Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

MARCELO DA SILVA SOUSA

GEOMETRIA COM DOBRADURAS: EXPLORANDO A TEORIA DE VAN HIELE COM ORIGAMI

Orientadora Dirce Uesu Pesco

NITERÓI
2024

Marcelo da Silva Sousa

GEOMETRIA COM DOBRADURAS: EXPLORANDO A TEORIA DE VAN HIELE COM ORIGAMI

Dissertação apresentada por **Marcelo da Silva Sousa** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Dirce Uesu Pesco

Niterói
2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S725g Sousa, Marcelo da Silva
Geometria com Dobraduras: Explorando a Teoria de Van Hiele com Origami / Marcelo da Silva Sousa. - 2024.
130 p.: il.

Orientador: Dirce Uesu Pesco.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

1. Modelo de Van Hiele. 2. Origami. 3. Ensino de Geometria. 4. Base Nacional Comum Curricular. 5. Produção intelectual. I. Pesco, Dirce Uesu, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

MARCELO DA SILVA SOUSA

GEOMETRIA COM DOBRADURAS: EXPLORANDO A TEORIA DE VAN HIELE COM ORIGAMI

Dissertação apresentada por **Marcelo da Silva Sousa** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 25/09/2024

Banca Examinadora

Profª. Dirce Uesu Pesco - Orientadora

D.Sc. - Universidade Federal Fluminense

Profª.Cristiane de Mello- Membro

D.Sc. – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Wanderley Moura Rezende - Membro

D.Sc. - Universidade Federal Fluminense

DEDICATÓRIAS

Aos meus pais, à minha esposa, e a todos os amigos professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Heloisa, que esteve ao meu lado em todos os momentos mais importantes da minha vida e que não seria diferente nesse mestrado, me apoiando incondicionalmente. Se não fosse por você, eu não teria conseguido chegar até aqui.

Aos meus pais, que mesmo com pouco estudo formal e condições, acreditaram no poder da educação. Sem eles, eu não teria conseguido chegar até aqui, muito obrigado Dona Suely e Seu Itamiro. Um agradecimento especial à minha irmã Altamira, que sempre foi como quase uma segunda mãe para mim.

Aos meus amigos professores, especialmente ao Gabriel, por décadas de companheirismo dentro e fora da escola, ao Felipe e todos do Colégio Prima, por serem fundamentais na formação do profissional que sou hoje.

À minha orientadora, professora e coordenadora do PROFMAT, Profª Dirce Uesu Pesco, que já foi de extrema importância na minha graduação e, nesta jornada, teve um papel ainda mais significativo. Muito obrigado por toda a paciência, pelas orientações, pelos puxões de orelha, e por todas as palavras de incentivo que jamais esquecerei.

Aos professores Cristiane de Mello e Wanderley Moura Rezende pela disponibilidade em participar da banca e pela contribuição com este trabalho e consequentemente na minha formação.

À todos os funcionários e professores da UFF, meu sincero agradecimento por todo o amparo durante esses dois anos consecutivos de sextas-feiras.

Aos meus amigos do PROFMAT, agradeço pela companhia constante em todas as sextas-feiras. A presença e o apoio de vocês foram essenciais para tornar essa caminhada mais leve e enriquecedora.

A todos que de alguma forma contribuíram para esta construção.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

RESUMO

O ensino de geometria nas escolas enfrenta desafios que impactam diretamente no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Embora seja um componente essencial do currículo de matemática, muitas vezes o tempo dedicado a essa disciplina na grade curricular é limitado, o que pode dificultar a progressão dos estudantes nos níveis de compreensão geométrica. Além disso, a aprendizagem da geometria frequentemente apresenta obstáculos, especialmente na transição entre os diferentes níveis de abstração necessários para o entendimento dos conceitos geométricos.

Neste trabalho investiga-se o uso do origami como ferramenta pedagógica, fundamentada na Teoria de Van Hiele e alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no ensino fundamental. A pesquisa propõe uma sequência didática que utiliza atividades práticas de dobraduras para tornar a aprendizagem concreta e mais envolvente. Ao explorar diferentes tópicos da geometria por meio do origami, busca-se fornecer suporte para a criação de propostas pedagógicas e inspirar professores a adotarem essa metodologia em suas práticas.

Palavras-chave: Modelo Van Hiele, Origami, BNCC, Ensino de Geometria, Dobraduras.

ABSTRACT

Geometry teaching in schools faces challenges that directly impact the development of students' geometric thinking. Although it is an essential component of the mathematics curriculum, the time dedicated to this subject is often limited, which can make it difficult for students to progress through the levels of geometric understanding. Furthermore, learning geometry often presents obstacles, especially in the transition between the different levels of abstraction necessary to understand geometric concepts.

In this study, we investigate the use of origami as a pedagogical tool grounded on Van Hiele's Theory and aligned with the National Common Curricular Base (BNCC) in elementary education. The research proposes a didactic sequence that uses practical folding activities to make learning concrete and more engaging. By exploring different geometry topics through origami, the research seeks to support the creation of pedagogical proposals and inspire teachers to adopt this methodology in their practices.

Keywords: Van Hiele Model, Origami, Geometry teaching, Paper folding.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de geometria nas escolas enfrenta diversos desafios que impactam diretamente no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Embora a geometria seja um componente essencial do currículo de matemática, muitas vezes o tempo dedicado a essa disciplina na grade curricular é limitado, o que pode dificultar a progressão dos estudantes nos níveis de compreensão geométrica. Além disso, a aprendizagem da geometria frequentemente apresenta obstáculos, especialmente na transição entre os diferentes níveis de abstração necessários para o entendimento profundo dos conceitos geométricos. Essa dissertação tem como objetivo desenvolver atividades de acordo com a Teoria de Van Hiele para avaliação dos alunos no intuito de identificar os níveis da turma para o trabalho no ano letivo. A Teoria de Van Hiele, desenvolvida por Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Van Hiele (1957, 1986), é fundamental no ensino da geometria como apontam Passos, Buriasco e Soares (2019), pois descreve como os estudantes progridem em sua compreensão geométrica através de cinco níveis hierárquicos: visualização, análise, ordenação, dedução formal e rigor. Essa progressão é importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico e é amplamente reconhecida e integrada nas diretrizes curriculares, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Para tanto, usaremos a geometria experimental como proposta para esta dissertação:

> O professor deve tentar adaptar a matéria aos diversos níveis dos alunos da turma. Para isso, deve lançar mão da geometria experimental, manipulação de recortes, dobraduras, etc., sempre que for necessário. NASSER (2011)

A geometria experimental, por meio do origami, não apenas torna a aprendizagem mais concreta e envolvente, mas também facilita a transição entre os níveis de pensamento geométrico descritos por Van Hiele. Além disso, a utilização de dobraduras está alinhada com métodos pedagógicos contemporâneos que promovem a aprendizagem ativa e a construção do conhecimento pelos próprios alunos.

Para Golan e Oberman (2015), o uso do origami na educação matemática têm mostrado resultados positivos no desenvolvimento de habilidades motoras finas, percepção espacial e compreensão de conceitos geométricos abstratos. Assim, ao integrar a Teoria de Van Hiele com a geometria experimental por meio de dobraduras, pretendemos fornecer um ambiente de aprendizagem rico e dinâmico, que permita uma avaliação precisa dos níveis de compreensão geométrica dos alunos e um planejamento didático mais eficaz para o ano letivo.

Tanto Nasser (1990) quanto Kaleff (1994) afirmam que pode não haver compreensão por parte do aluno quando o curso é dado num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno, portanto, é necessário que o professor entenda a realidade da turma antes de decidir qual o trabalho que será realizado com os alunos. Por isso, um conjunto de atividades será proposto como auxiliar, para que as atividades futuras sejam realizadas de acordo com o nível que os alunos apresentarem nos testes de Van Hiele. Ainda de acordo com Nasser (2011), é papel do professor tentar adaptar o ensino ao nível dos alunos da turma, procurando unificar e elevar esse nível, ou seja, no primeiro momento do nosso trabalho, iremos identificar o nível dos nossos alunos para depois tentarmos unificar e elevar esse nível.

A Teoria de Van Hiele pressupõe que o progresso demonstrado pelos alunos nos testes depende mais da aprendizagem do que da idade ou maturação, por isso o professor tem um papel de destaque nesta teoria, como destaca Kaleff (1994) e Nasser & Santana (1997). A partir do momento em que o professor é capaz de identificar os níveis, o planejamento das atividades adaptado para cada nível se torna individualizado e mais assertivo.

Uma vez que, de acordo com a Teoria de Van Hiele (1986), o progresso na aprendizagem de geometria se dá ao longo de níveis hierárquicos de conhecimentos, que devem ser vivenciados pelos alunos sem pular etapas, no nosso caso não faz sentido ensinar aos alunos o Teorema de Pitágoras sem que os mesmos saibam o que é um triângulo retângulo, por exemplo. O uso do Origami é uma estratégia experimental adotada pelo professor para evitar uma abordagem muito teórica que os alunos não consigam acompanhar, visto que, pela experiência, os alunos possuem um nível de conhecimento abaixo do esperado para a série em que estão.

Acreditamos que, após a identificação do nível em que os nossos alunos estão e da adaptação das atividades para sua realidade, podemos prepará-los para argumentar e justificar seus métodos de resolução de modo que mais tarde eles possam dominar o processo dedutivo.

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece habilidades essenciais para a formação integral dos alunos, entre elas, a compreensão dos conceitos geométricos desde os anos iniciais até o ensino médio. A integração entre a BNCC e a Teoria de Van Hiele permite que o ensino da geometria seja realizado de forma progressiva, respeitando os estágios de desenvolvimento dos alunos e garantindo uma aprendizagem significativa e duradoura. A BNCC, ao orientar a prática pedagógica, assegura que os conteúdos geométricos sejam abordados de maneira que favoreça a construção do conhecimento, alinhada aos níveis de compreensão preconizados por Van Hiele.

Esta dissertação está organizada em 4 capítulos, sendo a introdução nosso capítulo 1, onde já apresentamos um breve resumo do que será trabalhado. No capítulo 2, falaremos sobre a fundamentação teórica, começando com a teoria de Van Hiele e sua relação com a BNCC. Em seguida, discutiremos sobre a história do origami, sua importância na construção geométrica e suas aplicações nas escolas através do projeto Origametria. No capítulo 3, teremos um conjunto de três atividades inspiradas no projeto Origametria com o auxílio da teoria de Van Hiele, explorando a geometria de forma de forma prática por meio das dobraduras. Por fim, as considerações finais e o recurso educacional se encontram no apêndice.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, apresentaremos a fundamentação teórica que embasa esta pesquisa e serve de suporte para a criação das atividades propostas para esta dissertação. Primeiramente, abordaremos a Teoria de Van Hiele, discutindo sua aplicação em sala de aula. Em seguida, exploraremos como essa teoria pode ser utilizada em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Por fim, discutiremos os conceitos e axiomas no contexto do origami que fundamenta este estudo.

2.1 A Teoria de Van Hiele

Pierre & Dina Van Hiele propuseram a teoria de Van Hiele (1957, 1986) para o desenvolvimento do raciocínio em geometria (KALEFF, 1994). O modelo de Van Hiele estabelece que os alunos progridem na aprendizagem de geometria seguindo níveis de conhecimento ordenados hierarquicamente, na medida em que um aluno não pode atingir um nível sem que esteja dominando completamente todos os níveis anteriores (NASSER, 2011).

Na década de 1980, a teoria ficou conhecida mundialmente e foi explorada de diversas maneiras (PASSOS, 2015). Pesquisadores do mundo inteiro garantiram sua validade além do desenvolvimento de testes para avaliar o nível em que os alunos se encontravam, o grau de confiabilidade desses testes e a comparação entre o nível de Van Hiele e o desempenho do aluno em geometria (CROWLEY, 1987; FUYS, 1984; HOFFER, 1983; PASTOR, 1993; USISKIN, 1982).

Originalmente, na teoria de Van Hiele, se estabelece cinco níveis de desenvolvimento que ele enumera de zero a quatro. Para evitar equívocos, pesquisadores sugeriram descrever os níveis por nomes, são eles: Reconhecimento, Análise, Abstração, Dedução e Rigor.

Conforme explicado por Kaleff (2016), a Teoria dos Níveis de Van Hiele descreve a progressão do raciocínio geométrico em cinco estágios distintos:

Nível 0 – Visualização ou Reconhecimento: Neste nível inicial, os estudantes identificam figuras geométricas baseando-se em sua aparência geral, sem uma análise profunda das propriedades que as definem. Eles aprendem o vocabulário geométrico básico e são capazes de reconhecer e reproduzir formas, mas sem um entendimento das propriedades específicas dessas figuras.

Nível 1 – Análise: Aqui, os alunos começam a analisar informalmente as partes e atributos das figuras geométricas. Eles observam e experimentam para identificar características específicas, mas ainda não relacionam diferentes figuras ou suas propriedades de maneira concreta.

Nível 2 – Dedução Informal ou Ordenação: Neste estágio, os alunos desenvolvem definições abstratas e começam a compreender as inter-relações entre as propriedades das figuras geométricas e entre diferentes tipos de figuras. Eles distinguem entre propriedades necessárias e suficientes na definição de conceitos geométricos, embora ainda não compreendam completamente o significado de uma dedução ou o papel dos axiomas.

Nível 3 – Dedução Formal: Neste nível, os alunos desenvolvem a capacidade de deduzir logicamente uma afirmação a partir de outra, compreendendo a importância das deduções na construção de uma teoria geométrica. Eles começam a raciocinar dentro de um sistema matemático completo, utilizando termos indefinidos, axiomas, um sistema lógico subjacente, definições e teoremas. Os alunos são capazes de construir provas e entender que estas podem ser desenvolvidas de diversas maneiras.

Nível 4 – Rigor: Este é o estágio mais avançado, onde os alunos alcançam um alto grau de rigor no entendimento de diversos sistemas dedutivos. Eles comparam diferentes sistemas baseados em variados axiomas e exploram várias geometrias, mesmo na ausência de modelos concretos. Há um aprofundamento na análise de propriedades de sistemas dedutivos, como consistência, independência e completude dos axiomas.

O professor tem um papel fundamental em todas essas fases, sendo essencial para identificar o nível em que cada aluno se encontra e adaptar o ensino para atender às suas necessidades específicas. Kaleff et al. (1994) ressaltam que o sucesso na progressão dos níveis depende da capacidade do professor de combinar a aprendizagem com o nível cognitivo dos alunos. Ensinar conceitos acima do nível de compreensão dos alunos pode levar à memorização mecânica, sem o entendimento real. Além disso, é responsabilidade do professor facilitar o desenvolvimento de "insight" nos alunos, ajudando-os a entender o que estão fazendo, por que estão fazendo e como aplicar esse conhecimento para resolver problemas de forma eficaz.

O modelo de Van Hiele apresenta algumas características principais no desenvolvimento do pensamento geométrico, que de acordo com Kaleff (1994) são:

(a) **Sequência Hierárquica**: Os níveis devem ser seguidos em ordem; para alcançar um nível superior, o indivíduo precisa ter passado pelos níveis inferiores.

(b) **Linguagem Específica**: Cada nível possui sua própria terminologia, símbolos e relações. Por exemplo, no nível inicial, o aluno pode descrever ângulos iguais como "iguais", enquanto no segundo nível, eles seriam descritos como "congruentes".

(c) **Progressão Implícita e Explícita**: O que é sugerido em um nível torna-se explícito no nível seguinte.

(d) **Dependência de Instrução**: O avanço entre os níveis é mais influenciado pela qualidade da instrução do que pela idade ou maturidade do aluno.

(e) **Falta de Compreensão Mútua**: Não há comunicação efetiva entre indivíduos que raciocinam em níveis diferentes ou se a instrução é ministrada em um nível mais elevado do que o aluno compreende.

Van Hiele delineou cinco fases que os alunos devem experimentar para avançar de um nível para outro. Essas fases devem ser facilitadas e incentivadas pelo professor:

1) **Introdução e Exploração**: Nesta fase, professores e alunos engajam-se em diálogos e atividades relacionadas aos objetos de estudo, onde observações são feitas, perguntas são levantadas e o vocabulário específico do nível é introduzido.

2) **Orientação Guiada**: Os alunos exploram o tópico utilizando materiais cuidadosamente selecionados pelo professor. Essas atividades revelam gradativamente as estruturas características do nível, no caso deste trabalho, estamos usando a dobradura de papéis.

3) **Construção e Explicação**: Baseando-se em suas experiências anteriores, os alunos começam a expressar e modificar suas opiniões sobre as estruturas observadas. A intervenção do professor é mínima, servindo apenas para ajudar os alunos a utilizar a linguagem adequada.

4) **Exploração Autônoma**: Os alunos são incentivados a buscar suas próprias soluções para tarefas mais complexas, que possuem várias possíveis soluções e apresentam problemas abertos.

5) **Síntese e Integração**: O aluno revisa e resume o que foi aprendido, formando uma compreensão abrangente do novo sistema de objetos e suas relações.

Com exceção da última fase, as outras fases podem ocorrer em diferentes ordens e até mesmo simultaneamente.

2. 2 O Teste de Van Hiele

A aplicação de testes diagnósticos para identificar os níveis de Van Hiele dos alunos é uma etapa crucial para adaptar o ensino às necessidades dos estudantes, a partir do momento em que o professor é capaz de identificar os níveis, o planejamento das atividades adaptado para cada nível se torna mais assertivo.

Nasser (2016) destaca que "o progresso de níveis não ocorre num período muito curto de tempo. É necessário o amadurecimento nas estratégias, objetos de estudo e linguagem características daquele nível". Portanto, embora os testes diagnósticos iniciais sejam mais importantes para identificar os níveis de compreensão geométrica dos alunos, uma reavaliação imediata após as atividades pode não refletir o progresso real. É recomendado que os professores aguardem um período adequado antes de realizar uma nova rodada de testes. Esse intervalo permite que os alunos tenham tempo suficiente para internalizar e aplicar os conceitos geométricos aprendidos, garantindo uma avaliação mais precisa e confiável do seu desenvolvimento.

Usiskin (1982) investigou as mudanças nos níveis de Van Hiele dos alunos ao longo de um ano letivo, aplicando o mesmo teste no início (outono) e no final (primavera) do período. No entanto, Usiskin e Senk (1990) esclarecem que o teste não foi originalmente projetado para classificar os alunos nos níveis de Van Hiele, mas sim para testar a validade da teoria em si. Eles argumentam que, se tivessem projetado o teste especificamente para classificar os alunos, teriam garantido que as respostas dos alunos demonstram segmentação e ordem, características implícitas na teoria de van Hiele. Ao não forçar essas características no teste, eles puderam avaliar se a teoria se sustenta quando aplicada a dados reais. Além disso, a pesquisa de Usiskin e Senk (1990) revelou que, mesmo não sendo ideal para tal fim, o teste utilizado forneceu evidências de que a teoria era uma boa descrição do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos.

Corroborando com isso, Nasser (1997) destaca que:

> A melhor maneira de reconhecer em que nível um determinado aluno está raciocinando é por meio da observação direta do seu modo de raciocinar, e das estratégias que ele usa para resolver problemas. (p. 32)

No entanto, embora esse seja o cenário ideal, a realidade em sala de aula muitas vezes torna essa abordagem inviável, especialmente em turmas numerosas. A observação direta requer tempo e atenção individualizada, algo que pode ser difícil de se implementar quando o professor precisa lidar com um grande número de alunos simultaneamente. Além disso, a diversidade de níveis de compreensão dentro de uma mesma turma pode complicar ainda mais esse processo. Apesar disso, a aplicação de testes estruturados, como os desenvolvidos por Usiskin (1982), segundo Kaleff et al. (1994), é amplamente aceita, e seus níveis de compreensão e fases de ensino favorecem a aquisição do pensamento geométrico em tópicos específicos. Além disso, os autores enfatizam que o modelo de Van Hiele contribui significativamente para melhorar a compreensão geométrica dos alunos, sugerindo que ele é um modelo valioso para o ensino da geometria.

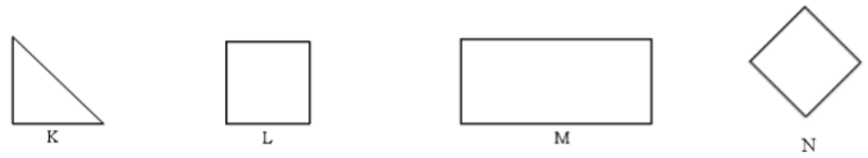
O teste utilizado para identificar os níveis de compreensão geométrica dos alunos, com base na teoria de Van Hiele, é composto por questões objetivas que avaliam a capacidade dos estudantes de reconhecer, classificar e raciocinar sobre figuras geométricas. Este instrumento está apresentado na íntegra no Apêndice.

Para mapear os níveis de raciocínio geométrico dos alunos, o teste deve ser aplicado no início do ciclo de ensino, antes de qualquer intervenção didática significativa. Após um período significativo de ensino e prática, o teste pode ser reaplicado para avaliar o progresso dos estudantes, como realizou Usiskin (1982) em sua pesquisa, aplicando o mesmo teste no início do ano letivo e ao término do mesmo. Algumas adaptações também podem ser feitas, para que os testes tenham diferentes questões mas com as mesmas características conceituais e mesmo nível.

Na questão 1, por exemplo, espera-se que os alunos identifiquem corretamente as características essenciais de um quadrado: quatro lados iguais e ângulos internos retos de 90 graus. No entanto, como esta é uma questão do nível 0 da teoria de Van Hiele, os alunos provavelmente reconhecem o quadrado visualmente, antes mesmo de entender que ele possui ângulos de 90 graus ou de saber medir formalmente os ângulos. Nesse nível, os alunos identificam figuras geométricas com base na sua aparência geral, sem a necessidade de compreender as propriedades geométricas de maneira detalhada. Eles podem reconhecer que o quadrado "parece certo" sem necessariamente conhecer o conceito de ângulo reto ou lado congruente. No teste proposto por Usiskin (1982), o quadrado N, mostrado na Figura 1, não estava presente, decidimos por colocá-lo ali já que ao lidar com origami por exemplo, a maioria das vezes o processo irá iniciar com uma folha quadrada e nem sempre essa estará alinhada conforme o quadrado L. Já no teste proposto por Nasser (2011), ele aparece, mas sem as alternativas de resposta, este último parece ser mais interessante, pois o aluno pode assinalar na figura, caso em que eventualmente tenha dificuldades além do apelo visual.

FIGURA 1 - Questão 1 do Teste de Van Hiele

1) Quais desses são quadrados?



(a) Apenas K

(b) Apenas L

(c) Apenas M

(d) Apenas L e N

(E) Todos são quadrados

Fonte: Adaptado e traduzido de Usiskin (1982) e Nasser (2011).

Já a questão 6, avalia de forma eficiente o nível 1- de análise dos estudantes, conforme a teoria de Van Hiele. Ao solicitar que os alunos identifiquem a relação verdadeira em todos os quadrados, a questão exige irem além do reconhecimento visual da figura e aplique seu conhecimento sobre as propriedades específicas dos quadrados, como a congruência de todos os lados e a perpendicularidade das diagonais. As alternativas incorretas, como a sugestão de que lados e diagonais tenham o mesmo comprimento, servem como distrações e evidenciam a necessidade de um raciocínio mais profundo sobre as características de um quadrado. Ao generalizar a propriedade da congruência dos lados para todos os quadrados, a resposta da questão pode identificar que o aluno está no estágio de analisar as propriedades das figuras geométricas e não apenas de reconhecê-las visualmente.

Figura 2 - Questão 6 do Teste de Van Hiele

6) PQRS é um quadrado.

Qual relação é verdadeira em todos os quadrados?

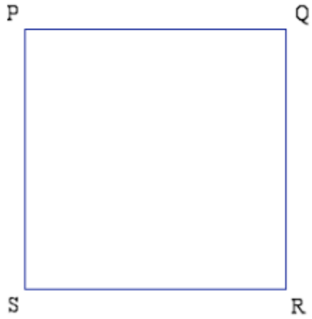
(a) PR e RS têm o mesmo comprimento.

(b) QS e PR são perpendiculares.

(c) PS e QR são perpendiculares.

(d) PS e QS têm o mesmo comprimento.

(e) O ângulo Q é maior que o ângulo R.



Fonte: Adaptado e traduzido de Usiskin(1982)

Essas questões, distribuídas ao longo do teste diagnóstico, foram selecionadas para cobrir os diferentes níveis de raciocínio geométrico conforme a teoria de Van Hiele. Desde o reconhecimento visual básico, que aparece na questão 1, a análise das propriedades geométricas, como exemplificado na questão 6, até questões no nível de 2 - de abstração, onde as perguntas mais abrangentes sobre propriedades determinam se o estudante reconhece que o quadrado é também retângulo, questão 13, Figura 3. O teste busca mapear o desenvolvimento dos alunos em cada um desses níveis. O teste completo, adaptado de Usiskin, encontra-se no Recurso Educacional, resultado desta dissertação, no apêndice deste texto. O teste é dividido conforme os níveis de Van Hiele, sendo as cinco primeiras questões do nível 0 - visualização, as cinco questões seguintes do nível 1 - análise e as cinco últimas do nível 2 - abstração.

Figura 3 - Questão 13 do Teste de Van Hiele

13) Qual das figuras abaixo pode ser chamada de retângulo?

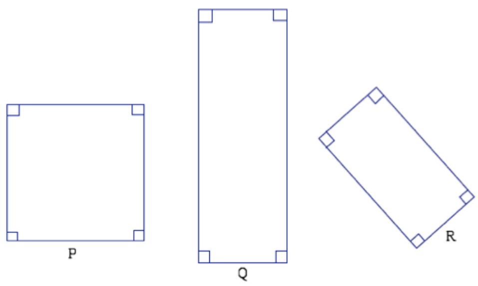
(a) Todas.

(b) Apenas Q.

(c) Apenas R.

(d) Apenas P e Q.

(e) Apenas Q e R.



Fonte: Adaptado e traduzido de Usiskin(1982)

2.3 BNCC e os Níveis de Van Hiele

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece uma série de competências essenciais que orientam o currículo e a prática pedagógica, promovendo o desenvolvimento de habilidades essenciais, de modo a garantir que todos os alunos do país tenham acesso ao mesmo conjunto de aprendizagens essenciais à sua formação.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

Tanto a BNCC quanto a teoria de Van Hiele enfatizam a importância de uma progressão lógica e sequencial na aprendizagem. Na teoria de Van Hiele, cada nível de entendimento geométrico deve ser plenamente desenvolvido antes de passar para o próximo. Da mesma forma, a BNCC sugere que as habilidades matemáticas sejam construídas em cada ano, de forma aprofundada e ampliada, respeitando e conectando-se ao conhecimento já estabelecido, como dito no trecho,

> Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores. (BRASIL, 2018, p. 276).

A classificação das habilidades da BNCC em níveis de Van Hiele pode nos ajudar a compreender melhor como cada competência se encaixa dentro da progressão do aprendizado de geometria.

A seguir, são apresentados quadros que relacionam as habilidades específicas da BNCC na unidade temática de Geometria com os níveis da teoria de Van Hiele. As classificações foram elaboradas pelo autor deste trabalho com base na experiência adquirida ao longo desses anos.

Nível 0: Visualização

No nível de visualização da teoria de Van Hiele, os estudantes reconhecem e nomeiam formas geométricas simples sem entrar em suas propriedades ou relações mais complexas. Esse nível é mais adequado para as séries iniciais do Ensino Fundamental, onde o foco está no reconhecimento básico de formas e na orientação espacial. As habilidades associadas a este nível ajudam a estabelecer uma base sólida para o desenvolvimento posterior de competências mais complexas.

Quadro 1 - Habilidades do Nível 0 na BNCC.

Ano Escolar	Habilidade BNCC
1° EF	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.
	(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.
2° EF	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
	(EF02MA13) Esboçar roteiros a serem seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.
	(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
3° EF	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Nível 1: Análise

No nível de análise da teoria de Van Hiele, os estudantes identificam e analisam características das formas geométricas, como lados, ângulos e outras propriedades básicas. Este nível é apropriado para os anos iniciais e intermediários do Ensino Fundamental, quando os alunos começam a desenvolver uma compreensão mais profunda das propriedades das formas e começam a compará-las.

Quadro 2 - Habilidades do Nível 1 na BNCC.

Ano Escolar	Habilidade BNCC
3° EF	(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.
4° EF	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
	(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.
5° EF	(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.
	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
6° EF	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Nível 2: Dedução Informal

No nível de abstração, os estudantes começam a entender as relações e diferenças entre formas geométricas, a importância de definições precisas e a identificar conjuntos de formas e seus subconjuntos. Eles também começam a entender o conceito de prova. Este nível é adequado para os anos intermediários e finais do Ensino Fundamental, quando os alunos estão preparados para lidar com conceitos mais abstratos e avançados em geometria.

Quadro 3 - Habilidades do Nível 2 na BNCC.

Ano Escolar	Habilidade BNCC
5° EF	(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.
	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.
6° EF	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
	(EF06MA23) Construir um algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
7° EF	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
8° EF	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e polígonos regulares.
	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
9° EF	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Nível 3: Dedução Formal

No Nível 3: Dedução Formal da teoria de Van Hiele, os estudantes começam a trabalhar com deduções lógicas e a entender a importância das provas formais no estudo da geometria. Nesse nível, eles são capazes de organizar propriedades geométricas em sistemas dedutivos, compreendendo o papel dos axiomas, definições e teoremas dentro de um sistema formal. Os alunos podem construir provas, partindo de premissas dadas, e justificar suas conclusões com base em relações geométricas.

Quadro 4 - Habilidades do Nível 3 na BNCC.

Ano Escolar	Habilidade BNCC
7° EF	(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
8° EF	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
9° EF	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Nível 4: Rigor

Como o Nível 4 trata de um nível mais abstrato e formal do pensamento geométrico, ele é geralmente associado a habilidades que exigem um alto grau de abstração, como a exploração de sistemas geométricos complexos e o desenvolvimento de provas rigorosas. No entanto, nas habilidades descritas pela BNCC para o Ensino Fundamental, não encontramos habilidades explicitamente alinhadas com essas ideias. Esse nível é mais provável de ser atingido apenas no final do ensino médio ou no ensino superior, quando os estudantes já são capazes de lidar com geometrias alternativas, axiomas complexos e sistemas formais de maneira rigorosa.

2.4 Origami

A palavra “Origami” tem suas raízes na língua japonesa, composta pelos termos “ori”, que significa “dobrar”, e “kami”, que se traduz como “papel”. De acordo com Hayasaka e Nishida (2024), a origem exata do origami permanece envolta em mistério, mas uma teoria amplamente aceita descarta a ideia de sua criação na China, juntamente com a invenção do papel. Uma vez que o papel tinha predominantemente uma função de escrita, o que sugere que o origami, com suas dobraduras, provavelmente se desenvolveu no Japão.

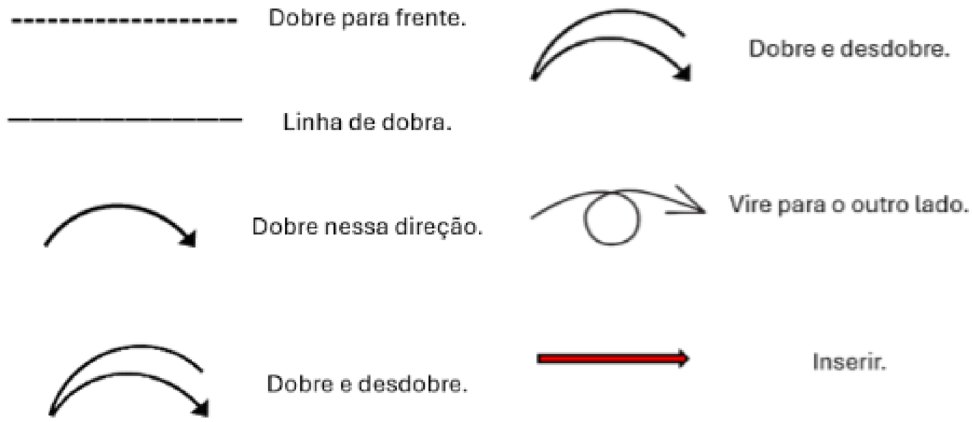
Segundo Bellos (2011), embora o origami seja uma invenção japonesa, possui raízes em diversas culturas ao redor do mundo, com técnicas independentes de dobradura de papel. O educador alemão Friedrich Fröbel, no século XIX, é reconhecido por utilizar dobraduras de papel como ferramenta pedagógica para ensinar geometria a crianças. Essa diversidade destaca o interesse global na arte de da transformação de uma simples folha de papel em formas complexas.

Hoje, essa rica tradição do origami serve como base para uma motivação contemporânea no ensino de construções geométricas. O uso do origami como ferramenta educacional oferece uma abordagem prática e visualmente envolvente para explorar conceitos matemáticos e algorítmicos, como destaca Row (*apud* Bellos, 2011, p. 117) “vários importantes processos geométricos [...] podem ser obtidos com muito mais facilidade do que com régua e compasso”.

O uso do origami como ferramenta educacional também destaca-se pela sua acessibilidade e baixo custo, tornando-o adequado para uma ampla gama de ambientes educacionais, independentemente dos recursos disponíveis. Com o uso de origami modular por exemplo, é possível formar uma série de poliedros apenas utilizando papel.

Os manuais que apresentam diagramas de passo a passo para a construção de origamis geralmente utilizam símbolos específicos para indicar as instruções de dobragem, em vez de descrições textuais (MONTROLL, 2011). No entanto, como os alunos podem não estar familiarizados com esses símbolos, as atividades desta dissertação incluem tanto os símbolos quanto às descrições do passo a passo, descritos na Figura 4. Observe que a cada dobra forma-se a linha de vinco.

Figura 4 - Símbolos usados nos diagramas



Fonte: Adaptado de Montroll (2011) e Kawamura (2001).

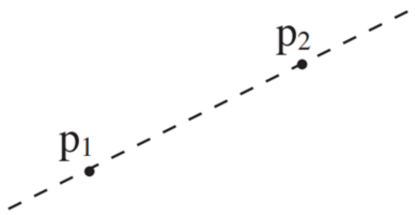
2.5 Axiomas no Origami

De acordo com Lang (2015), a partir dos anos 1970, vários pesquisadores do origami começaram a examinar de maneira metódica as múltiplas combinações possíveis de dobras e a investigar quais tipos de distâncias poderiam ser criados ao combinar essas dobras de diferentes formas. O pioneiro nesse estudo sistemático foi Humiaki Huzita, que delineou um conjunto de seis abordagens fundamentais para definir uma única dobra, alinhando diferentes combinações de pontos, linhas e a própria linha de dobra existente. Essas seis operações são conhecidas como "Axiomas de Huzita", embora seja mais apropriado entendê-las como ações que influenciam pontos e linhas. Com base em um conjunto inicial de pontos e linhas em uma folha de papel, as operações de Huzita possibilitam a criação de novas linhas, e os pontos adicionais são determinados pelas interseções entre as linhas existentes e as novas. O conjunto expandido de pontos e linhas pode, então, ser ainda mais ampliado por meio da aplicação repetida dessas operações, gerando novas combinações de pontos e linhas. Posteriormente, em 2002, Koshiro Hatori introduziu uma técnica de dobragem que não estava contemplada nos axiomas de Huzita, levando assim à formulação formal de um sétimo axioma.

Os Axiomas de Huzita-Hatori são exibidos abaixo:

Axioma 1: Dado dois pontos, p_1 e p_2, podemos dobrar uma linha que os contém.

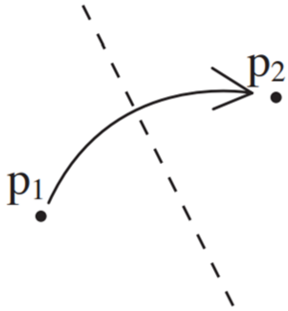
Figura 5 - Axioma 1



Fonte: Lang (2015)

Axioma 2: Dados dois pontos, p_1 e p_2, existe uma dobragem que os torna coincidentes.

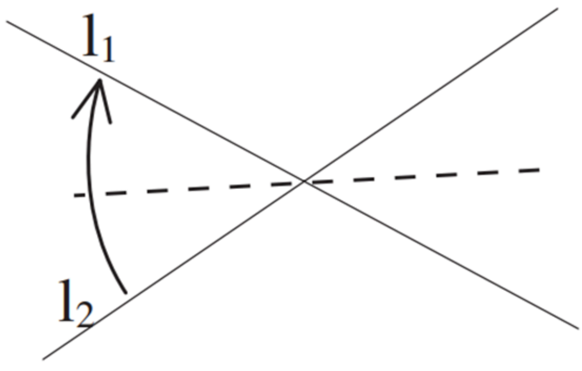
Figura 6 - Axioma 2



Fonte: Lang (2015)

Axioma 3: Dadas duas retas, l_1 e l_2 , existe uma dobragem que as torna coincidentes.

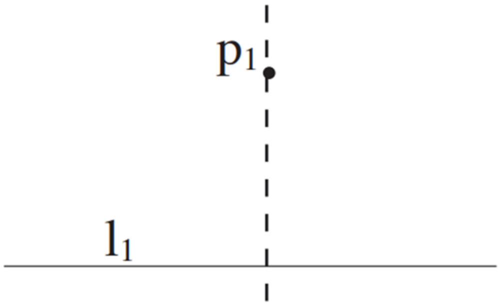
Figura 7 - Axioma 3



Fonte: Lang (2015)

Axioma 4: Dados um ponto p_1 e uma reta l_1, existe uma dobragem perpendicular a l_1 que passa por p_1.

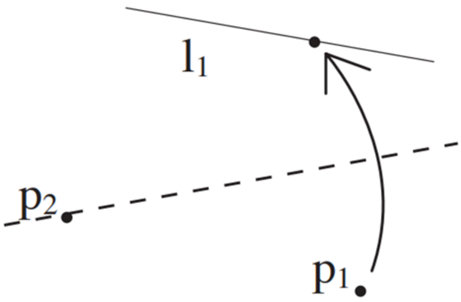
Figura 8 - Axioma 4



Fonte: Lang (2015)

Axioma 5: Dados dois pontos, p_1 e p_2, e uma reta, l_1, se a distância de p_1 a p_2 for igual ou superior à distância de p_2 a l_1, existe uma dobragem que faz incidir p_1 em l_1 e que passa por p_2.

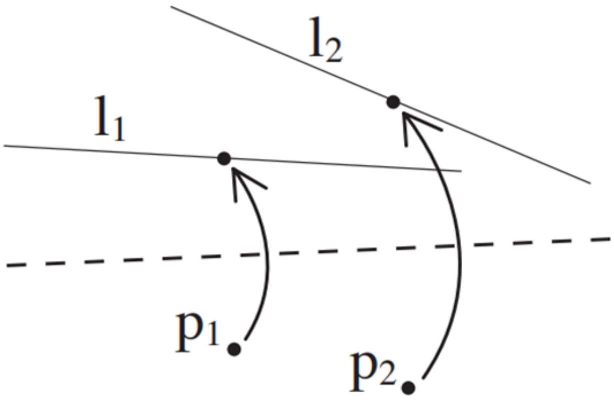
Figura 9 - Axioma 5



Fonte: Lang (2015)

Axioma 6: Considerando dois pontos, p_1 e p_2, e duas retas, l_1 e l_2, é possível realizar uma dobragem que fará com que p_1 coincida com l_1 e p_2 coincida com l_2.

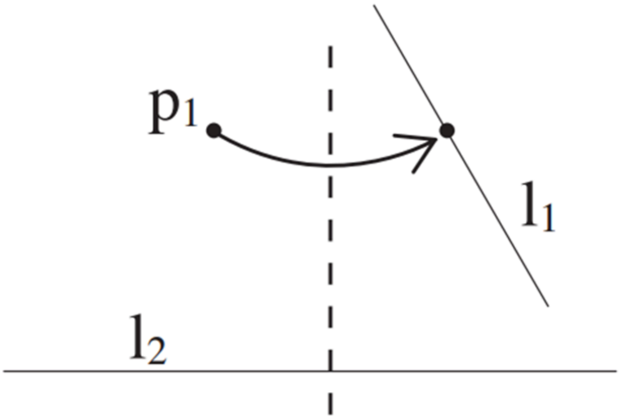
Figura 10 - Axioma 6



Fonte: Lang (2015)

Axioma 7: Dado um ponto, p_1, e duas retas, l_1 e l_2, se as retas não forem paralelas, existe uma dobragem que faz incidir p_1 em l_1 e é perpendicular a l_2.

Figura 11 - Axioma 7



Fonte: Lang (2015)

Monteiro (2008), em sua dissertação apresenta uma explicação analítica detalhada dos axiomas de Huzita-Hatori e aplicações em resolução de equações quadráticas, cúbicas, trissecção do ângulo e duplicação do cubo.

2.6 Origami e Geometria

No estudo da geometria, o origami se revela uma ferramenta poderosa e criativa, capaz de transformar conceitos abstratos em experiências concretas. A prática de dobraduras de papel, além de estimular o pensamento espacial, permite a exploração de problemas de construções clássicas de uma forma elegante. Um exemplo notável é a trissecção do ângulo, um desafio que, embora impossível de ser resolvido com régua e compasso, encontra no origami uma solução elegante e acessível. Nesta parte do capítulo, exploraremos como o origami não apenas enriquece o ensino da geometria, mas também abre novas possibilidades para a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos complexos.

2.6.1 Trissecção do Ângulo

Para dividir qualquer ângulo em duas partes iguais, um compasso e uma régua podem ser utilizados de maneira simples. Primeiramente, desenha-se um círculo com o vértice do ângulo como centro. Em seguida, identificam-se os pontos onde o círculo intersecta os lados do ângulo. Utilizando esses pontos como centros, traçam-se dois novos círculos com o compasso. Se a abertura do compasso estiver correta, os dois novos círculos se cruzarão em dois pontos distintos. Uma linha reta que passa por esses pontos de interseção dividirá o ângulo original ao meio, ou seja, traça-se a bissetriz.

Por outro lado, o problema de dividir um ângulo em três partes iguais é mais complexo. Esse problema, conhecido como trissecção do ângulo, busca um método usando régua e compasso para realizar essa divisão, porém foi provado que é impossível de ser realizado. Existem casos específicos onde essa divisão é mais simples; por exemplo, trissectar um ângulo reto é relativamente fácil, pois pode-se construir um ângulo de 60 graus e, em seguida, bissectar esse ângulo para obter 30 graus.

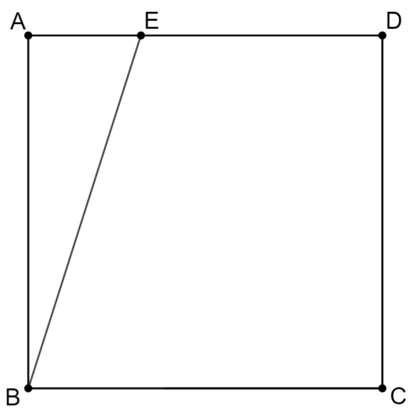
> Os gregos antigos conheciam métodos para trissectar qualquer ângulo usando outras curvas, como cônicas ou espirais, e muitos outros foram descobertos ao longo dos séculos. Existem inclusive curvas chamadas trissectizes, concebidas para esse fim.
>
> Mas a busca de um método geral de trissecção do ângulo usando apenas régua e compasso resistiu a todos os esforços até que o francês Pierre Wantzel (1814–1848) provou, em 1837, que tal método não pode existir. (VIANNA, 2021)

A solução da trissecção de um ângulo com origami se baseia na flexibilidade das dobras, que permite a criação de interseções entre linhas que não são possíveis com régua e compasso. No caso específico da trissecção, uma técnica comum envolve dobrar o papel de maneira que duas linhas coincidam com pontos previamente marcados, criando a divisão exata do ângulo em três partes iguais.

A demonstração a seguir, utilizada para mostrar a trissecção do ângulo usando dobraduras, é baseada na de Hisashi Abe, conforme apresentada por Cavacami e Furuya (2009).

Dado um ângulo $\angle EBC$ menor que 90° conforme a figura 12.

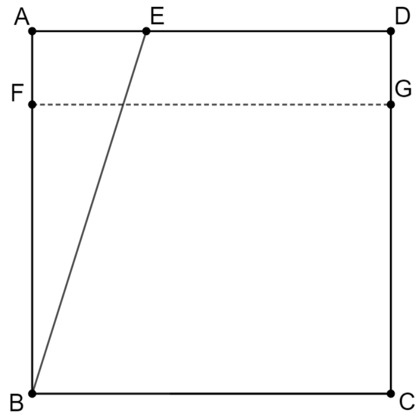
Figura 12 - Passo 1 da trissecção do ângulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Dobre o papel na vertical para determinar o segmento FG paralelo a AD. Quanto menor o ângulo a trissectar, maior deve ser o tamanho de AF, caso contrário, os pontos de interseção gerados nos passos futuros serão um projeção fora do papel, dificultando ou até impossibilitando o processo. Por exemplo, se o ângulo for menor do que 45°, então AF tem que ser maior que BF, e com isso o ponto E estará contido em CD ao invés de estar em AD.

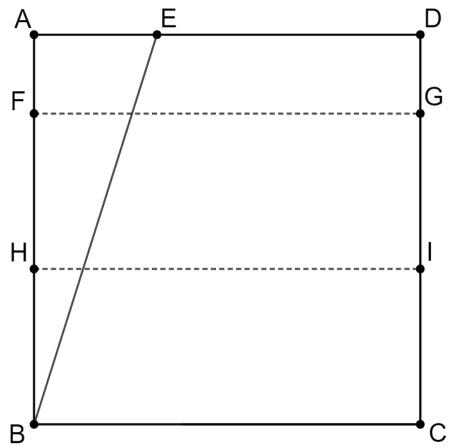
Figura 13 - Passo 2 da trissecção do ângulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Determine a paralela HI, onde H e I são os respectivos pontos médios de FB e GC.

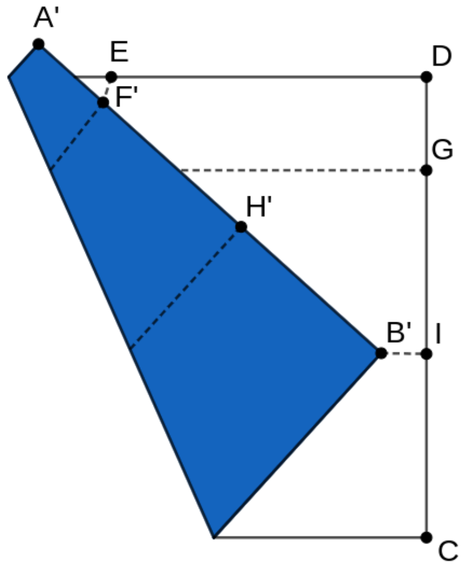
Figura 14 - Passo 3 da trissecção do ângulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Dobre de modo que ponto B encontre o segmento HI e o ponto F encontre o segmento EB. Essa dobra é dada pelo Axioma 6 de Huzita.

Figura 15 - Passo 4 da trissecção do ângulo.



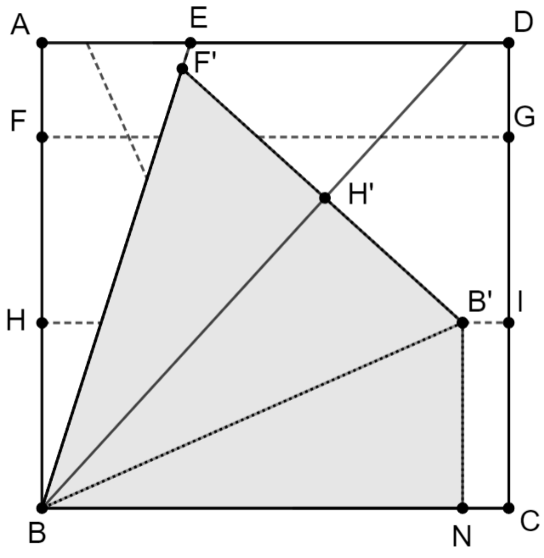
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Para ajudar na visualização, é ideal marcar os pontos F', H' e B' que são formados pelos pontos $F,\ H$ e B sobre o papel. Trace o segmento $F'B'$.

Desdobre o papel e trace os segmentos $B'B$ e $H'B$. Trace por B' uma paralela a IC, encontrando BC no ponto N.

Temos que os triângulos $\triangle BB'N$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, com os ângulos em B congruentes.

Figura 16 - Visualização da trissecção do ângulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Os triângulos $\triangle BB'N$ e $\triangle BB'H'$ são congruentes porque compartilham a hipotenusa BB' e os catetos opostos aos ângulos o vértice B são congruentes, uma vez que $NB' = BH = B'H'$, como exibido na figura 15.

Os triângulos $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ também são congruentes, pois têm o cateto BH' e comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice B são congruentes, já que $H'B' = HB = HF = H'F'$.

Portanto, os vértices dos triângulos que se encontram em B possuem os mesmos ângulos, o que significa que o ângulo $\angle EBC$ está dividido em três partes congruentes. A etapa que contém o Axioma 6 de Huzita é o que define a impossibilidade de realizar essa construção usando compasso e régua.

2.6.2 Duplicação do Cubo

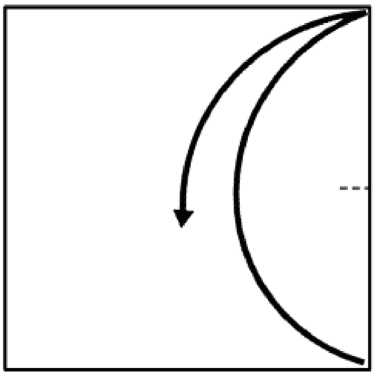
Outro problema clássico que é possível com origami e impossível com régua e compasso é o da duplicação do cubo.

> Eratóstenes que certa vez, na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como "problema deliano", que se tornou um dos problemas clássicos da Antigüidade. Podemos enunciá-lo também desta forma: dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. Os matemáticos gregos já tinham resolvido a questão da duplicação de um quadrado, e parece natural que a tenham estendido ao caso do cubo. (LUCERO, 2005)

De acordo com Lucero (2005), a seguinte construção foi feita por Peter Messer, que parte de um papel quadrado dividido em três partes iguais. Isso pode ser feito seguindo as etapas a seguir.

Marcar o ponto médio de um lado próximo a borda, dobrando e desdobrando a folha.

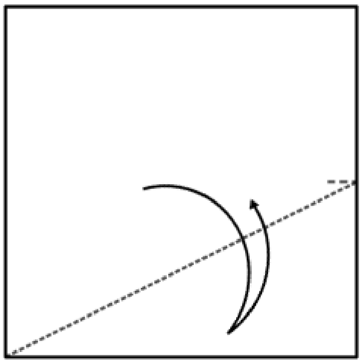
Figura 17 - Passo 1 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Fazer a dobradura seguindo o diagrama abaixo e desdobrar para fazer a marcação.

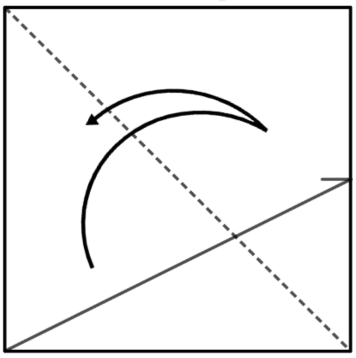
Figura 18 - Passo 2 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Dobrar a diagonal conforme o diagrama abaixo e desdobrar.

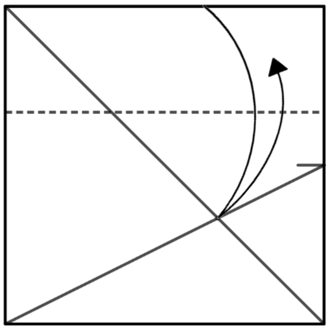
Figura 19 - Passo 3 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Dobrar horizontalmente de modo com que a borda superior encontre com a interseção das marcações feitas pelas dobraduras anteriores.

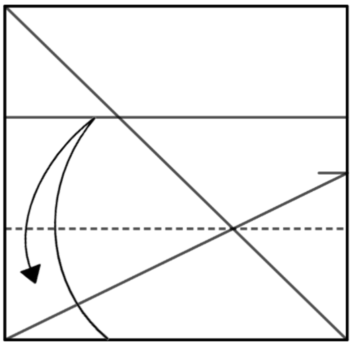
Figura 20 - Passo 4 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Dobrar horizontalmente novamente, mas dessa vez fazendo com que a borda inferior encontre com a marcação feita no último passo.

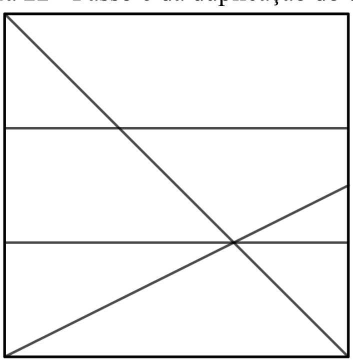
Figura 21 - Passo 5 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Após esse processo, as linhas horizontais dividem o papel em três partes iguais, marcadas pelos segmentos horizontais. Outros métodos podem ser usados para alcançar esse resultado, uma vez que Messer (1986) inicia sua solução a partir de um papel já dividido de acordo com o resultado obtido até esse ponto.

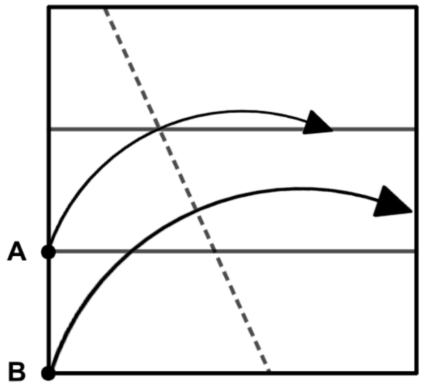
Figura 22 - Passo 6 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Para seguir com a dobradura, fixe os pontos A e B conforme indicado na figura 23. Em seguida, dobre o papel de maneira que o ponto A se alinhe com a primeira linha horizontal e o ponto B toque a extremidade direita do papel.

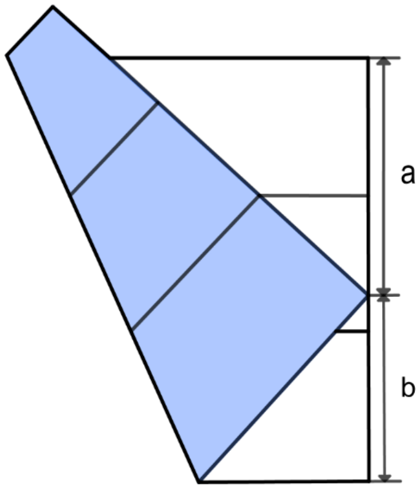
Figura 23 - Passo 7 da duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Fazendo isso temos o resultado final, onde $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Figura 24 - Passo 8 da duplicação do cubo.

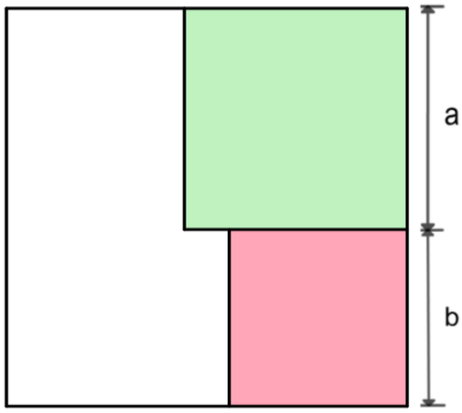


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Com isso, por exemplo, podemos formar dois quadrados que podem ser usados como módulos para a construção de um origami de cubo por exemplo usando algum método de construção, seja modular ou não, e assim, um terá o dobro do outro.

A prova dessa construção pode ser encontrada em Rabinowitz (1986), e é feita através da semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, já Lucero (2005) realiza essa demonstração usando geometria analítica.

Figura 25 - Exemplo de aplicação duplicação do cubo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

2.7 Origami na Educação: Origametria

Parte das inspirações para as atividades realizadas neste trabalho veio do programa Origametria, desenvolvido pelo Centro de Origami de Israel (IOC), (https://origametria.com/). O termo 'Origametria' é uma combinação de 'origami' e 'geometria', criado para ensinar o currículo de geometria por meio do origami.

A implementação do programa Origametria nas escolas israelenses revelou inúmeras semelhanças com a metodologia de ensino da geometria proposta pela Teoria de Van Hiele. Segundo Golan (2011), "depois que o Centro de Origami de Israel (IOC) estabeleceu o programa Origametria nas escolas, muitos paralelos foram encontrados com o método de ensino geométrico de Van Hiele". No entanto, observa-se que muitos alunos em Israel são introduzidos à geometria no Nível Dedutivo de Van Hiele (Nível 3) durante o ensino fundamental II e médio, sem que tenham desenvolvido uma base sólida nos níveis anteriores. Esses alunos enfrentam dificuldades ao serem solicitados a formular provas geométricas, pois ainda não conseguem identificar corretamente lados e ângulos, localizar polígonos dentro de outros ou reconhecer definições geométricas básicas.

Isso evidencia a importância de uma progressão gradual no ensino da geometria, onde os primeiros níveis de Van Hiele (visualização e análise) são fundamentais para preparar os alunos para abstrações mais complexas, como a dedução e a prova formal.

No quadro 5 apresentamos novamente as características dos níveis de Van Hiele, mas dessa vez correlacionando com o programa Origametria, conforme apresentado por Golan (2011).

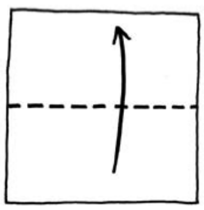
Quadro 5 - Comparação entre os níveis de Van Hiele e Origametria.

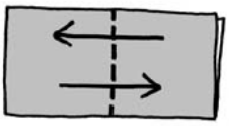
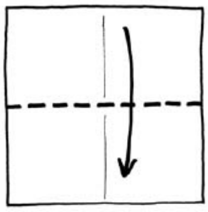
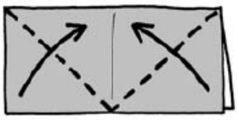
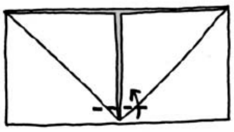
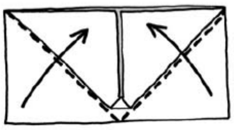
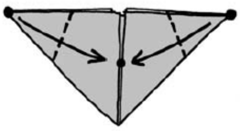
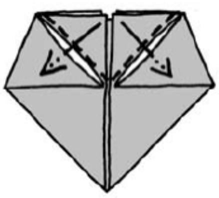
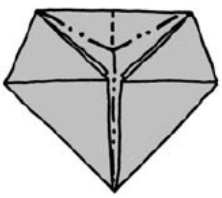
Nível de Van Hiele	Etapa do programa Origametria
Nível 0: Nesse nível, os alunos aprendem os nomes de muitos termos e formas geométricas. Eles conseguem identificar formas geométricas e entender as diferenças entre elas.	Para o ensino infantil e nos primeiros anos do ensino fundamental, os alunos são expostos a termos e formas geométricas básicas, como lado, vértice, quadrado, retângulo e triângulo. Em cada aula, o Origametria faz referência repetida a esses termos e formas, de modo que a compreensão básica seja reforçada diversas vezes.
Nível 1: Nesse nível, os alunos conseguem identificar e analisar as características das formas geométricas.	No processo de dobrar um modelo, um tema geométrico (como um triângulo isósceles ou uma linha de simetria) aparece muitas vezes em diferentes formas, e seu caráter é discutido pelos alunos. Por meio dessa análise cumulativa de diferentes exemplos, as características de um tema geométrico são aprendidas.
Nível 2: Os alunos conseguem entender as relações e diferenças entre os polígonos e a importância de definições precisas. Eles conseguem identificar conjuntos de formas e seus subconjuntos (por exemplo, por que todos os retângulos pertencem à família dos paralelogramos).	Enquanto dobram um modelo, os alunos testam as características de um tema geométrico em diferentes contextos, aprendendo a separar e definir formas semelhantes, como triângulos escalenos e isósceles ou paralelogramos e losangos.

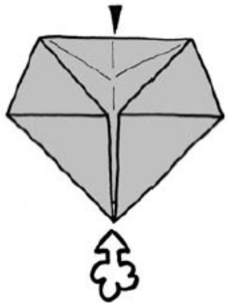
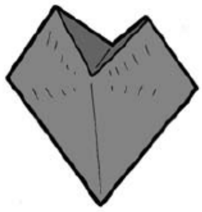
Fonte: Traduzido e adaptado de Golan (2011)

No programa, o planejamento de uma aula começa com a seleção de um tópico específico de geometria a ser ensinado. De acordo com Golan e Jackson (2009), após a definição do tópico, é selecionado um modelo de origami cuja sequência de dobras enfatiza o tema escolhido. Por exemplo, se o foco estiver em triângulos isósceles, polígonos ou bissecções, o modelo escolhido terá características que exploram essas figuras geométricas de maneira prática e visual.

Quadro 6 - Comparação entre os níveis de Van Hiele e Origametria.

Diagrama	Instrução	Questionamento
	1. Dobre ao meio.	

	2. Dobre e desdobre, conforme o diagrama.	
	3. Dobre ao meio novamente.	Quantos quadrados aparecem na folha?
	4. Dobre de modo com que os cantos se encontrem no meio da extremidade.	Quantos triângulos aparecem na folha? Os triângulos também são polígonos?
	5. Dobre a ponta.	Quantos triângulos aparecem na folha?
	6. Dobre os cantos restantes da mesma maneira que o passo 4.	Quantos triângulos aparecem na folha?
	7. Dobre os cantos até a linha do meio.	
	8. Dobre os triângulos pequenos para dentro do bolso formado de acordo com o diagrama.	
	9. Dobre conforme o diagrama.	Qual é o maior polígono presente na folha?

	10. Assopre no local indicado para inflar a figura e empurre na seta preta indicada.	
	11. Abra o coração, tentando deixá-lo oco no meio.	Após o coração ser inflado, qual foi o polígono formado?

Fonte: Adaptado, traduzido e com imagens de Golan e Jackson (2009).

A pergunta feita após o passo final, exibida no quadro 6, pode gerar algumas respostas diferentes, já que o coração final não é um polígono e sim composto por vários polígonos. Se a intenção era vê-lo de frente, sua projeção formaria um hexágono.

A atividade do quadro 6 foi criada com o objetivo de desenvolver o pensamento abstrato e identificar e descrever os principais polígonos. Ela pode ser utilizada no 1º e 2º anos do Ensino Fundamental para identificar polígonos contando o número de lados.

3. PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo será apresentado um conjunto de atividades que utilizam o origami como ferramenta pedagógica, alinhado à metodologia proposta pelo programa Origametria. As atividades visam desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, proporcionando uma transição fluida entre os diferentes níveis de compreensão descritos na Teoria de Van Hiele, além de estar em conformidade com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

3.1 Atividade 1 - Explorando proporções com origami

Essa é uma sugestão de atividade que foi inspirada nos moldes do programa Origametria, que tem como característica não revelar o que está sendo dobrado. Assim o aluno durante o processo tem a oportunidade de focar na geometria e enxergar as partes como figuras geométricas e não como uma parte do corpo de um animal ou objeto. Ou seja, se o produto final for um pato, o aluno não saberá que está olhando para uma parte determinada do animal e sim para um triângulo isósceles, por exemplo.

Essa é uma atividade que pode ser utilizada para explorar vários conceitos de Geometria, como ângulos, figuras geométricas, congruência e semelhança de triângulos, perímetros e áreas, a depender do conteúdo que o professor desejar aplicar. Como nosso interesse é no ensino fundamental II e níveis de Van Hiele, o exemplo de atividade abaixo refere-se aos conceitos do 6º ano. No Recurso Educacional desta dissertação é possível encontrar algumas perguntas, imagens em maior qualidade para a montagem.

Objetivo: Compreender e aplicar os conceitos de proporções e simetrias por meio da dobragem de figuras de origami em diferentes tamanhos.

Habilidades na BNCC:

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

Tempo para execução: 2 aulas de 50 minutos.

Pré-requisitos: De acordo com as habilidades propostas, esta atividade é destinada ao 6º ano e requer o reconhecimento de formas geométricas básicas, a classificação de ângulos e o domínio de operações básicas com números racionais. Mas pode ser aplicada em outros anos dependendo da abordagem em quais conteúdos além dos níveis de Van Hiele.

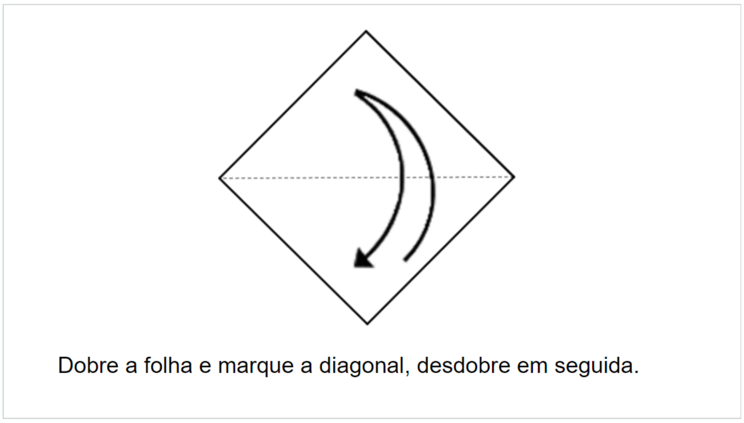
A primeira atividade é dividida em duas partes, na primeira, com o uso do passo a passo no origami, inclui-se um conjunto de questões relacionadas a cada passo sobre as figuras geométricas que aparecem no decorrer da construção. Na segunda parte, com o uso do papel para dobra de dimensão distinta da primeira atividade, exploram-se as medidas e suas proporções.

Parte 1: Passo a passo para a construção.

Por não possuírem acesso ao produto final logo de início, essa construção deve ser exibida em partes, por isso podemos usar slides para apresentar o passo a passo. Após alguns passos, os alunos responderão algumas perguntas que podem ser feitas sobre a construção em andamento, que pode ser em uma folha de atividade com todas as perguntas ou do próprio slide. Para essa primeira construção, os alunos irão utilizar uma folha quadrada de dimensões 10 cm x 10 cm.

1° passo:

FIGURA 26 – Slide 1: Atividade 1



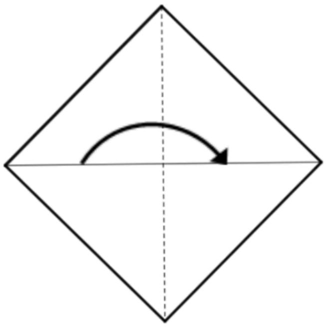
Fonte: Próprio autor

Logo após esse primeiro passo, o aluno deve responder às perguntas:

1) Quais são os tipos de triângulos formados pela extremidade da folha e a linha de vinco?

2° passo:

FIGURA 27 – Slide 2: Atividade 1



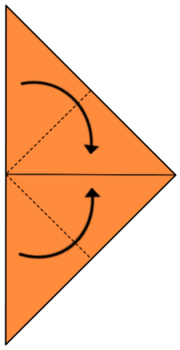
Dobre ao meio novamente, mas formando a outra diagonal.

Fonte: Próprio autor

Após o 2° passo, não há uma pergunta. Nem todos os passos serão acompanhados de perguntas sobre geometria ou sobre o modelo.

3° passo:

FIGURA 28 – Slide 3: Atividade 1



Dobre de forma com que se encontre com a linha do meio.

Fonte: Próprio autor

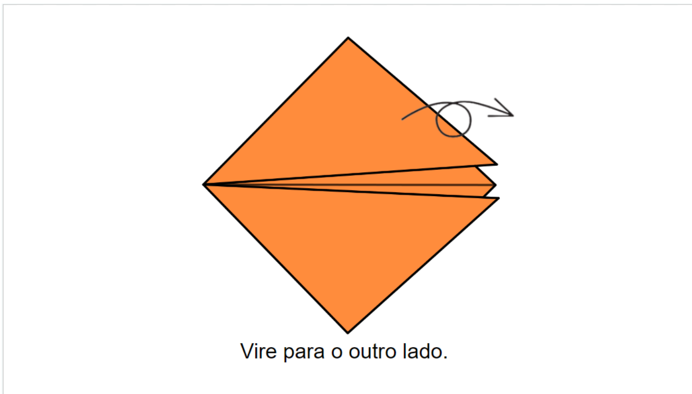
Dependendo de como se caminha o ano em geometria, essas perguntas também podem variar. Nesse ponto podemos tratar sobre as bissetrizes formadas, por exemplo. Antes do 4° passo, os alunos devem responder às seguintes questões:

2) Os triângulos formados são retângulos?

3) Existe algum ângulo obtuso formado por alguma extremidade ou linha de vinco?

4° passo:

FIGURA 29 – Slide 4: Atividade 1



Fonte: Próprio autor

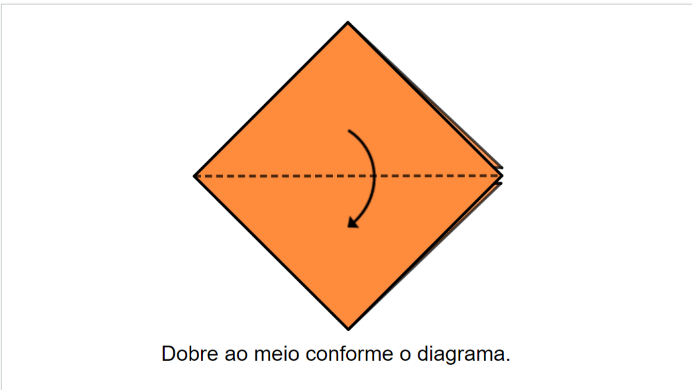
É importante lembrar que como cada um tem sua maneira e jeito de lidar com os objetos, os alunos provavelmente irão produzir modelos iguais, mas com precisões diferentes nas dobraduras e isso pode gerar respostas diferentes nessas perguntas, mas que estejam certas com a produção do aluno. Uma pergunta após o 4° passo poderia ser:

4) A figura formada é um quadrado?

5) Se sim, o lado do quadrado do papel é quantas vezes maior que a desse quadrado?

5° passo:

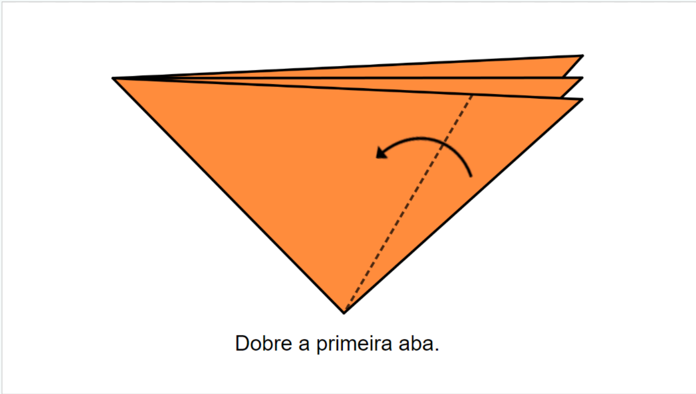
FIGURA 30 – Slide 5: Atividade 1



Fonte: Próprio autor

6° passo:

FIGURA 31 – Slide 6: Atividade 1



Fonte: Próprio autor

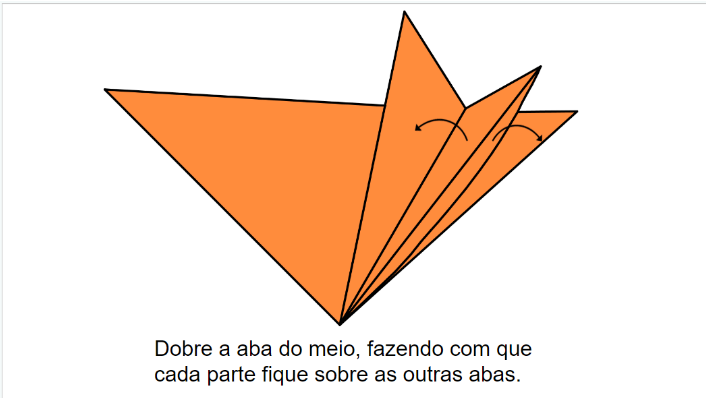
Dependendo de como o professor organize a turma, é importante, a partir deste ponto dar atenção à construção feita pelos alunos, para que nenhum fique atrasado, tanto na construção, como na sequência de perguntas.

Após esse passo, os alunos podem responder à pergunta:

6) Quantos triângulos você consegue identificar no momento?

7° passo:

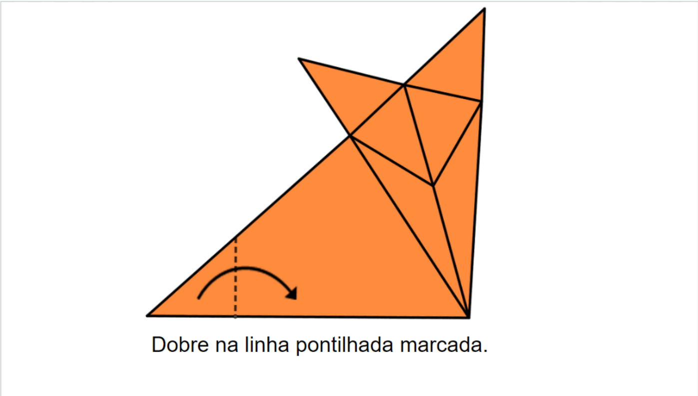
FIGURA 32 – Slide 7: Atividade 1



Fonte: Próprio autor

8° passo:

FIGURA 33 – Slide 8: Atividade 1

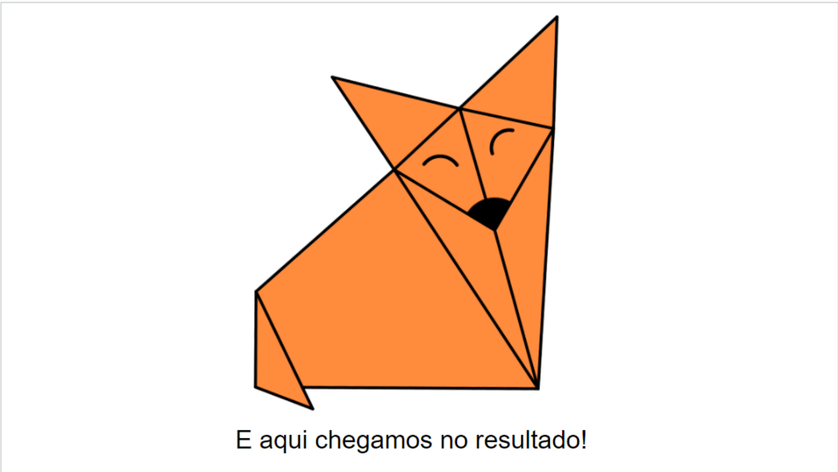


Fonte: Próprio autor

As próprias linhas de vinco formam a cabeça e as partes do corpo do modelo, mas o professor pode pedir que os alunos reforcem esses traços com lápis ou caneta, isso ajuda na identificação de figuras, por exemplo. Depois dessa última dobradura, os alunos já podem saber do que se trata o produto final.

9° passo:

FIGURA 34 – Slide 9: Atividade 1



Fonte: Próprio autor

Após o término da construção, partiremos para a próxima parte da atividade, que será uma análise do modelo inteiro. O quadro 7 contém as perguntas que foram sugeridas durante a construção e seus respectivos níveis de Van Hiele.

Quadro 7 - Nível de Van Hiele das perguntas na atividade 1.

Questão	Nível de Van Hiele
1) Quais são os tipos de triângulos formados pela extremidade da folha e a linha de vinco?	Nível 1 - Análise
2) Os triângulos formados são retângulos?	Nível 1 - Análise
3) Existe algum ângulo obtuso formado por alguma extremidade ou linha de vinco?	Nível 1 - Análise
4) A figura formada é um quadrado?	Nível 0 - Visualização
5) Se sim, o lado do quadrado do papel é quantas vezes maior que a desse quadrado?	Nível 2 - Ordenação
6) Quantos triângulos você consegue identificar no momento?	Nível 0 - Visualização

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Parte 2: Proporção

Permita que os alunos dobrem uma segunda raposa, mas dessa vez usando um papel de dimensões diferentes, por exemplo 20 x 20 cm ou 15 cm x 15 cm.

Para essa construção não faz sentido que eles tenham que responder às mesmas perguntas sobre os elementos geométricos que fizeram na primeira construção. Caso algum aluno não tenha se familiarizado com os passos, ele poderá consultar o manual completo do processo ou acompanhar o mesmo passo a passo nos slides, sem as perguntas.

Após realizada a segunda construção, os alunos devem responder às perguntas sobre proporção. Aqui novamente, os níveis de Van Hiele serão avaliados.

FIGURA 35 – Primeira parte da atividade

Proporções na Raposa

1) Dê um nome para cada raposa, meça três partes das raposas e escreva aqui:

Raposa 1:	Raposa 2:
Exemplos: orelha, cabeça, etc.	

2) Quantos triângulos você consegue identificar em cada raposa? De quais tipos?

____

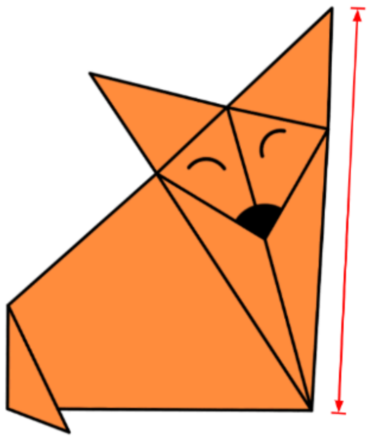
____

Fonte: Próprio autor

Essa primeira pergunta da figura 35 é uma introdução à pergunta número 3, e, de acordo com os níveis de Van Hiele, essa estaria no nível 0. Já na pergunta de número 2, os alunos precisam identificar que tipo de triângulos estão localizados no modelo final, portanto seria uma pergunta de nível 1. Dependendo do objetivo a ser alcançado, o professor pode adicionar mais perguntas sobre os elementos, perímetros, áreas e ângulos que aparecem no modelo final.

FIGURA 36 – Segunda parte da atividade

3) Agora vamos fazer uma medição específica, meça a altura da raposa que seria a extremidade da sua orelha até seus pés, como destacado em vermelho na figura abaixo.



Anote as medidas aqui:

Raposa 1	Raposa 2

Em seguida, responda as perguntas abaixo:

a) Essa medida poderia ser considerada a altura da raposa? Por quê?

____

b) Qual é a razão entre a altura das duas raposas?

Fonte: Próprio autor

Nessa segunda parte da atividade, a primeira pergunta dentro do exercício 3 permanece no nível 1 de Van Hiele, pois o aluno apenas precisa analisar uma característica específica da figura. No item "b)" o nível permanece o mesmo em relação ao item "a)", com a única diferença sendo a introdução de uma relação entre as duas figuras neste contexto, o que poderia indicar uma característica do nível 2. No entanto, como o comando de se calcular a razão já está presente na própria questão, o aluno não precisaria entender o significado desse cálculo.

FIGURA 37 – Terceira parte da atividade

c) Se usarmos um papel quadrado medindo 50 cm x 50 cm, quanto mediria a altura da raposa?

d) Que tamanho deveria ser o papel para que a altura da raposa fosse igual a 20 cm?

Fonte: Próprio autor

Nos itens “c)” e “d)” é necessário que o aluno raciocine sobre o uso da proporção obtida no item “b)” ou entre a altura medida e o tamanho inicial do papel. Nesse caso, essa pergunta estaria no nível 2, por se tratar de uma relação entre as figuras e o uso de propriedades de proporção.

O professor pode adaptar essa atividade conforme as necessidades de ensino e os objetivos específicos da turma, por exemplo, ao desdobrar o origami por completo, as linhas de vinco formarão várias formas geométricas, que podem também ser exploradas. A estratégia proposta pode ser eficaz tanto para a identificação de formas geométricas, desde a análise do quadrado do papel inicial até o ensino de conceitos mais avançados, como proporções, simetrias, Teorema de Pitágoras, etc. Embora o programa original do Origametria seja aplicado ao Ensino Fundamental I, essa abordagem pode ser ajustada para diferentes níveis de ensino, permitindo que alunos de várias faixas etárias explorem as propriedades geométricas de maneira interativa e significativa. Além disso, o professor pode usar outros modelos de origamis para analisar os seus elementos usando a mesma estratégia de questionamento ao longo da construção.

3.2 Atividade 2 - Proporções em três dimensões com origami

Para essa atividade utilizaremos os mesmos moldes da atividade anterior, portanto cada passo pode vir acompanhado de perguntas e os alunos não saberão do que se trata ao iniciar o processo de dobradura. O passo a passo foi desenvolvido por Kawamura (2001), em uma adaptação ao famoso cubo de Paul Jackson.

Objetivo: Compreender e aplicar os conceitos de volume e proporções por meio da construção de cubos de origami, explorando as relações entre as dimensões das figuras e o espaço ocupado.

Habilidade BNCC: (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Tempo para execução: 2 aulas de 50 minutos.
Pré-requisitos: Conceito de dimensões, áreas e cálculo de volume de blocos retangulares.

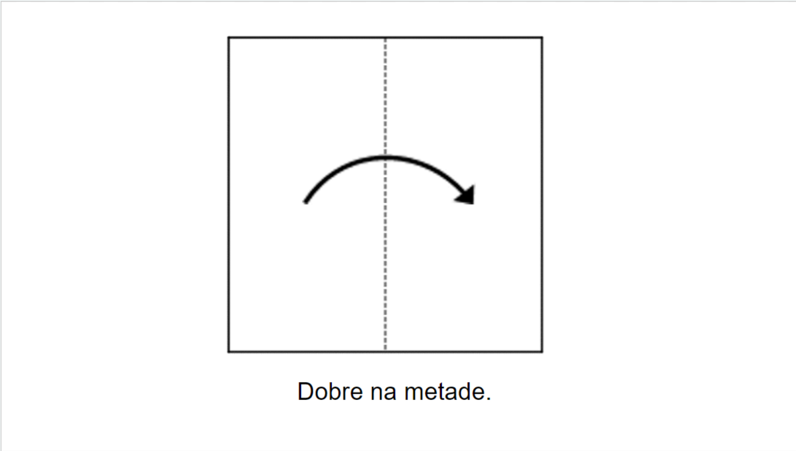
A atividade 2 também está dividida em duas partes, com a instrução para a construção de módulos no origami, seguido das medidas distintas e as proporções das medidas dos lados da face quadrangular para o cálculo do volume.

Parte 1: Passo a passo para a construção.

Assim como na atividade anterior, a construção será exibida em partes, com a diferença que dessa vez serão necessárias seis folhas para poder compor a construção completa que dependerá de uma montagem que é simples de ser feita, mas que combina bem com uma atividade em dupla ou grupo.

1° passo:

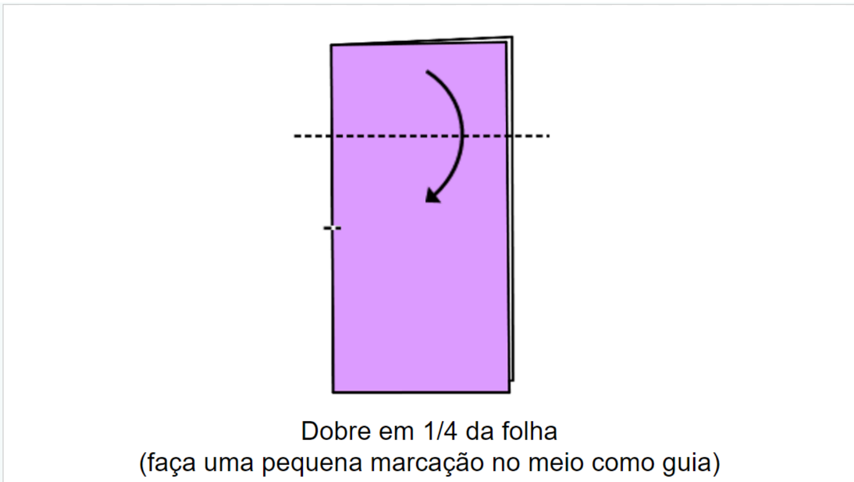
FIGURA 38 – Slide 1: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

Para que o produto fique com uma aparência agradável, os alunos podem combinar cores na construção, mesmo sem saber o produto final. Para esse primeiro momento, sem perguntas sobre a construção.

FIGURA 39 – Slide 2: Atividade 2

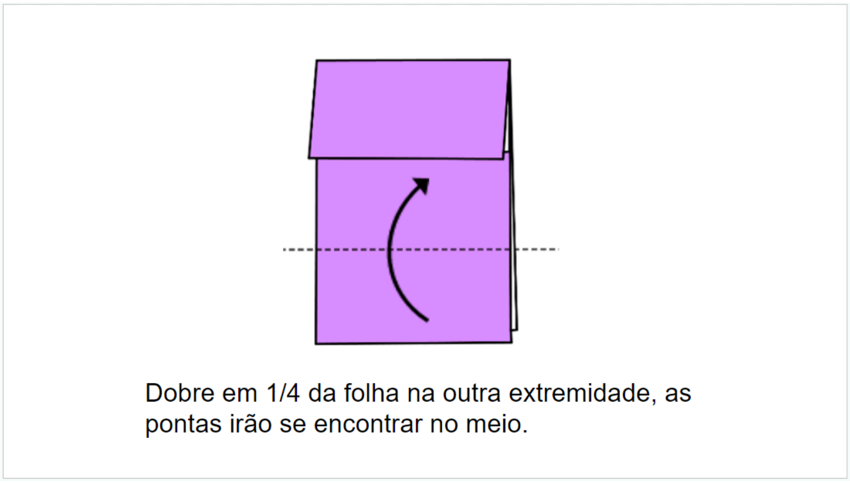


Fonte: Próprio autor

Após essa construção, os alunos devem responder as perguntas:

1) Que formas geométricas podemos identificar nessa etapa?

FIGURA 40 – Slide 3: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

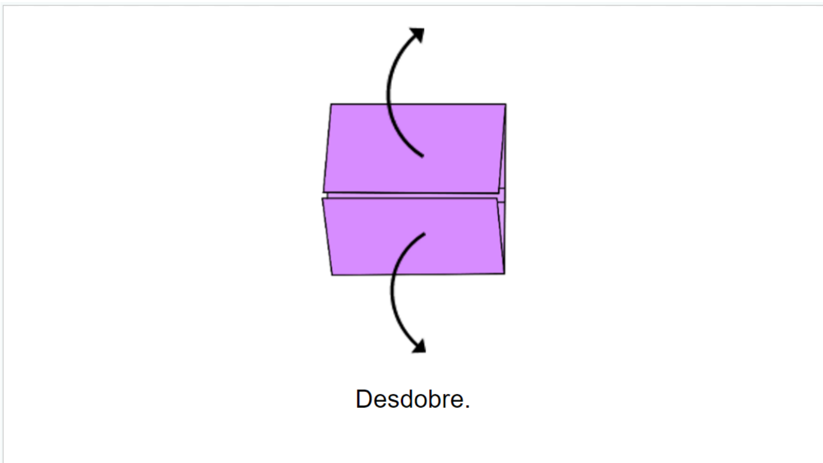
Após essa construção, os alunos podem responder às perguntas:

2) Qual é a forma do maior polígono formado após essas três etapas?

3) Que fração da folha original corresponde a essa figura formada?

Para esta pergunta, espera-se que a resposta seja 3/8. Já que o papel é dividido ao meio inicialmente, e depois em duas abas onde cada uma é 1/4 da metade, logo a folha inteira é dividida em 8 partes iguais.

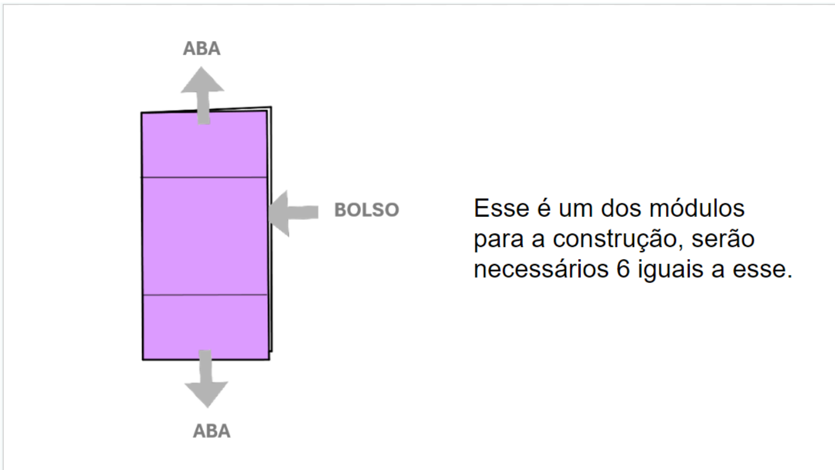
FIGURA 41 – Slide 4: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

Sem perguntas após essa etapa.

FIGURA 42 – Slide 5: Atividade 2

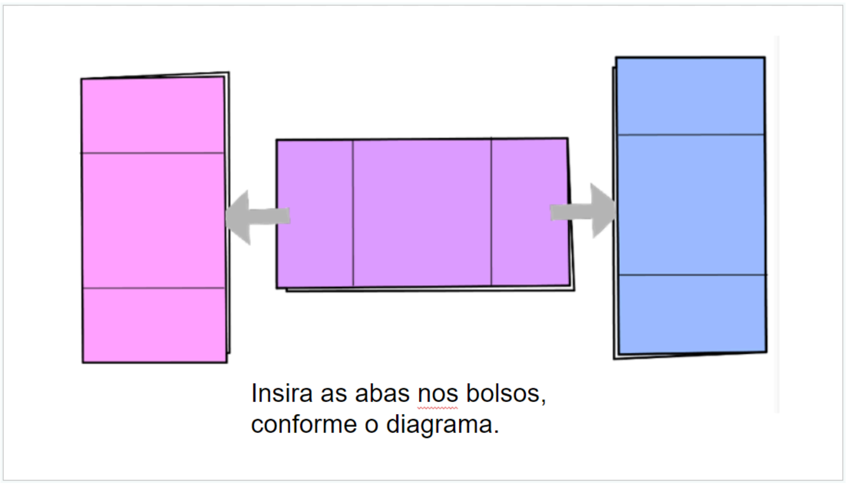


Fonte: Próprio autor

Nesse ponto, considerando que eles não sabem o que será produzido, é válido também fazer perguntas para instigar a curiosidade dos alunos. Então, uma possível pergunta poderia ser:

4) Que tipo de construção você acha que estamos fazendo?

FIGURA 43 – Slide 6: Atividade 2

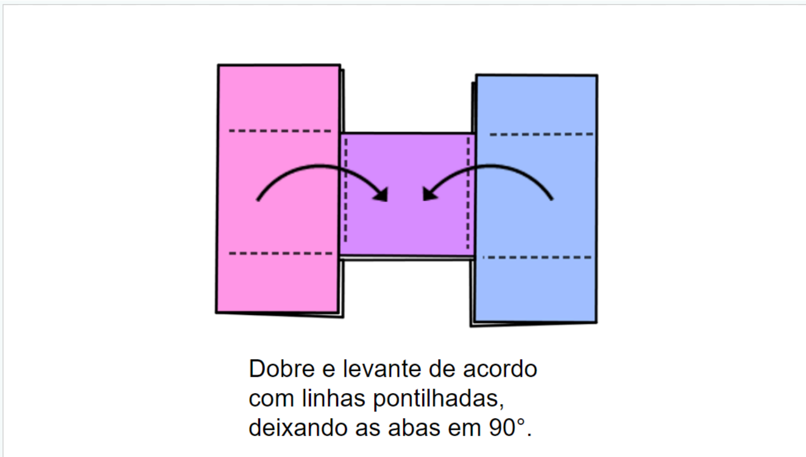


Fonte: Próprio autor

Aproveitando que a próxima instrução envolve justamente um ângulo reto, para lembrar os alunos, a pergunta poderia ser:

5) Quanto ângulos retos você consegue localizar após essa etapa?

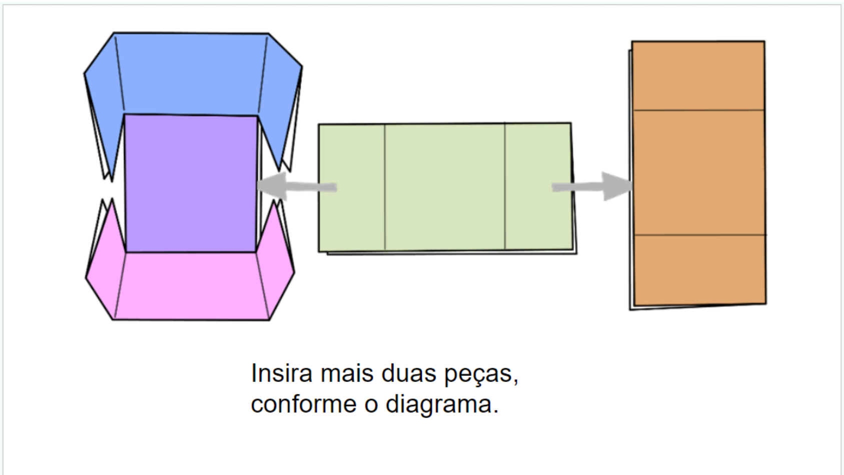
FIGURA 44 – Slide 7: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

Após esse processo, como as abas ficarão em pé, existe uma transição das figuras planas para a tridimensional mais claramente. Como o processo está se encaminhando para o final, é importante que o professor certifique-se que todos estão no mesmo passo.

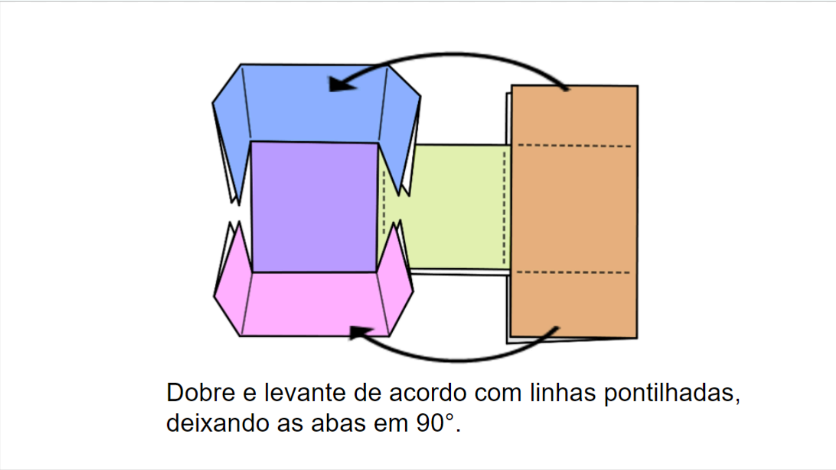
FIGURA 45 – Slide 8: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

Sem perguntas após essa etapa.

FIGURA 46 – Slide 9: Atividade 2

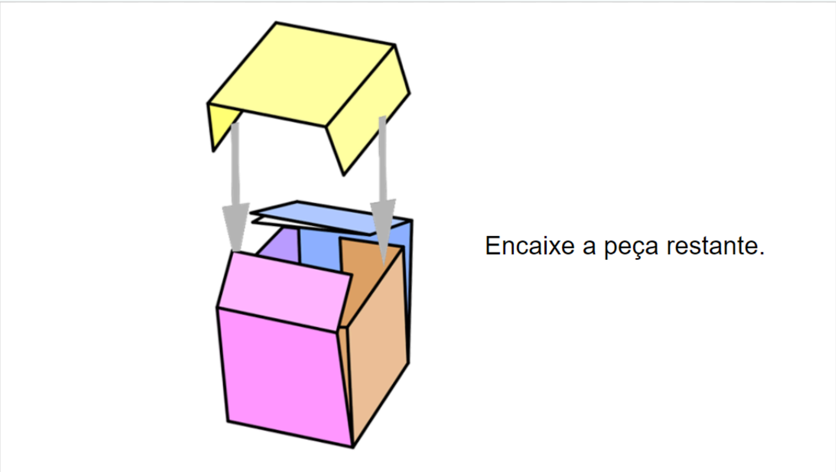


Fonte: Próprio autor

Após essa etapa, espera-se que os alunos já tenham quase certeza que se trata de um cubo, então aqui podemos voltar à quarta pergunta:

6) Você consegue agora dizer o que está sendo construído? Seu palpite anterior passou perto?

FIGURA 47 – Slide 10: Atividade 2



Fonte: Próprio autor

Após terminada a construção, os alunos terão um cubo parecido com o da figura 48. Na próxima parte da atividade, eles irão fazer um outro cubo, mas agora com um papel de tamanho diferente ao utilizado nessa primeira parte.

FIGURA 48 – Slide 11: Atividade 2

Fonte: Próprio autor

Os níveis de Van Hiele esperados em cada questão da construção estão dispostos no quadro 8.

Quadro 8 - Nível de Van Hiele das perguntas na atividade 2.

Questão	**Nível de Van Hiele**
1) Que formas geométricas podemos identificar nessa etapa?	Nível 0 - Visualização
2) Que forma geométrica se formou após essas três etapas?	Nível 0 - Visualização
3) Que fração da folha original corresponde a essa figura formada?	Nível 2 - Abstração
4) Que tipo de construção você acha que estamos fazendo?	Nível 0 - Visualização
5) Quanto ângulos retos você consegue localizar após essa etapa?	Nível 1 - Análise
6) Você consegue agora dizer o que está sendo construído? Seu palpite anterior passou perto?	Nível 1 - Análise

Fonte: Próprio autor

Parte 2: Proporção

Assim como na atividade anterior, os alunos deverão construir outro cubo utilizando papéis de tamanhos diferentes. Essa é uma generalização da atividade anterior, mas que dessa vez utiliza as habilidades que envolvem o cálculo de volume. Um dos principais objetivos dessa parte da atividade é mostrar que, ao dobrar a aresta de um cubo, seu volume não dobra.

Não se faz necessário responder às mesmas perguntas respondidas na primeira construção, portanto dessa vez os alunos irão construir diretamente o cubo.

Após realizada a construção do segundo cubo, os alunos podem responder às perguntas sobre proporção, área e volume.

FIGURA 49 - Primeira parte da atividade 2.

Proporções no Cubo

1) Meça as arestas dos cubos e calcule a área de uma das faces de cada um. Anote os resultados:

	CUBO 1	CUBO 2
Medida da aresta		
Medida da área		

Fonte: Próprio autor

Diferentemente da atividade da raposa, a primeira pergunta, presente na figura 49, está no nível 1 de Van Hiele, pois o aluno deve identificar uma característica do cubo, que é a aresta. Em comparação à dobradura anterior, na primeira pergunta, onde ele estava medindo elementos do animal, como orelha, cauda, cabeça e etc.

FIGURA 50 - Segunda parte da atividade 2

2) Calcule a razão entre as arestas dos cubos 1 e 2.

3) Calcule o volume dos cubos.

Fonte: Próprio autor.

Já na figura 50, a segunda pergunta ainda está no nível 1 de Van Hiele, uma vez que o comando de calcular a razão já foi dado, então neste momento o aluno só precisa relacionar as medidas sem ter um entendimento maior.

A terceira pergunta já pode ser considerada uma pergunta de nível 2, dependendo de como as medidas de capacidade já foram abordadas pelo professor.

FIGURA 51 - Terceira parte da atividade 2

4) Calcule a razão entre os volumes dos cubos 1 e 2.

Fonte: Próprio autor

Assim como na questão 3, esse questionamento da figura 51 ainda se mantém no nível 1 de Van Hiele, uma vez que o comando já dito na questão e os alunos não são levados a discutir sobre.

FIGURA 52 - Última parte da atividade 2

5) A razão encontrada na questão 5 é a mesma encontrada na questão 2? Justifique.

6) Desafio para a turma:

Quantos cubos podemos empilhar sem que a torre formada desabe?

Fonte: Próprio autor

Na quinta pergunta, da figura 52, os alunos são levados a refletir sobre a relação entre a razão das arestas e a razão dos volumes, exigindo que eles compreendam que, ao aumentar ou diminuir as arestas de um cubo, o volume se altera de maneira cúbica. Essa reflexão envolve a aplicação do conceito de potências e uma análise mais abstrata das propriedades geométricas, o que caracteriza o Nível 3 da teoria de Van Hiele. Nesse nível, os alunos desenvolvem a capacidade de deduzir e explicar relações geométricas mais complexas.

Uma vez concluída a parte 2 desta atividade, e considerando a construção no capítulo 2, da duplicação do cubo, uma atividade adicional sugerida é que o aluno construa esses dois cubos, comparando as medidas dos lados, conforme observado no final da seção 2.6.2, cuja atividade pode ser aplicada no ensino médio.

3.3 Atividade 3: Elementos em três dimensões com origami

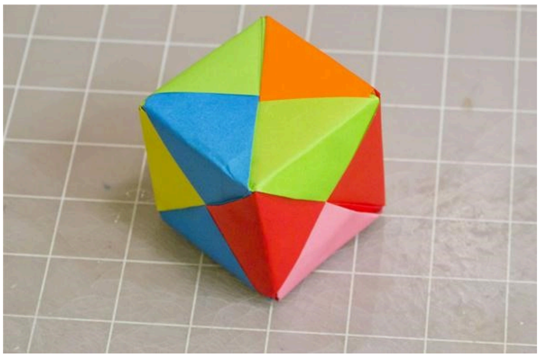
Uma das características do programa Origametria é raramente analisar a geometria do produto final, uma vez que na maioria das atividades o modelo final é um animal, objeto, etc. No entanto, nesta adaptação, analisaremos exclusivamente o produto final, por serem elementos geométricos que já seriam estudados, com ou sem o uso de origami, sem descartar a consideração dos níveis da Teoria de Van Hiele.

Habilidade BNCC: (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Tempo para execução: 2 aulas de 50 minutos.
Pré-requisitos: Conceito básico de polígonos e conhecimento dos elementos dos poliedros.

Parte 1: Passo a passo para a construção dos sólidos.

O principal objetivo desta atividade é, primeiro, analisar os poliedros em relação à quantidade de vértices, arestas e faces, e, em seguida, verificar que a fórmula de Euler funciona para esses poliedros. Por esse motivo, foram escolhidos três sólidos cuja construção, apesar de modular, produz faces que não possui dobras Algumas construções, como as realizadas com módulos de Sonobe, como da figura 53 por exemplo, podem resultar em poliedros com faces complexas e divididas em muitos elementos, o que pode gerar confusão dependendo da série e do nível dos alunos.

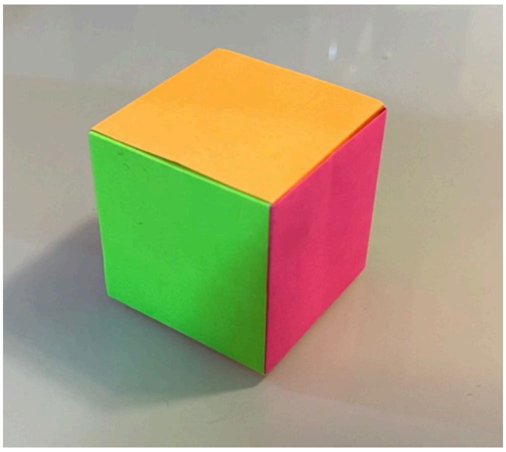
FIGURA 53 – O cubo feito com módulos de sonobe



Fonte:
https://mathcraft.wonderhowto.com/how-to/modular-origami-make-cube-octahedron-icosahedron-from-sonobe-units-0131460/ - Acesso em 23/08/2024.

Nessa atividade, será utilizada uma abordagem semelhante à da atividade anterior, com a construção de um cubo como o da figura 54, que apresenta seus elementos de forma clara e é mais simples de realizar. O foco permanece no estudo dos elementos dos poliedros, e não no aprimoramento das habilidades de origami.

FIGURA 54 - O cubo de Paul Jackson

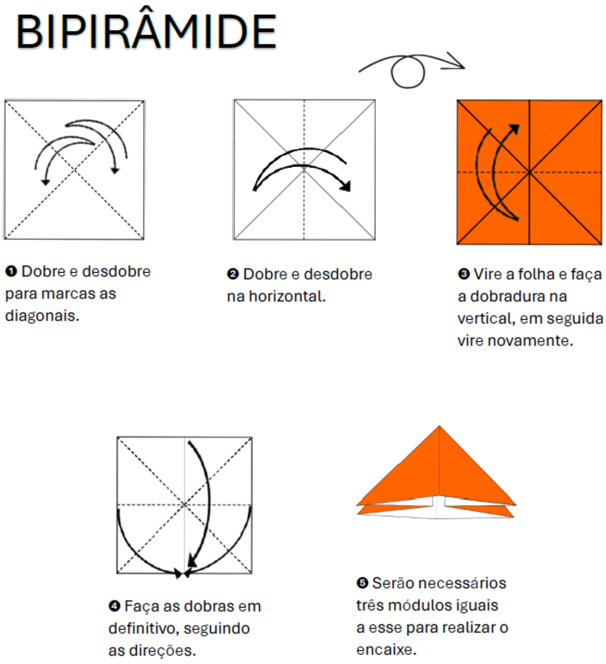


Fonte: Próprio autor

Os sólidos escolhidos para esta atividade foram: o tetraedro, a bipirâmide triangular (hexaedro) e o octaedro. Embora a bipirâmide não seja um sólido comumente estudado e raramente apareça nas bibliografias, sua facilidade de construção e a simplicidade de sua composição justificam sua inclusão entre os sólidos geométricos selecionados.

Para essa atividade, é ideal que a turma seja dividida em grupo, pois como os poliedros são feitos com base modular, pode ser que seja um pouco cansativo para apenas um aluno construir todos e ainda responder ao questionário após as construções.

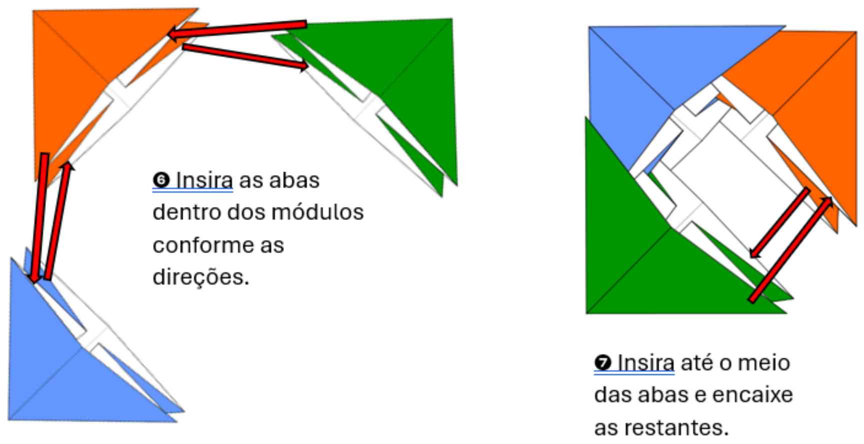
FIGURA 55 - Primeira parte do manual da bipirâmide



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001).

Conforme a primeira parte do manual mostra, serão necessários três papéis para formar a bipirâmide, esse trabalho pode ser dividido entre o grupo. É interessante que os alunos variem as cores para uma visualização melhor após a conclusão, mas fica a cargo do aluno decidir. Esse módulo também pode ser usado para confeccionar o octaedro esquelético, mas não iremos explorá-lo neste trabalho.

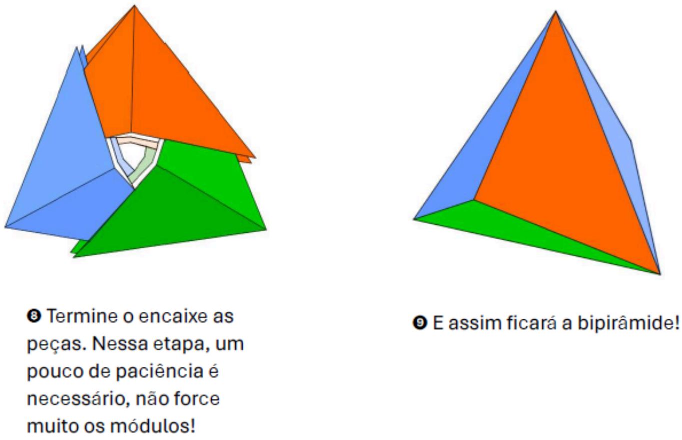
FIGURA 56 - Segunda parte do manual da bipirâmide



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

No encaixe dos módulos, apesar de ser um único trabalho, pode ser necessário a ajuda do grupo para encaixar as três peças conforme o diagrama. De acordo com o manual produzido por Kawamura (2001) e indicado pelas setas em vermelho, o encaixe das abas é intercalado, por exemplo, na figura 56, note que no momento de encaixar o módulo laranja com o verde, uma aba do laranja encaixa no verde e uma aba do verde encaixa no laranja. Essa descrição é muito minuciosa e deve ser destacada pelo professor, porém, caso o aluno encaixe, por exemplo, as duas laranjas dentro da verde ou ao contrário, ainda assim teremos como resultado um bipirâmide, mudando apenas o esquema de cor do produto final.

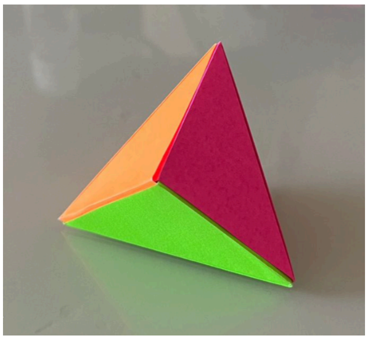
FIGURA 57 - Terceira parte do manual da bipirâmide



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

Após finalizado, o modelo ficará parecido com o da figura 58. No geral, o sólido fica firme se não for muito tocado e manipulado com força, caso o professor opte por fazer um trabalho para ser exibido e apresentado pelos alunos, por exemplo, os modelos podem ser reforçados com algum tipo de cola ou fita.

FIGURA 58 - Bipirâmide pronta

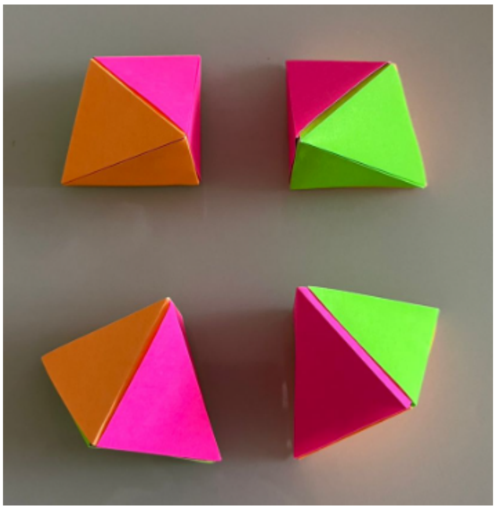


Fonte: Próprio autor

Após a primeira construção, ainda não faremos um questionário sobre, esse só irá aparecer após as três construções prontas.

Uma possibilidade de explorar melhor a bipirâmide seria a composição de bipirâmides, unindo um total de quatro modelos iguais ao da figura 59, podemos formar um poliedro com 13 faces ou tridecágono.

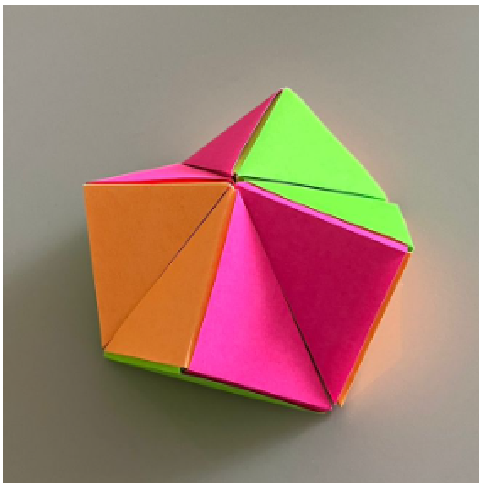
FIGURA 59 - As quatro bipirâmides



Fonte: Próprio autor

Usando algum tipo de cola para manter os sólidos unidos, obteremos o poliedro da figura 60. E daria para ir além, usando oito bipirâmides poderíamos formar um sólido com 24 faces, combinando dois sólidos iguais ao da figura 60.

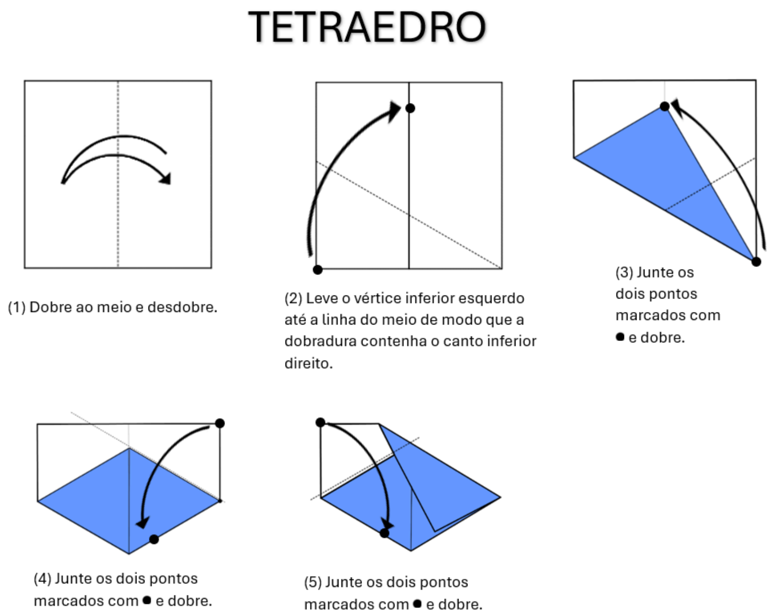
FIGURA 60 - O tridecágono



Fonte: Próprio autor

A próxima a ser feita pelos alunos é o tetraedro, que também é feito com origami modular, e parte do seu módulo também servirá para a construção do octaedro.

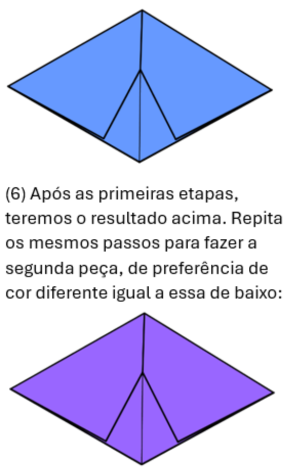
FIGURA 61 - Primeira parte do manual do tetraedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

Espera-se que o tetraedro seja o modelo mais simples de ser montado, embora o manual pareça mais extenso, a prática de montagem não é tão complexa.

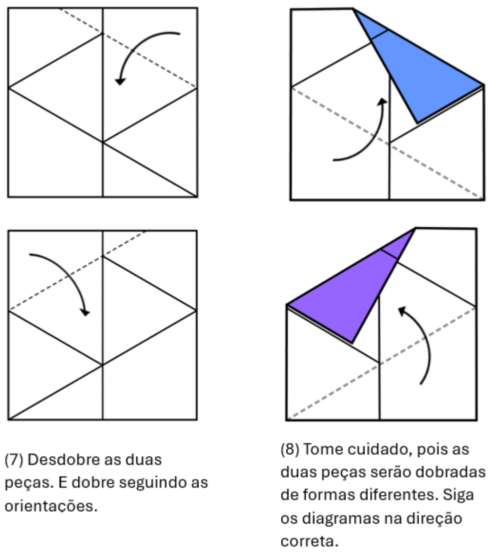
FIGURA 62 - Segunda parte do manual do tetraedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

O módulo que foi construído na figura 62 será usado de base também para o octaedro, portanto, o manual da próxima construção pode ser resumido, começando desse ponto. Além disso, usando apenas um módulo desse é possível construir um tetraedro, porém nessa construção ele fica sem a base. Outras construções são possíveis além desse mesmo módulo como por exemplo: triângulo equilátero, hexágono e o icosaedro.

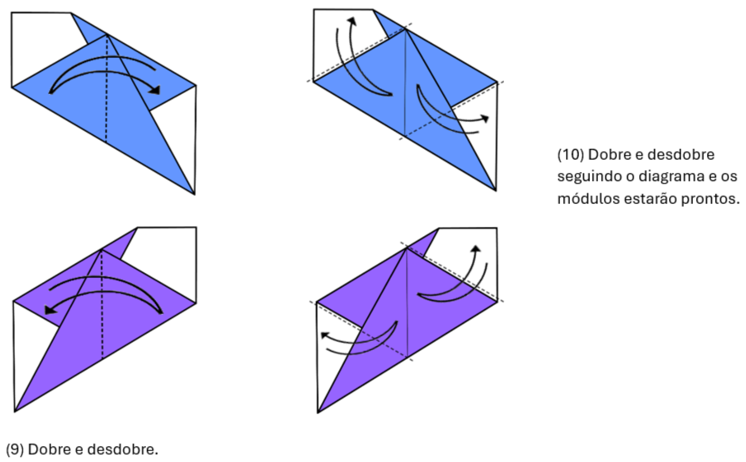
FIGURA 63 - Terceira parte do manual do tetraedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

Assim como na bipirâmide, a construção será feita em grupos, no caso do tetraedro, como são necessárias apenas duas folhas, se o grupo tiver então, por exemplo, quatro integrantes, pode se considerar que eles realizem a dobradura de dois modelos de tetraedros.

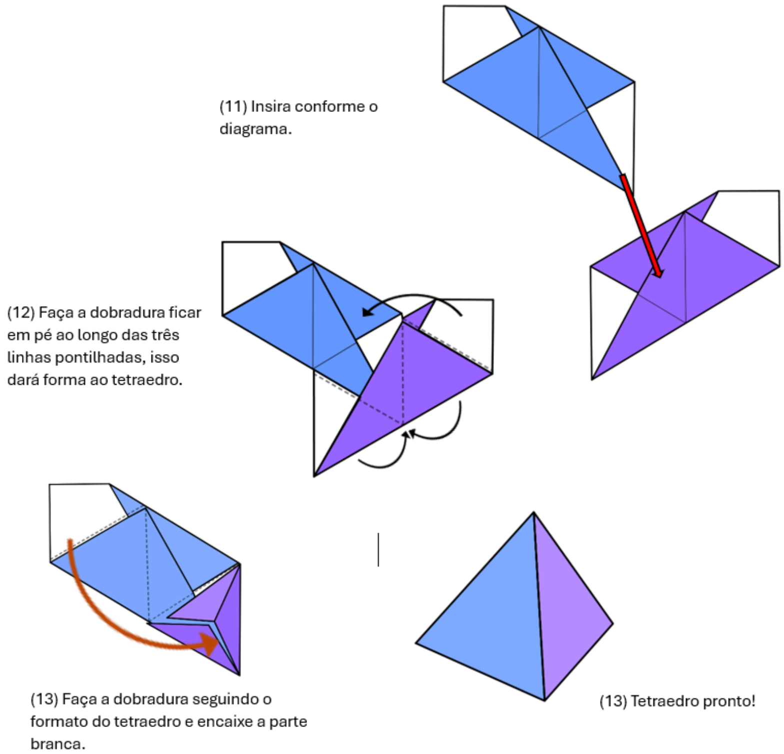
FIGURA 64 - Quarta parte do manual do tetraedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

Assim como foi com o cubo e a bipirâmide, essas construções ficam visualmente mais agradáveis quando realizadas com cores diferentes, o que pode ajudar inclusive no processo de identificação das faces.

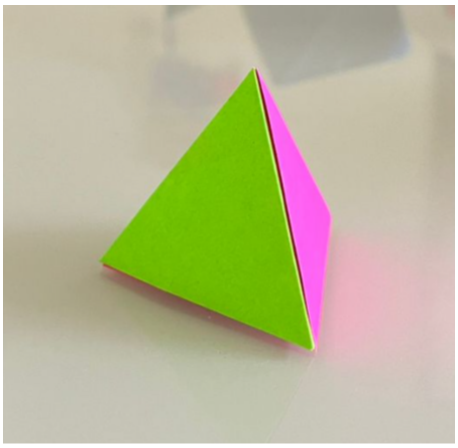
FIGURA 65 - Quinta parte do manual do tetraedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001).

Após terminado, os alunos devem conseguir algo parecido com o sólido da figura 66. Esse tipo de construção pode ser feita com papel maiores, tipo 20 cm x 20 cm, já o da bipirâmide, quanto maior o papel e menor a gramatura, o encaixe final pode ser um tanto trabalhoso de realizar, pois a folha acaba dobrando com mais facilidade no atrito entre os papéis.

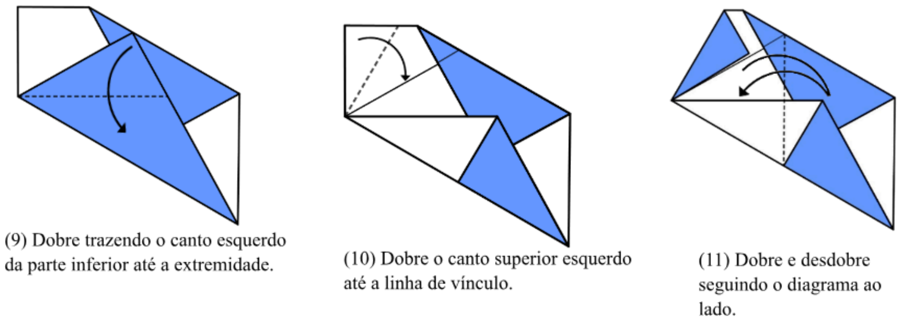
FIGURA 66 - O tetraedro pronto



Fonte: Próprio autor

Para a próxima construção, partiremos dos módulos que foram realizados conforme a figura 67, o manual completo do octaedro pode ser encontrado no apêndice.

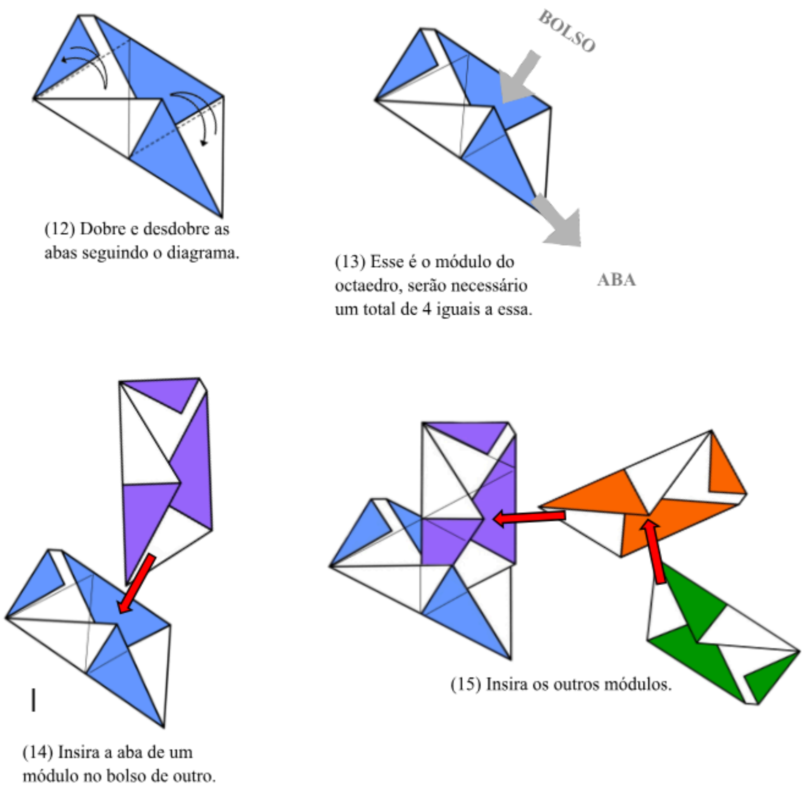
FIGURA 67 - Passos 9 a 11 do octaedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

A partir dessa parte do módulo, são feitas dobraduras diferentes da do tetraedro. Dependendo de como o professor quer adaptar essa aula, ele pode explorar mais as dobraduras que ocorrem aqui, pois nessa parte irão surgir alguns polígonos que não surgiram nas outras duas.

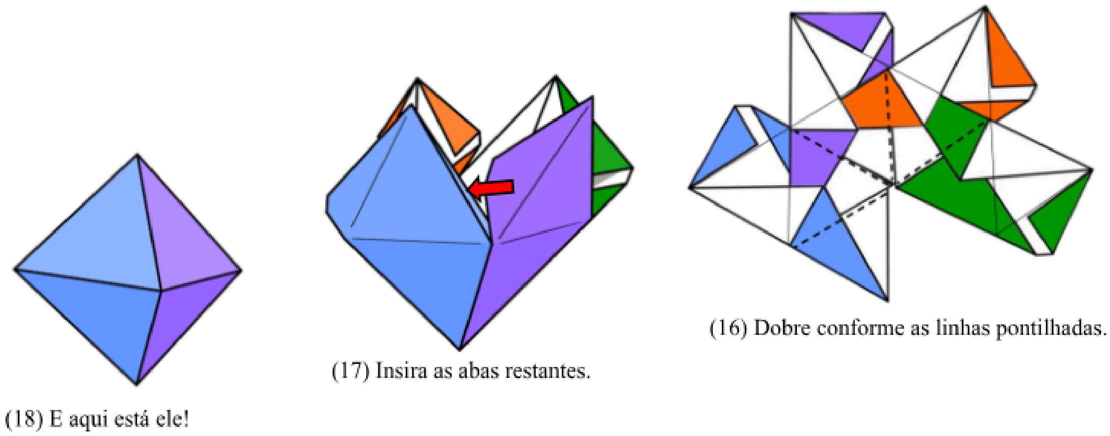
FIGURA 68 - Passos 12 ao 15 do manual do octaedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001).

Os encaixes são parecidos com o do tetraedro, com uma diferença apenas no módulo utilizado ao final. Dependendo do planejamento do professor, ele pode deixar que os alunos tentem evoluir ao tetraedro sem dar o passo 15 que está na figura 68, por exemplo.

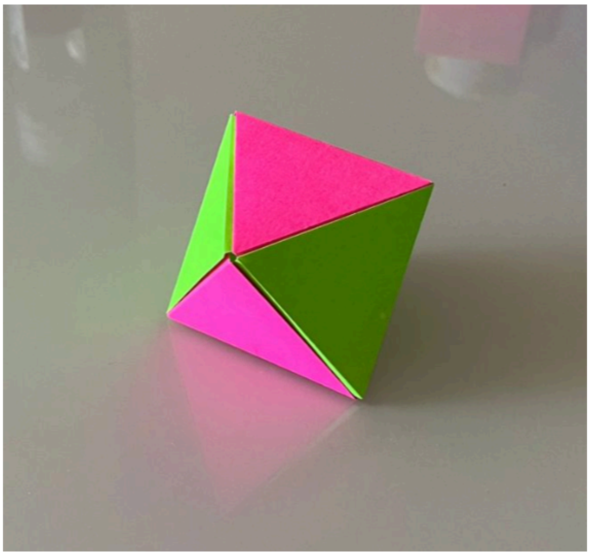
FIGURA 69 - Parte final do manual do octaedro



Fonte: Adaptado e traduzido de Kawamura (2001)

Após finalizado, os alunos terão algo parecido com o modelo da figura 70.

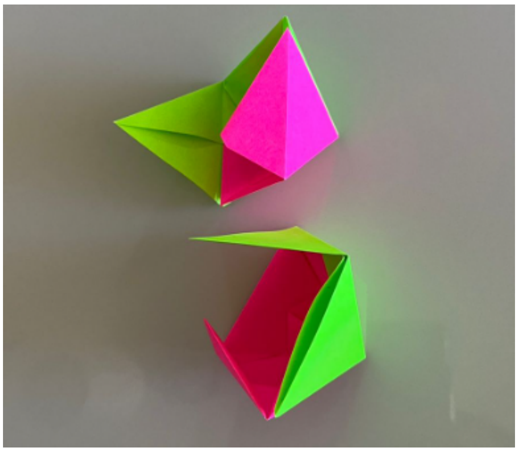
FIGURA 70 - O octaedro pronto



Fonte: Próprio autor

Essa dobradura é menos firme, em comparação com as anteriores, pode ser que seja interessante reforçá-lo com alguma fita para que ele não fique desmanchando durante a manipulação. Uma construção alternativa é repetir o passo 14 duas vezes, com dois módulos diferentes separados. Isso iria criar a parte superior e a parte interior do octaedro, e o encaixe poderia ser realizado dessa forma também, conforme mostrado na figura 71.

FIGURA 71 - O octaedro separado



Fonte: Próprio autor

Parte 2: Questionário sobre as dobraduras realizadas

O questionário terá apenas três questões, cada uma em um nível de Van Hiele. Apesar do trabalho ter sido feito em grupo até o momento, é preferível que, nessa parte, eles o façam de forma individual.

FIGURA 72 - Primeira pergunta da atividade 3

Questionário sobre os poliedros

1) O tetraedro e a bipirâmide são o mesmo sólido, mas em tamanhos diferentes?

____

Fonte: Próprio autor

A primeira pergunta se encontraria dentro do nível 0 de Van Hiele, pois nela o aluno apenas tem que comparar visualmente os sólidos.

FIGURA 73 - Segunda pergunta da atividade 3

2) Preencha a tabela a seguir com a quantidade de vértice, face e aresta de cada figura:

Nome do poliedro	Vértices	Faces	Arestas
1 -			
2 -			
3 -			

Fonte: Próprio autor

Já a segunda pergunta se encontra no nível 2 de Van Hiele, pois aqui o aluno não está apenas reconhecendo as formas, mas está analisando as características individuais de cada poliedro. Embora os alunos consigam identificar as propriedades, eles ainda não relacionam essas características umas às outras de forma dedutiva. Eles estão mais focados em contar e listar, como é exigido nesta questão.

FIGURA 74 - Terceira pergunta da atividade 3

3) Leonhard Euler é um dos grandes matemáticos da história e, certamente, o mais prolífico de todos os tempos. Seus trabalhos contêm inúmeras contribuições fundamentais a diversas áreas da matemática (da teoria dos números até a probabilidade), da física (acústica, ótica), da astronomia (do movimento planetas e cometas até a geofísica e o estudo das marés), da mecânica (da teoria dos corpos rígidos à ciência naval), da lógica, da filosofia e até da música.

Euler, o matemático mais prolífico da história.
Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 ago. 2024.

Uma das suas contribuições é a fórmula de Euler, onde ele afirma que para qualquer poliedro convexo, o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) obedece à seguinte equação:

$$V - A + F = 2$$

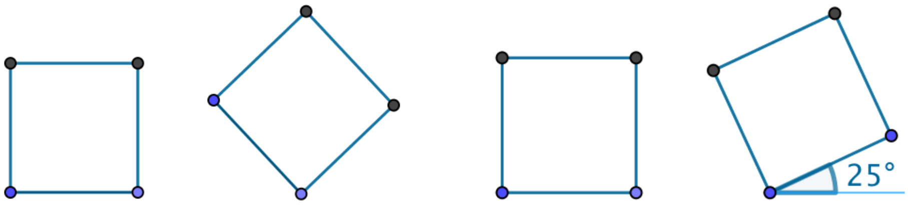
Usando os poliedro que construímos em sala e os dados coletados na tabela da questão anterior, verifique se a fórmula de Euler funciona corretamente para os três sólidos.

Fonte: Próprio autor

Já na terceira pergunta, além de trabalhar outra habilidade fora de geometria, os alunos terão uma questão que estaria no nível 3 da teoria de Van Hiele pois, nessa parte, eles começam a compreender como as propriedades geométricas estão inter-relacionadas. Eles não apenas reconhecem e identificam as propriedades das figuras, mas também fazem conexões entre essas propriedades e utilizam deduções para verificar relações, ou seja, os alunos conseguem usar teoremas ou fórmulas para justificar suas respostas.

Na mesma linha de Origametria, observando as figuras geométricas intermediárias no passo o passo da construção do origami, é possível iniciar uma atividade com a folha quadrada, posicionando de forma distinta, ao reconhecer e construir figuras obtidas por simetria de translação, rotação e reflexão, (EF07MA21), usando o origami ao invés somente instrumentos de instrumentos de desenho e software (Nível 2- abstração), ver Figura 75.

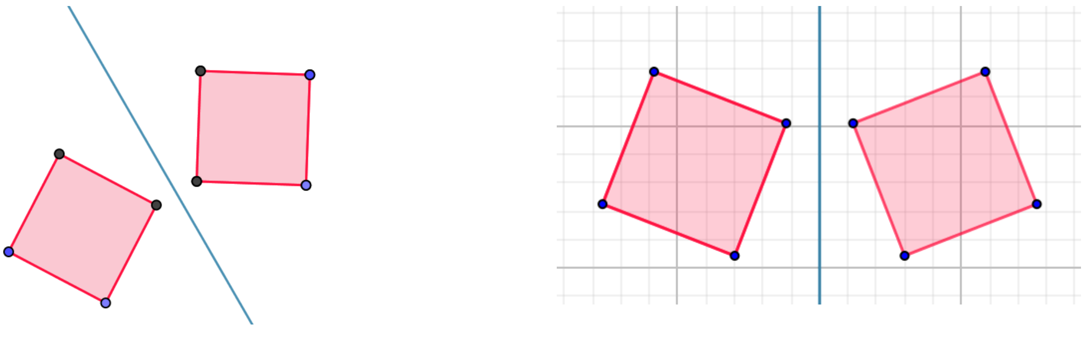
FIGURA 75 - Outras ideias (parte 1)



Fonte: Próprio autor.

Usar uma ferramenta auxiliar, EF07MA20, como uma malha quadriculada, figura 76 abaixo, ao reconhecer e representar o simétrico de figuras em relação aos eixos e a origem e, transportar para o plano cartesiano (EF07MA20), também no nível de abstração.

FIGURA 76 - Outras ideias (parte 2)

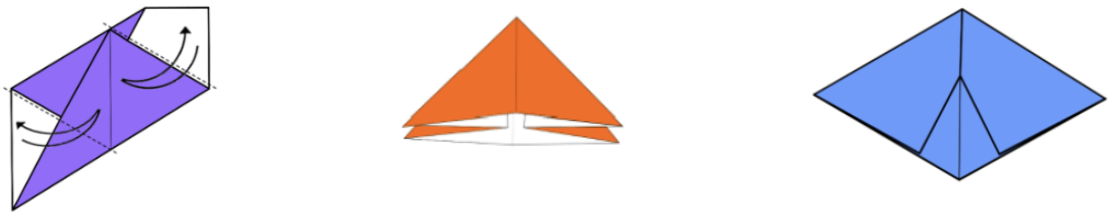


Fonte: Próprio autor.

Em todas as construções no Origami, pode se usar a sobreposição para reconhecer tanto a congruência de ângulos (EF05MA18), como a congruência de triângulos para avançar a dedução formal, nível 3, como na habilidade EF08MA14 de demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Ao observar a figura 77, virando esses papéis, uma sugestão de atividade é observar o número de lados desse polígonos, classificando-os em tipos de polígonos e se são regulares ou não, por exemplo, o primeiro é um pentágono e não é regular. Pode incluir a figura 32, a raposa com a face virada para baixo e construir atividades com polígonos não convexos.

FIGURA 77 - Outras ideias (parte 3)

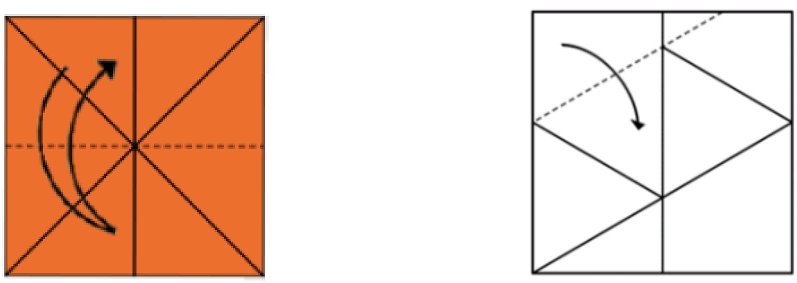


Fonte: Próprio autor.

Já na figura abaixo, ao desfazer as dobras e tracejar os vincos, pode-se classificar os triângulos obtido pelas dobras/vincos em relação aos lados: isósceles, equilátero, existe triângulo escaleno? Quantos triângulos são possíveis de obter? É possível encontrar um trapézio? Quantos trapézios?

Além disso, na figura da direita pode-se explorar a planificação de um tetraedro, com a pergunta: Com o trapézio obtido por três triângulos equiláteros, é possível obter um tetraedro? Se sim, justifique. Se não, o que falta? Justifique.

FIGURA 78 - Outras ideias (parte 4)



Fonte: Próprio autor.

Por fim, pode-se explorar os conceitos de ponto médio, mediatriz e bissetriz, nas construções, como indicados nas habilidades EF08MA15 e EF08MA17, do 8º ano, nível 2. Por exemplo, na figura 14, ao dobrar a folha de tal maneira que B, coincida com B 'e F com

F', tal que F' e B' sejam pontos dos segmentos EB e HI, respectivamente, como abordar o uso do axioma 6, de Huzita-Hatori?

Não foi possível aplicar em sala de aula o conjunto de atividades apresentado nesta dissertação. Ao ser testada em turmas de anos distintos, pode se verificar os ajustes necessários e fazer uma análise comparativa com o programa de Origametria.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado uma proposta para o uso do origami como ferramenta pedagógica no ensino da geometria, fundamentada na Teoria de Van Hiele e alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A sequência didática sugerida foi desenvolvida com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos do Ensino Fundamental, tornando a aprendizagem concreta e envolvente por meio de atividades práticas de dobraduras.

Embora as atividades propostas não tenham sido aplicadas no decorrer desta pesquisa, a sequência didática desenvolvida está fundamentada em autores que reconhecidamente contribuem para o campo da educação matemática. Esperamos que as sugestões aqui apresentadas possam servir de inspiração para educadores que desejam incorporar o origami em suas práticas pedagógicas. As metodologias propostas têm o potencial de auxiliar a transição dos alunos entre diferentes níveis de abstração geométrica, além de promover uma maior interação com os conceitos matemáticos de forma lúdica e significativa.

Por fim, reconhece-se que o uso do origami no ensino da geometria oferece um campo vasto de possibilidades a serem exploradas. Estudos futuros podem expandir as aplicações dessa técnica, integrando-a com outras áreas da geometria e explorando novas formas de contribuir com o aprendizado dos alunos. Também pode-se explorar o uso do origami para a unidade temática de Geometria no ensino médio, bem como a unidade temática de Grandezas e Medidas. Assim, espera-se que este trabalho contribua para a diversificação das práticas pedagógicas em geometria, que podem dar mais sentido às construções geométricas e ao estudo da geometria.

Como trabalhos futuros, pretende-se aplicar as atividades desenvolvidas, em especial a atividade 3, substituindo a abordagem atual que envolve corte e colagem por dobraduras de origami, de forma a explorar as vantagens do processo de construção manual para o ensino da geometria. Além disso, serão elaboradas novas atividades que abordem habilidades específicas dos 6º e 7º anos, visando ampliar o repertório de práticas pedagógicas e melhor atender às demandas dos diferentes níveis de desenvolvimento dos alunos.

REFERÊNCIAS

BELLOS, A. **Alex no país dos números.** 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami.** São Carlos: Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, 2009. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf.

CROWLEY, M. L. **The Van Hiele model of the development of geometric thought**. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). **Learning and teaching geometry, K-12**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1987. p. 1-16. Yearbook.

FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. **An investigation of the Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.** New York: Brooklyn College, CUNY School of Education, 1985.

FUYS, D. et al. **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.** 1984. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED287697.pdf. Acesso em: 30 ago. 2024.

GOLAN, M.; JACKSON, P.. **Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami. In: LANG, Robert J. (Ed.). Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education.** Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. p. 459-469.

GOLAN, M. **Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In: IVERSON-WANG, Patsy; LANG, Robert J.; YIM, Mark (Eds.). Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education.** Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. p. 151-164.

GOLAN, M & OBERMAN, J. **The Kindergarten Origametria Program.** In: MIURA, K., KAWASAKIM, T. & IVERSON-WANG, P. (Eds.). **Origami 6: Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education.** American Mathematical Society, pp. 669-678, 2015.

HOFFER, A. **Van Hiele-Based Research.** In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. Academic Press, USA. São Paulo: Ática, 1983.

KALEFF, A.M.M.R, Henriques, A. S., Rei, D.M., Figueiredo, L.G., **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele**, Bolema, Rio Claro. n. 10, pp. 21-30, 1994.

KAWAMURA, M. **Polyhedron origami for beginners.** Tokyo: Nihon Vogue, 2001.

LANG. R. J. Huzita-Justin Axioms. Disponível em: https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/. Acesso em: 3 ago. 2024.

LANG, R.J. **"Origami and Geometric Constructions."** 2015. Disponível em: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf. Acesso em: 03 ago. 2024.

LUCERO, J. C. **O problema deliano.** Revista do Professor de Matemática, n. 62, 2005. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/62/6.html. Acesso em: 20 jul. 2024.

MATTOS, F. R. P.; YOKOYAMA, L. A. **Construções geométricas por dobraduras origami.** Anais do VIII ENEM – Minicurso, GT 6 - Educação Matemática: Novas Tecnologias e Ensino a Distância, 2004. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/06/MC82151601749.pdf. Acesso em 08/09/2024.

MESSER, P. **Crux Mathematicorum,** v. 12, n. 10, p. 284-285, 1986. Disponível em: https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n10_Dec.pdf. Acesso em: 22 jul. 2024.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: História de uma Geometria Axiomática.** 2008, Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

MONTROLL, J. **Origami Polyhedra Design**, Massachussets, USA: A.K.Peters, 2011.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria.** In: Boletim GEPEM/UFRJ, n. 27, p. 93-99, Rio de Janeiro, 1990.

NASSER, L; TINOCO, L. **Curso básico de geometria: enfoque didático.** 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2011. Módulo I.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

PASSOS, A. Q. **Educação Matemática Realística e GEPEMA: Algumas Aproximações.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PASSOS, A. Q; BURIASCO, R.L.C. de; SOARES, M.T.C. **Ideias de Van Hiele e Educação Matemática Realística: algumas aproximações.** Bolema, v. 33, n. 65, 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/xRVzV6XspdxbpLwj5sGVKJD/?lang=pt.

PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrias do plano. La evolución del nível de razonamiento.** 1993. Tese (Doctoral en Didàctica de la Matemática) – Universitat de Valência, Valência, 1993.

RABINOWITZ, S. “Solution of Problem 1054", **Crux Mathematicorum**, Digital Equipment Corp., Nashua, New Hampshire, volume 12, nº 10, 1986, pp. 284-285.

USISKIN, Z. **The Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.** Chicago: University of Chicago, 1982.

USISKIN, Z.; SENK, S. **Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. Journal for Research in Mathematics Education**, v. 21, n. 3, p. 242, maio 1990.

VAN HIELE-GELDOF, D. **The didactics of geometry in the lowest class of secondary school.** 1984. 206 p. Tesis (Doctoral in Mathematics and Natural Sciences) - Universidad de Utrecht, Utrecht. Traducción al inglés en Fuys, 1957.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)**. 1957. 151 f. Tese (Doctoral in Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad de Utrecht, Utrecht. Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991. Não publicada.

VAN HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education.** New York: Academic Press, 1986.

APÊNDICE - RECURSO EDUCACIONAL

PROFMAT

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

uff

Recurso Educacional:
Ensinando geometria a partir das instruções de Origami

MARCELO DA SILVA SOUSA
ORIENTADORA : DIRCE UESU PESCO

Niterói - 2024

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse recurso educacional é fruto da dissertação de mestrado intitulada *"GEOMETRIA COM DOBRADURAS: EXPLORANDO A TEORIA DE VAN HIELE COM ORIGAMI"* e consiste em uma proposta que se inspira nos moldes do programa *Origametria (https://origametria.com/)*, desenvolvido pelo Centro de Origami de Israel, que utiliza a arte do origami para ensinar geometria nas escolas. Ele foi aprovado pelo Ministério da Educação de Israel e está implementado em diversas escolas do país desde 2017. Um dos aspectos desta abordagem é que, durante o processo de dobragem de algumas atividades, os alunos não serão informados sobre o produto final, o que permitirá que eles concentrem sua atenção nas formas geométricas em si, em vez de associarem as partes dobradas a elementos concretos, como animais ou objetos.

Antes da aplicação das atividades, é ideal que seja realizada uma avaliação diagnóstica para identificar o nível de compreensão prévio dos alunos de acordo com os níveis de Van Hiele. Essa avaliação ajudará a ajustar as atividades subsequentes de acordo com as necessidades específicas dos alunos. Nesse recurso educacional, utilizaremos uma avaliação diagnóstica adaptada de Nasser (2011) e Ursinski (1982).

A proposta aqui apresentada não substitui as atividades regulares da aula de matemática, mas sim as complementam, oferecendo um recurso extra para que os alunos consolidem seus conhecimentos de forma divertida e engajadora. É importante ressaltar que os conteúdos devem ser trabalhados em sala de aula antes da aplicação desta atividade.

2. PROPOSTAS

Avaliação Diagnóstica: O teste de Van Hiele

O teste presente no apêndice foi adaptado dos testes de Usiskin (1982) e Nasser (2011) para servir como uma ferramenta diagnóstica eficaz no início do ano letivo, permitindo que o professor determine o nível de compreensão geométrica dos alunos.

Como os níveis de Van Hiele são estruturados de forma hierárquica, espera-se que um aluno que atinge o nível de abstração também tenha dominado os níveis anteriores. No entanto, isso nem sempre ocorre. Por exemplo, um aluno pode compreender as propriedades de certas figuras geométricas sem, no entanto, conseguir reconhecer todas as formas correspondentes. Isso sugere que o aluno pode ter lacunas na formação de seu pensamento geométrico. Geralmente, essas deficiências podem ser corrigidas ao longo de alguns meses com um curso de geometria bem planejado e executado.

Nasser (2011) afirma que um aluno é considerado como tendo alcançado determinado nível quando responde corretamente a pelo menos 60% das questões do teste correspondente. Ou seja, 3 em cada 5 questões propostas. Usiskin (1982) escolheu o critério de "3 de 5" para equilibrar os tipos de erro estatístico envolvidos, especialmente entre o erro do Tipo I (falso positivo) e do Tipo II (falso negativo). O critério "3 de 5" reduz a probabilidade de erro do Tipo II, ou seja, a chance de não identificar um aluno que realmente tem o nível de proficiência desejado. Ao definir que o aluno deve acertar 3 de 5 questões, ele aumenta a probabilidade de classificar corretamente os estudantes que realmente estão prontos para o próximo nível, mesmo que haja um risco um pouco maior de cometer um erro do Tipo I (classificar um aluno erroneamente).

Após identificar os níveis de compreensão dos alunos, o professor pode planejar a abordagem pedagógica mais adequada para a turma. É comum encontrar alunos em diferentes estágios de raciocínio geométrico dentro de uma mesma classe, e, dependendo do tamanho da turma, as atividades propostas aqui são um caminho para poder alencar essa heterogeneidade da turma, mas, mesmo assim, o ensino deve ser direcionado levando em consideração o nível de compreensão alcançado pela maioria dos alunos da turma.

Após um certo período de trabalho, o mesmo teste pode ser reaplicado, esse tempo não é pré-definido e varia de acordo com os alunos e turmas.

> O progresso de níveis não ocorre num período muito curto de tempo. É necessário o amadurecimento nas estratégias, objetos de estudo e linguagem características daquele nível. (NASSER, 2011)

Atividade 1 - Dobrando e Classificando Triângulos

Objetivo: Classificar os triângulos com base nas medidas dos seus lados ou nos ângulos internos.

Ano escolar: 6° ano do Ensino Fundamental

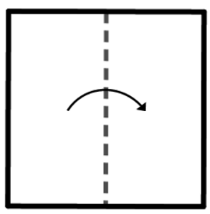
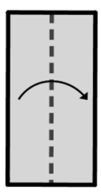
Habilidade: (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
Material necessário:
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami (15cm x 15 cm).
- Material impresso.
- Régua.

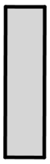
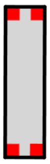
Os alunos irão fazer duas construções de papel: uma régua simples que eles irão utilizar para medir os lados e os ângulos de um cisne. Durante as construções, os alunos deverão responder às perguntas destinada a cada etapa, sendo que, na construção do cisne, o ideal é que o aluno não tenha conhecimento do que está sendo dobrado, para que ele possa focar nos elementos somente pensando na geometria nas dobras.

1° Parte: Construção da Régua

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 1: Diagramas, instruções e perguntas na parte 1 da atividade 1

Diagrama	Perguntas após essa etapa.
	Nível 0: Visualização 1) Quais polígonos podemos identificar?
	Nível 0: Visualização 2) Que ângulos podemos identificar na figura?

	Nível 0: Visualização 3) Desenhe todos os ângulos retos presentes nessa régua.
	Sem perguntas nessa parte. Mostre aos alunos como podem utilizar a régua.

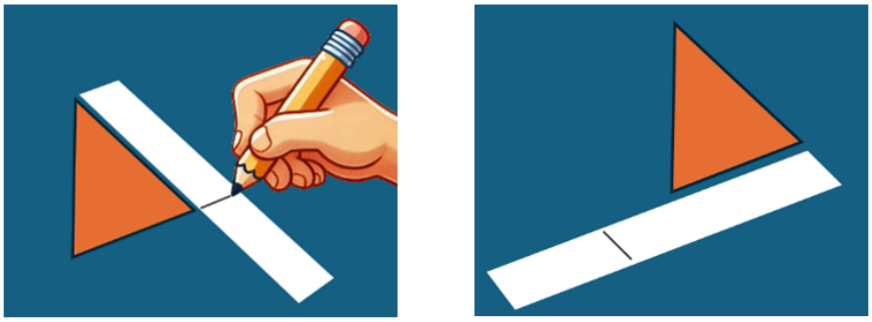
Fonte: Elaborado pelo autor.

Orientações ao professor:

A régua produzida pode ser utilizada para verificar se um triângulo possui lados iguais, basta fazer a marcação com um lápis ou caneta e comparar os lados, conforme a figura 1, onde se vê que o triângulo possui dois lados diferentes

.

Figura 1: Usando a régua para medir.



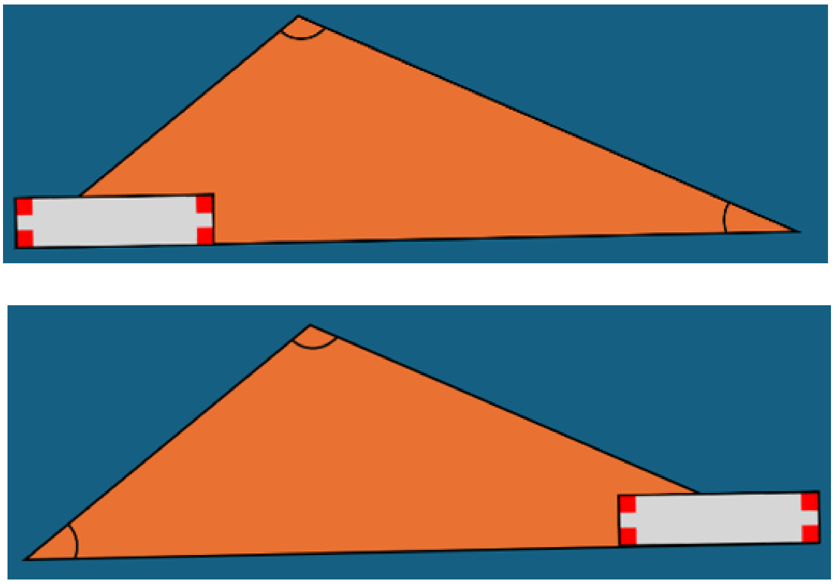
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, os alunos podem chegar a conclusão depois da medição, e com o valor aproximado, ao classificar um triângulo quanto ao tamanho dos lados, já que essas perguntas farão parte da próxima parte da atividade.

A régua também pode ser usada para determinar se algum ângulo é maior, menor ou igual a 90°, basta alinhá-lo ao ângulo tentando encaixá-lo.

Por exemplo, na figura 2, é notado que os ângulos são menores do que 90°.

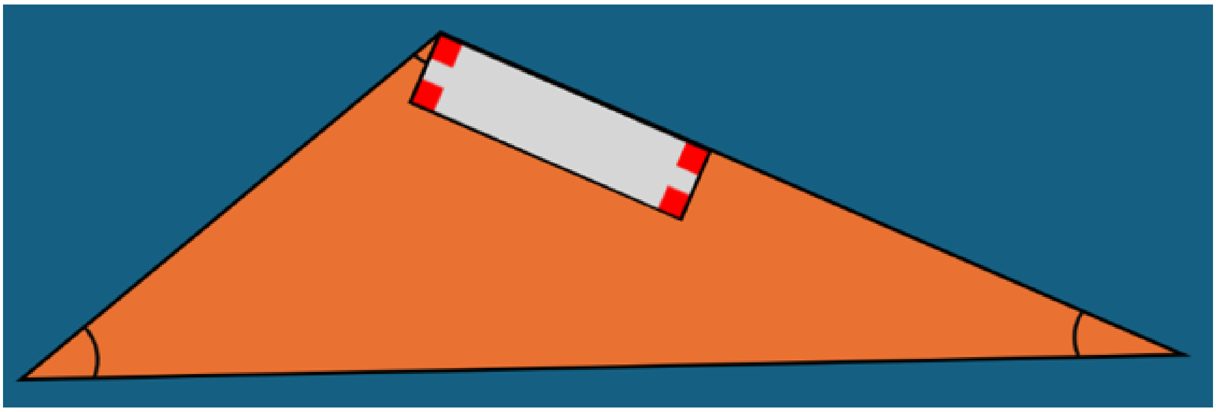
Figura 2: Usando a régua para medir ângulos agudos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso o ângulo seja obtuso, ele irá sobrar além dos 90° marcados em vermelho, conforme a figura 4, por exemplo.

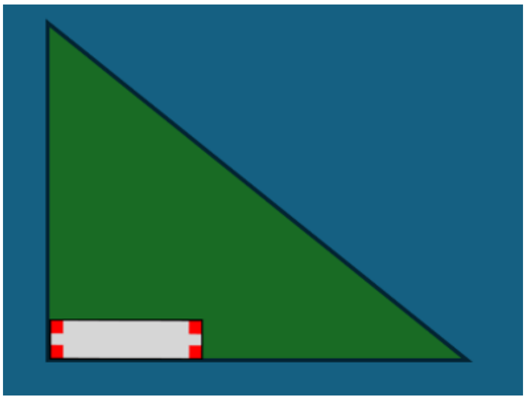
Figura 3: Usando a régua para medir ângulo obtuso.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso o ângulo seja reto, o ângulo da régua irá encaixar perfeitamente, conforme a figura 4, por exemplo.

Figura 4: Usando a régua para medir ângulo reto.



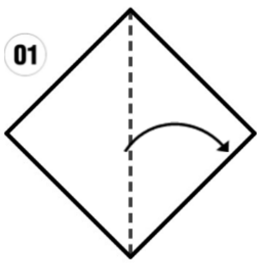
Fonte: Elaborado pelo autor.

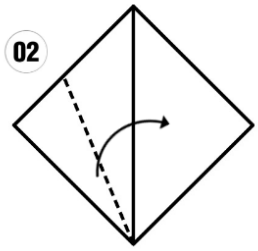
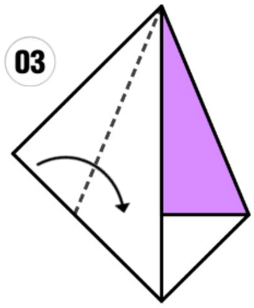
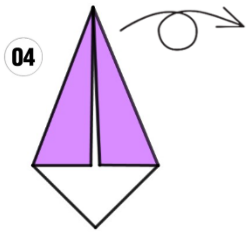
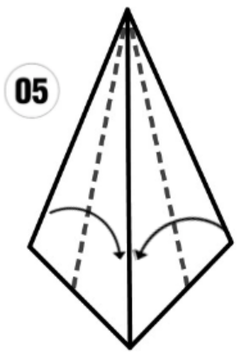
Assim como mencionado anteriormente, com essa medição, os alunos podem classificar os triângulos em relação aos ângulos, pois essas perguntas irão aparecer ao longo da próxima parte da atividade. Para treinar o uso dessa ferramenta, alguns exemplos podem ser apresentados para os alunos se familiarizarem com a régua produzida, incluindo uma atividade de incentivar aos alunos para classificar os ângulos de objetos presentes na sala de aula.

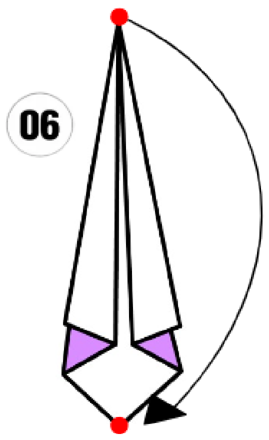
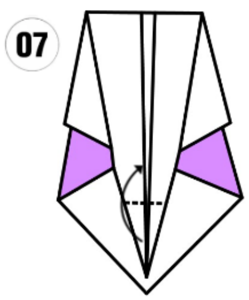
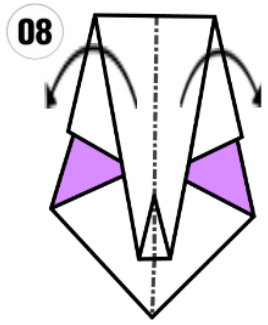
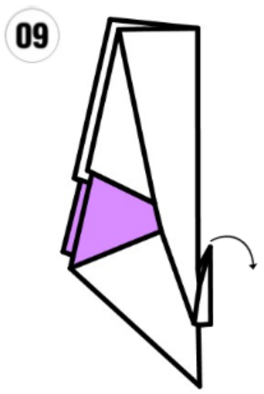
2° Parte: Construção do Cisne

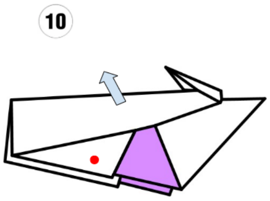
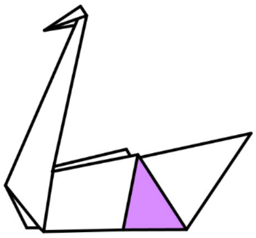
A dinâmica desta atividade será semelhante à da construção da régua, mas desta vez com um processo um pouco mais extenso. Durante o procedimento, ao responder questões sobre a igualdade dos lados de um triângulo, por exemplo, os alunos devem utilizar a régua construída na primeira parte, usando um lápis para fazer as marcações. Para classificar os triângulos encontrados em relação aos ângulos, os alunos também podem utilizar os cantos da régua construída.

Quadro 2: Diagramas, instruções e perguntas da parte 2

Diagrama	Pergunta após a etapa
	Nível 0: Visualização 1) Quais polígonos podemos encontrar? Nível 2: Análise 2) Qual é a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo?

	Sem perguntas após essa etapa.
	Nível 0: Visualização 3) Que tipos de ângulos podemos identificar? 4) Que tipos de triângulos podemos identificar?
	Nível 0: Visualização 5) Quantos triângulos retângulos estão presentes nessa parte? 6) Que tipos de polígonos podemos encontrar aqui?
	Nível 2: Análise 7) O quadrilátero formado possui pares de lados paralelos?

	Nível 0: Visualização 8) Quantos triângulos obtusângulos aparecem aqui? E quantos triângulos acutângulos?
	Nível 0: Visualização 9) Nessa etapa contém alguém triângulo isósceles? Quantos?
	Sem perguntas após essa etapa.
	Sem perguntas após essa etapa.

	Sem perguntas após essa etapa.
	Nível 0: Visualização 10) Quais tipos de triângulos podemos encontrar?

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, seguem-se as perguntas a serem realizadas e o manual do cisne.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 1

1) Que tipo de polígonos podemos identificar?

____

2) Que ângulos podemos identificar na figura?

____

3) Desenhe todos os ângulos retos presentes na régua que você produziu.

4) Quais polígonos podemos encontrar?

____

5) Qual é o resultado da soma dos ângulos internos em qualquer triângulo?

____

6) Que tipos de ângulos podemos identificar?

____

7) Que tipos de triângulos podemos identificar?

8) Quantos triângulos retângulos estão presentes nessa parte?

9) Que tipos de polígonos podemos encontrar aqui?

10) O quadrilátero formado possui pares de lados paralelos?

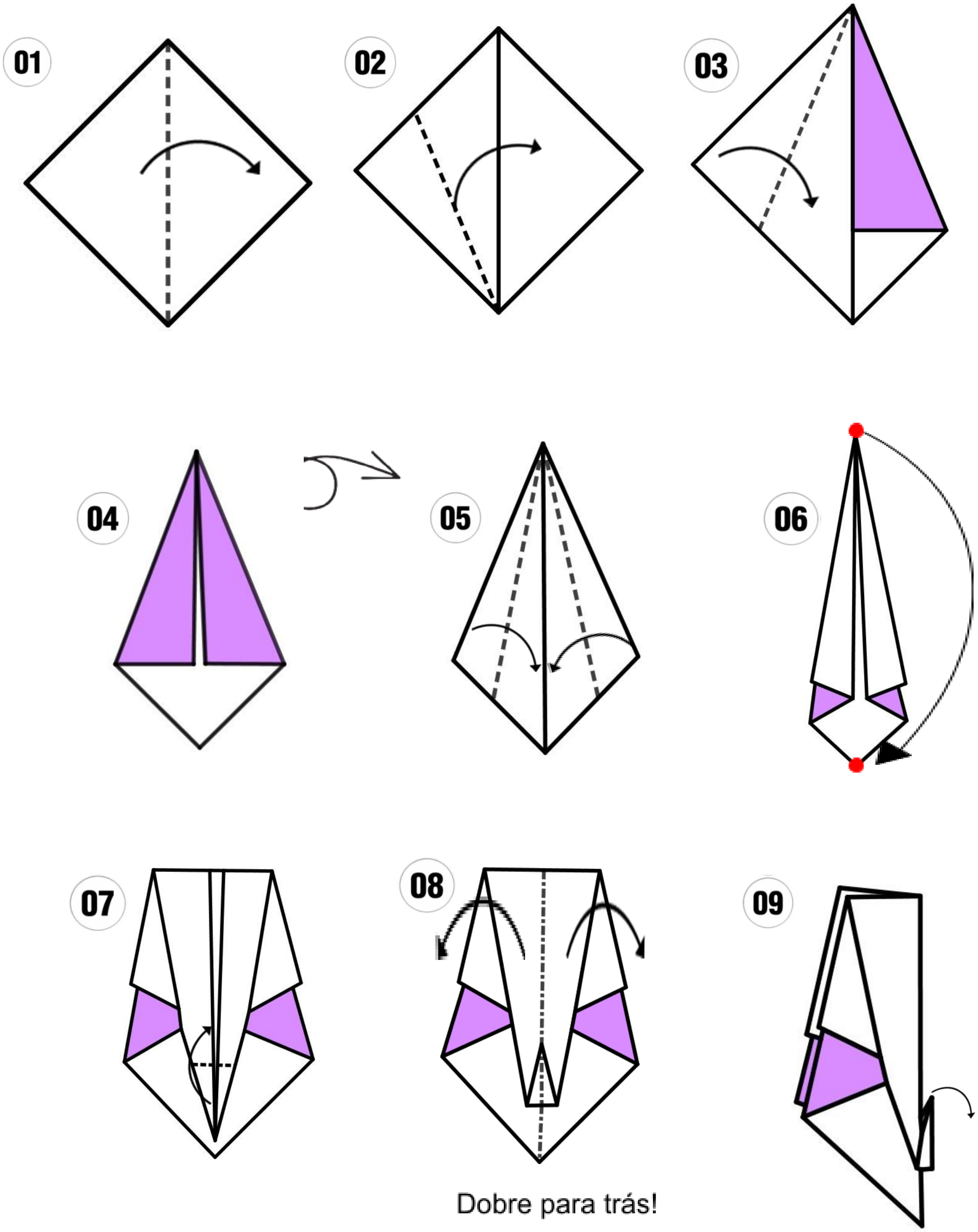
11) Quantos triângulos obtusângulos aparecem aqui? E quantos triângulos acutângulos?

11) Nessa etapa contém algum triângulo isósceles? Quantos?

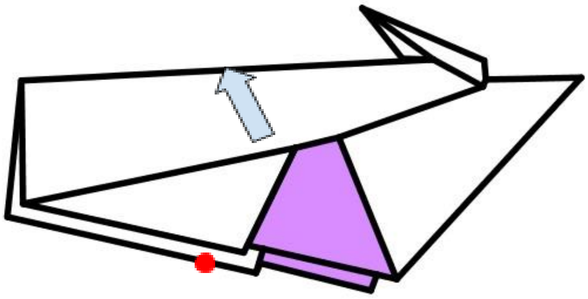
12) Nessa etapa contém algum triângulo isósceles? Quantos?

13) Quais tipos de triângulos podemos encontrar?

Manual do CISNE

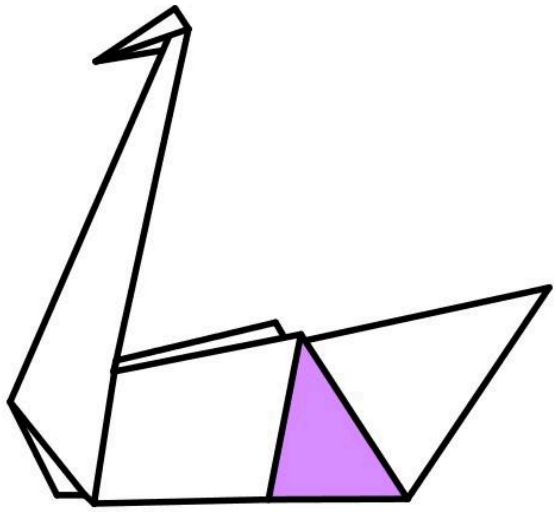


10



Segure o modelo no ponto vermelho e erga seguindo a seta.

11



Atividade 2 - Explorando proporções com origami

Objetivo: Classificar os triângulos e polígonos. Identificar as características que definem se uma figura representa uma ampliação ou redução de outra.

Habilidade: (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

Material necessário:

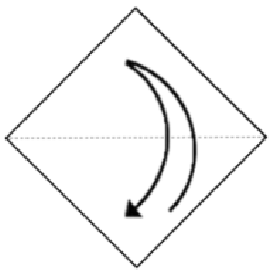
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami de dois tamanhos distintos: 10cm x 10cm e 15 cm x 15cm (os tamanhos ficam como sugestão).
- Material impresso.

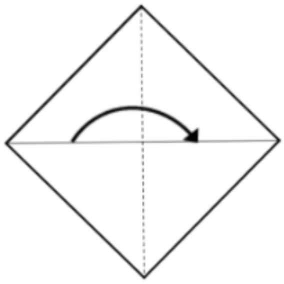
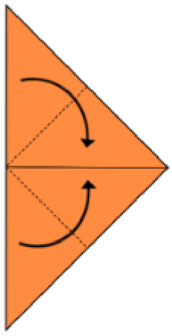
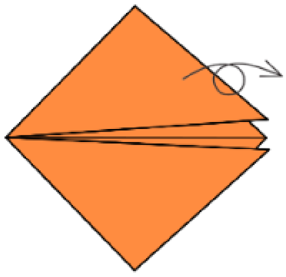
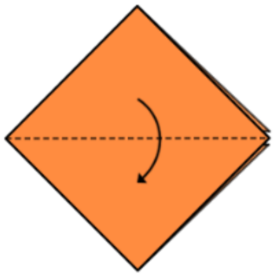
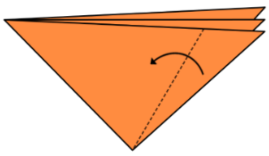
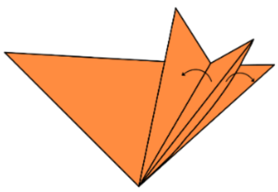
Seguindo a mesma lógica da atividade anterior, em um primeiro momento os alunos não saberão o que será construído e responderão as perguntas sobre os elementos geométricos. Em um segundo momento, os alunos irão fazer a mesma construção e realizar uma atividade sobre ampliação e redução de figuras. Essa atividade serve como complemento para a habilidade da BNCC citada acima.

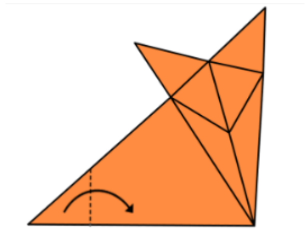
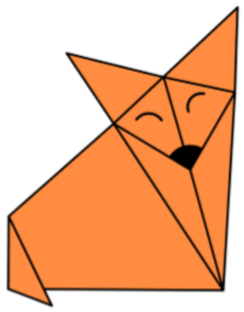
1° Parte: Construção da Raposa

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 3: Diagramas e perguntas na parte 1 da atividade 2

Diagrama	Perguntas após essa etapa
	Nível 1 - Análise 1) Quais são os tipos de triângulos formados pela extremidade da folha e a linha de vinco?

	**Sem perguntas após esta etapa.**
	Nível 1 - Análise 2) Os triângulos formados são retângulos? Nível 1 - Análise 3) Existe algum ângulo obtuso formado por alguma extremidade ou linha de vinco?
	Nível 0 - Visualização 4) A figura formada é um quadrado? Nível 2 - Ordenação 5) Se sim, o lado do quadrado do papel é quantas vezes maior que a desse quadrado?
	**Sem perguntas após esta etapa.**
	Nível 0 - Visualização 6) Quantos triângulos você consegue identificar no momento?
	**Sem perguntas após esta etapa.**

	**Sem perguntas após esta etapa.**
	**Sem perguntas após esta etapa.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

As perguntas também podem ser projetadas ou entregues em uma folha separada.

2° Parte: Proporções

Peça que os alunos executem a dobradura novamente, dessa vez usando um papel de tamanho diferente do utilizado na primeira construção.

Após finalizada a dobradura da segunda raposa, entregue a segunda parte da atividade para que os alunos possam responder. Para essa atividade, é necessário que os alunos possuam uma régua, uma alternativa também, pensando em ampliação e redução, é o uso de uma malha quadriculada para que os alunos possam fazer a comparação.

A seguir, seguem-se as perguntas a serem realizadas na parte 2 e o manual completo da raposa.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 2

Proporções na Raposa

1) Dê um nome para cada raposa, meça três partes das raposas e escreva aqui:

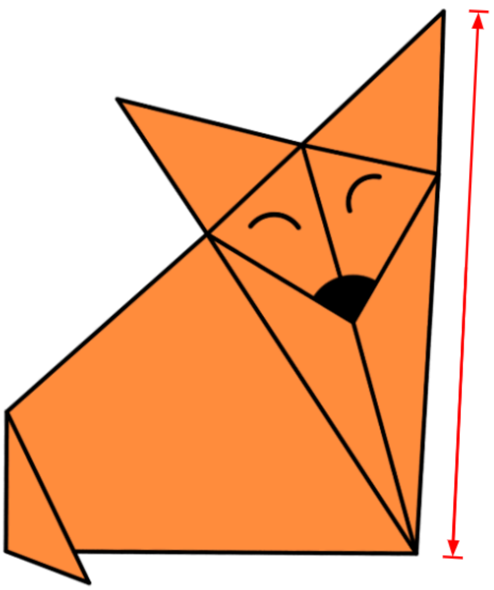
Raposa 1:	Raposa 2:
Exemplos: orelha, cabeça, etc.	

2) Quantos triângulos você consegue identificar em cada raposa? De quais tipos?

____

____

3) Agora vamos fazer uma medição específica, meça a altura da raposa que seria a extremidade da sua orelha até seus pés, como destacado em vermelho na figura abaixo.



Anote as medidas aqui:

Raposa 1	Raposa 2

Em seguida, responda as perguntas abaixo:

a) Essa medida poderia ser considerada a altura da raposa? Por quê?

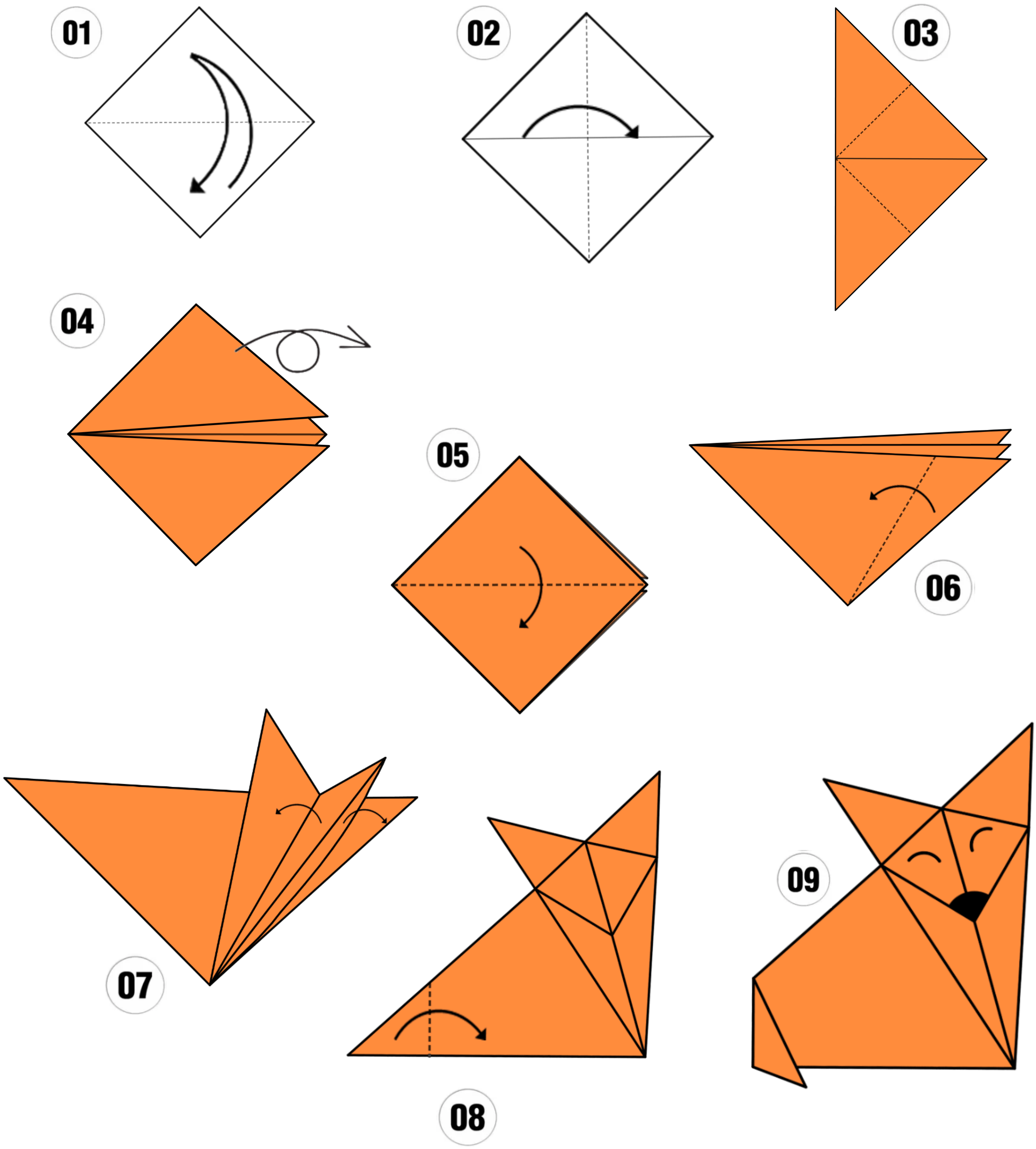
____

b) Qual é a razão entre a altura das duas raposas?

c) Se usarmos um papel quadrado medindo 50 cm x 50 cm, quanto mediria a altura da raposa?

d) Que tamanho deveria ser o papel para que a altura da raposa fosse igual a 20 cm?

Manual da RAPOSA



Atividade 3 - Proporções em três dimensões com origami

Para essa atividade, a dinâmica é a mesma das atividades anteriores. Dessa vez haverá uma transição clara entre as figuras de duas dimensões para os sólidos geométricos, portanto essa atividade pode ser usada como introdução para o ensino de alguma habilidades, como citado pela BNCC, por exemplo:

Figura 5: Habilidades da atividade 3.

(EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Fonte: BNCC.

Para a atividade sugerida, utilizaremos a habilidade pensando em turmas do 7° ano.

Objetivo: Compreender e aplicar os conceitos de volume e proporções por meio da construção de cubos de origami, explorando as relações entre as dimensões das figuras e o espaço ocupado.

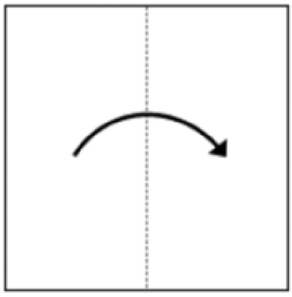
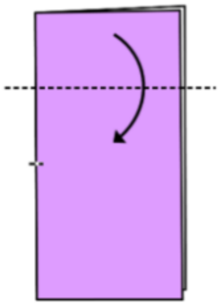
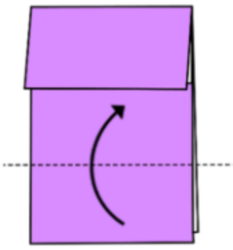
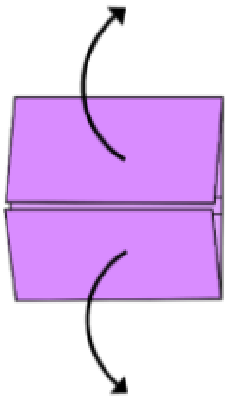
Habilidade: (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

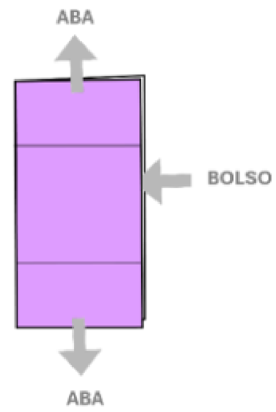
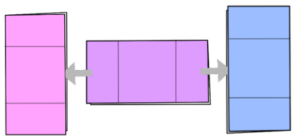
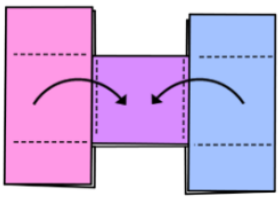
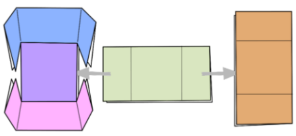
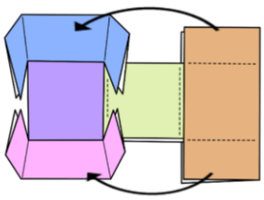
Material necessário:
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami de dois tamanhos distintos: 10cm x 10cm e 20 cm x 20cm (os tamanhos indicados são apenas sugestões, mas é preferível que as dimensões de um papel sejam o dobro da outra).
- Material impresso.

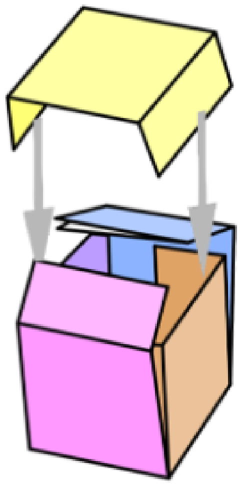
1° Parte: Construção do Cubo

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 4: Diagramas e perguntas na parte 1 da atividade 3

Diagrama	Perguntas após essa etapa
	Sem perguntas nesta etapa.
	Nível 0 - Visualização 1) Que formas geométricas podemos identificar nessa etapa?
	Nível 0 - Visualização 2) Que forma geométrica surgiu após essas três etapas? Nível 2 - Abstração 3) Que fração da folha original corresponde a essa figura formada?
	Sem perguntas nesta etapa.

	Nível 0 - Visualização 4) Que tipo de construção você acha que estamos fazendo?
	Nível 1 - Análise 5) Quanto ângulos retos você consegue localizar após essa etapa?
	Sem perguntas nesta etapa.
	Sem perguntas nesta etapa.
	Nível 1 - Análise 6) Você consegue agora dizer o que está sendo construído? Seu palpite anterior passou perto?

	Sem perguntas nesta etapa.

Fonte: Próprio autor.

2° Parte: Proporção

Assim como na atividade anterior da raposa, peça que os alunos executem a dobradura novamente, dessa vez usando um papel de tamanho diferente do utilizado na primeira construção. Para essa atividade, é necessário que os alunos possuam uma régua, uma alternativa também, pensando em ampliação e redução, é o uso de uma malha quadriculada para que os alunos possam fazer a comparação.

Após finalizada a dobradura da segunda raposa, entregue a segunda parte da atividade para que os alunos possam responder, as perguntas se encontram no apêndice.

Dessa vez, o objetivo da atividade é mostrar que ao dobrar a aresta do cubo, não faz diretamente com que seu volume dobre.

As perguntas e o manual completo do cubo estão a seguir.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 3

Proporções no Cubo

1) Meça as arestas dos cubos e calcule a área de uma das faces de cada um. Anote os resultados:

	CUBO 1	CUBO 2
Medida da aresta		
Medida da área		

2) Calcule a razão entre as arestas dos cubos 1 e 2.

3) Calcule o volume dos cubos.

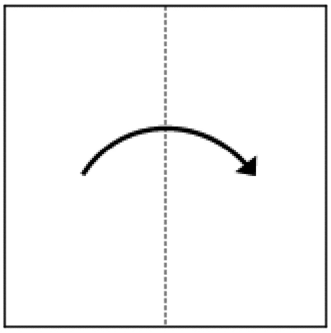
4) Calcule a razão entre os volumes dos cubos 1 e 2.

5) A razão encontrada na questão 5 é a mesma encontrada na questão 2? Justifique.

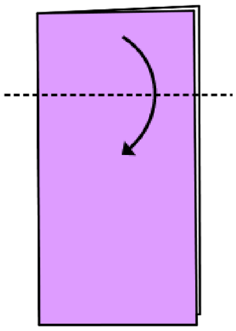
6) Desafio para a turma:

Quantos cubos podemos empilhar sem que a torre formada desabe?

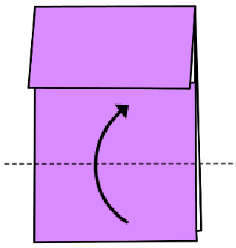
MANUAL DO CUBO



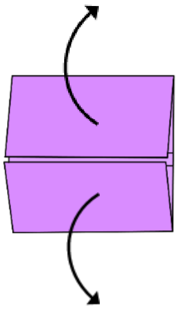
(1) Dobre na metade.



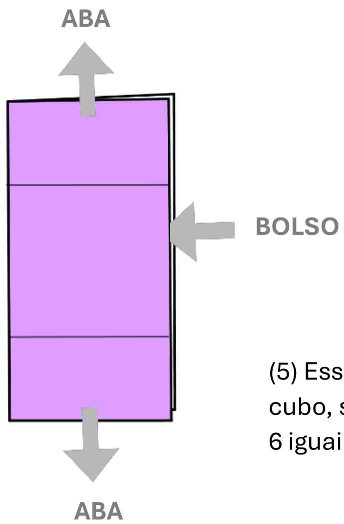
(2) Dobre em 1/4 da folha (metade da metade).



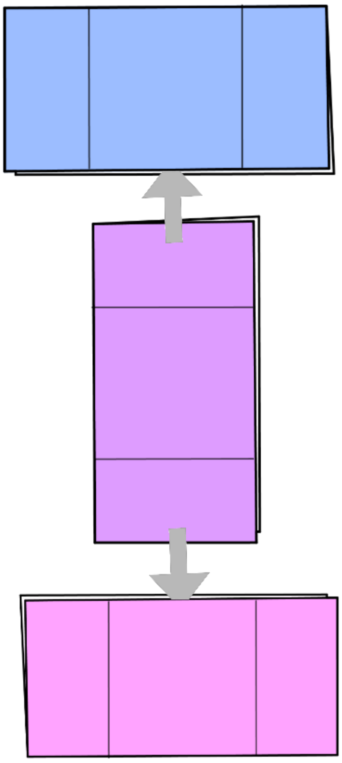
(3) Dobre em 1/4 da folha na outra extremidade, as pontas irão se encontrar no meio.



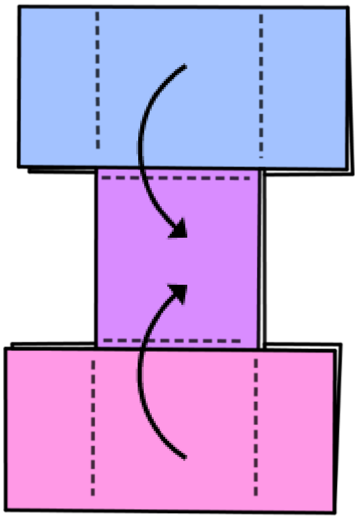
(4) Desdobre.



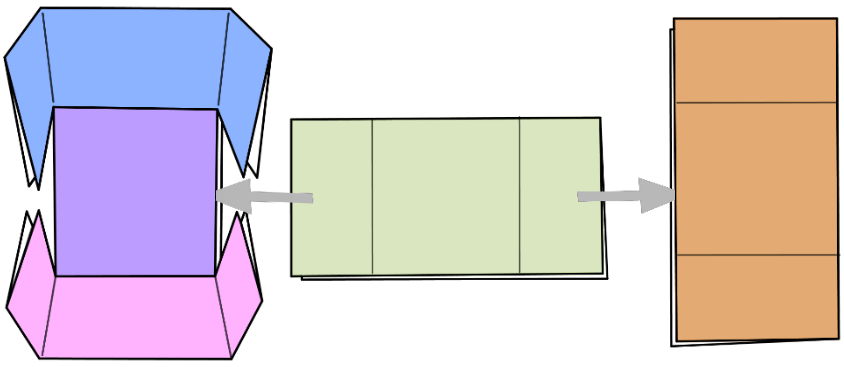
(5) Esse é o módulo do cubo, serão necessários 6 iguais a esse.



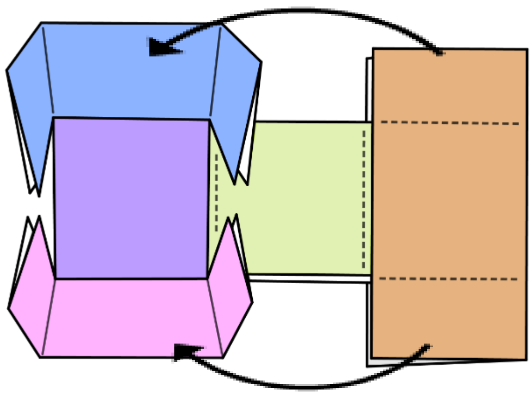
(6) Insira.



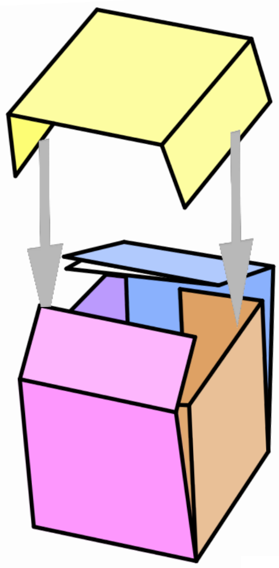
(7) Levante e dobre de acordo com as indicações.



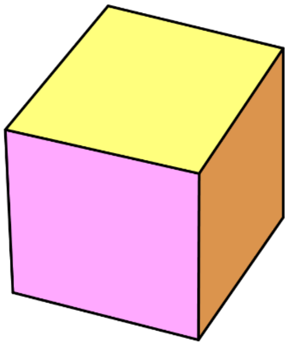
(8) Insira.



(9) Levante e dobre de acordo com as indicações.



(10) Encaixe a peça restante.



(11) O CUBO estará pronto!

Atividade 4 - Elementos em três dimensões com origami

Para essa atividade, sairemos da dinâmica utilizada nas anteriores, pois as construções serão um pouco mais trabalhosas. Recomenda-se que essa atividade seja feita em grupo, para que os alunos possam ter uma facilidade maior em manusear os encaixes das dobraduras.

Um dos focos da atividade é observar os elementos que aparecem em um sólido, especialmente: faces, arestas e vértices.

Objetivo: Resolver problemas envolvendo os elementos de prismas e pirâmides.

Habilidade: (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Material necessário:

- Folhas quadradas para origami.
- Material impresso.

Em um primeiro momento, os alunos irão realizar a construção de três sólidos e, somente após as construções, serão entregues as perguntas que eles irão responder como parte da atividade.

Para essa atividade, os sólidos escolhidos foram: tetraedro, hexaedro (bipirâmide) e o octaedro. Dependendo do nível da turma e do tempo disponível, é interessante que os alunos realizem a construção do cubo também, seguindo o manual da atividade anterior.

Os manuais para a construção dos sólidos e as perguntas se encontram a seguir.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 4

Questionário sobre os poliedros

1) O tetraedro e a bipirâmide são o mesmo sólido, mas em tamanhos diferentes?

___

2) Preencha a tabela a seguir com a quantidade de vértice, face e aresta de cada figura:

Nome do poliedro	Vértices	Faces	Arestas
1 -			
2 -			
3 -			

3) Leonhard Euler é um dos grandes matemáticos da história e, certamente, o mais prolífico de todos os tempos. Seus trabalhos contêm inúmeras contribuições fundamentais a diversas áreas da matemática (da teoria dos números até a probabilidade), da física (acústica, ótica), da astronomia (do movimento planetas e cometas até a geofísica e o estudo das marés), da mecânica (da teoria dos corpos rígidos à ciência naval), da lógica, da filosofia e até da música.

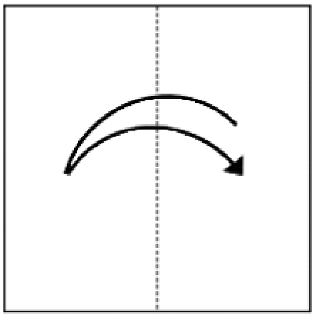
Euler, o matemático mais prolífico da história.
Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 ago. 2024.

Uma das suas contribuições é a fórmula de Euler, onde ele afirma que para qualquer poliedro convexo, o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) obedece à seguinte equação:

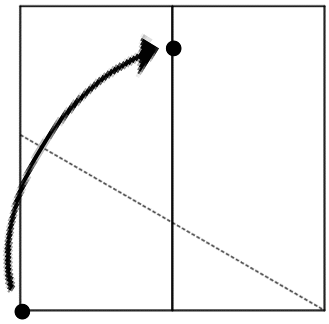
$$V - A + F = 2$$

Usando os poliedro que construímos em sala e os dados coletados na tabela da questão anterior, verifique se a fórmula de Euler funciona corretamente para os três sólidos.

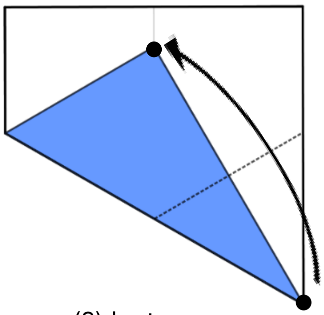
MANUAL DO TETRAEDRO



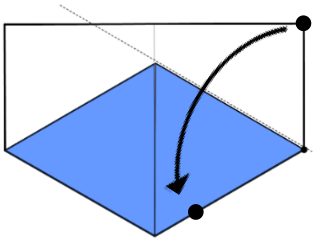
(1) Dobre ao meio e desdobre.



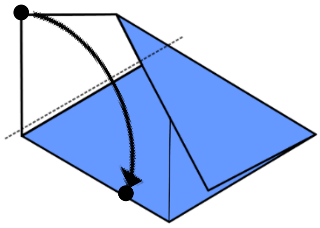
(2) Leve o vértice inferior esquerdo até a linha do meio de modo que a dobradura contenha o canto inferior direito.



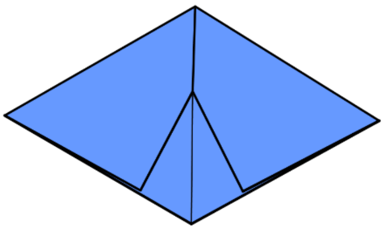
(3) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



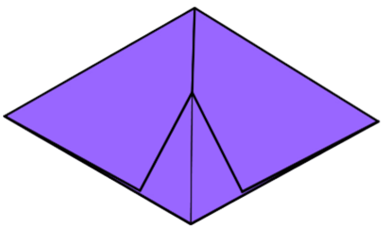
(4) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.

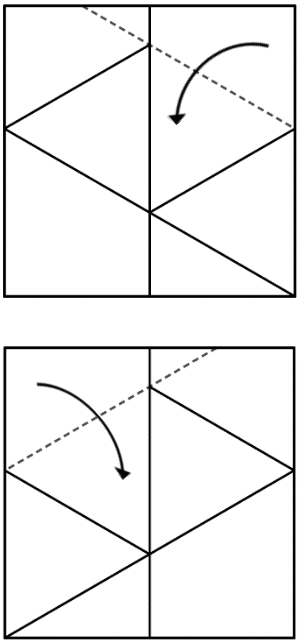


(5) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.

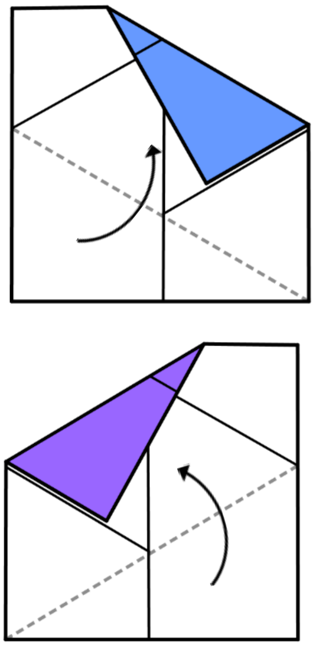


(6) Após as primeiras etapas, teremos o resultado acima. Repita os mesmos passos para fazer a segunda peça, de preferência de cor diferente igual a essa de baixo:

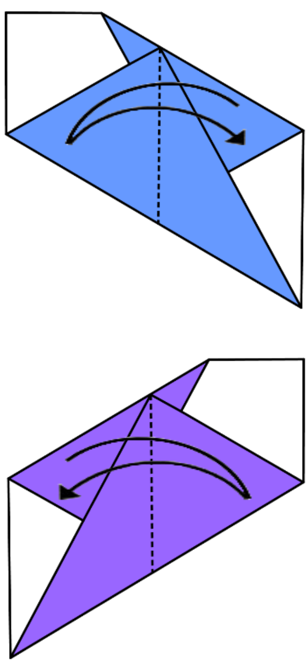


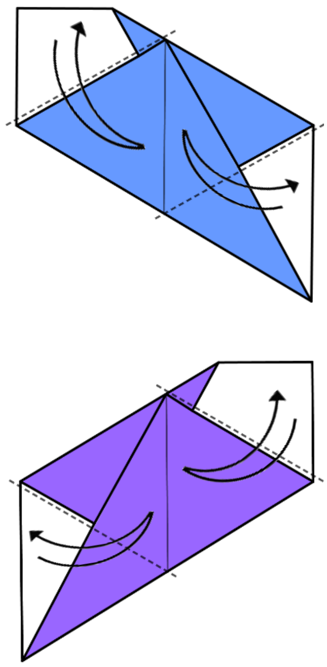


(7) Desdobre as duas peças. E dobre seguindo as orientações.



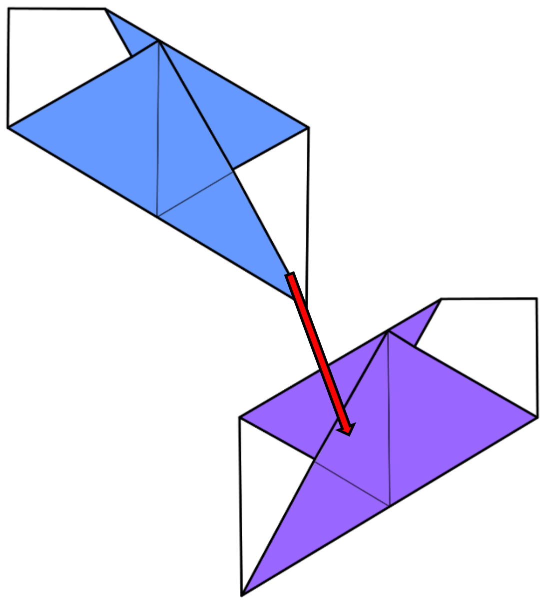
(8) Tome cuidado, pois as duas peças serão dobradas de formas diferentes. Siga os diagramas na direção correta.



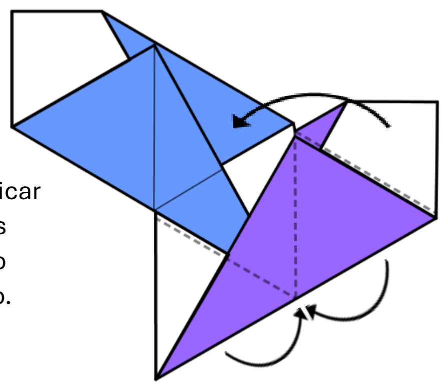


(10) Dobre e desdobre seguindo o diagrama e os módulos estarão prontos.

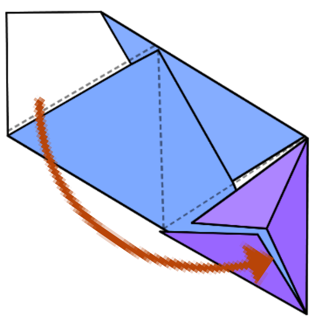
(9) Dobre e desdobre.



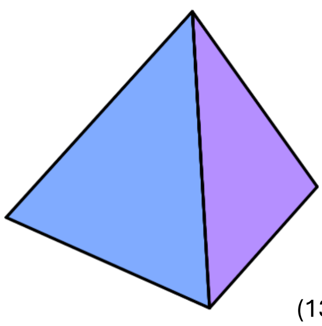
(11) Insira conforme o diagrama.



(12) Faça a dobradura ficar em pé ao longo das três linhas pontilhadas, isso dará forma ao tetraedro.

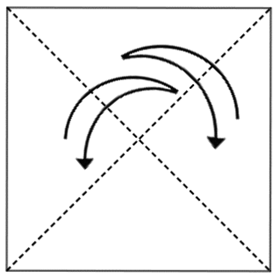


(13) Faça a dobradura seguindo o formato do tetraedro e encaixe a parte branca.

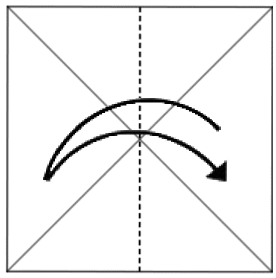


(13) Tetraedro pronto!

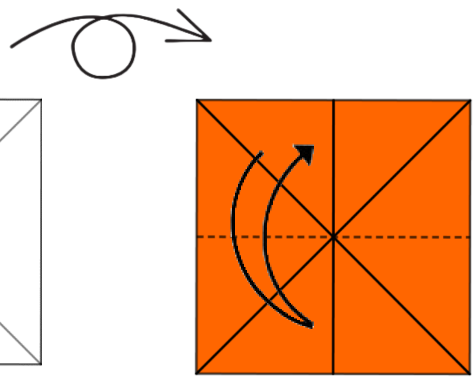
MANUAL DA BIPIRÂMIDE



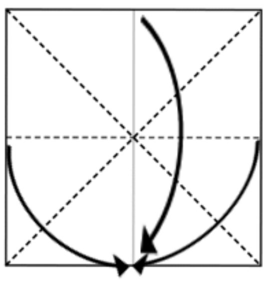
❶ Dobre e desdobre para marcas as diagonais.



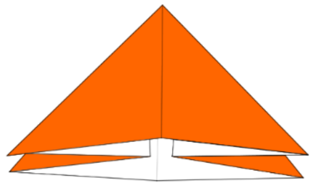
❷ Dobre e desdobre na horizontal.



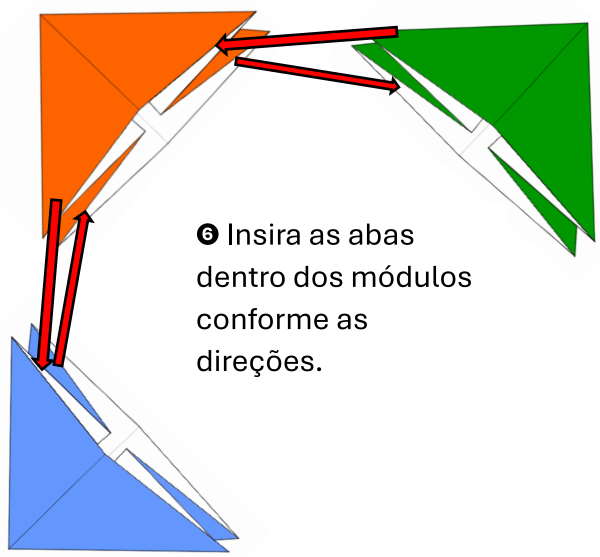
❸ Vire a folha e faça a dobradura na vertical, em seguida vire novamente.



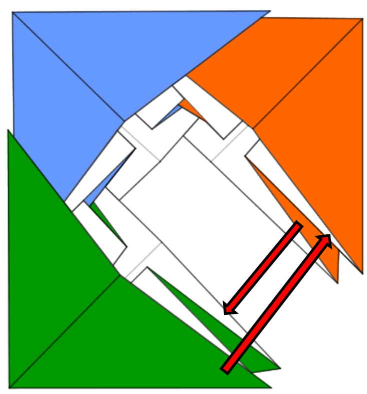
❹ Faça as dobras em definitivo, seguindo as direções.



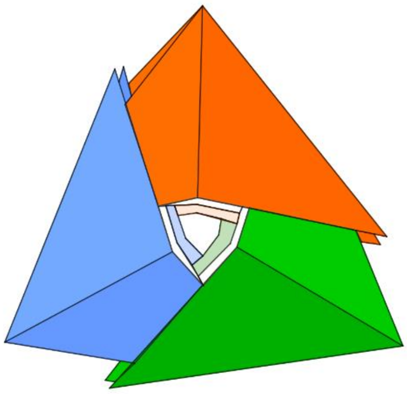
❺ Serão necessários três módulos iguais a esse para realizar o encaixe.



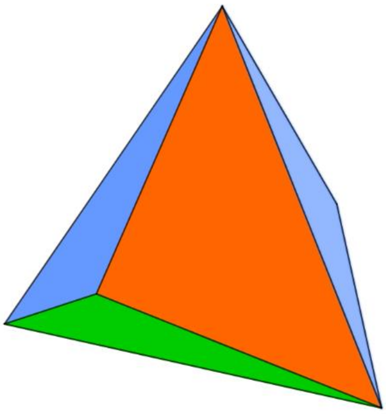
❻ Insira as abas dentro dos módulos conforme as direções.



❼ Insira até o meio das abas e encaixe as restantes.

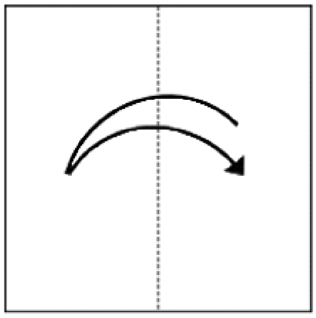


❽ Termine o encaixe das peças. Nessa etapa, um pouco de paciência é necessário, não force muito os módulos!

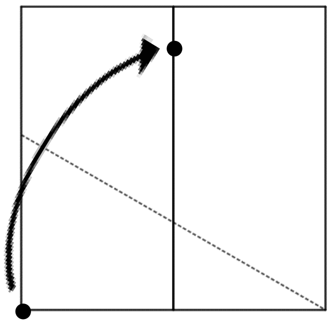


❾ E assim ficará a bipirâmide!

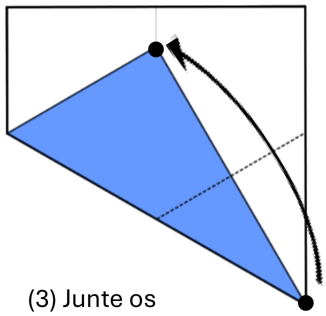
MANUAL DO OCTAEDRO



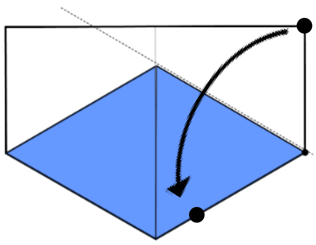
(1) Dobre ao meio e desdobre.



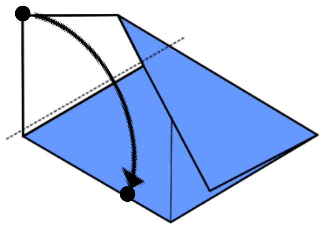
(2) Leve o vértice inferior esquerdo até a linha do meio de modo que a dobradura contenha o canto inferior direito.



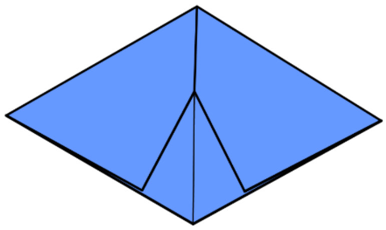
(3) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



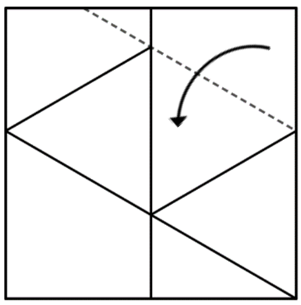
(4) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



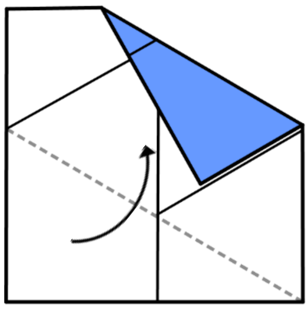
(5) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



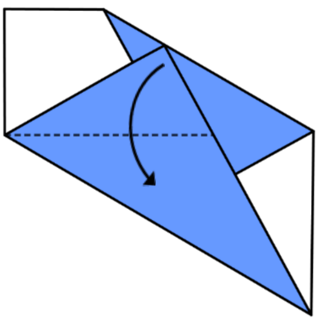
(6) Após as primeiras etapas, teremos o resultado acima. Desdobre tudo após esse passo.



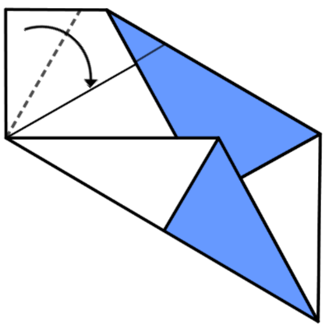
(7) Dobre conforme o diagrama.



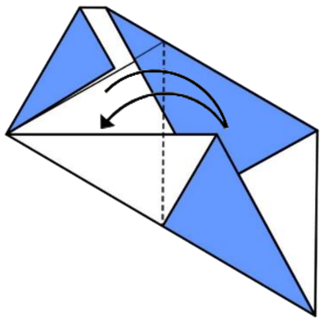
(8) Dobre conforme o diagrama.



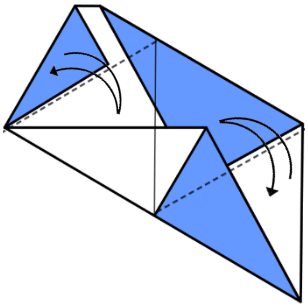
(9) Dobre trazendo o canto esquerdo da parte inferior até a extremidade.



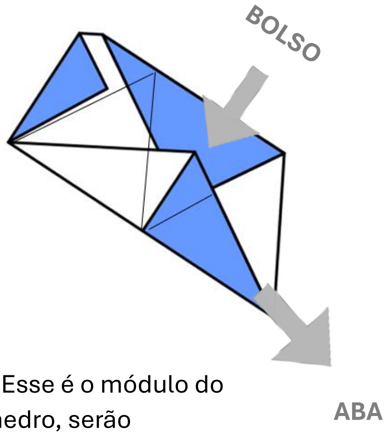
(10) Dobre o canto superior esquerdo até a linha de vínculo.



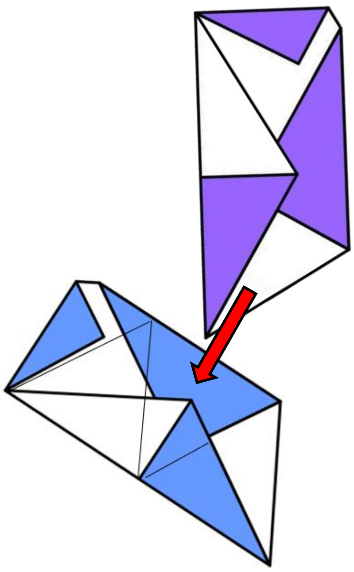
(11) Dobre e desdobre seguindo o diagrama ao lado.



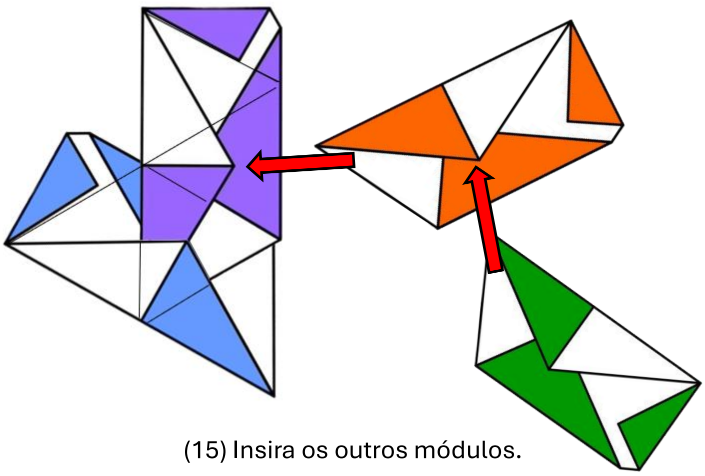
(12) Dobre e desdobre as abas seguindo o diagrama.



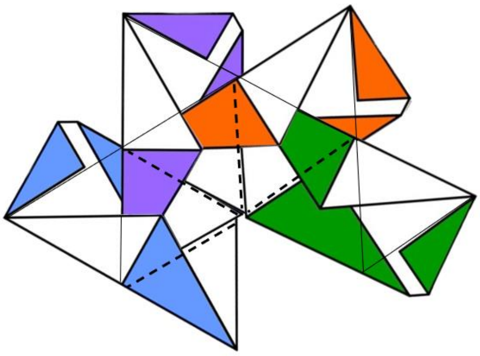
(13) Esse é o módulo do octaedro, serão necessário um total de 4 iguais a essa.



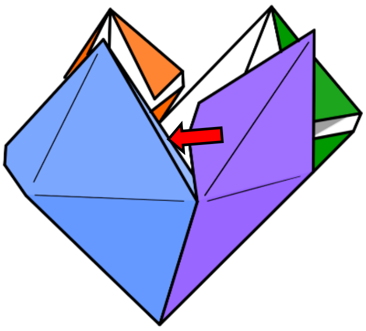
(14) Insira a aba de um módulo no bolso de outro.



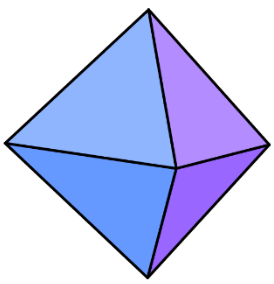
(15) Insira os outros módulos.



(16) Dobre conforme as linhas pontilhadas.



(17) Insira as abas restantes.

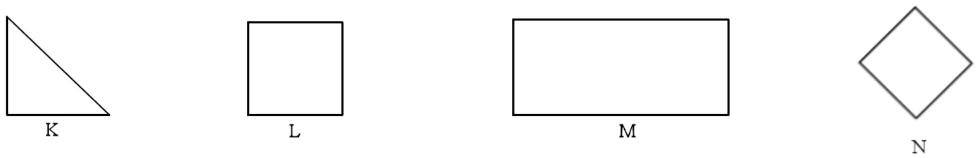


(18) E aqui está ele!

3. APÊNDICE: TESTE DE VAN HIELE - Adaptado de Usiskin e Nasser

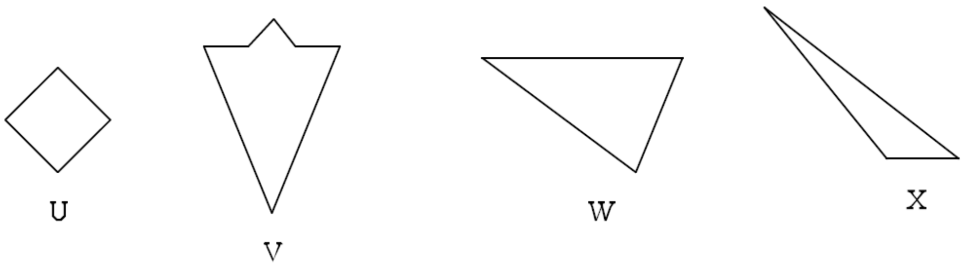
Nível 0 - Reconhecimento

1) Quais desses são quadrados?



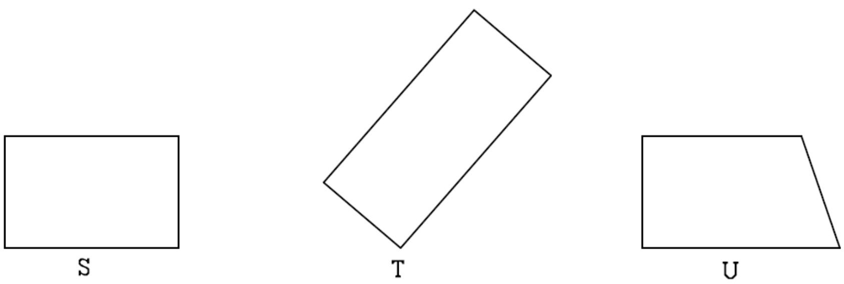
(a) Apenas K **(b)** Apenas L **(c)** Apenas M **(d)** Apenas L e N **(E)** Todos são quadrados

2) Quais desses são triângulos?



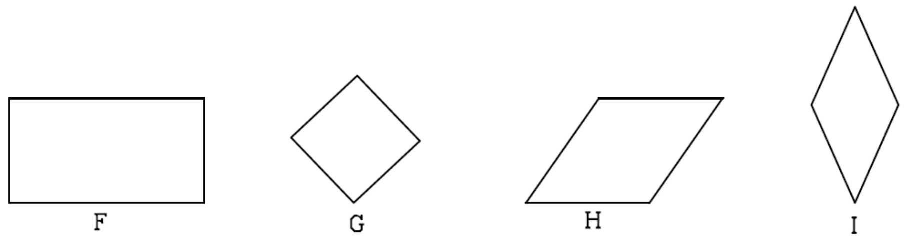
(a) Nenhum. **(b)** Apenas V **(c)** Apenas W **(d)** Apenas W e X **(e)** Apenas V e W

3) Quais desses são retângulos?



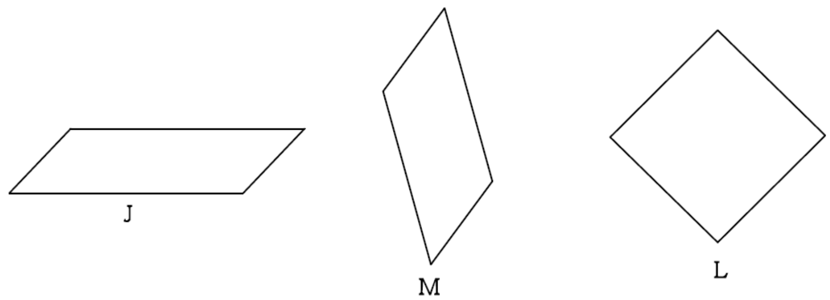
(a) Apenas S **(b)** Apenas T **(c)** Apenas S e T **(d)** Apenas S e U **(e)** Todos são retângulos

4) Quais desses são retângulos?



(a) Nenhum. **(b)** Apenas G **(c)** Apenas F e G **(d)** Apenas G e I **(e)** Todos são quadrados

5) Quais desses são paralelogramos?

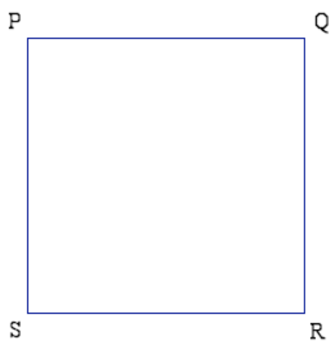


(a) Apenas J **(b)** Apenas L **(c)** Apenas J e M

(d) Nenhum destes é um paralelogramo **(e)** Todos são paralelogramos

Nível 1 - Análise

6) PQRS é um quadrado.



Qual relação é verdadeira em todos os quadrados?

(a) PR e RS têm o mesmo comprimento.

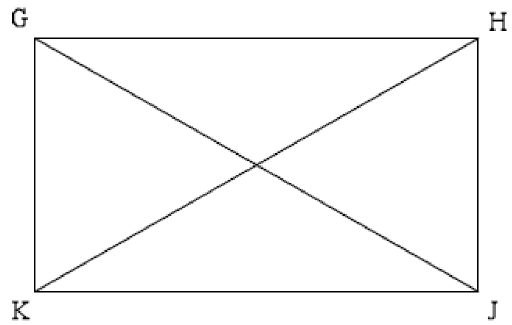
(b) QS e PR são perpendiculares.

(c) PS e QR são perpendiculares.

(d) PS e QS têm o mesmo comprimento.

(e) O ângulo Q é maior que o ângulo R.

7) No retângulo GHJK, GJ e HK são as diagonais.



Qual das opções é falsa em qualquer retângulo?

(a) Existem quatro ângulos retos.

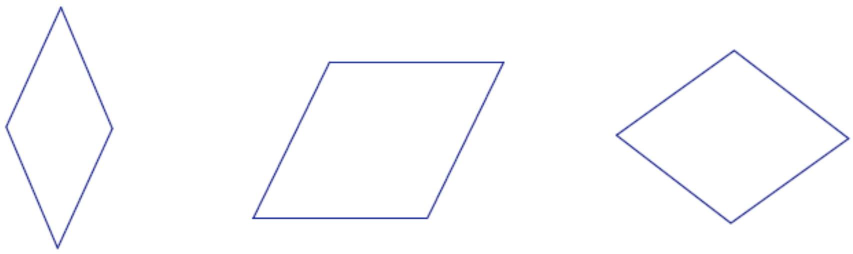
(b) Existem quatro lados.

(c) As diagonais têm o mesmo comprimento.

(d) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.

(e) Todos os lados têm comprimentos diferentes.

8) Um losango é uma figura de quatro lados com todos os lados de mesmo comprimento. Aqui estão alguns exemplos.



Qual das opções não é verdadeira em todos os losangos?

(a) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.

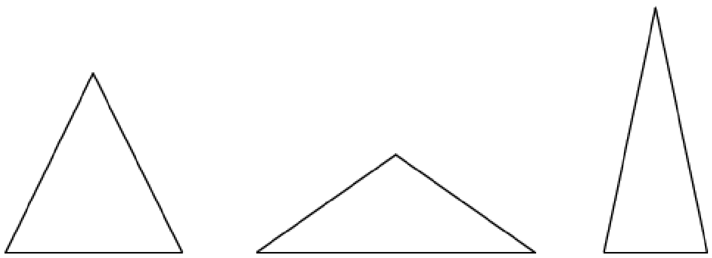
(b) Cada diagonal bissecta dois ângulos do losango.

(c) As duas diagonais são perpendiculares.

(d) Todos os ângulos são retos.

(e) Os ângulos opostos têm a mesma medida.

9) Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de comprimento igual. Aqui estão três exemplos.



Qual das opções é verdadeira em todo triângulo isósceles?

(a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento.

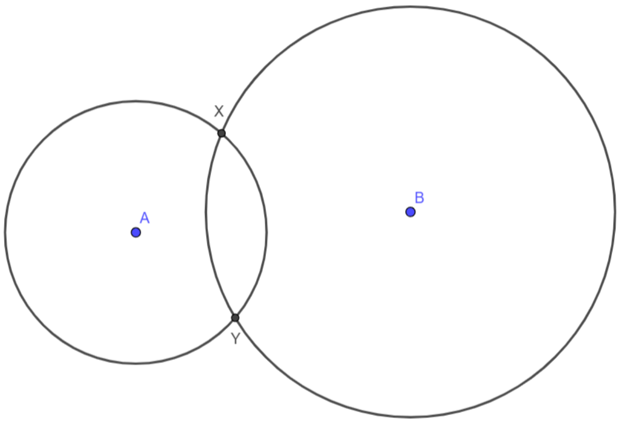
(b) Os três lados devem ter comprimentos diferentes.

(c) Um lado deve ter o dobro do comprimento de outro lado.

(d) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.

(e) Os três ângulos devem ter a mesma medida.

10) Duas circunferências com centros A e B se intersectam nos pontos X e Y, formando o quadrilátero AXBY. Veja um exemplo abaixo:



Qual das seguintes afirmações é falsa?

(a) AXBY sempre terá dois pares de lados de igual comprimento.

(b) O quadrilátero AXBY sempre terá pelo menos dois ângulos de medidas iguais.

(c) A reta $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overline{XY}$.

(d) Os ângulos em $A\hat{X}B$ e $A\hat{Y}B$ sempre terão medidas iguais.

(e) Todas as afirmações (A) - (D) são verdadeiras.

Nível 2 - Abstração

11) Considere as duas afirmações:

Afirmação 1: A figura F é um retângulo.

Afirmação 2: A figura F é um triângulo.

Qual é a correta?

(a) Se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.

(b) Se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.

(c) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.

(d) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.

(e) Nenhuma das opções anteriores é correta.

12) Considere as duas afirmações:

Afirmação S: ΔABC tem três lados de mesmo comprimento.
Afirmação T: Em ΔABC, o ângulo B e o ângulo C têm a mesma medida.

Qual é a correta?

(a) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.

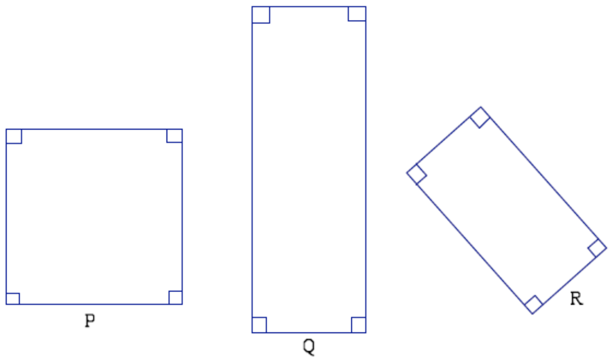
(b) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.

(c) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.

(d) Se S é falsa, então T é falsa.

(e) Nenhuma das opções (A) - (D) é correta.

13) Qual das figuras abaixo pode ser chamada de retângulo?



(a) Todas.

(b) Apenas Q.

(c) Apenas R.

(d) Apenas P e Q.

(e) Apenas Q e R.

14) Qual é a alternativa verdadeira?

(a) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os quadrados.

(b) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os retângulos.

(c) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os paralelogramos.

(d) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.

(e) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

15) O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm?

(a) Lados opostos iguais.

(b) Diagonais iguais.

(c) Lados opostos paralelos.

(d) Ângulos opostos iguais.

(e) Nenhuma das opções anteriores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

GOLAN, M.; JACKSON, P. **Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami.** In: LANG, Robert J. (Ed.). Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. p. 459-469.

GOLAN, M. **Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry.** In: IVERSON-WANG, Patsy; LANG, Robert J.; YIM, Mark (Eds.). Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. p. 151-164.

GOLAN, M.; OBERMAN, J. **The Kindergarten Origametria Program.** In: MIURA, K., KAWASAKIM T.; IVERSON-WANG, P. (Eds.). Origami 6: Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. American Mathematical Society, pp. 669-678, 2015.

KALEFF, A.M.M.R.; HENRIQUES, A.S.; REI, D.M.; FIGUEIREDO, L.G. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele, Bolema**, Rio Claro. nº 10, pp. 21-30, 1994.

KAWAMURA, M. **Polyhedron origami for beginners.** Tokyo: Nihon Vogue, 2001.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria.** In: Boletim GEPEM/UFRJ, n. 27, p. 93-99, Rio de Janeiro, 1990.

NASSER, L; TINOCO, L. **Curso básico de geometria: enfoque didático.** 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2011. Módulo I.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

SOUSA, M. S. **Geometria com Dobraduras: Explorando a Teoria de Van Hiele com Origami.** Dissertação (Mestrado). PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, 2024.

USISKIN, Z. **The Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.** Chicago: University of Chicago, 1982.

USISKIN, Z.; SENK, S. **Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. Journal for Research in Mathematics Education,** v. 21, n. 3, p. 242, maio 1990.