula com a turma do 9° ano, com aplicação de questionários e a realização das análises de dados obtidos em cada um destes questionários. Desta forma, foi possível identificar as dificuldades que os alunos encontraram durante a aplicação desta metodologia.

1 Aspectos Históricos da Equação Quadrática

Os povos antigos da Ásia menor, Mesopotâmia e Novo Império Egípcio já faziam uso de técnicas para determinar a solução da equação quadrática. Podemos considerar como prova a construção da pirâmide dos egípcios. Os Babilônios e os Egípcios faziam o uso de símbolos e textos como ferramentas para auxiliarem a determinar a solução dessas equações.

Historiadores encontraram vários registros do período babilônico, que indicam que determinar a solução da equação quadrática completa não era problema para os babilônios, uma vez que haviam desenvolvido operações algébricas flexíveis. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019)

> Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem esse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas em um sentido bem abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um "comprimento" com uma "área", ou uma "área" com um "volume".

Pesquisadores não conseguiram encontrar muitos registros que falam sobre como os egípcios solucionavam as equações de segundo grau, mas os historiadores acreditam que eles dominavam técnicas para resolvê-las. Foram encontrados em um Papiro de Berlim, datado há aproximadamente 1950 a.C.

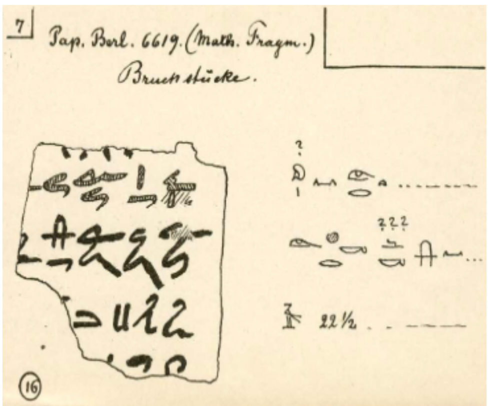


Figura 1: Papiro de Berlim

No Papiro de Kahun, também foi encontrada uma solução de uma equação, atualmente escrita como $x^2 + y^2 = k$, com k sendo número positivo, utilizando o método da falsa posição. Este método foi criado pelos egípcios para determinar a solução de uma equação do segundo grau.

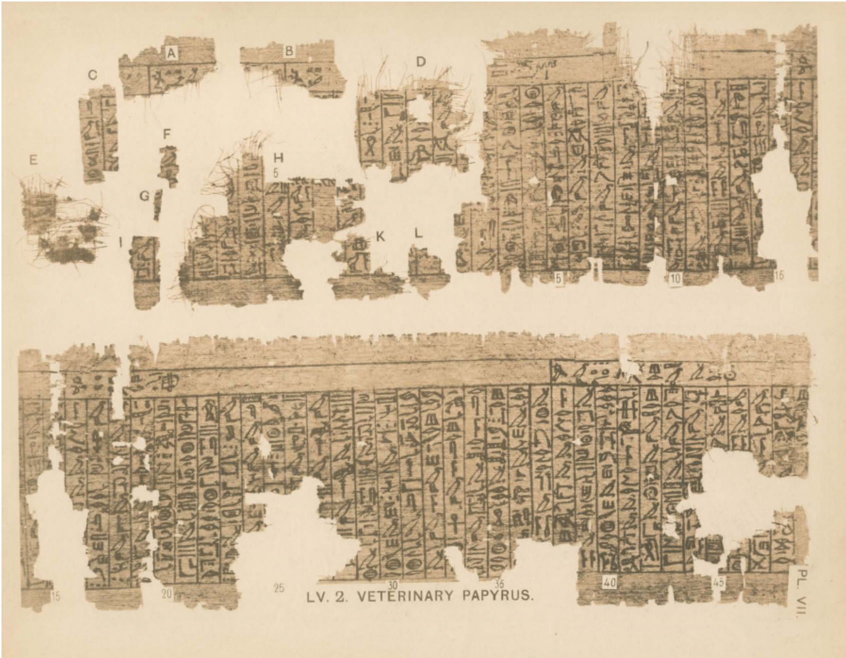


Figura 2: Papiro de Kahun

Os babilônios utilizavam uma tabela contendo valores de $n^3 + n^2$, especialmente úteis para valores inteiros de n. Essas tabelas eram cruciais na Álgebra Babilônica. Foram encontradas aproximadamente 400 tábuas contendo diversos conteúdos, das quais cerca de metade estavam relacionadas à matemática. Um exemplo segundo (BOYER; MERZBACH)

> 1/4 da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos. A solução é achada primeiro substituindo cada "mão" por 5 "dedos" e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazem ambas as equações. Em seguida, porém, a solução é achada por um método alternativo, equivalente a uma eliminação por combinação. Exprimindo todas as dimensões em termos de mãos, e, fazendo comprimento e largura iguais a x e y respectivamente, as equações ficam $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado $3x = 18$; daí $x = 6$ mãos ou 30 dedos e $y = 20$ dedos.

Figura 3: A tabuleta Plimpton 322

Os gregos, por sua vez, conseguiam resolver essas equações associando-as à geometria, utilizando métodos geométricos para solucionar problemas relacionados às equações de segundo grau.

Na cultura grega, se utilizavam dois métodos principais para resolver certas equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Segundo (EVES et al., 2004).

> O método das proporções permite a construção de um segmento de reta x dado por $a : b = c$ ou por $a : x = x : b$ em que a, b e c são segmentos de retas dados. Ou seja, o método das proporções fornece soluções geométricas das equações $ax = bc$ e $x^2 = ab$.

O método das áreas, segundo (EVES et al., 2004), consistia em:

> considerar um segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$ cujo lado AQ está contido na semirreta $\overrightarrow{AB}$. Se Q não coincide com B, tome C de modo que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando Q está entre A e B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB, ficando aquém pelo paralelogramo $QBCR$; quando Q coincide com B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB; quando Q está no prolongamento de AB, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicando ao segmento AB, excedendo pelo paralelogramo $QBCR$.

O livro de (EVES et al., 2004) faz o uso de proposições do Livro "Elementos"e mostra como é encontrado as raízes de uma equação quadrática utilizando o método das áreas.

Diferente dos gregos os matemáticos indianos consideravam as raízes irracionais dos números como números naturais, o que foi de grande importância para a álgebra e muito respeitado na época. A falta de uma distinção entre resultados exatos e inexatos pelos matemáticos hindus fez com que eles não diferenciassem seriamente as grandezas comensuráveis das incomensuráveis. Para eles, os números irracionais eram facilmente aceitos, e, gerações subsequentes seguiram esse exemplo sem uma análise crítica. Somente no século XIX os matemáticos estabeleceram uma base sólida para o sistema dos números reais.

Entre os matemáticos indianos, Sridhara, Bramagupta e Bhaskara foram notáveis por suas contribuições ao desenvolvimento da matemática, especialmente nas equações do segundo grau. Sridhara foi pioneiro ao estabelecer uma fórmula matemática para resolver equações biquadradas, enquanto Bramagupta e Bhaskara se destacaram em seus trabalhos textuais. No mundo árabe, Al-Khwarizmi brilhou com suas contribuições. Inspirado pelos gregos, ele desenvolveu metodologias para a resolução de equações de segundo grau e suas representações geométricas foram fortemente influenciadas por Euclides.

Apesar de seus erros e acertos, a matemática indiana teve uma contribuição significativa. A álgebra hindu é particularmente destacada por seu avanço na análise indeterminada, campo no qual Brahmagupta fez diversas contribuições importantes. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019)

> Por exemplo, em sua obra achamos uma regra para a formação de ternas pitagóricas expressas na forma $m, 1/2(m^2/n-n), 1/2(m^2/n+n)$, mas isso é apenas uma forma modificada da antiga regra babilônica, que ele pode ter conhecido. A fórmula de Brahmagupta para a área do quadrilátero, mencionada acima, foi usada por ele em conjunção com as fórmulas
>
> $$\sqrt{(ab+cd)\,(ac+bd)\,/\,(ad+bc)}$$
>
> e
>
> $$\sqrt{(ac+bd)\,(ad+bc)\,/\,(ab+cd)}$$
>
> para as diagonais, para achar quadriláteros cujos lados, diagonais e áreas fossem todos racionais. Entre esses, estava o quadrilátero de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$, e diagonais 63 e 56. Brahmagupta deu a área "bruta' como sendo 1.933 3/4, apesar de sua fórmula fornecer a área exata, 1.764, nesse caso.

Foi com o matemático francês Viete que o método de resolução das equações do segundo grau passou a utilizar símbolos e letras. Viete desempenhou um papel crucial na modernização da álgebra, e seus avanços foram posteriormente ampliados por outro francês, René Descartes.

Nos dias de hoje, um método matemático usado para resolver equações do segundo grau não pode ser atribuída a uma única pessoa, mas sim a diversos estudiosos matemáticos que, através de muitos estudos, desenvolveram a fórmula atual.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

1.1 Bhaskara

Na Ásia, apareceram muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, em especial Bhaskara o mais importante matemático do século XII. Ele contribuiu para a obra de Brahmagupta, disponibilizou uma solução geral para a equação de Pell e abordou o problema da divisão por zero. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019) Aristóteles observara que não existe uma razão pela qual um número como quatro excede o número zero; mas a aritmética do zero não entrava na matemática grega, e Brahmagupta, não se comprometera quanto à divisão de um número diferente de zero por zero.

> Afirmação: Dividendo 3. Divisor 0. Quociente a fração 3/0. Essa fração cujo denominador é cifra, chama-se uma quantidade infinita. Nessa quantidade, que consiste no que tem cifra como divisor, não há alteração mesmo que muito seja acrescentado ou retirado; como nenhuma alteração se dá no Deus infinito e imutável.(BOYER; MERZBACH, 2019)

Essa afirmação, que na época tinha seus méritos não ficou clara para os demais matemáticos, pois não se tinha a informação de quando foi sugerida pela seguinte asserção de Bhaskara: $\alpha/0 \cdot 0 = \alpha$.

As contribuições de Bhaskara representaram o auge da Índia na matemática. Em de seus livros mais conhecidos, o *Lilavati*, ele escreveu vários problemas de Brahmagupta dentre outros, acrescentando novas observações. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2019) um desse problemas é dado:

> O problema do "bambu quebrado", popular na China (e considerado também por Brahmagupta), aparece na forma seguinte: se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?

Os livros de Bhaskara estão repletos de outros problemas que tiveram enorme peso para matemática na época. No entanto alguns desses problemas possuíam equívocos, pois Bhaskara não gostava de utilizar algumas afirmações que estavam corretas como por exemplo, fórmulas que Brahmagupta utilizava na área geométrica que Bhaskara não as achavam corretas.

2 Problemas de Otimização

Em um determinado problema no qual onde é possível escrever uma função e onde devemos determinar os valores máximos ou mínimos dentro de um intervalo específico, é onde iremos aplicar o processo de Otimização, para determinar esses valores e fazer uma análise do que está acontecendo com esta função neste ponto. Os procedimentos utilizados para encontrar esses extremos podem ser aplicados na resolução de problemas que podemos encontrar no dia-a-dia. A primeira etapa deste processo é a leitura e a compreensão do que o problema está tentando transmitir, transformado-o em um problema matemático definindo a função que precisa ser maximizada ou minimizada.

De acordo com,(EDUCAÇÃO, 1997)

> A Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula..

A otimização é uma área da matemática aplicada que utiliza os conhecimentos matemáticos adquiridos a problemas do dia a dia, entre outros. No entanto, é pouco explorada no Ensino Fundamental e Médio devido à falta de tempo. Os professores precisam se dedicar a preparar problemas que não sejam nem muito fáceis nem muito difíceis, para estimular os alunos a encontrar soluções. A otimização é uma ferramenta valiosa para os professores de matemática, pois ajuda a responder a perguntas como: "Onde irei usar esse conhecimento?", demonstrando a aplicação real dos conceitos matemáticos ensinados na sala de aula. Segundo (ONUCHIC, 2019)

> O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo deve ser promovido. O professor, agora como mediador dos processos de ensino, deve disponibilizar uma diversidade de recursos (materiais e processuais) que respeitem as diferentes condições e estilos de aprendizagem de seus alunos. Para o ensino aprendizagem de Matemática, as alternativas e recomendações incluem jogos, tecnologias informáticas, modelagem matemática, investigações matemáticas, projetos, resolução de problemas, entre tantos outros recursos.

É de extrema importância que os professores de matemática incluam no planejamento de suas aulas a resolução de problemas de otimização, mostrando para os alunos se possível com figuras, gráficos ou ferramentas tecnológicas, onde e como é possível fazer a aplicação desse conhecimento. Esta metodologia permitirá que os alunos tenham um engajamento através da curiosidade no aprendizado, fazendo assim com que busquem responder perguntas importantes. A Matemática tem esse papel fundamental de incentivar, buscar soluções, ter curiosidade e propor problemas. Assim de acordo com (ONUCHIC, 1999)

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

2.1 Como Resolver Problemas de Otimização

Para encontrar uma solução de um problema de otimização, podemos seguir um roteiro ou procedimento bem estruturado. Aqui estão os passos recomendados segundo (UFV, 2017) temos:

- Compreensão do Problema: Leia o enunciado várias vezes até entender completamente o que está sendo solicitado. Identifique claramente o que precisa ser minimizado ou maximizado.

- Ilustração: Se possível, faça um desenho ou esquema que ajude a visualizar o problema. Isso pode facilitar o entendimento e a formulação da solução.
- Extração de Dados: Reúna todas as informações e dados fornecidos no problema. Anote todas as variáveis e condições relevantes.
- Dedução da Função: Formule uma função matemática que represente o objetivo do problema, seja ele minimizar ou maximizar algo. Identifique todas as variáveis envolvidas na função.
- Identificação do Domínio: Determine o domínio de aplicação da função, ou seja, o intervalo ou conjunto de valores possíveis para as variáveis.
- Aplicação de Ferramentas de Cálculo: Utilize as ferramentas do cálculo diferencial, como derivadas, para encontrar os pontos de mínimo ou máximo da função dentro do domínio identificado.

Exemplo Prático

Vamos utilizar um problema extraído do Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2016 do segundo dia de aplicação.

Problema: Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.

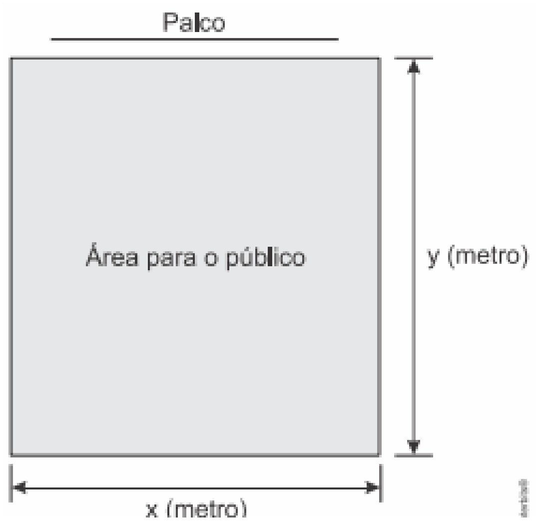


Figura 4: Fonte: Ministério da Educação

A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$20, 00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5, 00.

A empresa dispõe de $R\$5.000,00$ para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é:

Passo a Passo da Resolução:

1. Compreensão do Problema: Quais são as perguntas que devemos responder ?
   - Qual é a maior área possível para o público ?
   - A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é ?
2. Ilustração:

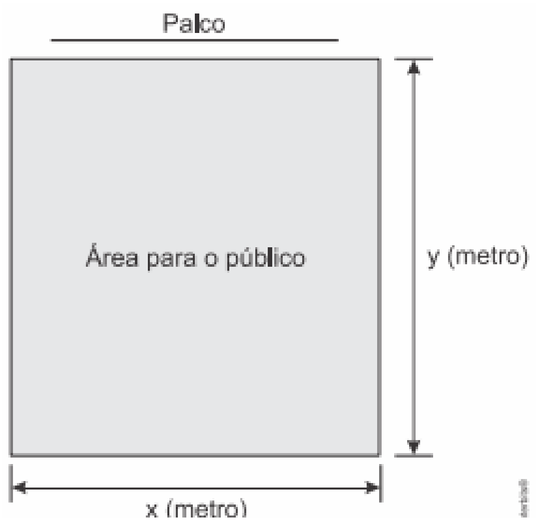


Figura 5: Fonte: Ministério da Educação

3. Extração de Dados: Observe que neste problema temos dados implícitos e explícitos.
   - Lados paralelos ao palco R$20=x
   - Lados não paralelos R$5=y
   - Área=xy
   - Perímetro: 2x+2y
   - Dinheiro disponível: R$5000 reais.
4. Dedução da Função:
   - Relacionando o perímetro com o dinheiro, obtemos:

$$40x + 10y = 5000$$

   - Agora, aplicando esse valor na área e igualando a zero, temos:

$$-4x^2 + 500x = 0$$

5. Identificação do Domínio:

- Como estamos trabalhando uma figura geométrica os valores que x e y poderão assumir, não serão negativos, assim:

$$x, y \in \mathbb{R} > 0$$

6. Aplicação de Ferramentas de Cálculo:

- Como a função dada possui um ponto de máximo e sua derivada existe, e como ela terá um ponto de máximo local nesse ponto podemos utilizar o teorema de Fermat, logo:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = -8x + 500 \\
&\Rightarrow f'(x) = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{500}{4} = 62,5
\end{aligned}$$

Como são 2 lados, serão necessários 125 metros do tipo A e 500 metros do tipo B

3 Problemas de Otimização com Funções Quadráticas

De acordo com o Ministério da Educação para o Ensino Médio, os problemas de máximos e mínimos frequentemente envolvem funções quadráticas. Nesses casos, a maior dificuldade é identificar a função que representa o problema. Construída essa função, devemos resolver o problema que consiste em determinar as coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática.

A seguir, será apresentada uma breve análise da forma canônica das funções quadráticas com o objetivo de encontrar as coordenadas do vértice e, assim, determinar seu valor máximo ou mínimo.

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e "a" necessariamente diferente de zero, note que colocando na forma canônica e completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

como a $\neq 0$, então:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Chamando $\Delta=b^2-4ac$, obtemos:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Conhecida como Fórmula de Bhaskara e que determina os zeros ou raízes da equação quadrática. Se olharmos para a função:

$$f\left(x\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Observa-se que o primeiro termo dentro do colchetes será sempre positivo, enquanto que o segundo termo será sempre constante.
O menor valor do primeiro termo ocorrerá quando $x+\frac{b}{2a}=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$.
Chamamos este valor de coordenada x do vértice e, denotamos por x_v.
Substituindo o valor de x_v na função $f\left(x\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$, obtemos:

$$f\left(x\right)=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$$

Conhecida como coordenada y do vértice, denotada por y_v. Portanto, o vértice da parábola é dado por $v=(x_v,y_v)=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. O discriminante Δ, pode ser verificado em três situações:

1. Se $\Delta>0$, a função terá duas raízes reais.
2. Se $\Delta<0$, a função não terá nenhuma raiz real.
3. Se $\Delta=0$, a função terá apenas uma raiz real.

Veja, na figura 4, o caso em que o discriminante é positivo. Neste caso, teremos um ponto de mínimo:

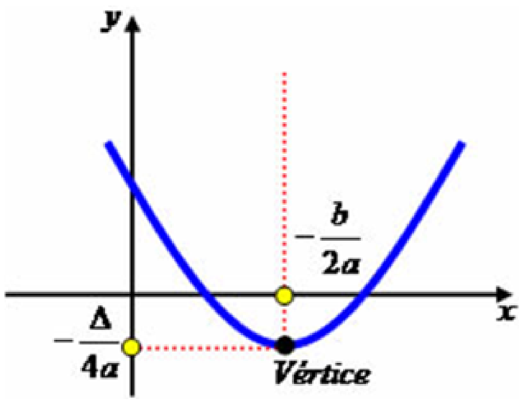


Figura 6: Gráfico de $f(x)$, concavidade para baixo

Se o discriminante for negativo, a parábola será voltada para baixo e, neste caso, teremos um ponto de máximo. Veja abaixo:

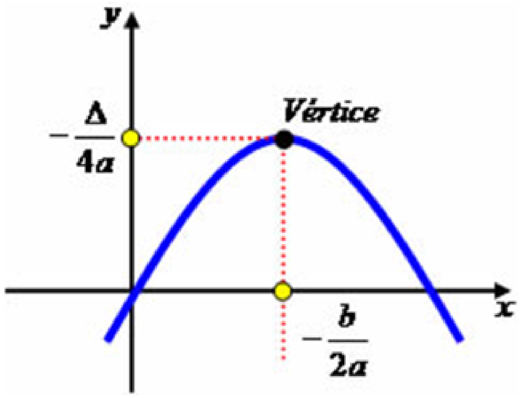


Figura 7: Gráfico de $f(x)$, concavidade para cima

Caso o discriminante seja igual a zero, a função não terá raízes reais.

Veremos a seguir, alguns exemplos de problemas de otimização, que serão resolvidos utilizando funções quadráticas.

1. **Exemplo:**

   Para uma festa de formatura os alunos de uma escola alugaram um salão de eventos com capacidade para 200 pessoas. Eles combinaram de início que cada aluno, iria pagar R\$12,00. Caso a lotação do estabelecimento não fosse atingida, o gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R\$1,00 por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de alunos presentes na festa de formatura para que a receita seja máxima?

   Solução: Sejam x o número de alunos e R a receita. A função R(x) é definida por:

   $$R(x) = x\left[12 + 1(200 - x)\right]$$
   $$R(x) = 12x + 200x - x^2$$
   $$R(x) = -x^2 + 212x$$

   Podemos verificar que R(x) é uma função do 2º grau com o coeficiente $a < 0$, de onde podemos concluir à priori, que iremos determinar um ponto de máximo. Calculando o x do vértice, obtemos:

   $$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-212}{2(-1)} = 106$$

   Portanto, a receita máxima se encontra no vértice da parábola que é de 106 alunos, neste caso a receita será igual a R\$11.236,00.

2. **Exemplo:**

   Um fazendeiro deseja construir dois cercados para a criação de gado, tendo disponível 120 metros de cerca. Um deles deverá ter formato quadrado e o outro retangular, com comprimento igual ao triplo da largura. Se a soma da área desses cercados deve ser a menor possível, qual é a área do cercado quadrado?

Solução: Vamos considerar que x seja a medida do lado do quadrado, assim para construir o cercado retangular vão restar (120-4x) metros de cerca.

Se denotarmos a largura por y e comprimento por x, teremos:

Largura=y;
Comprimento=3y.
Teremos:

$$2\,(3y) + 2y = (120 - 4x) \Rightarrow 8y = (120 - 4x) \Rightarrow y = \frac{(120 - 4x)}{8}$$

Logo:

$$y = \frac{(30 - x)}{2} \Rightarrow 3y = \frac{(90 - 3x)}{2}$$

Portanto, a função A(x) que determina a soma das áreas dos dois cercados é dada por:

$$A\,(x) = x^2 + \left(\frac{30 - x}{2}\right) \cdot \left(\frac{90 - 3x}{2}\right)$$
$$A\,(x) = x^2 + \frac{2700 - 90x - 90x + 3x^2}{4}$$
$$A\,(x) = \frac{7x^2 - 180x + 2700}{4}$$
$$A\,(x) = \frac{7x^2}{4} - 45x + 675$$

Calculando o x do vértice, obtemos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{90}{7}$$

Temos, portanto, que a função é mínima quando x=$\frac{90}{7}$. Portanto, a área do cercado quadrado é $\frac{8100}{49}m^2$.

3. **Exemplo**

Uma loja de fabricação de móveis para escritórios é especializada na produção de cadeiras sob medida para seus clientes. Cada cadeira tem um custo de 50 reais. Se o produto for vendido no valor de 100 reais, a loja consegue vender 9000 unidades por mês. O proprietário dessa loja, ultimamente tem observado que ao aumentar o valor em 10 reais a unidade, vende 200 unidades a menos mensalmente. O proprietário dessa loja deseja saber:

(a) Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter a máxima receita?

(b) Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de obter a máxima receita?

(c) Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro?

(d) Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de que obtenha o máximo lucro?

Solução: Seja q = quantidade vendida mensalmente. Se o preço passar de $R\$100{,}00$ para $R\$110{,}00$, então:
$q = 9000 - 20 \cdot (110 - 100) = 9000 - 200\,(\text{a quantidade cai de } 200)$.
Se o preço passar de $R\$100{,}00$ para $R\$120{,}00$, então:
$q = 9000 - 20 \cdot (120 - 100) = 9000 - 400\,(\text{a quantidade cai de } 400)$.
E assim por diante.
Se em dado momento o preço for p, então:

$$q = 9000 - 20 \cdot (p - 100) = 9000 - 20p + 2000 = -20p + 11.000$$

Como a receita total R_t é igual ao preço vezes a quantidade, logo $R_t = p \cdot q$. Realizando as devidas substituições, obtemos:

$$p \cdot q = p\,(-20p + 11.000) = -20p^2 + 11.000p$$

Como $p \cdot q$ é a receita, logo:

[1] $$R_t = -20p^2 + 11000p$$

A equação acima é a receita total da empresa.
a) Sendo [1] uma equação de 2º grau, logo seu gráfico é uma parábola.
Como o coeficiente de p^2 é negativo, então a receita total atinge o máximo no vértice da parábola. Como o vértice da parábola é dado por $p_v = -\frac{b}{2a}$ e como $a = -20$ e $b = 11000$, logo:

$$p_v = \frac{-11000}{-40} = 275$$

Portanto, $p = 275$. Logo, o maior preço que a empresa deverá cobrar a fim de obter a máxima receita é $R\$275,00$. E para esse preço, o valor máximo de receita total é:

$$R_t = -20 \cdot 275^2 + 11000 \cdot 275 = R\$1.512.500,00.$$

b) $q = -20 \cdot 275 + 11000 = 5500$ unidades.
Assim, a fim de obter a máxima receita, a empresa deverá produzir e vender 5500 unidades.
c) Como o lucro total é igual à diferença entre a receita total e o custo total C_t, logo:

$$L_t = R_t - C_t$$

Sendo que a empresa gasta $R\$50,00$, para produzir cada unidade do produto, o custo total é $C_t = 50q$. Como $q = -20p + 11000$, então:

$$C_t = 50\,(-20p + 11000) = -1000p + 550000$$

A equação anterior é a equação do custo total ou função custo total da empresa. Como $L_t = R_t - C_t$, então:

$$L_t = -20p^2 + 11000p - (-1000p + 550000)$$

$$L_t = -20p^2 + 12000p - 550000$$

A equação acima é a equação do lucro total ou função lucro total da empresa. Como a equação do lucro é do 2° grau, seu gráfico é uma parábola. O coeficiente de p^2 é negativo, então, o lucro atinge o máximo no vértice da parábola. Pela equação L_t, temos $a = -20$ e $b = 12000$, logo:

$$p_v = \frac{-12000}{2\,(-20)} = 300$$

Portanto, o maior preço que a empresa deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro, é de $R\$300,00$. E, para esse preço, o valor máximo do lucro total é:

$$L_t = -20(300)^2 + 12000\,(300) - 550000 = R\$1.250.000,00.$$

d) $q = -20\,(300) + 11000 = 5000$ unidades.

Portanto, a fim de obter o máximo lucro, a empresa deverá produzir e vender 5000 unidades.

Este problema abrange vários tópicos do Ensino Médio, como funções de primeiro e segundo grau. Trata-se de um problema de otimização que pode ser explorado como uma aplicação prática no dia a dia.

4. **Exemplo [UFG]**

Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R tangenciando dois de seus lados opostos, de acordo com a figura a abaixo:

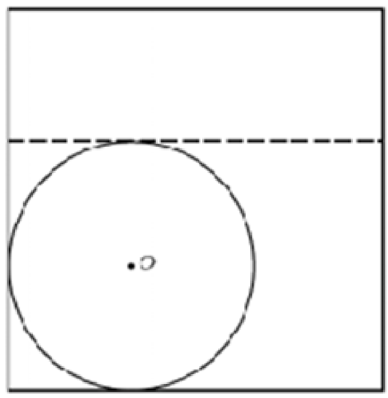


Figura 8: Ilustração do círculo

(a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

(b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Observe que neste problema se faz necessário o uso da figura anterior, ou seja, em muitos problemas de otimização é de suma importância a esquematização ou representação gráfica da figura.

Então, se o aluno não consegue entender o enunciado é importante que o professor, quando possível, desenhe no quadro ou, com o uso de softwares matemáticos, faça o esboço da situação problema, pois em um estágio um pouco mais avançado os próprios alunos já serão capazes de fazer sua esquematização.

Solução: Denote por A a soma das áreas do círculo e do retângulo que não o contém e R o raio do círculo. Tem-se que as dimensões do retângulo que não contém o círculo são 4 cm e $(4-2R)$ cm. Assim,

$$\begin{aligned} A\left(R\right) &= \pi R^2 + 4 \cdot (4-2R) \\ &= \pi R^2 + 16 - 8R \\ &= \pi R^2 - 8R + 16 \end{aligned}$$

Como o coeficiente do termo quadrático é positivo, a mesma admite ponto de mínimo que ocorre quando $R = 4/\pi$.

Trata-se de um problema geométrico de otimização, mas que pode ser resolvido usando ferramentas algébricas, ou seja, função quadrática.

5. **Exemplo:**

O movimento uniformemente variado (MUV) é caracterizado pela função quadrática $f(t) = 1/2at^2 + bt + c$, que fornece a posição de um objeto num certo instante t. Nesse caso, a constante "a" é a aceleração, b é a velocidade inicial (quando $t = 0$) e c é a posição inicial do objeto.

Solução: O movimento uniformemente variado (MUV) é caracterizado pela função quadrática $f(t) = 1/2at^2+bt+c$, que fornece a posição de um objeto num certo instante t. Nesse caso, a constante "a" é a aceleração, b é a velocidade inicial (quando $t = 0$) e c é a posição inicial do objeto.

Temos que a velocidade média num intervalo de tempo é igual a (espaço percorrido)/(tempo de percurso). No caso do movimento de um objeto dado por uma função f, temos que sua velocidade média no intervalo [t,t + h] é dada por:

$$\text{velocidade média} = \frac{f\left(t+h\right) - f\left(t\right)}{h}$$

Para $f\left(t\right) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, temos:

$$f\left(t+h\right) = \frac{1}{2}a(t+h)^2 + b\left(t+h\right) + c$$

$$f\left(t+h\right) = \frac{1}{2}at^2 + ath + \frac{1}{2}ah^2 + bt + bh + c$$

e

$$f\left(t+h\right) - f\left(t\right) = \frac{1}{2}at^2 + ath + \frac{1}{2}ah^2 + bt + bh + c - \frac{1}{2}at^2 - bt - c$$

$$f\left(t+h\right)-f\left(t\right)=ath+\frac{1}{2}ah^2+bh$$

Portanto,

$$\frac{f\left(t+h\right)-f\left(t\right)}{h}=\frac{ath+\frac{1}{2}ah^2+bh}{h}=at+\frac{1}{2}ah+b$$

Quando h se aproxima de zero, o valor da velocidade média se aproxima de $at+b$.

Chamaremos de $v(t)=at+b$ a velocidade no ponto (no MUV) no instante t.

Observe que $t=0$, $v(0)=b$.

É por este motivo que chamamos b de velocidade inicial.

Na função afim $v(t)=at+b$, a constante "a" que representa a aceleração, é a taxa de variação de velocidade.

Como ela é constante, o movimento é chamado **uniformemente variado**.

6. **Exemplo:**

   Se uma partícula é colocada em movimento sobre uma superfície, a partir de um ponto cuja abscissa é 10, com velocidade inicial de $5m/s$ e aceleração constante de $-2,5m/s^2$, em quanto tempo a trajetória mudará de sentido?

   Solução: A trajetória da partícula é dada em função do tempo por:

   $$f\left(t\right)=\frac{1}{2}at^2+bt+c$$

   Nesse caso $a=-2,5$,$b=5$ e $c=10$, então, temos:$f\left(t\right)=-1,25t^2+5t+10$.

   Ponto de máximo: $t=-\frac{b}{2a}=\frac{-5}{-2,5}=2$.

7. **Exemplo:**

   O dono de uma chácara, deseja cercá-la. Sabendo que sua chácara tem o formato retangular e que na parte de trás há um muro, serão utilizados 72 metros de arame, para cercá-la. Quais são as dimensões do retângulo que maximizam a área?

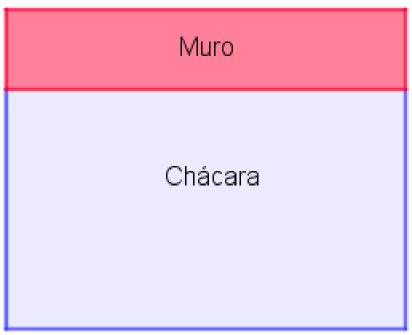


Figura 9: Área da chácara

Solução:

Sejam x e y as medidas do retângulo. Então:

$$\begin{cases} 2x + y = 72 \\ A = xy \end{cases}$$

Com relação à primeira equação, temos $y = 72 - 2x$.
Substituindo na segunda equação do sistema, obtemos:

$$A = x\,(72 - 2x) = 72x - 2x^2$$

Assim, devemos maximizar a função $72x - 2x^2$.
Usando a fórmula para encontrar o vértice do gráfico da função quadrática, segue-se que as medidas do retângulo são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-72}{-4} = 18\ m$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-5184}{-8} = 648\ m$$

Nos cursos superiores de Matemática ou áreas relacionadas, os problemas de otimização geralmente são resolvidos utilizando derivadas. Por outro lado, no Ensino Médio, a maioria desses problemas resulta em uma função quadrática, cuja solução foi discutida na seção anterior.

Porém, existe uma ampla quantidade de problemas que podem ser resolvidos usando outros **recursos algébricos**, tipicamente expressos por meio de **desigualdades**. Algumas destas serão discutidas a seguir.

4 Desigualdade das Médias

A desigualdade das médias é uma ferramenta bastante útil na resolução de certos problemas de otimização. No Ensino Médio, geralmente, as médias são abordadas no contexto de Noções de Estatística, onde se concentram no cálculo simples com base em dados fornecidos em gráficos ou tabelas. A seguir, mostraremos as definições dessas médias.

Definição 4.1. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Define-se:*

I) A média aritmética (m_a) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

II) A média geométrica (m_g) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

III) A média harmônica (m_h) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

IV) A média quadrática (m_q) de $a_1, a_2, ..., a_n$ como o número $\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+...+{a_n}^2}{n}}$

Uma vez definidas, existe uma importante relação entre estas médias, apresentada no seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$, verificam-se as seguintes desigualdades:*

$$m_h(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_g(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_a(a_1, a_2, ..., a_n) \leq m_q(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

A demonstração apresentada será limitada ao caso que envolve apenas dois números reais positivos, tornando-a acessível para alunos do Ensino Médio.

Demonstração.

Sejam a_1 e a_2 dois números reais positivos quaisquer. Para mostrar que $m_g \leq m_a$, basta observar que:

$$m_a - m_g = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geq 0$$

Como $m_a - m_g$ é não negativo, segue que $m_g \leq m_a$ para quaisquer $a_1 \neq a_2$ e a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

Para mostrar que $m_a \leq m_q$, observa-se que:

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2{a_1}^2 + 2{a_2}^2 \geq {a_1}^2 + 2a_1a_2 + {a_2}^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2}{2} \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Observe que esta última implicação é válida porque a_1 e a_2 são números positivos. Nota-se também que a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

Por fim, para mostrar que, $m_h \leq m_g$, aplica-se a desigualdade $m_g \leq m_a$ aos números positivos $\frac{1}{a_1}$ e $\frac{1}{a_2}$, de onde tem-se que:

$$\sqrt{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \leq \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2} \Leftrightarrow \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \leq \sqrt{a_1 a_2}$$

O que completa a demonstração, pois:

$$\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

Logo a seguir, mostraremos alguns exemplos de problemas de otimização onde será utilizada a desigualdade das médias.

4.1 Problemas de Otimização com Desigualdade De Médias

Exemplo 1. Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de catetos $AC = a$, $AB = b$ e de hipotenusa BC=c, qual é o valor máximo da área de ABC?

(a) $\frac{c^2\sqrt{2}}{4}$

(b) $\frac{c\sqrt{2}}{4}$

(c) $\frac{3c^2\sqrt{2}}{4}$

(d) $\frac{3c^2}{4}$

(e) $\frac{c^2}{4}$

Solução:

Sejam a e b os catetos de ABC. Pela desigualdade $mg \leq mq$ temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} &\Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\Rightarrow \frac{ab}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{4} \end{aligned}$$

Como a área de $ABC = A$ pode ser encontrada por $A = \frac{ab}{2}$ e pelo Teorema de Pitágoras é valido que $c^2 = b^2 + a^2$, então:

$$A \leq \frac{c^2}{4}$$

Logo, o valor máximo da área de ABC é $\frac{c^2}{4}$ e a resposta correta encontra-se na alternativa **e**

Exemplo 2. Encontre o mínimo de $x + \frac{2024}{x}$, onde x é positivo.

Solução:

Pela desigualdade $MA \geqslant MG$ podemos dizer que:

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{2024}{x}}{2} &\geq \sqrt{x \cdot \frac{2024}{x}} \\ \Rightarrow x + \frac{2024}{x} &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2024}{x}} \end{aligned}$$

Logo, o valor mínimo da expressão é $2\sqrt{2024}$ e ocorre quando $x = \frac{2024}{x}$. Isto é, quando $x = \sqrt{2024}$.

Exemplo 3. Sejam x e y números reais tais que $xy = 4\sqrt{5}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é:

(a) um número primo

(b) divisível por 6

(c) divisível por 13

(d) par maior que 300

(e) múltiplo de 25

Solução:

Usando a desigualdade $MA \geqslant MG$:

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geq \sqrt{x^8 \cdot y^8} = \sqrt{(x^4 \cdot y^4)^2} = x^4 \cdot y^4 = (xy)^4$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^8+y^8 &\geq 2(xy)^4 \\ = 2\left(4\sqrt{5}\right)^4 &\Rightarrow 2 \cdot 4^4 \cdot 25 \\ &= 2^9 \cdot 25 \end{aligned}$$

Assim temos que a resposta é a alternativa letra **e**

Exemplo 4. (PROFMAT-2014). Dado a e b dois números reais positivos, encontre o valor mínimo e o ponto em que esse valor mínimo ocorre, para a função abaixo:

$$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$$

Solução:

Por $MA \geqslant MG$ temos que:

$$\frac{ax^2+\frac{b}{x^2}}{2} \geq \sqrt{ax^2 \cdot \frac{b}{x^2}} = \sqrt{ab}$$

Assim,

$$f(x) \geq 2\sqrt{ab}$$

Logo, o valor mínimo pedido é igual a $2\sqrt{ab}$ e ele ocorre quando $ax^2 = \frac{b}{x^2}$. Isto é, se $x = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

Exemplo 5. Uma indústria faz a fabricação de óleo para a utilização em cozinhas, que é distribuído em garrafas plásticas que tem o formato cilíndrico cuja capacidade é de 2 litros. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do plástico para produzir a garrafa de óleo.

Solução:

A ideia é tentar exprimir uma função de acordo com a situação proposta pelo problema e, se possível, colocá-la em função de uma única variável dependente.

Finalmente, escolhe-se um método algébrico que permita minimizar a função encontrada.

O volume da lata cilíndrica é fixo e igual a 2 litro, ou seja, $2000cm^3$. A expressão que determina o volume do cilindro é $V = \pi R^2 h$, onde R representa o raio da base e h a altura do cilindro. Consequentemente,

$$\pi R^2 h = 2000 \Leftrightarrow h = \frac{2000}{\pi R^2} \tag{4.1}$$

Por outro lado, a área da superfície cilíndrica é dada por:

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R h \tag{4.2}$$

Substituindo 4.1 em 4.2, tem-se:

$$A(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{2000}{\pi R^2}$$

$$A\left(R\right) = 2\pi R^2 + \frac{4000}{R}$$

$$A\left(R\right) = 2\left(\pi R^2 + \frac{2000}{R}\right), R > 0$$

Logo, o objetivo é determinar o valor de R que minimiza $\pi R^2 + \frac{2000}{R}$, que pode ser adaptada para uma aplicação da desigualdade das médias geométrica e aritmética, observando que:

$$\pi R^2 + \frac{2000}{R} = \pi R^2 + \frac{1000}{R} + \frac{1000}{R}$$

Assim,

$$\frac{\pi R^2 + \frac{1000}{R} + \frac{1000}{R}}{3} \geq \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{1000}{R} \cdot \frac{1000}{R}} \Leftrightarrow \pi R^2 + \frac{2000}{R} \geq 300\sqrt[3]{\pi}$$

Logo, a igualdade que minimiza a expressão vale exatamente quando os três termos são iguais, ou seja, $\pi R^2 = \frac{1000}{R}$.

Daí,

$$\pi R^3 = 1000 \Leftrightarrow R^3 = \frac{1000}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

Substituindo o valor de R encontrado acima e simplificando, encontra-se $h = 2\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$, ou seja, as dimensões que minimizam a área (portanto o custo) são:

$$R = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \approx 6,8cm \text{ e } h = 2\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \approx 13,6$$

Assim a área da superfície cilíndrica seja mínima é igual a $100\sqrt[3]{2\pi}$ e volume mínimo é de $V = 20000cm^3$, ou seja, $20l$.

Algumas indagações são pertinentes, com base nesta solução, como:

- Quando podemos usar a desigualdade entre as médias para resolver problemas com funções como a encontrada neste problema?
- Qual é a relação, na expressão que precisava ser minimizada, entre a divisão de um dos termos em n partes e o grau do outro termo, para que seja possível usar a desigualdade das médias?
- Dentre as características do problema, há alguma condição que contradiz o teorema da desigualdade das médias?

4.2 Observação

Com base no exemplo anterior, é relevante notar que a desigualdade entre as médias aritmética, geométrica, quadrática e harmônica é bastante útil para analisar funções que envolvem somas de potências positivas e negativas de x com coeficientes positivos. Nesses casos, pode ser vantajoso decompor um termo em duas ou mais parcelas, de modo que o produto dessas parcelas resulte em uma constante. A seguir, observe como essa ideia se aplica à função:

$$f(x) = x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$$

para $x > 0$.

Para que o produto dos termos seja independente de x, escreve-se:

$$x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Onde, tem-se pela desigualdade das médias aritméticas e geométrica, que:

$$\frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{5} \geq \sqrt[5]{x^3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

Consequentemente, $f(x) = 5$ é o valor mínimo da função, que ocorre quando $x^3 = x^2 = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, ou seja, quando $x = 1$.

Exemplo 6. Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as suas arestas é 12.

Solução:

A desigualdade entre as médias quadrática e aritmética pode ajudar a resolver o problema. O comprimento da diagonal de um paralelepípedo de dimensões a, b e c é dado por $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, o que sugere o uso da média quadrática. Por outro lado, a soma de todas as arestas pode ser associada à média aritmética.

Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo. Logo, pretende-se minimizar $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, onde d representa o comprimento da diagonal do paralelepípedo.

Por outro lado, tem-se $4a + 4b + 4c = 12 \Longleftrightarrow a + b + c = 3$.

Assim, usando a desigualdade das médias quadrática e aritmética, tem-se que:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

Portanto, para minimizar a diagonal usa-se a igualdade que ocorre quando $a = b = c = 1$, ou seja, quando o paralelepípedo for um cubo de lado 1, a diagonal será mínima e igual a $\sqrt{3}$.

Exemplo 7. Sendo x e y números reais positivos, determinar o valor máximo de $E = xy(1 - x - y)$.

Solução:

É suficiente considerar apenas os valores de x e y tais que $x + y < 1$, pois caso contrário, tem-se $1 - x - y \leq 0$, o que tornaria E negativo.

No entanto, é fácil ver que E é positivo se $x + y < 1$. Portanto, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica tem-se:

$$\sqrt[3]{xy\,(1-x-y)} \leq \frac{x+y+1-x-y}{3} \Leftrightarrow xy\,(1-x-y) \leq \frac{1}{27}$$

Onde conclui-se que o valor máximo de E é $\dfrac{1}{27}$, que ocorre quando $x = y = 1-x-y$, ou seja, quando $x = y = \frac{1}{3}$.

Exemplo 8. Encontre o menor valor assumido pela função $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ para $x > 0$.

Solução:

Uma possibilidade, ainda que um tanto obscura, para tentar resolver este problema é empregar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica envolvendo alguns dos termos da função.

Tem-se que $3x^3+4 = x^3+2x^3+4$. Logo, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$\frac{x^3+2x^3+4}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 \cdot 2x^3 \cdot 4} = 2x^2 \Rightarrow 3x^3+4 \geq 6x^2,$$

ou seja, $f(x)$ é não-negativa. Mas, como a igualdade entre os números positivos x^3, $2x^3$ e 4 não ocorre para nenhum valor de x, conclui-se que apesar de $f\,(x) \geq 0$, o mínimo de $f(x)$ é obviamente maior do que zero. Assim, a desigualdade entre as médias não é suficiente para resolver o problema.

Por outro lado, analisando os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$, pode-se concluir a solução. Por exemplo, $f(x)$ é decrescente em x se, para $h > 0$, $f(x+h) - f(x) < 0$, por menor que seja h.

Mas,

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= 3(x+h)^3 - 6(x+h)^2 + 4 - 3x^3 + 6x^2 - 4 \\
&= 3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 6x^2 - 12xh - 6h^2 + 4 - 3x^3 + 6x^2 - 4 \\
&= 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 12xh - 6h^2 \\
&= 3h[h^2 + (3x-2)h + 3x^2 - 4x]
\end{aligned}$$

Para que esta última igualdade seja negativa, por menor que seja h, deve-se ter:

$$h^2 + (3x-2)\,h + 3x^2 - 4x < 0$$

Para isso, é necessário que $3x^2 - 4x < 0$ que ocorre para $0 < x < \frac{4}{3}$. Para determinar onde $f(x)$ é crescente, o desenvolvimento é análogo, invertendo-se apenas a desigualdade, ou seja, para que $f(x+h) - f(x) > 0$, por menor que seja h, deve-se ter $x < 0$ ou $x > \frac{4}{3}$.

Portanto, como $f(x)$ é decrescente para $x < \frac{4}{3}$ e crescente para $x > \frac{4}{3}$, conclui-se que $f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{9}$ é o menor valor atingido pela função.

Certas conclusões merecem ser destacadas. A desigualdade das médias, neste caso, não resolveu o problema, pois a condição de igualdade que maximiza ou minimiza dependendo da situação não se aplica aqui. Para resolver o problema, foi realizada uma análise dos intervalos de crescimento da função.

5 Otimização – Derivadas

Nesta seção, serão abordados problemas práticos em diferentes áreas, aplicando a teoria das derivadas. Bem como a apresentação dos principais conceitos que utilizaremos, incluindo: domínio da função, pontos críticos, máximos e mínimos, teste da primeira derivada, teste da segunda derivada e o teorema de Weierstrass.

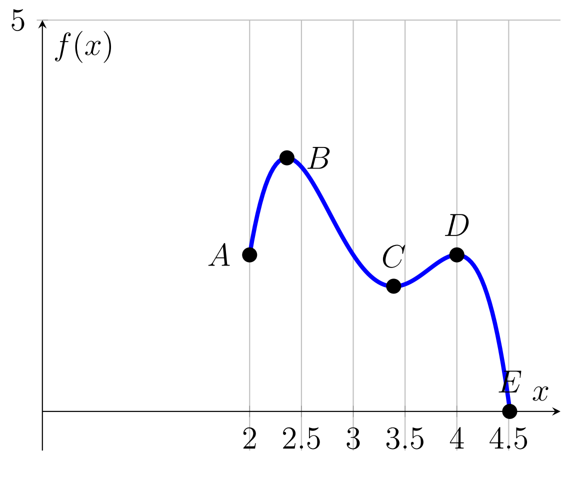
Definição 5.1. ***Domínio de uma função D(f)***: *Na matemática, e mais especificamente na teoria dos conjuntos, o domínio de definição de uma função é o conjunto de valores de "entrada"ou argumento para os quais a função é definida. Ou seja, a função fornece uma "saída"ou valor para cada membro do domínio.*

Definição 5.2. *Um ponto $c \in D(f)$ é considerado ponto crítico se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Definição 5.3. *Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em p se $f(p) \geq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(p)$ é chamado valor máximo de f em D. De forma análoga, f tem um mínimo absoluto em p se $f(p) \leq f(x)$ para todo x em D, e o número $f(p)$ é denominado valor mínimo de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.*

Definição 5.4. *Uma função f tem um máximo local (ou máximo relativo) em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. [Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de c.*



No gráfico acima, observamos uma função f, com um valor máximo absoluto em B e um mínimo absoluto em E. Se consideramos o intervalo $3 \leq x \leq 4$, verificamos que C será o valor mínimo absoluto e D o valor máximo absoluto porém em relação a função f são chamando de valores locais.

Teorema 5.1 (Teorema de Fermat:). *Se f possui um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$*

Demonstração. *Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a definição 5.4, $f(c) \geqslant f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0, sendo h positivo ou negativo, então:*

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e, portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0 \tag{5.1}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por um número positivo. Se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade e como x está tendendo para c este limite existe. Assim, obtemos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c) \leq 0$. Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade (5.1) é invertido quando dividimos por h :

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Mostrando que $f'(c) \leq 0$ e também que $f'(c) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

5.1 O Método do Intervalo Fechado:

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado [a,b], devemos realizar o seguinte método:

1. Calcular os valores de f nos pontos críticos de f dentro do intervalo (a,b).

2. Calcular os valores de f nas extremidades do intervalo.

Observando os resultados encontrados na etapa 1 e 2 acima, o maior valor dentre eles é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor destes valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo. Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função:

$$f\left(x\right) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \qquad -2 \leq x \leq 3$$

Solução: Uma vez que f é contínua em [-2,3], pelo método do intervalo fechado, temos:

$$f'\left(x\right) = 6x^2 - 6x - 12.$$

Se $f'\left(x\right) = 0$ existir para todo x, temos que os números críticos ocorrem quando $x = -1$ ou $x = 2$, que estão dentro do intervalo dado. Os valores de f nesses números críticos são:

$$f\left(-1\right) = 7 \text{ e } f\left(2\right) = -19$$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são:

$$f\left(-2\right) = -3 \text{ e } f\left(3\right) = -8$$

Comparando esses quatros números, vemos que o valor máximo absoluto é $f\left(-1\right) = 7$ e o valor mínimo absoluto, $f\left(2\right) = -19$.

Proposição 5.1. *Teste Crescente/Decrescente ou Teste C/D.*

a) Se $f'\left(x\right) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

b) Se $f'\left(x\right) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Proposição 5.2. *Teste Da Primeira Derivada: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em (a,b) e $c \in (a,b)$. Suponha que f' exista em todos os pontos do intervalo (a,b) exceto em c . Temos:*

(i) Se $f' > 0$, para $x \in (c-\delta, c)$ e $f' < 0$, para $x \in (c+\delta, c)$, para algum $\delta > 0$, então f terá um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f' < 0$, para $x \in (c-\delta, c)$ e $f' > 0$, para $x \in (c+\delta, c)$, para algum $\delta > 0$, então f terá um valor mínimo relativo em c.

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

c) Se f' não mudar de sinal em c (ou seja, se f' for positivo ou negativo em ambos os lados de c), então f' não terá máximo ou mínimo locais em c.

Teorema 5.2. *Estudo Da Concavidade: Seja f uma função que admite derivada até a 2°. ordem no intervalo aberto I.*

a) Se $f''\left(x\right) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Definição 5.5. *Um ponto P na curva $y = f(x)$ é denominado ponto de inflexão se f for contínua nesse ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.*

Proposição 5.3. *Teste da derivada segunda para determinação de extremos de uma função: Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite derivada até 2° ordem em (a, b), temos:*

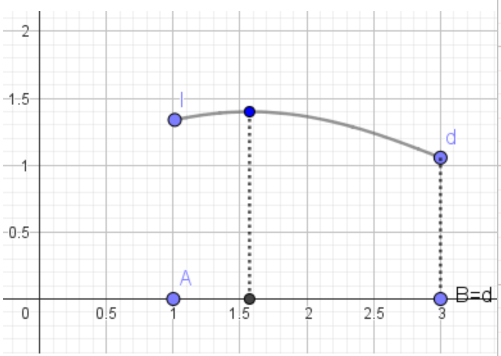
a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, f tem um máximo relativo em c.

b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, tem um mínimo relativo em c.

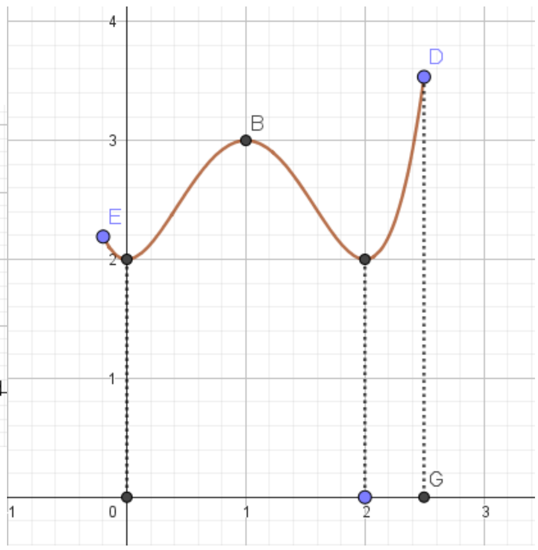
5.2 Teorema de Weierstrass

Teorema 5.3. *Seja $f : K \to R$ contínua no compacto K, ou seja, em um conjunto fechado e limitado.*

Portanto, f atinge seu valor máximo absoluto e seu valor mínimo absoluto em K.



(a) Gráfico da função $f(x)$



(b) Gráfico 2 da função $f(x)$

Figura 10: Exemplos de Funções contínuas e limitadas que tem valor máximo e mínimo

Demonstração. *Sendo f contínua em um intervalo fechado [a,b], f será limitada em [a,b], daí considere um conjunto:*

$$A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

terá um supremo e um ínfimo. Logo, seja:

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

e

$$n = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Assim, para todo x em [a,b], $n \leq f(x) \leq M$. Seja $M = f(x_2)$, para algum x_2 em [a,b]. Se $f(x) < M$, para todo x em [a,b], a função:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},\ x \in [a, b]$$

seria contínua em [a,b], mas não limitada, que é uma contradição se g fosse limitada em [a,b], então existiria um $\beta > 0$ tal que para todo x em [a,b]:

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta$$

e, portanto, para todo x em [a,b],

$$f(x) < M - \frac{1}{\beta}$$

e assim M não seria supremo de A.

Com isso, temos que $f(x) < M$, para todo x em [a,b] não pode ocorrer, logo devemos ter $M = f(x_2)$, para algum x_2 em [a,b]. De maneira análoga, podemos fazer para fazer a prova do ínfimo, ou seja, devemos ter $f(x_1) = m$, para algum x_1 em [a,b].

O teorema do valor extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado possui um valor máximo e um valor mínimo. No entanto, ele não fornece um método para encontrar esses valores extremos.

A seguir, faremos alguns exemplos.

1. **Exemplo:**

   Um departamento de trânsito de uma cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por uma rodovia. Os resultados mostram que entre 12 e 17 horas, a velocidade média nesta rodovia é dada aproximadamente por $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 18t$, onde t é o número de horas após as 12 horas.

   Entre 12 e 17 horas, qual é o momento em que o trânsito é mais rápido? E qual é o momento em que ele é mais lento?

   Solução: Devemos calcular o valor máximo e o mínimo absoluto da função $v(t)$ no intervalo $1 \leq t \leq 6$.

   Para isso, começaremos calculando a primeira derivada e igualamos a zero para identificar os pontos críticos:

   $$v'(t) = t^2 - 9t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ ou } t = 6$$

   Com isso estes valores são os pontos críticos de v, ambos pertencentes ao intervalo (1,6).

   Iremos verificar se são pontos de máximo ou mínimo locais, usamos o teste da segunda derivada:

   $$v''(t) = 2t - 9 \rightarrow v''(3) = -3 < 0 \rightarrow t = 3 \text{ é ponto de máximo local em } v;$$
   $$v''(t) = 2t - 9 \rightarrow v''(6) = 3 > 0 \rightarrow t = 6 \text{ é ponto de mínimo local em } v.$$

Para determinamos os pontos de máximo e mínimo globais da função em [1,6], devemos comparar os valores que v assume nos pontos críticos, com os respectivos valores nos extremos do intervalo. Como v é uma função contínua definida em um intervalo fechado, ela pode atingir seus valores máximo e mínimo globais ou nos pontos críticos, ou nos extremos do intervalo. Assim, temos:

$$v(1) = 15,3 \qquad v(3) = 22,5 \qquad v(6) = 18$$

Com isso temos que $t = 3$ é ponto de máximo global e $t = 1$ é ponto de mínimo global de v no intervalo de interesse [1,6].

Assim temos que o trânsito nessa rodovia é mais rápido às 15h, quando os carros passam com uma velocidade média de 22,5 km/h e o trânsito é mais lento às 12h, quando os carros passam com uma velocidade média de 15,3 km/h.

2. **Exemplo:**

Quando um fluido é forçado a passar por um tubo estreito a velocidade do fluido pode ser afetada pela variação do raio do tubo. Considere um tubo cilíndrico com raio r_0. A relação entre a velocidade v do fluido e o raio r do tubo é dada por uma função da forma $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o valor de r que maximiza a velocidade do fluido.

Solução:

O raio r do tubo forçado não pode ser negativo, nem maior que o raio normal, r_0. Assim, o objetivo é encontrar o máximo absoluto de $v(r)$ no intervalo $[0, r_0]$:

$$v'(r) = 2ar(r_0 - r) + ar^2(-1) = ar(2r_0 - 3r)$$

$$\text{Então } v'(r) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0 \text{ ou } r_2 = \frac{2}{3}r_0$$

Como $r_1 = 0$ é um extremo do domínio, usamos o teste da segunda derivada apenas em r_2 :

$$v''(r) = 2a(r_0 - 3r) \Rightarrow v''\left(\frac{2}{3}r_0\right) = -2ar_0 < 0$$

Logo, o máximo local de v é $r_2 = \dfrac{2}{3}r_0$.

Analisando o valor de v no máximo local e nos extremos do intervalo, temos: $v(0) = 0$, $v = \left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3$ e $v(r_0) = 0$.

Logo, o máximo global de v é atingido em $r_2 = \frac{2}{3}r_0$, o que significa que a velocidade do fluido é máxima quando o raio do tubo é igual a $\frac{2}{3}$ do seu raio normal.

3. **Exemplo:**

Na cidade de Manaus a concessionária Águas de Manaus ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 600 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2500 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R$ 700,00 por metro, enquanto, em terra, custa R$ 400,00. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água ?

Solução:
Se fizermos um esboço da situação, a resolução do problema se torna mais fácil. É o que faremos logo a seguir.

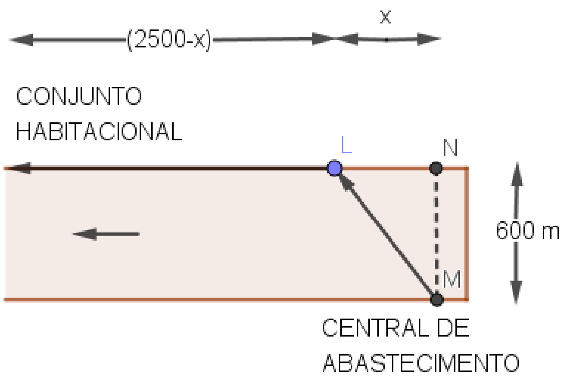


Figura 11: Ilustração da rede de água

A figura acima esquematiza a função que dará o custo da obra:

$$f(x) = (2500 - x) \cdot 400 + \sqrt{x^2 + 600^2} \cdot 700$$

Nosso objetivo será calcular o mínimo absoluto dessa função para $0 \leq x \leq 2500$. Temos:

$$f'(x) = -400 + \frac{700x}{\sqrt{x^2 + 600^2}} = 100\left(\frac{7x}{\sqrt{x^2 + 600^2}} - 4\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x = 4\sqrt{x^2 + 600^2} \\
&\Leftrightarrow 49x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 600^2 \\
&\Leftrightarrow 33x^2 = 16 \cdot 600^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 600^2}{33} \\
&\Leftrightarrow x \cong \pm 418
\end{aligned}$$

Como, x deve ser positivo e $418 \in [0, 2500]$, segue que é o único ponto crítico de f, no domínio de interesse. Vejamos se é ponto de mínimo relativo:

$$f''(x) = \frac{600^2 \cdot 700}{\left(x^2 + 600^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Como $f'' > 0$ para todo x. Logo temos que $x = 418$ é um ponto de mínimo relativo. Resta-nos saber se este mínimo é absoluto no intervalo $0 \leq x \leq 2500$.

Como o único ponto crítico de f no intervalo aberto (0,2500) é $x \cong 418$ este ponto é mínimo absoluto neste intervalo.

Como $f(0) > f(418)$ e $f(2500) > f(418)$, concluímos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização de água alcançar o outro lado do rio em $418m$ abaixo da central de abastecimento.

4. **Exemplo: (Questão adaptada (STEWART, 2010))** Em uma cidade, cientistas fizeram um levantamento para analisar o nível de um determinado medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. A função $P(t) = Ct^b e^{-kt}$ é usada para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga particular , $b = 0,02$, $C = 3$, $k = 0,06$ se t for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e o que isto significa.

   Solução: Fazendo as devidas substituições temos:

$$P(t) = C \cdot t^b \cdot e^{kt}$$
$$S(t) = 0,02t^3 \cdot e^{-0,06t}$$

   Os pontos de inflexão é dado por:

$$P(t) = 0,02t^3 \cdot e^{-0,06t}$$
$$P'(t) = 0,02t^2 \cdot e^{-0,06t} \cdot (3 - 0,06t)$$
$$P''(t) = 0,02t \cdot e^{-0,06t} \cdot \left(6 - 0,36t + 0,0036t^2\right)$$

   Fazendo $P''(t) = 0$:

$$0 = 0,02t \cdot e^{-0,06t} \cdot \left(0,0036t^2 - 0,36t + 6\right)$$

   Observe que para $t = 0$ e para $0,0036t^2 - 0,36t + 6 = 0$, e extraindo suas raízes temos:

$$t_1 \cong 21,12 \text{ e } t_2 \cong 78,87$$

   São pontos de inflexão para $t = 0$, $t = 21,12$ e $t = 78,87$. Isso significa que aos 21,12 minutos, a taxa de aumento do nível do medicamento na corrente sanguínea é maior e em 78,87 minutos, a taxa de decrescimento é o maior.

5. **Exemplo:** Em uma escola do ensino infantil um professor elaborou uma fórmula para predizer a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $f(x)$ denota a altura (em centímetros) na idade x (em anos) para $1 \leq x \leq 6$, então a função é dada por $f(x) = 80 + 6x + 2lnx$.

   (a) Determine o gráfico da função e da sua derivada.

   (b) Estime a altura e a taxa de crescimento quando uma criança atinge a idade de 2 anos.

   (c) Quando a taxa de crescimento é máxima e mínima? Quanto valem estas taxas?

Solução:

(a)

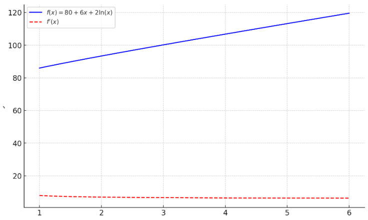


Figura 12: Gráfico de $f(x)$ e $f(x)'$

(b) $f(2) = 93,38$, ou seja, quando uma criança atinge 2 anos, mede aproximadamente 94 cm. A taxa de crescimento é dada pela derivada de f, dada por:

$$f'(x) = 6 + \frac{2}{x}$$

Assim, quando $x = 2$, temos $f'(2) = 7$, ou seja, aos dois anos uma criança cresce cerca de 7 cm/ano.

(c) Analisando o gráfico observamos que a taxa de crescimento é decrescente no intervalo considerado, o que pode ser confirmado pela derivada de $f'(x)$, dada por $f''(x) = (-2)/x^2 < 0$ para todo x.

Assim, a taxa de crescimento será máxima no menor valor de x, ou seja, em $x = 1$ e será mínima, no maior valor de x, ou seja, em $x = 6$.

O valor máximo da taxa de crescimento é, portanto, $f'(1) = 8\ cm/ano$ e o valor mínimo, $f'(6) = 6,33 cm/ano$ aproximadamente.

6. **Exemplo:** Uma bala é disparada, sob um ângulo de inclinação α. Seja l o alcance que a bala atinge, dado por $l = \frac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo ?

Solução: Derivando a equação l, obtemos:

$$l' = \frac{2v^2}{g}\cos^2\alpha - \frac{2v^2}{g}\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$l' = \frac{2v^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

Portanto, $l' = 0 \Leftrightarrow \frac{2v^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) = 0$.

Logo, $\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Calculando l'', obtemos pela regra do produto,

$$l'' = \frac{-4v^2}{g}\operatorname{sen} 2\alpha$$

De onde, $l''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v^2}{g} < 0$ e, portanto, $\frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo, ou seja, o alcance é máximo para o ângulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$

6 Aplicação na sala de aula

UNIDADE TEMÁTICA-AULAS 1 e 2
Equação Quadrática
PÚBLICO-ALVO
9° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Raízes de uma equação quadrática
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Dada uma equação, verificar se esta equação é quadrática. Apresentar a fórmula de Bhaskara para determinar suas raízes.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
2 aulas de aproximadamente 45 minutos

Desenvolvimento da sequência didática

1ª **etapa -** Apresentar a fórmula de uma equação quadrática e utilizar a fórmula de Bhaskara para calcular as raízes da equação quadrática.

Duração: 45 minutos
Local: sala de aula
Organização dos alunos: Após a apresentação do conteúdo, serão disponibilizados alguns exercícios, para que os alunos façam em grupo de 3 ou 4 integrantes.
Recursos e/ou material necessário: quadro, pincel, lista de exercícios.

Universidade do Estado do Amazonas -UEA

Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. Verifique quais das equações a seguir são do 2° grau e identifique os coeficientes a, b e c.

   (a) $8x^2 + 17x + 4 = 0$

   (b) $3x - 5 = 0$

   (c) $0x^2 + 10x - 8 = 0$

   (d) $-\frac{y^2}{5} - 25 = 0$

   (e) $4y^2 - 5y = 0$

2. Escreva as equações do 2° grau a seguir na forma reduzida e classifique-as em completa ou incompleta.

   (a) $2x^2 - 5x = -2$

   (b) $x^2 + 6x = 2x + 3$

   (c) $y^2 = 8y$

   (d) $-5x^2 = 30x + 40$

(e) $(x+4)\cdot(x-5)=5x-16$

3. Dados os coeficientes a, b e c, escreva as equações do 2° grau correspondentes.

   (a) $a=5; b=-7; c=0$

   (b) $a=-1; b=3; c=-4$

   (c) $a=2; b=0; c=4$

   (d) $a=-\frac{1}{2}; b=\frac{5}{7}; c=\sqrt{7}$

4. Encontre as raízes reais das equações.

   (a) $3x^2-7x+4=0$

   (b) $2m^2-m-6=0$

   (c) $-x^2+3x+10=0$

   (d) $9y^2-12y+4=0$

   (e) $5x^2+3x+5=0$

UNIDADE TEMÁTICA-AULA 3
Equação Quadrática
PÚBLICO-ALVO
9° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Construção de Gráficos
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Construir o gráfico das funções quadráticas e determinar as coordenadas do vértice da função.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
1 aula de aproximadamente 60 minutos

Desenvolvimento da sequência didática

1^a **etapa -** Apresentar a construção do gráfico da função, destacando a concavidade relacionada com o sinal do coeficiente angular e determinar as coordenadas do vértice da equação.

Duração: 45 minutos

Local: sala de aula

Organização dos alunos: Após a apresentação do conteúdo, serão disponibilizados alguns exercícios para que os alunos façam individualmente.

Recursos e/ou material necessário: quadro, pincel, lista de exercícios.

Universidade do Estado do Amazonas -UEA

Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. Dada a equação $2x^2 + 3x + p = 0$, determine:
   (a) O valor de p para que as raízes sejam reais e iguais;
   (b) As raízes para o valor de p encontrado no item anterior;
   (c) O valor de p para que uma das raízes seja igual a zero;
   (d) O valor de p para que a equação não admita raízes reais;

2. Determine os zeros (caso exista) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma.
   (a) $y = x^2 - 6x + 8$
   (b) $y = x^2 + 2$
   (c) $y = x^2 - 6x + 9$
   (d) $y = -x^2 + 4x$

3. Determine as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.
   (a) $y = -x^2 - 8x + 16$
   (b) $y = 2x^2 + 6x$

(c) $y = x^2 - 16$

(d) $y = -2x^2 - 8x + 4$

4. Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

   (a) $y = 4x^2 - 9x + 2$

   (b) $y = -x^2 + 14x - 24$

   (c) $y = 5x^2 - 6x$

   (d) $y = -x^2 - 14x - 24$

UNIDADE TEMÁTICA-AULAS 4 e 5
Equação Quadrática
PÚBLICO-ALVO
9° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Problemas de otimização envolvendo funções e equações quadráticas
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Resolver problemas de otimização, aplicando a definição de vértice da parábola
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
2 aulas de aproximadamente 60 minutos

Desenvolvimento da sequência didática

1ª etapa – Apresentar problemas de otimização, construindo o passo a passo de sua solução.

Duração: 45 minutos

Local: sala de aula

Organização dos alunos: Após a apresentação do conteúdo, ainda na aula 4, será disponibilizada uma lista de 5 exercícios, de modo que, inicialmente, os alunos irão tentar resolvê-los e o professor irá apenas auxiliá-los na resolução. Na aula 5, o professor irá resolvê-los com os alunos, sanando suas possíveis dúvidas.

Recursos e/ou material necessário: quadro, pincel, lista de exercícios.

Universidade do Estado do Amazonas -UEA

Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. O custo C, em real, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3000$, sendo x a quantidade de unidade produzidas.
   (a) Qual deve ser a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo?
   (b) Qual é valor desse custo mínimo?
2. Fernando demarcou uma região retangular de 100 m de perímetro em um terreno para construir uma casa. Calcule as dimensões dessa região para que Fernando aproveite a maior área possível.
3. (ENEM 2016 - 2^a aplicação) Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.

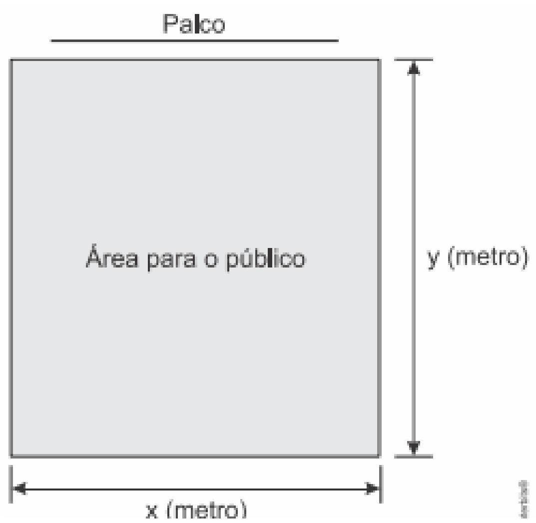


Figura 13: Fonte: Ministério da Educação

A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$20, 00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5, 00.

A empresa dispõe de $R\$5.000,00$ para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é:

(a) $50,0$ m da tela tipo A e $800,0$ m da tela tipo B

(b) $62,5$ m da tela tipo A e $250,0$ m da tela tipo B.

(c) $100,0$ m da tela tipo A e $600,0$ m da tela tipo B.

(d) $125,0$ m da tela tipo A e $500,0$ m da tela tipo B.

4. (FAAP - SP) Uma indústria produz, por dia, x unidades de determinado produto, e pode vender tudo o que produzir a um preço de R\$100, 00 a unidade. Se x unidades são produzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$. Portanto, para que a indústria tenha lucro diário de R\$900, 00, qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia?

UNIDADE TEMÁTICA-AULAS 6 e 7
Otimização de Médias
PÚBLICO-ALVO
9° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Médias aritmética e geométrica
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Entender o conceito de média aritmética e geométrica e como é calculada. Resolver problemas que envolvam o cálculo de médias aritmética e geométrica e, mostrar suas aplicabilidades em problemas do cotidiano e acadêmica.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
2 aulas de aproximadamente 45 minutos

Desenvolvimento da sequência didática

1^a **etapa** - Apresentar o conceito de média aritmética e, sua média ponderada e geométrica. E mostrar como são aplicadas em problemas.

Duração: 45 minutos

Local: sala de aula

Organização dos alunos: Após a apresentação do conteúdo, ainda na aula 6 será disponibilizada uma lista de 4 exercícios, de modo, que inicialmente os alunos irão tentar resolvê-los e o professor irá apenas auxiliá-los na resolução.

Recursos e/ou material necessário: quadro, pincel, lista de exercícios.

Universidade do Estado do Amazonas -UEA

Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. Em um consultório médico, havia 4 pessoas na sala de espera. O atendimento da primeira pessoa durou 18 minutos; o da segunda, 16 minutos; o da terceira, 14 minutos; o da quarta, 20 minutos. Qual foi o tempo médio de atendimento, por paciente, nesse consultório?

2. Num concurso, a prova escrita tem peso 3 e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática?

3. (CESGRANRIO - 2012) O valor da conta de telefone de Sebastião variou muito nos três primeiros meses de 2012. Em janeiro, Sebastião pagou R$ 48,50; em fevereiro, R$ 78,00 e em março, R$$65,20$. Qual foi, em reais, o valor mensal médio da conta telefônica de Sebastião no primeiro trimestre de 2012 ?

4. As notas de um aluno em Matemática Financeira do curso de Técnico em Gerência em Saúde foram $8, 9, 6, 8$, e sua média ponderada igual a 7,75. Esse aluno lembra somente o peso das três primeiras notas que foi: 1,2 e 2, mas a quarta ele esqueceu. Qual é o valor do quarto peso ?

UNIDADE TEMÁTICA-AULAS 8 e 9
Otimização de Médias
PÚBLICO-ALVO
9° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Médias quadráticas e harmônicas.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Entender o conceito de média quadrática e harmônica. Resolver problemas que envolvam o cálculo de médias quadrática e harmônica em situações do cotidiano e acadêmica.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
2 aulas de aproximadamente 45 minutos.

Desenvolvimento da sequência didática

1ª etapa - Apresentar o conceito de média quadrática e harmônica, e mostrar como são aplicadas em problemas.

Duração: 45 minutos

Local: sala de aula

Organização dos alunos: Após a apresentação do conteúdo, ainda na aula 8 será disponibilizada uma lista de 4 exercícios, de modo, que inicialmente os alunos irão tentar resolvê-los e o professor irá apenas auxiliá-los na resolução.

Recursos e/ou material necessário: quadro, pincel, lista de exercícios.

> Universidade do Estado do Amazonas -UEA
>
> Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. Determine a média quadrática do conjunto $A = \{1, 3, 9\}$.

2. A média harmônica do conjunto $A = \{2, 3, 5, 6\}$ é igual a?

3. Uma mangueira leva 20 horas para encher uma piscina, a outra, com uma vazão um pouco menor, leva 30 horas para encher a mesma piscina. Se elas forem ligadas simultaneamente, o tempo gasto para encher a piscina será de:

4. Determine a média quadrática do conjunto $A = \{2, 5, 6, 7\}$.

UNIDADE TEMÁTICA-AULA 10
Otimização
PÚBLICO-ALVO
9 ° ANO
OBJETO DE CONHECIMENTO
Otimização envolvendo função quadrática e médias.
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
Avaliar a compreensão sobre os conhecimentos adquiridos sobre função quadrática e médias.
QUANTIDADE ESTIMADA DE AULAS
1 aula de aproximadamente 45 minutos

Desenvolvimento da sequência didática

1ª **etapa -** Será avaliado o nível de aprendizagem dos alunos através de um exame com 8 questões discursivas e objetivas.

Duração: 45 minutos

Local: sala de aula

Organização dos alunos: Será disponibilizada uma avaliação, para que os alunos façam individualmente.

Recursos e/ou material necessário: Lápis, borracha, caneta e impressão.

AVALIAÇÃO FINAL

Universidade do Estado do Amazonas -UEA

Questionário aplicado aos discentes da Escola Municipal Themistocles Pinheiro Gadelha

1. Marque a alternativa que representa a definição correta de média aritmética.

a) Soma dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado dessa soma pela quantidade dos valores que foram somados.

b) É usada para atingir um valor médio de vários valores. Seu valor é calculado por meio da multiplicação dos números somados pela quantidade deles.

c) Média aritmética de dois ou mais termos é o produto do resultado da divisão da soma dos números dados pela quantidade de números somados extraindo sua raiz.

d) É a multiplicação dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado pela quantidade dos valores que foram multiplicados.

e) N.D.A

2. Pedro obteve as seguintes notas na disciplina de matemática durante o ano:

Matemática	
1° bimestre	8,5
2° bimestre	4,2
3° bimestre	6,5
4° bimestre	5,5

Sabendo que para que Pedro seja aprovado no final do ano sua média deve ser de 7,0 (pontos), determine se Pedro foi aprovado.

3. Na Universidade do Estado do Amazonas, a média final de um aluno será dada pela média ponderada entre a média obtida nos exercícios escolares parciais com peso 2 e, nota do exame final com peso 1 obedecendo a seguinte fórmula:

$MEE = \frac{EE_1+EE_2+....+EE_N}{N}$
$MF = \frac{(MEE\times 2)+PF}{3}$

Sabendo que João tirou nos 2 exercícios que seu professor fez as notas 6,0 e 7,5 e sua nota na avaliação final foi de 7,8. Sabendo que MEE é a média dos exercícios onde, $EE_1 + EE_2 + \ldots. + EE_N$ é a soma das notas dos exercícios realizados, N o número de exercícios e MF é a média Final, em que PF é nota do exame final. Qual é a média do João nesta disciplina ?
a) 7,1
b) 6,1
c) 5,1
d) 8,1

4. Em uma chácara, um galinheiro em formato retangular que foi construído na margem de um muro será cercado, utilizando-se 72 metros de arame. Quais as medidas do retângulo de forma que a área cercada seja a maior possível?
a) 728 m
b) 648 m
c) 548 m
d) 848 m

5. (Esaf - ATA/MF - 2009) Existem duas torneiras para encher um tanque vazio. Se apenas a primeira torneira for aberta, ao máximo, o tanque encherá em 24 horas. Se apenas a segunda torneira for aberta, ao máximo, o tanque encherá em 48 horas. Se as duas torneiras forem abertas ao mesmo tempo, ao máximo, em quanto tempo o tanque encherá?
a) 12 horas
b) 16 horas
c) 20 horas
d) 24 horas
e) 30 horas

6. (UFPB) O gráfico da função $y = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$, representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil, lançado a partir da origem.

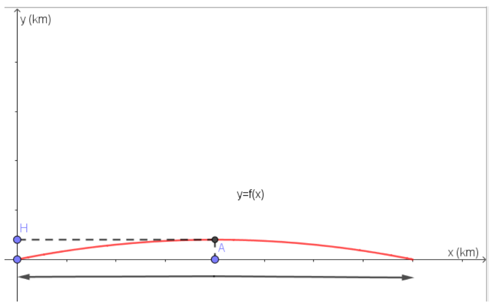


Figura 14: Trajetória do Projétil

Sabendo-se que x e y são dados em quilômetros, a altura máxima H e o alcance A do projétil são respectivamente:

a) 2 km e 40 km
b) 40 km e 2 km
c) 10 km e 2 km
d) 2 km e 20 km

7. A temperatura t de um contêiner (em graus Celsius) é determinada, em função da hora h do dia, pela expressão $t = -2h^2 + 11h - 75$.

   a) Em quais horários a temperatura é 0°?
   b) Em que horário a temperatura é máxima?

8. (Adaptado UEA – AM) Após várias experiências em laboratório, observou-se que a concentração de certo antibiótico no sangue de cobaias, varia de acordo com a função $y = 12x - 2x^2$, em que x é o tempo decorrido, em horas, após a ingestão do antibiótico. Nessas condições, determine o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias.
   a) 5 horas
   b) 6 horas
   c) 3 horas
   d) 4 horas

7 Resultados e discussões

As tarefas realizadas pelos alunos na busca pelas soluções dos problemas propostos nas cinco atividades, resultaram nos seguintes acertos e erros:

Números de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não Sei
Problema 1	23	4	0
Problema 2	22	5	0
Problema 3	20	7	0
Problema 4	0	13	14

Tabela 1: Resultado da atividade 1

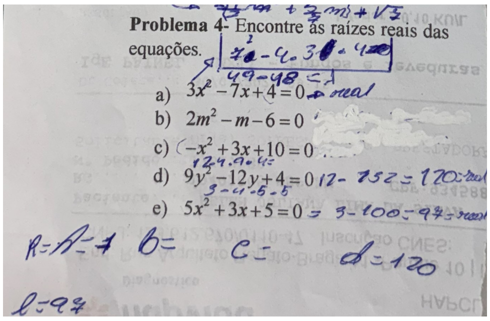
No questionário das aulas 1 e 2, o objetivo do problema 1 era determinar os coeficientes de uma equação do 2° grau. No problema 2, foi solicitado identificar quais equações eram completas e incompletas. No problema 3, a finalidade era que os alunos através dos coeficientes, escrevessem a equação do 2° grau. Destes alunos, cerca de 80% acertaram e 20% erraram. É válido destacar, que os erros cometidos foram em virtude não apenas pela eventual falta de conhecimento de alguns alunos, mas também devido à falta de atenção.

Já no problema 4, o percentual de acerto foi de 0%, 48% erraram e 52% não souberam responder, como podemos observar nas Figuras 11 e 12 a seguir. Observou-se que esse último percentual se deu pelo fato de que os alunos não compreenderam a utilização da fórmula de Bhaskara para determinar as raízes de uma equação do 2° grau principalmente quando fazemos a mudança de variável, isso fez com que eles não conseguissem aplicar a fórmula, ocasionando assim muitos erros. Também foram apresentados outros métodos para se determinar essas raízes como: as relações de Gerard e através do processo de substituição de valores. No entanto, a maior ênfase foi na utilização da fórmula de Bhaskara, em virtude do tempo disponível. Diante destas dificuldades apresentadas, foi necessário explicar mais uma vez e realizar uma nova lista a fim de melhorar a compreensão na determinação das raízes de uma equação do 2° grau.

Figura 15: Realização da atividade 1

Fonte: De autoria própria

Figura 16: Realização da atividade questão 4



Problema 4- Encontre as raízes reais das equações.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

b) $2m^2 - m - 6 = 0$

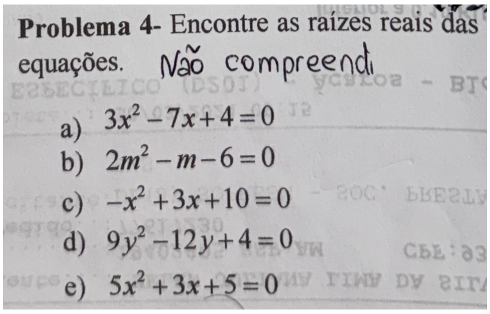
c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

d) $9y^2 - 12y + 4 = 0$

e) $5x^2 + 3x + 5 = 0$

Fonte: Autoria própria

Figura 17: Questão 4



Problema 4- Encontre as raízes reais das equações. Não compreendi

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

b) $2m^2 - m - 6 = 0$

c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

d) $9y^2 - 12y + 4 = 0$

e) $5x^2 + 3x + 5 = 0$

Fonte: Autoria própria

A atividade da aula 3, estava relacionada à construção e interpretação de gráficos, utilizando o Software Geogebra, a fim de permitir uma melhor compreensão dos exercícios, uma vez que o software é uma ferramenta geométrica muito valiosa. Os resultados estão representados na tabela a seguir:

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não Sei
Problema 1	6	10	15
Problema 2	22	2	7
Problema 3	5	9	17
Problema 4	29	0	2

Tabela 2: Resultado da atividade 2

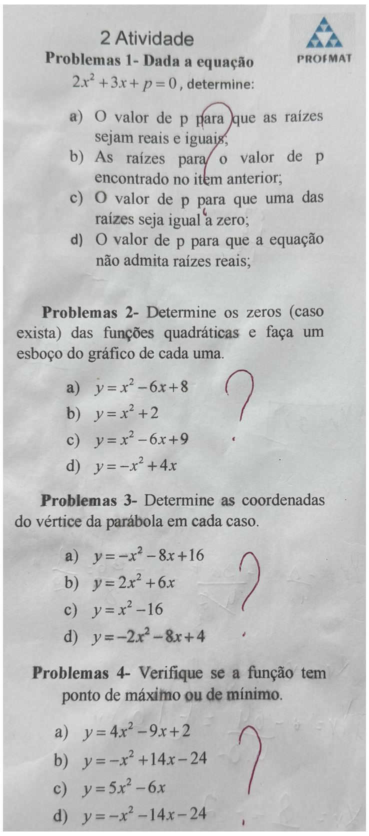
O objetivo do problema 1, era que os alunos conseguissem compreender quando a equação do 2° grau tem duas raízes reais iguais, duas raízes reais diferentes ou nenhuma raiz real. Cerca de 19% dos alunos acertaram, 32% erraram e 48% não souberam como responder a questão. No problema 2, o objetivo era utilizar a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes da equação para assim conseguir visualizar onde a parábola interceptava o eixo das abscissas, permitindo assim construir o gráfico da equação do 2° grau. Cerca de 71% acertaram, 6% erraram e 23% não souberam responder. A dificuldade em utilizar a fórmula de Bhaskara foi amenizada, no entanto era perceptível uma dificuldade em fazer o estudo das raízes para a construção dos gráficos.

Na questão 3, o objetivo era que os alunos calculassem o vértice da parábola, para que assim observassem o que estava acontecendo. Cerca de 16% acertaram, 29% erraram e 55% não entenderam o problema. A principal dificuldade encontrada foi a realização de operações básicas como por exemplo, realizar a substituição dos valores na fórmula para determinar o vértice. Na questão 4, os alunos precisavam somente fazer a verificação se as equações teriam ponto de máximo ou mínimo. Cerca de 87% acertaram e 6% não souberam responder, o que representa uma ótima margem de aprendizagem.

Figura 18: Realização da atividade 2

Fonte: De autoria própria

Figura 19: Realização da Atividade 2



2 Atividade

PROFMAT

Problemas 1- Dada a equação

$2x^2 + 3x + p = 0$, determine:

a) O valor de p para que as raízes sejam reais e iguais;
b) As raízes para o valor de p encontrado no item anterior;
c) O valor de p para que uma das raízes seja igual à zero;
d) O valor de p para que a equação não admita raízes reais;

?

Problemas 2- Determine os zeros (caso exista) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma.

a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = x^2 + 2$
c) $y = x^2 - 6x + 9$
d) $y = -x^2 + 4x$

?

Problemas 3- Determine as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

a) $y = -x^2 - 8x + 16$
b) $y = 2x^2 + 6x$
c) $y = x^2 - 16$
d) $y = -2x^2 - 8x + 4$

?

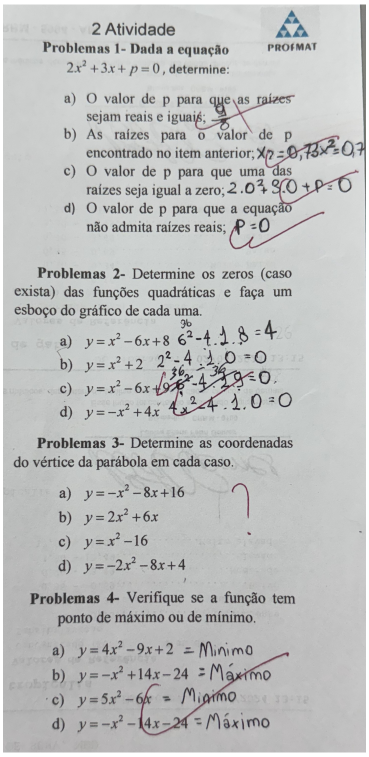
Problemas 4- Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $y = 4x^2 - 9x + 2$
b) $y = -x^2 + 14x - 24$
c) $y = 5x^2 - 6x$
d) $y = -x^2 - 14x - 24$

?

Fonte: Autoria própria

Figura 20: Atividade 2


2 Atividade

PROFMAT

Problemas 1- Dada a equação $2x^2+3x+p=0$, determine:

a) O valor de p para que as raízes sejam reais e iguais;

b) As raízes para o valor de p encontrado no item anterior;

c) O valor de p para que uma das raízes seja igual a zero;

d) O valor de p para que a equação não admita raízes reais;

Problemas 2- Determine os zeros (caso exista) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma.

a) $y=x^2-6x+8$

b) $y=x^2+2$

c) $y=x^2-6x+9$

d) $y=-x^2+4x$

Problemas 3- Determine as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

a) $y=-x^2-8x+16$

b) $y=2x^2+6x$

c) $y=x^2-16$

d) $y=-2x^2-8x+4$

Problemas 4- Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $y=4x^2-9x+2$ = Minimo

b) $y=-x^2+14x-24$ = Máximo

c) $y=5x^2-6x$ = Minimo

d) $y=-x^2-14x-24$ = Máximo

Fonte: Autoria própria

Na aula 4, o conteúdo foi exposto com o auxílio do data show, exibindo algumas atividades relacionadas ao processo de otimização. O objetivo da exposição foi relembrar aos alunos como utilizar o que aprenderam acerca de cálculo de área de figuras planas e custo de produção, para que pudessem realizar as atividades que seriam propostas a eles.

> Uma aula contextualizada leva o aluno a interagir como que está sendo ministrado [...] aprendizagem é associada à preocupação em retirar o aluno da condição de espectador passivo, em produzir uma aprendizagem significativa e em desenvolver o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. É preciso fazer os alunos verem a matemática na vida real [...] ligar a matemática que se estuda nas salas de aula com a matemática do cotidiano.(SOUZA,2009,p.15).

Assim, foram trabalhadas questões que exigiram análise, leitura e interpretação, afim de estimular os alunos quanto à utilização da aplicação da matemática nas diferentes áreas do conhecimento. Os resultados estão apresentados na tabela abaixo:

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não sei
Problema 1	9	15	2
Problema 2	9	15	2
Problema 3	9	6	11
Problema 4	5	11	10

Tabela 3: Resultado da atividade 3

Nas questões 1 e 2, os alunos tinham como objetivo fazer o processo de otimização utilizando as fórmulas ensinadas, a fim de determinar as soluções dos problemas. A quantidade de acertos foram de 35%, 58% erraram e 8% não souberam responder. A principal dificuldade encontrada pelos alunos foi a falta de interpretação textual para que pudessem utilizar os conceitos ensinados. Vale destacar a falta de conhecimentos prévios como a área de figuras geométricas. Na 3ª e 4ª questão, 35% acertaram, 23% erraram e 42% não souberam responder. Esse percentual se deu pelo fato de que os alunos não conseguiram fazer a interpretação correta das questões e, novamente, a falta de conhecimentos prévios colaborou para esse percentual.

Figura 21: Exposição da aula

Fonte: De autoria Própria

Na aula 6, o conteúdo exposto foi o conceito de Médias Aritmética e Ponderada, sua aplicação e utilização na vida real. Segundo Batanero (2022), o ensino das Médias é importante por ajudar na capacidade de leitura, interpretação de tabelas e gráficos que aparecem nos diversos meios de informação, além de ser útil na vida real. Com isso, o objetivo era mostrar onde e como são aplicados esses conceitos de média aritmética simples e ponderada. Na aula 7, foi aplicada uma atividade em que eles deveriam resolver individualmente. Os resultados estão apresentados na tabela a seguir:

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não sei
Problema 1	19	0	6
Problema 2	10	9	6
Problema 3	19	0	6
Problema 4	8	6	11

Tabela 4: Resultado da atividade 4

Na 1ª e 3ª questões, os alunos deveriam calcular a média aritmética simples, cujos valores foram apresentados nos problemas. Cerca de 76% acertaram e 24% não souberam responder. Não houveram erros. Esse percentual de não souberam responder foi devido ao desinteresse dos alunos.

O objetivo das questões 2 e 4 foi aplicar a definição de média aritmética ponderada. Na questão 2 cerca de 40% acertaram, 36% erraram e 24% não souberam responder. Na questão 4, cerca de 32% acertaram, 24% erraram e 44% não souberam responder. Esses percentuais se deram pelo fato de que os alunos não compreenderam como fazer a aplicação da definição de média ponderada.

Figura 22: Explicação da atividade

Fonte: Autoria própria

Figura 23: Realização da atividade 4

Fonte: Autoria própria

Na aula 8, foram demostrados, com a utilização de data show, os conteúdos: Média geométrica, harmônica e quadrática. Foram expostas algumas aplicações desse conteúdo. Na aula 9, foi aplicada uma atividade em que os alunos deveriam responder, porém foi permitido que eles se ajudassem e pudessem fazer a utilização de calculadora para resolver as atividades. Durante a realização dessas atividades, os alunos tiveram orientação a fim de terem suas dúvidas esclarecidas. Nessa proposta, o professor passa a ter um papel de orientador e monitor das atividades desenvolvidas **(D'Ambrosio,1989)**. Os resultados estão apresentados na tabela a seguir:

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não sei
Problema 1	28	2	0
Problema 2	15	15	0
Problema 3	23	7	0
Problema 4	17	5	8

Tabela 5: Resultado da atividade 5

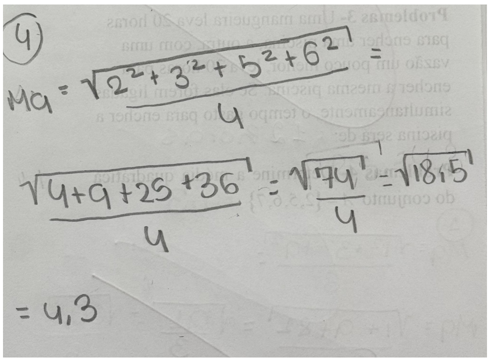
Na 1ª e 4ª questões, os alunos deveriam calcular a média quadrática cujos valores foram dados. Na questão 1, cerca de 93% acertaram, 7% erraram e não houve alunos que não responderam. Na 4ª questão, cerca de 57% acertaram, 17% erraram e 27% não responderam a questão. O principal problema encontrado nessa questão foi a falta de atenção dos alunos, pois colocaram outro valor, e o tempo não foi suficiente para que alguns terminassem a questão.

Na 2ª e 3ª questões, os alunos deveriam calcular e interpretar aplicando o conceito de média harmônica. Na questão 2, cerca de 50% acertaram e 50% erraram. Na questão 3, cerca de 33% acertaram, 33% erraram e 33% não souberam responder. A principal dificuldade encontrada foi realizar operações com frações e realizar a interpretação correta. Houve uma grande melhora em fazer as substituições devidas nas fórmulas que foram dadas e a participação dos alunos nas atividades.

Figura 24: Realização da atividade 5

Fonte: De autoria própria

Figura 25: Questão 4



Fonte: De autoria própria

A aula 10 foi somente para fazer a realização da atividade que era o compilado de todas as atividades realizadas para verificar o nível de aprendizagem dos alunos. Os resultados obtidos estão na tabela a seguir.

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	Acertos	Erros	Não Sei
Problema 1	15	9	6
Problema 2	25	5	0
Problema 3	10	20	0
Problema 4	7	23	0
Problema 5	15	15	0
Problema 6	5	25	0
Problema 7	4	6	20
Problema 8	8	22	0

Tabela 6: Resultado da última atividade

Na 1ª questão, os alunos deveriam marcar a alternativa que representa a definição de média aritmética. Cerca de 50% acertaram, 30% erraram e 20% não souberam responder. Na questão 2, os alunos deveriam calcular e verificar através do conceito de média aritmética se o aluno passou ou não. Cerca de 83% acertaram e 17% erraram. Na questão 3, o objetivo era que os alunos através da definição de média aritmética ponderada marcassem a alternativa que representasse a média do aluno. Cerca de 33% acertaram e 67% erraram. Na questão 5, o objetivo era que os alunos interpretassem e utilizassem o conceito de média harmônica para encontrar que marcassem a alternativa correta. Cerca de 50% acertaram e 50% erraram.

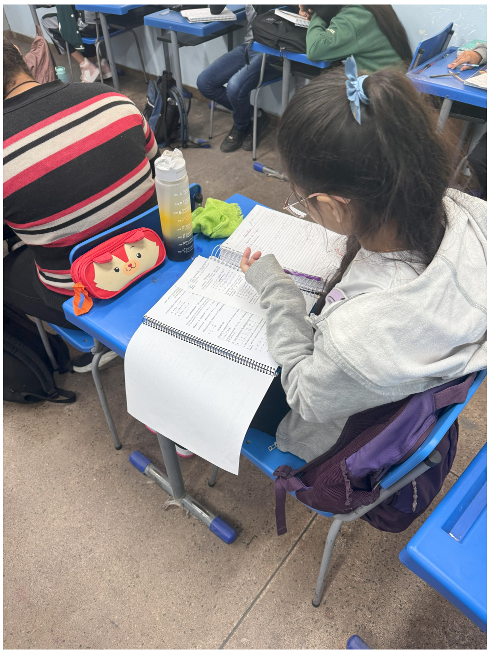
Nas questões 4 a 8, o objetivo era que interpretassem e utilizassem conceitos com perímetro, área máximo e mínimo de uma equação do 2° grau, e respondessem e marcassem a alternativa. Na questão 4, cerca de 23% acertaram e 77% erraram. Na questão 6, cerca de 17% acertaram e 83% erraram. Na questão 7, cerca de 13% acertaram, 20% erraram e 67% não souberam responder. Na questão 8, cerca de 27% acertaram e 73% erraram.

Um dos principais problemas durante a realização de todas essas atividades foi a falta de comprometimento, interesse e conhecimento prévio de alguns assuntos como operações com frações, área de figuras planas entre outros. No caso de questões com alternativas, eles quiseram somente marcar sem fazer a devida leitura e interpretação, buscando acelerar uma possível solução para a atividade. Porém, também foi visto que uma parcela pequena da turma teve interesse em aprender e tentar fazer todas as atividades que foram propostas durante a realização deste trabalho, mesmo diante de todas as dificuldades que foram encontradas.

Figura 26: Realização da última atividade

Fonte: De autoria própria

Figura 27: Aluna realizando a última atividade



Fonte de autoria própria

A metodologia desse estudo fundamentou-se num caráter qualitativo e quantitativo, permitindo assim fazer a análise desses registros e retirar as conclusões, como sugere Minayo(1994),

> A diferença entre abordagem qualitativo-quantitativo da realidade social é de natureza. e não de escala hierárquica. Enquanto os cientistas sociais que trabalham com estatística visam criar modelos abstratos ao a descrever e explicar fenômenos que produzem regularidades, são recorrentes e exteriores aos sujeitos, a abordagem qualitativa se aprofunda no mundo dos significados. Esse nível de realidade não é visível, precisa ser exposta e interpretada, em primeira instância, pelos próprios pesquisadores (Minayo 2006).

No que se refere à questão quantitativa, a pesquisa recebeu tratamento estatístico com a devida análise qualitativa, com revisão bibliográfica constante, a fim de proporcionar resultados satisfatórios.

Seguem abaixo as proporções das médias de acertos das atividades realizadas.

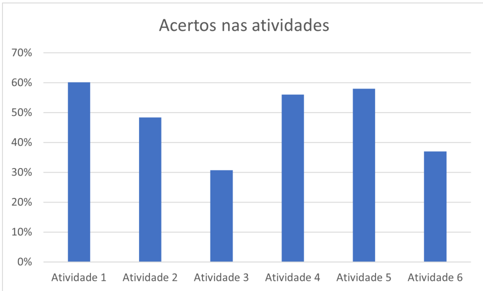


Figura 28: Gráfico da média de acertos

8 Considerações Finais

Diante de várias dificuldades que o ensino público se encontra, como a falta de materiais básicos, a realização desse trabalho buscou viabilizar a aprendizagem como um processo de construção do conhecimento e o prazer em aprender, afim de tentar sanar todas essas dificuldades que existem no ensino público. Dessa forma, o presente trabalho buscou levar os alunos a entender melhor sua realidade, por meio de uma metodologia que mostrasse aos alunos a aplicação da matemática na vida cotidiana, fazendo assim terem mais interesse.

Neste trabalho buscou-se integrar atividades práticas à teoria, procurando mostrar que o ensino da otimização não é somente o uso de fórmulas, mas acima de tudo, mostrar sua aplicação na vida real e em outras áreas do conhecimento, ajudando assim os alunos a terem um pensamento mais crítico e visualizarem para qual propósito estão aprendendo determinado conteúdo matemático não apenas fazer o cálculo por fazer, mas sim, entender o raciocínio cujo determinado problema está querendo transmitir.

Com isso, o trabalho mostrou que os alunos, tiveram interesse na temática de otimização, visto que, puderam relacionar situações com seu cotidiano. Antes, os mesmos apenas decoravam sem saber onde iriam empregar, assim demostravam muita dificuldade mesmo em questões que requeriam conceitos básicos, pois os mesmos não interpretavam ou relacionavam problemas na sua vida real, apenas reproduziam o que estavam vendo. Após o trabalho, o desempenho elevou-se consideravelmente. Durante a aplicação deste trabalho verificou-se junto com os alunos que muitos tinham bastante interesse em aprender e entender onde iriam aplicar o conteúdo de Médias e equação do 2° grau, evidenciando assim que foram estimulados não apenas em decorar, mas sim, entender para o que é utilizado o conteúdo de otimização.

Observou-se que a contextualização de problemas para a vida real foi de suma importância para que os alunos compreendessem melhor onde é aplicado o ensino da matemática, mostrando para os alunos que ela está em todos os lugares.

A partir da aplicação das atividades e analisando os resultados obtidos percebe-se que, de modo geral, os alunos se mostraram muito interessados nos conceitos e procedimentos apresentados durante a realização das atividades que foram apresentadas a eles. Podemos observar que houve uma melhora nos índices médios de acertos na última atividade que foi de 37% e na terceira atividade foi de 31%, onde essas duas atividades eram onde os alunos tinham que fazer a leitura, interpretar e buscar uma estratégia para solucionar os problemas que foram propostos, fazendo assim a utilização da otimização.

Diante disso, podemos observar que o uso do processo de otimização é uma importante ferramenta didática que auxilia os professores a trabalharem conteúdos e exercícios que visam aplicabilidade na vida cotidiana. Desta forma, é possível fazer com que os alunos compreendam melhor os conteúdos matemáticos que são trabalhados em sala, despertando assim o conhecimento crítico.

Referências

BATANERO, C. *Significado y comprensión de las medidas de posición central.* 2000. ⟨https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf⟩. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada, 25, 41-58.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer.* 5ª edição. ed. São Paulo: Ática, 1998. 88 p. (Série Fundamentos).

EDUCAÇÃO, M. D. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* 1997. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf⟩. Acesso em: 20 Dezembro 2023.

EVES, H. W. et al. *Introdução à história da matemática.* [S.l.]: Unicamp Campinas, 2004.

GUIDORIZZI, L. H. *Um Curso de Cálculo.* 5ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 1.

MACHADO, A.; DOLCE, O.; IEZZI, G. *Matemática e realidade - 9o ano.* Atual Didáticos, 2021. (Matemática e realidade). ISBN 9786559450169. Disponível em: ⟨https://books.google.com.br/books?id=cD4B0AEACAAJ⟩.

MACêDO, J.; LOPES, L.; GUSMãO, L. Resolução de problemas de otimização nas aulas de matemática. *Educação Matemática Debate*, v. 2, n. 4, p. 100–115, abr. 2018. Disponível em: ⟨https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/61⟩.

MINAYO, M. C. de S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. *Pesquisa social: teoria, método e criatividade.* [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2011.

ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.* São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199–218.

ONUCHIC, L. d. l. R. *Resolução de problemas: teoria e prática.* [S.l.]: Paco Editorial, 2019.

SITE provas do Enem. Acessado em: 28 de maio de 2024. Disponível em: ⟨https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos⟩.

STEWART, J. *CÁLCULO VOLUME 1-TRADUÇÃO DA 6® EDIÇÃO NORTE-AMERICANA.* [S.l.]: Cengage Learning Edições Ltda., 2010.

UFV, D. de Matemática da. *Slides de Otimização - MAT 140 - 2017-I.* 2017. Disponível em: ⟨http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT\%20140/2017-I/slides/23\%20Otimizacao\%20-\%20MAT\%20140\%20-\%202017-I.pdf⟩.

VASCONCELOS, M. B. de F. *A contextualização e o ensino de matemática: Um estudo de caso.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2008.