INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL - CAMPUS CANOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Adrian Ruan Horn de Borba

O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS

Orientador: Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl

Canoas, RS, Brasil
2023

Adrian Ruan Horn de Borba

O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - campus Canoas como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração nas Tecnologias Digitais de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl

Canoas, RS, Brasil
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B726u Borba, Adrian Ruan Horn de

O uso de coeficientes em equação de duas variáveis e restrições no plano cartesiano: uma abordagem lúdica e diferenciada no software Desmos / Adrian Ruan Horn de Borba. - 2024.
149 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Canoas, BR-RS, 2024.

Orientadora: Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl.

1. Geometria analítica. 2. Geometria dinâmica. 3. Registros de representação semiótica. 4. Software Desmos. I. Diehl, Nicolau Matiel Lunardi, orientador. II. Título.

CDU 51

Elaborado por: Sabrina Clavé Eufrásio CRB-10/1670

Adrian Ruan Horn de Borba

O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS

O presente trabalho em nível de mestrado será avaliado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - campus Canoas

Prof. Dra. Núbia Lúcia Cardoso Guimarães
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - campus Canoas

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em matemática.

____
Prof. Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl
Orientador

____
Prof. Dra. Carina Loureiro Andrade
Vice-Coordenador do Programa

Canoas, junho de 2024

Este trabalho é dedicado a uma vida acadêmica em
busca de fazer a diferença no mundo.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível graças ao apoio e à ajuda de muitas pessoas, grupos e instituições que me acolheram e apoiaram ao longo da minha trajetória acadêmica durante o curso de mestrado, culminando na apresentação desta dissertação.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Adriana Horn e Erlindo Sérgio da Silva de Borba, por me proporcionarem uma educação sólida, por seu amor incondicional e por todo o apoio ao longo dos meus 27 anos de vida, sempre me amparando quando necessário.

À minha esposa, Natily Haskel, por estar ao meu lado todos os dias, oferecendo apoio, amor, força e consolo, fundamentais para a conclusão desta dissertação.

Também lembro com carinho das minhas gatas, Marie e Nina, já falecidas, e da Capitu, meu xodó, que esteve em vários momentos no meu colo, me dando forças para escrever.

Aos meus irmãos e irmãs, cunhados e cunhadas, meu sobrinho e amigos, por estarem presentes em muitos momentos da minha vida, sempre me apoiando.

Agradeço aos meus colegas de mestrado da primeira turma do PROFMAT do IFRS - Campus Canoas, por idealizarmos, lutarmos e nos ajudarmos mutuamente em diversos momentos, seja nas aulas, nas viagens ou nos trabalhos desenvolvidos ao longo desses pouco mais de dois anos de curso.

Ao meu orientador, Nicolau Matiel Lunardi Diehl, por ler, reler, debater e me ajudar na construção deste trabalho. Agradeço também aos professores da equipe PROFMAT do IFRS - Canoas por todos os ensinamentos.

Ao IFRS - Canoas, em especial aos professores e membros do grupo de Matemática, que, com muito diálogo, ajudaram a construir ideias e apoiaram minha proposta de trabalho.

À professora Greice e ao IFRS - Caxias do Sul, por disponibilizarem a oportunidade de aplicar minha sequência de atividades na instituição.

À turma do primeiro ano do técnico em Química integrado ao Ensino Médio, por realizarem as atividades com dedicação, cientes da importância da minha pesquisa.

À professora Núbia Lúcia Cardoso Guimarães e aos professores das disciplinas do doutorado em Informática na Educação da UFRGS que cursei, como aluno especial, por me apresentarem e debaterem a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e outras demais teorias, mostrando sua aplicação em sala de aula e sua relevância para minha carreira profissional como professor.

Aos meus colegas de trabalho e estudantes destes últimos dois anos, que me ensinaram diariamente a ser um profissional e uma pessoa melhor, visando uma educação de qualidade.

E, por fim, a mim mesmo, por não desistir apesar das dificuldades, sempre focando no meu aprimoramento pessoal, profissional e acadêmico.

RESUMO

Este estudo apresenta resultados de uma pesquisa realizada com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. A sequência de atividades foi construída na plataforma Desmos, envolvendo questionários, tarefas exploratórias e questões sobre geometria analítica. A metodologia da pesquisa foi a investigação qualitativa de Bogdan e Biklen (1994). A concepção e a análise dos dados coletados foi realizada com inspiração na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. E o principal objetivo desta pesquisa é (re)apresentar diferentes registros para alguns objetos matemáticos presentes na geometria analítica e, por meio de uma sequência de atividades, e construir correlações entre esses diferentes registros. Isto porque, segundo Duval, as conversões entre os diferentes registros promovem aprendizagem. Na análise de dados foi possível observar que a sequência de atividades promoveu a correlação entre os diferentes registros, o que contribuiu com a construção de conhecimento dos estudantes participantes.

Palavras-chave: Geometria analítica; Geometria dinâmica; Registros de representação semiótica; Software Desmos.

ABSTRACT

This study presents the results of research conducted with a first-year high school class. The sequence of activities was developed on the Desmos platform and included questionnaires, exploratory tasks, and questions on analytical geometry. The research methodology was based on the qualitative investigation approach of Bogdan and Biklen (1994). The design and analysis of the collected data were inspired by Raymond Duval's Theory of Semiotic Representational Registers. The main objective of this research is to (re)present different registers for some mathematical objects in analytical geometry and, through a sequence of activities, to build correlations between these different registers. According to Duval, conversions between different registers promote learning. The data analysis revealed that the sequence of activities facilitated the correlation between different registers, contributing to the knowledge construction of the participating students.

Keywords: Analytical geometry; Dynamic geometry; Semiotic representation registers; Desmos software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros movimentos da Educação Matemática no Brasil remontam ao início do século XX, quando surgiram iniciativas voltadas para a formação de professores e a melhoria do ensino dessa disciplina. No entanto, foi a partir das décadas de 1960 e 1970 que o campo começou a ganhar maior visibilidade e debate. Nesse período, influenciado por movimentos internacionais, como a Matemática Moderna, ocorreram mudanças significativas nos currículos e nas práticas de ensino da Matemática. Surgiram discussões sobre a importância do ensino da Matemática para a formação cidadã e a necessidade de torná-lo mais significativo e contextualizado. Ao longo das décadas seguintes, esses debates se intensificaram, abordando questões como a formação de professores, a utilização de tecnologias no ensino, a inclusão dos estudantes e a relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica. Esses debates continuam presentes na contemporaneidade, refletindo a busca por uma Educação Matemática mais inclusiva, crítica e eficaz para todos os estudantes brasileiros.

Indo ao encontro a esse movimento, este trabalho apresenta uma sequência de atividades embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval fazendo uso do software Desmos. Particularmente, utilizamos durante a sequência de atividades as representações algébricas e gráficas de retas, circunferências e parábolas, além da utilização de linguagem natural. Também abordamos restrições de variáveis e suas consequências algébricas e gráficas visando conectar os conceitos de álgebra e geometria com auxílio da tecnologia.

Aplicamos a sequência de atividades em uma sala de aula de 1° ano do curso de Ensino Médio integrado ao técnico em Química do IFRS, Campus Caxias do Sul, durante as aulas da disciplina de Matemática. Nossa proposta didática utiliza o software Desmos, uma plataforma interativa que permite a criação de sequências de atividades interativas e questionadoras. Desenvolvemos essas atividades para explorar tanto a representação algébrica quanto a representação gráfica de objetos matemáticos no plano cartesiano, promovendo a correlação entre as representações algébricas e gráficas. A correlação possibilita a coordenação de registros (trânsito mais espontâneo), que é a condição para a compreensão. O diferencial do software, além de sua estrutura em formato de slides sequenciais, são os applets (ferramentas disponíveis dentro do software) e a fácil interação do usuário.

Ao analisar os livros e refletir sobre o tempo que o professor tem em sala de aula para abordar os conceitos propostos, notamos uma necessidade de planejar e realizar aulas em que os alunos possam interagir com as equações envolvendo duas variáveis (x e y) no plano de forma mais ativa, não apenas repetindo tratamentos algébricos e uma única relação de y dependente de x. Nossa proposta de sequência aborda, além das equações de retas, parábolas e circunferências, as transformações gráficas obtidas ao restringirmos os intervalos das variáveis. Assim, é possível perceber a conexão entre as restrições de coeficientes e suas alterações gráficas.

Várias aplicações da álgebra, especialmente aquelas relacionadas a equações com uma ou duas variáveis, apresentam representações gráficas. Apesar disso, há uma carência de integração entre os diversos conteúdos e nas aplicações propostas para essas equações. Como resultado, a revisão bibliográfica revelou uma ênfase mínima na geometria analítica durante o ensino básico. Diante disso, desenvolvemos uma sequência de atividades dentro da plataforma Desmos que tratavam de equações de duas variáveis e seus coeficientes. Nessas equações as variáveis possuíam grau 1 ou 2. Os conceitos foram trabalhados de maneira teórica na parte inicial da sequência de atividades e após os conceitos matemáticos fossem mobilizados a partir de dois jogos interativos: "O Coletor de Estrelas" e "O Criador de Desenhos".

Elaboramos esses jogos para envolver o uso das equações, restrições e coeficientes estudados anteriormente. Dessa forma, os alunos não apenas aplicaram os conceitos aprendidos, mas também refletiram sobre eles. O principal objetivo desta pesquisa é (re)apresentar diferentes registros para alguns objetos matemáticos presentes na geometria analítica e, por meio de uma sequência de atividades, promover conversões entre esses diferentes registros. Isso possibilita a resolução dos problemas propostos e compreensão, promovendo um processo de aprendizagem mais qualificado.

Além disso, a utilização do Software Desmos proporciona um ambiente interativo e exploratório, promovendo um maior engajamento e interesse dos estudantes nas atividades propostas. Através dessa abordagem, buscamos não apenas o desenvolvimento dos conceitos e habilidades definidos pela Base Nacional Curricular (BNCC), mas também a formação de estudantes que tenham uma visão ampla e questionadora das equações geométricas e suas representações no plano cartesiano.

Ao longo deste trabalho exploraremos os principais conceitos de Geometria Analítica (ponto, reta, circunferências, etc.) necessários para a sequência de atividades propostas na plataforma Desmos. Entendemos que essa abordagem proporcionou uma experiência enriquecedora e significativa aos estudantes, auxiliando no desenvolvimento de suas habilidades matemáticas e incentivando sua participação ativa na construção do conhecimento.

2 PROBLEMATIZAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a justificativa do trabalho, constando observações das considerações e orientações presentes nos livros didáticos e na BNCC feitas para o professor que atua na Educação Básica. Primeiramente, buscou-se dentro da BNCC analisar as habilidades e competências que vão ao encontro de nossa proposta e no capítulo seguinte, foi feita uma análise de livros didáticos do Ensino fundamental e médio em relação aos conceitos de equações e geometria analítica.

Em seguida, apresentamos uma introdução à teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica, que inspira a nossa pesquisa e a concepção da sequência de atividades. Foi desenvolvida também uma revisão teórica sobre os conceitos apresentados durante a sequência de atividades. Esta revisão teórica fará um comparativo entre o que é apresentado nos livros didáticos e o preconizado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

2.1 Justificativas do tema de pesquisa

Tendo em vista a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, analisamos livros didáticos do Ensino Básico e observamos a BNCC. Buscou-se compreender a importância da geometria analítica e como ela é apresentada nestes documentos para criação de um material didático para desenvolver, com os estudantes, o aprendizado de alguns conceitos importantes da geometria analítica e de outras áreas da matemática, como a álgebra, geometria e cálculo.

Abordamos conceitos matemáticos como o plano cartesiano, a reta e as cônicas, buscando reduzir as lacunas de aprendizagem, especialmente nos aspectos algébricos. A partir disso, foram analisadas formas de auxiliar na aprendizagem de conceitos já estabelecidos ou já vistos pelos estudantes, de modo que eles se aproximem dos objetos estudados e (re)signifiquem as representações destes objetos.

Segundo a BNCC, a Matemática no Ensino Fundamental tem por intuito o letramento Matemático, ou seja, desenvolver “[...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...]” (BRASIL, 2017a, p.266). Visualizando a importância de reconhecer conhecimentos matemáticos e sua necessidade para a compreensão do mundo, os alunos têm contato com a geometria analítica desde cedo. Por exemplo, no quinto ano, desenvolvem atividades com o plano cartesiano, visando:

> Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. (BRASIL, 2017a, p.297).

Já mais para o fim do Ensino Fundamental a geometria analítica se conecta com a álgebra a partir da:

> As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de

> equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. (BRASIL, 2017a, p.272).

De acordo com Coelho e Aguiar (2018), a álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente para resolver necessidades práticas, estando intrinsecamente presente em nosso cotidiano. Por isso, e como não poderia deixar de ser, ela é parte essencial no ensino de matemática nos níveis Fundamental e Médio.

Devido à relevância da álgebra e suas conexões, em 2017, foi homologado na BNCC uma unidade temática voltada à álgebra para ser desenvolvida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental buscando promover, ainda mais cedo, junto ao estudante um pensamento abstrato. Esta ação foi proposta na tentativa de suprir as várias lacunas observadas em pesquisas e avaliações governamentais.

Ainda, de acordo com Coelho e Aguiar (2018), incentivar o pensamento algébrico em vez de se restringir apenas a questões técnicas e operacionais contribui não só para o ensino de álgebra, mas também auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico-abstrato do estudante. Esse tipo de pensamento é essencial para a formação de um cidadão crítico e reflexivo, capaz de contribuir para a sociedade atual.

No que se refere ao Ensino Médio, a BNCC traz que:

> No Ensino Médio, os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental devem ser consolidados e aprofundados. Na área de matemática e suas Tecnologias, novos conhecimentos podem ser agregados para auxiliar na resolução de problemas mais complexos. Os estudantes "[...] devem construir uma visão mais integrada da matemática, da matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da matemática à realidade" (BRASIL, 2017a, p.471).

Diferentemente do Ensino Fundamental, a organização da BNCC no Ensino Médio não é distribuída por séries, mas sim por competências específicas globais que podem ser trabalhadas de acordo com a proposta pedagógica de cada instituição. Vale ressaltar que a geometria analítica não é mencionada explicitamente na BNCC, mas seus conceitos aparecem em alguns momentos, especialmente na representação gráfica de funções.

Dada a grande importância da álgebra, da geometria e de suas relações e conexões apontadas na BNCC, pensou-se em uma proposta didática que visasse promover maior percepção das conexões entre conceitos de álgebra e geometria por meio do estudo de geometria analítica objetivando ampliar o conhecimento matemático construído pelos estudantes apresentando novas conexões entre conteúdos (possivelmente) já estudados.

2.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Através de uma breve análise na BNCC, foi possível identificar quais habilidades e competências são necessárias para o estudo das retas (objeto matemático) e suas representações gráficas, algébrica e em língua natural. Esta seção é estruturada com alguns comentários mais gerais sobre a BNCC e, em seguida, apresenta uma tabela com as habilidades e competências, indicando seus respectivos anos e unidades temáticas.

Primeiramente, no capítulo de matemática para o Ensino Fundamental da BNCC, é apontada uma proximidade entre a álgebra e a geometria:

> Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. (Brasil, 2017a, p.272).

Durante os anos iniciais e até metade do Ensino Fundamental II, busca-se principalmente construir o conceito de número, sua quantificação, seu significado e geometricamente compreendê-lo em uma reta numérica. Historicamente, usava-se incógnitas, por exemplo x, para representar um valor fixado. Em contraponto, atualmente usamos as incógnitas como variáveis. Apesar dessa evolução de conceito ter ocorrido a duzentos anos ainda percebe-se dificuldade em sua compreensão nos dias de hoje.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017a, p.529) enfatiza que, no ensino médio, a competência de representar está diretamente relacionada à criação de registros que evocam objetos matemáticos. Embora o processo de representação não seja exclusivo da matemática, a BNCC destaca que, nessa área, as representações desempenham um papel fundamental na compreensão de conceitos e na resolução de problemas. Assim, é essencial que os estudantes sejam capazes de utilizar diferentes registros e linguagens matemáticas para modelar situações, desenvolver seu raciocínio e comunicar resultados com precisão.

De maneira similar a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, traz a importância de utilizar, principalmente durante o Ensino Médio, vários registros. A BNCC (Brasil, 2017a, p.538) também destaca no capítulo do Ensino Médio a Competência Específica 4 (CE4), que enfatiza a importância de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemática, como os algébricos, geométricos, estatísticos e computacionais, de forma flexível e precisa na resolução e comunicação de problemas. A BNCC ressalta que a utilização de diversas representações de um mesmo objeto matemático é crucial para a aprendizagem dos estudantes, permitindo-lhes desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar-se de maneira eficaz e ampliar seu pensamento matemático. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes proporciona uma compreensão mais profunda de como eles interpretam e raciocinam sobre um problema. A BNCC sugere que os estudantes sejam incentivados a explorar múltiplos registros de representação e a escolher as representações mais adequadas para cada situação, fazendo a conversão entre elas sempre que necessário para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

Assim, verifica-se, na BNCC, ênfase aos registros matemáticos, conversões, tratamentos e representações identificáveis, sendo necessário o aluno conhecer e utilizar várias representações. Abaixo está uma tabela, elaborada pelo autor, que apresenta habilidades e competências relacionadas ao conhecimento algébrico e geométrico, refletindo os elementos abordados nesta pesquisa.

Tabela 01 - Habilidades e competência do ensino fundamental na BNCC

Ano	Unidade matemática	Objeto de conhecimento	Habilidade
8°	Álgebra	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
8°	Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
1°	Geometria e Medidas	CE1 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
1°	Números e Álgebra	CE3 - Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
1°	Números e Álgebra	CE4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico,	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano

		estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
			(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

Fonte: BNCC - Brasil, 2017.

Em conclusão, a análise da BNCC destaca a integração entre álgebra e geometria, com ênfase nas retas e suas representações gráficas e algébricas. A BNCC valoriza o uso e a conversão entre diferentes registros de representação, essenciais para a compreensão matemática. Ao explorar esses registros, os alunos desenvolvem habilidades importantes para resolver problemas e comunicar resultados, enriquecendo seu pensamento matemático. Assim, é crucial que os currículos e práticas pedagógicas incentivem a utilização de múltiplas representações para uma formação matemática completa.

3 QUADRO TEÓRICO

Esta seção é o fundamento para nossa pesquisa. Inicialmente, na subseção 3.1, serão apresentados os conceitos empregados ao longo da sequência de atividades, baseando-nos no livro 'Fundamentos de matemática Elementar' de Gelson Iezzi. Na sequência, a subseção 3.2 serão delineados os conceitos propostos por Raymond Duval na Teoria de Registros de Representação Semiótica. Por fim, na última subseção 3.3, discutirá sucintamente diferentes abordagens encontradas em diversos livros didáticos quanto à apresentação dos conceitos de geometria analítica.

3.1 Revisão bibliográfica dos conteúdos matemáticos

Para entender a importância da geometria analítica e suas conexões com a álgebra, serão apresentados a seguir conceitos que estão presentes ao longo da sequência de atividades. A geometria analítica promove a articulação entre a geometria e a álgebra ao permitir o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em sua equação, bem como a análise dos pares ordenados que são soluções de uma equação através das propriedades de uma figura geométrica. Esses conceitos serão definidos com base principalmente no livro 'Fundamentos de Matemática Elementar' de Gelson Iezzi. Esta abordagem permitirá uma compreensão mais ampla e contextualizada dos temas.

3.1.1 Conceitos de geometria analítica e álgebra

No livro da coleção FTD 3ª série do Ensino Médio (ed. 2, 2017), a geometria analítica é definida como um ramo da matemática que conecta geometría e álgebra. Segundo essa abordagem, a essência da geometria analítica está na conversão entre diferentes registros de representação semiótica, como as representações algébricas e geométricas. Essa integração permite tanto a resolução de equações por meio de representações geométricas quanto a descrição de curvas e figuras através de equações. A teoria de Raymond Duval destaca que essa conversão entre registros é fundamental para a compreensão matemática, pois possibilita aos alunos visualizar conceitos abstratos e estabelecer uma relação mais profunda entre diferentes formas de representação.

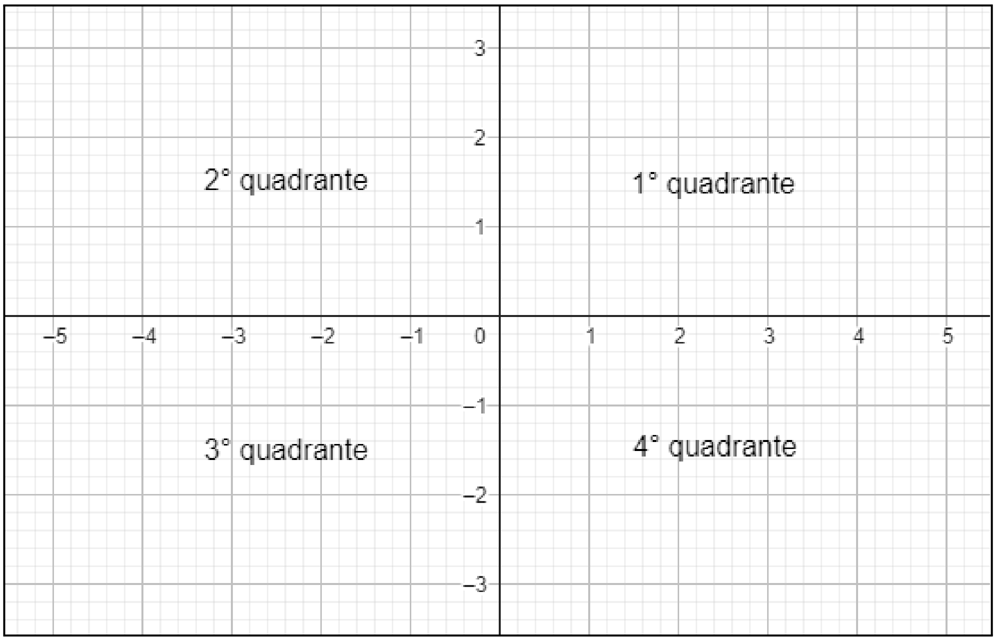
Concordando com esta ideia, Moraes (2016) afirma que sua importância reside no fato de que podemos representar por meio de equações as linhas do plano (reta, circunferência, parábola, etc). Assim, é possível representar algebricamente muitas questões geométricas, como também representar de forma geométrica muitas situações algébricas.

3.1.1.1 Plano cartesiano

O Plano Cartesiano (figura 01) é uma ferramenta matemática que permite a representação gráfica de dados numéricos em um sistema de coordenadas cartesianas. Criado pelo filósofo e matemático francês René Descartes no século XVII. O plano cartesiano é um dos pilares da geometria analítica e tem aplicações em diversas áreas do conhecimento.

O plano cartesiano (Figura 01) é composto por dois eixos perpendiculares, o eixo x e o eixo y, que se cruzam em um ponto denominado origem. Esses eixos representam as coordenadas dos pontos no plano. A coordenada x é a distância do ponto até o eixo y, e a coordenada y é a distância do ponto até o eixo x. Assim, um ponto no plano é representado por um par ordenado (x, y).

Figura 01 - Plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A história do plano cartesiano remonta ao século XVII, quando Descartes procurava uma maneira de representar graficamente as equações matemáticas. Ele percebeu que poderia usar um sistema de coordenadas para isso, e assim nasceu o plano cartesiano. Descartes publicou sua ideia em seu livro "La Géométrie", em 1637, e desde então o plano cartesiano se tornou uma ferramenta fundamental para a matemática e outras áreas do conhecimento.

3.1.1.2 Equações de reta

No estudo da geometria analítica, as retas podem ser descritas em forma de equação. No seu livro Fundamentos da Matemática Elementar, Iezzi (2013) apresenta reta no teorema: A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y)

representa um ponto genérico de r. Isso ocorre porque consideramos que uma reta é um conjunto infinito de pontos que obedecem essa relação descrita anteriormente. Existem diversas formas de obter e representar a equação de uma reta, as formas mais usuais são:

i. Equação Geral da Reta

r: $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

ii. Equação Reduzida da Reta

Segundo Iezzi (2013) Dada a equação geral da reta r, $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos $y = mx + q$, como explicado na figura 02 a seguir.

Figura 02 - Equação reduzida da reta

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \Rightarrow y = mx + q$$

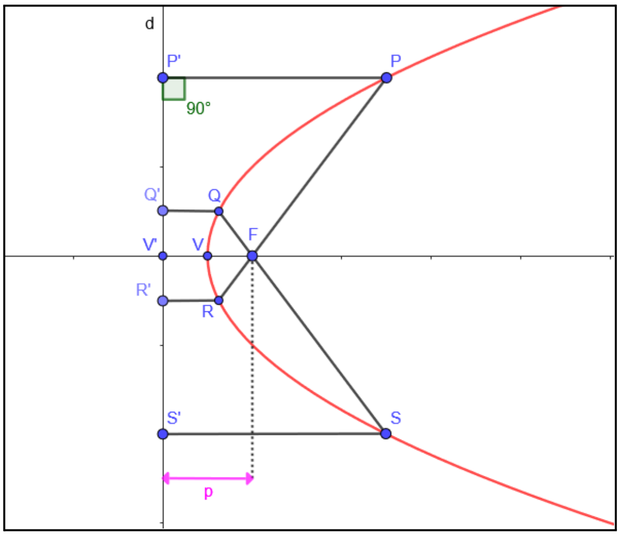
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Sendo nesta última figura $m = \left(-\frac{a}{b}\right)$ e $q = \left(-\frac{c}{b}\right)$.

3.1.1.3 Equações de parábola

Segundo Iezzi (2013) define-se parábola como: Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano π, com $F \in d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de π que estão à mesma distância de F e de d.

Figura 03 - Parábola e suas principais características



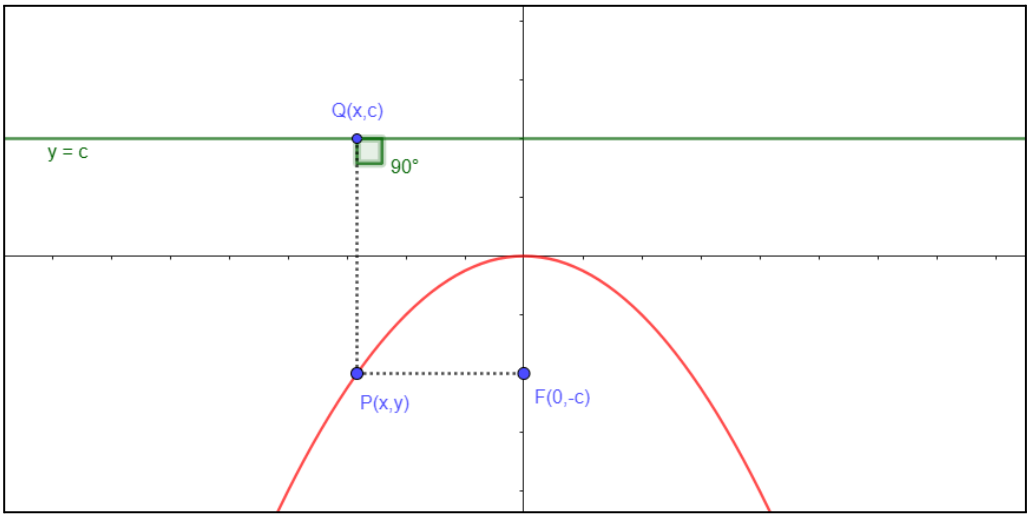
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura acima os elementos da parábola são: F é o foco, d é a reta diretriz, p é o parâmetro, V o vértice e a reta VF é o eixo de simetria. Há também a relação notável dada por $VF = p/2$. Podemos compreender a parábola como o conjunto de pontos que equidistam de um ponto fixo (foco) e de uma reta chamada diretriz. Variando a posição da reta e do foco, podemos dividir as possíveis orientações das parábolas no plano cartesiano em categorias:

i. Parábola com diretriz horizontal

Podendo ter sua concavidade voltada para cima ou para baixo, conforme a posição do foco em relação à diretriz, terá seu eixo de simetria vertical passando pelo foco. Sua equação pode ser descrita por: $y = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$. A equação da parábola de eixo vertical também pode ser representada por $y = k.(x - h)^2 + v$, com k, h, v reais e $k \neq 0,$ sendo esta última equação a que será utilizada durante a sequência de atividades e (h, v) as coordenadas do vértice da parábola.

Figura 04 - Parábola de eixo vertical

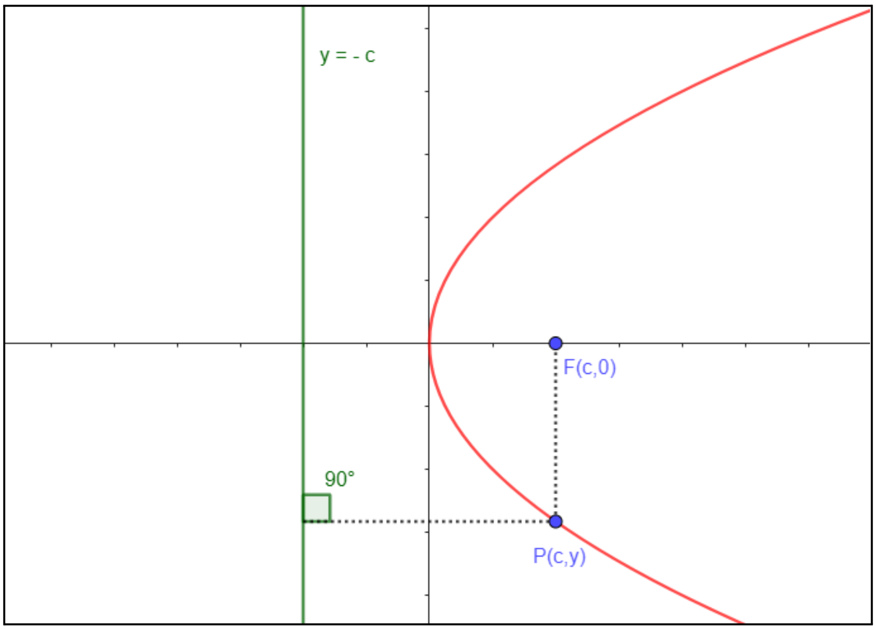


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

ii. Parábola com diretriz vertical

Podendo ter sua concavidade voltada para esquerda ou para direita, conforme a posição do foco em relação à diretriz, terá seu eixo de simetria horizontal passando pelo foco. Sua equação pode ser descrita por $x = ay^2 + by + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$. A equação da parábola de eixo horizontal também pode ser representada por $x = k.(y - v)^2 + h$, com k, h, v reais e $k \neq 0$, sendo esta última equação a que será utilizada durante a sequência de atividades e (v, h) as coordenadas do vértice da parábola.

Figura 05 - Parábola de eixo horizontal

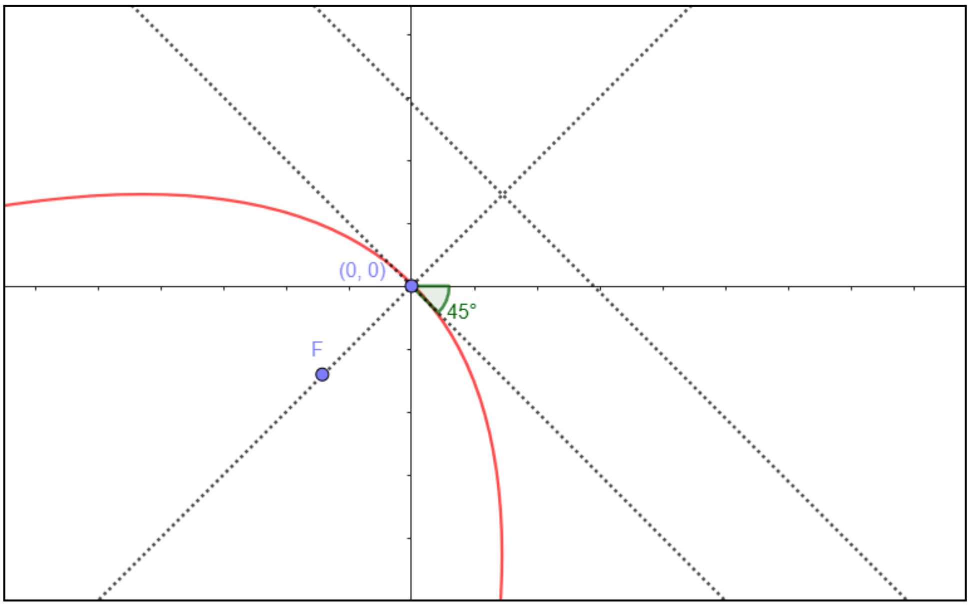


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

iii. Parábola com diretriz oblíqua

A diretriz de uma parábola pode ser uma reta que não é paralela aos eixos coordenados x e y. Nesses casos, o eixo de simetria da parábola é perpendicular à diretriz e passa pelo foco. Embora este tipo de parábola não seja o foco principal deste trabalho, os estudantes poderão utilizá-la na criação do produto final, se desejarem.

Figura 06 - Parábola de diretriz oblíqua

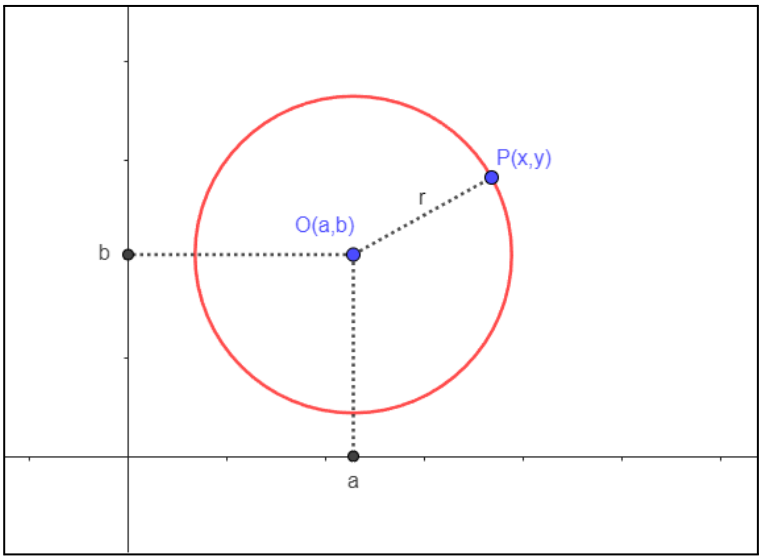


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

3.1.1.4 Equações de circunferência

Segundo Iezzi (2013, p.118), circunferência pode ser definida como: Dados um ponto C, pertencente a um plano π, e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de π que estão à distância r do ponto C. Ou seja, circunferência é lugar geométrico de pontos equidistantes de um ponto fixo, denominado centro da circunferência. A distância constante entre qualquer ponto deste conjunto e o centro da circunferência chamamos de raio.

Figura 07 - Circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As principais formas de descrever algebricamente uma circunferência são:

i. Equação reduzida

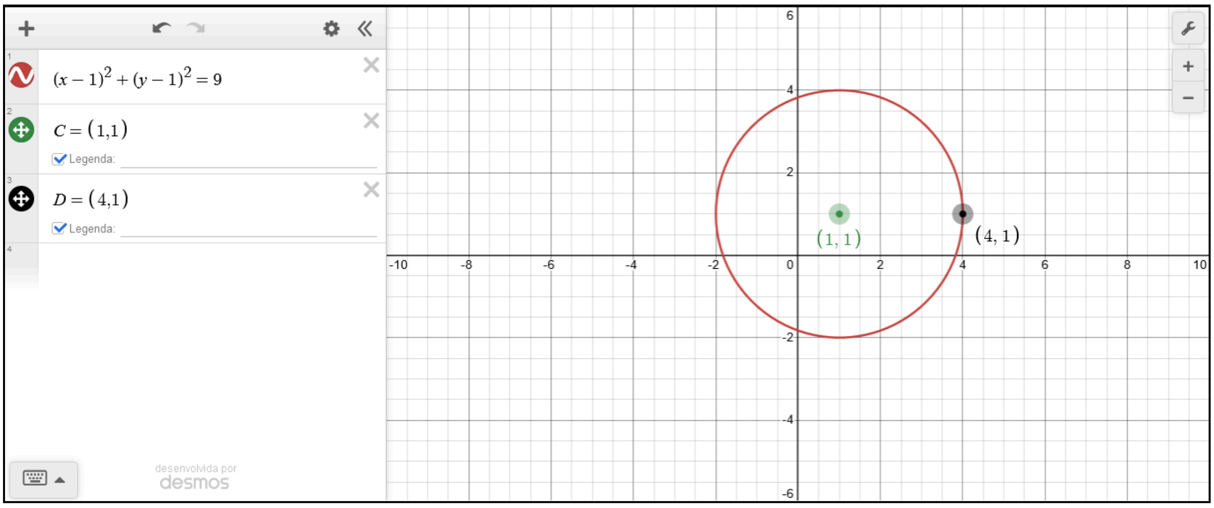
$(X - Xc)^2 + (Y - Yc)^2 = r^2$, com o centro da circunferência dada pelo ponto $C(Xc, Yc)$ e o raio será igual a r, com $r > 0$ para definir uma circunferência e $r = 0$ definindo apenas um ponto.

ii. Equação geral da circunferência

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, com A, B, C, D, E pertencentes aos Reais, com $A = B$ não nulos e $(D^2 + E^2 - 4AF)/(4A^2) > 0.$ No livro Fundamentos da Matemática Elementar, Iezzi (2013, p.121) demonstra esta última relação entre os coeficientes A, D, E e F que é obtida a partir da equação geral, por completamento de quadrados, obtendo-se uma equação equivalente na forma reduzida e exigindo-se que $r^2 > 0.$

Assim, por exemplo, a equação $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 7 = 0$ representa uma circunferência de centro $C(1, 1)$ e raio $r = 3$, pois equivale a $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9.$ Abaixo representamos no software Desmos a circunferência acima, colocando seu centro e um dos pontos da circunferência.

Figura 08 - Exemplo de circunferência



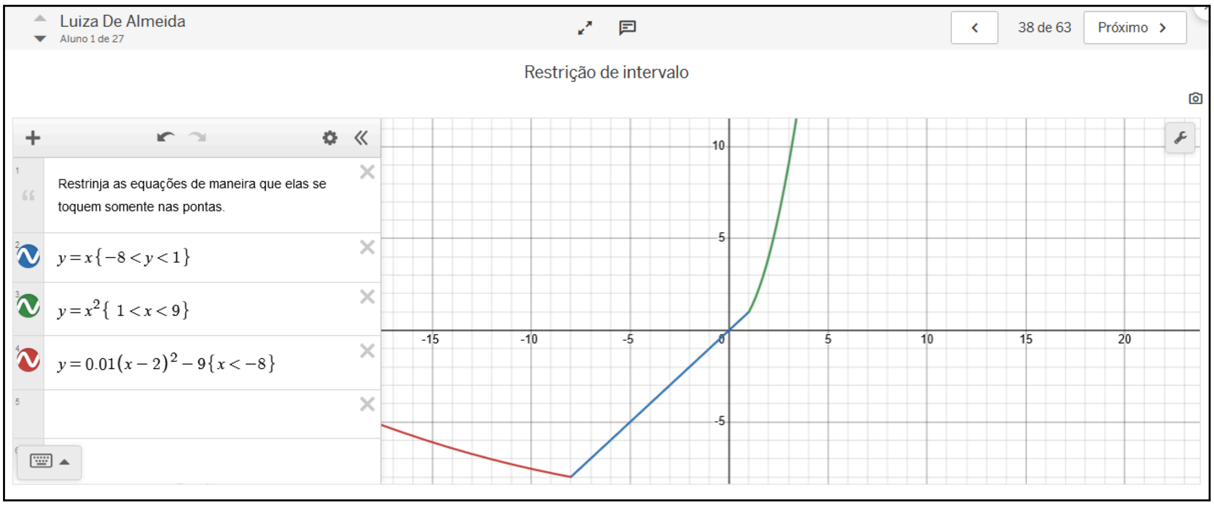
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

3.1.1.5 Restrições de variáveis

Ao inserir uma equação em uma calculadora gráfica, geralmente, ela interpreta que os valores das variáveis x e y podem variar por qualquer valor real que satisfaça a relação descrita. Para limitar a análise a intervalos específicos de interesse, podemos restringir os valores de entrada de uma ou ambas as variáveis. Dessa forma, podemos extrair partes dos gráficos cujas equações conhecemos, aprimorando nossa compreensão das relações entre as variáveis e o gráfico resultante.

Um exemplo de restrição de variável é dado na figura 09 em que haviam 3 equações, reta e duas parábolas e elas estão sendo restritas de forma que visualmente as representações gráficas se "toquem" apenas uma vez, como solicitado na atividade. O intuito aqui é não somente restringir a variável, mas também converter o algébrico para gráfico dentro do Software seguindo os comandos.

Figura 09 - Restrição de variáveis x e y em equações de reta e parábola



Fonte: Print Screen de uma das atividades desenvolvidas no software Desmos pelos estudantes.

3.2 Registros de Representações Semióticas

A dificuldade de ensinar e aprender matemática na escola nos leva a questionar sobre a aprendizagem matemática, em como ela ocorre e se sua compreensão é similar a aprendizagem nas demais disciplinas. Segundo Duval (2009), em matemática, a atividade intelectual depende inteiramente de representações semióticas. A única forma de acessar os objetos matemáticos é através de representações semióticas, o que revela o paradoxo cognitivo da matemática, a ser discutido adiante. Toda prática matemática envolvendo objetos depende das correlações dessas representações. Conforme destaca Moretti (2012), os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, ao contrário dos objetos "reais" ou "físicos". Portanto, é necessário utilizar representantes para acessar e trabalhar com esses objetos.

Segundo Moretti (2012), isso constitui um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: por um lado, a compreensão dos objetos matemáticos é exclusivamente conceitual; por outro, apenas através de representações semióticas é possível realizar atividades com esses objetos. Esse paradoxo se intensifica no ensino básico, onde há uma ênfase significativa no tratamento dos objetos e na construção mental, sem considerar que o acesso a esses objetos depende integralmente das representações semióticas.

Deixando de lado a reflexão sobre a importância das representações semióticas para a compreensão dos objetos matemáticos, muitos docentes acabam focando apenas na apresentação dos conceitos sem considerar a necessidade de coordenar diferentes registros de representação. Segundo a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval (2012b), a compreensão integral de um conteúdo conceitual em matemática depende justamente dessa coordenação entre, pelo menos, dois registros de representação,que fica evidenciada pela rapidez e espontaneidade na conversão entre eles. Embora equações, gráficos e a língua natural sejam amplamente utilizados em sala de aula e nos livros didáticos como representações semióticas, o que muitas vezes falta é uma compreensão clara de como essas representações devem ser correlacionadas para promover uma verdadeira compreensão matemática.

Assim, utilizamos representações semióticas para acessar os objetos matemáticos, muitas vezes sem reconhecer a necessidade dessas representações e sua importância, já que o docente frequentemente as emprega sem um entendimento profundo de como ocorre a compreensão em matemática, conforme apontado por Duval.

De acordo com Duval (2012), às representações mentais abrangem o conjunto de imagens e conceitualizações que um indivíduo forma sobre um objeto ou situação. Em contraste, as representações semióticas são produções resultantes do uso de signos pertencentes a um sistema de representações, cada um com suas próprias características de significação e funcionamento. Exemplos de representações semióticas incluem figuras geométricas, enunciados em língua natural, fórmulas algébricas e gráficos, todos os quais pertencem a diferentes sistemas semióticos.

Raymond Duval também ressalta que não se pode considerar as representações semióticas como meramente subordinadas às representações mentais, pois o desenvolvimento das representações mentais depende da interiorização das representações semióticas. Além disso, apenas as representações semióticas são capazes de cumprir certas funções cognitivas essenciais, como o tratamento das informações.

Além disso, o autor define dois termos: para a apreensão ou produção de uma representação semiótica ele chama de **semiose** e para a apreensão conceitual de um objeto ele chama de **noesis**. É nítido que sem semiose não há noesis, já que precisamos acessar o conceito por meio de suas representações.

As características que um sistema semiótico precisa apresentar, segundo Raymond Duval, são: a formação de uma representação identificável, tratamento e conversão. Abaixo abordaremos cada um destes itens.

i) Formação de uma representação identificável

Para representar um dado ou objeto, é necessário selecionar certas informações relevantes, seguindo as regras específicas de formação de cada sistema de representação. Essas regras garantem que a representação seja identificável e reconhecível, evitando a criação de novas representações que serviriam apenas para apresentar signos e símbolos de forma isolada. Essa seleção de informações é crucial para assegurar que o significado desejado seja corretamente transmitido.

ii) Tratamento

Pode ser compreendido como a transformação da representação dentro do mesmo registro. Por exemplo, uma equação de primeiro grau, $2x + 1 = x + 9$, passa por tratamentos até chegar em $x = 8$. Uma das críticas de Raymond Duval (2012) ao modelo educacional atual é a ênfase nos tratamentos, sem a necessária correlação para a conversão entre registros de representação. Raymond Duval também afirma que é na conversão que de fato ocorre o aprendizado, pois exige domínio das representações e de como cada um dos sistemas está estruturado e relacionado.

iii) Conversão

É a transformação entre representações de diferentes registros, ou a passagem de um registro ao outro, conservando o todo ou o necessário das características do objeto matemático. Note que a conversão é uma transformação externa ao registro de início.

Segundo Duval (2012), a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. Em um dos seus principais trabalhos, segundo Moretti (2012), Duval traz que a conversão é a primeira fonte de dificuldade na compreensão da matemática.

Este fato ocorre se considerarmos que a conversão é uma atividade realizada pelo sujeito, quando deseja passar de um registro ao outro, por exemplo da equação ao gráfico. Isso ocorre desde que haja capacidade de formar representações nos diferentes registros e efetuar tratamentos sobre as representações.

Por exemplo, um aluno pode construir um gráfico a partir de uma equação, atribuindo valores numéricos para as variáveis sem realmente compreender a conversão entre registros algébricos e geométricos. Esse processo pode ocorrer de forma mecânica, sem uma verdadeira conceituação por parte do aluno. Outro exemplo disso é quando o estudante realiza corretamente operações com frações e números decimais, mas não percebe que ambas as representações referem-se ao mesmo número racional. Em outras palavras, o aluno pode reconhecer e tratar essas diferentes representações sem alcançar uma compreensão completa do objeto matemático em questão. Segundo Damm (2003), essa compreensão só se torna significativa quando o aluno é capaz de realizar tratamentos em diferentes registros de representação e fazer a conversão entre eles de maneira natural e fluida (apud Souza; Souza, 2020, p. 6).

De acordo com a teoria de Raymond Duval, na aprendizagem matemática, o foco principal deve ser a compreensão de conceitos, que é alcançada por meio da coordenação de diferentes registros de representação, e não apenas na automatização de procedimentos. Esta coordenação é considerada crucial, especialmente na disciplina de matemática, onde as representações semióticas desempenham um papel central para o acesso aos objetos. Contudo, frequentemente, o ensino de matemática negligencia essa coordenação, dando mais atenção a correspondências locais e introdução de novos registros, sem considerar adequadamente a correlação entre eles. A falta de regras e atividades específicas que promovam essa coordenação é atribuída à falta de conscientização sobre sua importância. As atividades de ensino mais específicas, focadas na apreensão das representações semióticas, aprendizado de tratamentos em diferentes registros e conversão entre eles, são necessárias para promover a compreensão integral (termo usado por Duval).

3.3 Análise de livros didáticos do Ensino Médio

Para entender como os conteúdos abordados neste trabalho são apresentados nos livros didáticos, foram analisadas coleções do Ensino Médio em dois municípios do Rio Grande do Sul. Uma das coleções foi aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e utilizada em uma escola da rede estadual, enquanto a outra é de uma escola privada em Porto Alegre.

O objetivo desta seção é analisar as atividades propostas nas coleções de livros escolhidos no que diz respeito aos conceitos de geometria analítica. A análise foi feita à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica e dos parâmetros curriculares da BNCC.

Inicialmente identificou-se os conteúdos/conceitos relacionados à Geometria Analítica, propostos nos referenciais curriculares nacionais; verificou-se quais capítulos/unidades tratam esses conteúdos/conceitos nas coleções; observou-se as representações semióticas presentes nesses capítulos/unidades.

Primeiramente observamos na coleção da FTD (2017) um módulo composto de três capítulos sobre geometria analítica e ainda um caderno de exercícios sobre o tema. No primeiro capítulo são apresentados, sobre o ponto de vista da geometria analítica, os conceitos de ponto e reta, abordando o sistema cartesiano ortogonal, as bissetrizes dos quadrantes, a distância entre dois pontos, ponto médio, baricentro de um triângulo, condição de alinhamento entre três pontos, equação da reta a partir de dois pontos, equação geral da reta, equação reduzida da reta, equação da reta a partir do coeficiente angular e um ponto qualquer, posições relativas das retas, interseção de duas retas, mediatriz, distância de ponto a reta e área de polígonos no plano cartesiano.

No segundo capítulo, são abordados a circunferência, a equação reduzida, a equação geral, pontos internos e externos à circunferência, e as posições relativas envolvendo circunferências. O terceiro e último capítulo é dedicado aos objetos cônicos:

elipse, parábola e hipérbole, que são figuras geométricas obtidas a partir da intersecção de um plano com um cone circular reto de duas folhas.

Por outro lado, na coleção de Dante (2016) podemos observar três capítulos dedicados à geometria analítica. O primeiro capítulo é dividido em 14 subtítulos: Introdução à geometria analítica, Sistema cartesiano ortogonal, Distância entre dois pontos, Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, Condição de alinhamento de três pontos, Inclinação de uma reta, Coeficiente angular de uma reta, Equação fundamental da reta, Formas de equação de reta, Posições relativas de duas retas no plano, Perpendicularidade de duas retas, Distância de um ponto a uma reta, Área de uma região triangular, Aplicações à Geometria plana.

O segundo capítulo traz no primeiro tópico a Definição de circunferência, no segundo Posições relativas entre retas e circunferências, no terceiro, Problemas de tangência e acaba com Aplicações à Geometria plana. O terceiro capítulo foi dividido em quatro tópicos: Reconhecendo formas, Parábola, Elipse e Hipérbole.

3.3.1 Discussão da Análise dos livros didáticos

Inicialmente notou-se que ambas as coleções de livros didáticos apresentam enfoque para a geometria analítica no 3° volume, sendo este volume voltado ao 3° ano do Ensino Médio. Chamaremos o livro da coleção da FTD 3ª série do Ensino Médio ed.2 (2017) de livro 1 e o livro da coleção do autor Luiz R. Dante, Matemática: Contexto & aplicações: ensino médio 3 Ed (2016) de livro 2 (*L1* e *L2*, respectivamente) dando enfoque aos conceitos que serão trabalhados durante a sequência de atividades.

Primeiramente analisou-se como era a introdução de novos conceitos. O primeiro conceito a ser trazido em ambos os livros é o de ponto, retomando o sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, são apresentados exercícios de conversão entre o sistema de coordenadas do ponto e o plano cartesiano, e vice-versa, visando a compreensão de ambos os sistemas. Enfatizou-se que no *L1*, havia ainda exercícios propostos buscando conexões com outras áreas como a Geometria Plana, através de exercícios envolvendo figuras planas, como por exemplo triângulos e quadriláteros. Também no *L1* observou-se correlações entre as representações gráficas e algébricas com a bissetriz dos quadrantes ímpares e pares, e o sinal das respectivas coordenadas cartesianas. Já no *L2* verificou-se que haviam mais exercícios algébricos do que de outros tipos.

No conceito de distância entre dois pontos, ambas as coleções apresentam distância entre dois pontos envolvendo figuras planas. No *L1* também é apresentado nos exercícios sobre distância algumas noções sobre circunferência. Também é verificado aqui a conexão com conceitos do teorema de Pitágoras, e ambas as coleções trazem a demonstração da distância entre dois pontos através das distâncias de coordenadas cartesianas e pelo triângulo formado no plano cartesiano. No *L2* percebeu-se que os exercícios desta seção não solicitam relação com o plano cartesiano, diferente do *L1*.

Sobre os conceitos de reta e as diferentes equações de uma reta, ambas as coleções apresentam a equação geral da reta, equação reduzida e paramétrica. Notou-se que em ambas as coleções, em capítulo anterior, é introduzido duas seções sobre a inclinação da reta e coeficiente angular a partir da tangente. Percebe-se uma possível conexão com a trigonometria no triângulo retângulo a partir da tangente e assim introduzindo a equação geral da reta e após a equação reduzida e paramétrica. Notou-se que ambas as apresentações de conceitos destacam a conexão com a geometria do plano cartesiano e dão preferência ao uso de representações algébricas. Ambas as coleções apresentam após as sessões de equações de reta algumas seções sobre as posições relativas de retas no plano cartesiano (paralelas e concorrentes) e também conexões com a geometria plana.

As duas coleções apresentam um capítulo sobre circunferência. Percebe-se uma correlação gráfica retomando os conceitos de pontos equidistantes trazidos na seção sobre distância entre dois pontos. Apresentam-se após a equação geral de circunferência, e em especial no *L2,* uma nova seção sobre métodos de completar quadrados, utilizando em grande parte representações algébricas, e também aplicações à geometria plana. Outro ponto de destaque no $L2$, é que a definição da circunferência é dada em linguagem natural no início do capítulo “Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de O” e após apresenta as representações algébrica e gráfica.

A parábola é abordada em ambas as coleções em um novo capítulo, após a seção sobre circunferências. Na coleção L2, esse capítulo é intitulado “Geometria Analítica e Números Complexos”. Ambas as coleções apresentam o conceito de parábola com representações gráficas, mas utilizam principalmente exercícios com foco em procedimentos algébricos e numéricos, com pouca correlação gráfica.

A partir da análise dos livros percebe-se uma fragmentação dos conteúdos com poucas conexões entre eles e com outros conteúdos matemáticos, como funções, por exemplo. Na parte que conecta com geometria plana apenas usufrui-se de alguns conceitos nos exercícios buscando uma conexão com a geometria plana de maneira superficial, apenas exigindo do estudante que lembre conceitos anteriores.

No que diz respeito à apresentação dos conceitos, apresentam-se na maioria das vezes em registros de representação algébricos, gráficos e em linguagem natural, dando enfoque de maneira excessiva ao algébrico e introduzindo os conceitos com suas representações gráficas. Nos exercícios propostos visualiza-se muitos exercícios de tratamento algébrico. Outro ponto é que na maioria dos conceitos não são apresentadas situações-problemas iniciais, a não ser conceitos matemáticos anteriores, muitas vezes nem conectando com outras áreas da Matemática, como a geometria.

Ambos os livros buscam alcançar as competências e habilidades trazidas na BNCC e trazem exercícios de conversões, há um privilégio pelo uso de registro algébrico. Conforme a teoria de Raymond Duval, é necessário o reconhecimento de um objeto matemático nos diferentes registros e saber realizar tratamentos (passagem de uma representação a outra dentro de um mesmo registro) e conversões (passagem de uma representação a outra em registro diferente).

Após a análise dos livros didáticos, com foco na geometria analítica, podemos afirmar que esses recursos devem ser utilizados pelos professores para auxiliar no desenvolvimento do conhecimento dos estudantes, alinhados com as habilidades e competências da BNCC. Na análise dos livros, é importante considerar os Registros de Representação Semiótica de Duval como um aliado para examinar as atividades propostas. Isso garante que a aprendizagem dos objetos matemáticos ocorra de forma a conectar as representações semióticas com os próprios conceitos. Assim, é possível perceber correlação entre representações gráficas e algébricas.

4 METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada com uma turma do primeiro ano do curso de Ensino Médio integrado ao técnico em Química do IFRS - Caxias do Sul durante as aulas da disciplina de Matemática. A sequência de atividades aplicada em sala de aula foi embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica utilizando o Software Desmos. A aplicação ocorreu no laboratório de informática da instituição.

A proposta de pesquisa, que envolveu a participação de estudantes, foi submetida ao comitê de ética na pesquisa do IFRS por meio da Plataforma Brasil. Nesse processo, foram enviados documentos detalhando as propostas e metodologias, incluindo os benefícios e riscos para os participantes. Após a aprovação do projeto por parte do comitê de ética, a carta de anuência institucional (Apêndice VI) foi encaminhada ao IFRS - Caxias do Sul, e os termos de assentimento (Apêndice VII) e consentimento (Apêndice VIII) foram disponibilizados aos estudantes para assinatura, caso optassem por participar da pesquisa.

O desenvolvimento das atividades propostas abordam sobre objetos matemáticos presentes na Geometria Analítica. Buscou-se ampliar a quantidade de significados para estes objetos e ampliar os conceitos matemáticos adquiridos pelos estudantes naquele ano, já que já haviam estudado funções e haviam utilizado notações, expressões e gráficos.

A pesquisa teve caráter qualitativo, visando compreender como os estudantes atribuem significado aos objetos matemáticos nas representações semióticas, em especial gráfica e algébrica. Pensando nas características principais de uma investigação qualitativa Bogdan e Biklen (1994, p.16) apresentam 5 principais características:

> 1. A situação natural constitui a fonte dos dados, sendo o investigador o instrumento-chave da recolha de dados; 2. A sua primeira preocupação é descrever e só secundariamente analisar os dados; 3. A questão fundamental é todo o processo, ou seja, o que aconteceu, bem como o produto e o resultado final; 4. Os dados são analisados intuitivamente, como se se reunissem, em conjunto, todas as partes de um puzzle; 5. Diz respeito essencialmente ao significado das coisas, ou seja, ao “porquê” e ao “o quê”.

Durante toda a aplicação da sequência de atividades buscou-se seguir estas características principais descritas pelos autores. Os dados foram coletados durante a aplicação da sequência de atividades e ficaram registrados no próprio software. Também foi utilizado um diário de bordo pelo pesquisador.

Já a coleta de dados no software consistia em campos a serem respondidos e as respostas eram enviadas automaticamente para o pesquisador e algumas compartilhadas com a turma. Além disso, como foram elaboradas duas atividades práticas no software, os registros também foram salvos no próprio software. O diário de bordo do pesquisador visa contribuir e discutir alguns pontos trazidos à sala, complementando com registros indiretos, como discussões que não foram gravadas, telas que não foram salvas ou conversas entre os próprios estudantes que parecem interessantes para a pesquisa. Alguns pontos foram anotados no diário de bordo devido sua frequência em sala por diferentes estudantes, o que também ajuda a compreender a atribuição de significado que os estudantes colocavam sobre um dado símbolo ou conceito.

A escolha do IFRS - Caxias do Sul para a realização desta pesquisa foi motivada por uma conexão pessoal do pesquisador com a instituição, onde ele estudou durante nove anos, abrangendo o ensino médio, a graduação e, atualmente, o mestrado. Essa escolha reflete o desejo de retribuir o apoio e carinho recebidos ao longo desses anos. Além disso, a decisão foi influenciada pela excelente infraestrutura do campus, pela facilidade de acesso e pela receptividade da instituição, fatores que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho. A turma do primeiro ano do Ensino Médio Integrado ao técnico em química deu-se devido a quantidade de períodos, a disponibilidade da professora titular e os conteúdos trabalhados no ano, o que ajudou a aprofundar os conceitos já vistos.

Da turma de 31 estudantes, 22 estudantes autorizaram sua participação na pesquisa, coleta de dados e divulgação de imagens. Os outros 9 estudantes participaram das aulas, mas os dados destes estudantes não foram considerados na pesquisa. Foram necessários doze períodos de 50 minutos para a aplicação da sequência de atividades, esses períodos foram distribuídos no decorrer de seis semanas de aula. As etapas da sequência de atividades foram: questionário inicial (1 período); parte teórica sobre reta, parábola, circunferência e restrição de variáveis (4 períodos); aplicação dos conceitos vistos no jogo de pegar estrelas e na construção de imagens (6 períodos); e questionário de avaliação (1 período). Caso o leitor queira se aprofundar mais nas etapas, visualize a tabela 02 na seção 6.2.

As instruções para a resolução das atividades da sequência de atividades estavam contidas nela mesma, assim, os estudantes desenvolveram de forma autônoma as tarefas solicitadas. O pesquisador desempenhou o papel de observador, intervindo individual ou coletivamente conforme necessário. Dessa forma, o estudante foi protagonista na construção de seu próprio conhecimento, engajando-se no desenvolvimento das atividades e compartilhando dúvidas tanto com colegas quanto com o pesquisador. Importante constar que buscou engajar os estudantes durante o desenvolvimento das atividades, principalmente devido à sua ludicidade e a curiosidade.

Cabe também salientar que a pesquisa foi desenvolvida, como dito anteriormente, de maneira que ampliasse a quantidade de significados e suas relações dos conceitos. A professora titular da turma já havia trabalhado os conceitos de retas, parábolas e plano cartesiano dentro do conteúdo de funções, mas a sequência de atividades visa uma abordagem sobre o viés da geometria analítica. Os conceitos de circunferência não haviam sido trabalhados do ponto de vista da geometria analítica, envolvendo representações algébricas e gráficas, mesmo que muitos já tivessem alguma ideia sobre o que fosse uma circunferência. Assim, foi possível ampliar este conceito.

Outro tópico importante é o de restrição de variáveis, visto anteriormente pelos estudantes em funções, principalmente como restrição de domínio. Durante a sequência de atividades foi trabalhada a restrição em ambas as variáveis, x e y.

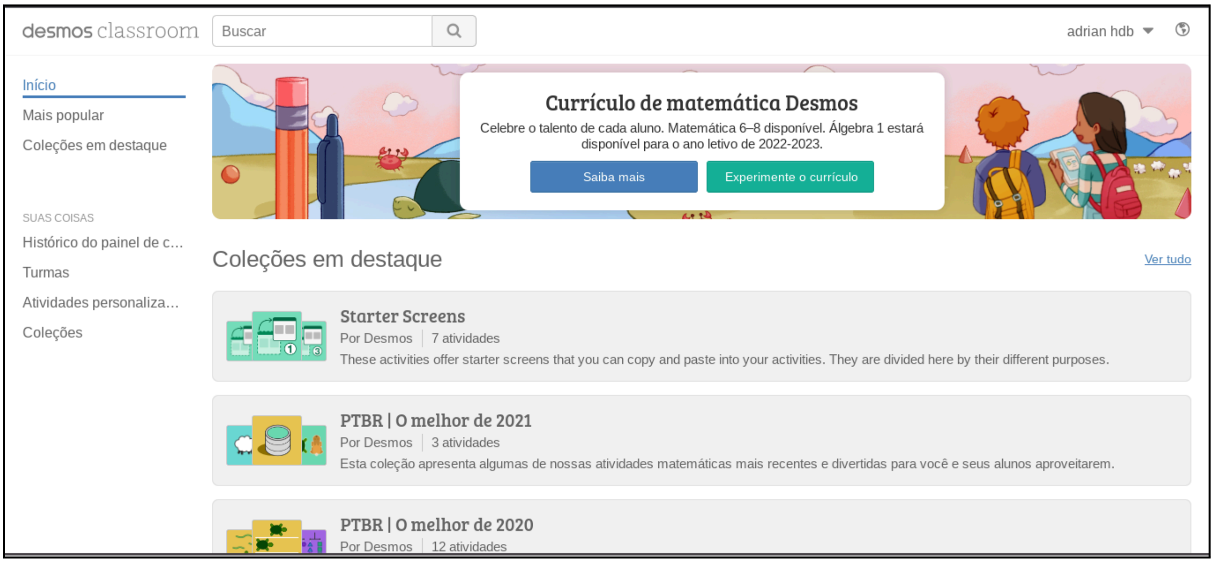
4.1 Plataforma Desmos

O Desmos Studio (2024), responsável pelo software Desmos (calculadora gráfica e o Desmos Classroom, utilizados aqui neste trabalho) é uma corporação de benefício público. Seu objetivo é de oportunizar, ajudar e incentivar aos mais de 75 milhões de usuários a aprender Matemática, seja numa representação, uma conjectura ou desenvolver algum projeto, por exemplo, artístico ou físico.

O software Desmos possui duas funções principais e que aqui foram utilizadas: a calculadora gráfica e o Desmos Classroom (figura 12). Primeiramente no Desmos

Classroom possui uma plataforma com acessos distintos para professor e estudante, sendo que o perfil do professor pode editar atividades, montar grupos de estudos, turmas de estudantes, criar atividades personalizadas, etc.

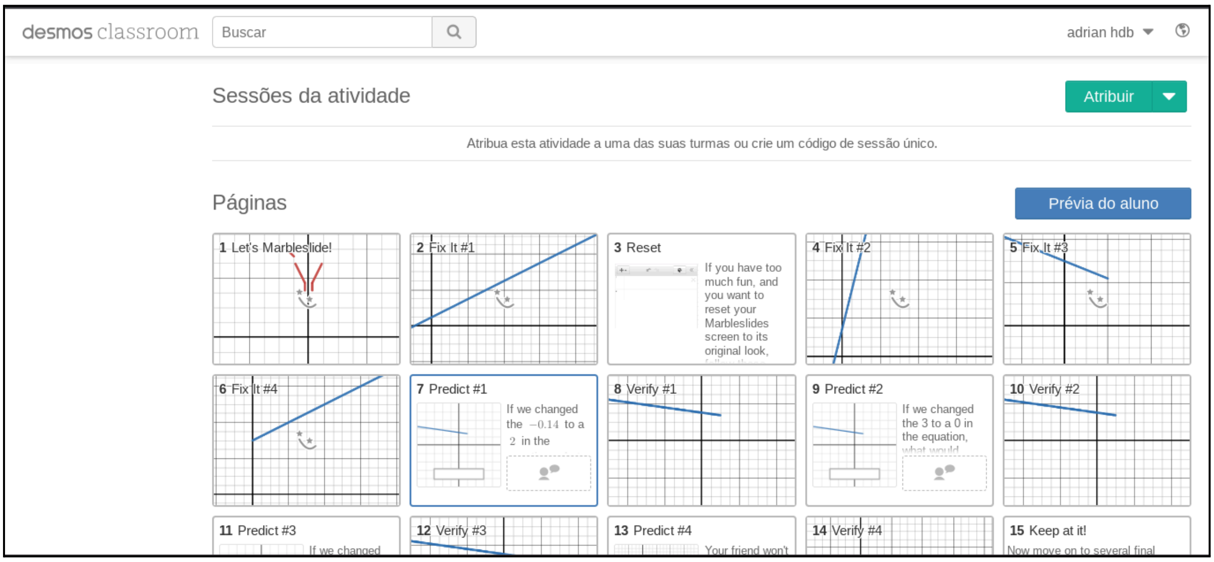
Figura 10 - O software Desmos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Dentre as funcionalidades do software Desmos, foi utilizada em especial neste trabalho a criação e edição de atividades personalizadas. É possível usar atividades elaboradas por outros usuários e também editá-las. O estudante vê páginas de slides, em que inicia na primeira e segue cada slide na ordem até a última. Porém, também é possível voltar ou avançar slides, caso queira.

Figura 11 - Atividade no Desmos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na edição da atividade (figura 14), existem diferentes opções para o *layout* da página, de maneira que cada um destes modos solicita do usuário diferentes tipos de interação, como: Nota, Resposta livre, Resposta matemática, Múltipla escolha, Caixas de seleção, Lista ordenada, Gráfico, Desenho, Mídia, Tabela e botão de ação.

Figura 12 - Menu de criações de atividade 01

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Estes itens do menu (ao lado esquerdo da figura 14) podem ser adicionados da maneira desejada - quantos e como quiser no slide. Há também outras funcionalidades, como a Calculadora gráfica, Criador de desafios, Polígrafo, entre outros. Esses podem ser adicionados de maneira individual, já que cada *applet* possui vários recursos. Além disso, é possível colocar bibliotecas e extensões como a bola que cai e as estrelas, que foram utilizadas em um dos jogos da sequência de atividades proposta no próximo capítulo.

Outro recurso do software Desmos é que é possível armazenar as respostas dos estudantes, para posterior visualização pelo professor. O professor pode criar uma turma a fim de organizar os dados coletados. Durante a resolução das atividades, por parte do estudante, é possível para o professor visualizar um quadro geral de atividades em tempo real, permitindo-o saber em que ponto da sequência de atividades cada estudante está trabalhando.

Outro ponto importante a ser mencionado é a estrutura do software Desmos, de maneira que simplifica o planejamento e a execução de atividades de matemática, oferecendo uma interface intuitiva que permite aos professores estruturar o conteúdo de forma sequencial. Ao mesmo tempo, dá aos alunos autonomia para explorar o material na ordem desejada. Com uma variedade de ferramentas interativas, como gráficos e equações, o Desmos oportuniza uma aprendizagem autônoma, permitindo que os alunos trabalhem em seu próprio ritmo e experimentem diferentes abordagens para resolver problemas.

É interessante observar a progressão inicial dos estudantes no software e a forma como a sequência de atividades foi elaborada. Compreender a maneira como as atividades foram estruturadas é fundamental para desenvolver cada etapa nos slides e avançar para as próximas atividades. Isso ocorre porque há slides dedicados a experimentar comandos, outros para responder perguntas e alguns para adaptar o que é solicitado, o que demonstra a diversidade de abordagens presentes na sequência de atividades.

Considerando essas características, reconhecemos que o software Desmos oferece diversos aspectos que aprimoram significativamente a implementação da proposta didática e enriquecem a experiência de aprendizado dos alunos. Conscientes da teoria de Duval, elaboramos uma sequência de atividades que estimula a correlação em registros de representação, promovendo uma compreensão mais profunda. Além disso, o software simplifica o trabalho do pesquisador ao facilitar a análise e coleta de dados durante o processo de aprendizagem dos estudantes.

4.2 Proposta didática

Neste capítulo apresentamos uma sequência de atividades para estudantes do Ensino Médio. A aplicação ocorreu em 6 encontros, em um intervalo de 45 dias, totalizando 12 períodos de 50 minutos cada. O objetivo principal desta atividade foi de promover o aprendizado de Geometria Analítica, mais especificamente dos conceitos de reta, parábola e circunferência. Também foi planejada a aplicação em um jogo e em uma atividade final que abarcasse os conceitos estudados. O capítulo foi dividido em duas subseções: pré-requisitos para a execução das atividades propostas e etapas da sequência de atividades e atividades propostas.

4.2.1 Pré-requisitos para a execução das atividades propostas

Como o público alvo da proposta didática são estudantes do Ensino Médio, com o intuito de retomar e apresentar maior significado aos conhecimentos pré-adquiridos, como os pontos do plano cartesiano, equações e inequações, circunferência, parábola, etc., as atividades começam retomando os conceitos de reta ($y = x$ ou $x = y$), parábola ($y = x^2$ ou $x = y^2$) e circunferência ($x^2 + y^2 = r^2$) a partir de suas equações mais básicas ou comuns - chamaremos-as de equações mãe.

A partir de cada equação mãe, por meio de transformações, obtemos outras equações similares que descrevem diferentes retas, parábolas e circunferências. Neste processo, chamamos a atenção do aluno para as alterações gráficas que estas transformações produzem. Para o caso das retas utilizamos a equação geral com coeficiente de y sendo 1, vista também como equação reduzida $y = ax + b$. Através de controles deslizantes pode-se variar os valores de a e b e perceber as alterações feitas no gráfico, de maneira que variações nos valores de a, modificam a inclinação da reta em relação ao eixo x e em b, transladam o gráfico verticalmente.

Já para o caso das parábolas, principalmente em livros para o primeiro ano do Ensino Médio, é comum utilizar a equação de segundo grau na forma $y = ax^2 + bx + c$ com coeficientes a, b e c números reais fixados. Iremos trabalhar com um tratamento nesta equação a fim de evidenciar o efeito nos gráficos das alterações feitas nos coeficientes. Para uma equação na forma $y = k.(x - h)^2 + v$, podemos notar que k faz função similar ao coeficiente a, alterando a "abertura" (visualmente) da parábola e sua concavidade, enquanto h translada o gráfico na horizontal e v, com função similar ao c, translada o gráfico verticalmente.

As conversões entre os registros gráfico e algébrico, e vice-e-versa, a sequência se encaminha para o aprendizado das restrições de variáveis, na qual limita as variáveis em intervalos. Restringindo uma das variáveis da equação, o gráfico se altera, pois as variáveis não assumem todos os valores reais, mas sim limitam o intervalo superiormente, inferiormente ou em ambos.

4.2.2 Atividades propostas

Tabela 02 - Etapas do projeto

Etapa 1 (Impresso)	1ª aula (1 período de 50 min)	Atividade 0: Questionário inicial
Etapa 2 (Desmos)	2ª a 5ª aula (4 períodos de 50 minutos)	Atividade 1: Equações de reta
		Atividade 2: Equações de Parábola
		Atividade 3: Equações de circunferência
		Atividade 4: Restrições de variáveis
Etapa 3 (Desmos)	6ª e 7ª aula (2 períodos de 50 minutos)	Atividade 5: Relembrando conceitos de equações para as atividades práticas
		Atividade 6: Jogo das estrelas
Etapa 4 (Desmos)	8ª a 11ª aula (4 períodos de 50 min)	Atividade 7: Montagem de imagens com equações
Etapa 5 (Impresso)	12ª aula (1 período de 50 min)	Atividade 8: Questionário de avaliação

Fonte: O próprio autor.

A seguir apresentamos um esquema detalhando estas etapas:

Etapa 1 - Questionário disponível no Apêndice I:

1ª aula (1 período de 50 minutos):

Atividade 0: Explicação dos objetivos da sequência de atividades. Questionário de pesquisa inicial: Coletando dados e quais conceitos os estudantes possuem algum conhecimento sobre plano cartesiano e equações.

Etapa 2 - Disponível no apêndice II:

2ª a 5ª aula (4 períodos de 50 minutos) - Durante toda a etapa dois é questionado sobre as representações algébricas e figurais, baseando-se nos princípios da teoria de Duval, conectando-as através da representação em língua natural. Também durante toda esta etapa é utilizado o software Desmos, como instrumento da sequência de atividades, mas também como coletor de dados:

Atividade 1: Funcionamento do software Desmos e compreensão sobre a equação de reta com duas variáveis de grau um, seus coeficientes e uma constante. O intuito desta atividade é compreender como uma reta pode ser representada matematicamente e como o gráfico ocasiona em uma equação específica de reta.

Atividade 2: Compreender o papel dos coeficientes e do termo independente nas equações de parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo x e y., O intuito desta atividade é compreender como uma parábola pode ser representada algebricamente e como representa-se o gráfico de uma dada equação específica de parábola.

Atividade 3: Analisar a equação de circunferência e o papel de seus coeficientes. O intuito desta atividade é compreender como uma circunferência pode ser representada algebricamente e como o gráfico representa-se num plano cartesiano de uma dada equação específica de circunferência.

Atividade 4: Compreender como as restrições nas variáveis x e y modificam o gráfico de algumas equações, seja restringindo x ou y. Qual a mudança gráfica dada pelas das restrições e em que limita o gráfico? Ou, como podemos fazer o oposto, do gráfico para algébrico?

Etapa 3 - Disponível no apêndice III:

6ª e 7ª aula (2 períodos de 50 minutos), Utilização do software Desmos em todas as atividades:

Atividade 5: Inicialmente é feito uma retomada dos conceitos de equações, principalmente de equações de reta e de restrições para poder aplicar na atividade 6 e 7.

Atividade 6: Jogo das estrelas. O objetivo desta atividade é aplicar os conceitos de equações e gráficos de maneira que seja possível a bola (que cai para baixo em simulação da ação da força gravitacional) colete todas as estrelas de cada fase. Assim, o público alvo pode aplicar conceitos estudados anteriormente durante a sequência de atividades, *elaborando diferentes respostas (já que não há única solução) fundamentadas na construção dos conceitos anteriores.*

Etapa 4 - Disponível no apêndice IV:

8ª a 11ª aula (4 períodos de 50 minutos), Utilização do software Desmos e internet para consultar imagens para o trabalho elaborado:

Atividade 7: Construção de imagens com gráficos de equações. A partir de uma imagem escolhida pelo autor ou livremente, os estudantes terão que elaborar uma figura com gráficos de equações digitando-as na janela de álgebra do Software Desmos. Assim, aplicando conceitos trabalhados anteriormente. As alterações na janela de álgebra provocam instantaneamente alterações nos gráficos, permitindo ao aluno que modifique sua figura a partir do experimentado. Essa será a última avaliação da sequência de atividades, podendo ser publicadas (internamente para a turma ou até mesmo divulgada na própria plataforma ou instituição) as imagens finais de cada estudante.

Etapa 5 - Questionário disponível no apêndice V:

12ª aula (1 período de 50 minutos):

Atividade 8: Coleta de dados após a sequência de atividades. Questionário de avaliação similar ao questionário inicial da etapa 1, mas com alguns questionamentos adicionais, que também pretende-se avaliar a participação dos estudantes. É solicitada uma autoavaliação e também uma avaliação da sequência de atividades.

Obs.: Os estudantes foram avaliados durante a execução de toda a sequência de atividades, por meio de observações e da análise das respostas coletadas e dos dados armazenados no software Desmos. Também durante toda a sequência de atividades é possível para o estudante voltar e avançar nas páginas de atividades com autonomia, assim é possível que eles retomem e testem conceitos de maneira autônoma e ágil.

5 ANÁLISE DE DADOS

A sequência de atividades foi planejada para que os estudantes a desenvolvessem de maneira individual. Contudo, no laboratório de informática da instituição onde a sequência foi aplicada, os computadores estavam dispostos em grupos de quatro. Naturalmente, sem a intervenção do professor, formaram-se grupos de quatro estudantes. Eles trabalharam individualmente, mas, quando necessitavam de ajuda ou surgia alguma discussão, debatiam primeiramente com os colegas próximos e, quando não chegavam a uma conclusão, consultavam o professor da turma ou o pesquisador.

A atividade também foi planejada para que o estudante a desenvolvesse de forma autônoma, com a complexidade aumentando gradativamente. As propostas visavam promover a experimentação e atividades encadeadas, ou seja, a própria resolução de uma atividade leva a conclusões importantes para a próxima atividade. Ainda, em vários momentos, era sugerido ao aluno que ele voltasse às atividades anteriores para se apropriar das informações relevantes para uma determinada atividade. Também não foi restringido o acesso dos alunos à internet. Com isso, percebeu-se que, durante as aulas, eles utilizaram buscadores para pesquisas relacionadas às atividades e fizeram uso de inteligência artificial.

No decorrer de toda atividade o pesquisador atuou de forma descentralizada, auxiliando quando solicitado. Foram poucos os momentos de aula expositiva ou centrada no professor, somente quando de fato era uma dúvida geral ou pontualmente antes de algumas atividades. Por exemplo, quando justificou-se a utilização da equação de parábola no formato $y = q.(x - h)^2 + v$, pois era diferente daquela que os estudantes haviam visto em sala com a professora titular.

Também enfatiza-se o objetivo da sequência de atividades, que não foi de introduzir conteúdos, mas sim retomar, aprofundar e fazer refletir sobre os conteúdos trabalhados naquele ano. Foram apresentados os conceitos matemáticos a partir de outro ponto de vista, o da geometria analítica, pois os estudantes haviam estudado somente os conceitos de funções.

No decorrer do desenvolvimento da atividade, os estudantes puderam reorganizar os conhecimentos construídos durante o ano, sendo protagonistas do seu próprio saber. Por exemplo, no desenvolvimento das atividades teóricas ou na produção e aplicação dos conceitos. O jogo de pegar estrelas e a tarefa de criação de imagens promoveu ainda mais esse protagonismo.

Um resultado importante da aplicação da sequência de atividades ficou evidenciado pelo que foi trazido pelos estudantes no questionário final, eles afirmaram que aprimoraram seus conhecimentos sobre função afim e quadrática para além do estudado com a professora titular da turma. Disseram também que ampliaram seus entendimentos sobre os conceitos de representações gráficas, translações e restrições de variáveis.

Esta sequência de atividades também proporcionou aos alunos um primeiro contato com a equação de uma circunferência. Como retomaremos mais à frente neste texto, percebemos evidências de que os estudantes conheciam pouco sobre este objeto matemático. Durante a sequência de atividades os estudantes trabalharam com as equações, gráficos e elementos de uma circunferência. As atividades visavam promover a conversão entre os registros gráfico e algébrico deste objeto matemático, promovendo assim um melhor entendimento sobre circunferências.

Os estudantes também elogiaram a atividade do jogo das estrelas e da montagem de imagens por sua aplicação prática dos conceitos estudados. Também foi elogiada a forma encadeada que as atividades estavam dispostas. Eles relataram que os conceitos mobilizados em uma atividade os ajudavam na resolução da próxima e assim por diante. Ainda, que podiam voltar atrás caso o quisessem e este recurso ajudou-os bastante.

Com o jogo das estrelas, os estudantes puderam praticar os conceitos estudados durante as atividades, testando seus conhecimentos. Um exemplo disso, foi quando eles quiseram representar graficamente curvas ovaladas na construção das imagens, o que abriu uma discussão sobre equações de elipses. Com a ajuda do professor, buscaram conhecer mais sobre elipses, que não era objetivo do trabalho, porém com o questionamento foi investigado possíveis correspondências com a equação de uma circunferência, já que as representações algébricas desses dois objetos matemáticos possuem algumas semelhanças, como por exemplo quando os eixos maior e menor da elipse são iguais (a=b) temos a circunferência. Por fim, os estudantes fizeram um questionário para avaliar a sequência de atividades e fazer uma autoavaliação.

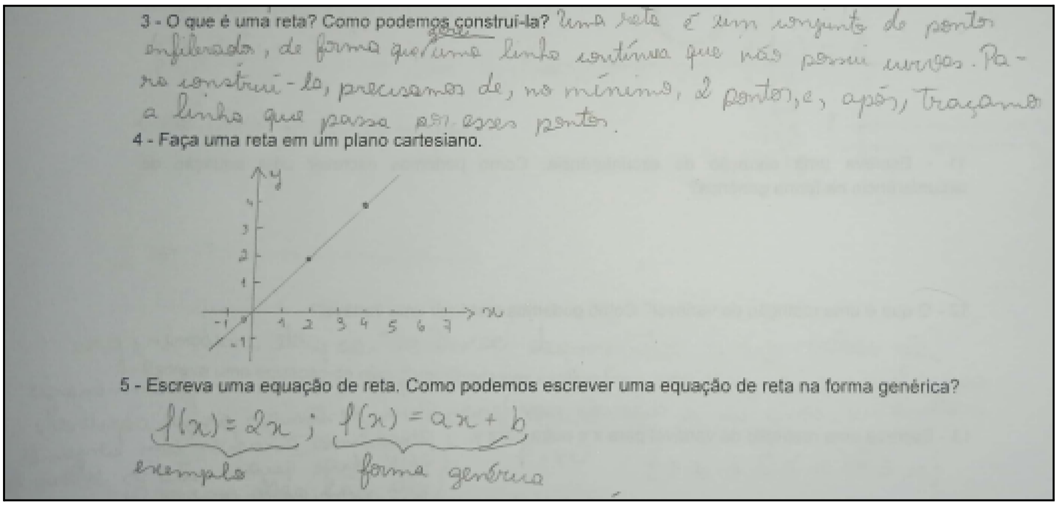
Na próxima seção analisaremos os dados de cada etapa da sequência de atividades, apontando as evidências de aprendizagem ao longo das atividades com o objetivo de evidenciar a contribuição da sequência de atividades na aprendizagem.

5.1 Etapa 1: Questionário inicial

Na primeira aula foi aplicado o questionário inicial (Anexo I). O questionário tem 14 questões sobre os conceitos matemáticos que foram trabalhados durante as atividades. O intuito deste questionário é observar quais tipos de registros e representações dos objetos matemáticos que serão estudados já são conhecidos pelos estudantes.

Como foi levado em consideração os conhecimentos anteriores dos estudantes, deve-se constar que naquele ano letivo, os estudantes já haviam estudado funções (conceito, afim, quadrática, exponencial, logarítmica) e Progressão Aritmética (PA) e Geométrica (PG). Os conceitos trabalhados na sequência de atividades são os conceitos apresentados no questionário inicial, como plano cartesiano, equações, retas, parábolas, circunferências e restrições de variável. Outro ponto crucial do questionário inicial é que as perguntas são dadas em linguagem natural, exigindo do estudante respostas em linguagem natural (descrição dos conceitos), gráficas (no plano cartesiano) e algébricas (equações).

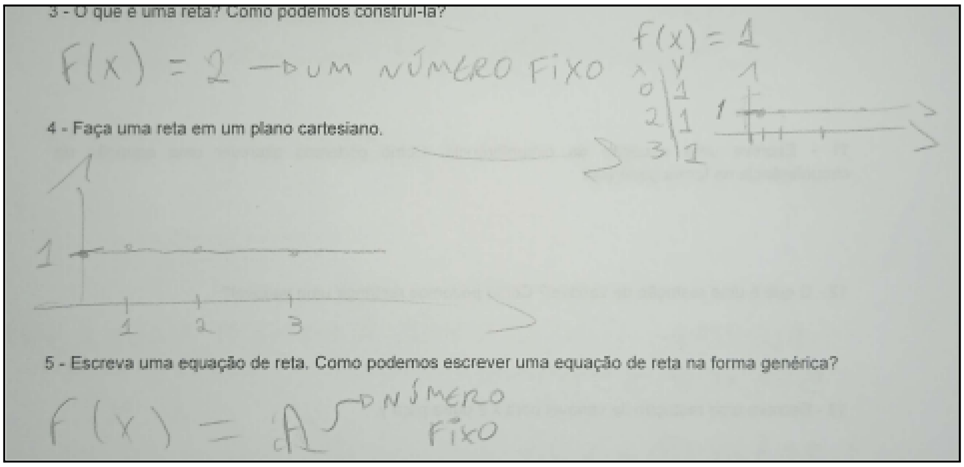
Figura 13 - Respostas com formato de função(1)



Fonte: Próprio autor, 2024.

Notou-se no decorrer da análise das respostas que mais da metade dos estudantes utilizavam notação de função, usando, por exemplo, $f(x) = 2x$ para denotar a reta $y = 2x$ (Vide figuras 15 e 16), ou funções quadráticas para representar parábolas.

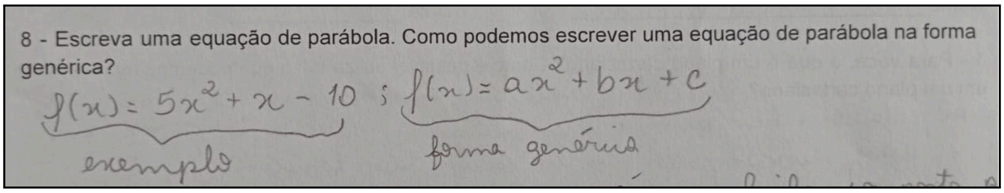
Figura 14 - Respostas com formato de função(2)



Fonte: Acervo do pesquisador, 2024.

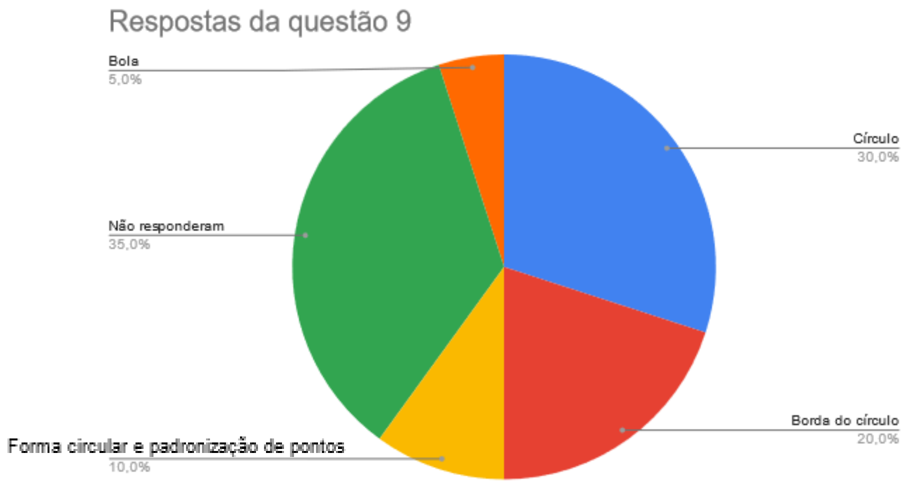
Notou-se também que os estudantes já conheciam uma forma algébrica de representar reta, utilizando funções afim. Igualmente para a parábola, os estudantes apresentam suas respostas usando a notação de função quadrática em vez de utilizar a equação $y = ax^2 + bx + c$, como mostra a figura 17.

Figura 15 - Resposta Parábola



Fonte: Acervo do pesquisador, 2024.

Outra evidência observada a partir da análise das respostas das questões de circunferência, é que poucos estudantes conseguiram representar circunferências fazendo uso de registro algébrico ou de linguagem natural. A maioria dos estudantes conseguiu representar uma circunferência de forma geométrica em um plano cartesiano. Haviam três questões (números 9, 10 e 11) do questionário que tratavam de circunferência. A questão número 9 perguntava o que é uma circunferência e como construir uma, a questão número 10 pedia para esboçar em um plano cartesiano uma circunferência e a questão número 11 solicitava uma equação de circunferência qualquer e após uma equação geral de circunferência. Na questão número 9:



Fonte: Próprio Autor.

Notou-se a partir das respostas que o conceito de circunferência não havia sido trabalhado, mas que os estudantes possuíam uma noção da circunferência com relação ao círculo ou não souberam responder. Já na pergunta número 10, 11 estudantes desenharam a circunferência no plano cartesiano, enquanto os outros nove não responderam.

Na pergunta número 12, sobre restrição de variáveis, treze dos estudantes, responderam que uma restrição de variável é quando uma variável não consegue assumir alguns valores, enquanto os outros sete não responderam a questão. Já na questão número 13, que solicitava um exemplo de restrição de variável para x e outra para y, doze dos estudantes elaboraram uma resposta algébrica para a restrição e os outros 8 estudantes não responderam a questão. Por último, na questão 14, o enunciado solicitava uma equação de reta no plano cartesiano com restrição de uma das variáveis, oito dos estudantes conseguiram elaborar uma reta com restrições e os outros 12 não responderam a questão.

A análise das respostas dos estudantes sobre circunferências revela que poucos conseguiram representar circunferências usando registros algébricos ou linguagem natural, com a maioria apresentando representações geométricas em um plano cartesiano. Entre as questões abordadas, as respostas indicam uma compreensão limitada do conceito de circunferência, com alguns confundindo-a com o círculo. As respostas à questão sobre restrições de variáveis mostram que treze estudantes entenderam a ideia de restrição, mas houve dificuldades na aplicação desse conceito, com doze alunos oferecendo respostas adequadas para restrições e apenas oito conseguindo elaborar uma reta com restrições no plano cartesiano. Assim, as dificuldades dos estudantes estão principalmente na compreensão conceitual e na aplicação prática de representações matemáticas e restrições de variáveis.

Em muitas das respostas sobre restrições, nota-se o uso de notação e nomenclatura de função e relações com os conceitos de Domínio e Contradomínio de uma função afim. Notou-se durante toda a análise de respostas ao questionário inicial que os estudantes fundamentaram as respostas sobre retas e parábolas muito mais que nas respostas sobre circunferências e restrições de variáveis.

5.2 Etapa 2: Parte teórica da sequência de atividades

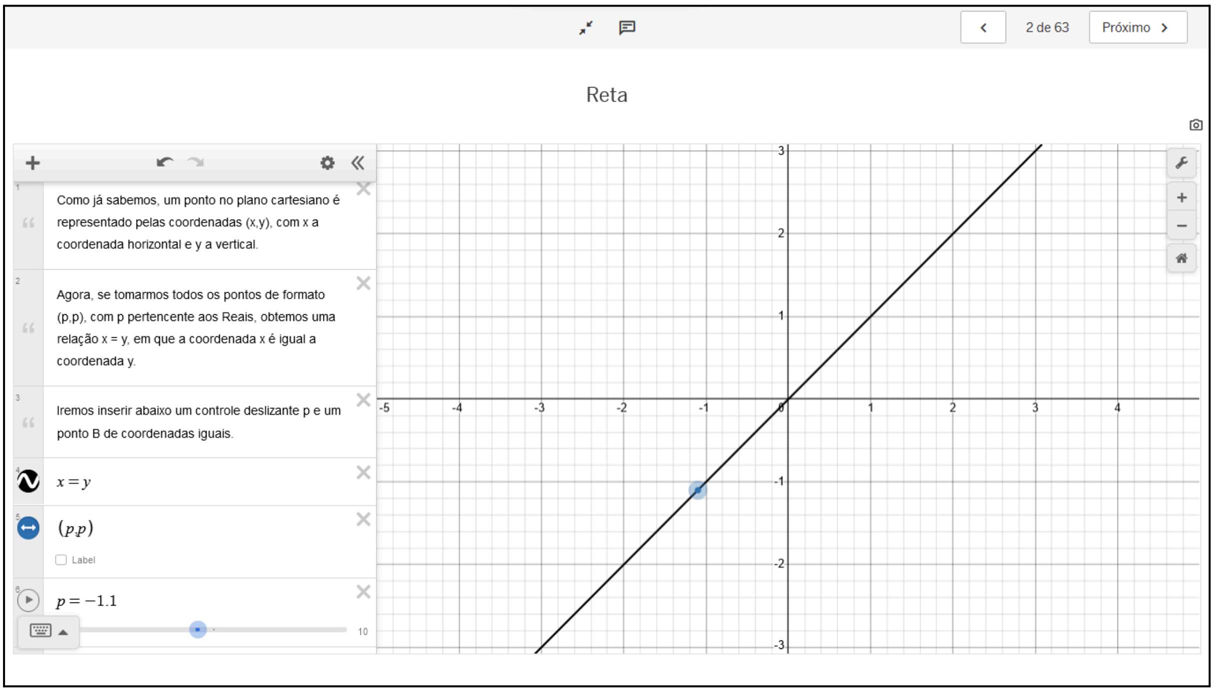
Nesta seção, detalharemos a sequência de atividades com base na análise dos dados obtidos desde o primeiro contato com o software Desmos. Explicaremos cada etapa da sequência, abordando as etapas das retas, parábolas, circunferências, restrição de variáveis, jogo das estrelas e atividade de criação de imagens.

5.2.1 Retas na sequência de atividades: 2ª e 3ª aula

A partir da segunda aula foi iniciada a atividade no software Desmos, sendo que os estudantes tiveram contato com outro software matemático (GeoGebra) ao longo do ano letivo. A primeira aula e as atividades iniciais da sequência de atividades são voltadas também à sintaxe do software, auxiliando os estudantes em como utilizar símbolos para cada objeto matemático, por exemplo, descrevendo como representar pontos em coordenadas cartesianas ou equações de retas no plano.

Dos 63 slides totais de atividades, os 18 primeiros são sobre retas. O primeiro slide apresenta os conceitos a serem trabalhados ao longo da sequência de atividades. Do slide 2 até o slide 6, as atividades propostas conectam os conceitos de ponto e reta. No software é possível criar controles deslizantes de nome p, por exemplo, e pontos de coordenadas cartesianas (p, p) e equações e retas como na figura 18. Elaboramos as atividades dos slides 2 até 6 de maneira que os estudantes percebam que há uma variação proporcional entre as coordenadas dos pontos e que o ponto percorre a reta na medida em que mudam os valores do controle deslizante. Muitos dos estudantes alteraram o controle deslizante de maneira manual e após apertaram na ferramenta “executar”, que faz aumentar de 0,01 em 0,01 em curto intervalo de tempo causando um movimento dentro do software. Trazendo a ideia de que a reta é um conjunto de pontos com certa propriedade (coordenadas proporcionais, neste primeiro momento da sequência de atividades).

Figura 16 - Tarefa do slide 2 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

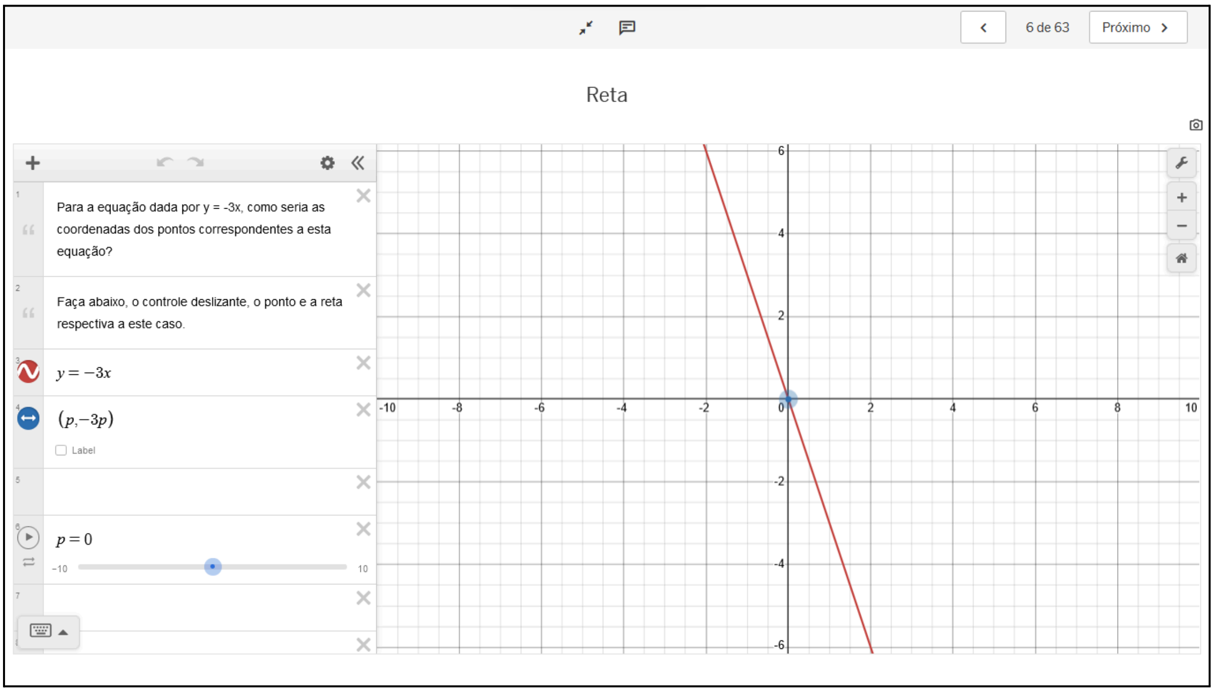
O Desmos facilita a compreensão de objetos matemáticos. Alguns dos principais benefícios são a visualização geométrica e a viabilização da correlação entre registros gráfico e algébrico. Segundo Gravina e Basso (2010), softwares como o Desmos, promovem aspectos de conversão:

> Ao controlar os efeitos de desenho a partir de manipulações algébricas, os alunos podem aprender sobre movimentos de gráficos. Desta forma, as expressões algébricas associadas ficam impregnadas de significado geométrico e isso é resultado das explorações feitas no sistema de representação que com seu dinamismo, de imediato, relaciona duas diferentes representações de um objeto – a analítica e a geométrica. (Gravina, Basso, 2010, p. 14).

Assim, muitos estudantes percebem o objeto de maneira mais interativa, diferentemente de um gráfico no papel ou no quadro, a interação com o software proporciona uma experiência dinâmica e com maior possibilidade de valores a serem medidos e testados pelos estudantes em menor tempo. Outra característica de equações de retas que pode ser observada pelos estudantes é a taxa de variação (de funções lineares), quando ele faz variar o parâmetro, ele pode observar que as coordenadas x e y dos pontos da reta variam proporcionalmente.

É trabalhado durante a primeira etapa da sequência as equações de reta e são exigidas do estudante conversão, da representação simbólica para a gráfica e vice-versa, para a resolução das atividades necessárias. Outras atividades são propostas de maneira similar, fazendo com que os estudantes percebam a proporção entre as coordenadas dos pontos e também as equações de reta formadas pelos pontos com uma mesma propriedade (figura 19).

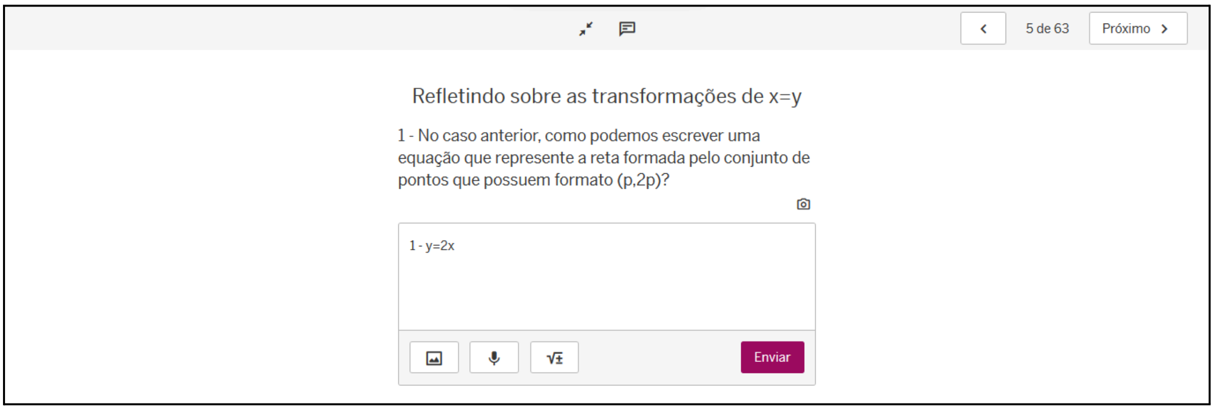
Figura 17 - Tarefa do slide 6 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Elaboramos as atividades no software de maneira que algumas perguntas-chave fossem retomadas ao longo da sequência de atividades. Por exemplo, a pergunta da figura 20. A intenção é que o estudante reflita sobre os conceitos trabalhados, podendo voltar nos slides anteriores para testar os conceitos das questões nos applets da calculadora gráfica. Outro papel destas perguntas-chave é que o pesquisador possa acompanhar o desenvolvimento das atividades, percebendo a interação dos estudantes com o software e com os conceitos envolvidos.

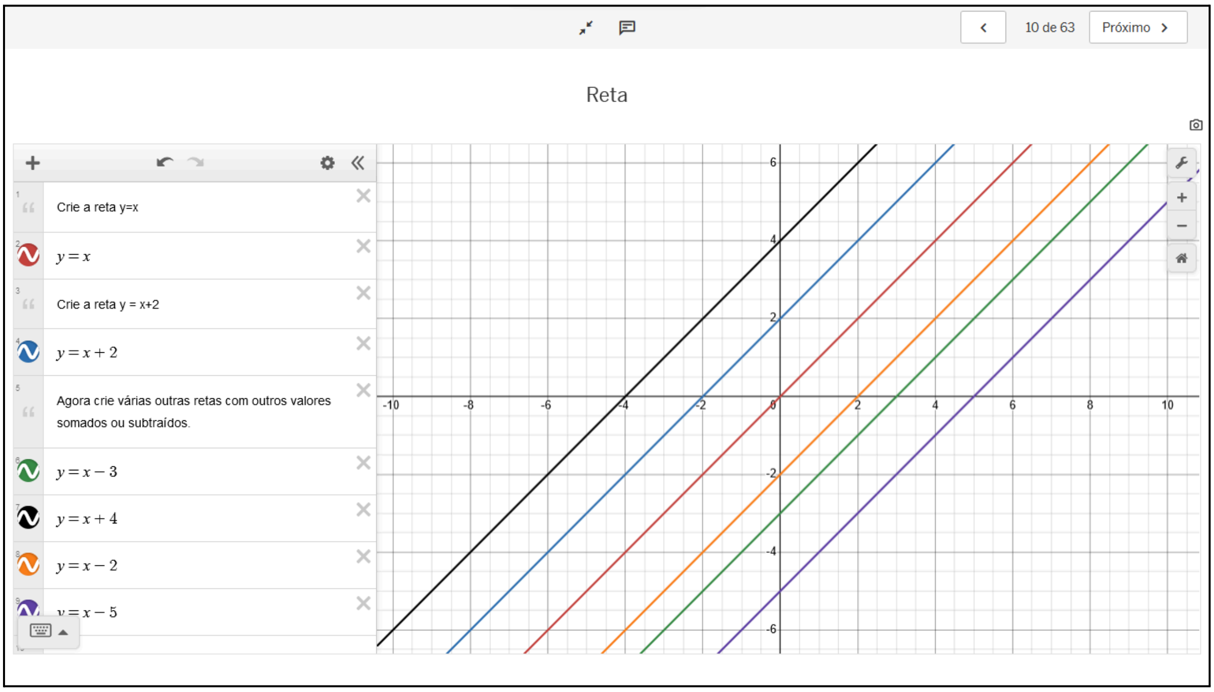
Figura 18 - Tarefa do slide 5 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Do slide 8 até o 12, são trabalhados os conceitos de translação vertical de uma reta, somando valores nas equações ou alterando o coeficiente b na equação $y = ax + b$. Os estudantes também responderam às atividades somando e subtraindo valores das equações, como mostra a figura 21. Neste momento, os estudantes estão verificando qual a consequência gráfica gerada pela soma ou subtração de valores nas equações de reta. As atividades do slide 8 até 12 foram elaboradas com objetivo de que os estudantes percebam que a soma destes valores translada o gráfico verticalmente. Após o slide 10, é feita uma atividade em que é somado uma constante b na equação $y = x + b$, que muda de valor com o controle deslizante.

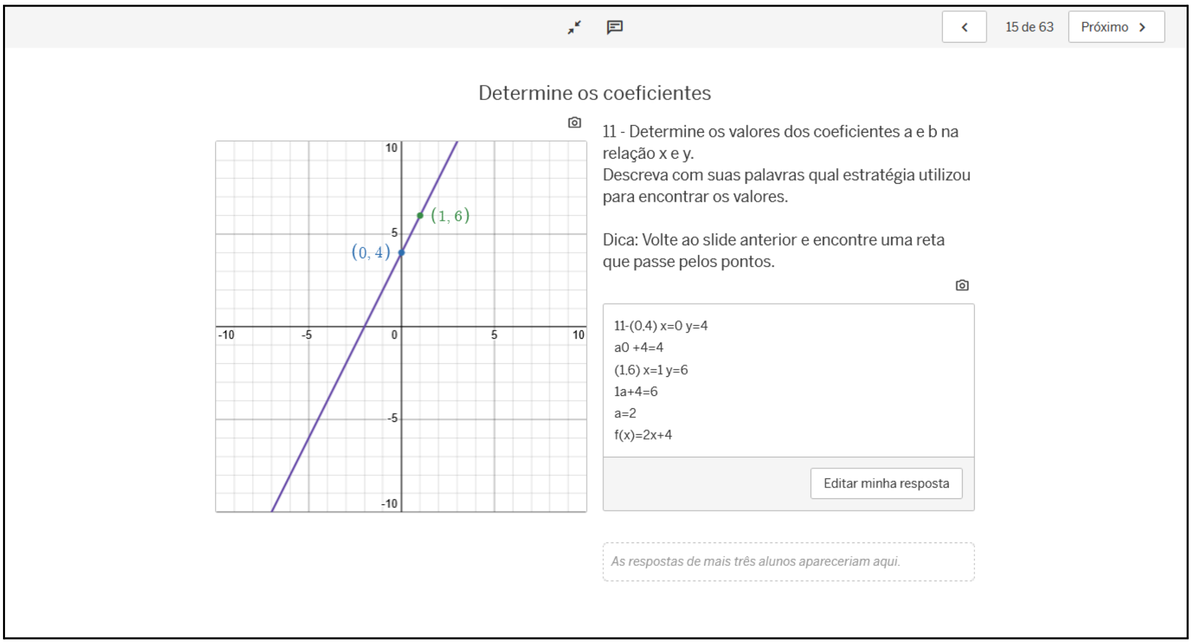
Figura 19 - Tarefa do slide 10 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A partir da atividade 13 até a 18, são feitas atividades para estudar o papel dos coeficientes e sobre como determiná-los a partir da representação gráfica de uma reta. Foram feitas perguntas ao longo da atividade solicitando que os estudantes encontrassem os valores dos coeficientes a e b da equação $y = ax + b$. Um exemplo de atividade e resolução é dado na figura 22 abaixo.

Figura 20 - Tarefa do slide 15 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nota-se na figura 22 que o estudante, a partir do gráfico da reta dada, buscou as coordenadas x e y dos pontos. Após coletar as coordenadas dos pontos, aplicou na equação $y = ax + b$, substituindo os valores de x e y pelas coordenadas dos pontos. Vemos aqui que o estudante identifica a equação e as coordenadas dos pontos no gráfico, realiza a conversão determinando os valores de a e b.

As atividades sobre reta são construídas para trabalhar principalmente com a conversão dos conceitos, exigindo interpretação da representação identificável e alguns tratamentos necessários para a execução das atividades. Como apresentado por Duval (apud Bernd 2016, pg. 3) sobre a importância de vários registros:

> A proposta de uma atividade que proporcione aos estudantes a coordenação entre diferentes registros de representações semióticas se baseia em dois importantes aspectos destacados por Duval (2012). Por um lado, o autor destaca a economia de trabalho, explicando que “a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada” (p. 279). Por outro lado, a complementaridade dos registros, ao lembrar que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados” (p. 280).

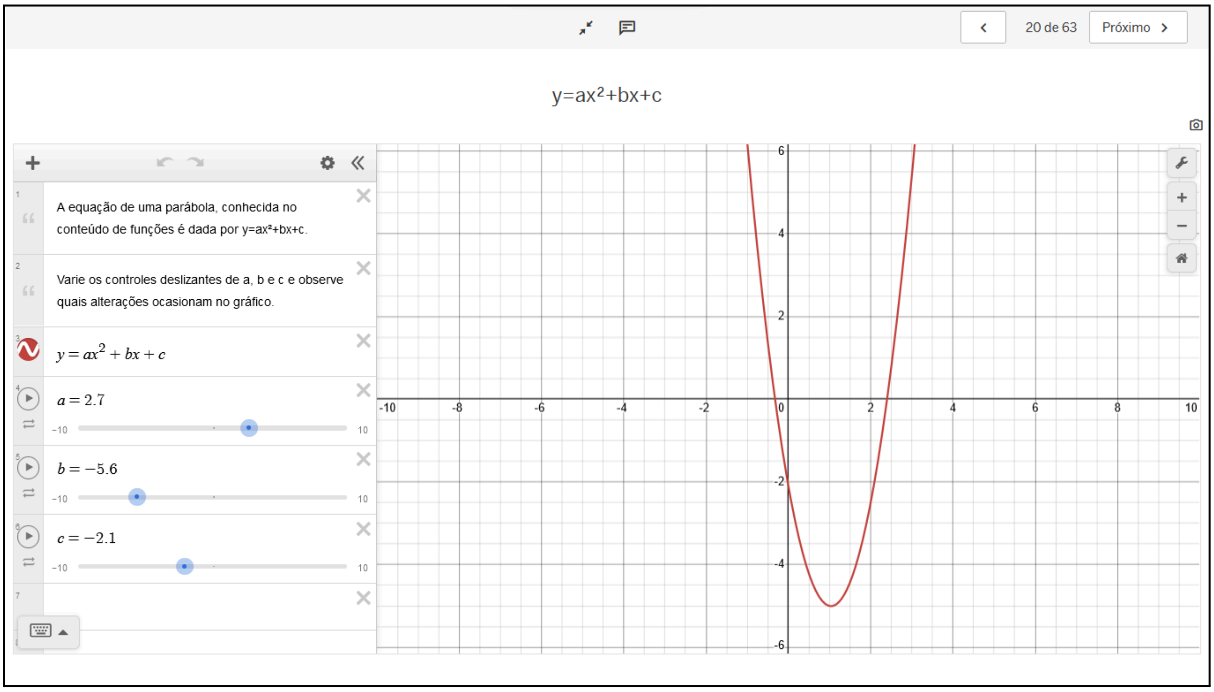
"As atividades foram desenvolvidas com o objetivo principal de trabalhar a conversão entre sistemas algébricos e gráficos, utilizando a linguagem natural como intermediária. Essas conversões são essenciais quando um sistema de representação não consegue capturar completamente o objeto ou suas características necessárias. Por exemplo, na figura 22, o sistema gráfico não fornece diretamente o valor do coeficiente a. No entanto, através da conversão e análise no sistema algébrico, é possível determinar esse valor.

5.2.2 Parábolas na sequência de atividades: 4ª e 5ª aulas

As representações de parábola foram trabalhadas na quarta e quinta aulas, dos slides 19 até o 30. A partir do slide 22, apresentando um novo formato (equação reduzida) para a equação da parábola. Durante o ano letivo, os estudantes estudaram funções quadráticas na forma $y = ax^2 + bx + c$. No entanto, a sequência de atividades apresentou uma forma alternativa para a equação de uma parábola, a saber, $y = q.(x - h)^2 + v$.

Nos slides 20 e 21 foi trabalhado na forma que os estudantes viram durante o ano letivo e após nos slides 22, 23 e 24 (figuras 25 e 26, respectivamente), foi perguntado sobre a mudança no gráfico ocasionada pela mudanças dos coeficientes da equação $y = q.(x - h)^2 + v$. Para finalizar, do slide 25 até o 30, os estudantes foram questionados sobre mudanças gráficas e algébricas das parábolas.

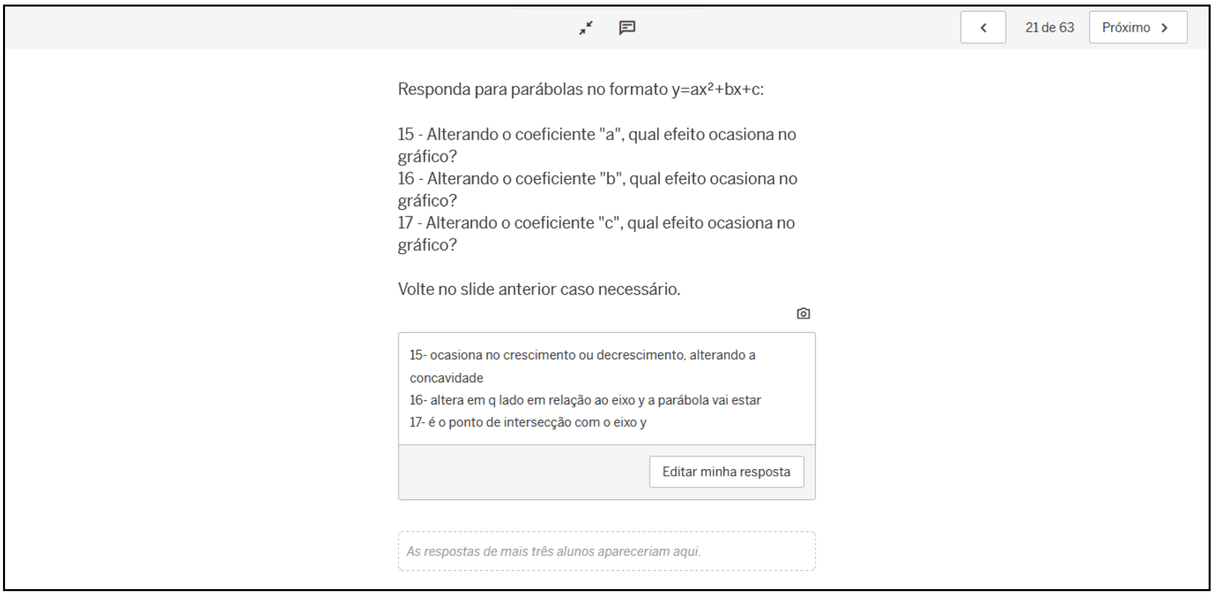
Figura 21 - Tarefa do slide 20 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A motivação para o uso desta segunda forma foi apresentada nos slides 20 até 24. Em um primeiro momento, fazendo uso de controles deslizantes, solicitou-se que os estudantes observassem o efeito produzido no gráfico ao variar os parâmetros a, b e c (figura 23). No slide 21 (figura 24) é solicitado nas atividades sobre as mudanças gráficas a partir da alteração de cada coeficiente.

Figura 22 - Tarefa do slide 21 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Analisando as respostas do slide 21, temos que para a pergunta 15, 75% dos estudantes responderam que o coeficiente a muda a concavidade da parábola, relacionando a resposta com o crescimento ou decrescimento, como mostra a figura 24. Esta afirmação feita pelos estudantes foi testada anteriormente na atividade do slide 20, em que ajustaram os coeficientes alterando o gráfico da parábola. Ainda, 40% dos estudantes também mencionaram sobre a abertura da parábola. Analisando as respostas da pergunta número 16, a maioria dos alunos mencionou o vértice da parábola e sobre o “lado que a parábola se encontra em relação ao eixo y”. Já na pergunta 17 todos os estudantes responderam que “altera a altura da parábola” ou o ponto que toca ou corta o eixo y.

O intuito desta parte da sequência de atividades foi analisar a compreensão sobre a alteração dos coeficientes da equação de parábola e sua respectiva mudança gráfica. No primeiro momento, utilizando a equação $y = ax^2 + bx + c$ e muitos dos estudantes relataram que a determinava a abertura da parábola e b determinava em que lugar do plano cartesiano o vértice se encontrava em relação ao eixo y. Foi notado por parte do pesquisador que os alunos tinham dúvidas na hora de responder, o que já era esperado, pois, mesmo voltando à atividade anterior para testar os coeficientes, a não somente “abria” a parábola e b não somente “mudava o vértice horizontalmente”, como também subia e descia a parábola graficamente. Mesmo fazendo vários testes, alterando os parâmetros e observando os resultados, os estudantes não chegaram a conclusões corretas e/ou completas. Isso porque, neste formato, os parâmetros não produzem alterações gráficas isoladas.

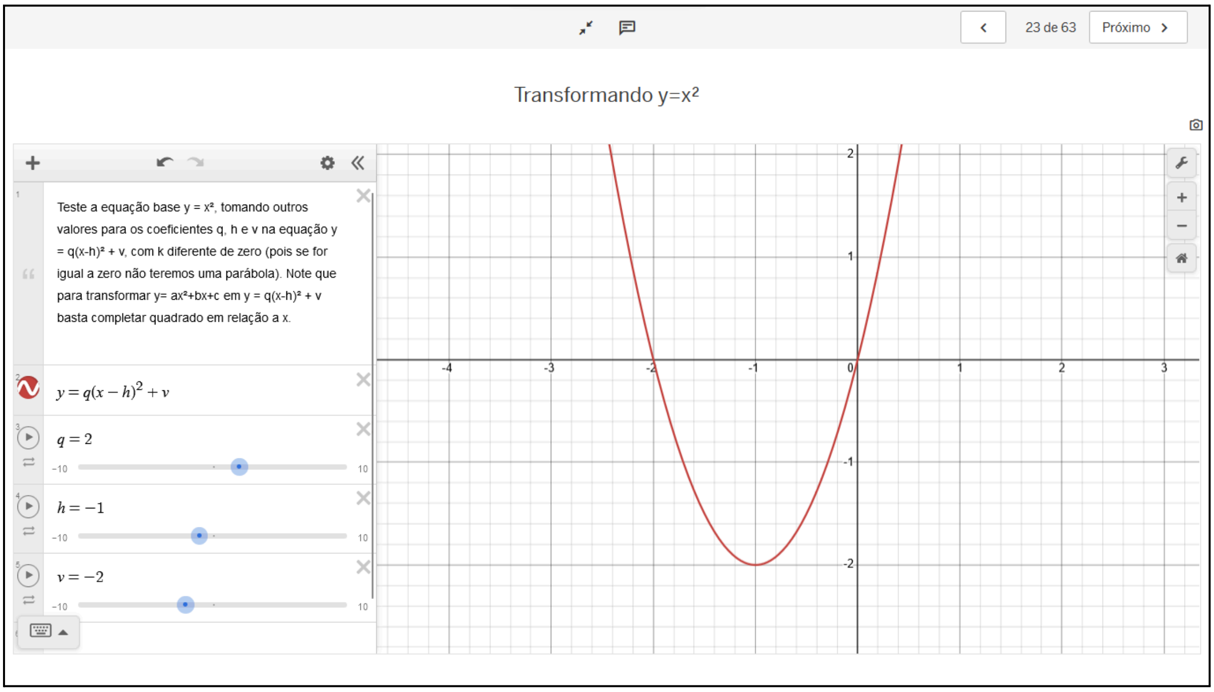
Por outro lado, a equação reduzida, por meio dos coeficientes, isola cada transformação nos gráficos. O coeficiente q determina a abertura (na escala 1 para 1 dos eixos ordenados)[1] da parábola e a sua concavidade. Já os coeficientes v e h representam, respectivamente, as coordenadas verticais e horizontais do vértice. Na segunda parte da atividade, com a equação reduzida, os estudantes puderam perceber de forma mais nítida o

[1] Para saber mais consulte o livro do PROFMAT Lima, Elon Lages Números e funções reais / Elon Lages Lima. - 2 . ed. - Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2023.

papel de cada coeficiente, uma vez que cada coeficiente faz alterações no gráfico que não interferem nas alterações produzidas por outro coeficiente.

A passagem dos slides 20 e 21 para os slides 23 e 24 evidencia a relação da equação de parábola com os gráficos, para que seja percebido o papel de cada coeficiente e sua correspondência no gráfico da parábola. Durante a leitura do slide 22, por parte dos estudantes, o pesquisador explicou o tratamento que foi utilizado para obter a equação na forma $y = q.(x - h)^2 + v$. De maneira similar ao slide 21, no slide 23 (Figura 25), solicitou-se que os estudantes variassem o valor dos coeficientes q, v e h da parábola na equação $y = q.(x - h)^2 + v$.

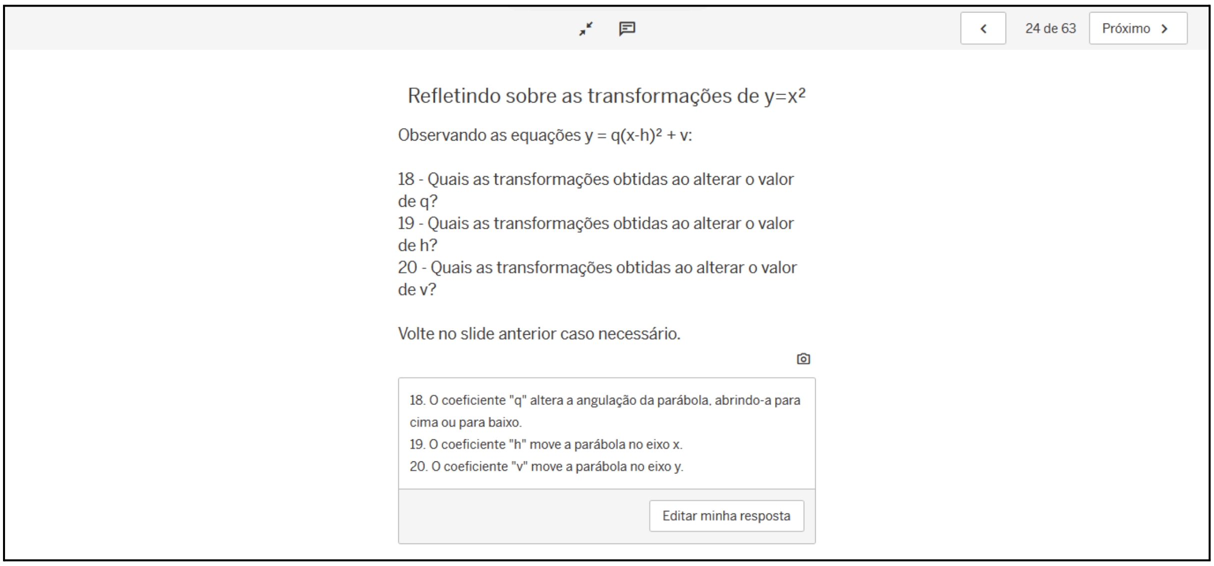
Figura 23 - Tarefa do slide 23 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As perguntas do slide 24, como mostra a figura e 26, tiveram o objetivo de levar o aluno a entender o papel dos coeficientes e perceber suas influências no gráfico.

Figura 24 - Tarefa do slide 24 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Analisando as respostas do slide 24 (figura 26), constatou-se que todos os estudantes perceberam que o coeficiente q alterava a curvatura e a concavidade da parábola, enquanto os coeficientes v e h mudavam, respectivamente, a posição vertical e horizontal do vértice. Dessa forma, trabalhar com este modelo de equação mostrou-se mais eficiente, como esperado, pois a alteração gráfica dos coeficientes torna-se mais perceptível. Neste formato, cada parâmetro modifica precisamente uma das seguintes características da parábola: abertura, coordenada x do vértice e coordenada y do vértice.

Foi solicitado aos alunos que testassem seus conhecimentos nos slides 25 e 26, identificando os coeficientes da parábola q, v e h. O pesquisador percebeu que muitos dos estudantes voltavam aos slides anteriores para verificar se a parábola estava com os coeficientes corretos, conforme haviam pensado. Dessa forma, os próprios estudantes conferiram suas respostas na calculadora gráfica do slide 23 para garantir que estavam corretas.

Os slides 27 à 30 traziam atividades sobre parábolas com eixo de simetria horizontal, em que os estudantes realizavam tratamentos e também conversões entre representações gráficas e algébricas. Comumente, para representar a variável independente de uma função de uma variável real, usa-se x, enquanto usa-se y para a variável dependente (da variável x). Ao estudar funções quadráticas, o aluno do Ensino Médio está habituado a encontrar equações de parábolas na forma $y = ax^2 + bx + c$. A ideia de apresentar parábolas com eixo de simetria horizontal é desmistificar a noção de que existem apenas parábolas com eixo vertical. As parábolas de eixo horizontal foram introduzidas no slide 27. No slide 28, foram apresentadas essas parábolas na forma $x = q.(y - v)^2 + h$, e foram propostas algumas questões para que os estudantes também trabalhassem com parábolas de eixo horizontal.

Logo após, nos slides 29 e 30, foram solicitadas questões para encontrar os coeficientes de algumas parábolas. Estas questões têm o mesmo intuito dos slides 13 até 18, em que foi solicitado encontrar os coeficientes das retas na 2° e 3° aulas. As atividades sobre parábolas estão disponíveis no Anexo III.

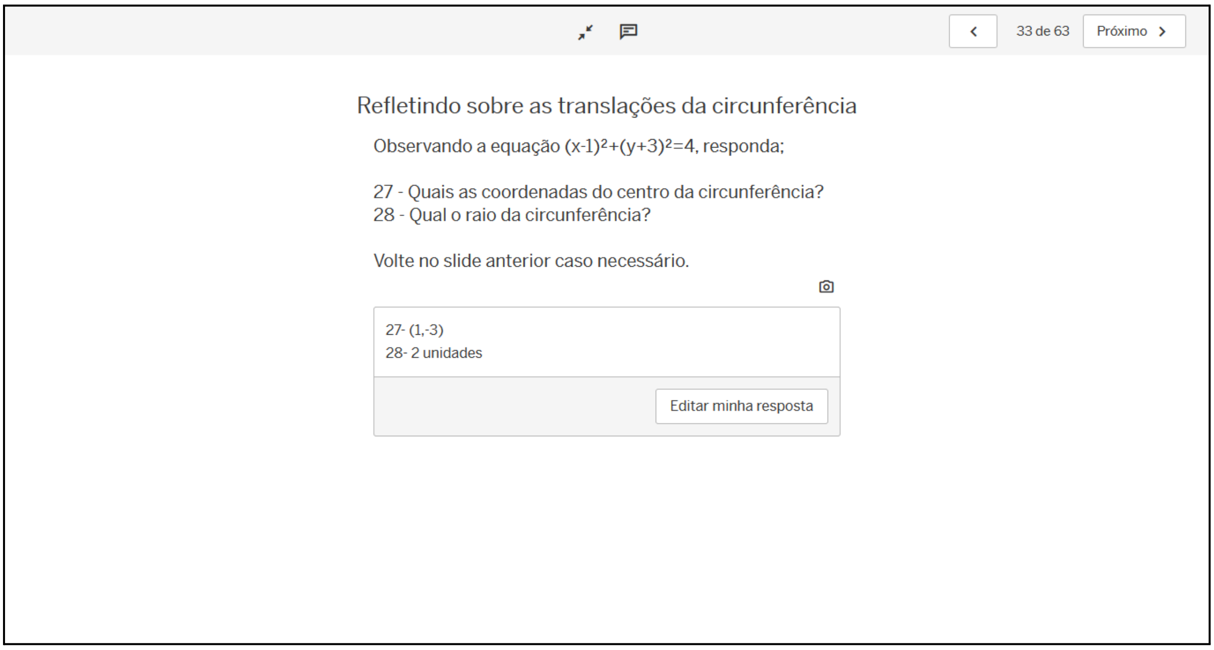
5.2.3 Seção sobre Circunferências na sequência de atividades: 6ª aula

Nos slides 31 até 36 buscamos apresentar e desenvolver o conceito de circunferência. Inicialmente, introduz-se o conceito de circunferência e sua equação, assim como seus elementos: o ponto central e o raio, conforme ilustrado na figura 27.

Durante as atividades sobre circunferência, os estudantes procuraram compreender esse objeto matemático a partir das coordenadas de seu ponto central e do valor do raio. Como os estudantes já haviam trabalhado as equações de parábola, de maneira similar ao vértice da parábola, descrito pelos coeficientes h e v, as representações gráficas e de equações de circunferência foram trabalhadas a partir das coordenadas do ponto central.

Na atividade do slide 32 (figura 27), referente a circunferências, um dos estudantes utilizou esta calculadora gráfica para resolver as questões do slide 33, que perguntava "Quais as coordenadas do centro da circunferência?" e "Qual o raio da circunferência?".

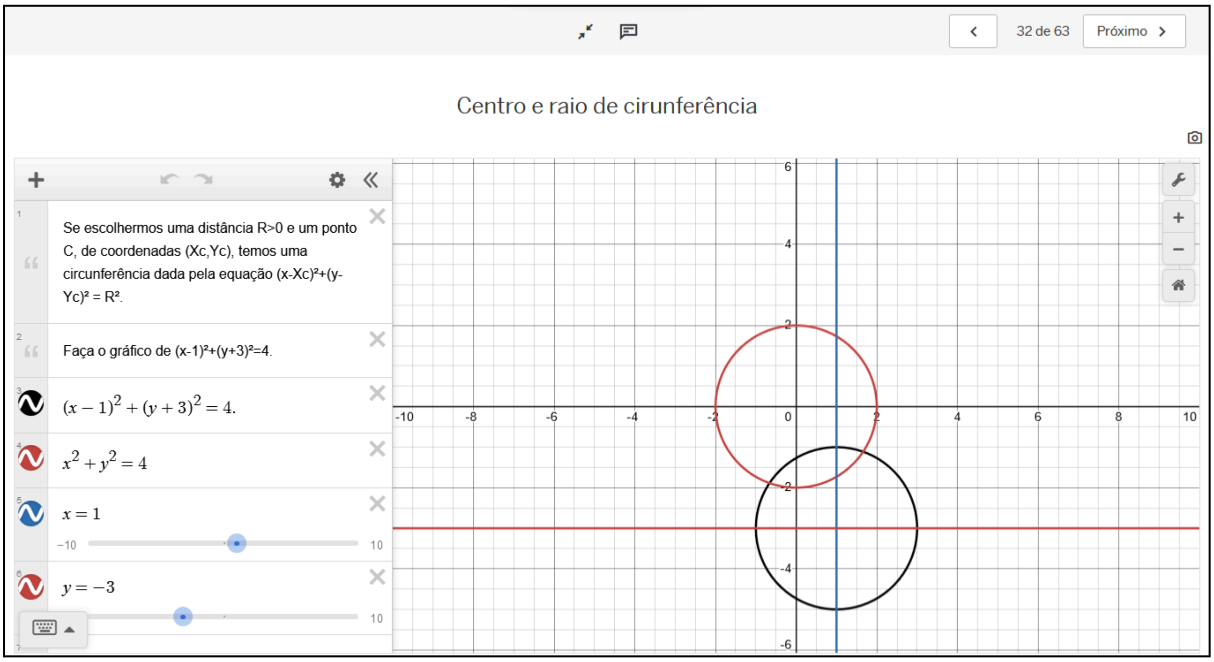
Figura 25 - Tarefa do slide 32 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Para resolver as questões do slide 33, o estudante que apresentou a resposta da Figura 27 voltou ao slide 32 (figura 28) e utilizou retas para poder encontrar o centro da circunferência, sendo o centro o ponto de encontro das duas retas. Também foi utilizada a circunferência de forma algébrica na equação exibida no gráfico em vermelho, em que o estudante transladou o centro para o ponto de origem $(0, 0)$, a fim de melhor perceber o tamanho do raio utilizando os eixos coordenados x e y. Percebe-se tratamentos e conversões para resolver a questão, seja nas retas criadas para encontrar o centro da circunferência, na translação do gráfico ou na alteração das equações em questão.

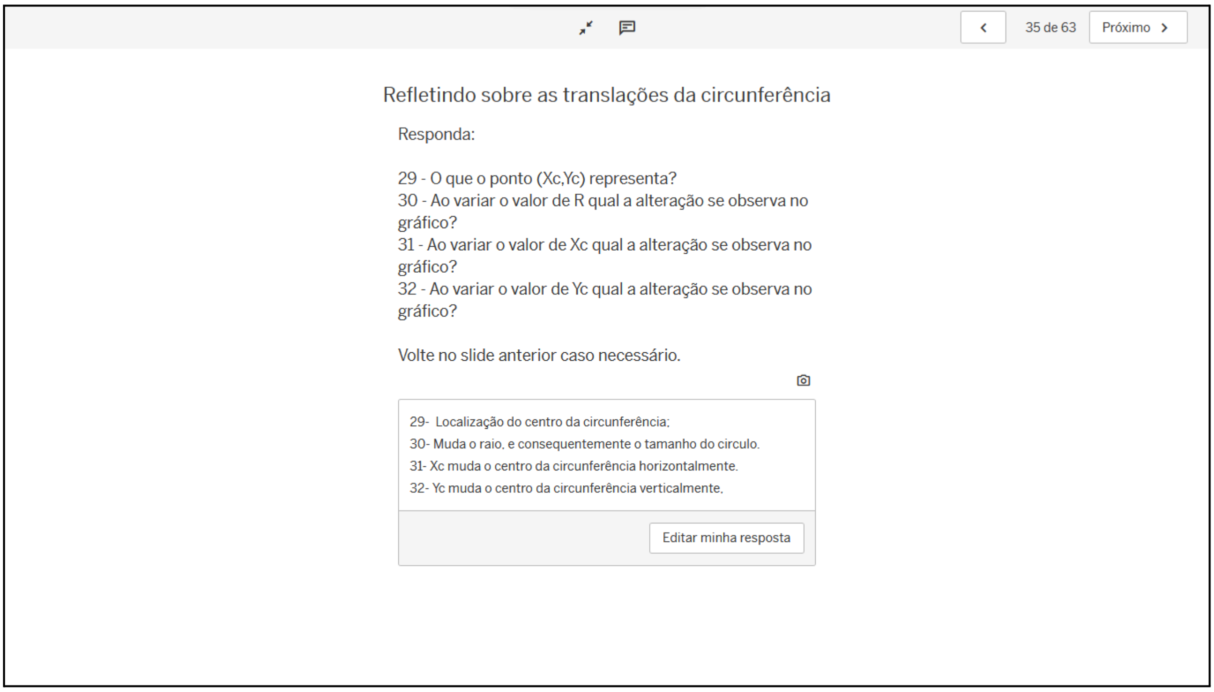
Figura 26 - Atividade do slide 13 desenvolvida por outro estudante



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No slide 35 (figura 29), foi perguntado sobre o ponto central e o raio da parábola. Cerca de 90% dos estudantes identificaram o ponto (Xc, Yc) como o centro da parábola, enquanto 70% descreveram o raio como o valor que “altera o tamanho da circunferência”. Em seguida, no slide 36, foi solicitado que os alunos determinassem o ponto central e o raio a partir de um gráfico de circunferência fornecido.

Figura 27 - Tarefa do slide 35 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

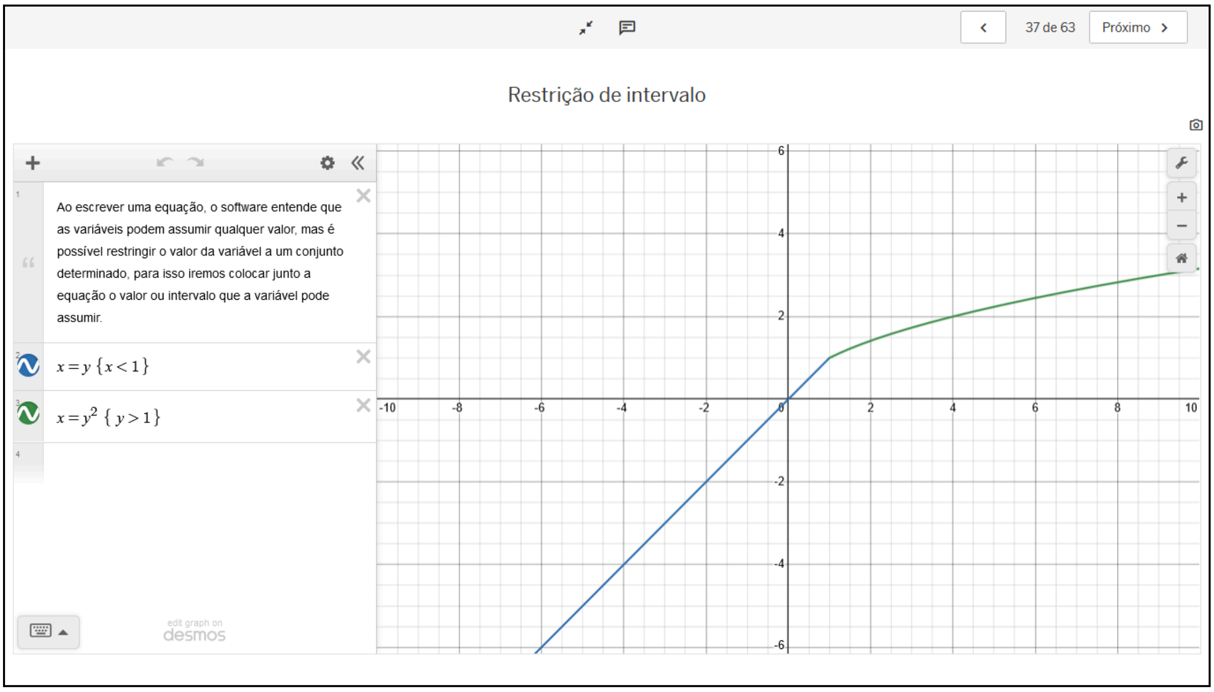
Um ponto importante a ser destacado é que o foco das próximas atividades será a utilização gráfica para resolver problemas. Com o desenvolvimento das atividades anteriores sobre retas, parábolas e circunferências, os estudantes tiveram a oportunidade de construir figuras gráficas e formular as equações correspondentes a essas figuras. Isso possibilitou a realização das atividades do jogo das estrelas e a construção de uma imagem. O principal requisito, especialmente na parte teórica sobre circunferências, será a conversão das equações.

5.2.4 Seção sobre Restrição de variáveis na sequência de atividades (7° aula: slide 37 até 40)

Do slide 37 até 40 é explorada a possibilidade de restringir cada uma das variáveis a fim de perceber o resultado destas restrições nos gráficos de cada equação. Podemos restringir uma das variáveis (ou as duas) de equações de retas, por exemplo, que passaram a ser semirretas ou segmentos de reta. Parábolas podem ser restritas passando a ter por gráfico partes de parábolas e variáveis de equações de circunferências são restritas para formar arcos de circunferências.

Na figura 30 mostra-se a atividade inicial para apresentar as restrições de variável. O intuito desta atividade é introduzir o conceito de restrição gráfica através da restrição algébrica a partir da desigualdade apresentada entre chaves ao lado das equações na caixa algébrica. Apresenta-se para os estudantes que podemos restringir ambas as variáveis, x ou y, da maneira que os estudantes desejarem.

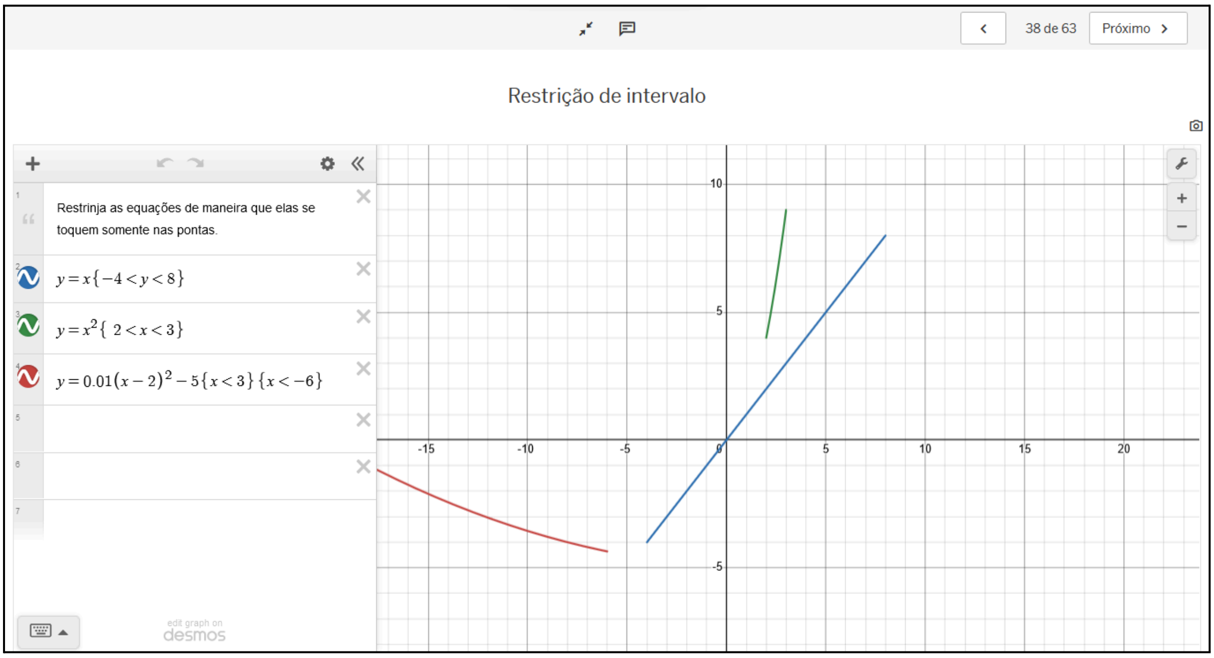
Figura 28 - Tarefa do slide 37



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nas figuras 31 e 32, são apresentadas a tarefa e a solução de um estudante, respectivamente. Na atividade, foram fornecidas três equações e era necessário ajustar os valores das restrições para que os gráficos, dois a dois, das equações apresentassem exatamente um ponto de interseção.

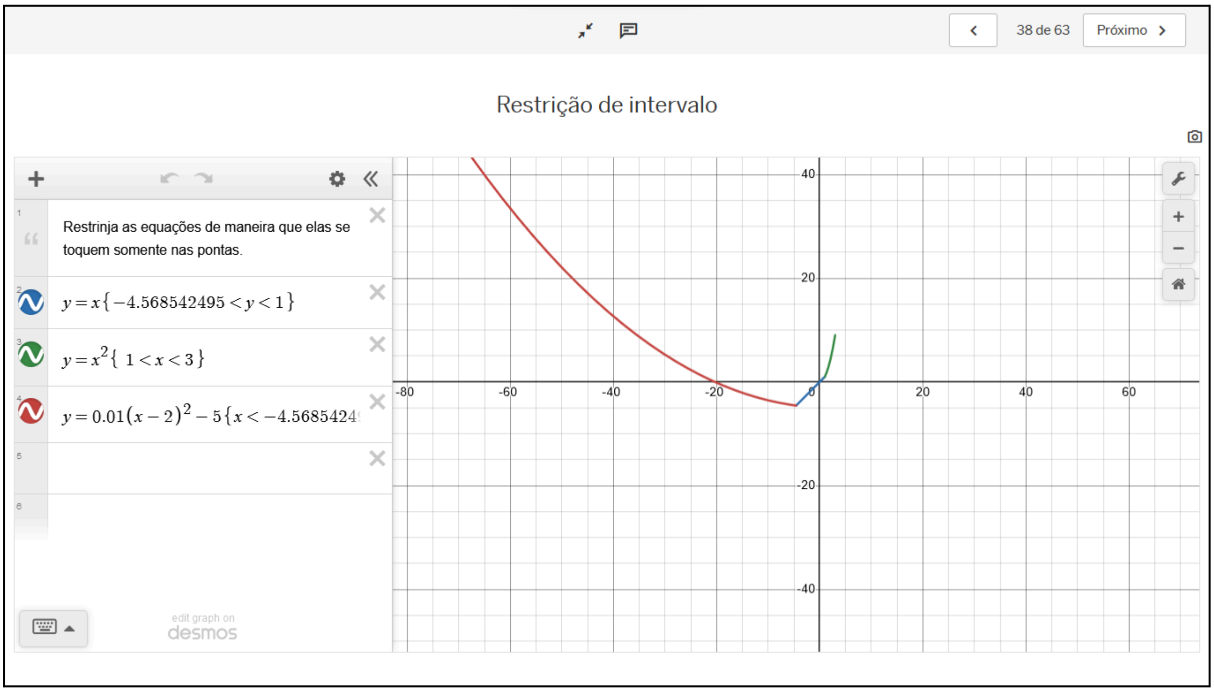
Figura 29 - Tarefa do slide 38



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Percebeu-se durante o desenvolvimento desta tarefa uma busca mais profunda sobre como os estudantes poderiam encontrar o valor correto da restrição para que cumprissem a atividade. Houve discussões entre os estudantes sobre como resolver algebricamente e graficamente. Alguns estudantes chegaram à conclusão de que, para cumprir a tarefa, a única forma seria usar as representações algébricas das curvas apresentadas na atividade. Essa constatação foi feita somente de forma oral por alguns estudantes e ficou registrado no diário de bordo do pesquisador. Como a tarefa original não envolvia isso, foi orientado que os estudantes "conectassem" graficamente apenas de forma que, a olho nu, fosse possível visualizar uma única "conexão" entre os gráficos.

Figura 30 - Tarefa do slide 38 respondida por um dos estudantes



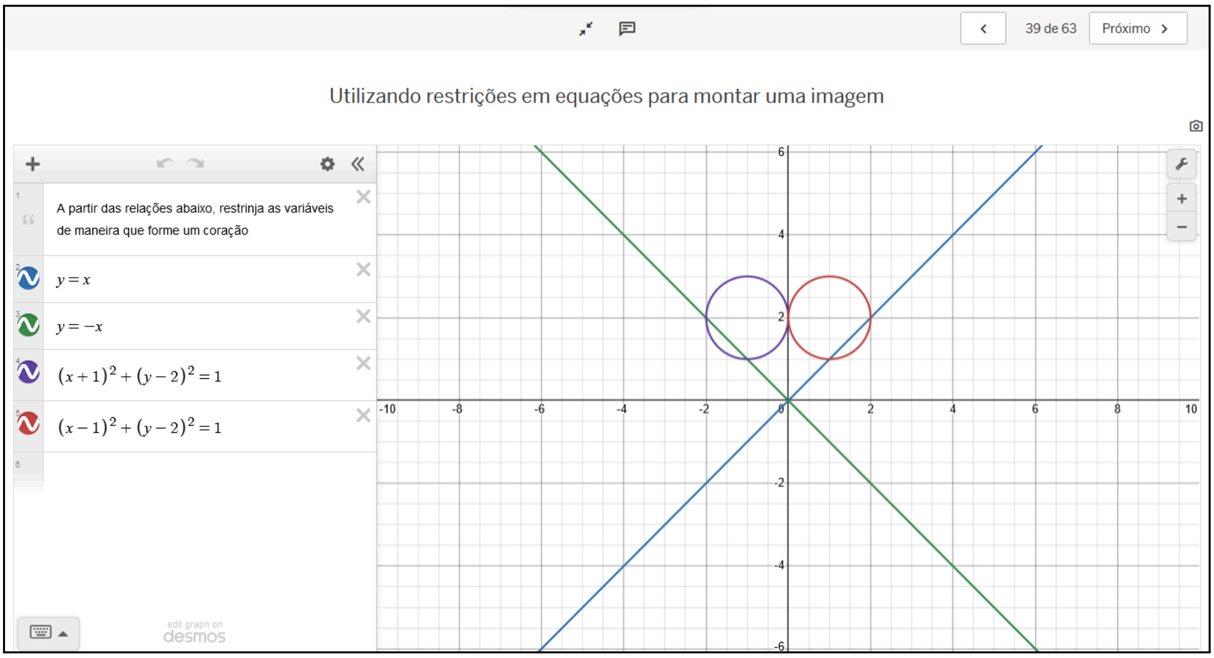
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No slide 38 (figura 32), o estudante que desenvolveu a resolução precisava "conectar" as pontas das equações em questão. Para isso, utilizou o zoom do software para "unir" os gráficos com uma precisão de até dez casas decimais. Ao analisar o gráfico obtido, é válido questionar a necessidade de “colar” os gráficos com tanta perfeição, já que qualquer imprecisão no gráfico sem tratamento algébrico seria imperceptível a olho nu. A atividade foi projetada de modo a não incentivar o uso de tratamentos algébricos, portanto, não havia espaço para registros algébricos neste slide. Apesar disso, alguns estudantes tentaram igualar as equações mentalmente para encontrar o ponto de interseção de dois gráficos (sem considerar restrições). Outros estudantes ajustaram os gráficos com o zoom do software até que as discrepâncias se tornassem imperceptíveis a olho nu.

O intuito da atividade era realizar alterações nos parâmetros das equações de modo a obter os gráficos desejados. Assim, a precisão não seria a mesma de um tratamento algébrico, porém a “colagem” pode ser tão precisa quanto for possível ampliar a imagem. Mesmo assim, alguns estudantes buscaram calcular, em rascunhos, ou desenvolveram os tratamentos necessários para poder encontrar os valores de x ou y para as intersecções.

Já são testados nos slides 39 e 40 a restrição de variáveis para tarefas de criação de imagens ou restrição a partir de um gráfico dado, como mostram as figuras 33 até 37.

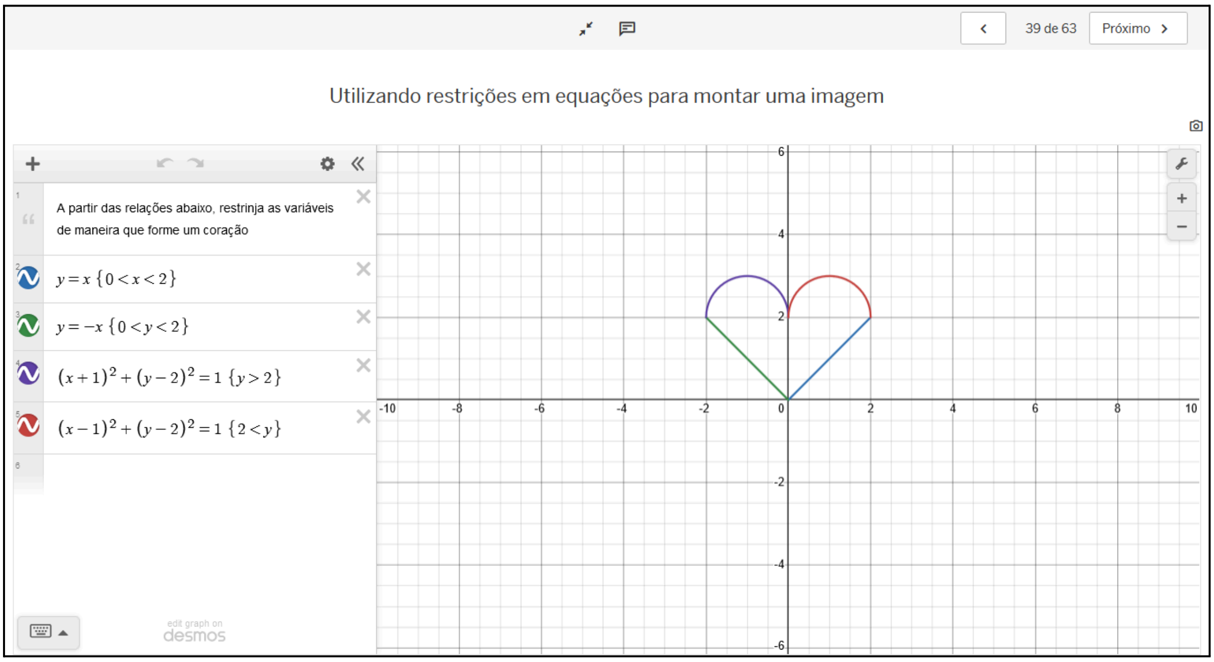
Figura 31 - Tarefa do slide 39



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura acima apresenta-se uma das tarefas, em que os estudantes deveriam restringir cada uma das equações dadas de maneira a obter um coração (figura 34).

Figura 32 - Tarefa do slide 39 respondida por um dos estudantes.

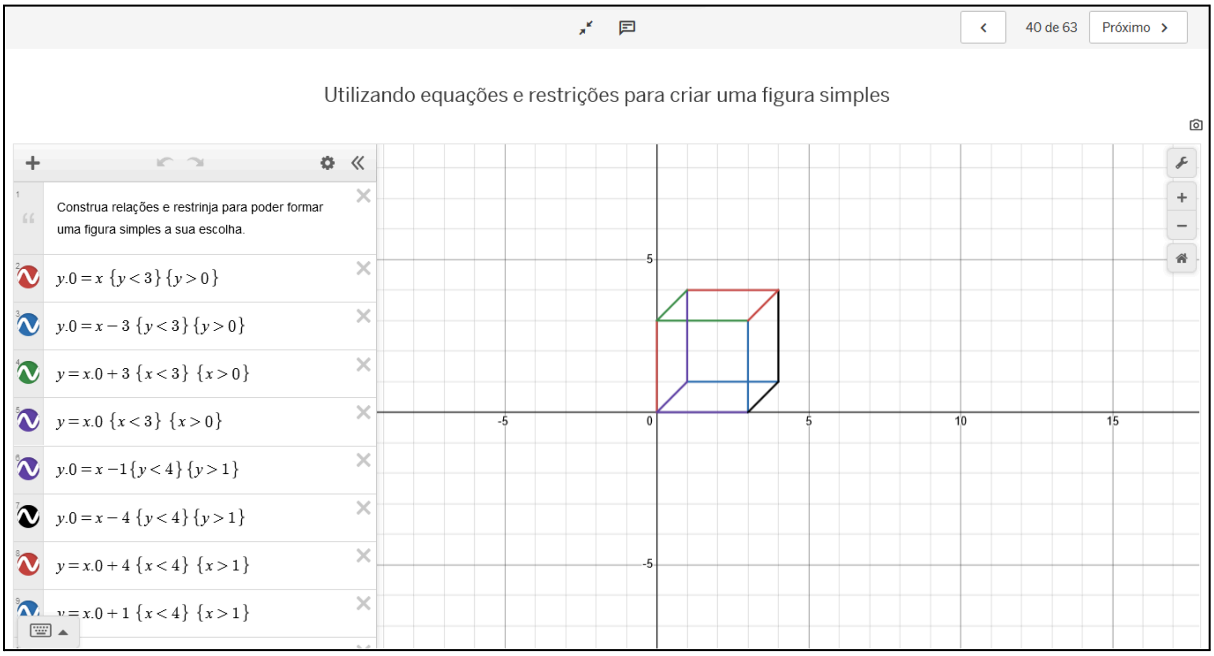


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Alguns estudantes, na tarefa do slide 39 (figuras 33 e 34), inicialmente tiveram dificuldade em identificar a forma do coração, pois as duas retas e duas circunferências não apresentavam claramente a figura esperada. Muitos dos estudantes por terem estudado o conteúdo de funções no decorrer do ano letivo, pensavam somente que podia-se restringir a variável x. Aqui também é apresentado que partes dos gráficos de retas, circunferências ou parábolas podem criar imagens.

As figuras 35 e 36 destacam já uma produção interessante de equações e restrições. A partir das respostas desta atividade, é possível observar a evolução e o desenvolvimento dos estudantes ao longo da sequência de atividades, evidenciando a aplicação dos conceitos teóricos e a integração das percepções algébricas e gráficas adquiridas.

Figura 33 - Tarefa do slide 40 respondida por outro estudante

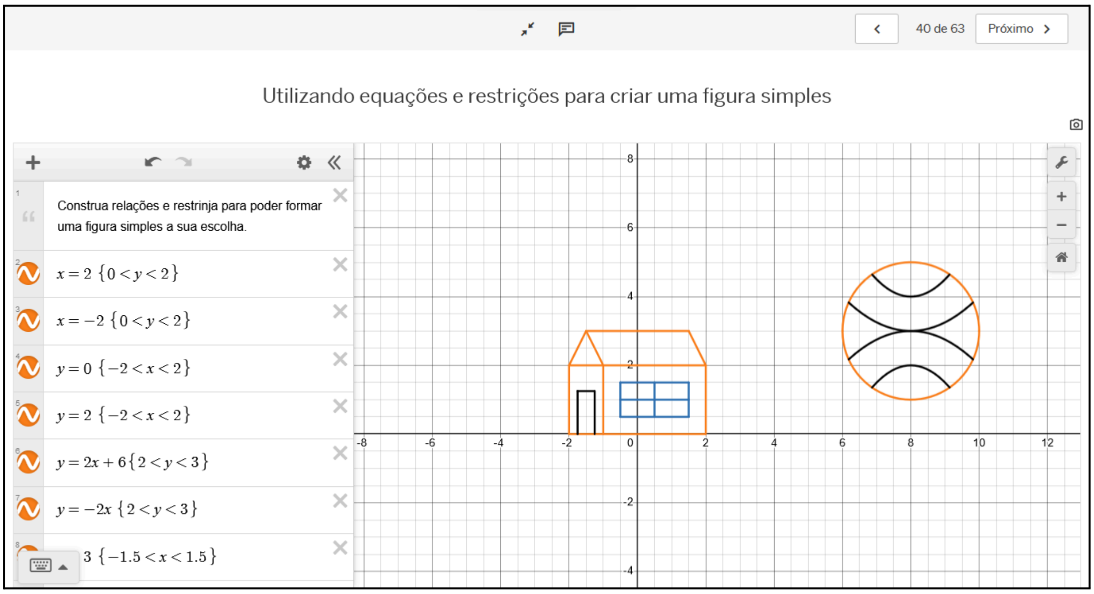


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Durante a resolução das atividades do slide 40, um dos estudantes (figura 35) criou um cubo para resolver a atividade. O estudante utilizou a calculadora gráfica, que produz representações em duas dimensões apenas, para representar um objeto tridimensional. Para tal, ele usou segmentos de reta a fim de induzir a noção de profundidade por meio da perspectiva.

Podemos também refletir sobre a construção de outro estudante (Figura 36), que buscou utilizar os conhecimentos adquiridos para testar as equações de reta, parábola e circunferência em uma casa e uma bola. Os desenhos são simples mas utilizam todos os conhecimentos usados até então na sequência de atividades, de equações e restrição de variáveis.

Figura 34 - Atividade do slide 40 desenvolvida por um estudante



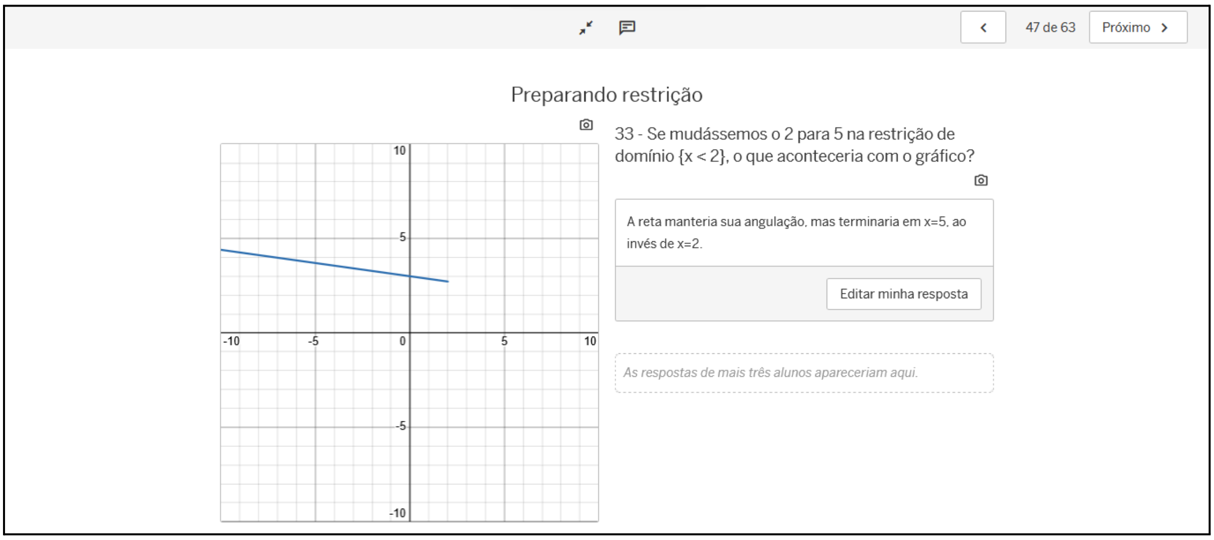
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na próxima seção iremos falar sobre o jogo de pegar estrelas em que utiliza as restrições para desenvolver o jogo.

5.3 Etapa 3: Parte Prática: Jogo de coletar estrelas

A etapa 3, envolvendo o jogo de coletar estrelas, ocorreu na 6° e 7° aula. Ela teve o objetivo de aplicar os conceitos vistos de equações de reta, parábola e circunferência. Além das equações, os alunos precisaram determinar adequadamente seus coeficientes de modo a obter os gráficos desejados. Inicialmente, como havia um intervalo de tempo entre a 5° aula para esta, houve uma retomada dos conceitos, principalmente de reta e de restrição de equações e variáveis. A figura 37, mostra a resposta de um estudante para a tarefa do slide 47.

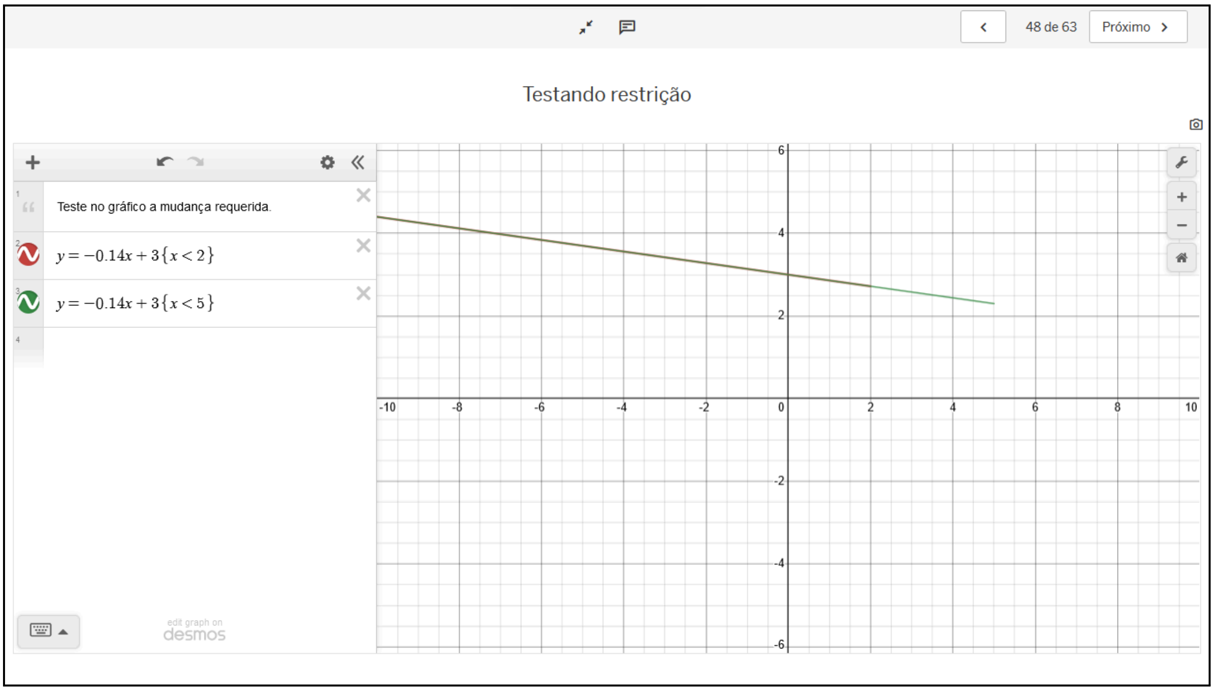
Figura 35 - Tarefa do slide 47 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O intuito destas tarefas foi retomar os conceitos vistos até então, pois houve uma pausa de uma semana entre as aplicações das restrições de variáveis. Logo para reforçar e retomar com os estudantes principalmente os estudos de retas, circunferências e restrições de variáveis foram elaboradas algumas perguntas como a do slide 47 (figura 37) em que no próximo slide (figura 38) os estudantes precisavam confirmar se suas respostas estavam corretas. Estas atividades auxiliaram a relembrar e ajudar na resolução das atividades dos jogos das estrelas. A resposta do estudante na figura 37 descreve que os estudante percebe que a mudança de restrição de variável não altera a reta em sua angulação, ou seja, ele somente está limitando a reta de maneira a obter a semirreta adquirida no próximo slide

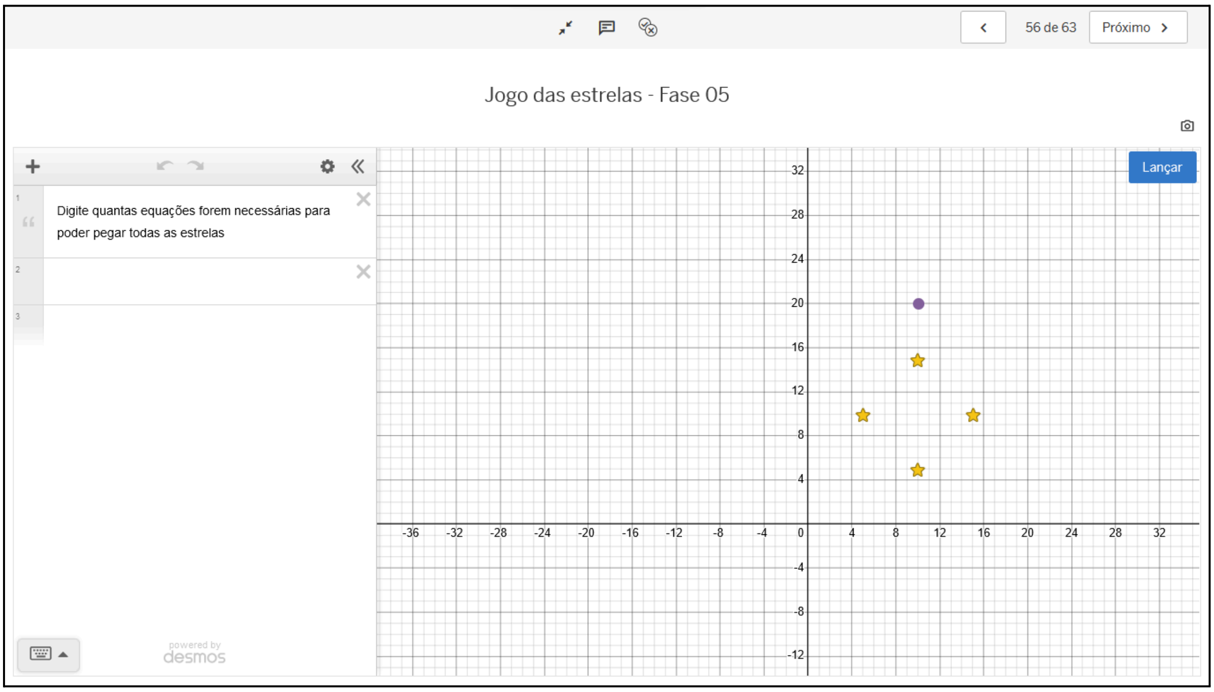
Figura 36 - Tarefa do slide 47 respondida por um dos estudantes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após as revisões, os estudantes avançaram para o jogo de pegar estrelas. O intuito deste jogo é fazer com que a bolinha passe por todas as 4 estrelas dispostas na tela, sabendo que a bola “cai”, simulando a ação da gravidade, e que ela não atravessa os gráficos. Assim, os estudantes deveriam utilizar as equações e seus respectivos gráficos para guiar a bola até as estrelas. Para isto, os estudantes tiveram que utilizar as equações e restrições estudadas e manipulá-las para alcançar todas as estrelas. Um exemplo de tarefa e dois exemplos de resolução diferentes, estão nas figuras 39, 40 e 41 respectivamente.

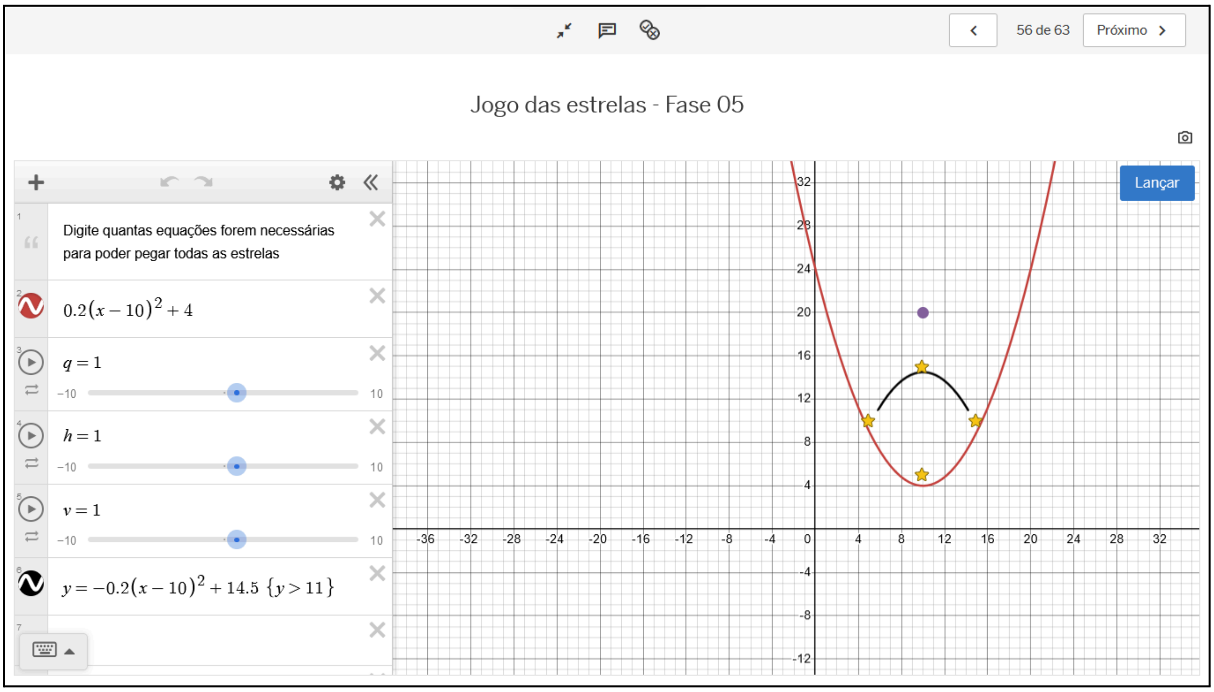
Figura 37 - Tarefa do slide 56



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No slide 56, foi apresentado o jogo das estrelas. Umas das fases exigia que a trajetória das bolinhas não fosse somente uma queda, em algum momento elas precisariam ganhar altura ou, pelo menos, manter a altura constante. Outra possibilidade era colocar uma curva na trajetória das bolinhas de modo que elas se dividissem em dois grupos de trajetórias distintas. As resoluções dos estudantes C e D estão representadas nas figuras 40, 41 e 42 abaixo. Na figura 40 mostra-se a resolução do estudante C, que resolveu a atividade utilizando duas parábolas de concavidades contrárias e também colocando restrição de variável em uma delas.

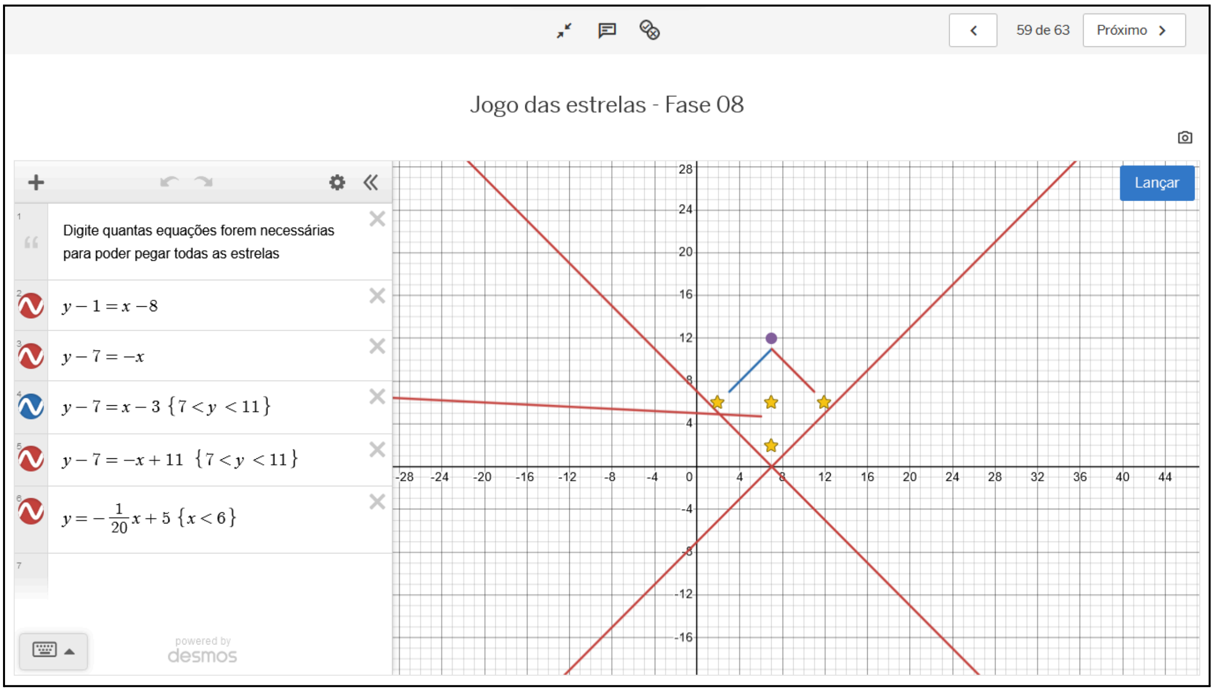
Figura 38 - Atividade do slide 56 desenvolvida pelo estudante C



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Já o estudante D, encontrou um pouco mais de dificuldade para resolver esta atividade, mas conseguiu concluí-la utilizando somente retas. Na figura 41 é apresentada sua solução.

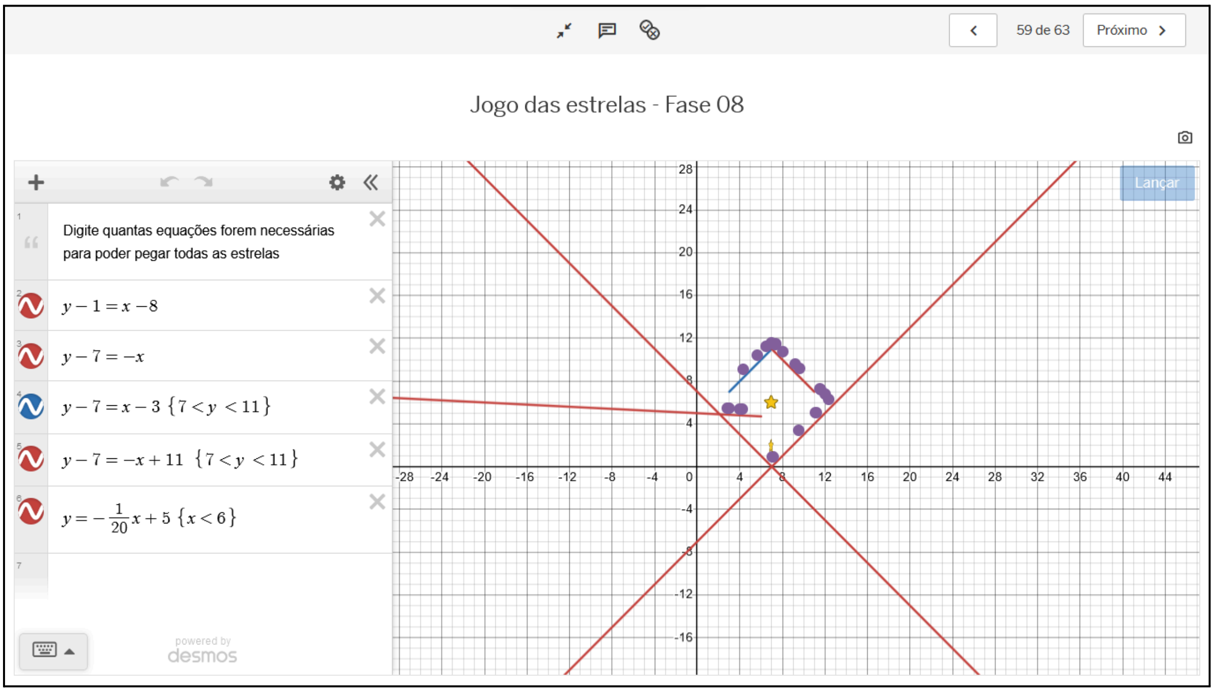
Figura 39 - Atividade do slide 59 desenvolvida pelo estudante D - solução



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura 42 abaixo mostra-se a execução do estudante D na tarefa 59.

Figura 40 - Atividade do slide 59 desenvolvida pelo estudante D - execução

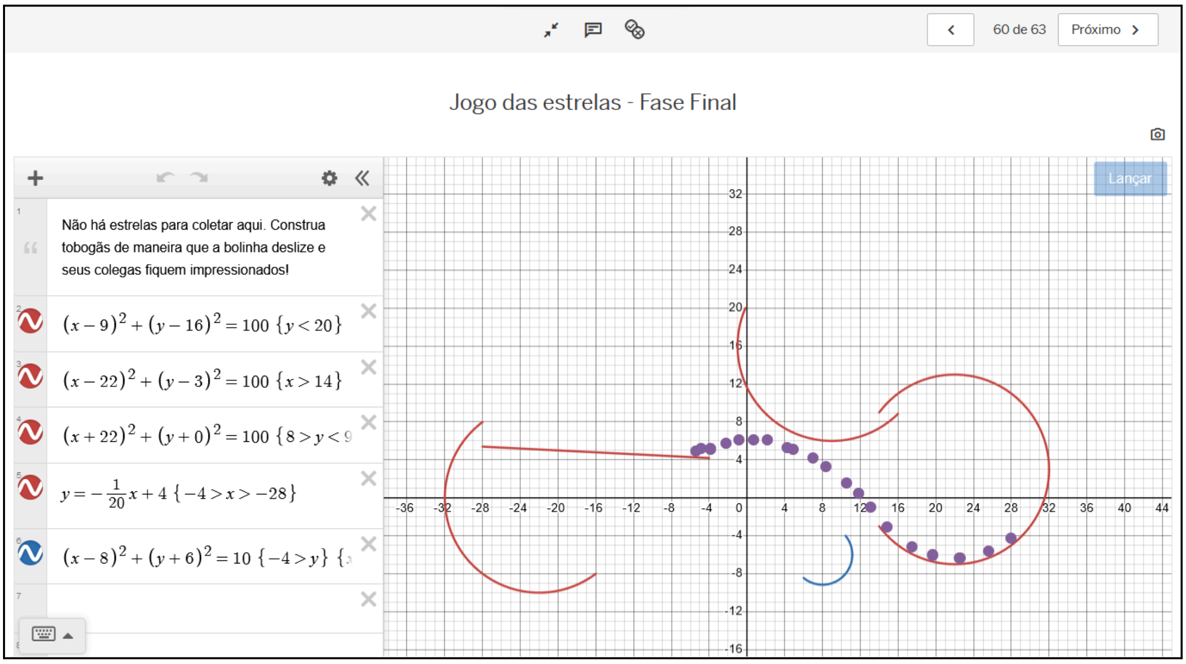


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Um ponto notável nesta atividade é que em nenhum momento foi mencionado que a bolinha poderia seguir dois caminhos diferentes. Muitos estudantes, incluindo membros de outros grupos, desenvolveram soluções semelhantes às dos estudantes C e D.

Nas figuras 43 e 44 abaixo mostra-se a atividade final do jogo de pegar estrelas, em que havia uma última fase que não possuía estrelas.

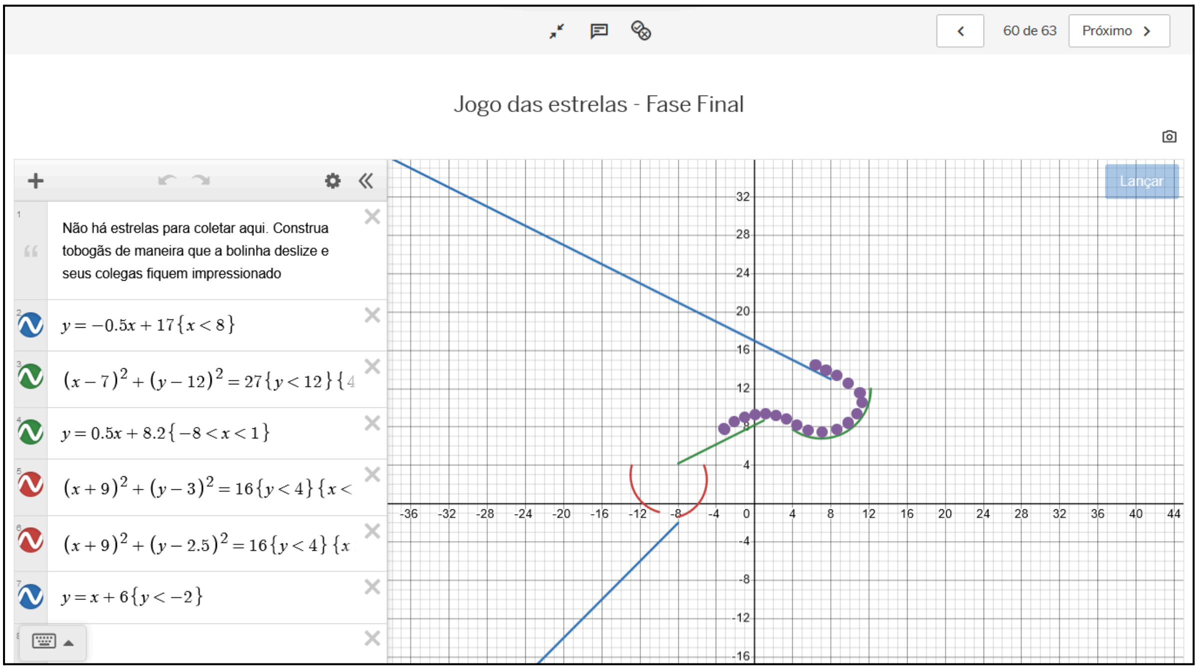
Figura 41 - Atividade do slide 60 desenvolvida por um estudante



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O intuito desta fase era fazer com que as bolinhas caíssem em um tobogã formado por equações e suas respectivas restrições.

Figura 42 - Atividade do slide 60 desenvolvida por outro estudante



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Importante retratar aqui a utilização principalmente dos objetos curvos, parábolas e circunferências, envolvendo restrições de variáveis que foram utilizados pela maioria dos estudantes, com objetivo de manter a velocidade da bolinha através do embalo que ela descia por entre os objetos matemáticos. Notou-se neste momento, por parte do pesquisador a desenvoltura dos estudantes para trabalhar com as equações e suas respectivas representações gráficas, correlacionando de maneira rápida e precisa nas curvas e retas que desejavam.

Durante todas as atividades do jogo das estrelas os estudantes precisaram elaborar equações e restrições, ou seja, realizar tratamentos algébricos a fim de produzir tratamentos na representação gráfica sendo que as conversões entre esses registros são mediadas pelo software. Percebe-se que com o jogo foi colocado em prática a aplicação dos conceitos e a conversão entre registros de representação algébrico e gráfico, e vice e versa. Como citado por HALBERSTADT (2015, pg. 4):

> A conversão não se esgota em mudar de registro de representação semiótica. Diferentes registros de um objeto matemático podem evidenciar propriedades ou aspectos desse mesmo objeto, ou seja, as representações semióticas de um mesmo objeto não possuem o mesmo conteúdo. Daí a necessidade de haver a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas para que os objetos matemáticos não se confundam com as próprias representações.

A sequência de atividades permitiu que os estudantes, além de compreender e executar as ações necessárias para concluir as fases, desenvolvessem autonomia para elaborar a melhor solução para o problema. Eles também se beneficiaram da resposta automática aos comandos escolhidos. A computação e a tecnologia proporcionam vantagens adicionais que o papel não pode igualar: a capacidade de iterar rapidamente e obter resultados imediatos de testes, algo que, de outra forma, levaria horas para ser calculado manualmente. Como descrevem Gravina e Basso (2010) que explicam que,

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concretos/abstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (Gravina, Basso, 2010, p. 14).

Vale a pena salientar que a computação está presente de maneira sólida na vida do estudante. No entanto, há uma inversão de valores, onde o software parece muitas vezes controlar o usuário em vez de ser controlado por ele.

As atividades acima incentivaram os estudantes a refletirem sobre os conceitos já estudados e a pensarem além desses conceitos para resolverem os problemas de cada fase do jogo. Os estudantes não apenas superaram as fases, mas também criaram e aplicaram competências e conhecimentos. O estudante pode seguir diferentes caminhos, desde a construção de um jogo em um formato padrão, como os vistos anteriormente, até a elaboração de uma nova fase com um teste de resistência, onde não seja possível acumular pontos devido às restrições impostas.

Proporcionar novas experiências de maneira que signifique os conceitos aprendidos é uma maneira eficaz de se compreender um conceito, entendendo não somente sua estrutura teórica e prática, mas também utilizando as nuances e detalhes de cada equação, de cada gráfico e de cada significado dos símbolos utilizados para um certo termo matemático.

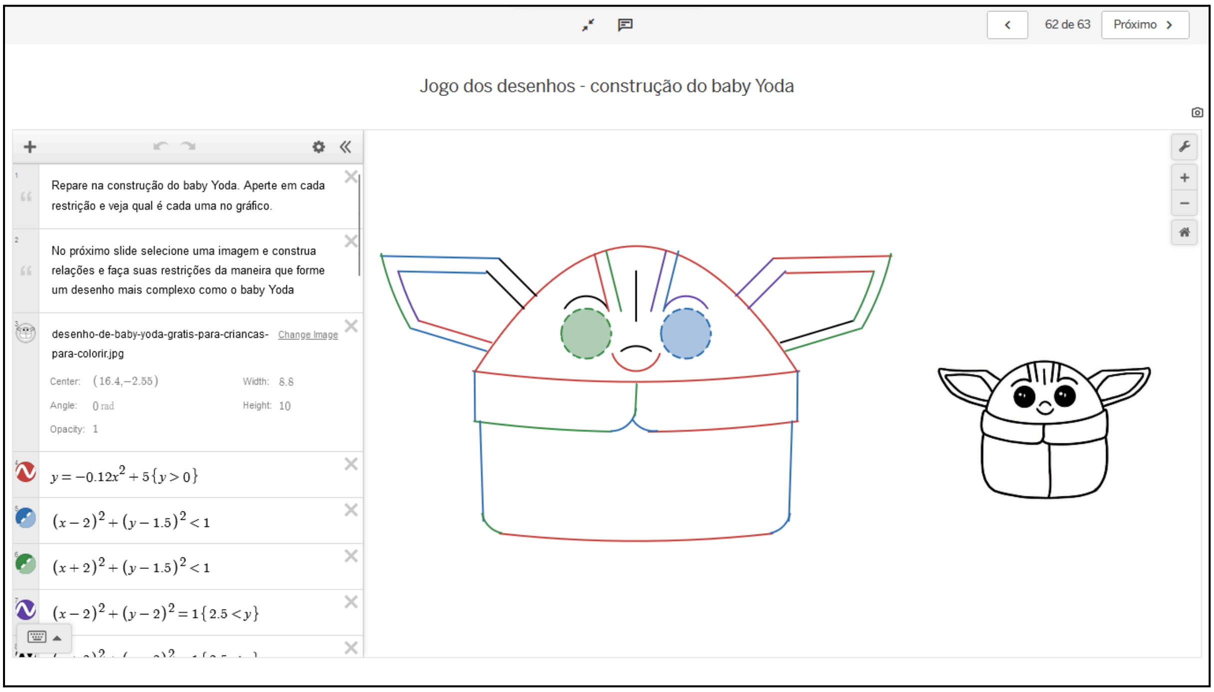
Este trecho da sequência de atividades tem como objetivo não apenas ensinar ou relembrar conceitos, mas também trazer significado e aplicação prática aos conceitos matemáticos. Esses conceitos vão além de um simples raciocínio lógico, ajudando-nos a compreender o mundo de uma maneira mais ampla. Eles interligam e ampliam a visão de mundo dos estudantes.

5.4 Etapa 4: Parte Prática - Construção de uma imagem feita por equações

Na 8ª até 11ª aula foram desenvolvidas as tarefas dos slides 61, 62 e 63 que envolveram a criação de imagens a partir de equações e restrições de variáveis. O objetivo desta tarefa é utilizar as equações e suas restrições para construir uma imagem. Este será o produto final, que exige todas as ferramentas e os conceitos utilizados até então.

O jogo das imagens construídas possui menos páginas de slides, mas requer mais tempo dos estudantes pois é solicitado que se construa uma figura idêntica a uma imagem previamente selecionada pelo estudante ou a criação de uma imagem. Igualmente ao jogo da estrela, esta etapa tem como intuito utilizar de todos os aprendizados construídos e colocá-los em prática na criação ou reprodução de tal imagem. O slide 62 trouxe um exemplo de imagem, o baby Yoda, como mostrado na figura 45.

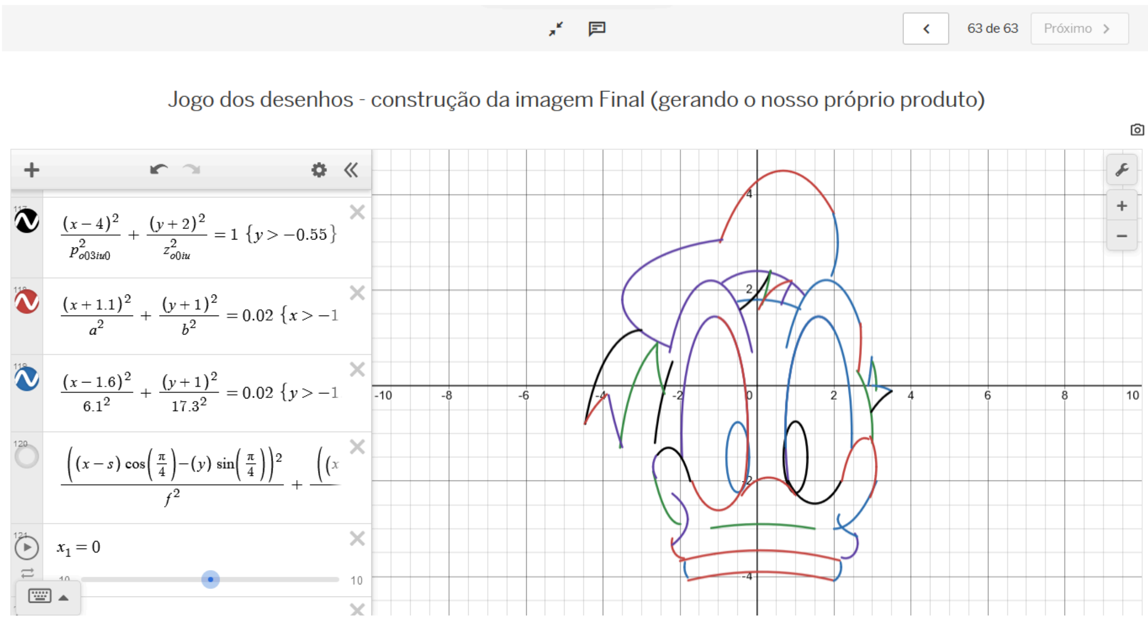
Figura 43 - Tarefa do slide 62



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No slide 63, cada estudante recebe a tarefa de criar sua própria imagem ou reproduzir uma imagem previamente escolhida. Essa atividade permite uma compreensão mais explícita do conhecimento dos estudantes, conforme os três pilares de Duval: representação identificável, tratamentos e conversões. Observa-se que o estudante E, nas figuras 46 e 47, criou a face do personagem Pato Donald.

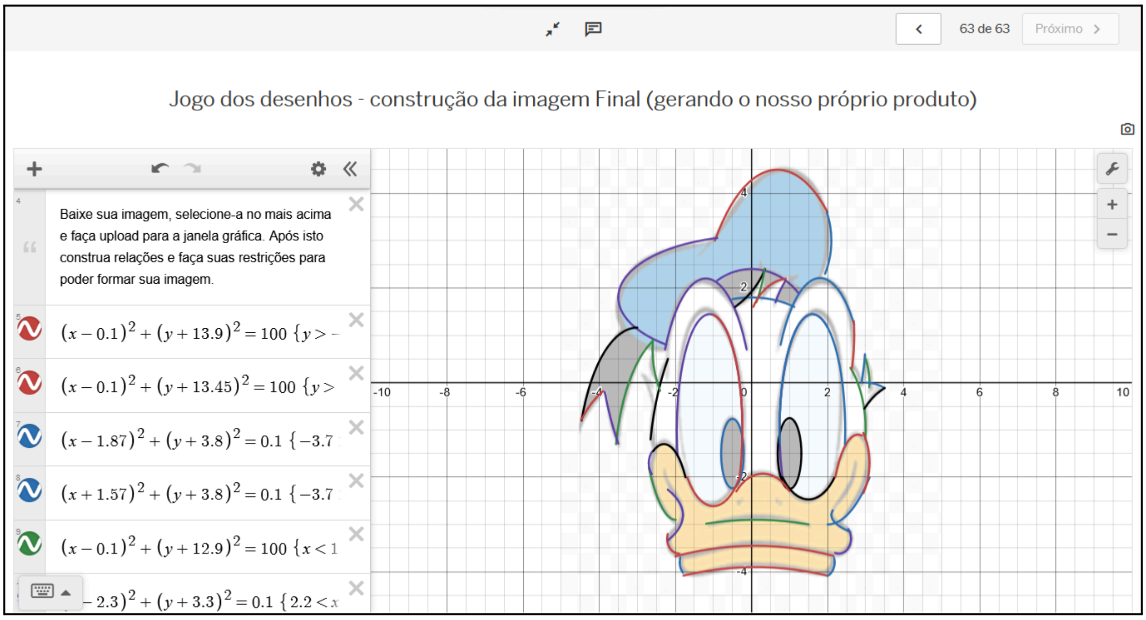
Figura 44 - Atividade do slide 63 desenvolvida pelo estudante E - imagem criada



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura 47 se vê a semelhança empregada pelo estudante para desenhar as curvas do personagem. Em certo momento da atividade o estudante pergunta como poderia ser feito uma elipse, ou em suas palavras “como podemos esticar uma circunferência para ficar com um movimento oval”. Houve uma conversa com alguns estudantes sobre a Elipse, e foi apresentada a figura em imagens, graficamente e algebricamente a partir de buscadores de pesquisa. Após, o pesquisador perguntou sobre a equação de uma elipse e foi falado sobre suas semelhanças com uma equação de circunferência. Os estudantes envolvidos na conversa alteraram a equação de uma elipse e os coeficientes para que a elipse aumentasse horizontal ou verticalmente.

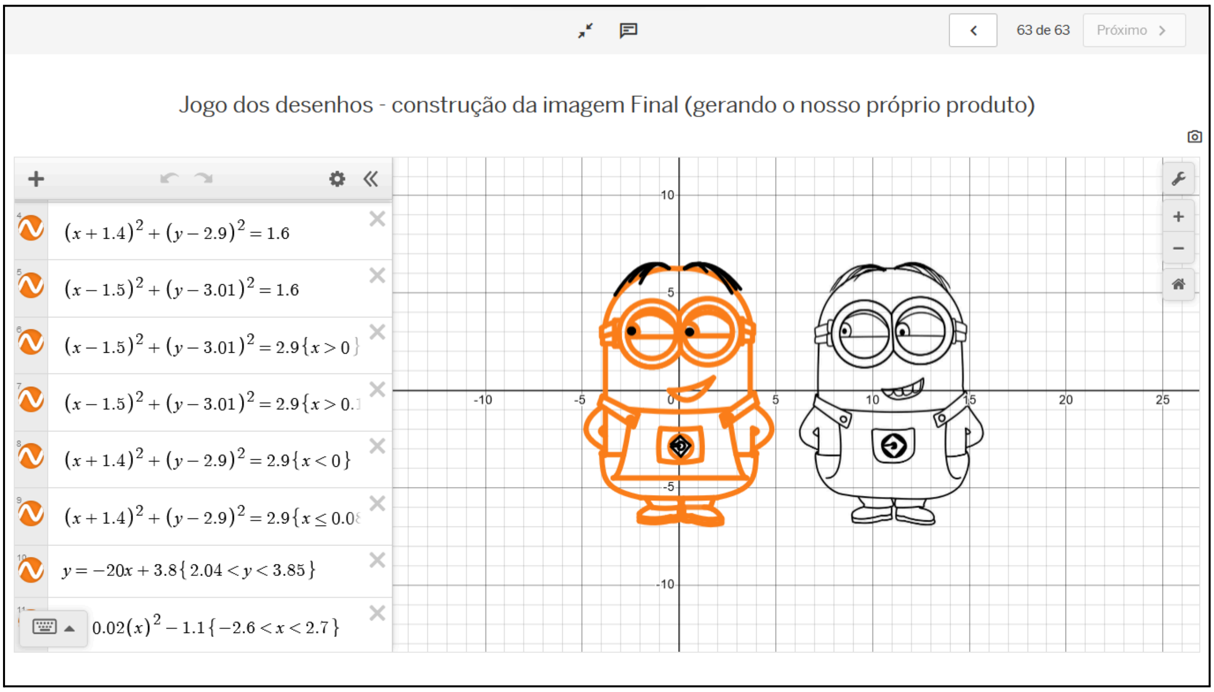
Figura 45 - Atividade do slide 63 desenvolvida pelo estudante E - comparação com a imagem original



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O estudante F, como mostrado na figura 48, criou o personagem Minion. É importante destacar a fidelidade ao desenho original, embora o estudante tenha feito adaptações, como ajustes no braço esquerdo, nos dentes, nos sapatos e na face do boneco. Percebemos um item mais particular ainda, que é a noção das cores. Os demais estudantes realizaram esta tarefa com cores diferentes, como na figura 47 acima, já o estudante F mostrou conseguir trabalhar na maior parte da tarefa com somente uma cor, a não ser no final da atividade que colocou os cabelos, olhos e símbolo do macacão do personagem de cor preta.

Figura 46 - Atividade do slide 63 desenvolvida pelo estudante F

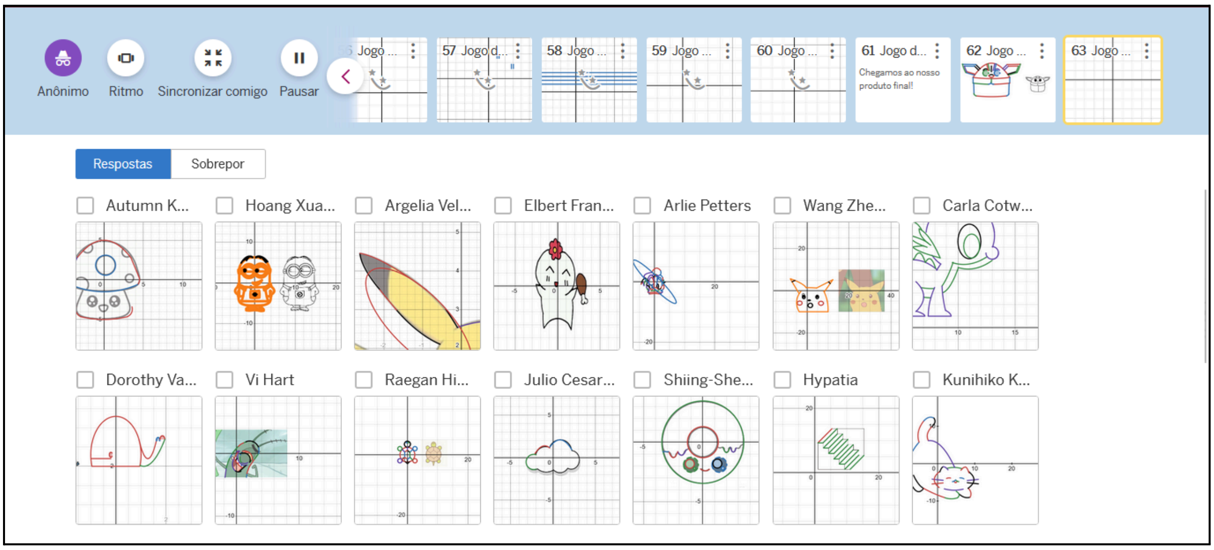


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nas figuras 46, 47 e 48 é possível reparar nas equações trazidas na entrada algébrica do lado esquerdo do software, que as equações e restrições possuem uma especificidade única para poder descrever cada curva do personagem. Há restrições ou coeficientes com precisão de duas casas decimais, demonstrando uma boa capacidade de uso por parte dos estudantes quanto ao uso do software.

Alguns dos resultados estão dados nas figuras 49. Os nomes dos estudantes foram alterados no próprio software para manter seu anonimato.

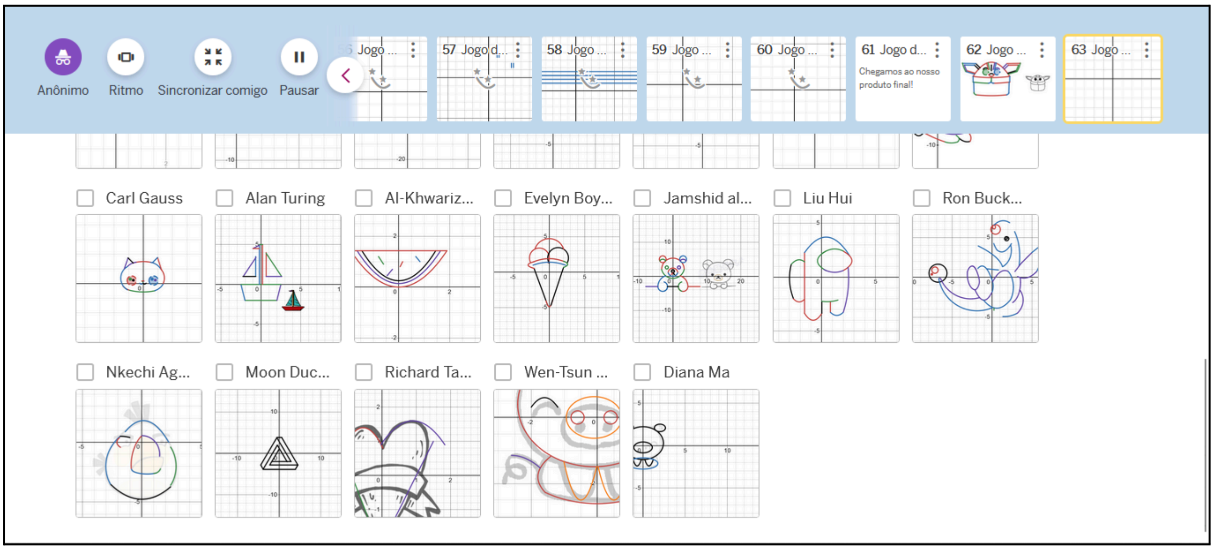
Figura 47 - Tarefas do slides 62 feitas pelos estudantes(1)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Mais alguns resultados são apresentados na figura 50.

Figura 48 - Tarefas do slides 62 feitas pelos estudantes(2)

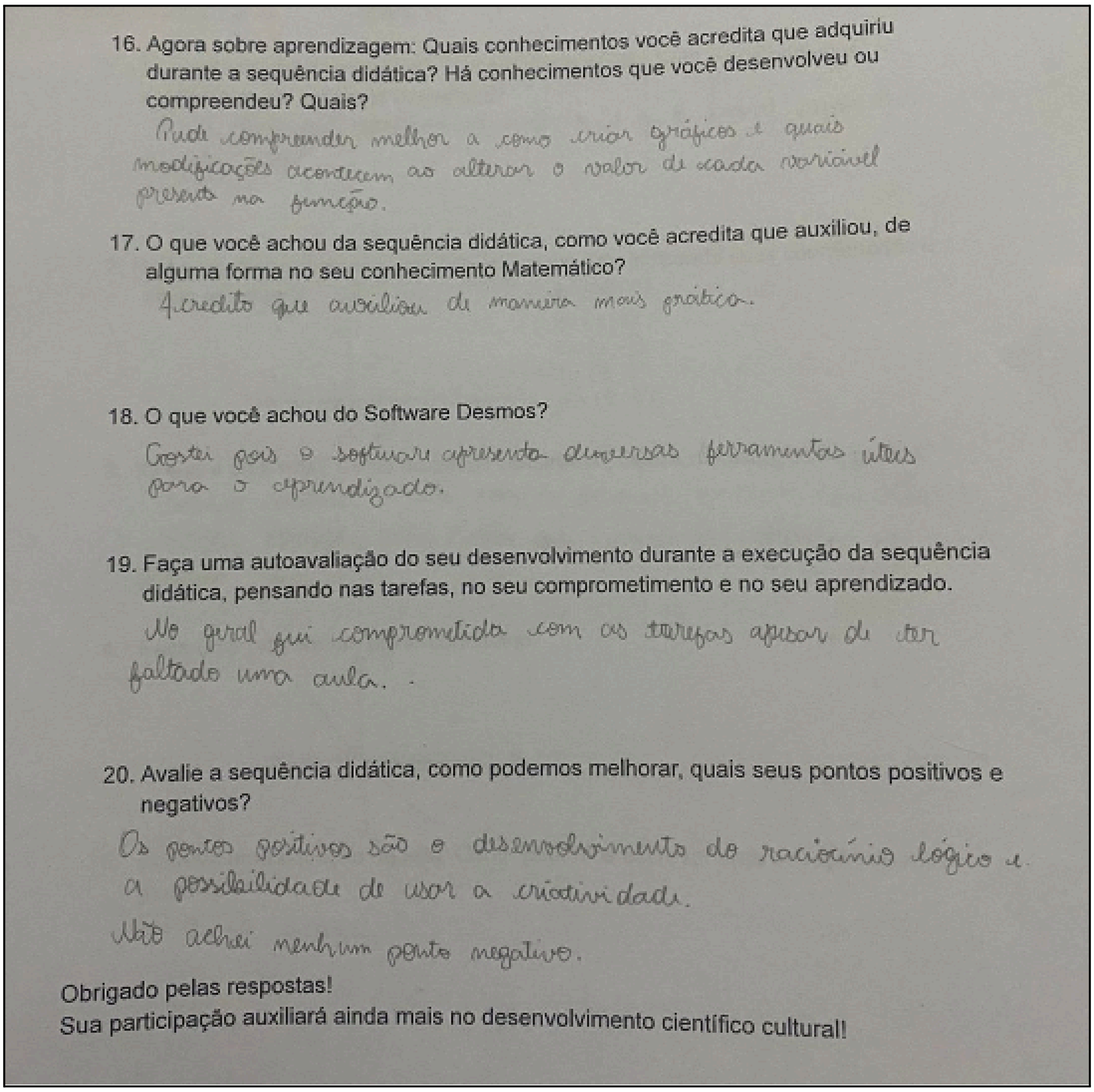


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

5.5 Etapa 5: Questionário de avaliação

Após a aplicação da sequência de atividades foi aplicado o questionário de avaliação em que seu objetivo principal foi avaliar a sequência de atividades e fazer uma autoavaliação. As atividades desenvolvidas durante a pesquisa não tiveram cunho avaliativo. Também foram feitas as mesmas perguntas elaboradas no questionário inicial sobre retas, parábolas e circunferências. Na figura 51 abaixo foram apresentadas as respostas de um dos estudantes.

Figura 49 - Resposta de um estudante das questões no questionário de avaliação



16. Agora sobre aprendizagem: Quais conhecimentos você acredita que adquiriu durante a sequência didática? Há conhecimentos que você desenvolveu ou compreendeu? Quais?

Pude compreender melhor a como criar gráficos e quais modificações acontecem ao alterar o valor de cada variável presente na função.

17. O que você achou da sequência didática, como você acredita que auxiliou, de alguma forma no seu conhecimento Matemático?

Acredito que auxiliou de maneira mais prática.

18. O que você achou do Software Desmos?

Gostei pois o software apresenta diversas ferramentas úteis para o aprendizado.

19. Faça uma autoavaliação do seu desenvolvimento durante a execução da sequência didática, pensando nas tarefas, no seu comprometimento e no seu aprendizado.

No geral fui comprometida com as tarefas apesar de ter faltado uma aula.

20. Avalie a sequência didática, como podemos melhorar, quais seus pontos positivos e negativos?

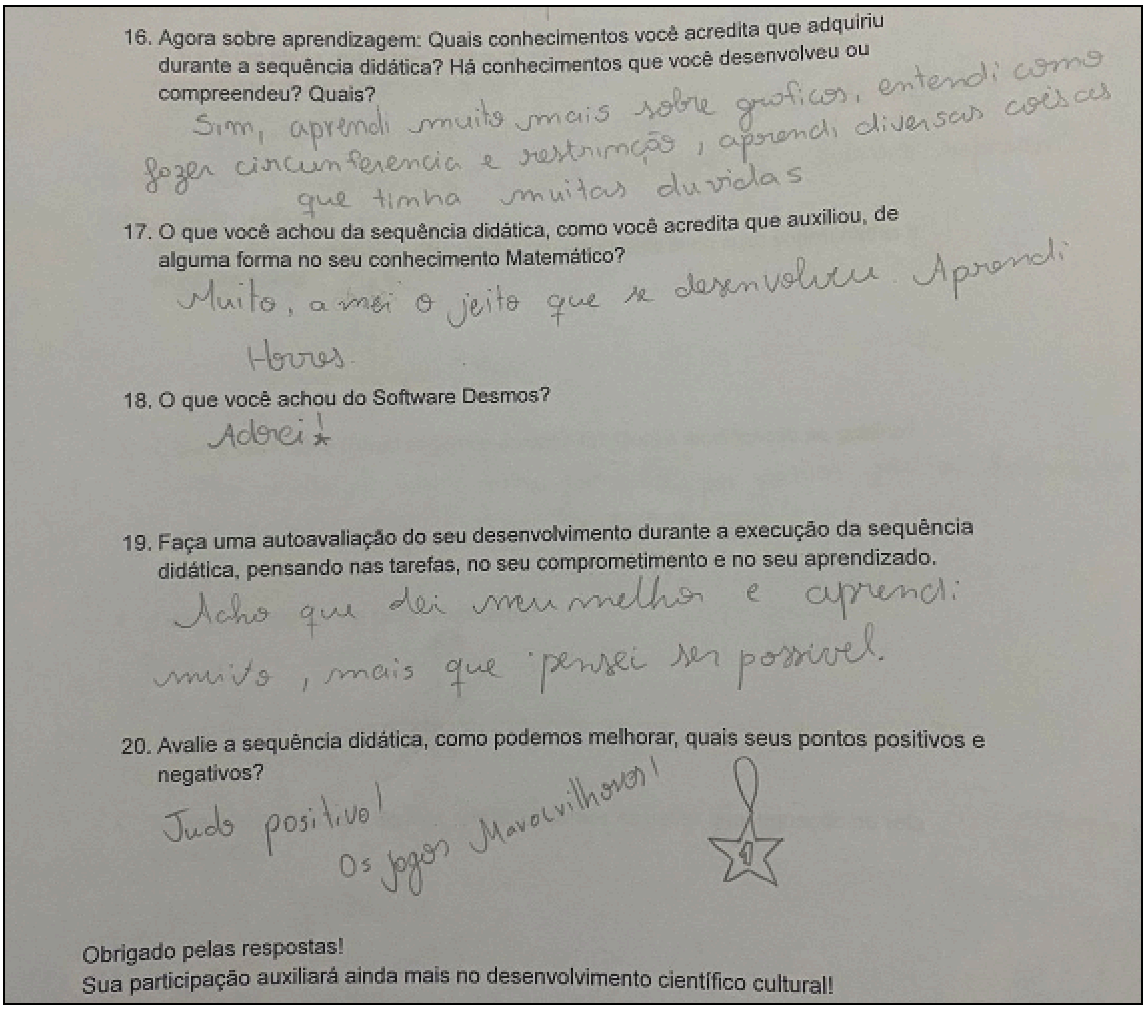
Os pontos positivos são o desenvolvimento do raciocínio lógico e a possibilidade de usar a criatividade.
Não achei nenhum ponto negativo.

Obrigado pelas respostas!
Sua participação auxiliará ainda mais no desenvolvimento científico cultural!

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

As respostas dos estudantes sobre a sequência de atividades foram positivas, sobre o andamento das atividades, porém alguns estudantes relataram uma maior dificuldade no início das atividades que precisavam compreender o enunciado das atividades e também o funcionamento do software. Alguns estudantes, como na figura 52, relataram sobre o entendimento de circunferências, que não conheciam tão bem os conceitos e após a sequência de atividades construíram uma noção do objeto matemático.

Figura 50 - Resposta de outro estudante das questões no questionário de avaliação



16. Agora sobre aprendizagem: Quais conhecimentos você acredita que adquiriu durante a sequência didática? Há conhecimentos que você desenvolveu ou compreendeu? Quais?

Sim, aprendi muito mais sobre graficos, entendi como fazer circunferencia e restrinção, aprendi diversas coisas que tinha muitas duvidas

17. O que você achou da sequência didática, como você acredita que auxiliou, de alguma forma no seu conhecimento Matemático?

Muito, amei o jeito que se desenvolveu. Aprendi Horres.

18. O que você achou do Software Desmos?

Adorei!

19. Faça uma autoavaliação do seu desenvolvimento durante a execução da sequência didática, pensando nas tarefas, no seu comprometimento e no seu aprendizado.

Acho que dei meu melhor e aprendi muito, mais que pensei ser possivel.

20. Avalie a sequência didática, como podemos melhorar, quais seus pontos positivos e negativos?

Tudo positivo! Os jogos Maravilhosos!

Obrigado pelas respostas!
Sua participação auxiliará ainda mais no desenvolvimento científico cultural!

Fonte: Próprio autor, 2024.

Mais da metade dos estudantes também respondeu que as atividades estavam dispostas de maneira didática e prática, e também que conseguiram diminuir dúvidas sobre os conteúdos de retas e parábolas que ficaram durante o ano letivo.

6 CONCLUSÕES

Apresentamos ao longo deste trabalho uma pesquisa qualitativa envolvendo uma sequência de atividades para o Ensino Médio sobre reta, parábola e circunferência utilizando a plataforma Desmos. A proposta se embasa na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, com foco na conversão dos registros algébricos e gráficos dentro do software Desmos. A sequência de atividades foi elaborada de modo que os estudantes pudessem explorá-la de maneira autônoma, com interação entre eles e com auxílio do professor/pesquisador quando necessário.

A análise dos dados mostrou que houve desenvolvimento cooperativo e a construção de novas correlações entre diferentes registros para os objetos matemáticos presentes na sequência de atividades. O público-alvo desta pesquisa ainda não havia estudado geometria analítica, porém já havia estudado alguns objetos matemáticos presentes nesta sequência de atividades no contexto de funções.

Assim, esta proposta mostrou-se uma oportunidade para os estudantes expandirem seu estudo sobre estes objetos a partir de outro ponto de vista, a geometria analítica. A sequência de atividades propôs uma abordagem que privilegia transformações gráficas a partir das equações por meio de alterações nos coeficientes de cada objeto matemático. Durante todo o percurso de aprendizagem foram feitos testes e perguntas, e a análise das respostas, por parte do pesquisador, o possibilitaram a compreender como ocorreram os processos de aprendizagem dos estudantes.

No jogo de pegar estrelas e no produto final, a imagem a ser criada, foi observado o desenvolvimento de cada estudante, percebeu maior eficiência e velocidade ao realizar as conversões entre os diferentes registros. Segundo Duval (2012), é necessário coordenar ativamente diferentes formas de representação, especialmente na disciplina de Matemática, onde as representações semióticas desempenham um papel central. A exploração da sequência de atividades oportunizou aos estudantes a coordenação de diferentes registros de representação. A saber, favoreceu-se principalmente os registros algébricos e gráficos durante toda a sequência de atividades.

Dentro desta pesquisa aplicada, foi proposta uma experiência diferente a que os estudantes estavam habituados, que visa promover a conexão de conceitos anteriores e ampliar significados por meio de um processo autônomo. Por fim, propostas didáticas como esta, que fazem uso de softwares e que promovem mudanças de registros não se restringem somente ao público do Ensino Médio e devem estar presentes em todos os níveis de ensino.

Por fim, como o objetivo principal desta pesquisa foi (re)apresentar diferentes registros para alguns objetos matemáticos presentes na geometria analítica e, através de uma sequência de atividades, construir correlações entre esses registros. Para atingir esse objetivo, a pesquisa qualitativa utilizou a plataforma Desmos para explorar os conceitos de reta, parábola e circunferência, focando na conversão entre registros algébricos e gráficos. A análise dos dados demonstrou que a sequência de atividades permitiu aos estudantes desenvolver uma melhor coordenação entre esses diferentes registros, conforme observado no processo de aprendizado e nas tarefas realizadas. A abordagem proposta, que envolveu a exploração autônoma e a interação com o software, possibilitou uma expansão do conhecimento dos estudantes e facilitou a construção de novas correlações entre os registros algébricos e gráficos. Essa experiência não só favoreceu a compreensão mais profunda dos objetos matemáticos estudados, mas também evidenciou a importância da coordenação ativa entre diferentes formas de representação, alinhando-se ao objetivo da pesquisa de promover a aprendizagem através da integração de registros matemáticos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). 11. ed. Rio de Janeiro, RJ, 2007.

BERND, Arthur Barcellos. **Registros de Representações Semióticas e a utilização de ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de geometria analítica.** CINTED - UFRGS. Porto Alegre, RS. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 14, n. 2, p. 45-62, dez. 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COELHO, Flávio Uchoa; AGUIAR, Márcia. **A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino.** São Paulo - SP - Brasil, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DESMOS. Software. 2020. Disponível em: https://www.desmos.com/?lang=pt-BR. Acesso em: [data de acesso].

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.*, v. 7, n. 2, p. 266-297, jul./dez. 2012.

_____. **Sémiosis, Pensée Humaine et Activité Mathématique.** *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 6, n. 11, p. 45-62, jul. 2009/dez. 2009; v. 6, n. 12, p. 63-80, jan. 2010/jun. 2010.

_____. **A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematic.** Springer. *Educational Studies in Mathematics*, 2006.

FTD. **Sistema de Ensino: Ensino Médio: 3ª série**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2017.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. **Mídias digitais na Educação Matemática.** In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). *Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática*. Porto Alegre: UFRGS, [2010]. p. 13.

HALBERSTADT, Fabrício Fernando; FIOREZE, Leandra Anversa. **O ensino e aprendizagem dos objetos reta e desigualdades com o GrafEq: uma abordagem com vistas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 13, n. 1, jul. 2005. Porto Alegre: CINTED - UFRGS

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: 7, geometria analítica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MORAES, Carlene Fonseca de. **Geometria analítica: explorando conceitos do ensino médio com o uso de animações no GeoGebra**. Rio Grande: FURG, julho de 2016.

SOUZA, Jerson Sandro Santos de; SOUZA, Leandro de Oliveira. **Como apreendemos os objetos matemáticos: uma análise à luz de três teorias.** *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*. Florianópolis - SC, v. 15, p. 1-24, 2020.

VITORINO, Alfredo; RUGGIERO, Márcia A. G. **Parábola de equação:** $x^2 - 2xy + 4y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Campinas: UNICAMP, jun. 2021. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/aplicacao_conicas.html>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Apêndice I - Questionário inicial

Este questionário tem por objetivo coletar e analisar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre retas, parábolas e circunferências. A coleta de dados se baseia sobre a representação algébrica e gráfica dos conceitos. As perguntas devem ser respondidas com seriedade e de maneira que expresse os conhecimentos do estudante e a compreensão dos conceitos do objeto de estudo. No final da sequência de atividades haverá outro questionário similar, buscando compreender e coletar os avanços e aprendizagens dos estudantes.

Nome:______________________________ Data:____/____/______

1 - Para você, o que é um plano cartesiano? Como é possível utilizá-lo? o que podemos representar em um plano cartesiano?

2 - Faça um plano cartesiano, coloque 5 pontos nele indicando suas coordenadas.

3 - O que é uma reta? Como podemos construí-la?

4 - Faça uma reta em um plano cartesiano.

5 - Escreva uma equação de reta. Como podemos escrever uma equação de reta na forma genérica?

6 - O que é uma parábola? Como podemos construí-la?

7 - Esboce com lápis e papel uma parábola em um plano cartesiano.

8 - Escreva uma equação de parábola. Como podemos escrever uma equação de parábola na forma genérica?

9 - O que é uma circunferência? Como podemos construí-la?

10 - Esboce com lápis e papel uma circunferência em um plano cartesiano.

11 - Escreva uma equação de circunferência. Como podemos escrever uma equação de circunferência na forma genérica?

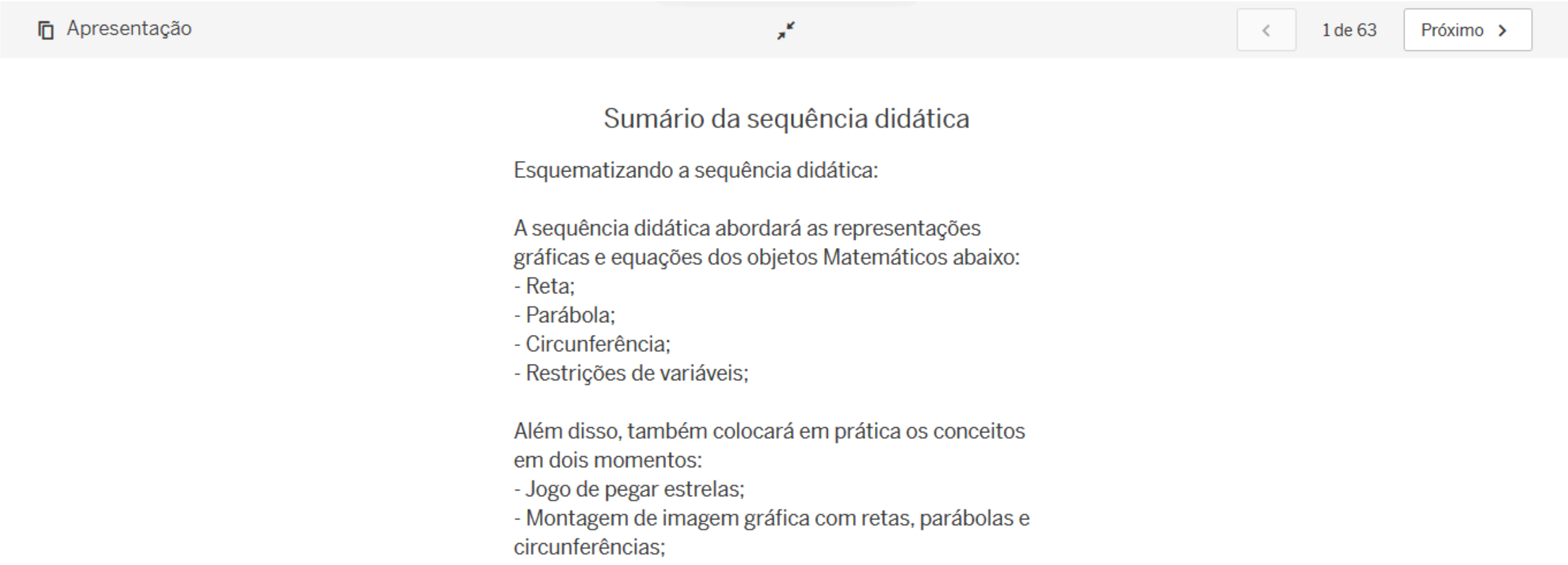
12 - O que é uma restrição de variável? Como podemos restringir uma variável?

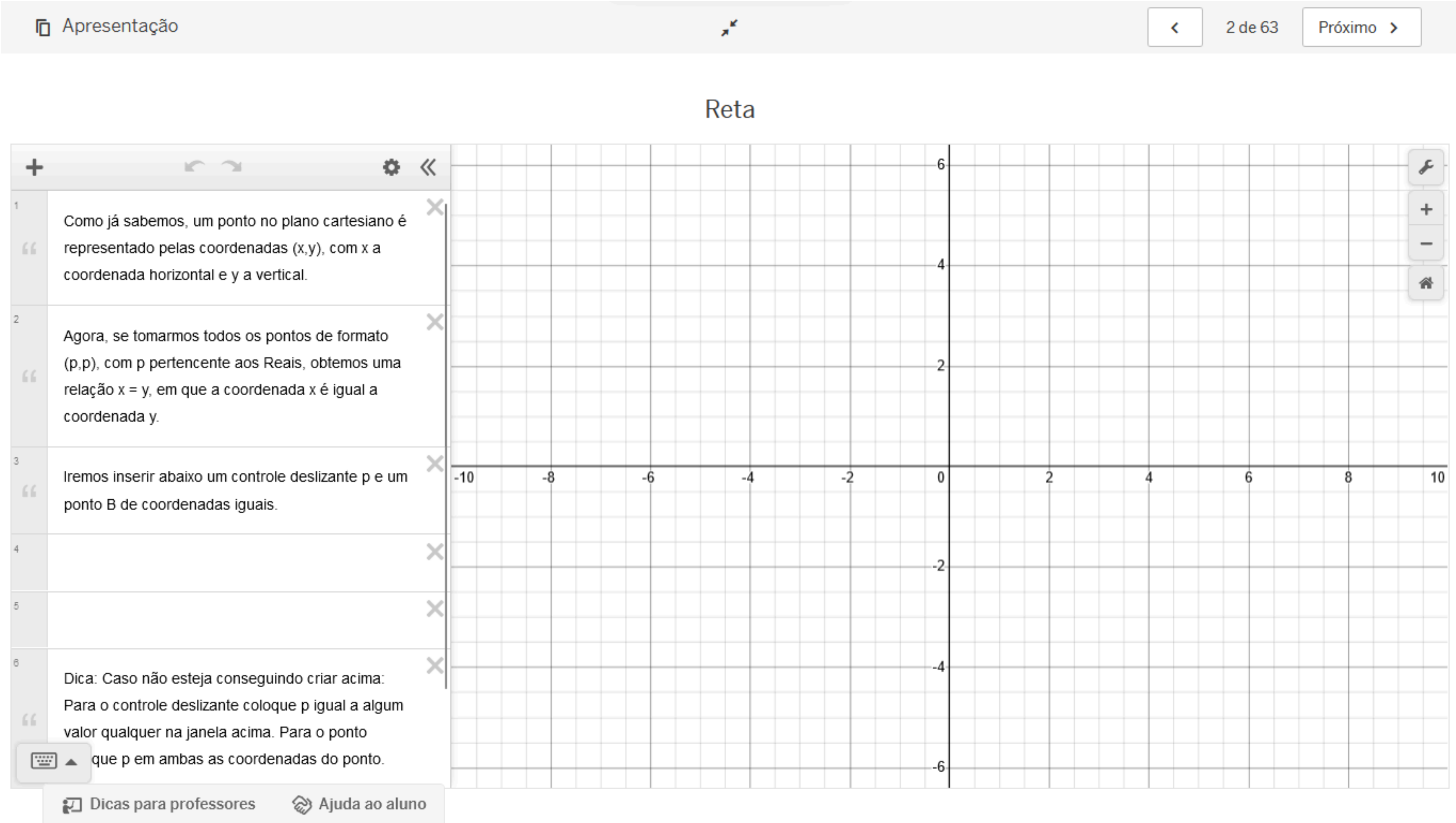
13 - Escreva uma restrição de variável para x e outra para y.

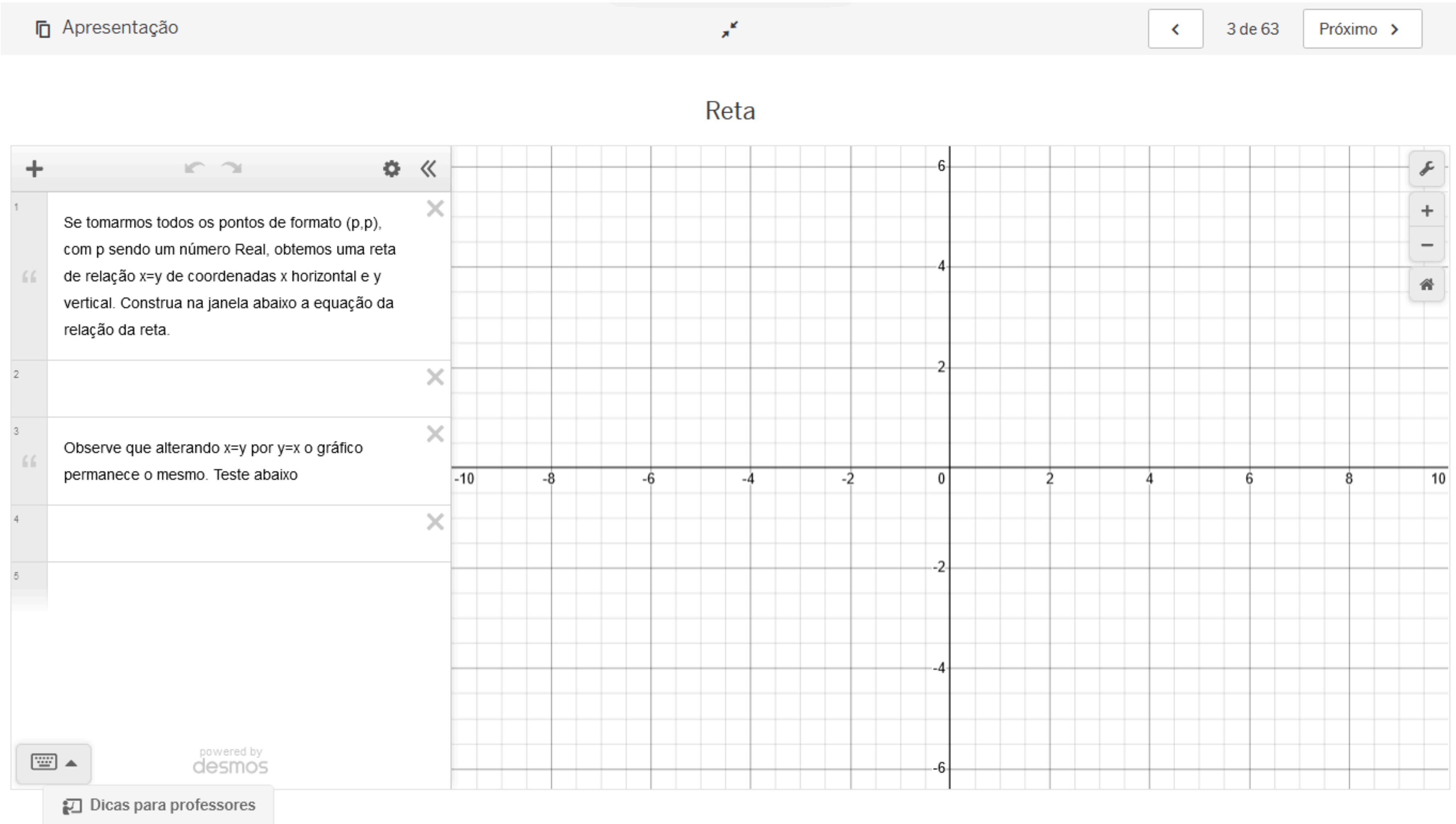
14 - Esboce uma reta no plano cartesiano impondo uma restrição na variável x ou y.

Apêndice II - Sequência de atividades: Parte teórica (slide 1 até 40)

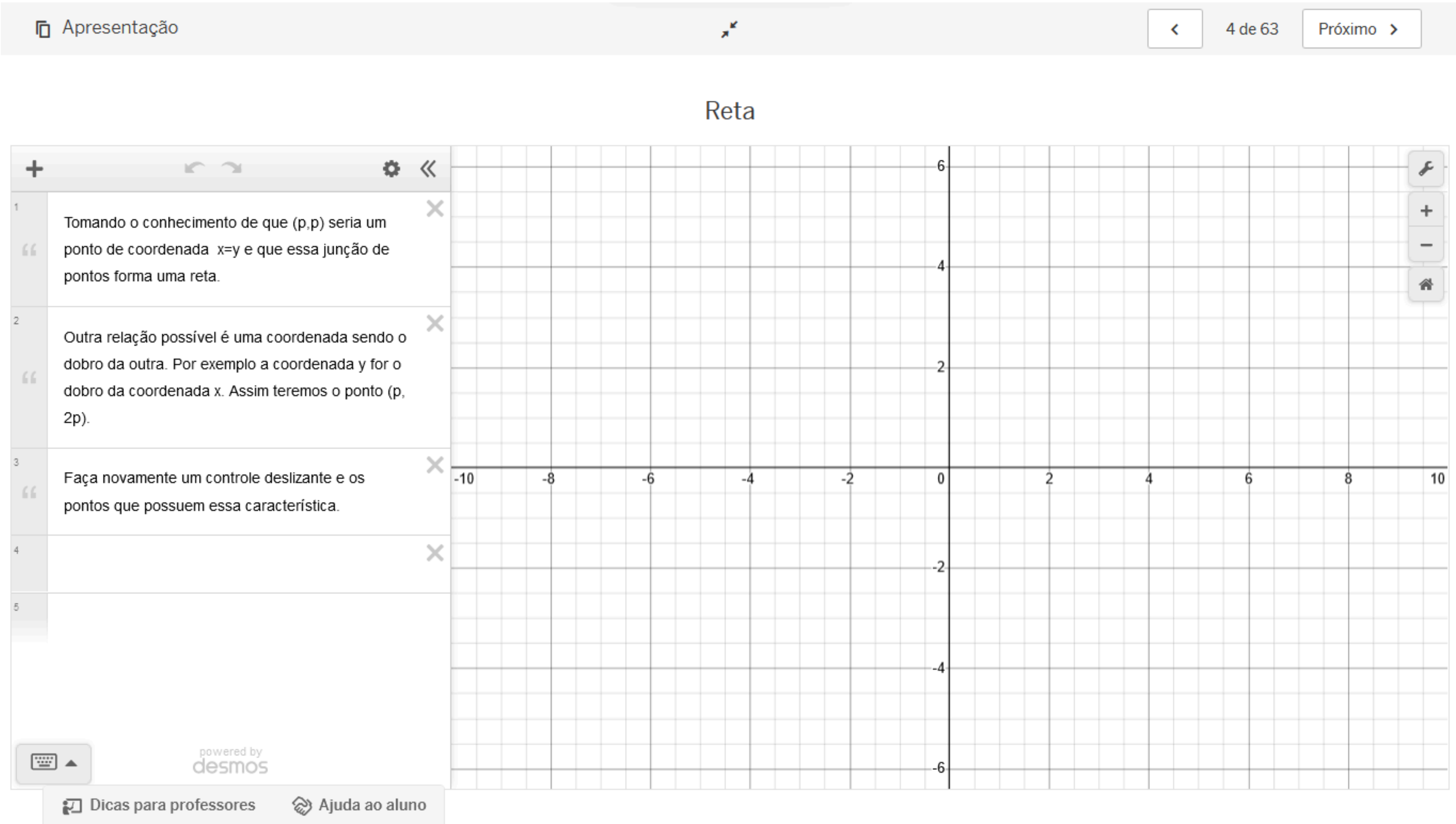
As atividades apresentadas nos apêndices II, III e IV foram aqui apresentadas como foram aplicadas. As atividades atualizadas estão dispostas no link: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/648a605a8061e951ea2ade7c?lang=pt-BR




Apresentação
2 de 63
Próximo
Reta
Como já sabemos, um ponto no plano cartesiano é representado pelas coordenadas (x,y), com x a coordenada horizontal e y a vertical.
Agora, se tomarmos todos os pontos de formato (p,p), com p pertencente aos Reais, obtemos uma relação x = y, em que a coordenada x é igual a coordenada y.
Iremos inserir abaixo um controle deslizante p e um ponto B de coordenadas iguais.
Dica: Caso não esteja conseguindo criar acima: Para o controle deslizante coloque p igual a algum valor qualquer na janela acima. Para o ponto
que p em ambas as coordenadas do ponto.
Dicas para professores
Ajuda ao aluno



Apresentação
3 de 63
Próximo
Reta
Se tomarmos todos os pontos de formato (p,p), com p sendo um número Real, obtemos uma reta de relação x=y de coordenadas x horizontal e y vertical. Construa na janela abaixo a equação da relação da reta.
Observe que alterando x=y por y=x o gráfico permanece o mesmo. Teste abaixo
powered by desmos
Dicas para professores

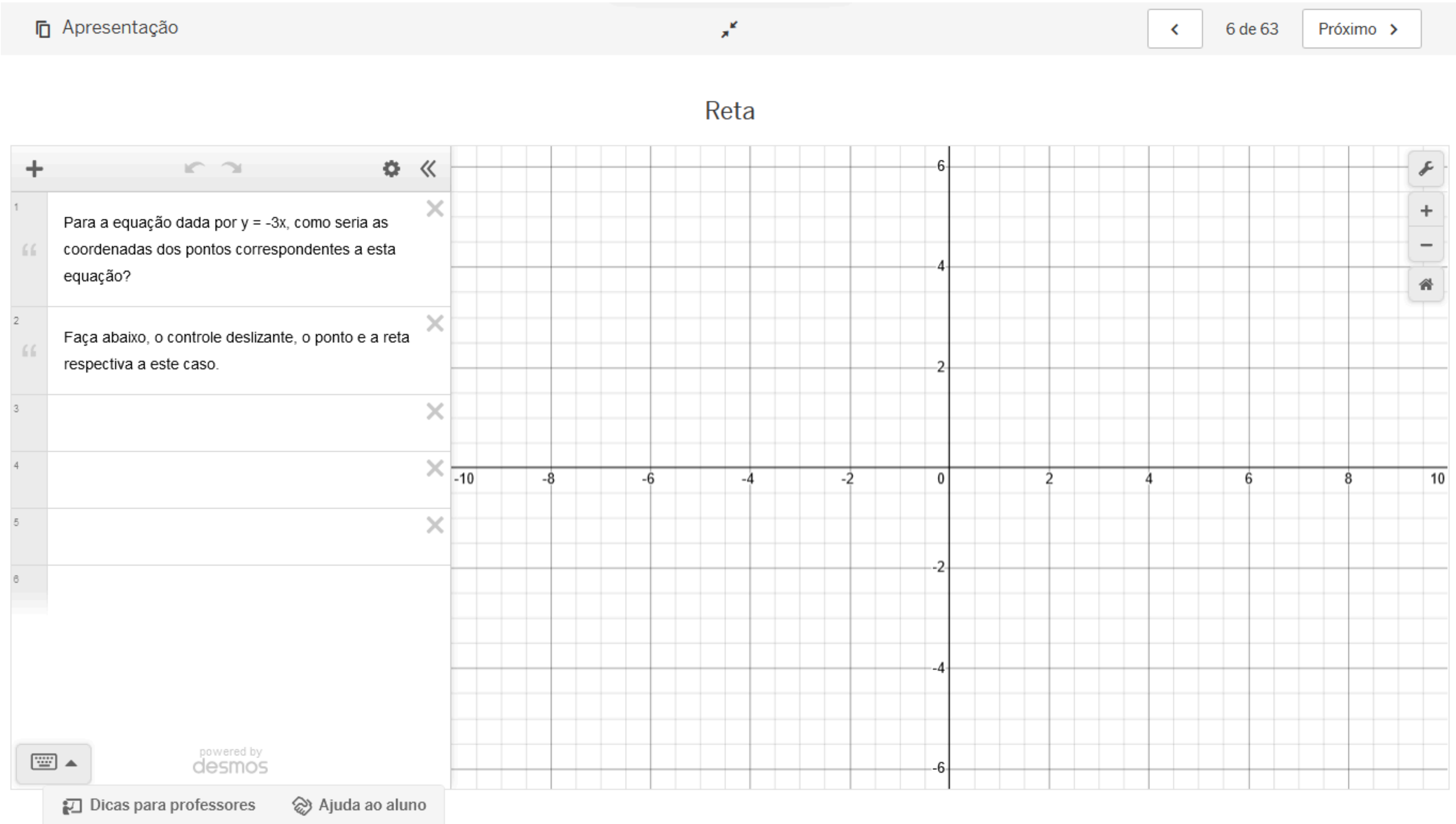

Apresentação
4 de 63
Próximo
Reta
Tomando o conhecimento de que (p,p) seria um ponto de coordenada x=y e que essa junção de pontos forma uma reta.
Outra relação possível é uma coordenada sendo o dobro da outra. Por exemplo a coordenada y for o dobro da coordenada x. Assim teremos o ponto (p, 2p).
Faça novamente um controle deslizante e os pontos que possuem essa característica.
powered by desmos
Dicas para professores
Ajuda ao aluno

Refletindo sobre as transformações de x=y

1 - No caso anterior, como podemos escrever uma equação que represente a reta formada pelo conjunto de pontos que possuem formato (p,2p)?

Enviar

Dicas para professores


Apresentação
6 de 63
Próximo
Reta
Para a equação dada por y = -3x, como seria as coordenadas dos pontos correspondentes a esta equação?
Faça abaixo, o controle deslizante, o ponto e a reta respectiva a este caso.
powered by desmos
Dicas para professores
Ajuda ao aluno

Apresentação

7 de 63 Próximo

Refletindo sobre as transformações de x=y

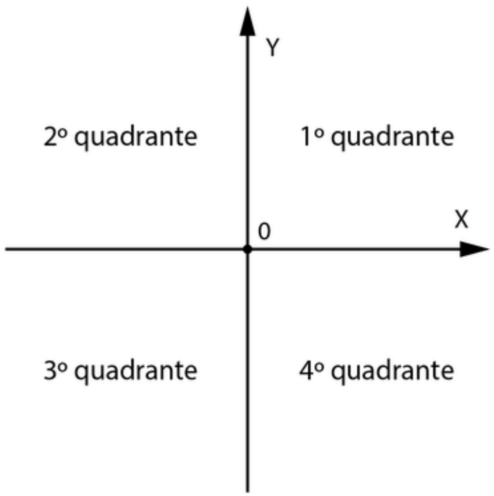
Responda as perguntas abaixo:

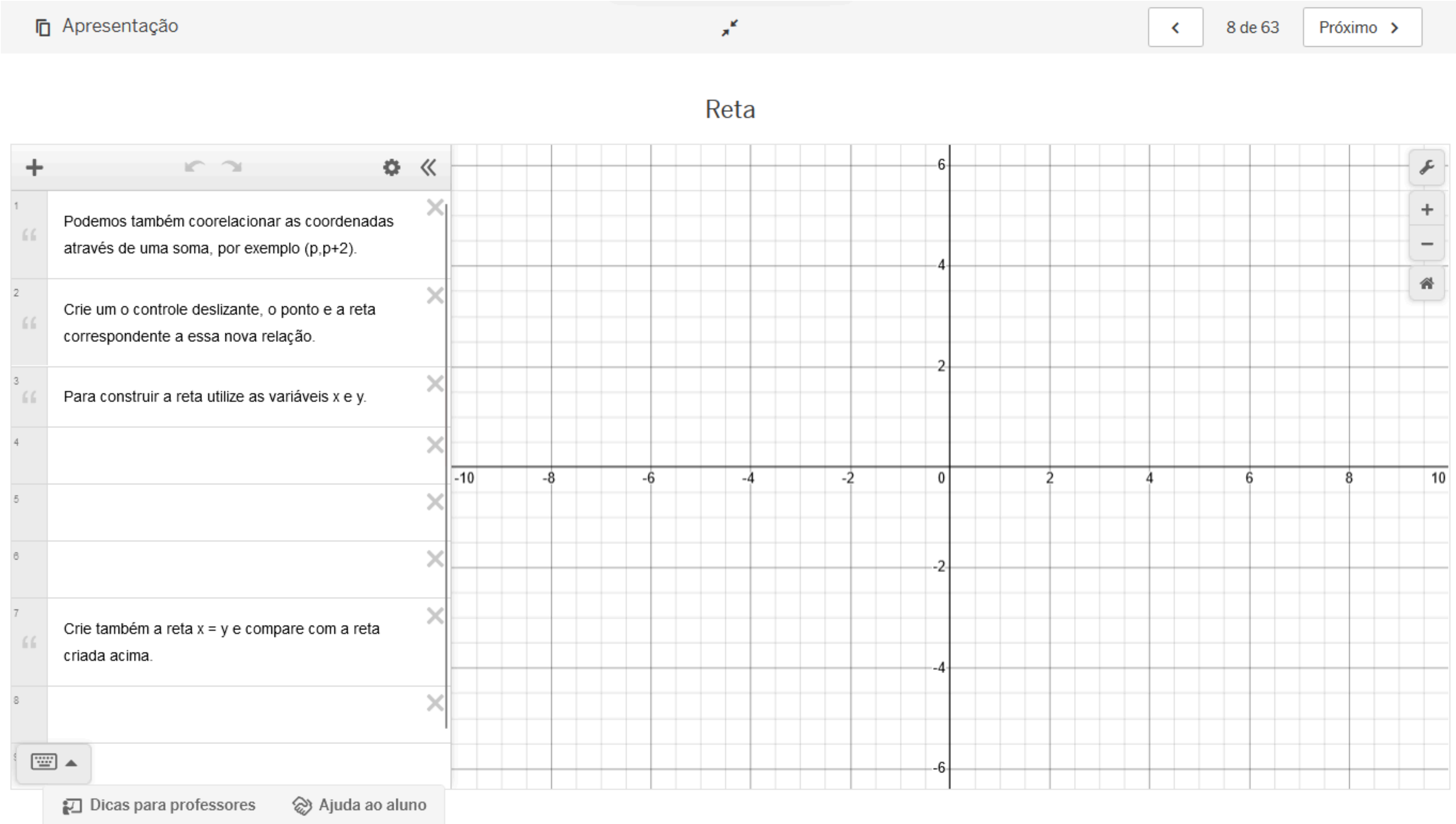
2 - Caso a reta seja $y = 2x$, em quais quadrantes essa reta se encontra?

3 - E se for na reta $y = -2x$, quais quadrantes?

4 - O que podemos dizer das retas nesses formatos? Caso queira, volte no slide anterior e teste no gráfico colocando as equações.

Enviar

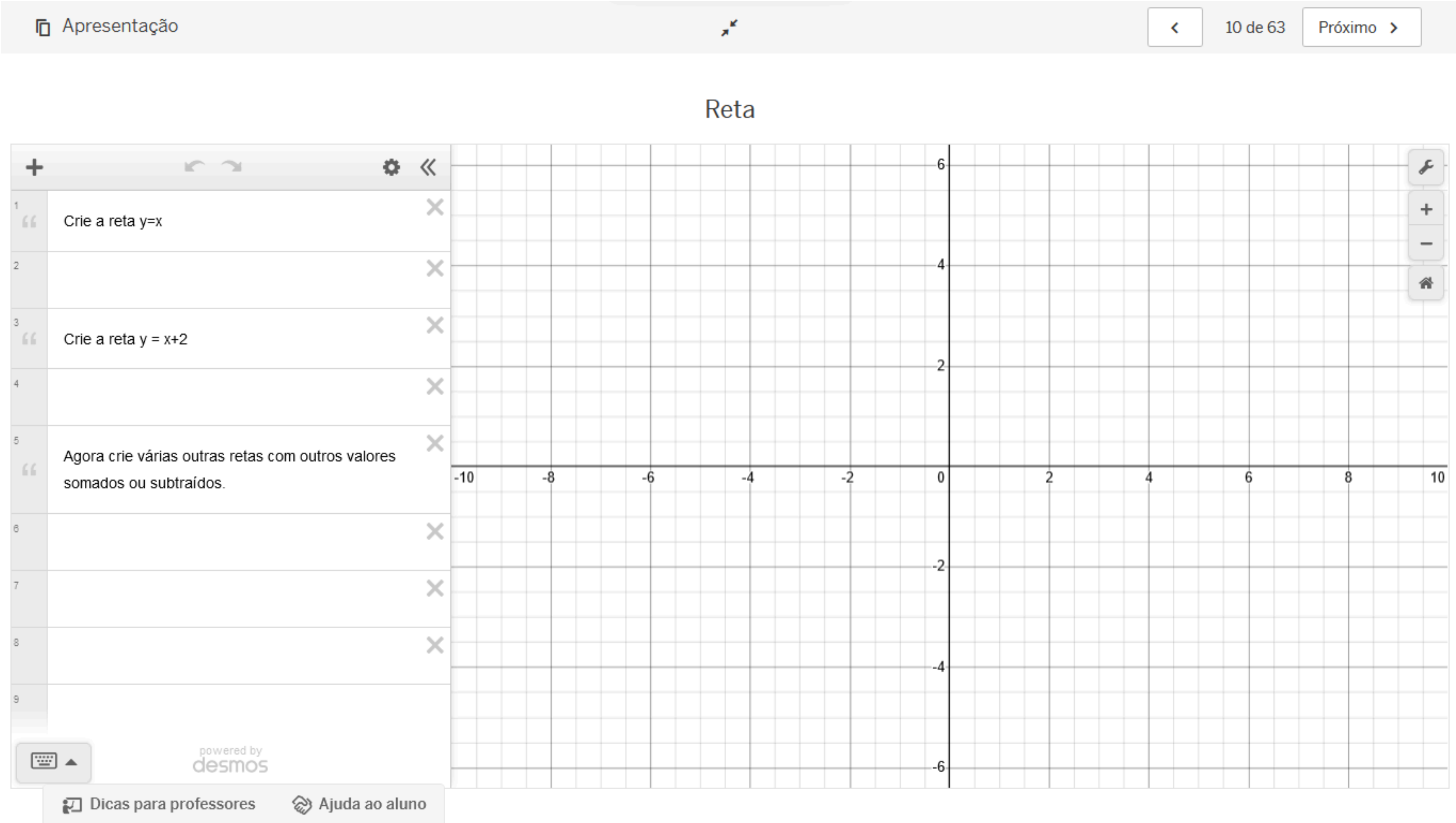


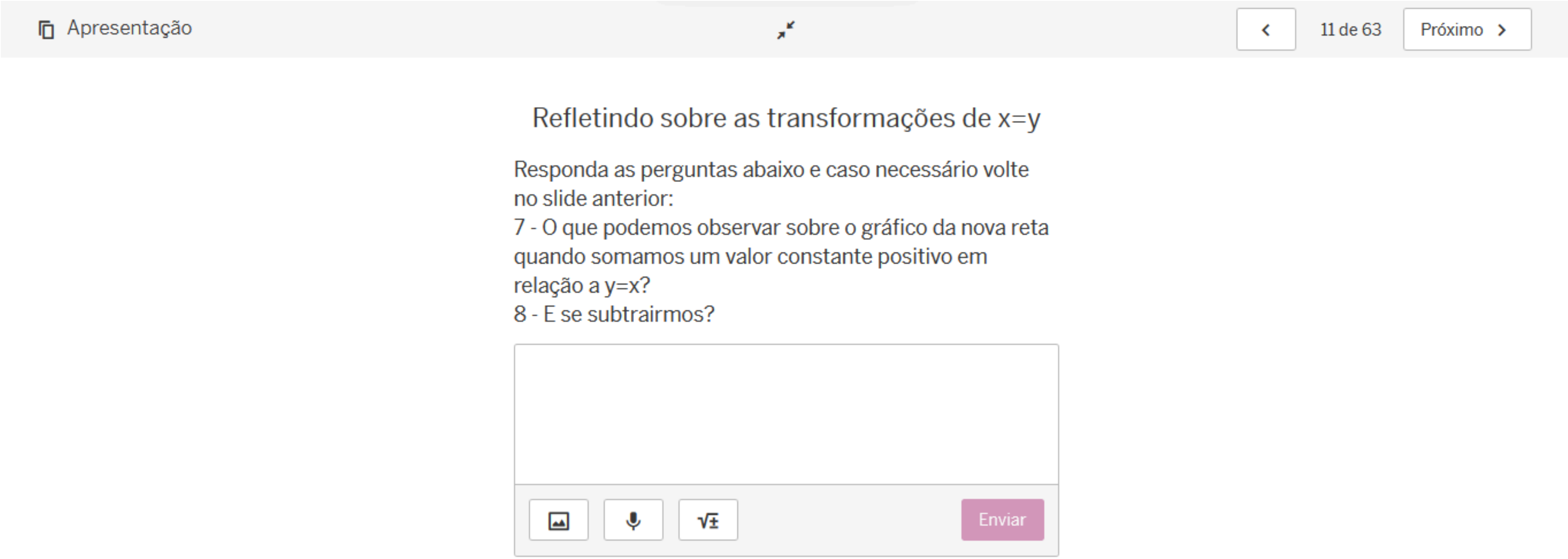

Apresentação
8 de 63
Próximo
Reta
Podemos também coorelacionar as coordenadas através de uma soma, por exemplo (p,p+2).
Crie um o controle deslizante, o ponto e a reta correspondente a essa nova relação.
Para construir a reta utilize as variáveis x e y.
Crie também a reta x = y e compare com a reta criada acima.
Dicas para professores
Ajuda ao aluno

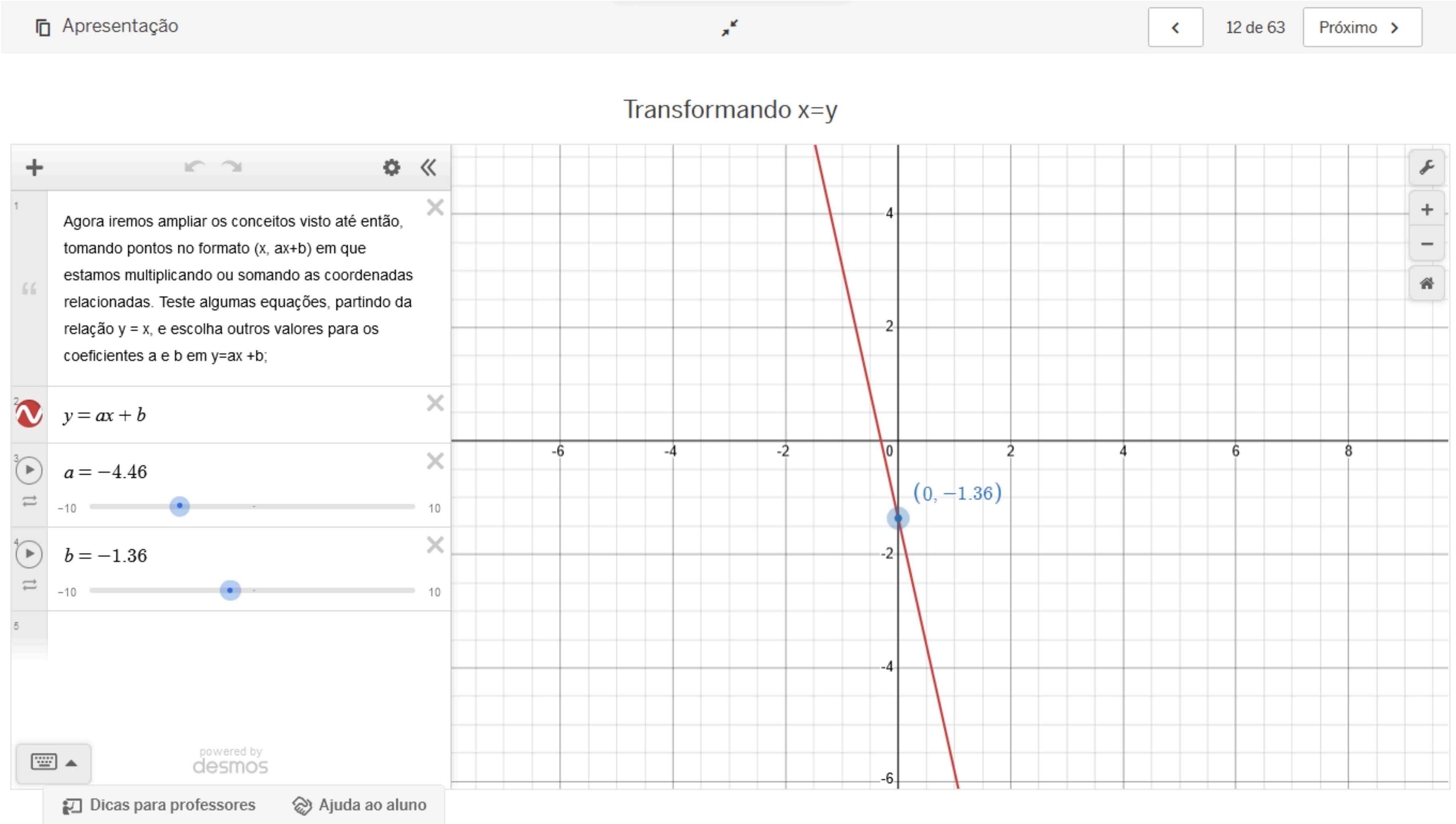
Refletindo sobre as transformações de x=y

Responda as perguntas abaixo:
5 - Qual a equação correspondente da relação do ponto (p,p+2)?
6 - No caso da equação y = x - 5, qual a relação das coordenadas do ponto?

Enviar


Apresentação
10 de 63
Próximo
Reta
Crie a reta y=x
Crie a reta y = x+2
Agora crie várias outras retas com outros valores somados ou subtraídos.
powered by desmos
Dicas para professores
Ajuda ao aluno


Apresentação
11 de 63
Próximo
Refletindo sobre as transformações de x=y
Responda as perguntas abaixo e caso necessário volte no slide anterior:
7 - O que podemos observar sobre o gráfico da nova reta quando somamos um valor constante positivo em relação a y=x?
8 - E se subtrairmos?
Enviar

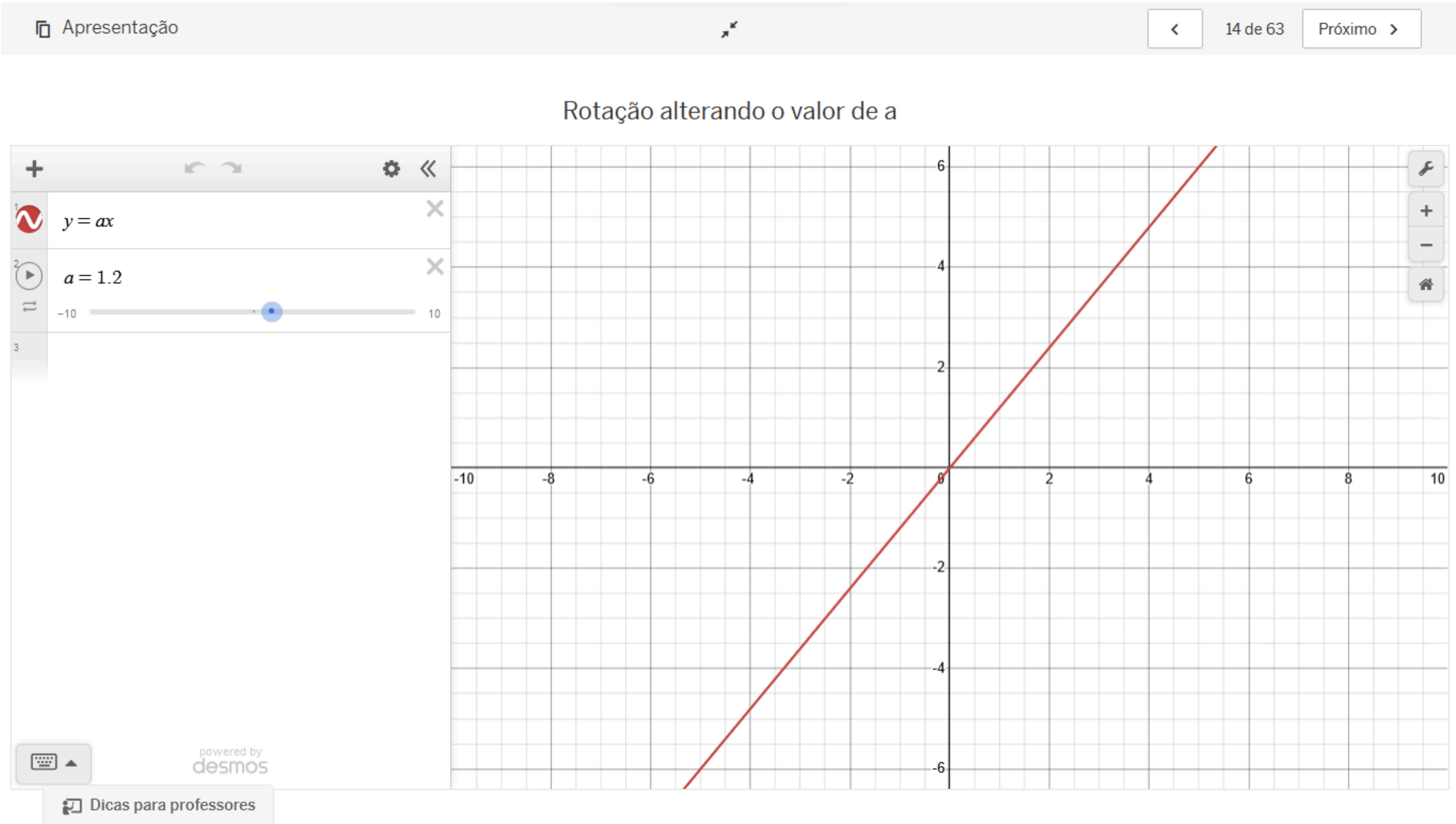

Apresentação
12 de 63
Próximo
Transformando x=y
Agora iremos ampliar os conceitos visto até então, tomando pontos no formato (x, ax+b) em que estamos multiplicando ou somando as coordenadas relacionadas. Teste algumas equações, partindo da relação y = x, e escolha outros valores para os coeficientes a e b em y=ax +b;
$y = ax + b$
$a = -4.46$
-10
10
$b = -1.36$
-10
10
powered by desmos
Dicas para professores
Ajuda ao aluno
$(0, -1.36)$
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
4
2
-2
-4
-6

Refletindo sobre as transformações de x=y

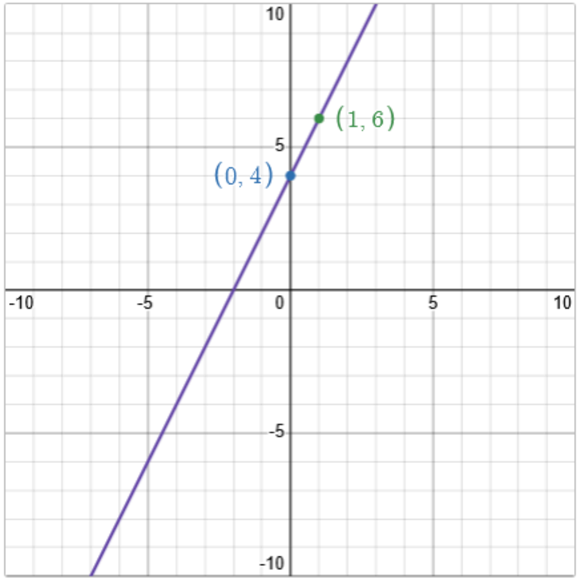
Responda as perguntas a seguir e caso necessário volte no slide anterior:

9 - Quais as alterações verificadas no gráfico ao alterar o valor de a?
10 - Quais as alterações verificadas no gráfico ao alterar o valor de b?

Enviar


Apresentação
14 de 63
Próximo
Rotação alterando o valor de a
y = ax
a = 1.2
−10
10
powered by desmos
Dicas para professores

Determine os coeficientes



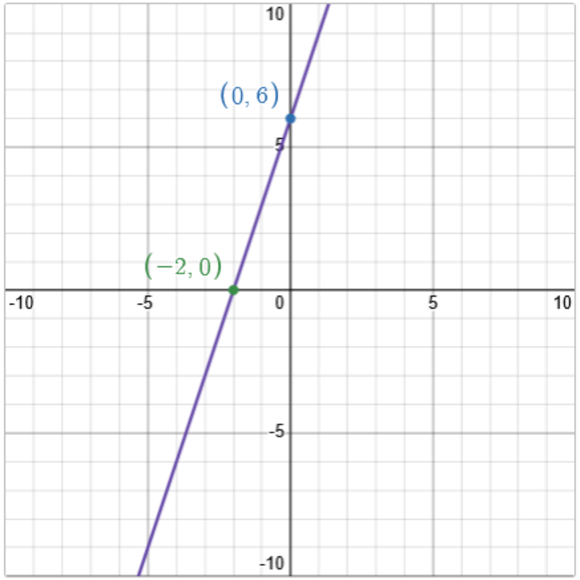
11 - Determine os valores dos coeficientes a e b na relação x e y.
Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Dica: Volte ao slide anterior e encontre uma reta que passe pelos pontos.

Compartilhar com a turma

Apresentação

Determine os coeficientes

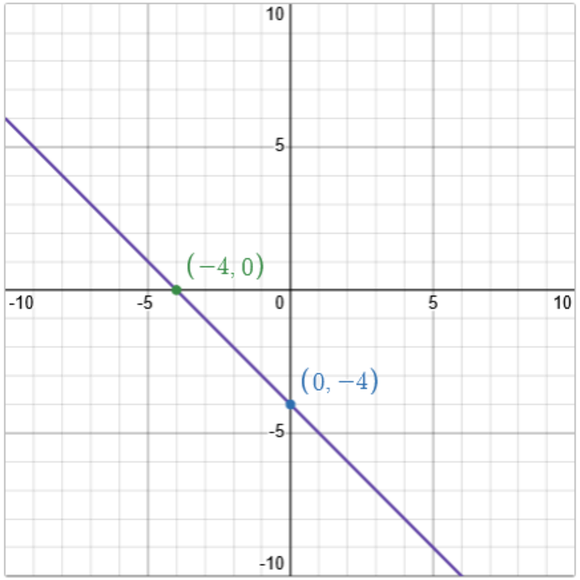


12 - Determine os valores dos coeficientes a e b na relação x e y.
Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Dica: Volte ao slide anterior e encontre uma reta que passe pelos pontos.

Compartilhar com a turma

Determine os coeficientes

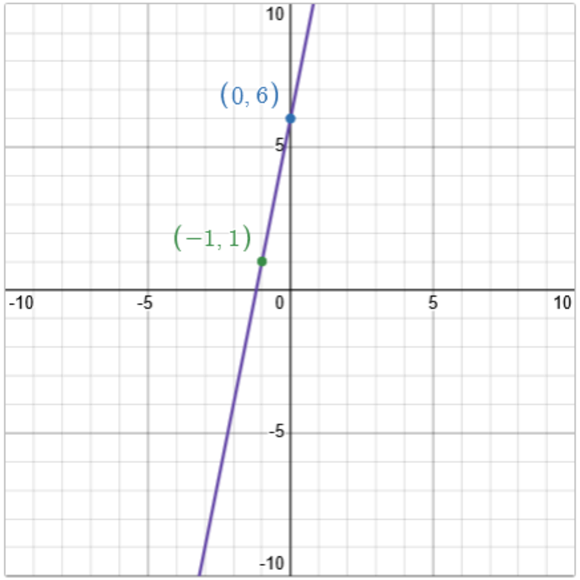


13 - Determine os valores dos coeficientes a e b na relação x e y.
Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Dica: Volte ao slide anterior e encontre uma reta que passe pelos pontos.

Compartilhar com a turma

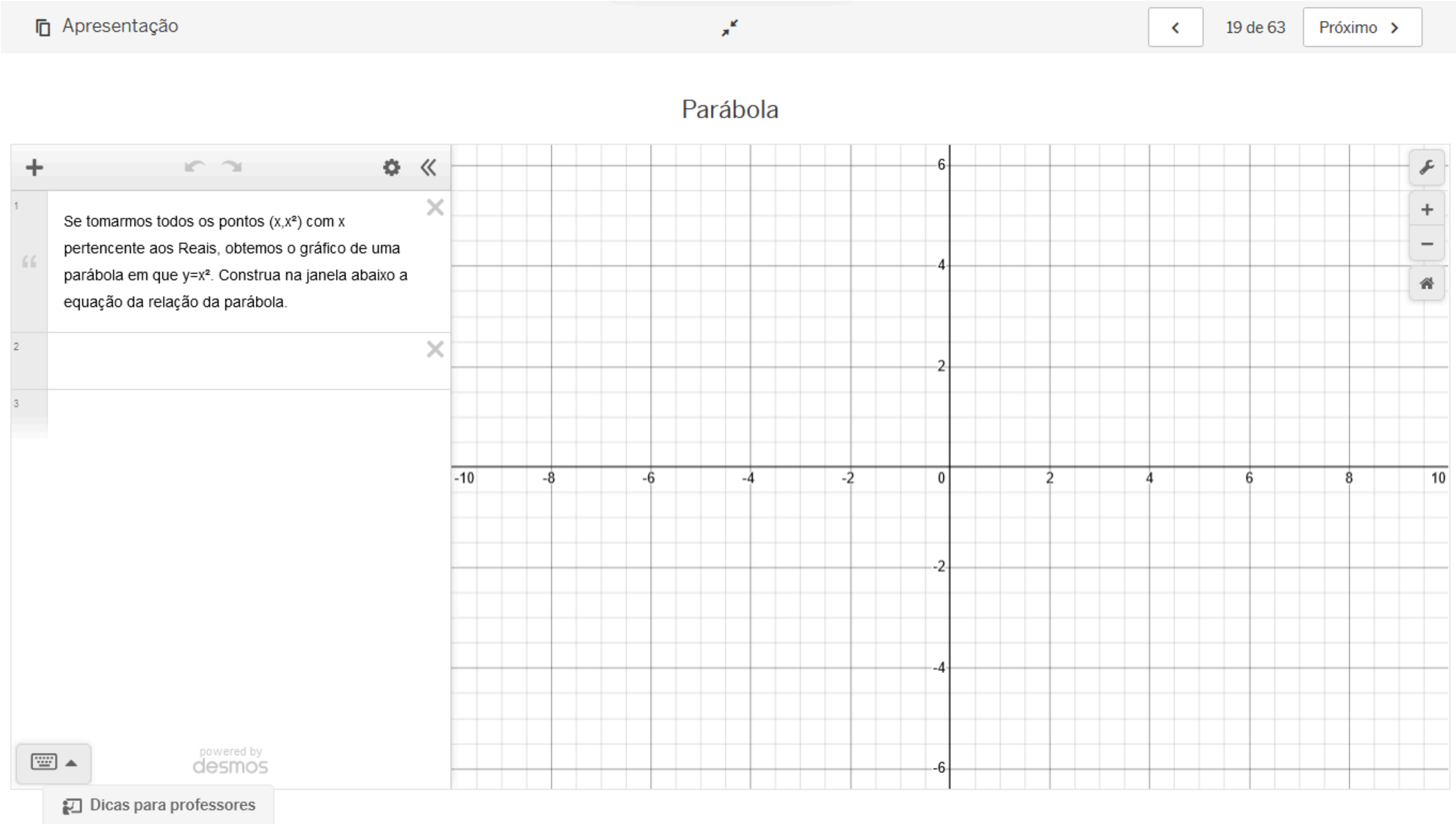
Determine os coeficientes

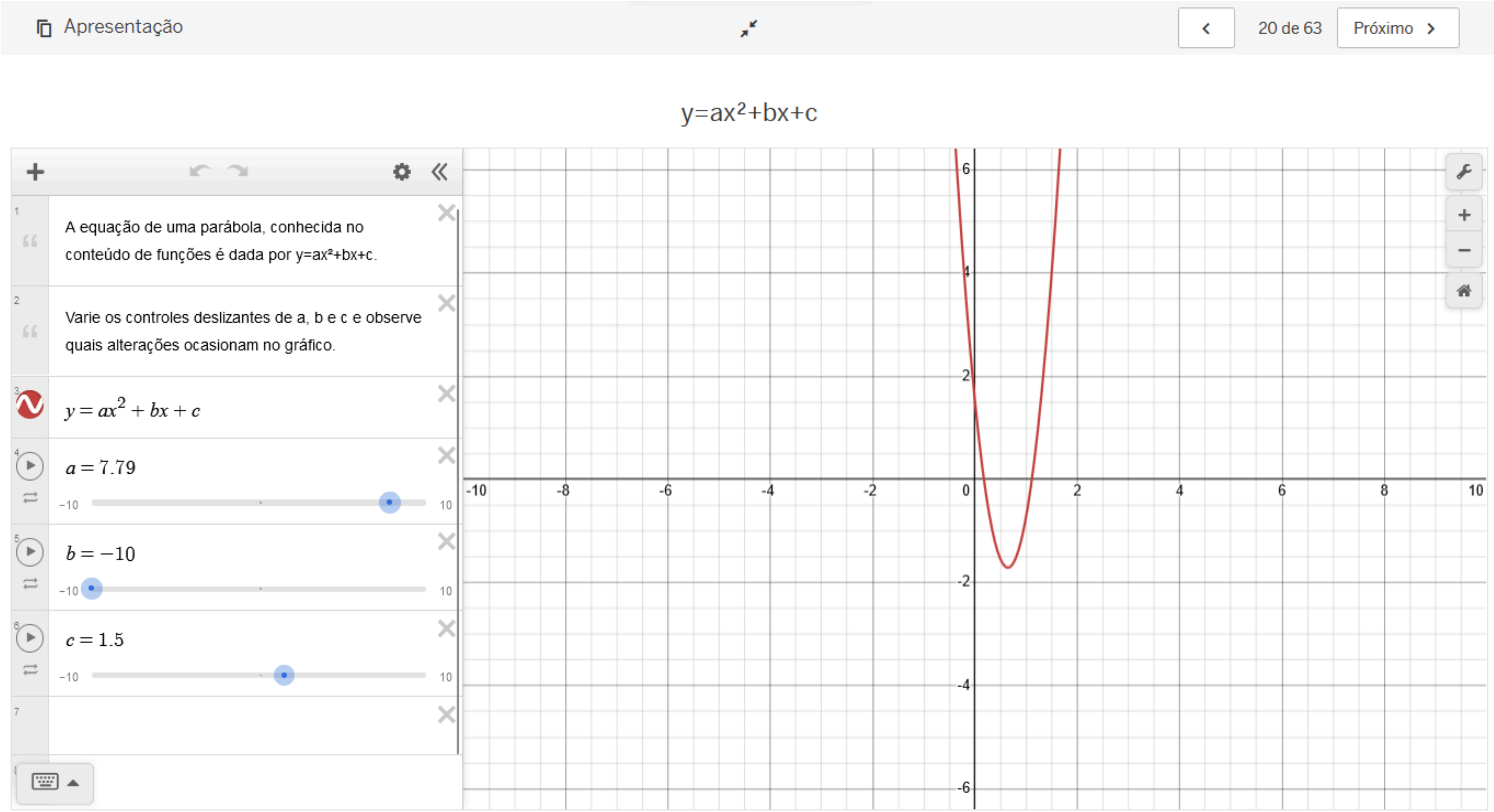


14 - Determine os valores dos coeficientes a e b na relação x e y.
Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Dica: Volte ao slide anterior e encontre uma reta que passe pelos pontos.

Compartilhar com a turma


Apresentação
19 de 63
Próximo
Parábola
Se tomarmos todos os pontos (x,x²) com x pertencente aos Reais, obtemos o gráfico de uma parábola em que y=x². Construa na janela abaixo a equação da relação da parábola.
powered by desmos
Dicas para professores


Apresentação
20 de 63
Próximo
y=ax²+bx+c
A equação de uma parábola, conhecida no conteúdo de funções é dada por y=ax²+bx+c.
Varie os controles deslizantes de a, b e c e observe quais alterações ocasionam no gráfico.
$y = ax^2 + bx + c$
$a = 7.79$
$b = -10$
$c = 1.5$
-10
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
6
4
2
-2
-4
-6

Apresentação

21 de 63 Próximo

Responda para parábolas no formato $y=ax^2+bx+c$:

15 - Alterando o coeficiente "a", qual efeito ocasiona no gráfico?
16 - Alterando o coeficiente "b", qual efeito ocasiona no gráfico?
17 - Alterando o coeficiente "c", qual efeito ocasiona no gráfico?

Volte no slide anterior caso necessário.

Compartilhar com a turma

Fórmula de parábola alternativa

Compare a equação $y=q(x-h)^2+v$ com $y=ax^2+bx+c$, para isso desenvolva a primeira equação levando-a ao formato da segunda equação para comparar os coeficientes.

Transformando y=x²

Teste a equação base y = x², tomando outros valores para os coeficientes q, h e v na equação y = q(x-h)² + v, com q diferente de zero (pois se for igual a zero não teremos uma parábola). Note que para transformar y= ax²+bx+c em y = q(x-h)² + v basta completar quadrado em relação a x.

$y = q(x-h)^2 + v$

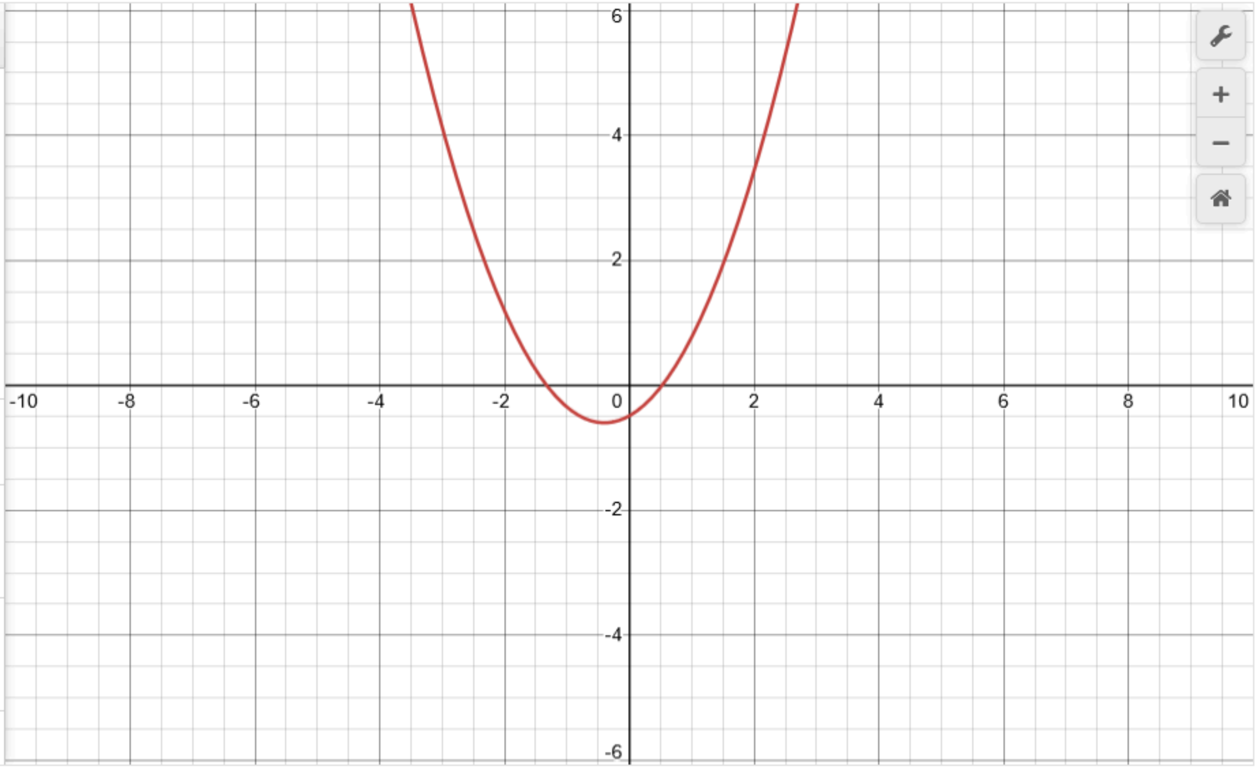
$q = 0.7$

−10 10

$h = -0.4$

−10 10

-0.6



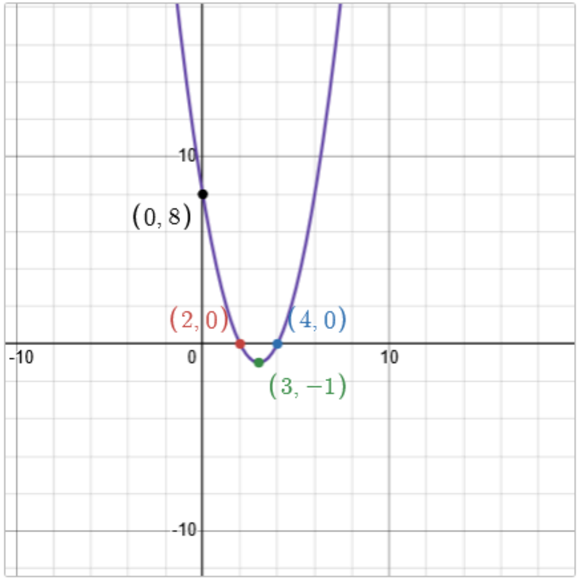
Refletindo sobre as transformações de $y=x^2$

Observando as equações $y = q(x-h)^2 + v$:

18 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de q?
19 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de h?
20 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de v?

Volte no slide anterior caso necessário.

Enviar



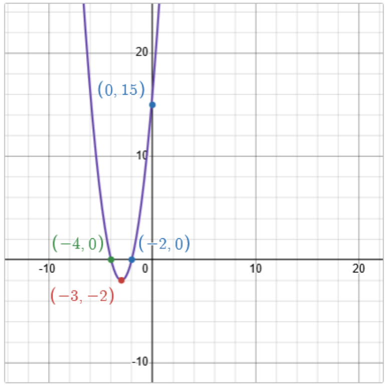
21 - Determine os valores dos coeficientes q, v e h a partir do gráfico ao lado. Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Dica: Volte ao slide anterior e encontre uma parábola que passe pelos pontos.

Compartilhar com a turma

Apresentação

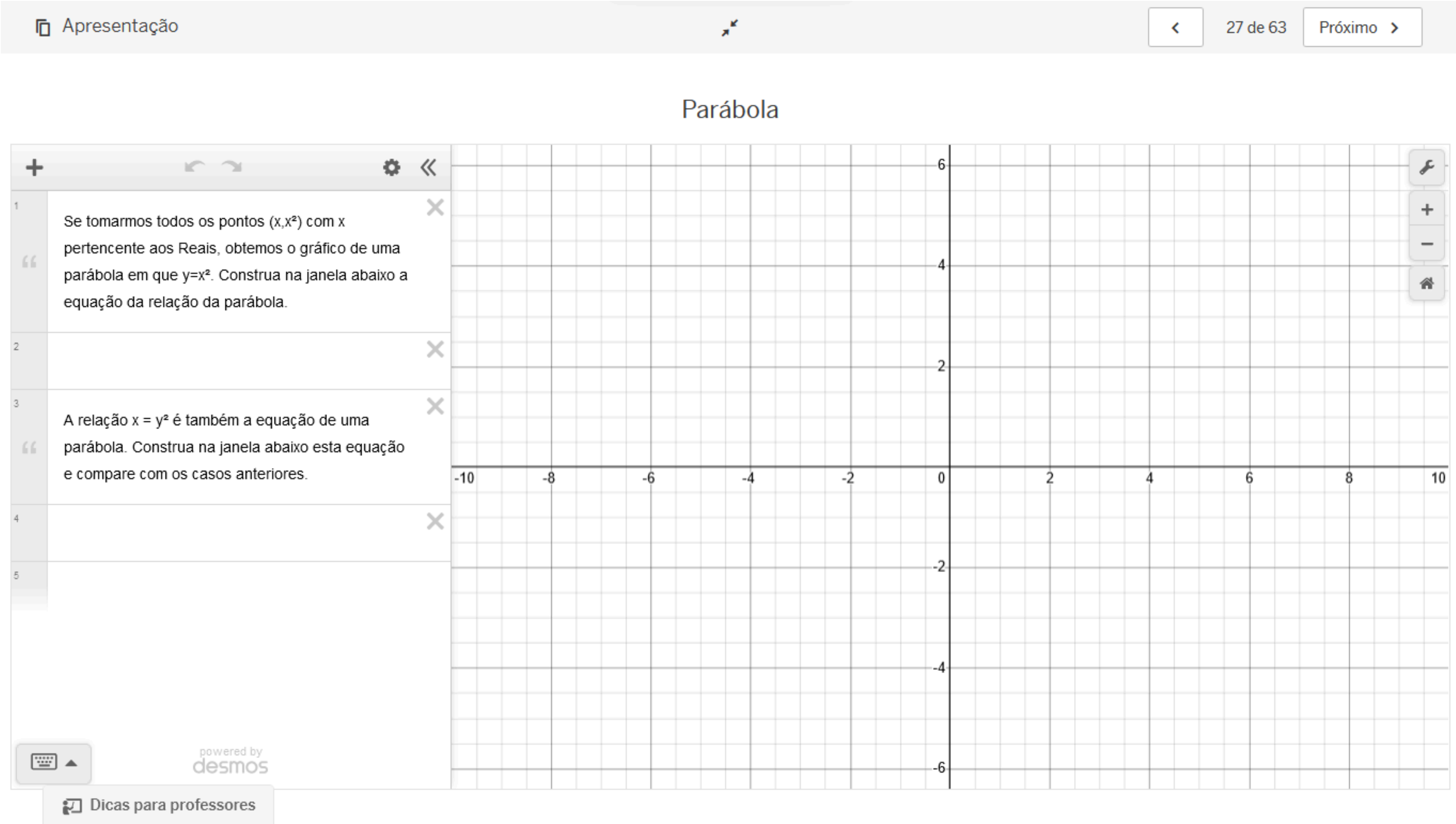
26 de 63 Próximo

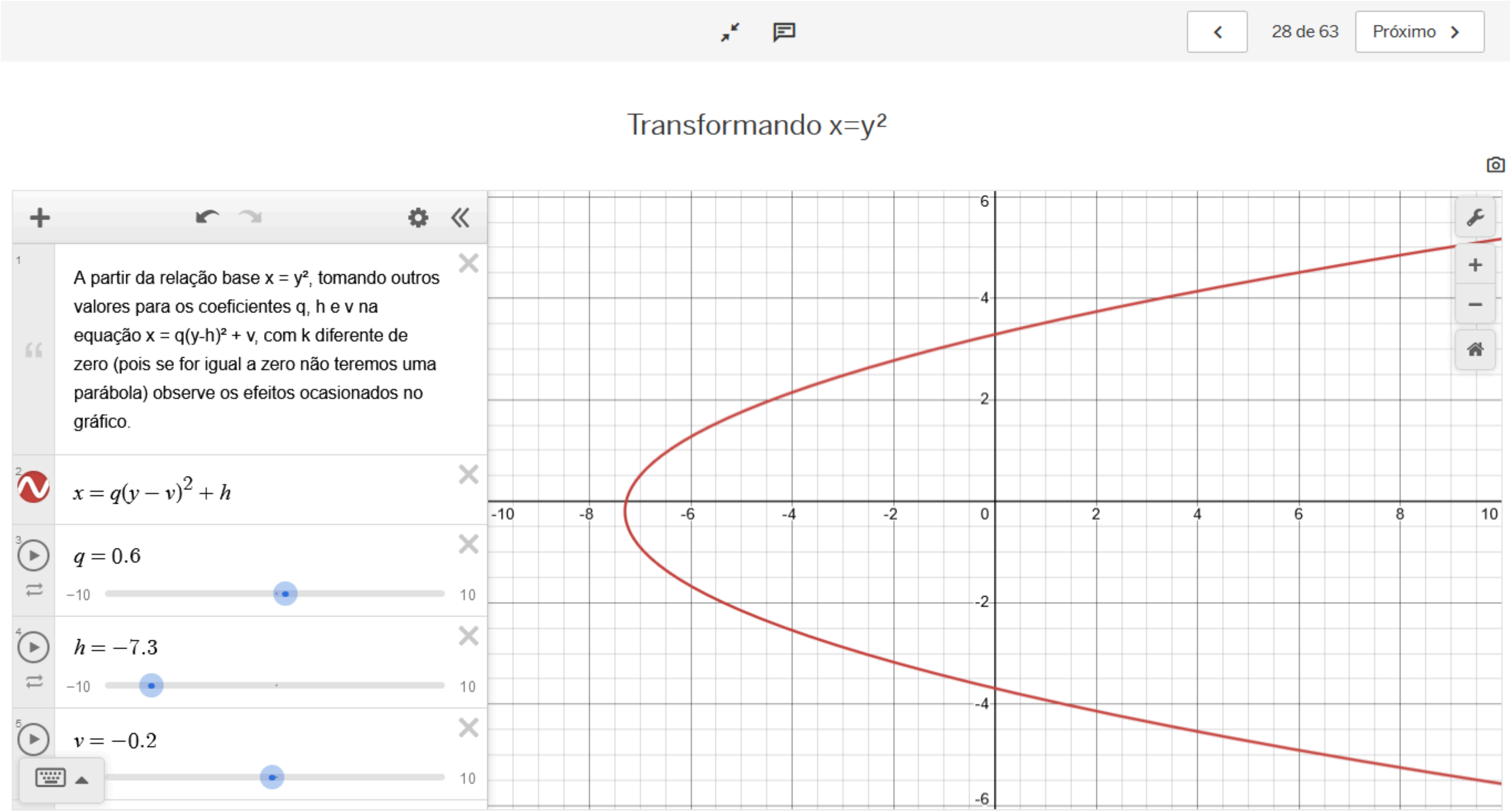


22 - Determine os valores dos coeficientes q, v e h a partir do gráfico ao lado. Descreva com suas palavras qual estratégia utilizou para encontrar os valores.

Compartilhar com a turma

Dicas para professores


Apresentação
27 de 63
Próximo
Parábola
Se tomarmos todos os pontos (x,x²) com x pertencente aos Reais, obtemos o gráfico de uma parábola em que y=x². Construa na janela abaixo a equação da relação da parábola.
A relação x = y² é também a equação de uma parábola. Construa na janela abaixo esta equação e compare com os casos anteriores.
powered by desmos
Dicas para professores


28 de 63
Próximo
Transformando x=y²
A partir da relação base x = y², tomando outros valores para os coeficientes q, h e v na equação x = q(y-h)² + v, com k diferente de zero (pois se for igual a zero não teremos uma parábola) observe os efeitos ocasionados no gráfico.
$x = q(y - v)^2 + h$
$q = 0.6$
$h = -7.3$
$v = -0.2$
−10
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
6
4
2
-2
-4
-6

Apresentação

29 de 63 Próximo

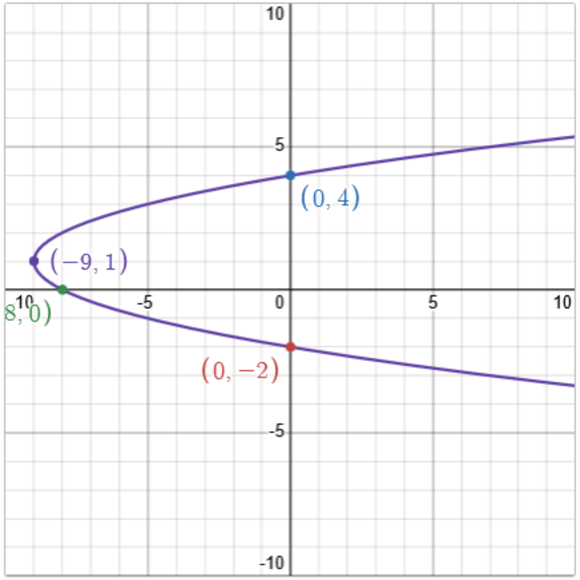
Refletindo sobre as transformações de $x=y^2$

Observando a equação $y = q(x-v)^2 + h$:

23 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de q?
24 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de h?
25 - Quais as transformações obtidas ao alterar o valor de v?

Volte no slide anterior caso necessário.

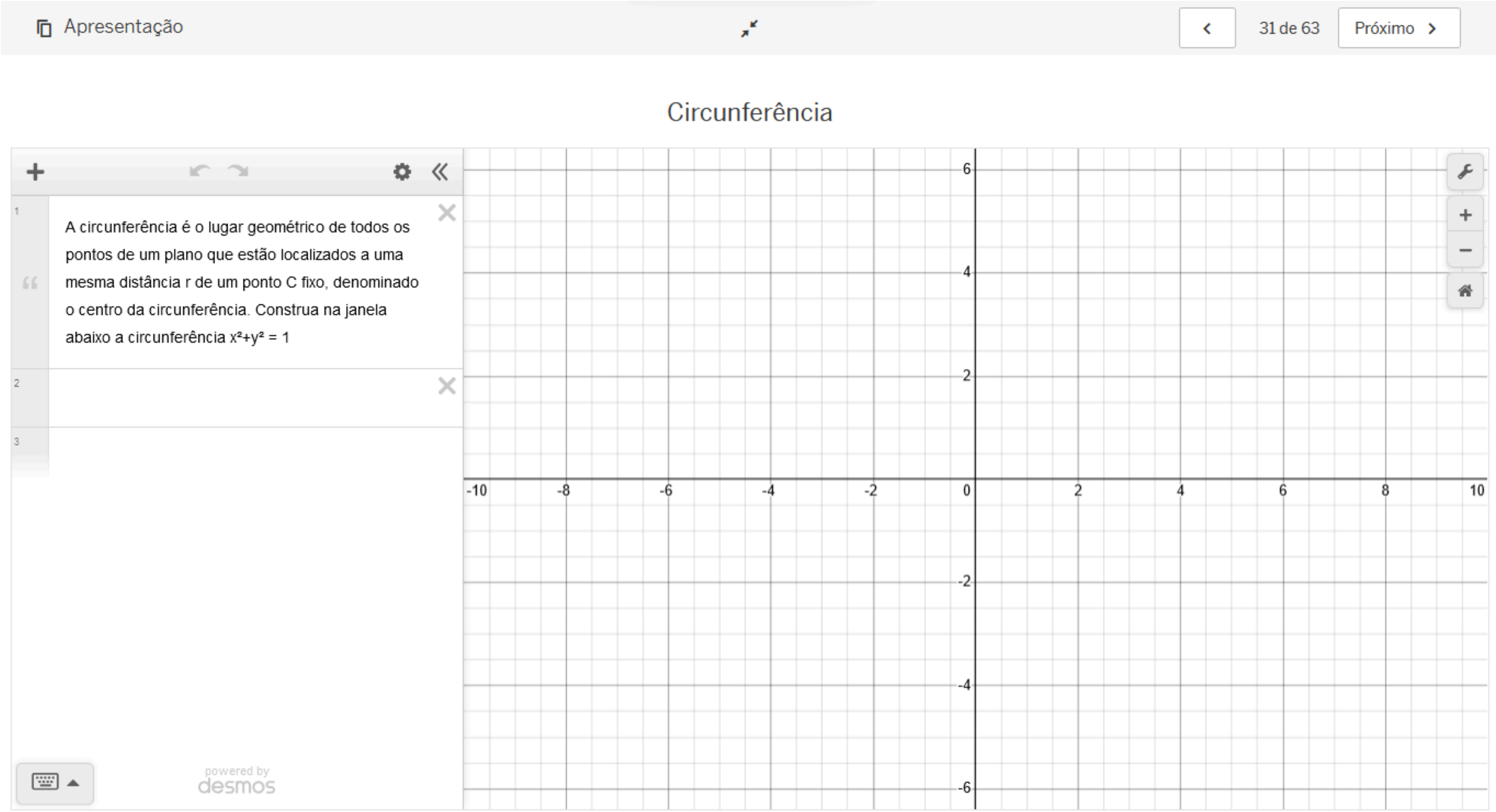
Enviar

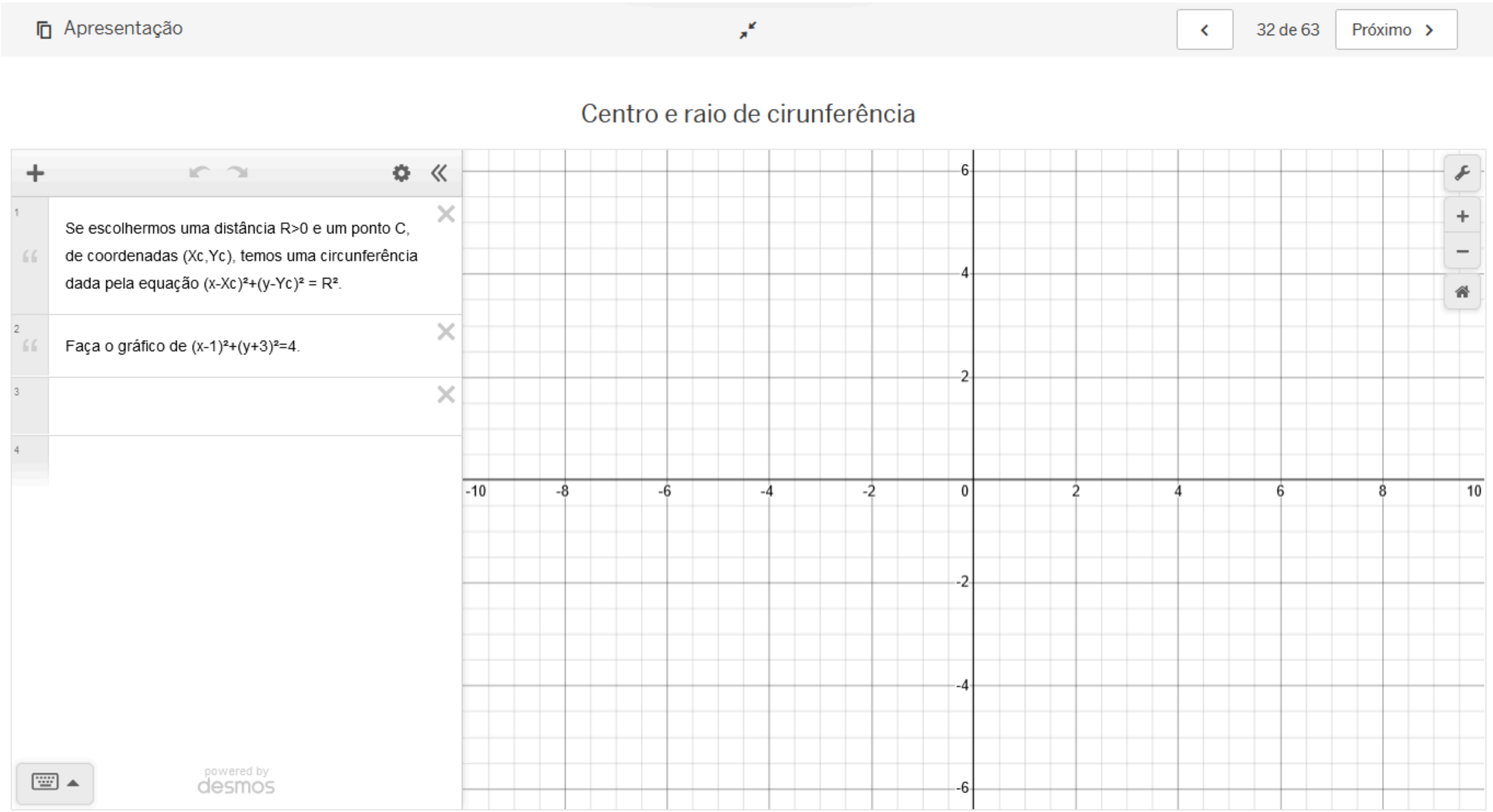


26 - Determine os valores dos coeficientes q, h e v a partir do gráfico ao lado.

Compartilhar com a turma

Dicas para professores


Apresentação
31 de 63
Próximo
Circunferência
A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto C fixo, denominado o centro da circunferência. Construa na janela abaixo a circunferência x²+y² = 1
powered by desmos
6
4
2
0
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10


Apresentação
32 de 63
Próximo
Centro e raio de cirunferência
Se escolhermos uma distância R>0 e um ponto C, de coordenadas (Xc,Yc), temos uma circunferência dada pela equação (x-Xc)²+(y-Yc)² = R².
Faça o gráfico de (x-1)²+(y+3)²=4.
powered by desmos

Apresentação

33 de 63 Próximo

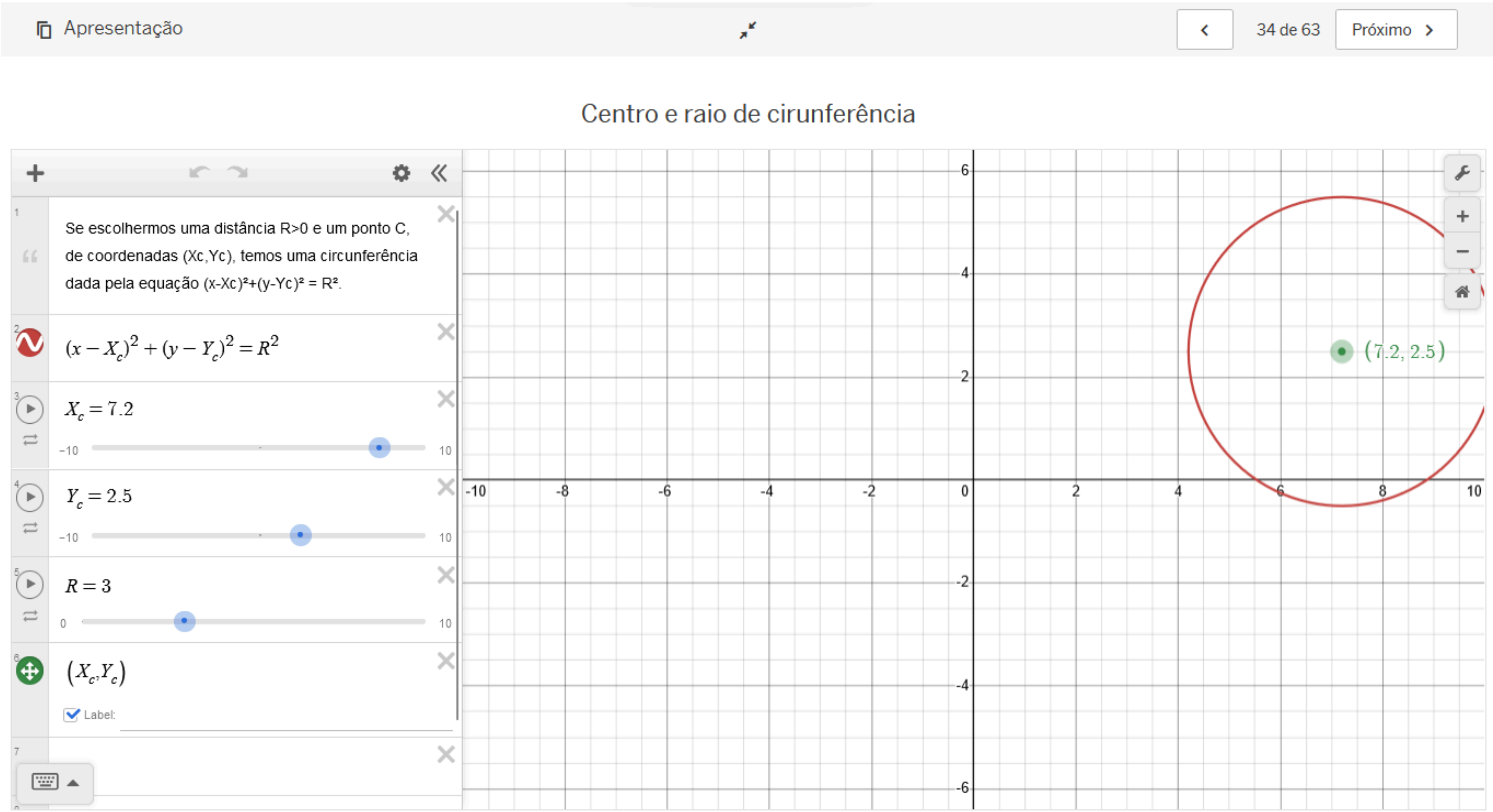
Refletindo sobre as translações da circunferência

Observando a equação $(x-1)^2+(y+3)^2=4$, responda;

27 - Quais as coordenadas do centro da circunferência?
28 - Qual o raio da circunferência?

Volte no slide anterior caso necessário.

Enviar


Apresentação
34 de 63
Próximo
Centro e raio de cirunferência
Se escolhermos uma distância R>0 e um ponto C, de coordenadas (Xc,Yc), temos uma circunferência dada pela equação (x-Xc)²+(y-Yc)² = R².
$(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2 = R^2$
$X_c = 7.2$
$Y_c = 2.5$
$R = 3$
(X_c, Y_c)
Label:
(7.2, 2.5)

Apresentação

35 de 63 Próximo

Refletindo sobre as translações da circunferência

Responda:

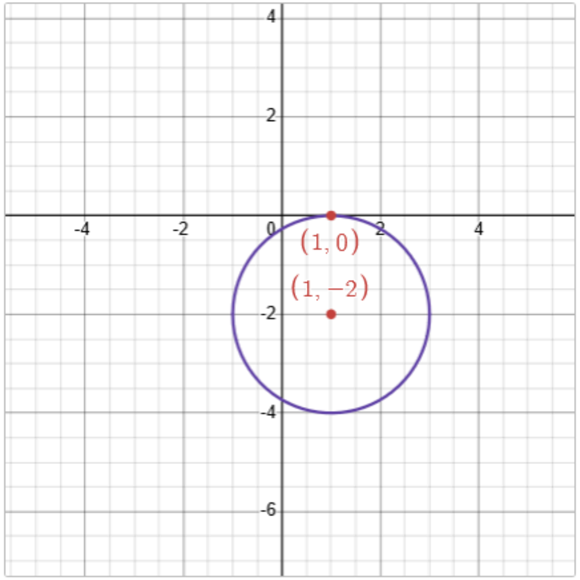
29 - O que o ponto (Xc,Yc) representa?
30 - Ao variar o valor de R qual a alteração se observa no gráfico?
31 - Ao variar o valor de Xc qual a alteração se observa no gráfico?
32 - Ao variar o valor de Yc qual a alteração se observa no gráfico?

Volte no slide anterior caso necessário.

Enviar

Apresentação

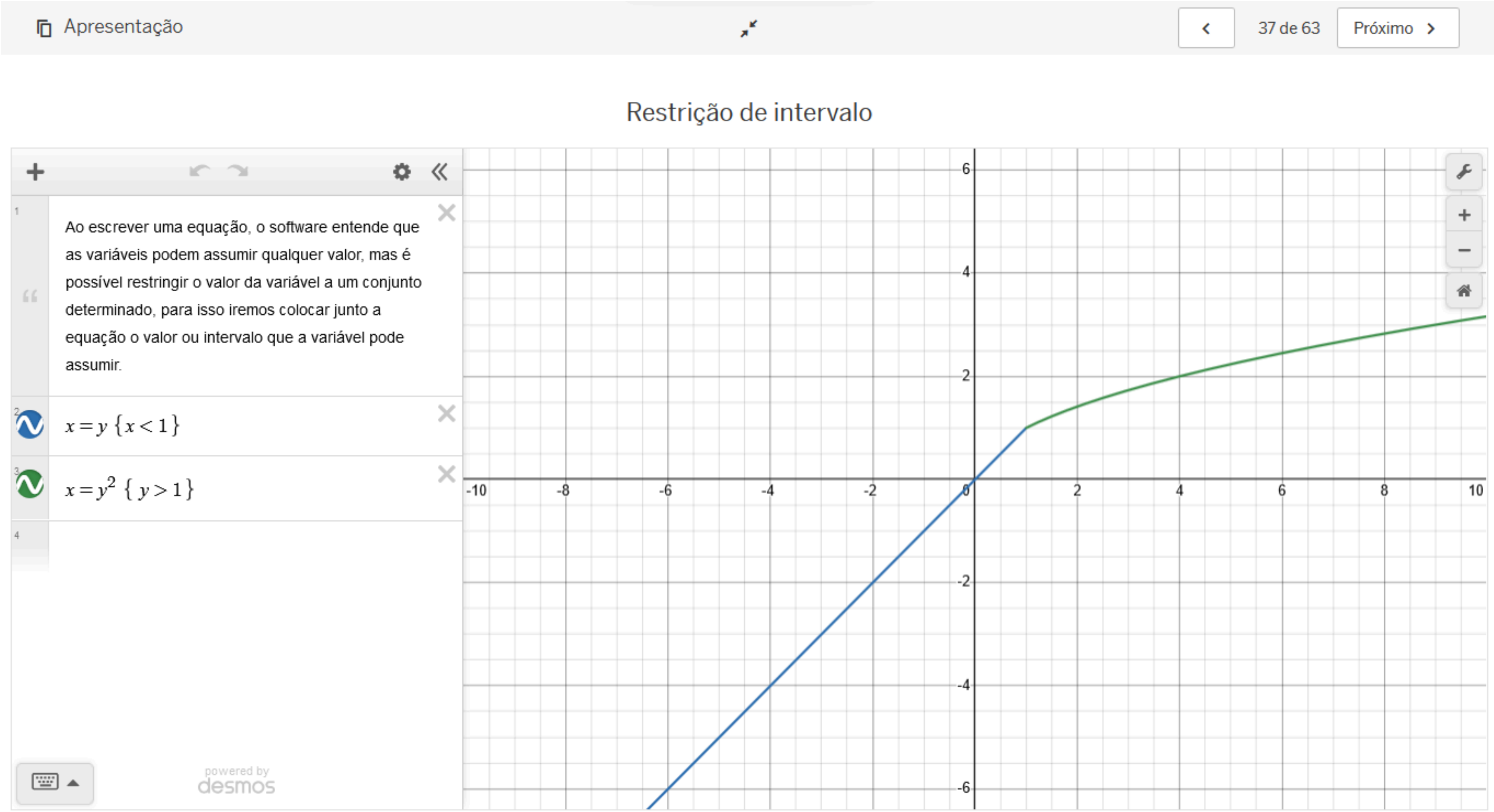
36 de 63 Próximo

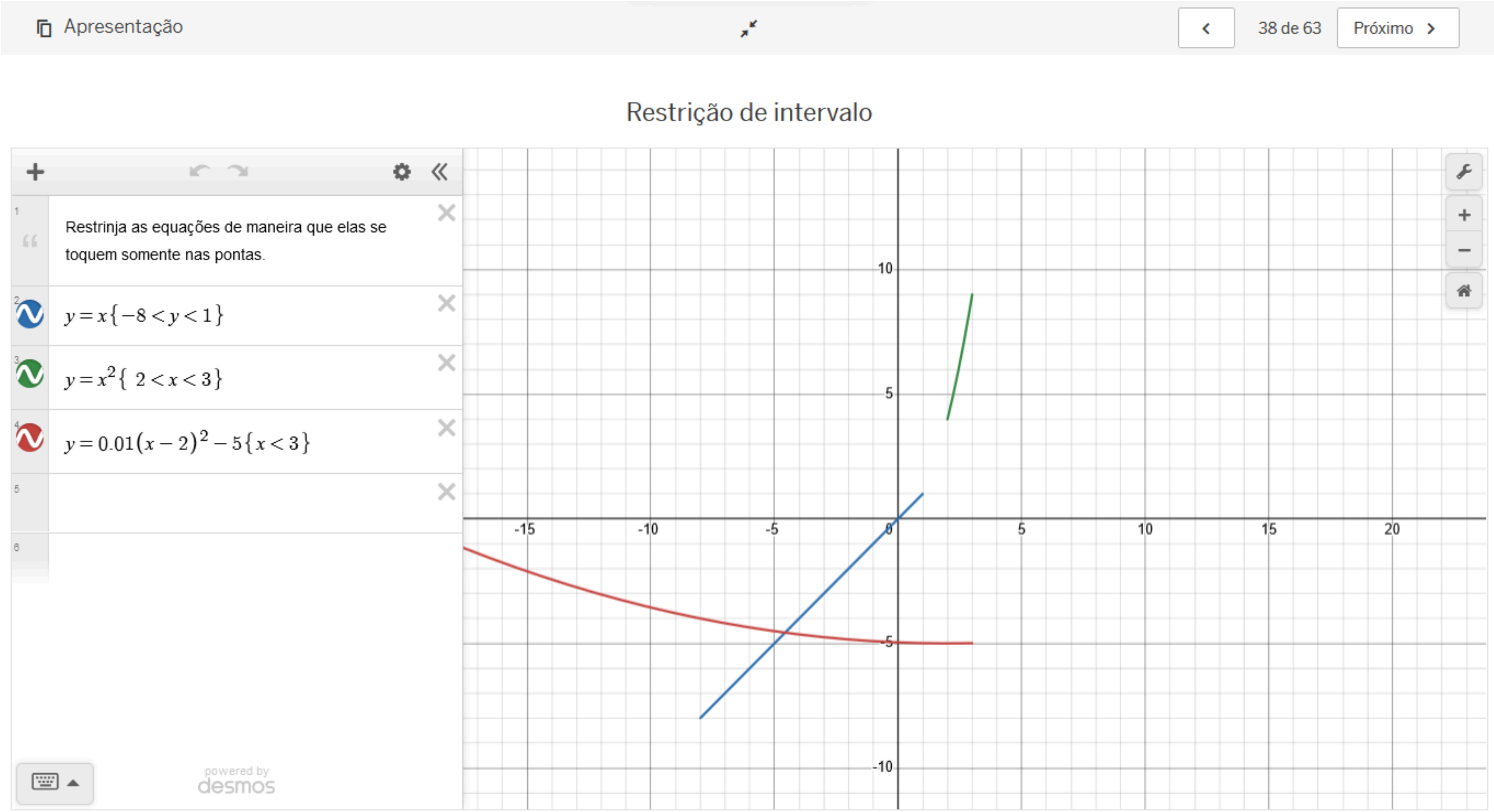


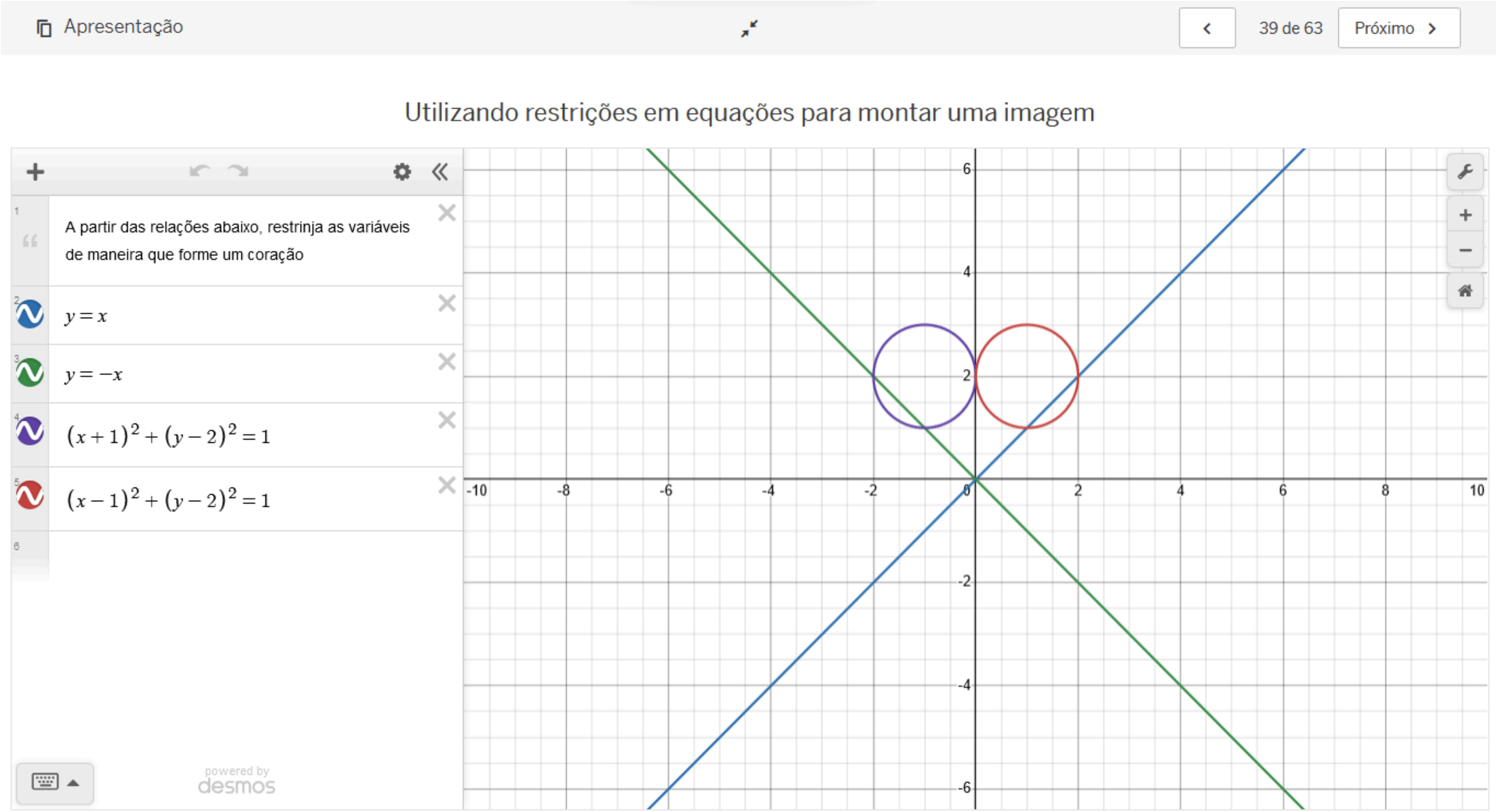
33 - Determine os valores dos coeficientes Xc, Yc e R a partir do gráfico ao lado.

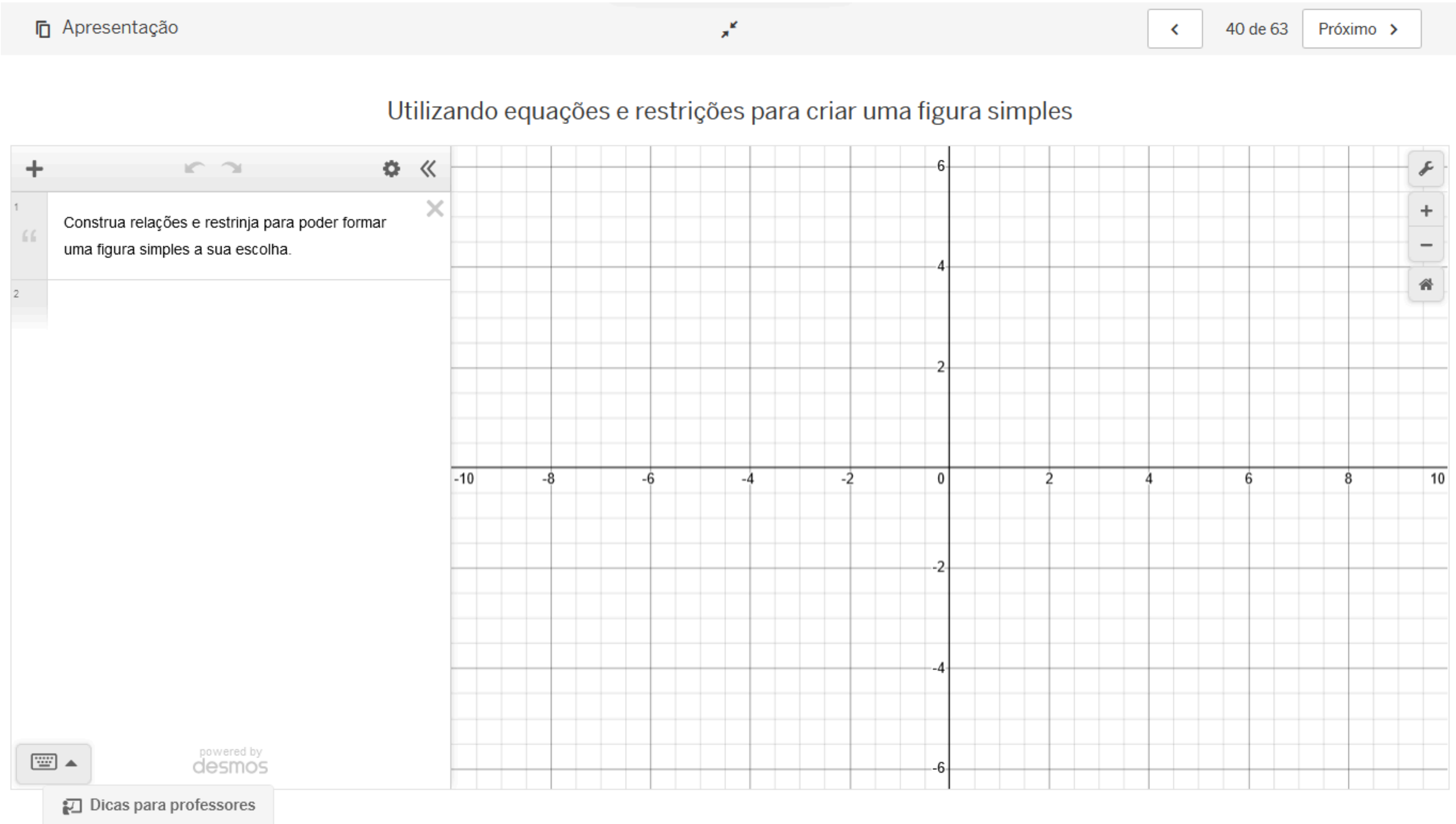
Compartilhar com a turma

Dicas para professores


Apresentação
37 de 63
Próximo
Restrição de intervalo
Ao escrever uma equação, o software entende que as variáveis podem assumir qualquer valor, mas é possível restringir o valor da variável a um conjunto determinado, para isso iremos colocar junto a equação o valor ou intervalo que a variável pode assumir.
$x = y \{x < 1\}$
$x = y^2 \{y > 1\}$
powered by desmos
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
6 4 2 -2 -4 -6

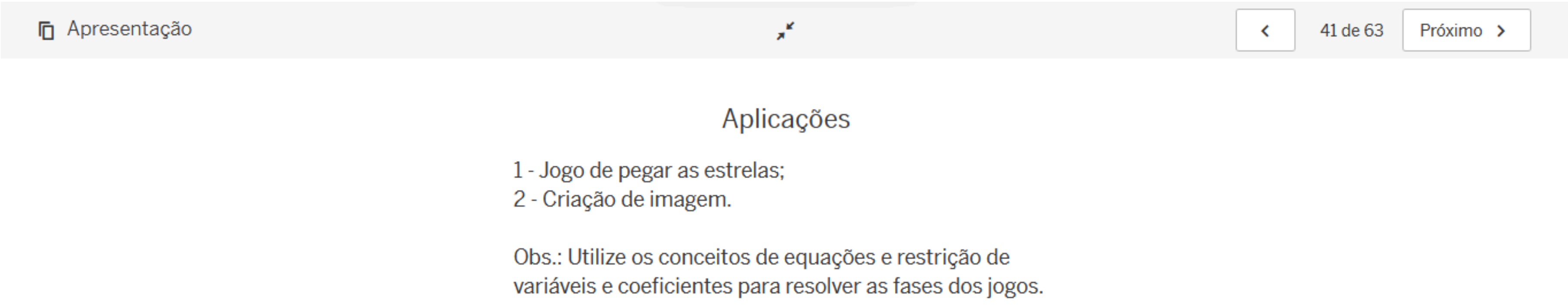

Apresentação
38 de 63
Próximo
Restrição de intervalo
Restrinja as equações de maneira que elas se toquem somente nas pontas.
$y = x\{-8 < y < 1\}$
$y = x^2\{\ 2 < x < 3\}$
$y = 0.01(x-2)^2 - 5\{x < 3\}$
powered by desmos
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
10
5
-5
-10


Apresentação
39 de 63
Próximo
Utilizando restrições em equações para montar uma imagem
A partir das relações abaixo, restrinja as variáveis de maneira que forme um coração
$y = x$
$y = -x$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
powered by desmos


Apresentação
40 de 63
Próximo
Utilizando equações e restrições para criar uma figura simples
Construa relações e restrinja para poder formar uma figura simples a sua escolha.
powered by desmos
Dicas para professores

Apêndice III - Sequência de atividades: Jogo de pegar estrelas (slide 41 até 60)

As atividades apresentadas nos apêndices II, III e IV foram aqui apresentadas como foram aplicadas. As atividades atualizadas estão dispostas no link: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/648a605a8061e951ea2ade7c?lang=pt-BR



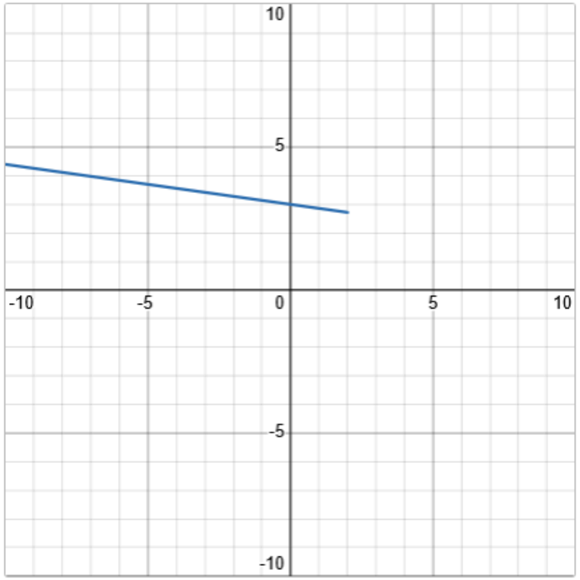
Apresentação

42 de 63 Próximo

Praticando...

Os próximos slides irão mostrar as funcionalidades dos coeficientes de algumas equações

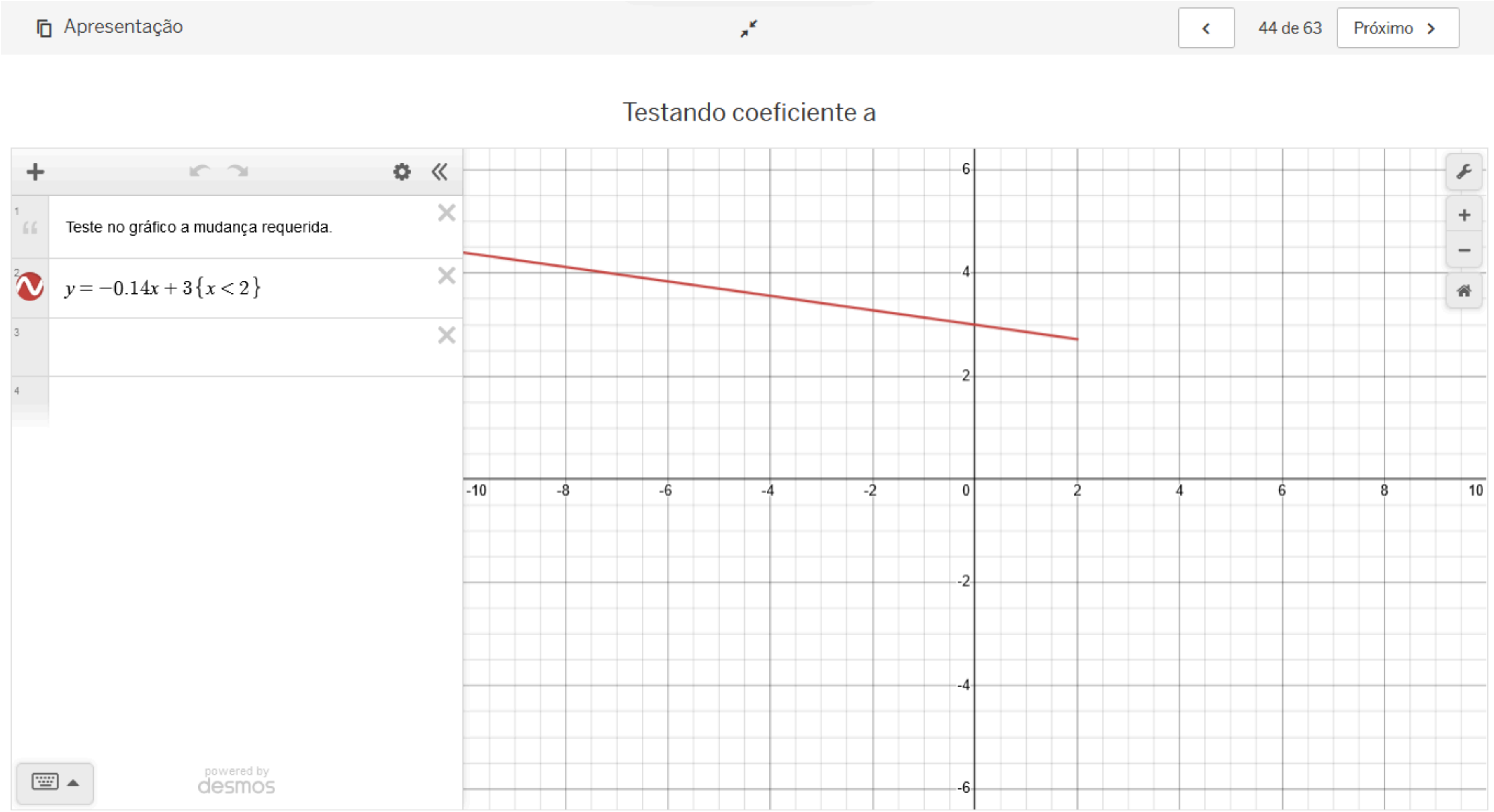
Preparando coeficiente a



31 - Se mudássemos o -0.14 para 2 na equação
y = -0.14x+3{x<2}, o que aconteceria com o gráfico?

Enviar

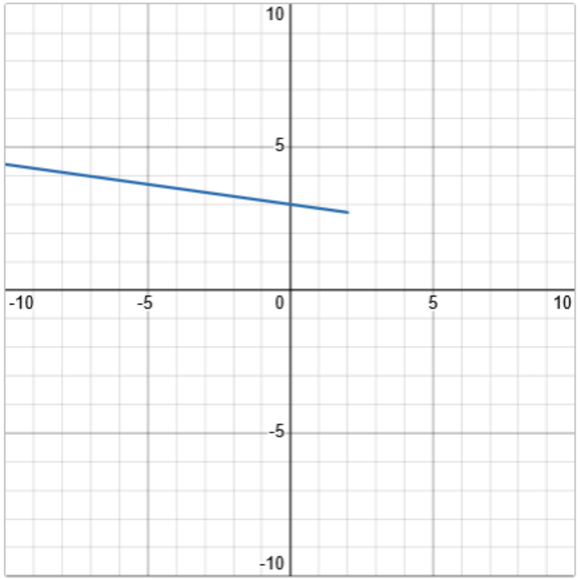
Dicas para professores Exemplos de resposta


Apresentação
44 de 63
Próximo
Testando coeficiente a
Teste no gráfico a mudança requerida.
y = −0.14x + 3{x < 2}
powered by desmos

Apresentação

45 de 63 Próximo

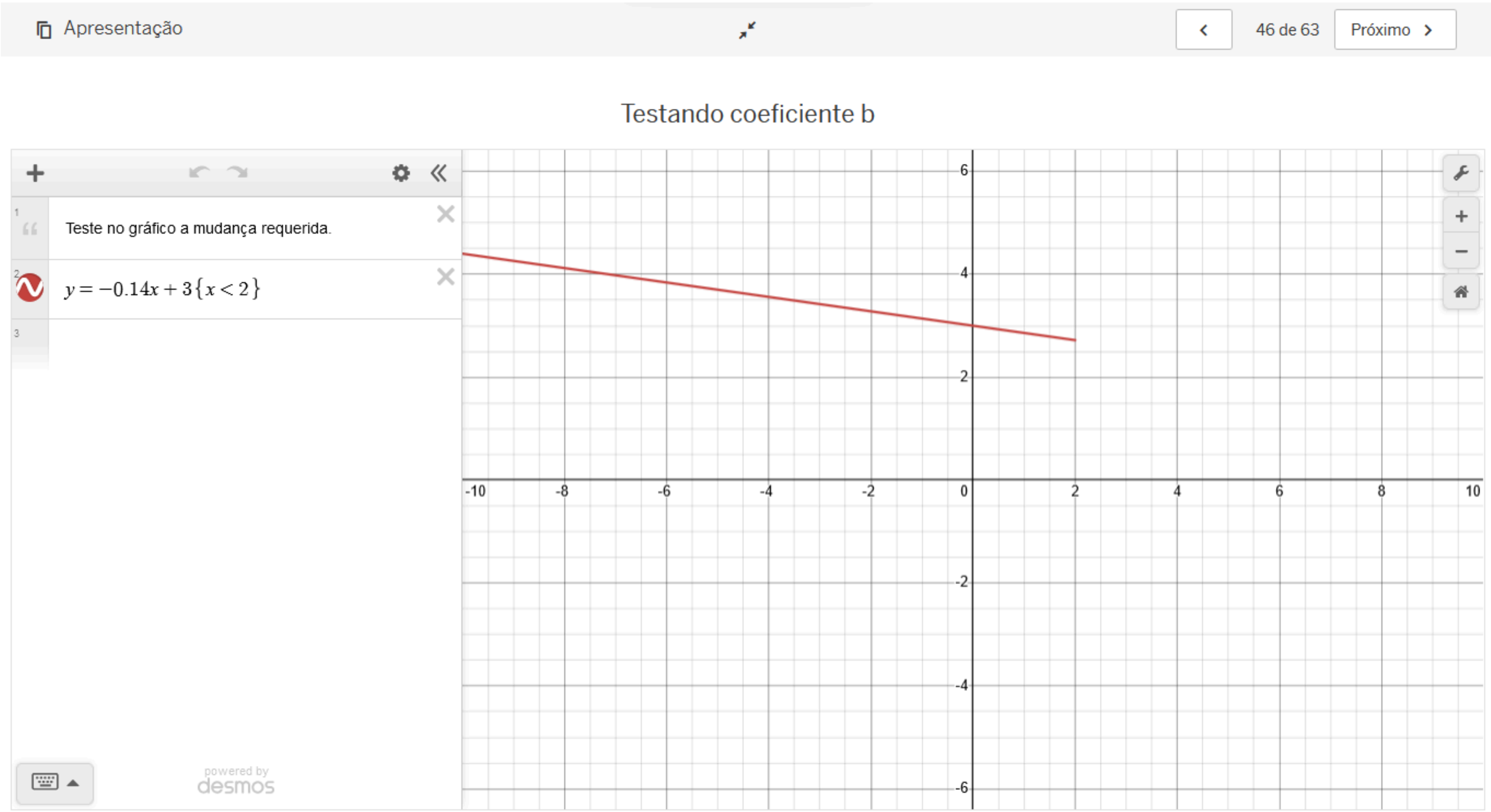
Preparando coeficiente b



32 - Se mudássemos o 3 para 0 na equação y=-0.14x+3{x<2}, o que aconteceria com o gráfico?

Enviar

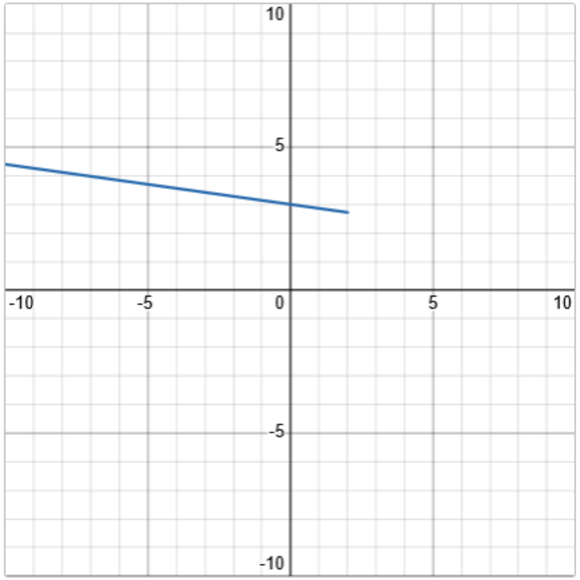
Dicas para professores Exemplos de resposta


Apresentação
46 de 63
Próximo
Testando coeficiente b
Teste no gráfico a mudança requerida.
$y = -0.14x + 3\{x < 2\}$
powered by desmos
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
6 4 2 -2 -4 -6

Apresentação

47 de 63 Próximo

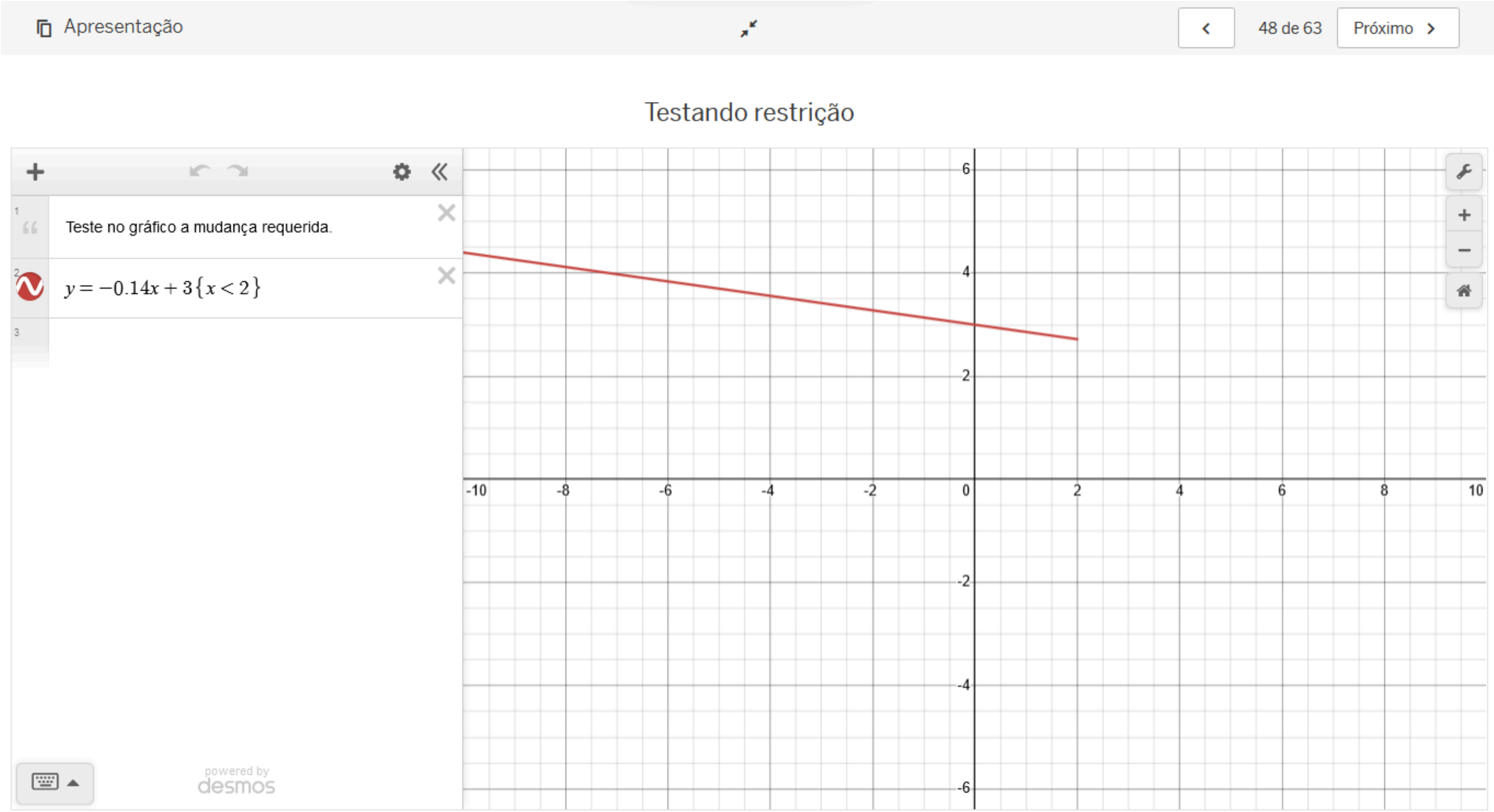
Preparando restrição

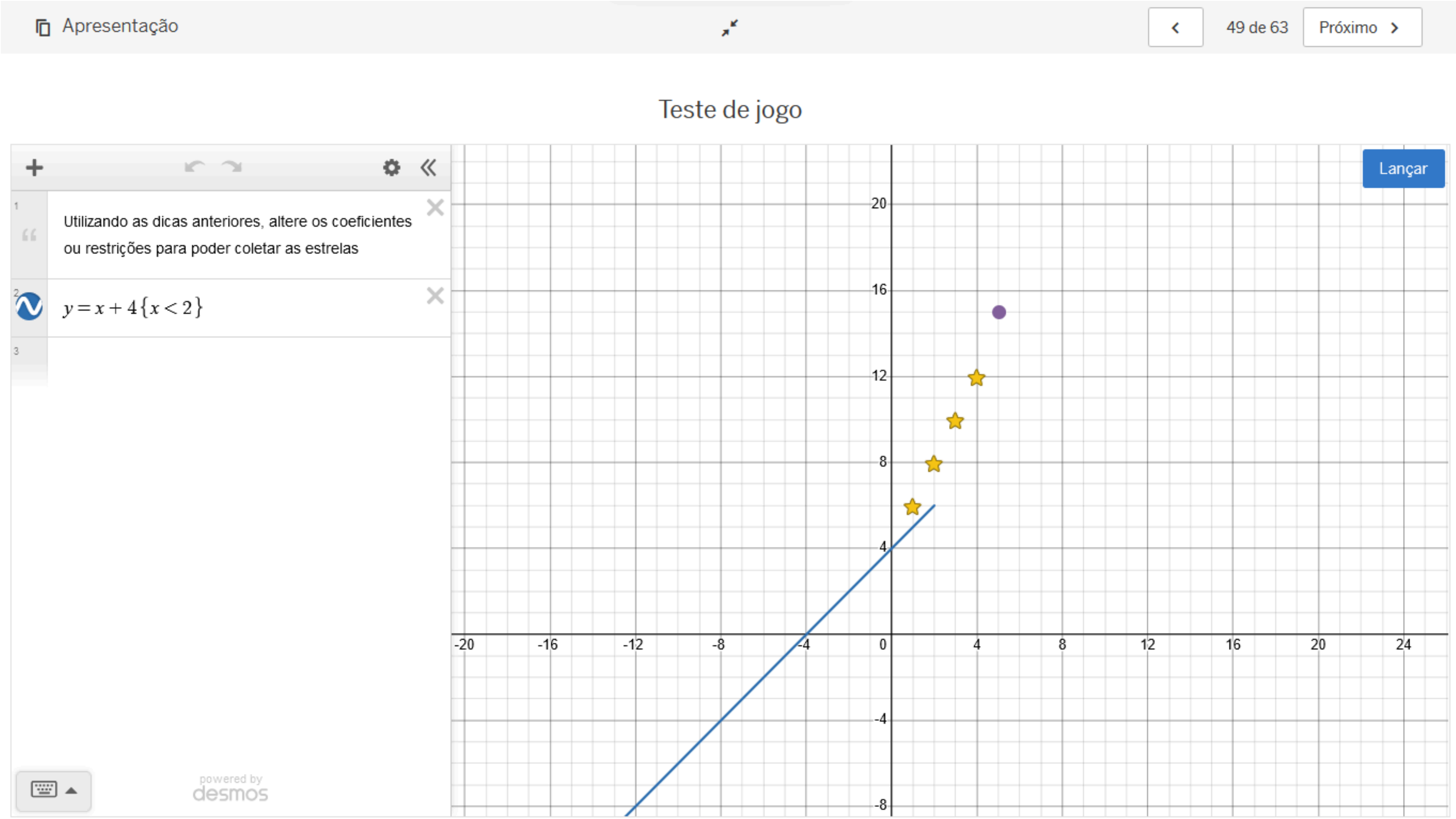


33 - Se mudássemos o 2 para 5 na restrição de domínio {x < 2}, o que aconteceria com o gráfico?

Compartilhar com a turma

Dicas para professores Exemplos de resposta

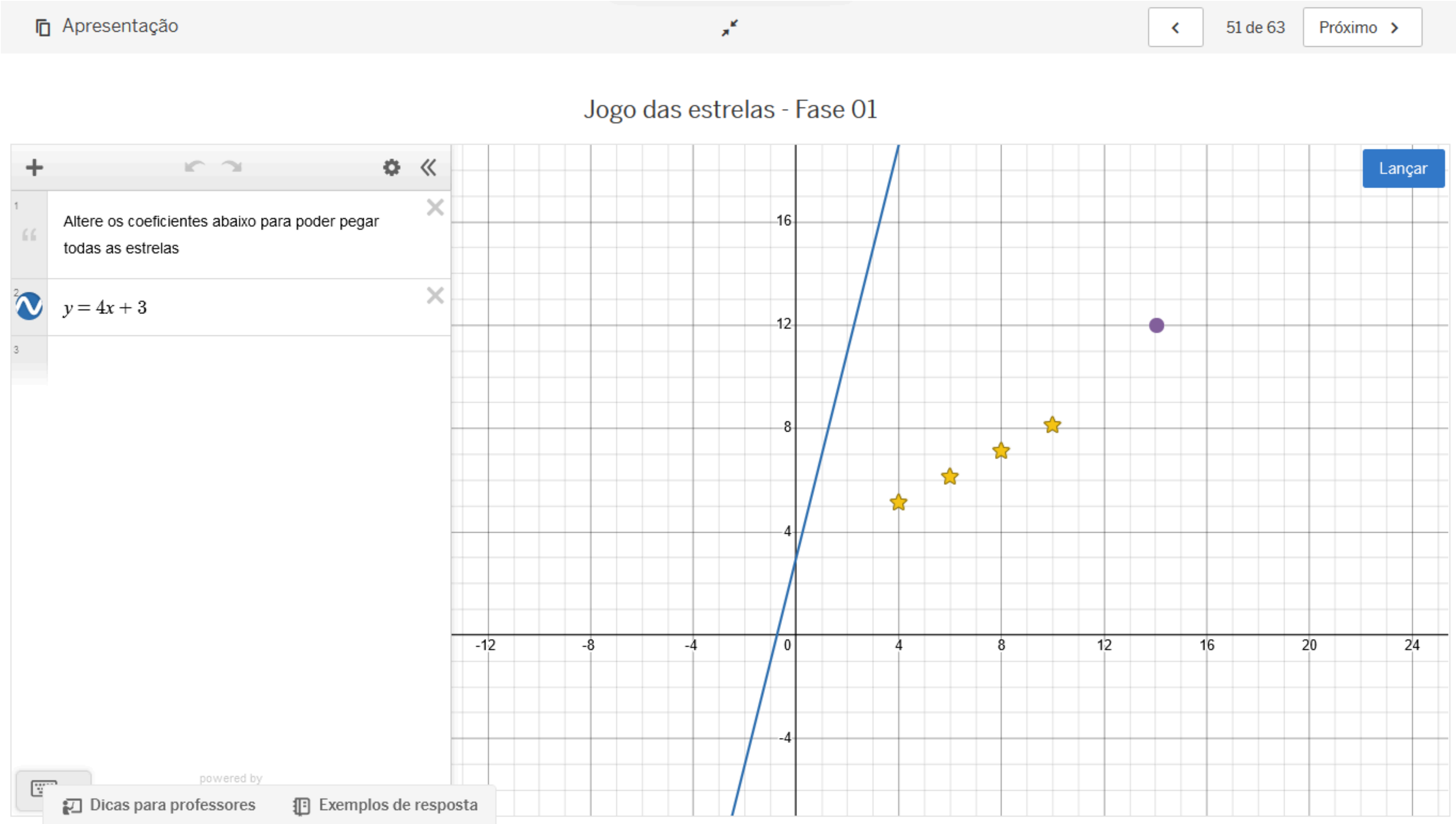

Apresentação
48 de 63
Próximo
Testando restrição
Teste no gráfico a mudança requerida.
$y = -0.14x + 3\{x < 2\}$
powered by desmos
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
6 4 2 -2 -4 -6


Apresentação
49 de 63
Próximo
Teste de jogo
Lançar
Utilizando as dicas anteriores, altere os coeficientes ou restrições para poder coletar as estrelas
$y = x + 4\{x < 2\}$
powered by desmos
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-20
-16
-12
-8
-4
4
8
12
16
20
24

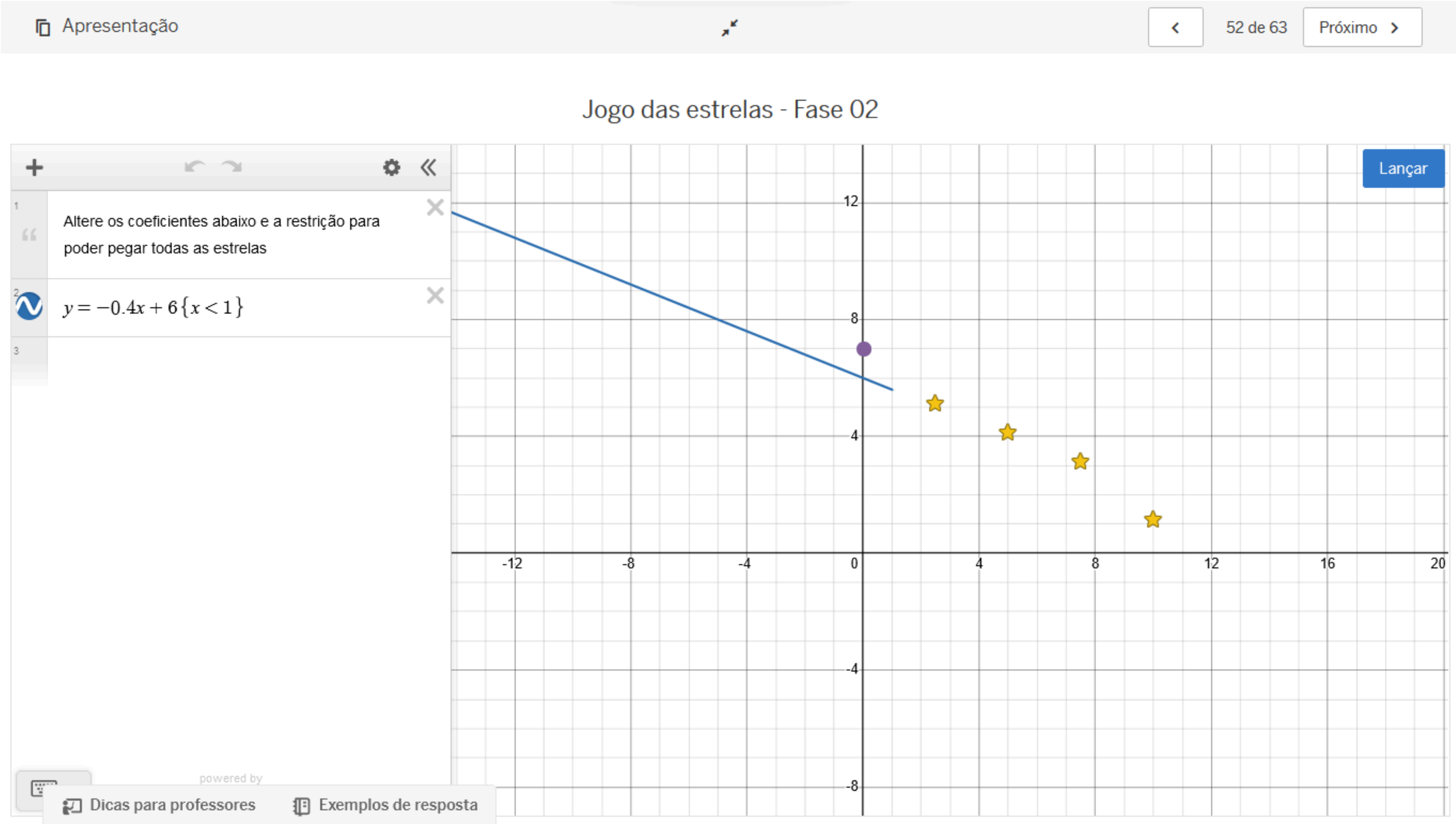
Continue! Jogo das estrelas

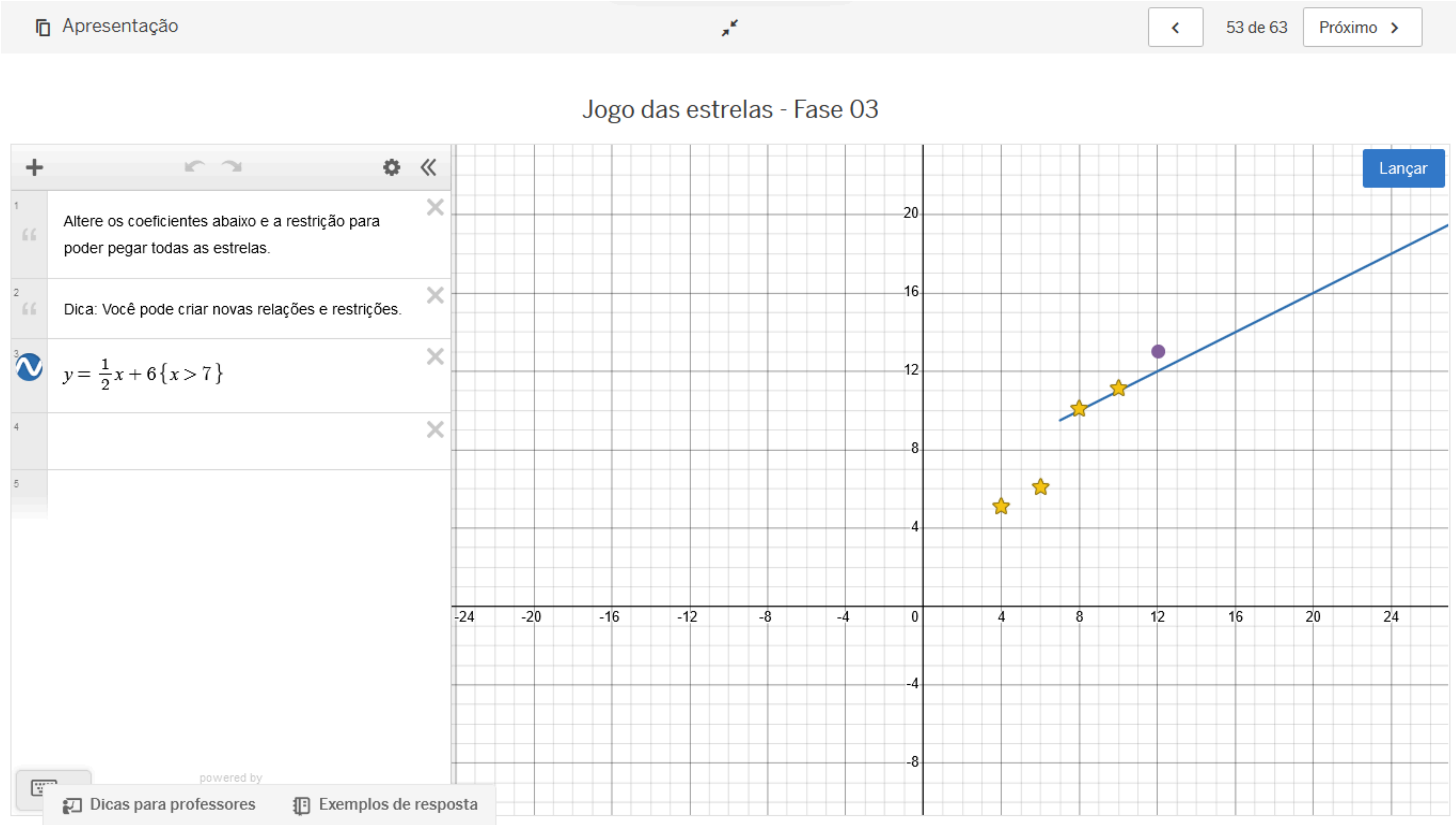
A partir de agora você irá alterar os coeficientes e restrições das equações vistas até então, de maneira que consiga pegar todas as estrelas.

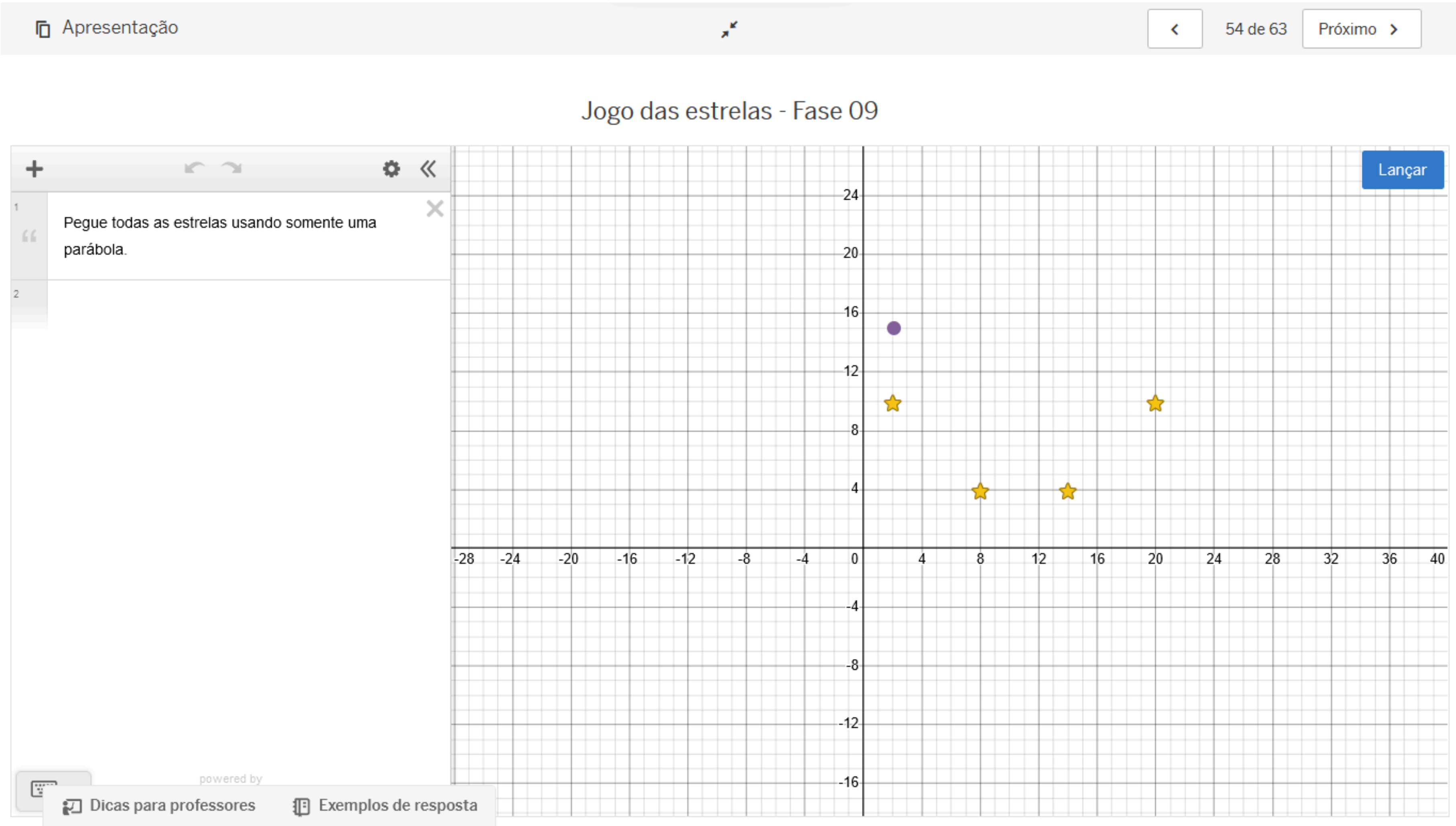
Bom jogo e divirta-se utilizando Matemática!

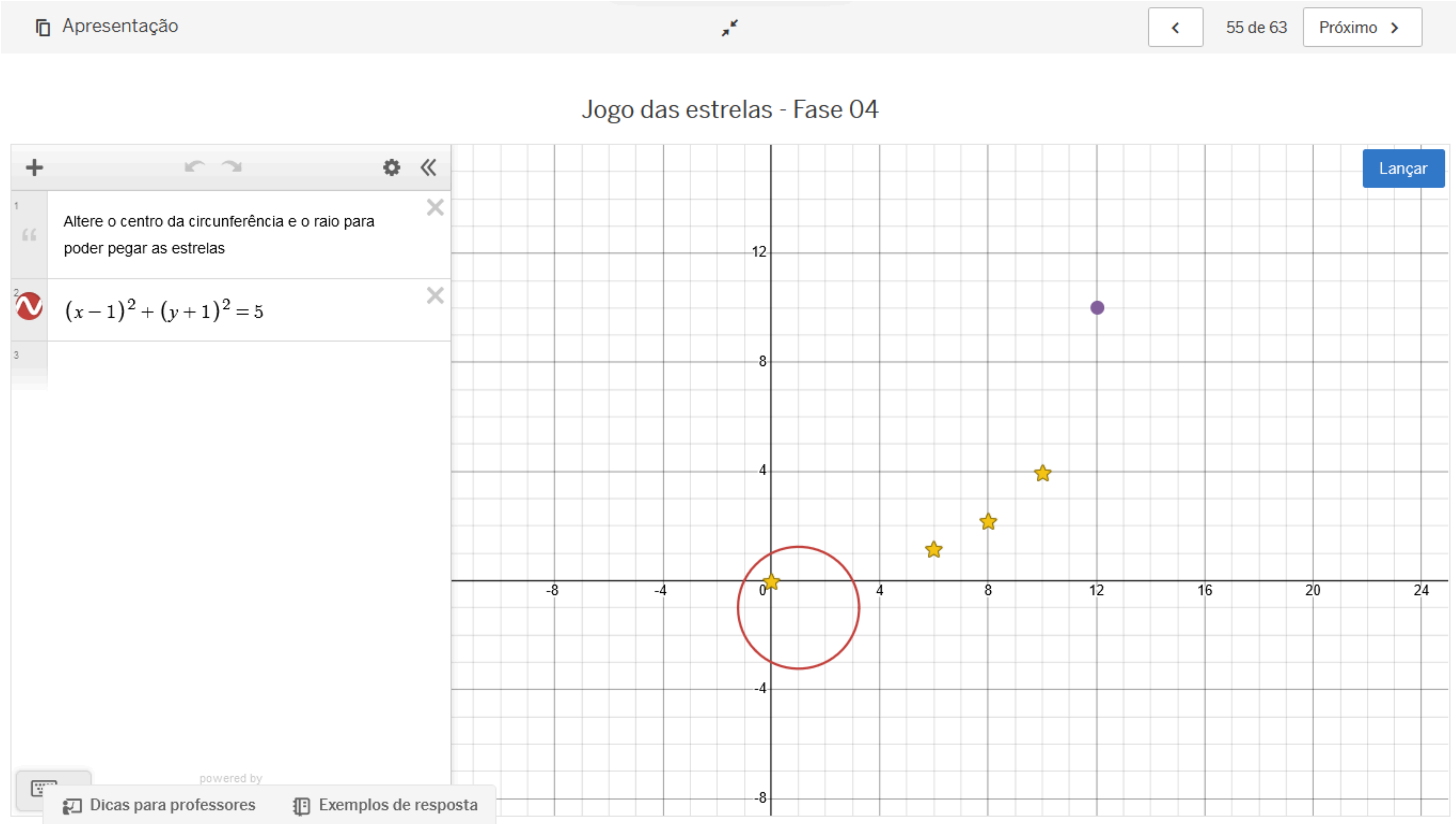


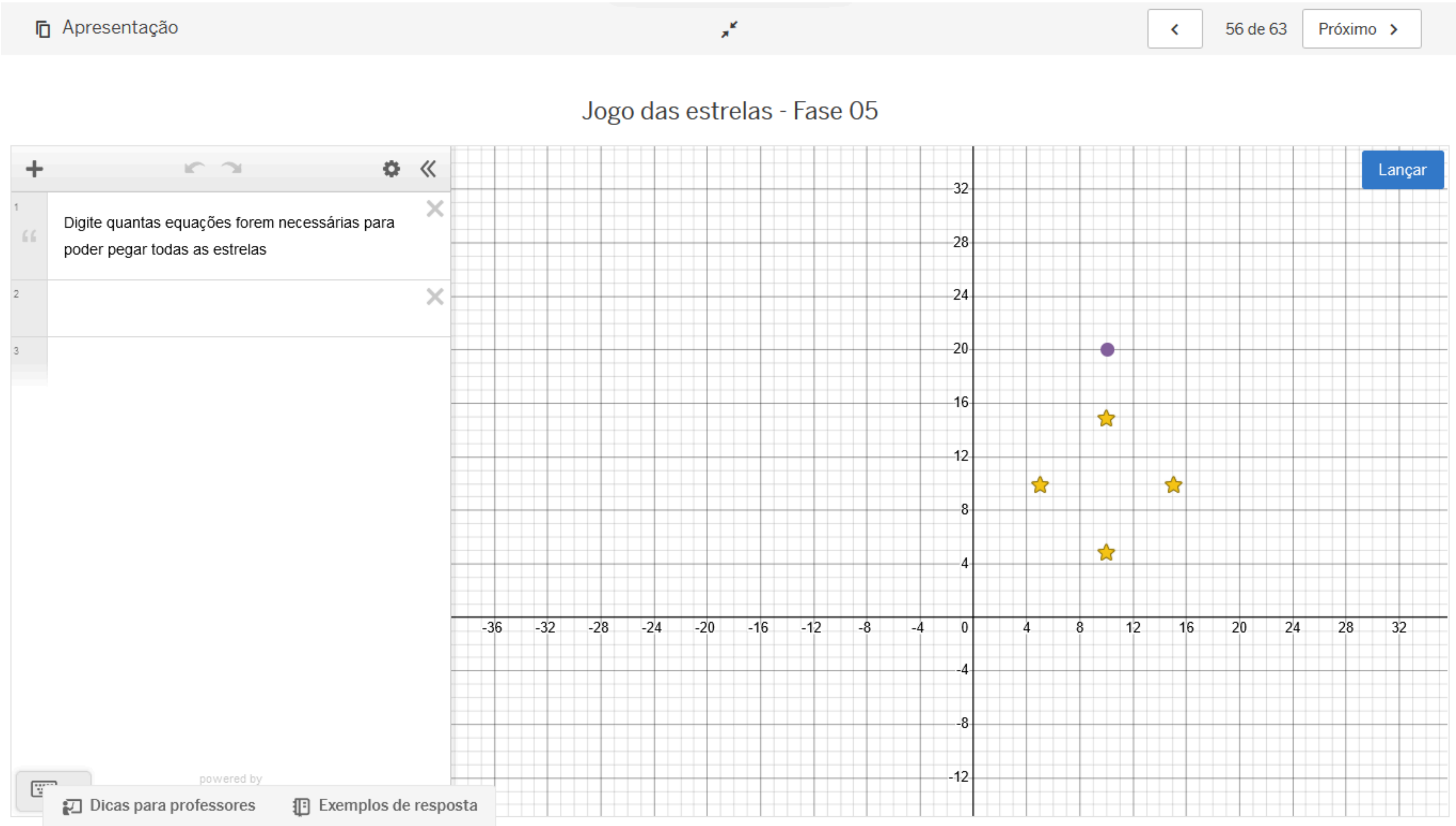
Apresentação
51 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 01
Lançar
Altere os coeficientes abaixo para poder pegar todas as estrelas
$y = 4x + 3$
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta

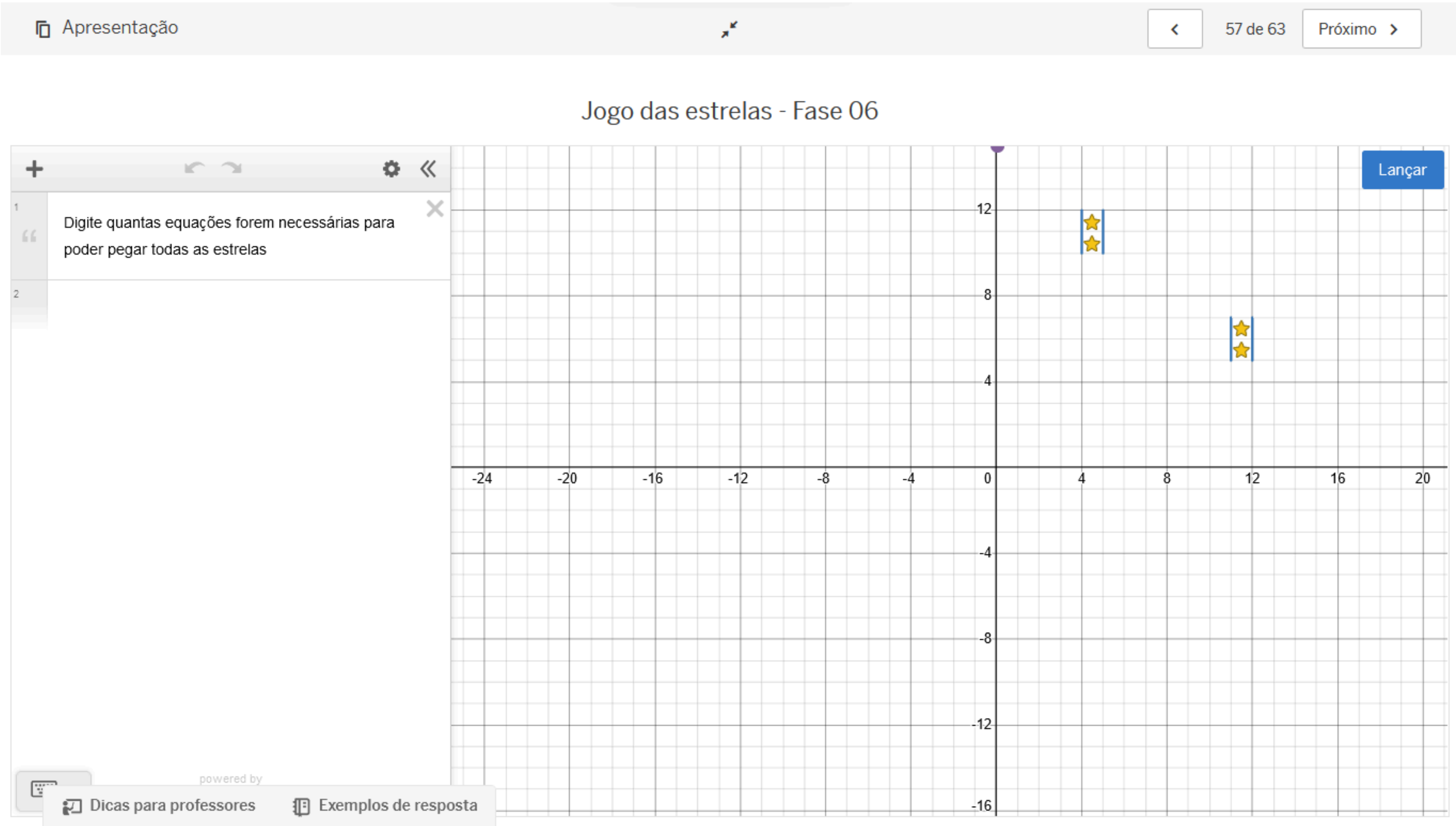

Apresentação
52 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 02
Lançar
Altere os coeficientes abaixo e a restrição para poder pegar todas as estrelas
$y = -0.4x + 6\{x < 1\}$
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta
12
8
4
0
-4
-8
-12
-8
-4
4
8
12
16
20

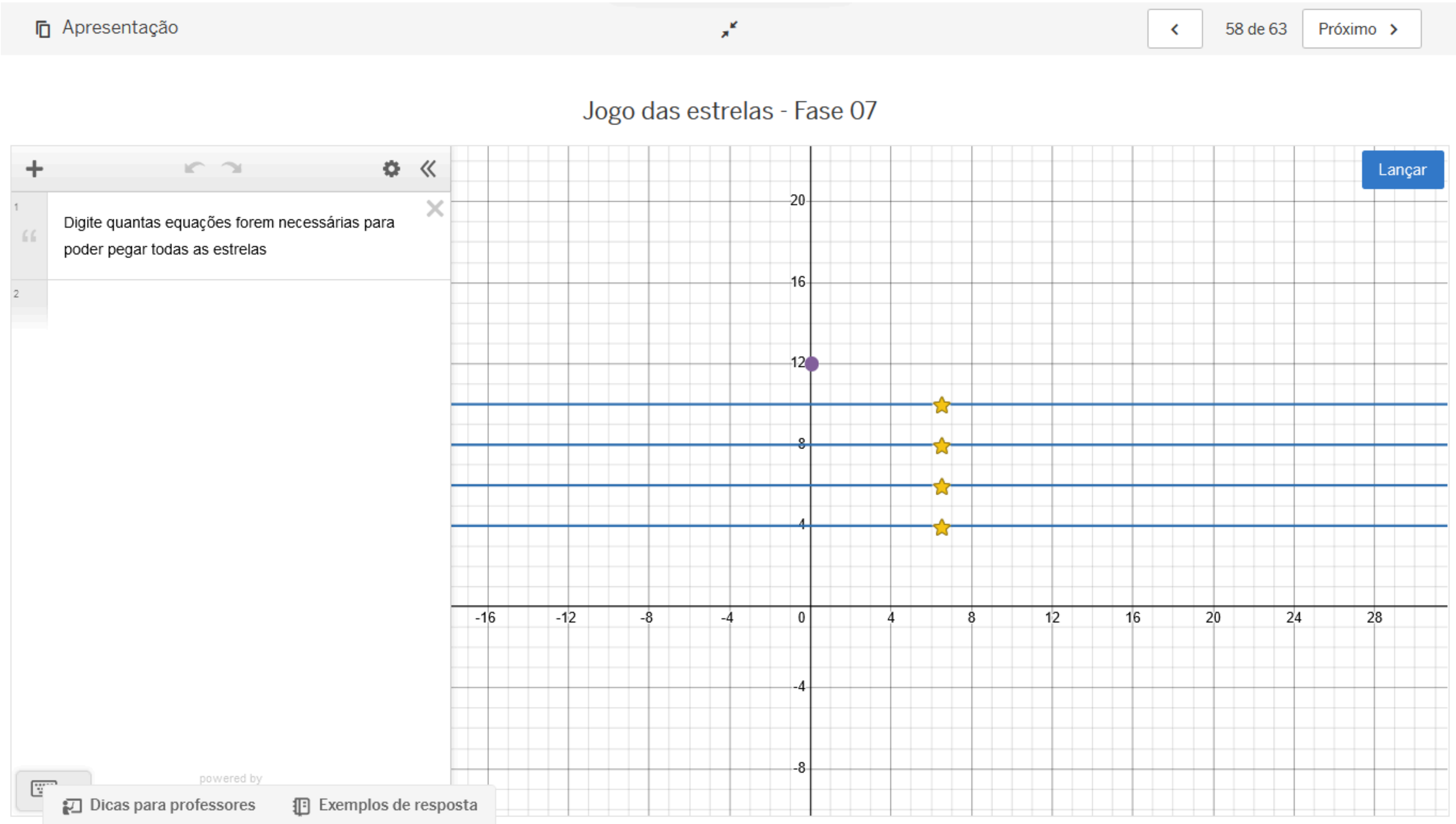

Apresentação
53 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 03
Lançar
Altere os coeficientes abaixo e a restrição para poder pegar todas as estrelas.
Dica: Você pode criar novas relações e restrições.
$y = \frac{1}{2}x + 6\{x > 7\}$
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta

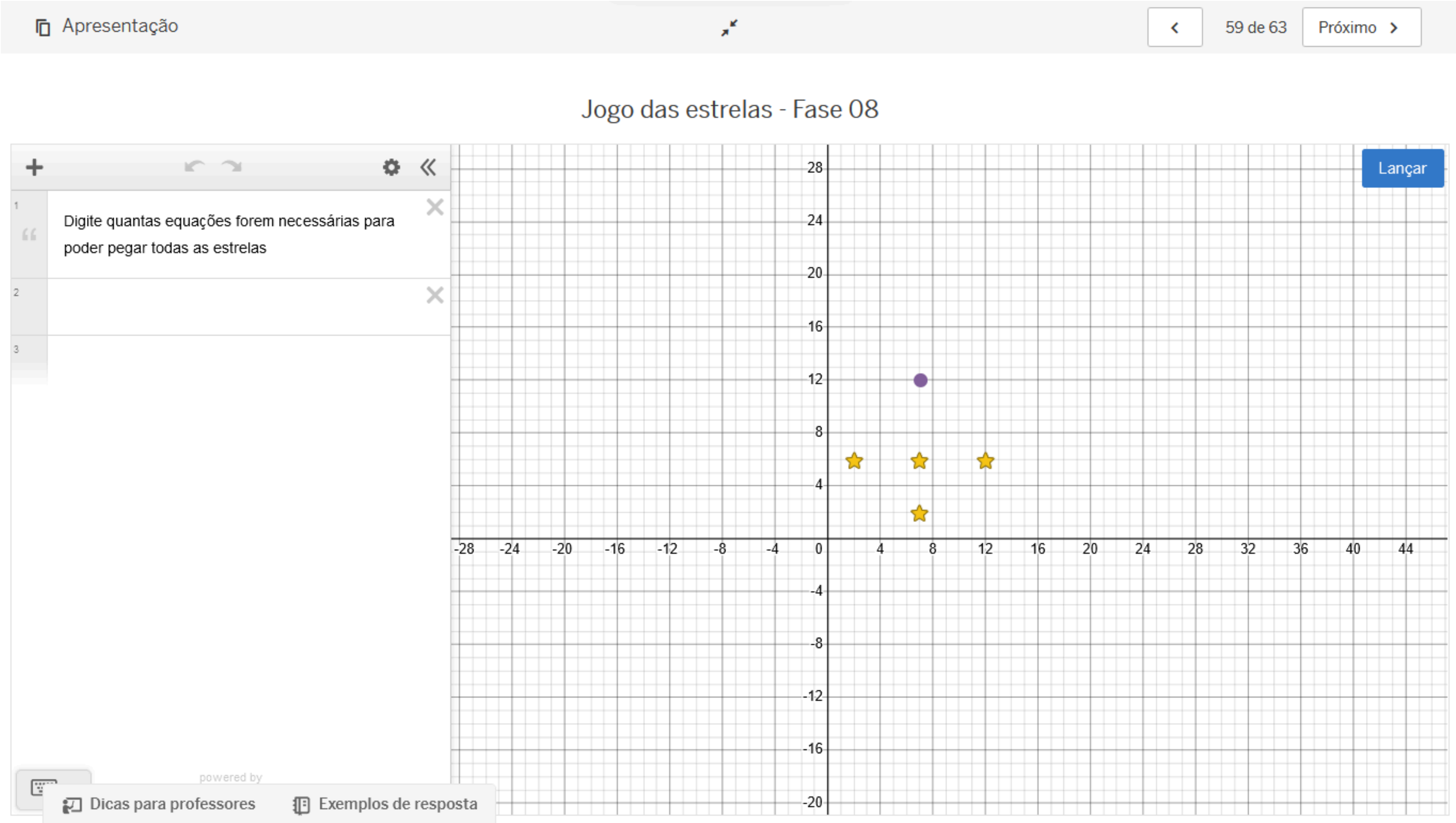

Apresentação
54 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 09
Lançar
Pegue todas as estrelas usando somente uma parábola.
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta

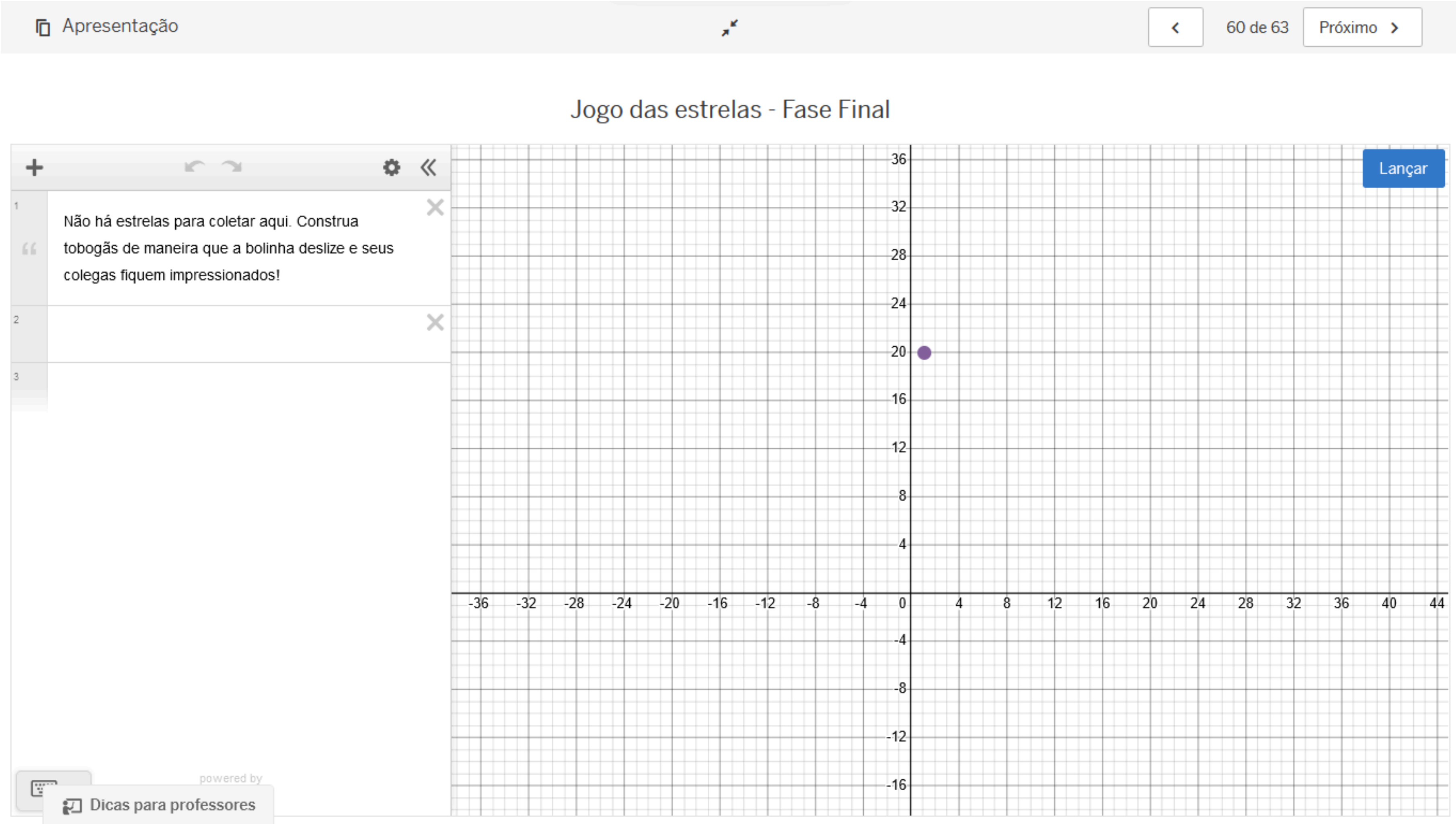

Apresentação
55 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 04
Lançar
Altere o centro da circunferência e o raio para poder pegar as estrelas
$(x-1)^2+(y+1)^2=5$
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta


Apresentação
56 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 05
Digite quantas equações forem necessárias para poder pegar todas as estrelas
Lançar
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta


Apresentação
57 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 06
Digite quantas equações forem necessárias para poder pegar todas as estrelas
Lançar
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-24
-20
-16
-12
-8
-4
4
8
12
16
20

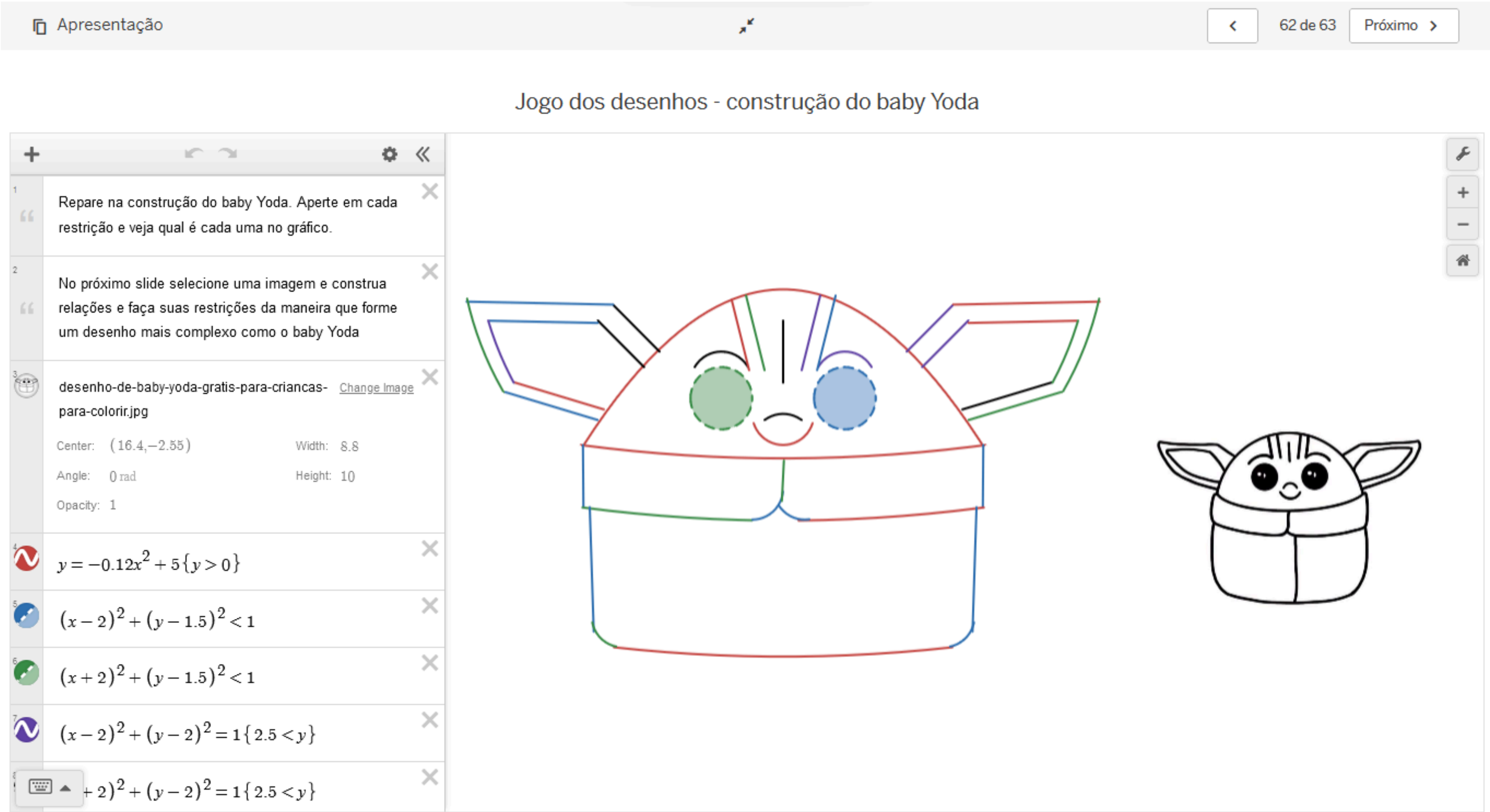

Apresentação
58 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 07
Digite quantas equações forem necessárias para poder pegar todas as estrelas
Lançar
Dicas para professores
Exemplos de resposta
powered by

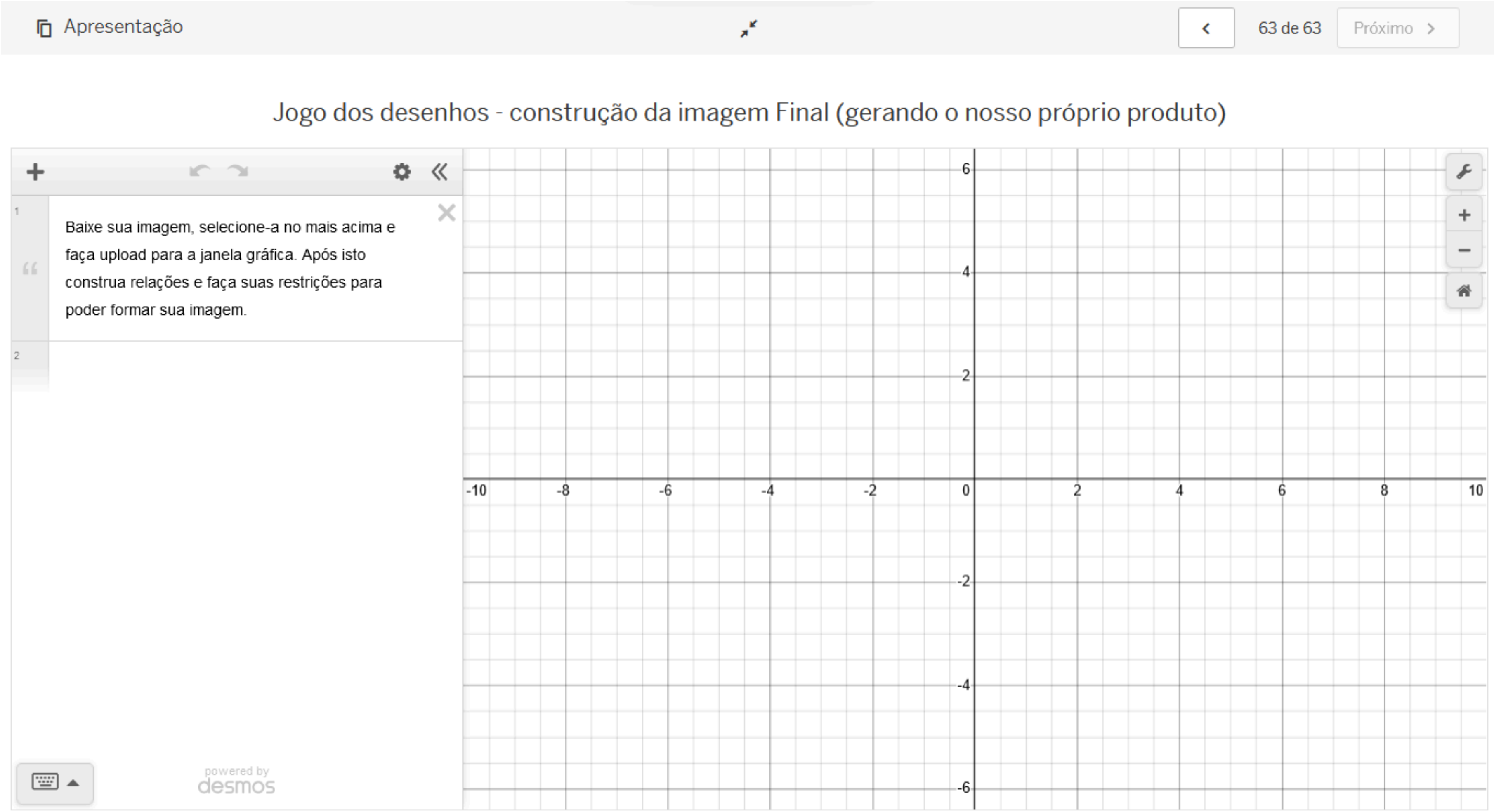

Apresentação
59 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase 08
Digite quantas equações forem necessárias para poder pegar todas as estrelas
Lançar
powered by
Dicas para professores
Exemplos de resposta


Apresentação
60 de 63
Próximo
Jogo das estrelas - Fase Final
Não há estrelas para coletar aqui. Construa tobogãs de maneira que a bolinha deslize e seus colegas fiquem impressionados!
Lançar
powered by
Dicas para professores
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-36
-32
-28
-24
-20
-16
-12
-8
-4
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44

Apêndice IV - Sequência de atividades: Tarefa de criação de imagens (slide 61 até 63)

As atividades apresentadas nos apêndices II, III e IV foram aqui apresentadas como foram aplicadas. As atividades atualizadas estão dispostas no link: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/648a605a8061e951ea2ade7c?lang=pt-BR




Apresentação
63 de 63
Próximo
Jogo dos desenhos - construção da imagem Final (gerando o nosso próprio produto)
Baixe sua imagem, selecione-a no mais acima e faça upload para a janela gráfica. Após isto construa relações e faça suas restrições para poder formar sua imagem.
powered by desmos
6
4
2
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Apêndice V - Questionário de avaliação

Este questionário tem por objetivo coletar e analisar a evolução dos objetos Matemáticos contidos na sequência de atividades, buscando compreender os aprendizados dos estudantes. A coleta de dados se baseia sobre a representação algébrica e gráfica dos conceitos. As perguntas devem ser respondidas com seriedade e de maneira que expresse os conhecimentos do estudante e a compreensão dos conceitos do objeto de estudo. Além de perguntas similares às do questionário inicial, há também questões sobre o desenvolvimento da sequência de atividades por parte do estudante, como foi seu desenvolvimento, sua percepção e quais conhecimentos acredita que desenvolveu. Além disso, há também questões sobre sua opinião sobre a sequência de atividades e considerações que gostaria de fazer para a evolução de trabalhos futuros.

Nome:______________________________ Data:____/____/______

1 - O que é um plano cartesiano? Como é possível utilizá-lo? O que podemos representar em um plano cartesiano?

2 - Faça um plano cartesiano, coloque 5 pontos nele indicando suas coordenadas e envie em anexo.

3 - O que é uma reta? Como podemos construí-la? Qual a modificação no gráfico?

4 - Faça uma reta em um plano cartesiano.

5 - Escreva uma equação de reta. Como podemos escrever uma equação de reta na forma genérica?

6 - O que é uma parábola? Como podemos construí-la? O que ela representa?

7 - Esboce com lápis e papel uma parábola em um plano cartesiano.

8 - Escreva uma equação de parábola. Como podemos escrever uma equação de parábola na forma genérica?

9 - O que é uma circunferência? Como podemos construí-la? Qual a modificação no gráfico?

10 - Esboce com lápis e papel uma circunferência em um plano cartesiano.

11 - Escreva uma equação de circunferência. Como podemos escrever uma equação de circunferência na forma genérica?

12 - O que é uma restrição de variável? Como podemos restringir uma variável? Qual a modificação no gráfico?

13 - Escreva uma restrição de variável para x e outra para y.

14 - Esboce uma reta no plano cartesiano impondo uma restrição na variável x ou y.

15 - O que é necessário para transladar verticalmente um gráfico?

16 - Agora sobre aprendizagem: Quais conhecimentos você acredita que adquiriu durante a sequência de atividades? Há conhecimentos que você desenvolveu ou compreendeu? Quais?

17 - O que você achou da sequência de atividades, como você acredita que auxiliou, de alguma forma no seu conhecimento Matemático?

18 - O que você achou do Software Desmos?

19 - Faça uma autoavaliação do seu desenvolvimento durante a execução da sequência de atividades, pensando nas tarefas, no seu comprometimento e no seu aprendizado.

20 - Avalie a sequência de atividades, como podemos melhorar, quais seus pontos positivos e negativos?

Obrigado pelas respostas!
Sua participação auxiliará ainda mais no desenvolvimento científico-cultural!

Apêndice VI - Carta de anuência institucional

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus Caxias do Sul

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
R. Avelino Antônio de Souza, 1730 - Nossa Sra. de Fátima, Caxias do Sul - RS

CARTA DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL

Eu, Jeferson Luiz Fachinetto, responsável pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - campus Caxias do Sul, autorizo a realização da pesquisa intitulada “O Uso De Coeficientes Em Equações De Duas Variáveis E Restrições No Plano Cartesiano: Uma Abordagem Lúdica E Diferenciada No Software Desmos”, a ser conduzida pelos pesquisadores abaixo relacionados. Fui informada pelo responsável do estudo sobre objetivos, metodologia, riscos e benefícios aos participantes da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Foi assegurado pelo pesquisador responsável que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde nº 466/2012, que trata da Pesquisa envolvendo seres humanos e que serão utilizados tão somente para a realização deste estudo. Serão, ainda, observadas na íntegra, as disposições constantes na Lei Geral de Proteção de Dados nº 13.709/2018, no tocante à preservação da confidencialidade de todas as informações pessoais coletadas, que serão utilizadas unicamente para atender à finalidade específica da pesquisa, sendo realizada, sempre que possível, a anonimização de eventuais dados pessoais sensíveis.

Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Serão disponibilizados, ao pesquisador, o espaço físico da escola, materiais escolares e atendimento aos alunos, se necessário.

Caxias do Sul, 10 de outubro de 2023.

____

Jeferson Luiz Fachinetto
Diretor do IFRS campus Caxias do Sul

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, consultar:

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

Pesquisador principal: Adrian Ruan Horn de Borba
E-mail para contato: 1adrianhdb@gmail.com

Professor Orientador:
Nome: Nicolau Matiel Lunardi Diehl
E-mail para contato: nicolau.diehl@canoas.ifrs.edu.br

Apêndice VII - Termo de consentimento livre e esclarecido para pais ou responsáveis

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezado (a) Senhor (a):

Seu filho(a) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS". Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa pretendemos investigar de que forma partir dos saberes do aluno pode auxiliar na contextualização dos conteúdos matemáticos, e para este fim, de um Software intitulado Desmos, para que produzam conhecimento didático e aprendizado para os próprios alunos.

A pesquisa será feita no próprio Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - campus Canoas, durante as aulas de Matemática, e deverá durar em torno de quarenta e cinco dias, através de questionários, atividades de pesquisa e atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados serão utilizadas as atividades feitas pelos alunos. A participação do seu/sua representado(a) será fotografada apenas para o uso na pesquisa, e as atividades realizadas poderão ser digitalizadas e divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, preservando a identidade do participante. Caso alguma atividade desenvolvida faça uso da imagem ou voz do participante, poderá ser divulgada nas redes sociais da escola, conforme já acontece com outras atividades desenvolvidas no âmbito escolar. Como a pesquisa se dará na sala de aula na qual a pesquisadora é professora titular de Matemática, em caso de haver alunos que não queiram participar da pesquisa, estes formarão um grupo e os dados deste grupo não participante não serão coletados.

A participação na pesquisa pode ter alguns riscos, como cansaço ao realizar as atividades ou desconforto gerado por conflitos em trabalhos em grupo. Caso seja necessário, seu representado poderá ser encaminhado(a) para a Orientação Escolar, a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com o pesquisador responsável pelo estudo.

A participação na pesquisa poderá ter benefício direto, como maior apreço pela Matemática e maior compreensão dos usos dos conteúdos escolares no seu cotidiano, por isso a importância da participação do seu representado.

Ao participar desta pesquisa, saiba que você tem direito:

- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo ao seu representado;
- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;
- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;
- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;
- de que, caso tenha despesas (e de seu acompanhante, se aplicável) relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;
- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada.
- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

==

Concordo em autorizar a participação do meu representado na pesquisa intitulada: “O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS”. Autorizo o uso da imagem e voz do meu representado em publicações nas redes sociais da escola. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Caxias do Sul, ____de _________de 2023.

Nome do aluno participante: ____

Nome e assinatura do responsável pelo participante

Adrian Ruan Horn de Borba
Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Adrian Ruan Horn de Borba
Instituição: IFRS - Campus Canoas
Telefone: (XX)XXXXX-XXXX
e-mail: 1adrianhdb@gmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o **Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)** responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

Apêndice VIII - Termo de assentimento livre e esclarecido

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS". Seus pais/responsáveis concordaram com a sua participação. Se você quiser participar, vamos te explicar como será essa pesquisa. Se você não quiser participar, não tem problema, não vai ter nenhum prejuízo para você ou para os seus pais.

Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da instituição IFRS Campus Canoas. Nessa pesquisa, pretendemos investigar de que forma partir da realidade do aluno pode auxiliar na contextualização dos conteúdos matemáticos, e para este fim, utilizaremos o Software Desmos e o laboratório de informática da instituição.

A pesquisa será feita no próprio IFRS - Canoas, durante as aulas de Matemática, e deverá durar em torno de quarenta e cinco dias, através de questionários, atividades de pesquisa e atividades semelhantes às que já são realizadas em aula. Para a coleta de dados serão utilizadas as atividades feitas pelos alunos. A sua participação poderá ser fotografada, apenas para o uso na pesquisa. As atividades realizadas e entregues para a professora/pesquisadora poderão ser divulgadas junto à dissertação produzida como relatório da pesquisa, porém, sua identidade será preservada. Caso alguma atividade desenvolvida faça uso da imagem ou voz do participante, poderá ser divulgada nas redes sociais da escola, conforme já acontece com outras atividades desenvolvidas no âmbito escolar. Como a pesquisa se dará na sala de aula na qual a pesquisadora é professora titular de Matemática, em caso de haver alunos que não queiram participar da pesquisa, estes formarão um grupo e os dados deste grupo não participante não serão coletados.

A sua participação na pesquisa pode ter alguns riscos, como cansaço ao realizar as atividades ou desconforto gerado por conflitos em trabalhos em grupo. Caso seja necessário, você poderá ser encaminhado(a) para a Orientação Escolar, a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com a professora pesquisadora responsável pelo estudo.

A sua participação na pesquisa poderá ter benefícios diretos, como maior apreço pela Matemática e maior compreensão dos usos dos conteúdos escolares no seu cotidiano, por isso a importância da sua participação.

As informações e os dados que você informar para esta pesquisa serão mantidos confidenciais, não haverá nenhuma identificação sua ou de sua família. A pesquisadora se responsabiliza pelos cuidados em preservar a sua identidade e os seus dados.

Ao participar desta pesquisa, saiba que você tem direito:

- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo a você;
- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;
- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;
- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;
- de que, caso tenha despesas relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;
- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada;
- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

Os resultados da pesquisa vão ser publicados em uma dissertação. A previsão da divulgação dos resultados é abril de 2024.

==

Concordo em participar da pesquisa intitulada: "O USO DE COEFICIENTES EM EQUAÇÕES DE

DUAS VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES NO PLANO CARTESIANO: UMA ABORDAGEM LÚDICA E DIFERENCIADA NO SOFTWARE DESMOS". Autorizo o uso da minha imagem e voz, que podem ser divulgadas nas redes sociais da escola. Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento.

Caxias do Sul, ____de _________de 2023.

Nome e assinatura do(a) participante

Adrian Ruan Horn de Borba
Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Adrian Ruan Horn de Borba
Instituição: IFRS
Telefone: (XX)XXXXX-XXXX
e-mail: 1adrianhdb@gmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o **Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)** responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340