



Universidade Federal do ABC

O Teorema de Pick e Aplicações

Márcio Eiji Tamari

Dissertação apresentada
ao PROFMAT, UFABC,
para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Armando Caputi**

Santo André, 27 de setembro de 2013.



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Armando Caputi (UFABC) - Orientador

Prof. Dr. Antonio Cândido Faleiros (UFABC)

Prof^ª. Dr^ª. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (USP)

Dedicatória

Dedico à Cássia, minha esposa, e aos meus pais Maria e Takamuri (*in memoriam*) .

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha esposa, Cássia, pela força e compreensão durante essa etapa.

Aos meus pais, Maria e Takamuri, que me educaram na forma correta me dando condições de ser uma pessoa honesta e responsável.

Ao meu orientador, Armando Caputi, por ter dedicado seu tempo me ajudando e me orientando.

Aos professores do PROFMAT da UFABC, pela dedicação na arte de ensinar.

À coordenadora de uma das escolas em que trabalho, Maria Odete, por ceder algumas aulas para que eu pudesse finalizar essa dissertação.

Resumo

O principal tema abordado por esse trabalho será a Fórmula de Pick. Uma fórmula simples que por meio de contagem de pontos determina-se a área de um polígono. É uma fórmula que pode ser manipulada por qualquer aluno que está no Ensino Fundamental II ou acima deste estágio.

Inspirado em elaborar um trabalho acessível para um aluno que está no Ensino Médio, a demonstração dessa fórmula é elementar. Apesar disso, toca em vários assuntos de interesses desse segmento de ensino como, por exemplo:

- a) A demonstração de que todo polígono simples de n lados pode ser decomposto como união de $(n - 2)$ triângulos ;
- b) A determinação do número π ;
- c) A Fórmula de Euler para poliedros planos.

No quarto capítulo são apresentadas sugestões de atividades envolvendo a Fórmula de Pick.

Abstract

The main theme covered by this assignment is going to be The Pick Formula, a simple formula that let us determine a polygon's area by counting points on the Cartesian plane, and can be manipulated by any Junior High school or higher student.

Inspired on elaborating an accessible assignment for a High School student the demonstration of this formula is elementary. In addition to that, it covers many subjects of interest from this segment of teaching, such as:

- a) Demonstrating that every simple polygon of n sides can be decomposed as a combination of $(n - 2)$ triangles;
- b) The determination of π ;
- c) The Euler's Formula for plane polyhedra;

In the fourth chapter it's presented a few suggestions for workclasses involving Pick's Formula.

Índice

Introdução	8
1 Conceitos Básicos	9
1.1 O Reticulado	9
1.2 O Ponto	10
1.3 A Reta	10
1.4 A semirreta	11
1.5 O Segmento de reta	11
1.6 O Ângulo	12
1.7 O Polígono	12
1.8 Movimentos rígidos de um polígono no reticulado	20
2 Triângulo Fundamental e a Fórmula de Pick	22
2.1 Triângulo fundamental	22
2.2 Decomposição do polígono em triângulos fundamentais justapostos	26
2.3 Fórmula de Pick	26
3 Aplicações da Fórmula de Pick	29
3.1 Cálculo da área de uma região irregular	29
3.2 Uma determinação do número π	31
3.3 O Teorema de Euler para polígonos	33
3.4 A Fórmula de Pick para polígonos com "buracos	36

4	Atividades	36
4.1	Exercícios para aplicação da Fórmula de Pick.	36
4.2	Cálculo da área da palma da mão pela contagem pontos.	38
4.3	Determinar uma estimativa da quantidade de pessoas presentes em uma passeata.	39
4.4	Uma determinação da Fórmula de Pick	39
	Referências Bibliográficas	42

Introdução

O cálculo de áreas de figuras planas nem sempre é simples, principalmente quando a região da qual se queira determinar a área é irregular. Um dos métodos para determinarmos essa área é fazermos uma aproximação dessa região por um polígono simples e utilizar a Fórmula de Pick, uma fórmula simples que faz tal cálculo por meio de contagem de pontos. É uma fórmula que pode ser manipulada por alunos que estão no Ensino Fundamental II ou acima deste estágio. Esse trabalho tem como tema principal essa Fórmula de Pick. Para a demonstração dessa fórmula tocamos em vários assuntos, interessantes e inspiradores para os alunos citados anteriormente.

No primeiro capítulo apresentaremos e definiremos alguns conceitos que serão úteis para o entendimento das demonstrações. Nesse capítulo demonstraremos que todo polígono simples de n lados pode ser decomposto como união de $(n - 2)$ triângulos. Este teorema é interessante, não só para o uso feito aqui mas para outras aplicações.

No segundo capítulo apresentaremos a demonstração da Fórmula de Pick que envolvem conceitos da Geometria Analítica e uma propriedades dos números primos. O argumento utilizado para essa demonstração é muito belo e inspirador.

No terceiro capítulo apresentaremos exemplos de como aplicar a Fórmula de Pick para o cálculo da área de uma região irregular como a do campus da UFABC do município de Santo André e para a determinação do número π . Também apresentaremos o Teorema de Euler para poliedros planos e utilizando o mesmo belo argumento da demonstração da Fórmula de Pick, demonstraremos esse teorema.

No último capítulo apresentaremos algumas atividades como o cálculo da área da palma da mão (para alunos do Ensino Fundamental II); determinação da estimativa da quantidade de pessoas presentes em uma passeata (para alunos do Ensino Médio) e uma determinação da Fórmula de Pick utilizando resoluções de sistemas lineares (para alunos do Ensino Médio).

1 Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre a geometria no reticulado. Muitos desses conceitos serão necessários para o entendimento das demonstrações que estão adiante.

Entre os conceitos, vamos apresentar o plano reticulado e definir alguns entes geométricos a ele vinculados.

1.1 O Reticulado

Chamamos de plano reticulado, ou apenas reticulado, a representação no plano cartesiano do produto \mathbb{Z}^2 . Essa representação é composta por pontos em que as coordenadas são inteiras.

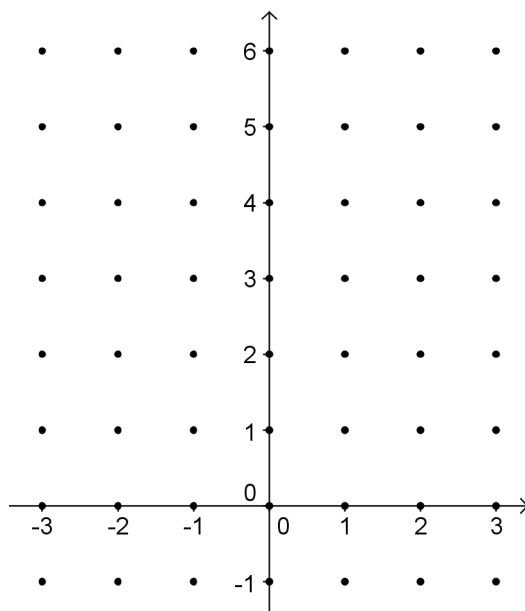


Figura 1: Plano Reticulado.

A distância horizontal ou vertical, entre dois pontos adjacentes é igual a uma unidade (1u), e qualquer distância horizontal ou vertical entre pontos do reticulado é um inteiro positivo.

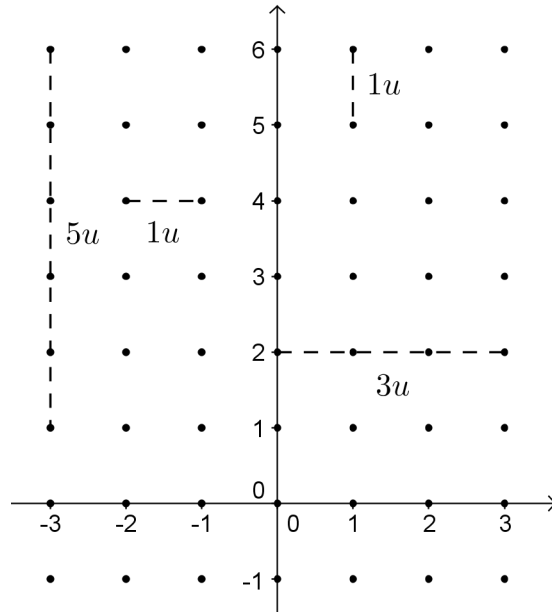


Figura 2: Distância horizontal e vertical.

1.2 O Ponto

Definição 1.1 $P(a,b)$ é um ponto do reticulado se, e somente se, suas coordenadas são inteiras. Esse ponto será denominado **ponto do reticulado**.

$$(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow a,b \in \mathbb{Z}$$

1.3 A Retã

Definição 1.2 r é uma reta do reticulado se, e somente se, contém dois pontos distintos do reticulado. Essa reta será denominada **reta do reticulado**.

$$r \text{ é uma reta do reticulado} \Leftrightarrow \exists (a,b),(c,d) \in r \text{ com } (a,b) \neq (c,d) \text{ e } a,b,c,d \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1.3 O coeficiente angular de uma reta do reticulado que não é vertical é um número racional.

Demonstração: Sendo (a,b) e (c,d) dois pontos distintos do reticulado que determinam uma reta r , com $a \neq c$. O coeficiente angular m da reta r será $m = \frac{d-b}{c-a}$ que é um número racional. \square

1.4 A semirreta

Definição 1.4 \overrightarrow{AB} é uma **semirreta do reticulado** com origem no ponto A e que passa pelo ponto B se, e somente se, os pontos A e B são pontos do reticulado.

1.5 O Segmento de reta

Definição 1.5 \overline{PQ} é um segmento de reta do reticulado se, e somente se, suas extremidades são dois pontos distintos do reticulado. Este segmento será denominado **segmento do reticulado**.

Chamamos de interior de \overline{PQ} o conjunto de pontos de \overline{PQ} que são distintos de P e Q .

O comprimento de um segmento do reticulado que é vertical ou horizontal é um número inteiro positivo. No entanto, o comprimento de um segmento do reticulado oblíquo (isto é, não vertical e nem horizontal) não precisa ser um número inteiro.

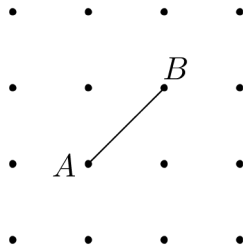


Figura 3: Segmento do reticulado de comprimento $\sqrt{2}$.

Teorema 1.6 Se ℓ é a medida de um segmento de reta \overline{AB} , então ℓ^2 é um número inteiro.

Demonstração: Sejam $A(a,b)$ e $B(c,d)$ pontos do reticulado.

Se o segmento for horizontal $\ell = |a - c|$ é inteiro $\Rightarrow \ell^2$ é inteiro.

Se o segmento for vertical, $\ell = |b - d|$ é inteiro $\Rightarrow \ell^2$ é inteiro.

Se o segmento for oblíquo, este será a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de medidas inteiras $|a - c|$ e $|b - d|$. Aplicando o teorema de Pitágoras, $\ell^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$ é inteiro. \square

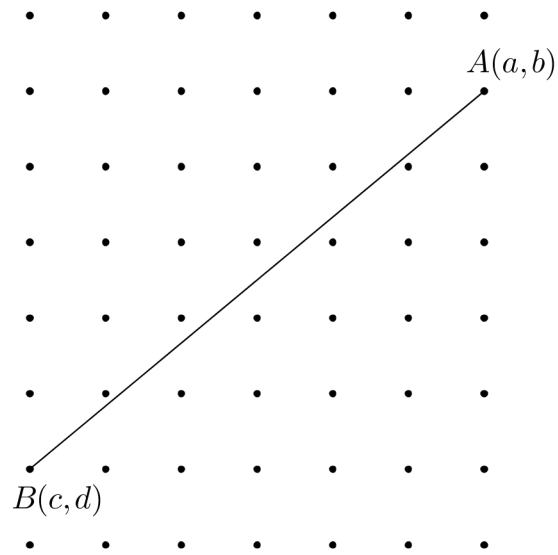


Figura 4: Segmento de reta \overline{AB} .

1.6 O Ângulo

Definição 1.7 $\angle PQR$ é um **ângulo do reticulado** se, e somente se, seus lados \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{QR} são semirretas do reticulado.¹

1.7 O Polígono

Definição 1.8 Um polígono será chamado de **polígono do reticulado** se, e somente se, seus vértices são pontos do reticulado.

Nesta dissertação, trabalharemos apenas com polígonos do reticulado que são simples, ou seja, polígonos em que a interseção entre lados não adjacentes é vazia.

¹Um ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem.

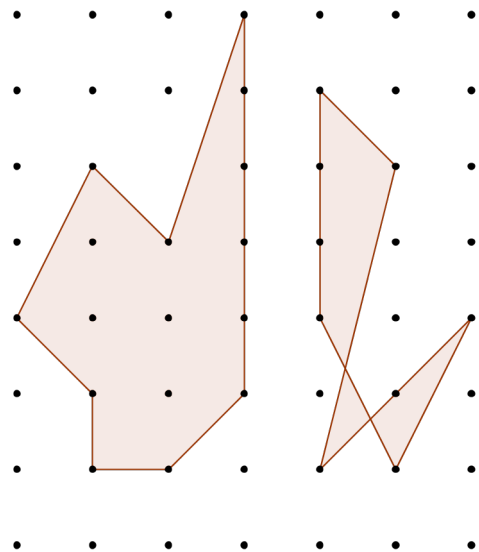


Figura 5: O polígono da esquerda é simples e o da direita não é simples.

Definição 1.9 *Polígonos justapostos* são polígonos que não possuem pontos interiores em comum.

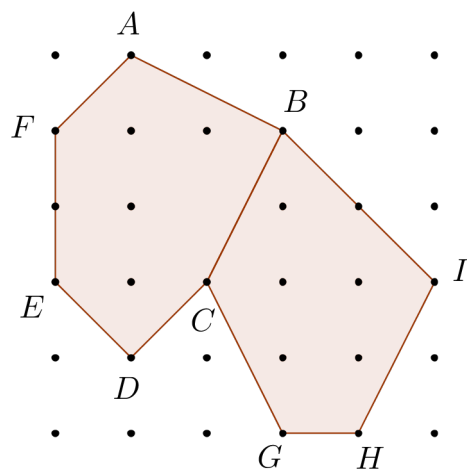


Figura 6: Os polígonos ABCDEF e BCGHI são justapostos.

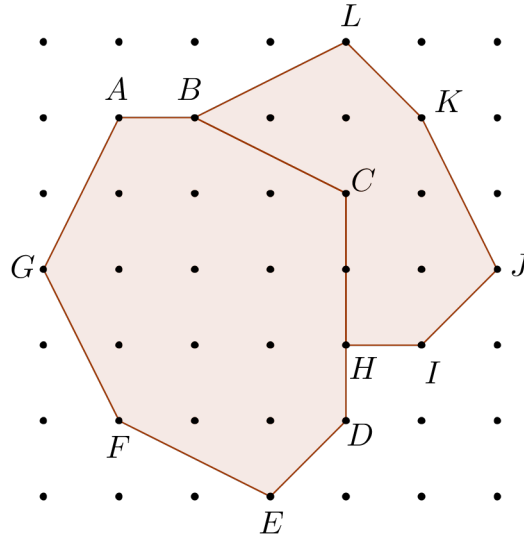


Figura 7: Os polígonos ABCDEFG e BCHIJKL são justapostos.

Lema 1.10 *Todo polígono simples possui ao menos um par de lados consecutivos \overline{AB} e \overline{BC} tais que o segmento \overline{AC} está totalmente contido no polígono.*

Demonstração: Primeiramente, vamos provar que todo polígono simples possui ao menos uma diagonal interior. Para isso, tome lados consecutivos \overline{AB} e \overline{BC} tais que o ângulo interno em B seja menor do que π rad (tal par sempre existe, pois do contrário o polígono teria interior ilimitado). Para cada ponto P do lado \overline{AB} , tome a reta paralela ao segmento \overline{AC} que passa por P e considere o segmento σ_P dessa reta contido no triângulo ABC . Se nenhum desses segmentos contém, em seu interior, algum vértice do polígono, então o segmento \overline{AC} é uma diagonal totalmente contida no polígono (note, por curiosidade, que neste caso os lados consecutivos \overline{AB} e \overline{BC} já satisfazem as condições do lema). Caso contrário, seja Q ($Q \in \overline{AB}$) o ponto mais próximo de B tal que o segmento σ_Q possui um vértice em seu interior (note que Q pode ser o vértice A). Dos vértices do polígono que pertencem ao segmento σ_Q , seja D o mais próximo ao lado \overline{AB} . Então o segmento \overline{BD} é uma diagonal totalmente contida no polígono.

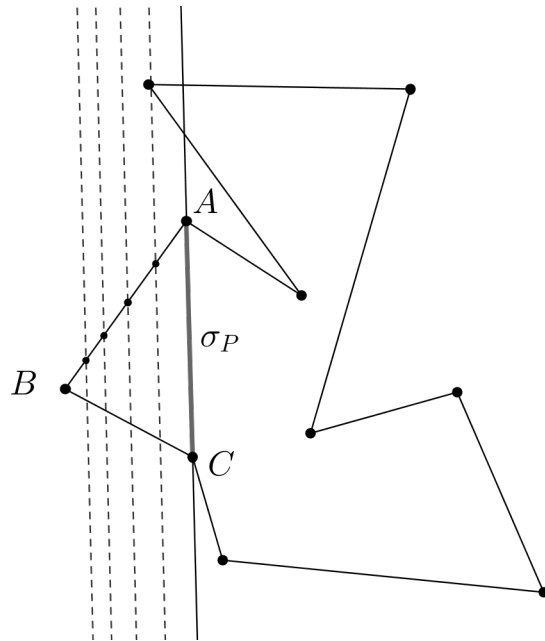


Figura 8: \overline{AC} é uma diagonal interior.

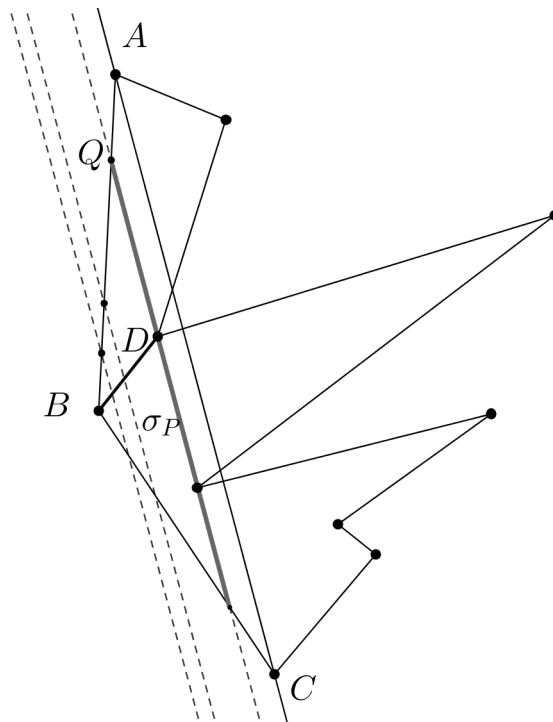


Figura 9: \overline{BD} é uma diagonal interior.

Provemos agora o lema, seguindo por indução sobre o número n de lados. com $n \geq 4$.

I) Para $n = 4$, seja $ABCD$ um polígono não convexo ² Por ser não convexo, certamente um dos vértices está no interior do triângulo formado pelos demais vértices. Sem perda de generalidade, suponhamos que D seja esse vértice e que B seja o seu vértice oposto. Como a diagonal \overline{BD} está contida em $ABCD$, então os lados consecutivos \overline{BC} e \overline{CD} satisfazem as condições do lema.

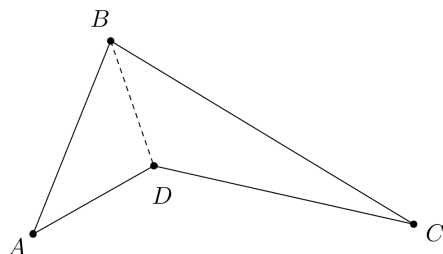


Figura 10: \overline{BD} é uma diagonal totalmente contida no polígono.

II) Suponha que a afirmação do lema seja válida para todo polígono de k lados, com $4 \leq k < n$. Vamos provar sua validade para qualquer polígono de n lados. Seja \overline{PQ} uma diagonal interior do polígono, como visto acima. Tal diagonal divide o polígono em dois polígonos justapostos, dos quais ao menos um possui um número de lados k , com $4 \leq k < n$ (note que os dois polígonos que resultam dessa divisão possuem menos de n lados, mas um deles pode ter menos de 4 lados, não podendo ser objeto da hipótese de indução). Denotemos com δ tal polígono.

²Polígono convexo é o polígono em que qualquer que seja o segmento de reta com extremidades em dois pontos interiores sempre estará contido na sua região interior. Caso contrário, este será denominado polígono não convexo ou côncavo.

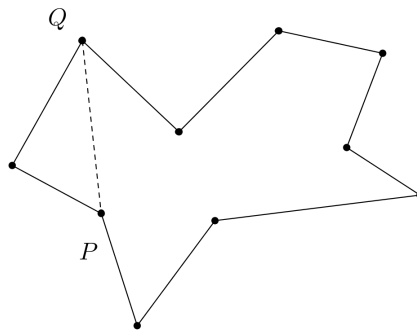


Figura 11: \overline{PQ} é uma diagonal contida no polígono.

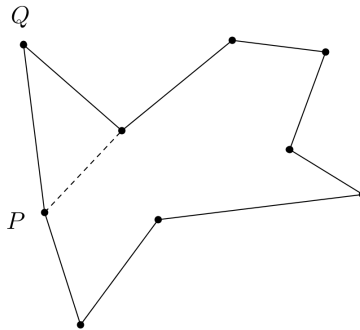


Figura 12: Polígono δ gerado a partir da figura anterior.

Pela hipótese indutiva, o polígono δ possui um par de lados consecutivos cujos vértices "livres" formam um segmento totalmente contido em δ . Caso nenhum desses lados seja o segmento \overline{PQ} , então esse mesmo par satisfaz a condição do lema. Caso \overline{PQ} seja um dos lados e, digamos, \overline{QV} seja o outro, consideremos o polígono δ' obtido de δ excluindo o triângulo PQV e acrescentando o segmento \overline{PV} .

Fazemos procedimento acima com o polígono δ' , repetindo tantas vezes quantas forem necessárias. Esse processo é finito, levando ao cabo a um par de lados consecutivos como desejado. \square

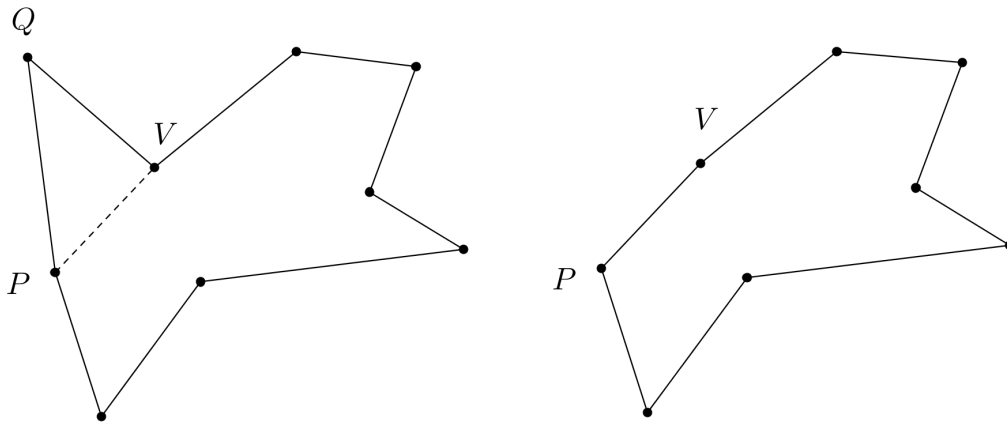


Figura 13: O polígono da esquerda é o polígono δ com a diagonal \overline{PV} o da direita é o polígono δ' .

Teorema 1.11 *Todo polígono ρ do reticulado com n lados pode ser decomposto como união de $(n - 2)$ triângulos justapostos.*

Demonstração: Se ρ é um polígono com $n = 3$ lados não há o que discutir.

Se ρ é um polígono convexo com $n > 3$ lados, a partir de um vértice arbitrário P construímos $(n - 3)$ diagonais, pois dos n vértices de ρ , são diagonais os segmentos com extremidades em P e em todos os outros vértices com exceção de dois que são adjacentes a P e o próprio P . Essas diagonais dividirão ρ como uma união de $(n - 3) + 1 = (n - 2)$ triângulos justapostos.

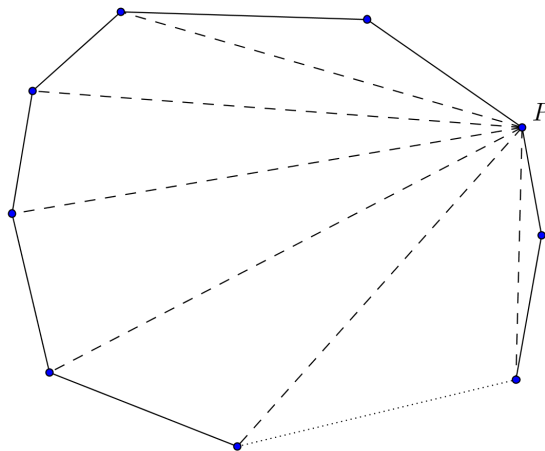


Figura 14: Polígono convexo dividido como união de $(n - 2)$ triângulos justapostos.

Se ρ é um polígono não convexo com n lados, vamos utilizar o método da indução finita para provarmos o teorema.

I) Seja $ABCD$ um polígono não convexo. Por ser não convexo, certamente um dos vértices está no interior do triângulo formado pelos demais vértices. Sem perda de generalidade, suponhamos que D seja esse vértice e que B seja o seu vértice oposto. Então, os triângulo ABD e CBD são justapostos e sua união é o polígono $ABCD$. Ou seja, todo polígono não convexo de 4 lados pode ser dividido como união de $4 - 2 = 2$ triângulos justapostos.

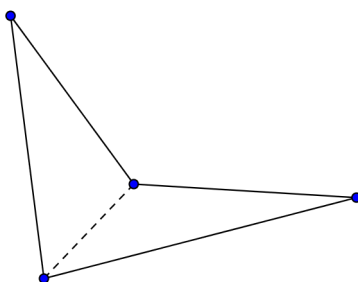


Figura 15: Quadrilátero não convexo dividido como união de $(4 - 2) = 2$ triângulos justapostos.

II) Supondo que um polígono δ com $k > 4 (k \in \mathbb{Z})$ lados pode ser dividido em $(k - 2)$ triângulos justapostos devemos provar que um polígono com $(k + 1)$ lados também pode ser dividido como união de $(k + 1) - 2 = (k - 1)$ triângulos justapostos.

III) Tomando um polígono não convexo com $(k + 1)$ lados. Escolhemos dois dos seus lados consecutivos, digamos que sejam $\overline{P_r P_s}$ e $\overline{P_s P_t}$. Se o segmento $\overline{P_r P_t}$ não for interior a esse polígono então, escolhemos outro par de lados consecutivos (a existência de tal par é garantida pelo Lema 1.10). Caso contrário, este segmento o dividirá como união de um triângulo $(P_r P_s P_t)$ com outro polígono de $(k + 1) - 1 = k$ lados.

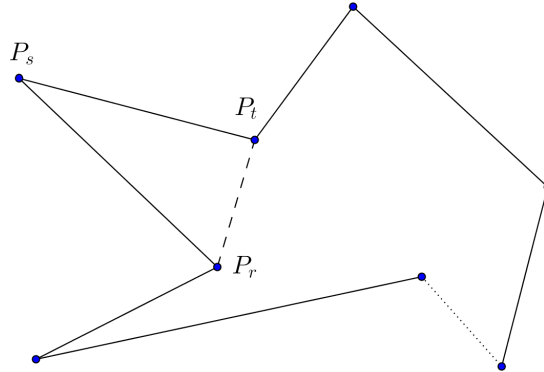


Figura 16: Polígono δ com $(k + 1)$ lados dividido como união do triângulo $P_r P_s P_t$ e do polígono com k lados, justapostos.

Como este polígono de k lados pode ser dividido como união de $(k - 2)$ triângulos justapostos, concluímos que o polígono δ será a união de $(k - 2)$ triângulos justapostos com o triângulo $P_r P_s P_t$. Logo, δ ficará dividido como união de $(k - 2) + 1 = (k - 1)$ triângulos justapostos. \square

1.8 Movimentos rígidos de um polígono no reticulado

Para o que se segue, será útil considerarmos movimentos de um polígono do reticulado de modo que o "novo" polígono também seja um polígono do reticulado. Só nos interessam os assim chamados *movimentos rígidos*, que são movimentos que preservam a distância dos pontos. Descreveremos os seguintes movimentos: translação, rotação de um quarto de giro (ou seus múltiplos inteiros), reflexão vertical e reflexão horizontal.

Dado um segmento AB , denote por r a sua reta suporte e escolha, para essa reta, a orientação "de A para B ". Dado qualquer ponto P do plano, uma *translação* de P segundo o segmento AB é um deslocamento do ponto P ao longo de uma reta paralela a r , no sentido da orientação escolhida para r e por uma distância igual ao comprimento de AB . Para uma figura F do plano, uma translação de F segundo o segmento AB é constituída pela translação de cada um de seus pontos segundo o mesmo segmento AB .

É possível provar que uma translação pode ser expressa através de coordenadas da seguinte forma. Dados $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, tome $c_1 = b_1 - a_1$ e $c_2 = b_2 - a_2$. Então, para cada ponto $P(x, y)$, o resultado da translação de P segundo o segmento AB é o ponto de coordenadas $(x + c_1, y + c_2)$. Nota-se assim que, se AB for um segmento do reticulado e se P também for um ponto do reticulado, as coordenadas $x + c_1$ e $y + c_2$ são inteiras. Logo,

uma translação segundo um segmento do reticulado leva pontos do reticulado em pontos do reticulado.

Dado um ponto O do plano, uma *rotação de um quarto de giro* em torno de O é um movimento que leva cada ponto P do plano em um ponto Q de modo que: (i) a comprimento de OQ é o mesmo de OP ; (ii) o ângulo $\angle POQ$ é reto. Em outras palavras, o ponto P gira em torno de O por um ângulo de 90° no sentido anti-horário (o ponto O é deixado fixo por essa rotação). Se o ângulo de rotação for 180° , dizemos que se trata de uma *rotação de meia volta*. Se tal ângulo for 270° , uma *rotação de três quartos de giro*.

A expressão de uma rotação em coordenadas é um pouco mais complicada do que no caso das translações, mas também é possível provar que rotações de um quarto de giro ou de meia volta em torno de pontos do reticulado leva pontos do reticulado em pontos do reticulado.

Dada uma reta r , uma *reflexão* relativa a r é um movimento que leva cada ponto P do plano no ponto simétrico de P em relação a r , isto é, um ponto Q tal que PQ seja perpendicular a r e tal que a distância de Q a r seja a mesma da de P a r . No caso particular em que r é uma reta horizontal, dizemos que a reflexão é horizontal. Caso r seja vertical, dizemos que a reflexão é vertical.

Se r é um reta horizontal de equação $y = b$, então dado um ponto $P(x, y)$, é fácil mostrar que a reflexão relativa à reta r leva o ponto P no ponto de coordenadas $(x, 2b - y)$. Assim, se a reta r é uma reta do reticulado (isto é, se b for um número inteiro) e se P for um ponto do reticulado, então a reflexão horizontal de P também é um ponto do reticulado. Ou seja, uma reflexão horizontal relativa a uma reta do reticulado leva pontos do reticulado em pontos do reticulado. De modo análogo, mostra-se que o mesmo vale para reflexões verticais.

Chamaremos de *movimento rígido compatível* qualquer movimento rígido que preserve o reticulado, isto é, leve pontos do reticulado em pontos do reticulado. As observações acima mostram que as translações segundo segmentos do reticulado, as rotações de um quarto de giro ou meia volta em torno de um ponto do reticulado, assim como as reflexões horizontais e as verticais são movimentos rígidos compatíveis.

2 Triângulo Fundamental e a Fórmula de Pick

Neste capítulo vamos definir um triângulo fundamental e vamos provar que um polígono do reticulado pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Apresentaremos e determinaremos a prova da área de um triângulo fundamental, contudo para que sua demonstração seja acessível a um aluno do Ensino Médio, evitaremos ao máximo o uso de vetores.

Apresentaremos e provaremos a Fórmula de Pick ³ que apareceu em um artigo publicado em Praga em 1899⁴. É uma maneira prática para o cálculo da área de polígonos, mas em alguns casos pode transformar esses problemas em uma simples contagem de pontos.

Acreditamos que isto pode despertar o interesse de alguns estudantes pelo assunto. A fórmula pode também ser explorada de várias formas e vários níveis de profundidade. Ao mesmo tempo, um exame mais atento revela sutilezas e conexões entre vários assuntos de interesse para o ensino de Matemática. Em particular, apresentaremos uma atividade que pode ser aplicada para o cálculo da área aproximada de qualquer região conhecendo apenas a escala utilizada.

2.1 Triângulo fundamental

Definição 2.1 *Um triângulo será denominado triângulo fundamental se, e somente se, apenas seus vértices são pontos do reticulado.*

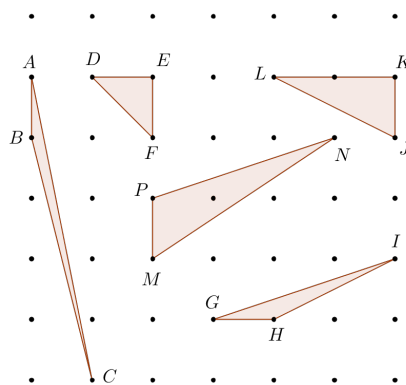


Figura 17: Os triângulos ABC, DEF e GHI são fundamentais. Os triângulos JKL e MNP não são fundamentais.

³Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859 e morreu no campo de concentração de Theresienstadt em 1942. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da Matemática.

⁴Geometrisches Zahlenlehre zur publicada em Praga em Sitzungber

Nosso próximo objetivo é provar que a área de qualquer triângulo fundamental é sempre $\frac{1}{2}$. Para isso, será útil o seguinte

Lema 2.2 *Dado um triângulo fundamental ABC , considere o paralelogramo $ABCD$, onde D é o simétrico do ponto A em relação ao ponto médio do lado \overline{BC} . Então o paralelogramo não contém nenhum outro ponto do reticulado, além de seus vértices.*

Demonstração: Considere a rotação de meia volta em torno do vértice B , seguida da translação segundo o segmento BC . Essa composição de movimentos rígidos compatíveis leva o triângulo ABC no triângulo BCD . Assim, os triângulos ABC e BCD são congruentes através de um movimento rígido compatível, logo o triângulo BCD também é necessariamente fundamental (caso existisse um ponto do reticulado interior ao triângulo BCD , existiria um ponto do reticulado correspondente a esse no interior do triângulo ABC), donde a tese.

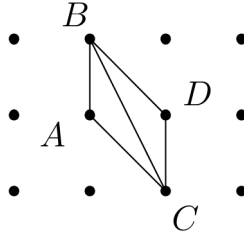


Figura 18: Paralelogramo $ABCD$.

□

Por simplicidade, no que se segue, diremos que o paralelogramo $ABCD$ construído conforme o enunciado do Lema 2.2 é o *paralelogramo associado ao triângulo ABC , acrescentando o vértice oposto a A* . Podemos agora demonstrar o seguinte

Teorema 2.3 *A área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo fundamental. A menos de uma translação compatível, podemos supor $A(0, 0)$. Além disso, a menos de reflexões e/ou rotações compatíveis, podemos assumir $B(m, n)$, com $m \geq 0$ e $n > 0$.

Consideremos inicialmente o caso $m = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir (a menos de uma reflexão vertical) que o terceiro vértice C possui abscissa positiva. Para que o triângulo ABC seja fundamental, devemos ter, por um lado, $n = 1$ (caso contrário, o lado AB passaria por outro ponto do reticulado). Por outro lado, C deverá estar na reta de equação $x = 1$. De fato, considere o paralelogramo $ABCD$ associado ao triângulo ABC , com o acréscimo do vértice oposto a A . O segmento vertical da reta $x = 1$ contido

no paralelogramo tem comprimento $1u$ (igual ao segmento \overline{AB}), logo possui ao menos um ponto do reticulado. Pelo Lema 2.2, tal paralelogramo é fundamental, logo a única possibilidade é que os extremos desse segmento sejam os pontos C e D .

Das observações acima, segue que a área do triângulo ABC será $\frac{1}{2}$, pois a base AB e a altura relativa medem $1u$.

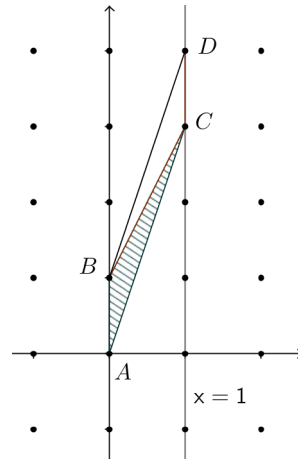


Figura 19: A área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}$.

Tomemos agora $m > 0$. Devemos ter m e n primos entre si, pois se existir $d > 1$ divisor comum de m e de n , o ponto $P(m/d, n/d)$ seria um ponto do reticulado interior ao segmento \overline{AB} , contrariando o fato de que ABC é fundamental (Figura 20).

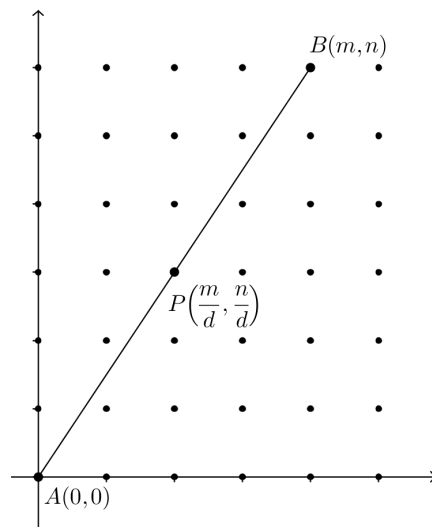


Figura 20: $P \in \overline{AB}$

Seja r_0 a reta suporte do segmento \overline{AB} e seja r a reta paralela a r_0 que passa pelo ponto C . A equação de r é $y = \frac{n}{m}x + p$, em que p é a ordenada do ponto P onde a reta intersecta o eixo vertical (podemos supor, sem perda de generalidade, que $p > 0$, pois, caso contrário, é fácil construir um triângulo congruente a ABC por um movimento rígido compatível, por exemplo, tomando o paralelogramo associado a ABC acrescentando o vértice oposto a C : o triângulo complementar de ABC nesse paralelogramo satisfaz a condição acima).

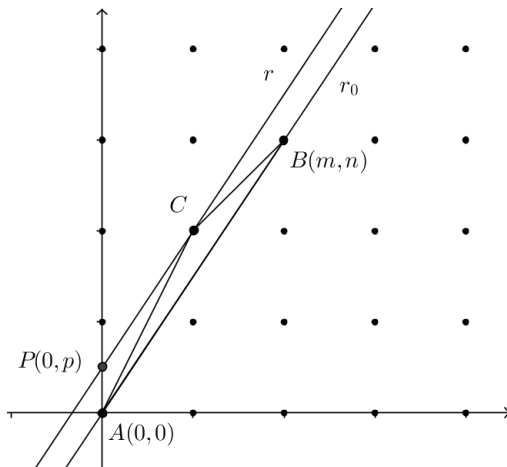


Figura 21: $r : y = \frac{n}{m}x + p$.

Assim, qualquer triângulo que tem base \overline{AB} e terceiro vértice pertencente à reta $y = \frac{n}{m}x + p$ tem a mesma área do triângulo ABC . Desse modo, a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ABP que é dada por: $\frac{pm}{2}$. Precisamos então mostrar que $pm = 1$, o que significaria que a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}$.

Notemos, inicialmente, que pm deve ser um inteiro positivo. De fato, como a reta r passa por pontos do reticulado (por exemplo, o próprio C), então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfazem a equação de r , e portanto $pm = ym - xn \in \mathbb{Z}$. A positividade segue da positividade de p e m .

Ainda, como m e n são primos entre si, então existem inteiros x e y tais que $my - nx = 1$. Assim, a reta s de equação $y = \frac{n}{m}x + \frac{1}{m}$ passa por pontos do reticulado. Observe que a reta s é paralela à reta r e que, sendo $0 < \frac{1}{m} \leq p$, s está contida na faixa determinada pelas retas r_0 e r e não coincide com r_0 .

Por fim, considere o paralelogramo $ABCD$ associado ao triângulo ABC , com o acréscimo do vértice D oposto a A . Pelo Lema 2.2, o interior desse paralelogramo não contém nenhum ponto do reticulado. O mesmo acontece, portanto, com todos os paralelogramos obtidos de $ABCD$ por uma translação segundo "múltiplos inteiros" de AB (isto é, segmentos com mesma direção de AB e cujo comprimento seja um múltiplo natural do comprimento de AB , em ambos os sentidos), uma vez que tais translações são todas compatíveis. Mas a imagem de todas essas translações é a faixa delimitada pelas retas r_0 e r .

Assim, o interior dessa faixa não contém nenhum ponto do reticulado, o que, juntamente com as considerações anteriores, implica que $s = r$. Portanto, $p = \frac{1}{m}$ e a área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}$. \square

2.2 Decomposição do polígono em triângulos fundamentais justapostos

Teorema 2.4 *Todo polígono do reticulado pode ser decomposto como união de triângulos fundamentais.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.11, todo polígono do reticulado pode ser decomposto como união de triângulos justapostos. Para cada um desses triângulos, analisemos:

Se o triângulo é fundamental, não há o que discutir. Se o triângulo não é fundamental, então ele contém pontos do reticulado (no interior ou sobre os lados).

Se existir algum ponto no interior, traçamos segmentos de reta com extremidades nesse ponto (interior) e nos vértices do triângulo e assim dividimos ele como união de três triângulos justapostos. Desse modo, o ponto interior se torna vértice de um novo triângulo fazendo com que a quantidade de pontos interiores diminua. Repetimos o processo até se esgotarem os pontos interiores.

Se existir pontos sobre o lado (que não sejam vértices), escolhemos um desses pontos e a partir dele traçamos segmentos de reta com outra extremidade no vértice oposto a esse lado. Desse modo, o ponto sobre o lado se torna vértice de um novo triângulo fazendo com que a quantidade de pontos sobre os lados diminua. Repetimos esse processo tantas vezes quantas sejam necessárias, até se esgotarem os pontos nos interiores dos lados.

Como todos os procedimentos acima foram feitos para todos os triângulos, o polígono original pode ser decomposto como união de triângulos justapostos. \square

2.3 Fórmula de Pick

Teorema 2.5 *Seja ρ um polígono do reticulado em que o número de pontos do reticulado sobre seus lados (incluindo os vértices) é B e o número de pontos no seu interior é I . A área A do polígono ρ é dada por:*

$$A(\rho) = \frac{B}{2} + I - 1$$

Demonstração: Seja ρ um polígono do reticulado e Q a quantidade de triângulos

fundamentais justapostos cuja união é ρ e cuja área é o produto de Q e da área de um triângulo fundamental ou seja, $Q \cdot \frac{1}{2}$.

Para provarmos o teorema de Pick, devemos mostrar que $Q = (B + 2I - 2)$ pois, $Q \cdot \frac{1}{2} = (B + 2I - 2) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow Q = (B + 2I - 2)$.

Vamos calcular, de dois modos, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais justapostos de ρ .

O primeiro modo é imediato, como Q é a quantidade de triângulos fundamentais justapostos, a soma dos seus ângulos internos será o produto de Q pela soma dos ângulos internos de um triângulo fundamental ou seja, $Q \cdot \pi$ rad.

O segundo modo consiste em calcular a soma dos ângulos internos em três parcelas:

A primeira parcela é a soma s_i dos ângulos cujos vértices são pontos no interior de ρ . Como cada um desses ângulos mede 2π e a quantidade de pontos interiores é I , $s_i = I \cdot 2\pi$.

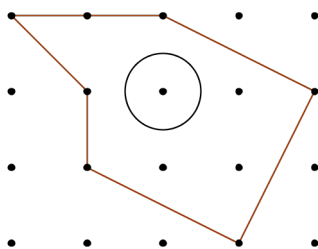


Figura 22: Ângulo com vértice em um ponto interior, sua medida é 2π

A segunda parcela é a soma s_v dos ângulos cujos vértices coincidem com os vértices de ρ . Como esses ângulos são os ângulos internos do polígono em questão, que possui v lados, s_v será a soma das medidas dos seus ângulos internos. Assim, $s_v = (v - 2) \cdot \pi$.

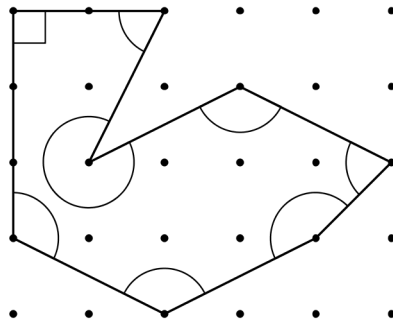


Figura 23: Ângulos com vértices coincidentes com os vértices do polígono.

A terceira parcela é a soma s_n dos ângulos cujos vértices estão sobre os lados de ρ

(mas não são vértices de ρ). Como cada um desses ângulos mede π e a quantidade de pontos sobre os lados que não coincidem com os vértices de ρ é n , $s_n = n \cdot \pi$.

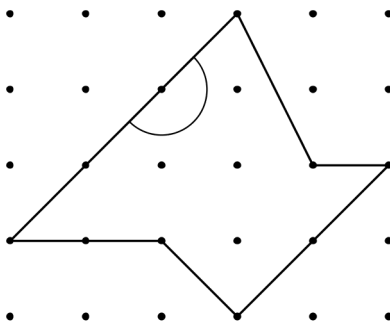


Figura 24: Ângulo com vértice sobre o lado do polígono, sua medida é π .

Desse modo,

$$\begin{cases} s_i = I \cdot 2\pi \\ s_v = (v - 2) \cdot \pi \\ s_n = n \cdot \pi \end{cases}$$

Somando membro a membro as equações:

$$s_i + s_v + s_n = I \cdot 2\pi + (v - 2) \cdot \pi + n \cdot \pi$$

$$s_i + s_v + s_n = (2 \cdot I + v - 2 + n) \pi$$

$$s_i + s_v + s_n = \left(\underbrace{n + v}_{B} + 2I - 2 \right) \pi$$

$$s_i + s_v + s_n = (B + 2I - 2) \pi$$

Igualando à soma calculada do primeiro modo com a do segundo modo:

$$Q\pi = (B + 2I - 2) \pi \Rightarrow Q = B + 2I - 2$$

Como a quantidade de triângulos fundamentais justapostos que compõem ρ é Q e como a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, a área $A(\rho)$ do polígono ρ será dada por:

$$A(\rho) = Q \cdot \frac{1}{2} = (B + 2I - 2) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A(\rho) = \frac{B}{2} + I - 1$$

□

3 Aplicações da Fórmula de Pick

3.1 Cálculo da área de uma região irregular

Uma interessante aplicação desse teorema se faz presente na engenharia florestal, onde a área de uma região com árvores distribuídas regularmente pode ser calculada com base no número e na distribuição dessas árvores por meio da Fórmula de Pick. Outra aplicação é o cálculo da área aproximada de uma região irregular. Primeiramente escolhemos a região da qual iremos determinar a área. Como por exemplo, a área da UFABC do campus de Santo André.



Figura 25: Aproximação da área da UFABC.

Acrescentando um reticulado de modo que a unidade tenha a mesma medida do segmento apresentado na escala do mapa e construindo um polígono, nesse reticulado, que seja a aproximação da área da UFABC, temos:

- I. Número de pontos internos: $I = 4$.
- II. Número de pontos sobre o bordo: $B = 8$.
- III. A área será: $A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{8}{2} + 4 - 1 = 7$.

Como a unidade apresentada na escala da figura é 100 m, a área aproximada da UFABC será:

$$7 \times 100^2 = 70\,000 \text{ m}^2$$

um valor próximo do valor real que é em torno de 74 mil m^2 .

Se for necessário aumentar a precisão do cálculo da área, basta tomar como unidade um segmento que seja divisor do segmento apresentado.

Na figura seguinte, a unidade será a metade da unidade apresentada.



Figura 26: Melhor aproximação da área da UFABC.

Sendo assim:

I. Número de pontos internos: $I = 23$.

II. Número de pontos sobre o bordo: $B = 13$.

III. A área será: $A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{13}{2} + 23 - 1 = 28,5$.

Como a unidade utilizada é a metade da apresentada, ou seja, 50 m, a área aproximada da UFABC será:

$$28,5 \times 50^2 = 71\,250 \text{ m}^2$$

3.2 Uma determinação do número π

Neste capítulo, apresentaremos uma aplicação da Fórmula de Pick para a determinação do número π .

Definição 3.1 *Uma circunferência C é uma circunferência do reticulado se, e somente se, seu centro é um ponto do reticulado e o quadrado do seu raio é um número inteiro estritamente positivo.*

Definição 3.2 *Um quadrado é denominado quadrado unitário se, e somente se, apenas seus vértices são pontos do reticulado.*

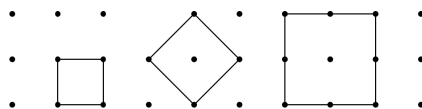


Figura 27: Somente o quadrado da esquerda é unitário.

Teorema 3.3 *Seja $S(n)$ a área do maior polígono do reticulado interior à circunferência do reticulado $C(\sqrt{n})$ de raio \sqrt{n} , então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = \pi$$

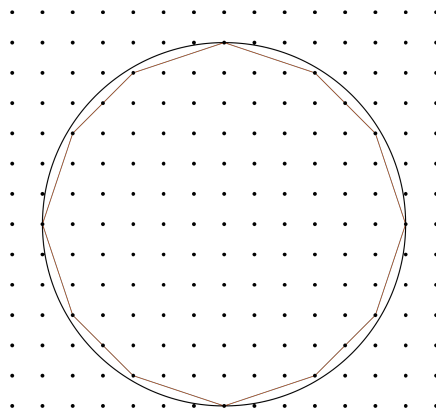


Figura 28: Maior polígono interior à circunferência.

Demonstração: O número $S(n)$ é igual a área do maior polígono do reticulado interior à circunferência do reticulado $C(\sqrt{n})$ de raio \sqrt{n} . A diferença entre $S(n)$ e a área πn do círculo associado à circunferência $C(\sqrt{n})$ é no máximo igual à área $A(n)$ dos quadrados unitários que são intersectados pela circunferência $C(\sqrt{n})$, assim:

$$|S(n) - \pi n| \leq A(n)$$

Segue que

$$\left| \frac{S(n)}{n} - \pi \right| \leq \frac{A(n)}{n}$$

Uma vez que a distância máxima entre dois pontos de um quadrado unitário é $\sqrt{2}$ todo quadrado intersectado pela circunferência está contido em uma coroa circular de área $R(n)$ dada por:

$$R(n) = \pi (\sqrt{n} + \sqrt{2})^2 - \pi (\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2n}\pi$$

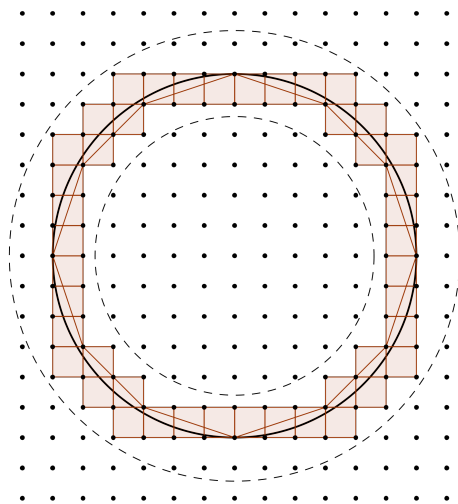


Figura 29: Quadrados intersectados pela circunferência que estão contidos na coroa circular.

Como $A(n) < R(n)$, temos

$$\left| \frac{S(n)}{n} - \pi \right| \leq \frac{A(n)}{n} < \frac{R(n)}{n} = \frac{4\sqrt{2n}\pi}{n} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{\sqrt{n}}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = \pi$$

□

Seguem alguns exemplos:

\sqrt{n}	$S(n)$	π
10	317	3,1700
20	1257	3,1425
30	2821	3,1344
100	31417	3,1417
200	125629	3,1407
300	282697	3,1411

3.3 O Teorema de Euler para polígonos

O Teorema de Euler para poliedros é muito conhecido; $V - A + F = 2$ em que V , A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do poliedro. Neste capítulo vamos apresentar e demonstrar o Teorema de Euler para polígonos aplicando a mesma ideia utilizada para provarmos a Fórmula de Pick: o argumento de somar as medidas dos ângulos internos dos triângulos.

Seja ρ um polígono simples decomposto em uma união de polígonos menores que chamaremos de *faces* em analogia com o caso de um poliedro. Cada lado de uma dessas faces será chamado *aresta*.

Definição 3.4 *Um polígono que pode ser decomposto como união de polígonos menores será denominado **poliedro plano** se, e somente se, duas faces quaisquer da decomposição satisfizerem a pelo menos uma das condições:*

- I. são disjuntas;*
- II. têm um vértice em comum*
- III. têm uma ou mais arestas em comum, isto é, se a interseção entre essas faces é uma aresta, esta deve ser aresta das duas faces.*

Teorema 3.5 *Um poliedro plano com F faces, A arestas e V vértices satisfaz a condição:*

$$V - A + F = 1$$

Demonstração: Seja ρ um poliedro plano. Se decomusermos cada uma das faces de ρ como união de triângulos, sem acrescentar novos vértices, na forma do Teorema 1.11, os números A e F se alterarão, V permanecerá com o mesmo valor. Assim, quando se acrescenta uma nova aresta, cada um dos números A e F aumenta de uma unidade, logo esses aumentos se cancelam em $V - A + F$. Consequentemente, para efeito do cálculo da

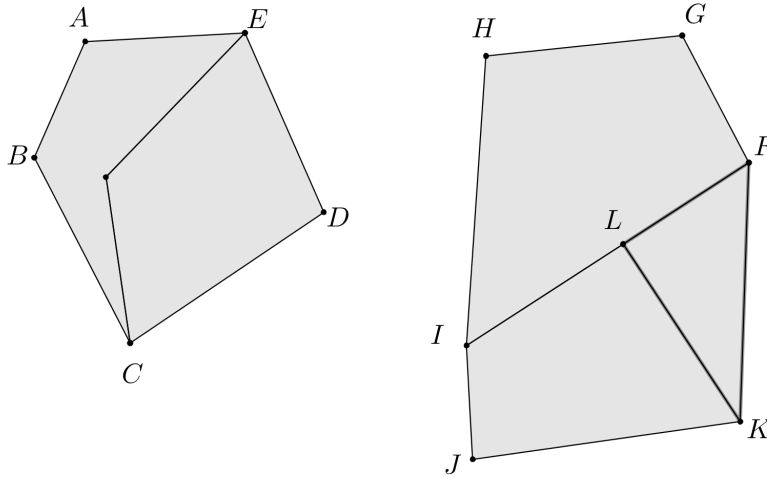


Figura 30: Essa decomposição do polígono ABCDE o torna poliedro plano. Essa decomposição do polígono FGHIJKL não o torna poliedro plano, pois na sua decomposição em polígonos menores, a interseção entre a face pentagonal e a face quadrangular é apenas aresta da face pentagonal.

expressão $V - A + F$, não há perda de generalidade em supor que as faces de ρ sejam triangulares, o que admitiremos a partir de agora.

Escrevamos $V = V_i + V_b$, em que V_i é o número de vértices interiores e V_b o número de vértices sobre o bordo de ρ .

Calculando, de dois modos distintos, a soma dos ângulos internos de todas as faces triangulares de ρ obtemos:

Primeiro modo: como a soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos F triângulos é π , a soma dos ângulos internos de todos esses triângulos é dada por

$$F \cdot \pi$$

Segundo modo: V_b é a soma entre o número de vértices que coincidem com os vértices de ρ e o número de vértices sobre os lados de ρ . A soma das medidas de todos os ângulos com vértices nesses pontos é $(V_b - 2) \cdot \pi$, já que uma parcela desses ângulos são internos a ρ e a outra parcela são ângulos rasos.

Os vértices dos triângulos justapostos coincidem com os V_b vértices de ρ , a soma das medidas desses ângulos internos dos triângulos justapostos nesses vértices é a soma das medidas dos ângulos internos de ρ que é dada por $(V_b - 2) \cdot \pi$. Como cada um dos ângulos com vértices nos V_i pontos interiores medem 2π , a soma das medidas desses ângulos é dada por $V_i \cdot 2\pi$. Assim:

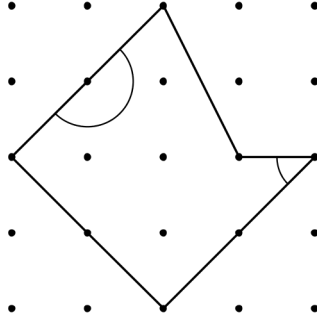


Figura 31: Ângulo com vértice sobre o lado (ângulo raso) e ângulo com vértice coincidente com o vértice do polígono.

$$(V_b - 2) \cdot \pi + V_i \cdot 2\pi \Rightarrow (V_b + 2V_i - 2) \pi$$

Igualando a soma do primeiro modo com a do segundo modo:

$$F \cdot \pi = (V_b + 2V_i - 2) \pi$$

$$F = V_b + 2V_i - 2$$

E como $V = V_i + V_b$, temos:

$$F = V_b + 2V_i - 2 = V_b + 2(V - V_b) - 2$$

$$F = 2V - V_b - 2$$

Cada face de ρ tem 3 arestas, cada aresta interior é lado de duas faces e cada aresta do bordo é lado de uma face. Como o número de arestas A é igual ao número de vértices do bordo V_b , temos:

$$3F = 2A - V_b$$

Subtraindo membro a membro as igualdades $3F = 2A - V_b$ e $F = 2V - V_b - 2$, obtemos:

$$\begin{cases} 3F = 2A - V_b \\ F = 2V - V_b - 2 \end{cases} \Rightarrow 2F = 2A - 2V + 2 \Rightarrow V - A + F = 1$$

□

3.4 A Fórmula de Pick para polígonos com "buracos"

A área de um polígono simples ou não com m buracos é dada por:

$$A(\rho) = \alpha + \frac{\beta}{2} + m - 1$$

em que α é o número de pontos interiores e β é o número de pontos sobre o bordo do polígono.

Demonstração: Seja ρ um polígono com B pontos sobre o bordo e I pontos interiores. Se ρ possui m buracos e, cada um desses buracos, possuem b_n pontos sobre o bordo e i_n pontos interiores, com $0 \leq n \leq m$. Utilizando a Fórmula de Pick, área de ρ será dada por:

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{B}{2} + I - 1 - \left(\frac{b_1}{2} + i_1 - 1\right) - \left(\frac{b_2}{2} + i_2 - 1\right) - \dots - \left(\frac{b_m}{2} + i_m - 1\right) = \\ &= \frac{B}{2} - \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_m}{2}\right) + I - (i_1 + i_2 + \dots + i_m) - 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{m \text{ parcelas}} = \\ &= \frac{B}{2} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_m}{2}\right) - (b_1 + b_2 + \dots + b_m) + I - (i_1 + i_2 + \dots + i_m) - 1 + m = \\ &= \underbrace{\left(\frac{B + b_1 + b_2 + \dots + b_m}{2}\right)}_{\substack{\text{metade do quantidade de pontos} \\ \text{sobre o bordo}}} + \underbrace{I - (i_1 + i_2 + \dots + i_m) - (b_1 + b_2 + \dots + b_m)}_{\text{quantidade de pontos interiores}} + m - 1 = \\ &= \frac{\beta}{2} + \alpha + m - 1 \end{aligned}$$

4 Atividades

4.1 Exercícios para aplicação da Fórmula de Pick.

Público alvo: alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: determinar a área de uma região irregular.

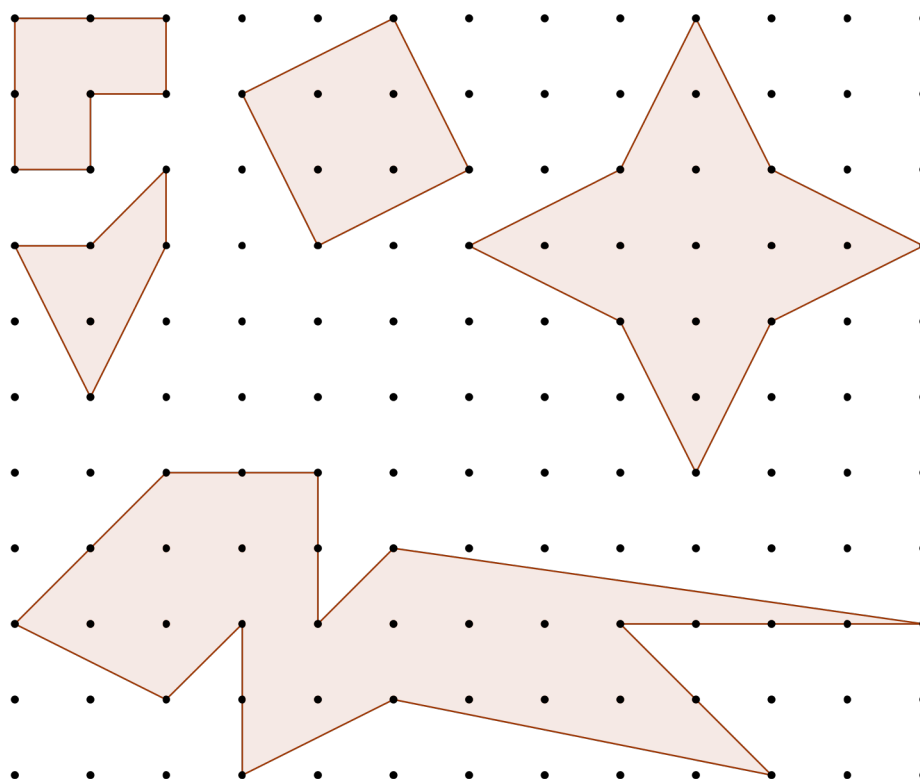
Pré-requisitos: operar com número racionais.

Material de apoio: nenhum em especial.

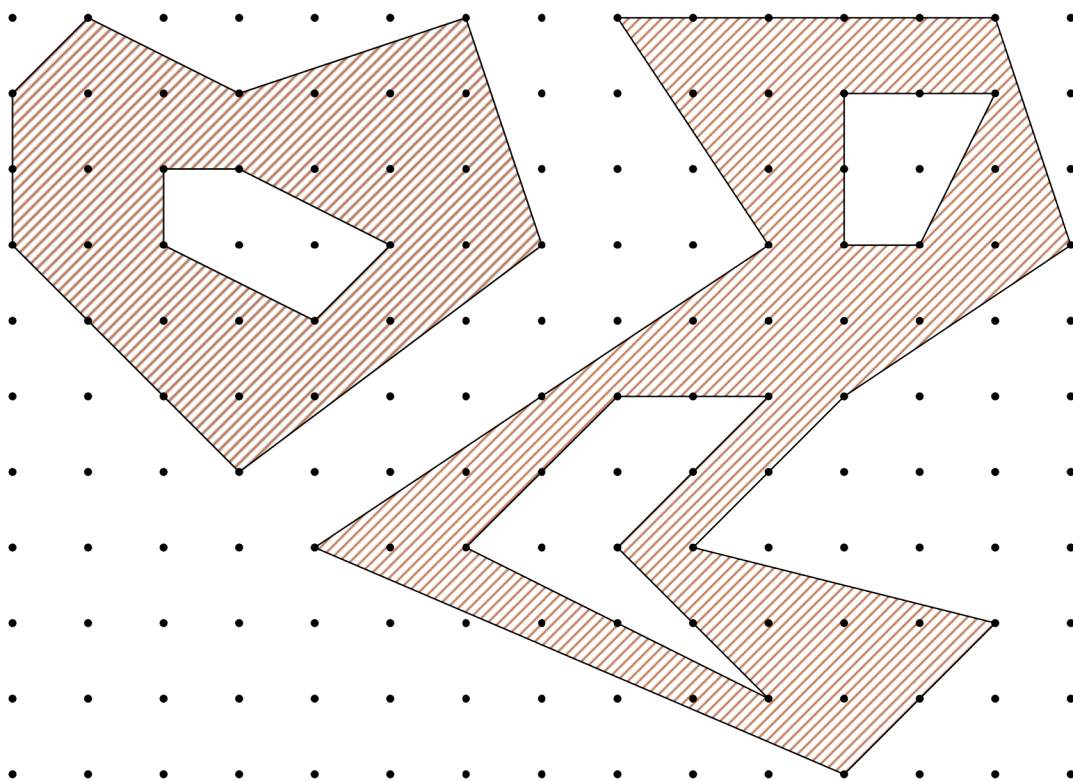
Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos: Imprimir as figuras a seguir e entregar para os alunos.

1. Utilizando a Fórmula de Pick, determine as áreas dos polígonos destacados.



2. Utilizando a Fórmula de Pick, determine a área da região hachurada.



4.2 Cálculo da área da palma da mão pela contagem pontos.

Público alvo: alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II.

Objetivo: determinar a área de uma região irregular.

Pré-requisitos: operar com número racionais.

Material de apoio: régua e papel transparente com o reticulado impresso.

Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos:

Peça que os alunos contornem a palma da mão com lápis em um papel. Em seguida, peça para eles fixarem, na folha onde a palma foi contornada, o papel transparente com o reticulado já impresso. Cada quadrado deve ter 1 cm de lado. Peça para eles construírem polígonos com vértices nos pontos do reticulado que seja aproximadamente a região da palma da mão. Peça para eles contarem os pontos interiores e os pontos sobre o bordo e, utilizando a Fórmula de Pick, peça para calcular a área da sua palma da mão.

4.3 Determinar uma estimativa da quantidade de pessoas presentes em uma passeata.

Público alvo: alunos do Ensino Médio.

Objetivo: estimar a quantidade de pessoas numa passeata.

Pré-requisitos: nenhum.

Material de apoio: régua, fotos aéreas da passeata e papéis transparentes com reticulados, de diferentes densidades, impressos.

Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos:

Peça para os alunos fixarem, na foto aérea da passeata, o papel transparente com o reticulado impresso. Peça para eles escolherem o melhor posicionamento do reticulado, de modo a melhorar a aproximação da região da qual se queira determinar a área. Peça para escolherem um quadrado unitário da malha e contarem o número de pessoas que estão dentro dele, digamos que seja q . Peça para eles construírem polígonos do reticulado que seja aproximadamente a região ocupada pela multidão; contarem os pontos interiores e os pontos sobre o bordo e , utilizando a Fórmula de Pick, calcular a área A dessa região. Assim, para termos uma estimativa da quantidade de pessoas basta multiplicar a área A pela quantidade q por quadrado unitário.

Peça agora que esses alunos repitam o processo com o papel transparente que tem impresso o reticulado com densidades maior.

Ao final peça para eles:

- i) compararem os resultados obtidos com os reticulados de densidades diferentes;
- ii) chegarem a alguma conclusão.

4.4 Uma determinação da Fórmula de Pick

Público alvo: alunos do Ensino Médio.

Objetivo: determinar a Fórmula de Pick.

Pré-requisitos: sistema lineares.

Material de apoio: régua.

Tempo previsto: 1 aula.

Procedimentos:

Primeiramente admitiremos que a área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$.

Peça para os alunos construírem uma malha quadriculada e destacarem os pontos de

interseção. Esses pontos serão os pontos do reticulado. Em seguida, peça para considerarem algumas figuras simples e diferentes de modo que saibamos previamente o valor da sua área.

Por exemplo:

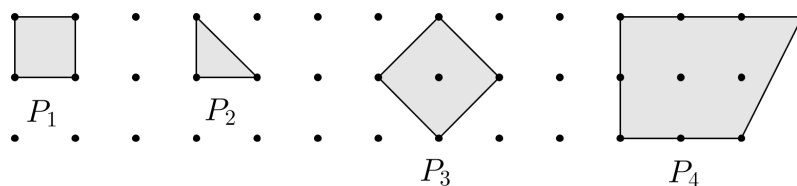


Figura 32: As áreas de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são, respectivamente, 1 , $\frac{1}{2}$, 2 e 5 .

Inicialmente, peça para eles suporem que a solução do problema é uma função polinomial do 1º grau com uma variável. Ela é expressa por $A(P) = ax + b$, com a e b constantes reais e a não nulo, que varia de acordo com o número x de pontos no interior do polígono P . Essa hipótese será facilmente descartada pelos polígonos P_1 e P_2 .

Peça, agora, para eles pensarem em uma outra hipótese: a área deve estar relacionada ao número x de pontos interiores ao polígono e ao número y de pontos sobre o bordo do mesmo. Assim, a função será polinomial do 1º grau com duas variáveis que é expressa por $A(P) = ax + by + c$ com a , b e c constantes reais e a e b não nulos. Peça para eles aplicarem esse modelo nos polígonos, no nosso exemplo, em P_1 , P_3 e P_4 . Desse modo:

$$\begin{cases} A(P_1) = a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 1 \\ A(P_3) = a \cdot 1 + b \cdot 4 + c = 2 \\ A(P_4) = a \cdot 2 + b \cdot 8 + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + c = 1 \\ a + 4b + c = 2 \\ 2a + 8b + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Portanto,

$$A(P) = x + \frac{1}{2}y - 1$$

Agora eles precisam verificar se essa relação funcionará sempre.

Considere dois polígonos do reticulado F_1 e F_2 justapostos. Sejam x_1 e x_2 , respectivamente, o número de pontos no interior das figuras F_1 e F_2 e sejam y_1 e y_2 , respectivamente, o número de pontos sobre os bordos de F_1 e F_2 . Suponha que essas figuras têm em comum apenas pontos da borda, e seja n o número de pontos do reticulado, comum a ambas. Seja $A(F_1)$ e $A(F_2)$, respectivamente, as áreas das figuras F_1 e F_2 . Aplicando a Fórmula de Pick temos:

$$\begin{aligned} A(F_1) + A(F_2) &= \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}y_1 - 1\right) + \left(x_2 + \frac{1}{2}y_2 - 1\right) = \\ &= x_1 + x_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 2 = \\ &= x_1 + x_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 2 + n - n = \\ &= (x_1 + x_2 + n - 2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 2n + 2) - 1 \end{aligned}$$

Observe que $(x_1 + x_2 + n - 2)$ é o número de pontos interiores da união entre F_1 e F_2 e $(y_1 + y_2 - 2n + 2)$ é o número de pontos sobre o bordo da união de F_1 e F_2 . Assim, como a Fórmula de Pick vale para duas figuras ela vale também para a junção dessas figuras.

Referências

- [1] SALLY, JUDITH D.. *Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems*. Editora American Mathematical Society, 2008.
- [2] LIMA, ELON LAGES. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, RJ: Editora da SBM, 2004.
- [3] VERRI, ANDRÉ FELIPE GOULART. *Uma apresentação didática do Teorema de Pick*.
- [4] HIRSCH, CHRISTIAN R. *The Mathematics Teacher Vol. 67, No. 5 (MAY 1974), pp. 431-434, 473*. National Council of Teachers of Mathematics. <http://www.jstor.org/stable/27959724>