Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Alison da Silva Xavier

As Geometrias na Astronomia

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2024

ALISON DA SILVA XAVIER

AS GEOMETRIAS NA ASTRONOMIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T
X3g
2024

Xavier, Alison da Silva, 1975-
As geometrias na astronomia / Alison da Silva Xavier. – Florestal, MG, 2024.
1 dissertação eletrônica (73 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndice.
Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2024.
Referências bibliográficas: f. 65-66.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2024.017
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria . 2. Astronomia antiga . 3. Relatividade geral (Física). I. Rocha, Alexandre Alvarenga, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23. ed. 516

ALISON DA SILVA XAVIER

AS GEOMETRIAS NA ASTRONOMIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 3 de outubro de 2024.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
ALISON DA SILVA XAVIER
Data: 07/10/2024 12:23:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Alison da Silva Xavier
Autor

Documento assinado digitalmente
ALEXANDRE ALVARENGA ROCHA
Data: 08/10/2024 09:03:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Alexandre Alvarenga Rocha
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai, cuja memória eterna me inspira e guia. Seu legado de resiliência e sabedoria continua a ser uma luz em minha jornada. Embora ele não esteja mais fisicamente presente, seu espírito vive em cada página desta obra.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar o meu caminho e fortalecer a minha fé, sendo a fonte inesgotável de inspiração e esperança em todos os momentos desta jornada.

À minha família, que forneceu o suporte emocional e a compreensão necessários durante os momentos mais desafiadores deste percurso acadêmico.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Alexandre Alvarenga Rocha, cuja sabedoria, paciência e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento e conclusão desta pesquisa. Sua orientação foi uma luz que guiou este trabalho desde o início.

Também expresso minha gratidão ao coordenador do curso, Luis Felipe, cuja liderança e sabedoria foram faróis de orientação em minha trajetória acadêmica. Agradeço também aos professores que compartilharam seu conhecimento e me inspiraram a buscar sempre mais. Cada um de vocês contribuiu significativamente para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos meus colegas e amigos, que ofereceram insights valiosos. A troca de ideias e experiências com vocês enriqueceu não apenas esta dissertação, mas também a minha vida.

Resumo

XAVIER, Alison da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro 2024. **As Geometrias na Astronomia**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

O presente trabalho aborda a importância da matemática, mais especificamente das geometrias no desenvolvimento da astronomia. A geometria desempenha um papel crucial na astronomia, permitindo que os astrônomos compreendam e descrevam o universo de maneira precisa. Desde a Antiguidade, civilizações como os gregos e babilônios utilizaram princípios geométricos para estudar os corpos celestes. Na Astronomia moderna podemos citar o Heliocentrismo proposto por Nicolau Copérnico (1473-1543) e a Gravitação Universal de Isaac Newton (1643-1727). Já no século vinte, Albert Einstein (1879-1955) publica em 1915 a Teoria da Relatividade Geral (nova teoria da gravitação) que nos fornece uma nova concepção da gravidade como geometria do universo possibilitando fazer previsões sobre o comportamento do universo. Com o avanço da tecnologia, a geometria continua a ser essencial para calcular distâncias, tamanhos, órbitas e movimentos dos planetas e estrelas, possibilitando previsões precisas de fenômenos astronômicos.

Além disso, a geometria é vital para o desenvolvimento de instrumentos astronômicos, como telescópios e satélites, que dependem de cálculos geométricos para funcionar corretamente. Através da geometria, os astrônomos podem criar modelos do universo, ajudando a visualizar e testar teorias sobre a formação e evolução dos corpos celestes. Desta forma se faz necessário um resgate histórico mostrando a importância da geometria no desenvolvimento da astronomia.

Palavras-chave: Geometria; Astronomia antiga; Astronomia moderna; Relatividade Geral.

Abstract

XAVIER, Alison da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2024.
Geometries in Astronomy. Advisor: Alexandre Alvarenga Rocha.

This work addresses the importance of mathematics, more specifically of geometries in the development of astronomy. Geometry plays a crucial role in astronomy, allowing astronomers to understand and describe the universe accurately. Since Antiquity, civilizations such as the Greeks and Babylonians have used geometric principles to study celestial bodies. In modern Astronomy we can mention the Heliocentrism proposed by Nicolaus Copernicus (1473-1543) and the Universal Gravitation of Isaac Newton (1643-1727). Already in the twentieth century, Albert Einstein (1879-1955) published in 1915 the Theory of General Relativity (new theory of gravitation) that provides us with a new conception of gravity as geometry of the universe making it possible to make predictions about the behavior of the universe. With the advancement of technology, geometry remains essential to calculate distances, sizes, orbits, and movements of planets and stars, enabling accurate predictions of astronomical phenomena.

In addition, geometry is vital for the development of astronomical instruments, such as telescopes and satellites, which depend on geometric calculations to function properly. Through geometry, astronomers can create models of the universe, helping to visualize and test theories about the formation and evolution of celestial bodies. In this way, a historical rescue is necessary showing the importance of geometry in the development of astronomy.

Keywords: Astronomy Ancient; Astronomy Modern; Geometry; General Relativity.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Desde os tempos antigos, a humanidade olha para o céu em busca de respostas e compreensão da sua existência. A astronomia, uma das ciências mais antigas, tem sido um campo fértil para o desenvolvimento e aplicação de diferentes geometrias. Desde a Grécia Antiga até os avanços da relatividade geral, a geometria tem desempenhado um papel crucial na compreensão do cosmos.

A maior parte das grandes civilizações antigas tais como os babilônios, chineses, egípcios e gregos usava seu conhecimento em matemática para prever fenômenos astronômicos e explicar o universo. Estes povos observavam os céus e os astros e usavam a geometria para calcular as distâncias, os tamanhos e os períodos de revolução dos corpos celestes. Já os gregos usaram a geometria para medir o diâmetro da Terra e a distância do Sol e da Lua ‘a Terra através do matemático e astrônomo Eratóstenes de Cirene (276 a.C.–194 a.C). Ptolomeu, outro astrônomo grego (85-165), em seu livro “Almagesto” criou um modelo geocêntrico do sistema solar.

A geometria foi fundamental para o desenvolvimento da astronomia moderna iniciada no século XVI através do polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) quando o mesmo propôs em 1543 em seu livro De revolutionibus orbium coelestium (“Da revolução de esferas celestes”) o modelo heliocêntrico que afirmava que o Sol está fixo no centro do sistema solar e os planetas giram em torno dele em ´orbitas circulares. A lua, por sua vez, girava em torno da terra, que se movia em torno de seu próprio eixo. Esta teoria foi corroborada e aprimorada por outros cientistas, tais como Kepler, Galileu e Newton. Galileu Galilei matemático e físico italiano (1564-1642) através de suas observações, em 1610, conseguiu enxergar quatro satélites em júpiter dando força ao Heliocentrismo. O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) descreveu três leis explicando o movimento dos planetas e suas ´orbitas elípticas. René Descartes (1596-1650) em 1637 publica uma de suas grandes obras “Discurso sobre o método” na qual em um dos três apêndices uniu a geometria com a álgebra criando a Geometria Analítica, o que possibilitou o surgimento do cálculo (Diferencial e integral). Graças a Descartes, os conceitos geométricos tais como coordenadas e gráficos, vetores e tensores, ângulos e curvatura possibilitaram dentre outras coisas uma ideia mais abstrata e revolucionária: a ideia do espaço curvo. O inglês Isaac Newton (1643-1727) em sua obra ”Princípia” formulou as leis do movimento e da gravitação universal.

O físico alemão Albert Einstein (1879-1955) publica em 1915 a Teoria da Relatividade Geral (nova teoria da gravitação) que nos fornece uma nova concepção da gravidade como geometria do universo possibilitando fazer previsões sobre o comportamento do universo transformando a cosmologia em uma ciência.

2
A Geometria e a Astronomia na Grécia Antiga

A Grécia Antiga é amplamente reconhecida como o berço da ciência e da filosofia ocidental, e a astronomia não foi exceção. Durante este período, matemáticos gregos fizeram avanços significativos que moldaram a compreensão do cosmos. A interseção entre matemática e astronomia foi crucial, pois permitiu que os gregos desenvolvessem modelos geométricos e aritméticos para descrever o universo. A seguir falaremos de alguns dos principais matemáticos, filósofos e astronômicos e suas contribuições geométricas na astronomia.

2.1 Os matemáticos / astrônomos e suas contribuições

2.1.1 Tales de Mileto (624 - 546 a.C.)

Comerciante grego, filósofo, matemático e astrônomo foi quem preparou o cenário para as grandes descobertas dos pitagóricos e para os Elementos de Euclides. Segundo (MLODINOW, 2004), nas suas viagens à Babilônia, ele estudou a ciência e a matemática da astronomia e ganhou fama local ao trazer este conhecimento para a Grécia. Um dos feitos de Tales foi ter predito o eclipe solar no dia 28 de maio de 585 a.C. Heródoto o historiador, relata que este eclipse aconteceu durante uma batalha entre os lídios e os persas, interrompendo a luta. Tales passou longos períodos de tempo no Egito. Foi capaz de deduzir técnicas geométricas e deixou os egípcios impressionados quando lhes mostrou como medir a altura da pirâmide utilizando um conhecimento das propriedades dos triângulos semelhantes. Tales utilizou uma técnica semelhante para medir a distância de um navio no mar. Deu os primeiros passos para a sistematização da geometria e acreditava que a terra era um disco plano com vastas extensões de água.

2.1.2 Pitágoras de Samos (572 - 497 a.C.)

Acreditava que os corpos celestes eram esféricos, sendo o primeiro a chamar o céu de cosmos. Pitágoras e seus seguidores descobriram muitos padrões numéricos, os quais eles achavam ser a origem de muitas das coisas que a matemática tinha de intrigante.

"A própria ideia de que o Universo é um "cosmos", ou um todo harmoniosamente ordenado, parece ser uma contribuição pitagórica [...] uma ideia que na época tinha pouca base de observação direta, mas que foi enormemente frutífera no desenvolvimento da astronomia" (BOYER, p.60, 2012).

2.1.3 Aristóteles (384-322 a.C.)

Discípulo de Platão, explicou que as fases da Lua estão relacionadas com a parte da face da Lua iluminada pelo Sol, ou seja, voltada para a Terra. Explicou, que um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles também argumentou que a Terra é esférica, uma vez que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. .

Postulou a existência do éter como quinto elemento (além de terra, ar, água e fogo). (Astronomia Antiga. Os astrônomos da Grécia antiga, 2023. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acesso em 15/07/2023) .

2.1.4 Heraclides (388-315 a.C.)

Propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol, e a existência de epiciclos. (Astronomia Antiga. Os astrônomos da Grécia antiga, 2023. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acesso em 15/07/2023).

2.1.5 Euclides (323-283 a.C)

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Segundo (MLODINOW, 2004), sabe-se que ele abriu uma escola em Alexandria, teve alunos brilhantes e escreveu pelo menos dois livros. Um deles, sobre cônicas formou mais tarde a base da importante obra de Apolônio, que fez progredirem substancialmente as ciências da navegação e a astronomia. A sua obra mais famosa, Os Elementos, é um dos "livros" mais lidos de todos os tempos. Na verdade não se trata de um livro, mas uma série de 13 rolos de pergaminhos. Nenhum dos originais sobreviveu, mas foram transmitidos mais tarde através de uma série de cópias posteriores.

"Euclides não reivindicou ter sido original em relação a qualquer dos teoremas contidos nesta obra monumental. Ele viu seu papel como o de organizador e sistematizador da geometria conforme compreendida pelos gregos. Ele foi o arquiteto do primeiro relato abrangente sobre a natureza do espaço bidimensional através do raciocínio puro, sem nenhuma referência ao mundo físico" (MLODINOW, p.40, 2004).

Um método lógico inovador, tornando explícitos os termos, formulando definições precisas e assim garantindo um entendimento das palavras e símbolos. Além disso, apresentando de forma clara os axiomas ou postulados de modo que não possam ser usadas pressuposições não declaradas. Finalmente, deduzir as consequências lógicas do sistema empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e teoremas previamente demonstrados.

"O objetivo de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas baseadas na intuição, em conjecturas e na inexatidão. Ele formulou 23 definições, cinco postulados geométricos e cinco postulados adicionais que chamou de "noções comuns". A partir dessa base ele demonstrou 465 teoremas (essencialmente todo conhecimento geométrico de seu tempo)" (MLODINOW, p.43, 2004).

O conteúdo geométrico do fundamento da geometria de Euclides reside nos seus cinco postulados. Os quatro primeiros são simples. Em termos modernos são eles:

1. Dados quaisquer dois pontos, pode ser traçada uma linha tendo estes pontos como suas extremidades.

2. Qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção.

3. Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto no centro.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

Já o quinto postulado, denominado de postulado das paralelas, não parece tão intuitivo ou claro como os demais, tanto que o próprio Euclides evitava de usá-lo. Matemáticos posteriores sentiam que não era suficientemente simples para um postulado e que o mesmo deveria ser demonstrável como um teorema. Eis uma das várias formulações do quinto postulado:

Dada uma linha e um ponto fora dela, há exatamente uma outra reta (no mesmo plano) que passa pelo ponto e é paralela à linha dada.

Veremos mais adiante que o postulado das paralelas poderia ser violado de duas maneiras: poderia não existir retas paralelas, ou poderia existir mais do que uma reta paralela passando por algum ponto externo.

Figura 2.1: Imagem artística de Euclides

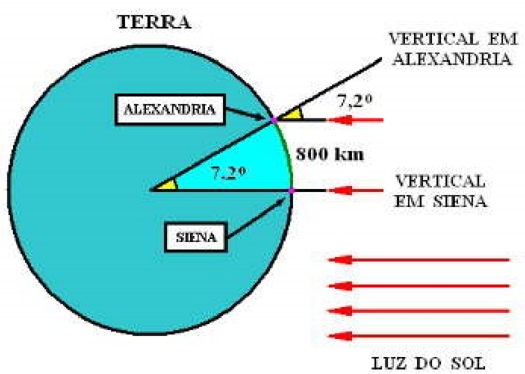
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides

2.1.6 Eratóstenes de Cirena (276-194 a.C.)

O bibliotecário principal de Alexandria (antigo Egito), tornou-se a primeira pessoa na história a medir a circunferência da Terra. Um feito comparável nos dias atuais seria revelar pela primeira vez que o universo não termina nos limites longínquos do nosso sistema solar. “Como Einstein, Eratóstenes teve sucesso utilizando a Geometria” (MLODINOW, p.51, 2004).

(MLODINOW, 2004) ainda destaca que Eratóstenes percebeu que ao meio-dia na cidade de Siena, durante o solstício de verão, uma vara cravada verticalmente no chão não projetava sombra. Para Eratóstenes, isso significava que uma vara fincada verticalmente no solo era paralela aos raios do Sol. Imaginando a Terra como uma circunferência, uma reta traçada a partir do seu centro passando por um ponto na circunferência representando Siena e prolongada para fora no espaço será paralela às outras linhas representando os raios solares. Agora, mova-se ao longo da circunferência (superfície da Terra) para longe de Siena em direção de Alexandria. Desenhe novamente uma reta a partir do centro da Terra até o ponto que representa esta cidade. Esta linha não é paralela aos raios solares. Ele os intercepta formando um ângulo e com isso tem-se a sombra. Utilizando o comprimento da sombra juntamente com um teorema presente no livro “Os elementos de Euclides” (uma linha cruzando duas linhas paralelas) Eratóstenes conseguiu calcular a parte da circunferência da Terra representada pelo arco ao longo da Terra, de Siena a Alexandria. Ele descobriu que isso valia 1/50 da circunferência da Terra. Eratóstenes atribuiu a um homem cujo nome não sabemos a “missão” de andar entre as duas cidades medindo a distância cujo valor relatado por esse homem foi de 800 quilômetros. Multiplicando esse valor por 50, Eratóstenes determinou que a circunferência tinha cerca de 40 mil quilômetros, o que foi um valor notável (erro em torno de 4%) digno de prêmio Nobel.

Figura 2.2: Eratóstenes medindo o tamanho da Terra



Fonte: https://www.silvestre.eng.br/astronomia/artigos/asdi0108/

2.1.7 Aristarco de Samos (310-230 a.C.)

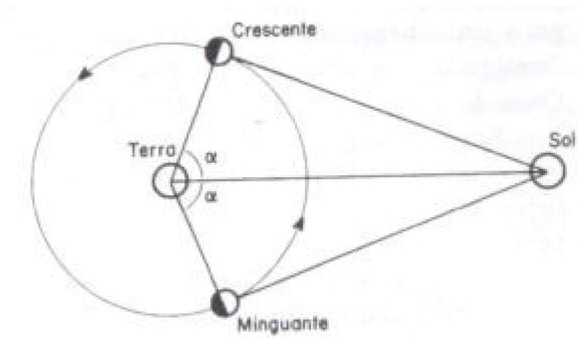
Um astrônomo trabalhando em Alexandria, calculou com uma aproximação notável, o tamanho da Lua e sua distância da Terra.

Vejamos o cálculo de Aristarco para comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Há duas posições da Lua em sua órbita, o "quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Fig. 2.3).

(ÁVILA, 2004), destaca que nesta situação, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Aristarco teria medido esse ângulo, encontrando para ele o valor de 87°. Daí basta construir um triângulo retângulo com esses ângulos (90°, 87° e 3°) e verificar o valor da razão TS/TL, que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol seria cerca de vinte vezes a distância da Terra à Lua.

Figura 2.3: Representação Terra , Lua e Sol .



ÁVILA, GERALDO. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga, 2004.

Voltemos a considerar o problema de medir o ângulo α (Fig. 2.3). O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante a crescente durava 14,25 dias, um dia menos que a passagem de crescente a minguante. Utilizando uma proporção podemos escrever

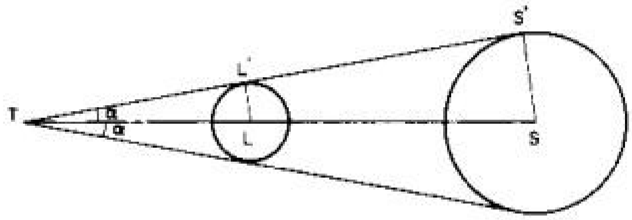
$$\frac{360°}{29{,}5} = \frac{2\alpha}{14{,}25},$$

segue-se que $\alpha = 86{,}95°$, portanto, $\frac{TS}{TL} = \sec\alpha = \sec 86{,}95° \cong 18{,}8$. Logo $TS = 18{,}8TL$.

Este valor encontrado por Aristarco está muito longe do valor correto, pois sabemos hoje que a distância da Terra ao Sol é a cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Entretanto, o ângulo α obtido está próximo de 90°, ou seja, os raios solares que se dirigem à Terra e à Lua são praticamente paralelos.

De acordo com (ÁVILA, 2004), Aristarco observou ainda que o Sol e a Lua têm o mesmo tamanho angular, ou seja, o ângulo α sob o qual um observador terrestre vê o Sol é o mesmo sob o qual ele vê a Lua (Fig. 2.4). Esse fato, aliás, é comprovado pela observação de um eclipse total do Sol (quando ocorre tal eclipse, o disco lunar coincide com o disco solar, encobrindo-o por inteiro.)

Figura 2.4: Representação da Terra, Lua e Sol.



ÁVILA, GERALDO. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga, 2004.

$$\frac{TS}{TL} \cong 20,$$

de sorte que $SS' \cong 20LL'$, segundo Aristarco, ou seja, o raio do Sol, é aproximadamente a vinte vezes o raio da Lua.

Sejam $D_S = TS$ (Fig. 2.4) a distância da Terra ao Sol, $D_L = TL$ a distância da Terra à Lua, $R_S = SS'$ o raio do Sol e $R_L = LL'$ o raio da Lua. Então:

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong \operatorname{tg} \alpha, \qquad \frac{D_S}{D_L} = b,$$

onde, para Aristarco, aproximadamente, $a = 1$ e $b = 20$, quando, na realidade, $a = 0{,}25$ e $b = 400$.

(ÁVILA, 2004) ressalta que Aristarco calculou as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua ao raio da Terra, observando o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da Terra (Fig.2.5). Pelo tempo gasto nesse fenômeno, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, era 8/3 do diâmetro da Lua.

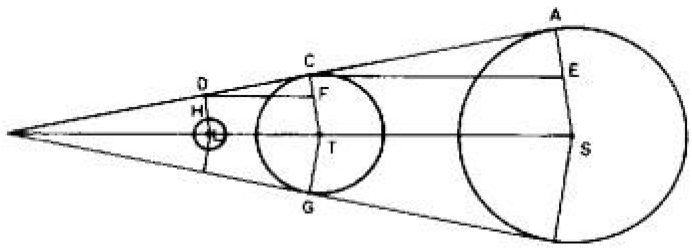
Na (Fig. 2.6.) L, T, S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra da altura da Lua, de sorte que $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

Figura 2.5: Alinhamento Terra, Sol e Lua

ÁVILA, GERALDO. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga, 2004.

Figura 2.6: Alinhamento Terra, Sol e Lua



ÁVILA, GERALDO. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga, 2004.

Mas

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3; DF = D_L;$$
$$AE = AS - SE = R_5 - R_T; CE = D_5.$$

Substituindo estes valores na igualdade anterior,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_s = bD_L, R_s = \alpha D_5 = \alpha b D_L, R_L = \alpha d_L$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}.$$

Daqui segue-se que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right) R_T = \left(\frac{8}{3} + 1\right) aD_L,$$

ou ainda

$$D_L = \frac{3(B+1)R_T}{11ab}.$$

Então,

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a},$$
$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11},$$

Obs: $(a = \alpha)$

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}.$$

Deste modo, substituindo $a = \alpha = \operatorname{tg} 1° \cong 0{,}017$ e $b \cong 20$, podemos obter as quatro grandezas, DL, DS, RS, e RL, em termos do raio da Terra RT, com os dados de Artistarco:

$$D_L \cong 16{,}8R_T, DS \cong 337R_T,$$
$$R_S \cong 5{,}7R_T, R_L \cong 0{,}29R_T.$$

Ao contrário, com os valores mais corretos $\alpha = \operatorname{tg} 1/4^\circ \cong 0{,}0044$ e $b = 400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \cong 62R_T, \quad D_S \cong 24855R_T,$$
$$R_S \cong 109R_T \text{ e } R_L \cong 0{,}27\ T_R.$$

Segundo Baptista e Ferracioli (2003), Aristarco propõe que a Terra tem um movimento de rotação em torno do seu próprio eixo num período de 24 horas, e também um movimento de revolução em torno do Sol com um período de 365,25 dias. Propõe ainda que a Lua gira em torno da Terra num período de 29,5 dias em média. E desta forma, assim como a Terra, os outros planetas também giram em trono do Sol cada qual com seu período, enquanto o Sol e as Estrelas são fixas. Arquimedes que defendia o geocentrismo discorda deste modelo de Aristarco. Apenas um astrônomo chamado Selêuco concorda com a teoria de Aristarco. Somente após 1800 anos que Nicolau Copérnico irá propor novamente o Heliocentrismo. (Aristarco de Samos. Universo da Física. Disponível em: https://universodafisicaufes.wordpress.com/aristarco-de-samos/. Acesso em 25/08/2023).

Figura 2.7: Universo na visão de Aristarco

Fonte: https://universodafisicaufes.wordpress.com/aristarco-de-samos/

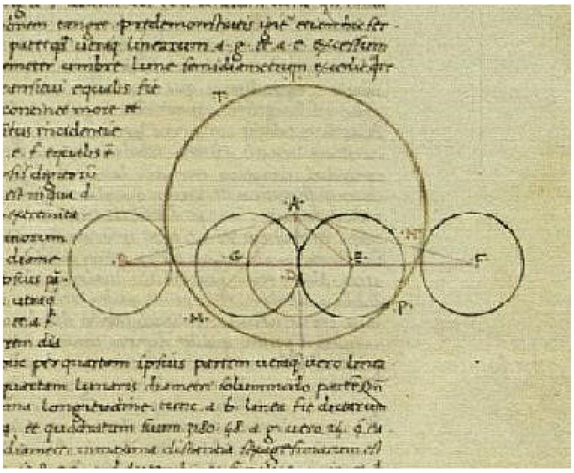
2.1.8 Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.)

É considerado por muitos o maior astrônomo da era pré - cristã. Hiparco catalogou a magnitude de 850 estrelas. Ele também deduziu o valor correto de 8/3 para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua. Além disso, observou que a distância entre a Lua e a Terra era de 59 vezes o raio da Terra; o valor correto é 60. (Astronomia Antiga. Os astrônomos da Grécia antiga, 2023. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acesso em 15/07/2023).

2.1.9 Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.)

Considerado o último astrônomo importante da antiguidade, compilou na sua obra denominada Almagesto treze volumes sobre astronomia, e sendo esta, a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia. (Astronomia Antiga. Os astrônomos da Grécia antiga, 2023. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acesso em 15/07/2023).

Figura 2.8: Tradução do Almagesto em Latim, de 1451.



Fonte:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Almagest_1.jpeg?uselang=pt#Licenciamento

Mlodinow destaca a importância de Hiparco e Ptolomeu:

"A astronomia atingiu seu ápice em Alexandria, com a obra de Hiparco, no século 2 a.C, e Cláudio Ptolomeu (não é parente dos reis com aquele nome), no século 2 d.C. Hiparco observou os céus durante 35 anos, depois combinou suas observações com dados babilônicos para desenvolver um modelo geométrico do nosso sistema solar no qual os cinco planetas conhecidos, o Sol, a Lua, todos se moviam em órbitas compostas de círculos em redor da Terra. Teve tanto êxito em descrever o movimento do Sol e da Lua vistos da Terra, que pôde prever eclipses lunares com um erro de apenas duas horas. Ptolomeu aperfeiçoou e expandiu esta obra num livro chamado Almagesto, que completou o programa de Platão de dar uma explicação racional para os movimentos dos corpos celestes e dominou o pensamento astronômico até Copérnico" (MLODINOW, p.52, p.53, 2004).

Ptolomeu também escreveu um livro chamado Geografia, descrevendo o universo terrestre. Este livro representou o começo da elaboração criteriosa de mapas.

3

A Geometria no Desenvolvimento da Astronomia Moderna

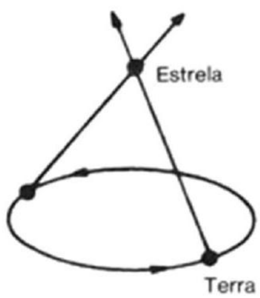
A geometria tem sido uma ferramenta essencial na astronomia desde os tempos antigos, e sua importância só cresceu com o avanço da ciência. Neste contexto, falaremos da herança de grandes cientistas como Nicolau Copérnico, Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileu Galilei, René Descartes e Isaac Newton.

3.1 Nicolau Copérnico (1473-1543)

Polonês, em sua famosa obra (Da Revolução de Esferas Celestes) que foi publicada no ano de sua própria morte, aborda sua teoria heliocêntrica do sistema solar. Segundo (ÁVILA, 1988), essa obra de Copérnico veio a se tornar mais tarde como o impulso inicial mais importante para o desenvolvimento científico. Por esse fato o ano de 1543 é tido como o início da ciência moderna.

(ÁVILA, 1988) ressalta que Aristarco no séc III a.C já havia proposto 1800 anos antes de Copérnico a ideia de que o Sol está fixo no espaço e os planetas, inclusive a Terra, giram em torno dele. No entanto, não obteve crédito de tais ideias principalmente devido às objeções de Arquimedes (defendia o Geocentrismo) e Hiparco, um eminente astrônomo, que argumentava: Se a Terra girasse em torno do Sol, a direção em que vemos uma estrela particular deveria variar durante o ano (Fig. 3.1).

Figura 3.1: Variação da direção de uma estrela



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm

Hoje sabemos que as estrelas efetivamente “se deslocam” ao longo do ano. A esse deslocamento das estrelas dá-se o nome de Paralaxe. Segundo (ÁVILA, 1988), esse fenômeno foi medido pela primeira vez pelo astrônomo russo Struve em 1837 e pelo alemão Bessel em 1838. Essas descobertas mostraram que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós. A estrela mais próxima é a Alfa Centauro (está a 4,3 anos-luz[1] de distância), que se encontra à esquerda do Cruzeiro do Sul (Fig. 3.2).

Figura 3.2: Cruzeiro do Sul - Alfa do Centauro

Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm

Como o Sol está a 8,3 minutos-luz da Terra, temos:

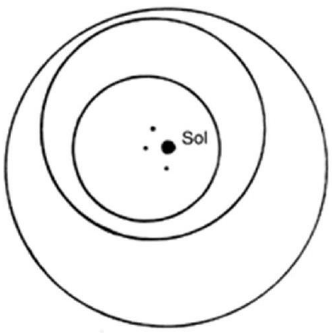
$$\frac{4{,}3 \text{ anos } - luz}{8{,}3 \text{ minutos } - luz} = \frac{4{,}3 \times 365 \times 24 \times 60}{8{,}3} = 272000$$

.

O que significa que essa estrela está distante de nós 272000 vezes mais que o Sol.

Copérnico, em sua obra - Sobre as revoluções das esferas celestes - compatibiliza suas ideias com os dados de observação acumulados ao longo de milênios. No entanto, ele teve de introduzir várias modificações em sua ideia original. Uma das quais consistia em supor o Sol um pouco deslocado dos centros das órbitas. (Fig. 3.3).

Figura 3.3: Sol deslocado do centro das órbitas



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm

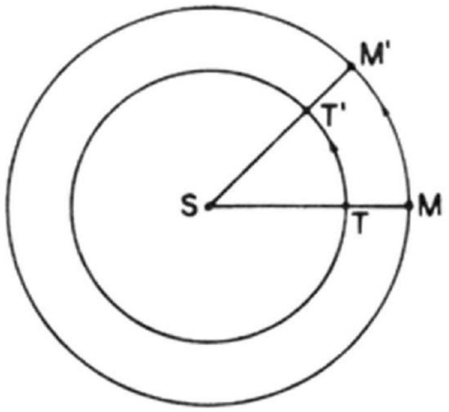
Vejamos uma pequena amostra do trabalho de Copérnico na elaboração de sua teoria heliocêntrica envolvendo alguns cálculos sobre o período de revolução dos planetas e suas distâncias ao Sol no pressuposto de que eles se deslocassem com velocidades constantes em órbitas circulares centradas no Sol.

[1]Um ano - luz é a distância percorrida pela luz em um ano.

Consideraremos o planeta Marte nestes cálculos onde o período de revolução do planeta Marte em torno da Terra é denominado período sinódico e o período de revolução do planeta Marte em torno do Sol é chamado período sideral.

Sejam T e M as posições da Terra e de Marte, respectivamente, quando ambos se encontram de um mesmo lado do Sol S e com ele alinhados (Fig. 3.4). Nesta situação, diz-se que Marte está em oposição ao Sol relativamente à Terra. Através de observações, desde a Antiguidade, sabe-se que Marte volta a ficar em oposição a cada 780 dias. Esse é o período de revolução do planeta em torno da Terra.

Figura 3.4: Alinhamento entre o Sol, a Terra e Marte.



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm

Para calcularmos o período sideral (período de revolução do planeta Marte em torno do Sol), observemos primeiro que a velocidade angular de Marte é menor que a da Terra. Como a Terra vai ganhando dianteira sobre Marte e esse planeta voltará a ficar novamente em oposição quando a dianteira da Terra sobre ele for de 360° (uma volta completa), teremos em 780 dias partir de uma oposição, que a Terra terá dado duas voltas em torno do Sol e se deslocado ainda, ao longo de um arco $\widehat{TT'}$ (Fig. 3.4), durante os 50 dias restantes (pois $780 = 2 \times 365 + 50$). Assim, devido à uniformidade do movimento da Terra, teremos a proporção:

$\frac{\widehat{TT'}}{50} = \frac{360}{365} \therefore T' = 49°$

Durante o período de 780 dias, Marte completou uma volta em torno do Sol mais o arco $\widehat{MM'} = \widehat{TT'} = 49°$. Então, se P é o período sideral de Marte teremos a proporção:

$$\frac{P}{360} = \frac{780}{360+49} \therefore P \approx 687 \text{ dias}$$

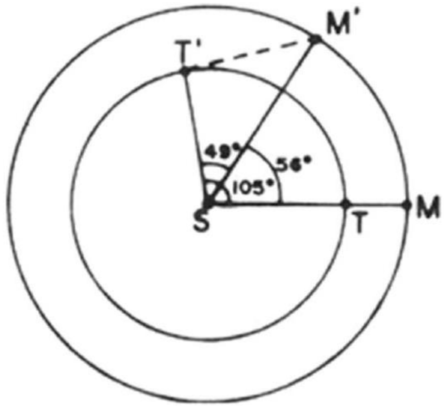
Seguindo esse mesmo raciocínio, Copérnico calculou os períodos siderais dos planetas Júpiter e Saturno. Sabendo que os períodos sinódicos desses planetas são 399 dias e 378 dias respectivamente, obtemos os períodos siderais correspondentes, sendo aproximadamente, 11,8 anos (Júpiter) e 29,5 anos (Saturno).

<u>Distância de Marte ao Sol</u>

O conhecimento do período sideral de um planeta superior é essencial para o cálculo de sua distância ao Sol. No caso de Marte, imaginemos, como ilustra a (Fig. 3.5) que Marte em M esteja em oposição à Terra estando em T e o Sol em S.

Sabemos, por dados de observação, que 106 dias após, a Terra e Marte se

Figura 3.5: Distância de Marte ao Sol.



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm

encontrarão em posições T' e M' respectivamente, tais que $\widehat{ST'M'} = 90^\circ$. Durante esse tempo, o ângulo descrito pela Terra, é de aproximadamente 105°, $(106/X = 365/360^\circ)$. Quanto a Marte, ele terá descrito um ângulo $\beta \approx 56^\circ$, pois $\frac{\beta}{106} = \frac{360^\circ}{687}$

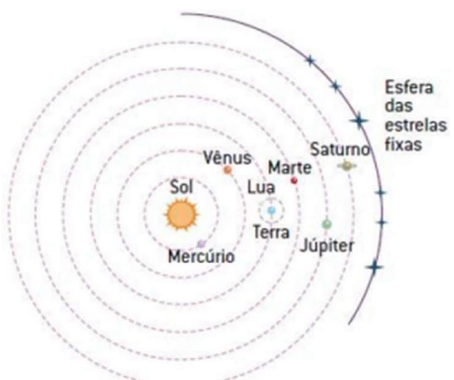
Como consequência, $\widehat{TSM'} = 105 - 56 = 49^\circ$. Finalmente, o triângulo retângulo $ST'M'$ nos dá:

$$SM' = \frac{ST'}{\cos 49^\circ} \approx \frac{ST'}{0{,}65606} \approx 1{,}5ST'$$

Fica assim calculada a distância de Marte ao Sol como 1,5 vezes a distância da Terra ao Sol e com o mesmo raciocínio Copérnico calculou as distâncias de Júpiter e Saturno ao Sol.

Depois de sua publicação em 1543, decorreriam cerca de 100 anos para que a comunidade científica aceitasse de fato a teoria Heliocêntrica de Copérnico.

Figura 3.6: O sistema heliocêntrico tem o sol como seu centro fixo



Fonte: https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo

É importante ressaltar que os dados de observação e as tabelas astronômicas existentes na época de Copérnico deixavam muito a desejar com relação à precisão. Neste sentido, entra em cena o Dinamarquês Tycho Brahe, de quem falaremos a seguir.

3.2 Tycho Brahe (1546-1601)

Segundo (ÁVILA, 2010), ao observar um eclipse do Sol aos 14 anos de idade, Tycho Brahe se apaixonou pela Astronomia. A partir de então e por toda sua vida, ele iria dedicar-se integralmente à Astronomia. Em 1563, aos 17 anos de idade, observando os céus, ele notou que os planetas Júpiter e Saturno estavam praticamente coincidentes. Ao consultar as tabelas astronômicas existentes na época, dentre elas a de copérnico, verificou que as mesmas continham imprecisões grosseiras sobre esse evento.

A partir deste acontecimento, Tycho se viu compelido a construir instrumentos adequados e desenvolver métodos precisos de observação dos astros. Dos 17 aos 26 anos de idade, Tycho estudou em várias universidades européias, viajou, conheceu astrônomos, adquiriu vários instrumentos de observação e construiu muitos outros, maiores e cada vez mais precisos. Passou grande parte de sua vida coletando o mais rico acervo de observações astronômicas até então conseguido. Eram observações de alta precisão, ou seja, o melhor que podia se conseguir naquela época já que os instrumentos ópticos só começariam a aparecer a partir de 1609. Tycho Brahe fez um levantamento completo das coordenadas de mais de 700 estrelas fixas; as observações dos planetas, da Lua e do Sol.

"De posse dessa riqueza de dados, Tycho Brahe podia concluir com segurança que o sistema heliocêntrico, tal qual exposto por Copérnico, era insustentável. Exigia modificações"(ÁVILA, p.04, 2010). Desta maneira propõem um sistema em que todos os planetas, exceto a Terra, giravam em torno do Sol e este por sua vez girava em torno da Terra. Um modelo que se mostraria equivocado.

Figura 3.7: O quadrante de mural de Tycho Brahe

Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Instrumento_de_mural#/media/Ficheiro:Tycho_Brahes _stora_murkvadrant,_Nordisk_Familjebok.jpg

3.3 Johannes Kepler (1571-1630)

Astrônomo, Astrólogo e Matemático alemão, nasceu na cidade de Weil-der-Stadt, sudoeste da Alemanha.

Segundo (ÁVILA, 2010), aos 23 anos de idade, quando ainda estudante de Teologia em Tiibingen, Kepler foi indicado para preencher o posto vago de Professor de Astronomia e Matemática na Universidade Protestante de Gratz, na Áustria. A princípio Kepler não tinha planos de ser astrônomo, mas acabou aceitando a proposta, e em uma de suas aulas que ocorrera em 1595 que Kepler teve uma indagação: Por que exatamente "seis" planetas?

Na época os planetas conhecidos eram Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Nesta mesma aula Kepler obteve a "resposta": Seis planetas significavam cinco espaços entre os possíveis pares de planetas consecutivos. Ora, cinco eram os possíveis poliedros regulares ou poliedros de Platão. Portanto, pensava Kepler, entre as esferas de dois planetas consecutivos devia encaixar-se um poliedro regular, circunscrito a uma esfera e inscrito na outra. A partir dessa ideia Kepler "se rende" à Astronomia e surge o tema do primeiro livro do jovem astrônomo, intitulado *Mysterium Cosmographicum*, publicado em Tiibingen em 1596.

De acordo com (ÁVILA, 2010), ao examinar o livro de Kepler, Tycho Brahe reconhece de imediato o talento matemático de Kepler, algo que Tycho não possuía, e que aliado ao seu talento em observações poderia gerar grandes frutos. Eles trocaram correspondência por cerca de dois anos, e, decerto, perceberam o quanto cada um necessitava do outro. Foram esses interesses mútuos que acabaram fazendo de Kepler um assistente de Tycho Brahe, em Benatek, a partir de fevereiro de 1600.

Tycho Brahe morreu em outubro de 1601, sem concluir seu sistema planetário e a Kepler deixou a recomendação de terminar o trabalho matemático de seu sistema. Kepler, por sua vez, esperava servir-se do legado de Tycho em seu próprio benefício, para aperfeiçoar sua estranha teoria cósmica. O destino, todavia, não iria permitir nem uma coisa nem outra. Durante sua permanência em Benatek, nos seis primeiros anos ele descobriu suas duas primeiras leis planetárias, que aparecem no seu segundo livro, publicado em 1609, intitulado de *Astronomia Nova*. Kepler teve muito trabalho envolvendo intermináveis cálculos na tentativa de acertar hipóteses e que frequentemente levava a conclusões falsas.

A ideia que se tinha desde Aristóteles era de que os corpos celestes dada sua perfeição só podiam mover em círculos e com velocidade uniforme.

"Nunca se chegou a pôr em dúvida esse juízo (circularidade e uniformidade) durante os 2000 anos de astronomia computacional técnica. Copérnico não o fez, e Ptolomeu não o poderia ter feito. Como alguém poderia pôr em dúvida tal princípio dado o contexto intelectual em que se movia o pensamento antigo? As razões dessa aceitação completa eram em parte observacionais e em parte filosóficas, estando fortemente reforçadas por outros fatores estéticos e culturais" (Hanson, p.255, 1985).

Coube a Kepler abandonar os dogmas da órbita circular e do movimento uniforme. A partir daí ele resolve calcular as órbitas da Terra e de Marte.

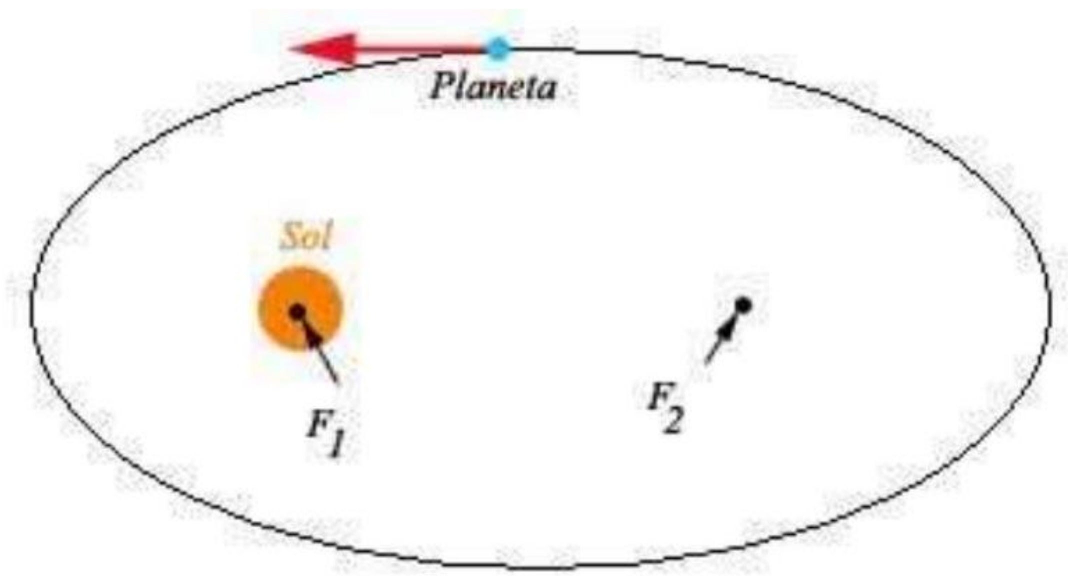
Utilizando dados e tabelas obtidas por Tycho Brahe, Kepler calculou várias distâncias da Terra ao Sol com o engenhoso procedimento de considerar sucessivas posições da Terra a partir de uma oposição de Marte e nos sucessivos retornos de Marte à posição inicial. Kepler notou que a Terra se deslocava com velocidade não uniforme, mais depressa quanto mais perto estivesse do Sol e mais devagar quanto mais longe. Ele construiu uma tabela do movimento da Terra, com as posições diárias do planeta. Kepler então passou a estudar a órbita de Marte, usando agora seu conhecimento das distâncias da Terra ao Sol. Realizados esses cálculos, Kepler pôde verificar que a órbita de Marte não podia ser circular, e após várias tentativas concluiu que a órbita era elíptica, com o Sol em um dos focos.

Leis de Kepler

(ÁVILA, 2010) destaca que Kepler estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, que descobrira para o planeta Marte, a qual ficou conhecida como sua primeira lei (Lei das Órbitas) e que assim se enuncia: *Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.*

Apesar de elípticas, algumas órbitas, como a da Terra, são muito próximas de um círculo, pois são elipses que apresentam uma excentricidade muito pequena. A excentricidade, por sua vez, é a medida que mostra o quanto uma figura geométrica difere-se de um círculo e pode ser calculada pela relação entre os semieixos da elipse.

Figura 3.8: Órbita dos Planetas é elíptica e que o Sol está em um dos focos.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/

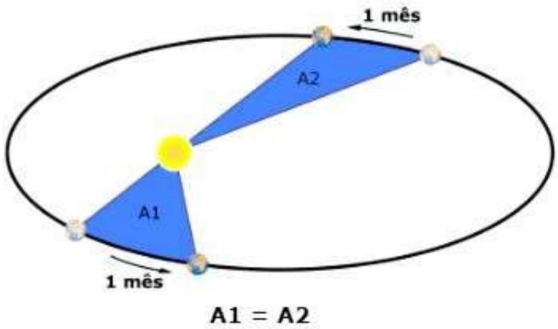
Kepler encontrara outra regularidade interessante no movimento dos planetas. Depois de muitas tentativas, erros e recuos, ele acabou acertando na lei correta, também generalizada para todos os planetas. Conhecida como sua segunda lei (Lei das áreas), ela tem o seguinte enunciado:

Os raios vetores que unem um planeta ao Sol varrem áreas iguais em tempos iguais.

Raio vetor é uma linha imaginária no espaço que liga o Sol ao planeta que está sendo estudado. Conforme o movimento do planeta ocorre, essa linha vai 'varrendo o espaço'. Retirado de: https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/.

Em dois momentos diferentes ao longo da trajetória do planeta, se consideramos um mesmo intervalo de tempo e comparamos as áreas varridas no espaço, encontramos o mesmo valor.

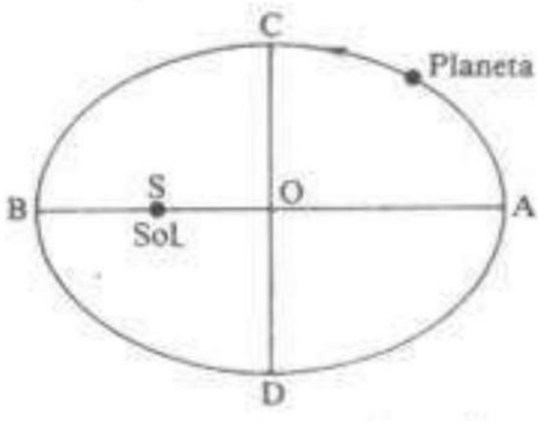
Figura 3.9: Para o mesmo intervalo de tempo, as áreas A1 e A2 são iguais.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/

Como vimos anteriormente, a órbita dos Planetas são elípticas e que o Sol está em um dos focos, como ilustra a (Figura 3.10), onde S designa a posição do Sol e AO o semi-eixo maior da elipse. Como se vê,

Figura 3.10: Órbita elíptica dos planetas



Fonte: ÁVILA, Geraldo. Kepler e a órbita elíptica. Revista do Professor de Matemática, RPM 15, 1987.

$$AO = OB = \text{semi-eixo maior e } OC = OD = \text{semi-eixo menor.}$$

$AO = (SA + SB)/2$. SA é a distância máxima do planeta ao Sol e a posição A é chamada o apogeu do planeta. Já, SB é a distância mínima do planeta ao Sol e a posição B é o perigeu do planeta. Seja T o tempo gasto por determinado planeta para completar uma revolução (por exemplo, a Terra gasta aproximadamente 365 dias e 6 horas) e seja R o semi-eixo maior de sua órbita.

A terceira Lei de Kepler (lei dos períodos ou lei da harmonia) diz:

Os quadrados dos tempos gastos pelos planetas em suas revoluções em torno do Sol são proporcionais aos cubos do semi-eixos maiores de suas órbitas.

Ou seja, ela afirma que T^2 é proporcional a R^3, isto é,

$$T^2 = kR^3, \text{ ou } \frac{T^2}{R^3} = k$$

onde k é a constante de proporcionalidade, a mesma para todos os planetas do sistema solar. Vale ressaltar que esta lei é válida para qualquer sistema solar ou planetário, como é o caso da Terra e seus satélites (a Lua e os satélites artificiais).

Vejamos um exemplo de aplicação:

Calcule o período de revolução de um satélite artificial em órbita circular, a 200 km de altitude, sabendo-se que, aproximadamente, o raio da terra é $R_0 =$ 6400 km, o período de revolução da Lua é $T_L = 27{,}3$ dias e a distância da Terra à Lua é $D_L = 60$ vezes o raio da Terra.

Seja T o período do satélite e $R = R_0 + 200 = 6400 + 200 = 6600$ km o raio de sua órbita. Como

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T_L^2}{D_L^3}$$

temos:

$$T^2 = \frac{R^3 \times T_L^2}{D_L^3} = \frac{6600^3 \times 27{,}3^2}{(60 \times 6400)^3}$$

donde se segue

$$T = \left(\frac{33}{32 \times 60}\right)^{3/2} \times 27{,}3 \text{ dias } \cong 1h29 \text{ min.}$$

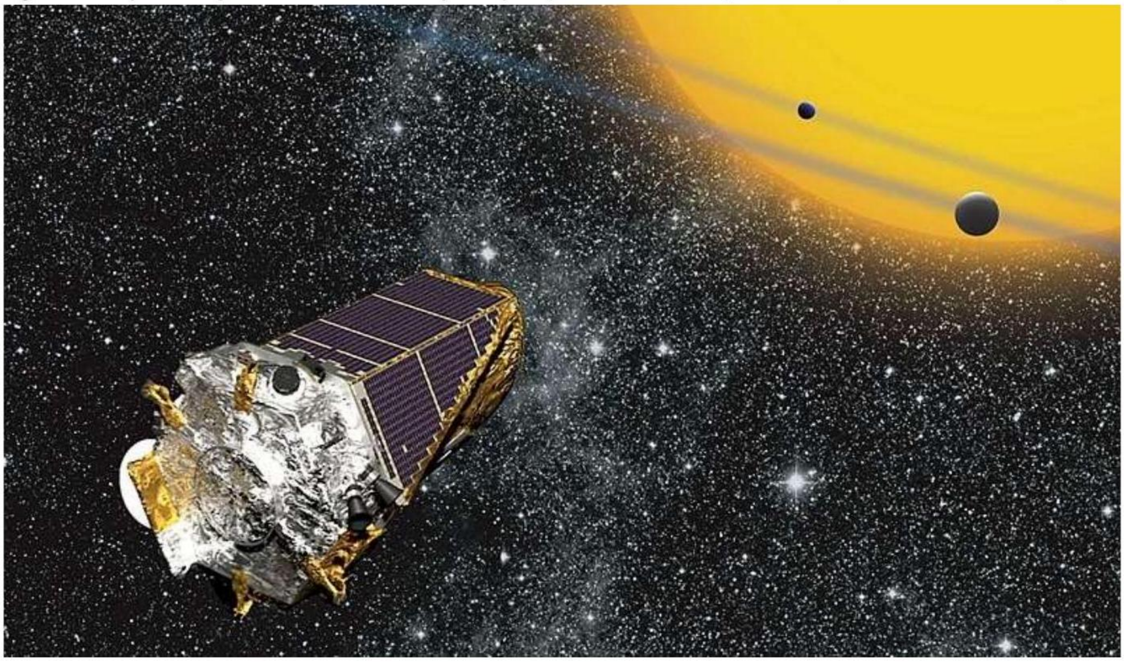
A tabela abaixo nos mostra o período de revolução dos Planetas do nosso Sistema Solar onde a razão entre os quadrados dos períodos de translação dos planetas e os cubos dos respectivos raios médios das órbitas será sempre constante:

Tabela 3.1: Período de revolução dos Planetas

Planeta	Período de revolução (T)	Raio da órbita (r)	$K = \frac{T^2}{r^3}$
Mercúrio	0,241 anos	0,387 u.a.	1,002
Vênus	0,615 anos	0,723 u.a.	1,000
Terra	1 ano	1 u.a.	1,000
Marte	1,8881 ano	1,524 u.a.	0,999
Júpiter	$\mathbf{11,86}$ anos	5,204 u.a.	0,997
Saturno	29,6 anos	9,58 u.a.	0,996
Urano	83,7 anos	19,14 u.a.	1,000
Netuno	165,4 anos	30,2 u.a.	0,993

Fonte: https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/

Figura 3.11: Representação artística do telescópio Kepler (Foto: NASA Ames/ W Stenzel/Wikimedia Commons)



Fonte: https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2018/11/kepler-o-que-voce-precisa-saber-sobre-o-finado-telescopio-da-nasa.html

Lançado em 2009, o telescópio Kepler tinha como objetivo navegar pelo espaço observando estrelas e procurando planetas extrassolares. Primeiro "caçador de planetas" da NASA, ele encontrou mais de 2,6 mil exoplanetas ao longo de diferentes missões. Em 2018, sua jornada chegou ao fim.

3.4 Galileu Galilei (1564-1642)

Galileu di Vincenzo Binaiuti de Galilei nasceu em Pisa, Itália. Foi um Físico, Matemático, Astrônomo e Filósofo. Um dos primeiros pensadores a desafiar as doutrinas de Aristóteles e testar suas próprias ideias por meio de experimentos.

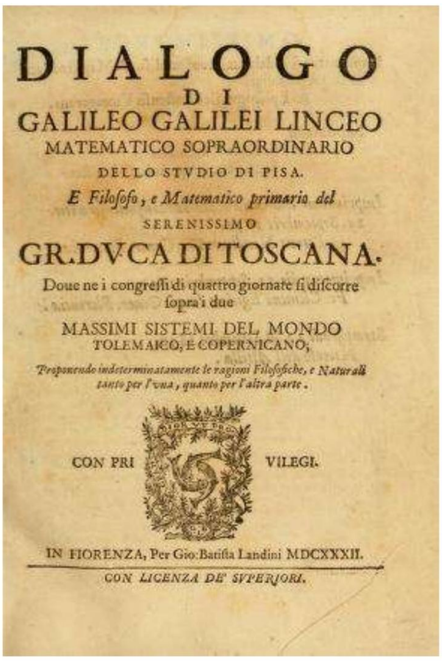
De acordo com Hart- Davis (2010), em 1589 torna-se professor de Matemática na Universidade de Pisa, mas em 1592 vai para a Universidade de Pádua onde ensina geometria, astronomia e mecânica e descreve esse período como o melhor de sua vida. Em 1609 toma conhecimento das lunetas inventada pelo holandês Hans Lippershey. Inspirado nas lunetas, Galileu construiu seu próprio instrumento e depois melhorou o poder de ampliação de 3 para 30 vezes, criando a primeira luneta astronômica. Galileu obteve promessas e favores oferecendo lunetas aos militares e depois as usou para observar o céu e em uma dessas observações percebeu que a Lua não era a esfera lisa e perfeita concebida por Aristóteles, mas tinha a superfície rugosa com montanhas e crateras. Em 1610 Galileu descobre as 4 luas de Júpiter. Publica o resultado de suas observações em Sidereus Nuncius (Mensageiro Sideral) obra que enriqueceu os conhecimentos astronômicos da época.

Figura 3.12: Júpiter e as quatro luas vistas por Galileu.

Fonte: http://www.discoverybrasil.uol.com.br/
https://www.sbfisica.org.br/v1/portalpion/index.php/artigos/26-galileu-galilei-o-mensageiro-das-estrelas

(HART-DAVIS, 2010) comenta que em 1623 Galileu publica a obra O ensaiador e que em 1632 publica em Florença o livro Diálogos, onde aborda os problemas da mecânica e também analisa com clareza a situação da astronomia comparando os sistemas ptolomaico e copernicano. Os dados astronômicos da época não são muito diferentes daqueles já abordados em O Mensageiro das Estrelas publicado em 1610. É neste grande livro (Os Diálogos) que Galileu combina as Ciências Matemáticas, A Física e a Nova Astronomia para discutir o Princípio da Relatividade e o Problema da Gravidade.

Figura 3.13: Diálogos sobre os dois máximos sistemas do mundo.



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'una, quanto per l'altra parte.
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

Fonte: https://library.si.edu/digital-library/book/dialogodigalileo00gali

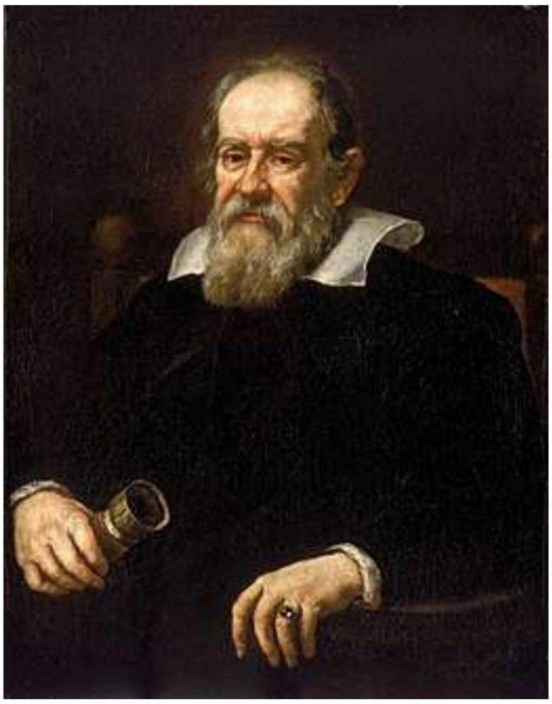
Ainda em 1632, segundo (HART-DAVIS, 2010), Galileu é intimado a comparecer diante do Santo Ofício, em Roma. Em 1633 é submetido a julgamento e acusado de heresia. Galileu é obrigado a abjurar e negar seus próprios ensinamentos. Fica em regime de prisão domiciliar em sua vila, em Arcetri.

Figura 3.14: Pintura do julgamento de Galileu.

Fonte: www.historiadigital.org.
https://library.si.edu/digital-library/book/dialogodigalileo00gali

"Em 1641 Galileu inventa um mecanismo para determinar intervalos de tempo de um relógio de pêndulo; a ideia é retomada 15 anos depois por Christiaan Huygens" (HART-DAVIS, p.91, 2010).

Figura 3.15: Galileu Galilei, por Justus Sustermans 1636.



https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei

Foram nas obras de Galileu que Isaac Newton encontrou os fundamentos que lhe permitiram elaborar a teoria matemática do movimento. Nas palavras do próprio Galileu : "A ciência está escrita na linguagem matemática".

3.5 René Descartes (1596-1650)

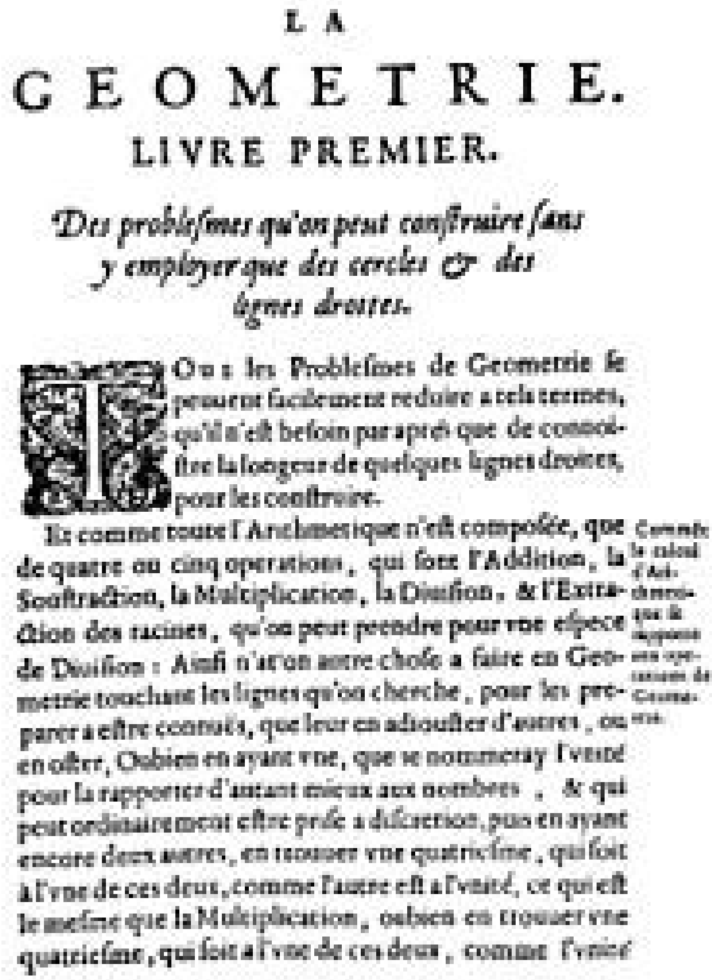
Nascido em Touraine, França, transferiu-se para a Holanda em 1628. Lá iniciou uma linha de pensamento baseada na famosa premissa "Cogito ergo sum" (Penso, logo existo); segundo ele, só disso se podia ter certeza. Além da Filosofia, suas contribuições para a matemática e óptica foram fundamentais.

Figura 3.16: Retrato de René Descartes, por Frans Hals

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

Segundo (HART-DAVIS, 2010), foi juntamente com Pierre de Fermat (1601-1665) que René Descartes estabeleceu a relação entre Álgebra e Geometria. Eles perceberam a possibilidade de relacionar a álgebra com a geometria mediante um sistema de coordenadas - dois ou mais números que definem uma posição no plano ou no espaço relativa a dois eixos tomados como referência. Usando coordenadas, toda geometria pode ser expressa na forma de equações algébricas - e, em princípio, qualquer equação algébrica pode ser representada por um gráfico. Ao estudar a geometria das curvas, em 1629, Fermat constatou que poderia, com uma única equação, localizar cada ponto de uma curva de acordo com sua distância a duas retas fixas, os eixos. Em A Geometria, de 1637, um apêndice do livro Discurso do método, Descartes expressou melhor sua ideia, descrevendo dois eixos perpendiculares entre si, chamados x e y, que ficaram conhecidos como sistema de coordenadas cartesianas, em sua homenagem e assim surgindo a geometria analítica.

Figura 3.17: La Géométrie de 1637.



LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

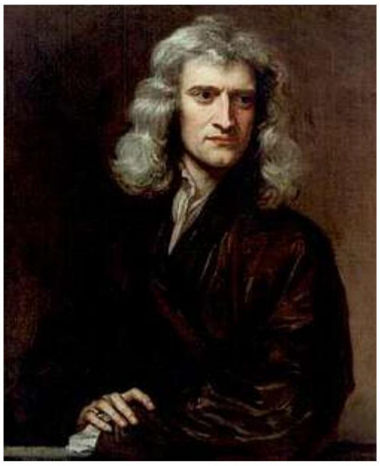
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/La_Géométrie

Hart - Davis (2010), comenta que separadamente, a álgebra e a geometria explicam relações estáticas, mas juntas - na geometria analítica e no cálculo- podem explorar relações dinâmicas, sendo assim, fundamentais para os cientistas. Sem essa combinação, as leis da gravitação de Newton, a física quântica, a teoria do Big Bang, dentre outras teorias não teriam se tornado realidade. Ou seja, além de sua importância para o avanço de áreas da matemática como a geometria analítica, os sistemas de coordenadas foram essências também na moderna compreensão do espaço, tempo e gravidade.

3.6 Isaac Newton (1642-1727)

Considerado um dos maiores matemáticos e cientista de todos os tempos, Isaac Newton foi um gênio que fez conquistas extraordinárias na matemática, na óptica e na mecânica. Ele juntamente com G.W.Leibniz (1646-1716) contribuíram para a criação do Cálculo, Newton também explicou as cores do arco-íris e observou que a força gravitacional nos atribui peso e controla o movimento da Lua e dos planetas.

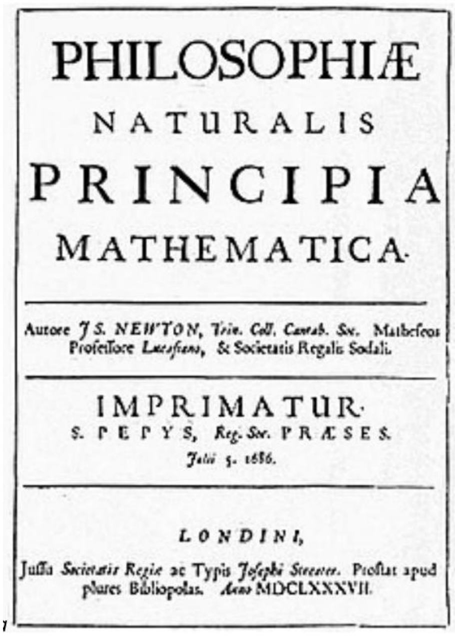
Figura 3.18: Newton retratado por Godfrey Kneller, 1689 (com 46 anos de idade)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

De acordo com (HART-DAVIS, 2010), em 1684, persuadido pelo amigo Edmond Halley, Newton escreveu um artigo sobre órbitas cometárias que continha suas ideias sobre matemática, óptica, gravidade, forças e as órbitas de planetas e cometas. Depois de revisá-lo, complementou-o e com outros estudos, publica em 1687 Philosophiae naturalis principia mathematica (normalmente conhecido como Principia). Esta obra continha as leis do movimento e da gravitação universal, que revolucionaram o conhecimento então vigente no mundo.

Figura 3.19: Capa da obra Philosophiae naturalis principia mathematica



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Princ%C3%ADpiosMatem%C3%A1ticos da Filosofia Natural

Leis de Kepler e a Gravitação Universal

Ao estudar as leis de Kepler, Isaac Newton observou que a velocidade dos planetas ao longo da trajetória era variável em valor e direção. Para explicar essa variação concluiu que existiam forças que atuavam nos corpos celestes e que essas forças de atração dependem das massas dos corpos envolvidos e das suas distâncias.

Isaac Newton observou que a força gravitacional que atrai a Lua à Terra equivale ao valor da força centrípeta da Lua em seu movimento circular em torno da Terra. Sendo assim:

$$F_{\text{gravidade}} = \tfrac{m_{\text{Lua}} \cdot v^2}{R}, \quad \text{sendo } m \text{ (a massa),}$$

v (Velocidade da Lua em relação á Terra) e

R (raio=distância entre a Terra e a Lua).

Como,

$$v = \frac{2\pi R}{T} \text{ (sendo } T \text{ o Período de Revolução),}$$

então:

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{m_{\text{Lua}} \cdot 4\pi^2 R^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R}$$

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{m_{\text{Lua}} \cdot 4\pi^2 R}{T^2}$$

Utilizando a terceira. Lei de Kepler, $K = \frac{T^2}{R^3}$ temos:

$$T^2 = K \cdot R^3$$

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{m_{\text{Lua}} \cdot 4\pi^2 R}{K \cdot R^3}$$

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{m_{\text{Lua}} \cdot 4\pi^2}{R^2 \cdot K}$$

Newton percebeu que a constante "K" dependeria da massa do corpo que atrai a Lua à Terra, Desse modo, ele simplificou os fatores constantes $\left(\frac{4\pi^2}{K}\right)$ relacionando com a massa terrestre, gerando assim: $\frac{4\pi^2}{K} = G \cdot m_{\text{Terra}}$

Substituindo na última equação acima, teremos:

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{m_{\text{Lua}} \cdot G \cdot m_{\text{Terra}}}{R^2}$$

$$F_{\text{gravidade}} = \frac{G \cdot m_{\text{Lua}} \cdot m_{\text{Terra}}}{R^2}$$

(HART-DAVIS, 2010): "Sem essa força, a Lua não pode ser mantida em órbita" Issac Newton, Físico, Livro I dos Princípia, 1687.

A Lei da Gravitação universal diz:

"Dois corpos atraem-se por uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa" (HART–DAVIS, p.116, 2010).

Generalizando para quaisquer dois corpos que possuem massa, a fórmula matemática da Lei da Gravitação Universal é:

$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}$ onde F = Intensidade da força de atração gravitacional (N-Newton)

G - constante de gravitação universal ($6{,}67408.10^{-11} Nm^2/kg^2$) determinada entre 1797 e 1798 pelo experimento da balança de torção, realizado pelo físico e químico britânico Henry Cavendish. O experimento tinha como objetivo inicial a determinação da densidade da Terra, mas na época também pôde determinar a constante da gravitação universal com menos de 1% de erro em relação ao valor conhecido atualmente.

M - massa gravitacional ativa (kg - quilogramas)

m - massa gravitacional passiva (kg - quilogramas)

R^2 - distância entre as massas ao quadrado

Mas na superfície da terra GM/R^2 é constante igual $g = 9{,}8\ m/s^2$. Ou seja, $F = mg$ ou ainda $P = PESO = mg$.

É importante ressaltar que para chegar nos finalmente em suas equações, Newton utilizou o próprio cálculo diferencial e integral que ele mesmo ajudou a desenvolver. Ou seja, uma matemática mais robusta e sofisticada. Portanto a dedução acima é apenas uma simplificação do feito realizado por Newton.

4

Novas Geometrias

As novas geometrias, também conhecidas como geometrias não-euclidianas, surgiram a partir do questionamento do quinto postulado de Euclides, que trata das paralelas. Entre as mais conhecidas estão a geometria hiperbólica e a geometria elíptica. Essas geometrias revolucionaram a matemática no século XIX ao mostrar que os conceitos tradicionais não eram os únicos possíveis para descrever o espaço. Elas têm aplicações em diversas áreas, incluindo a teoria da relatividade de Einstein, que utiliza a geometria elíptica para descrever a curvatura do espaço-tempo.

4.1 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Gauss influenciou e contribuiu em muitas áreas da matemática. Entre 1813 e 1816, como professor ensinando astronomia matemática na Universidade de Gottingen, Gauss finalmente após 2 mil anos rompe a barreira até então intransponível da Geometria de Euclides: "Ele desenvolveu equações que relacionavam as partes de um triângulo num espaço não euclidiano, cuja estrutura damos o nome hoje de *Geometria Hiperbólica*" (MLODINOW, p.122, 2004).

Em 1824 Gauss tinha elaborado uma teoria completa. Neste mesmo ano, mais precisamente em 06 de novembro, Gauss escreveu para F.A. Taurinus (um advogado que se aventurava na matemática com certa competência): "A suposição de que a soma dos três ângulos [de um triângulo] é menor do que 180° leva a uma geometria especial, bem diferente da nossa [isto é, a euclidiana], que á absolutamente consistente e que eu desenvolvi de modo bem satisfatório para mim mesmo" (MLODINOW, p.122, 2004).

(MLODINOW, 2004) comenta que Gauss nunca publicou isso e insistiu com Taurinus e outros para que não tornassem públicas suas descobertas. Mas por qual motivo? Ciência e Filosofia não tinham se separado completamente naquela época e denominava-se "filosofia natural" e o filósofo que Gauss mais temia era Immanuel Kant que publicou o seu livro mais famoso, Crítica da razão pura" em 1781. Kant nesta obra chama o espaço euclidiano de "uma necessidade inevitável do pensamento" e Gauss não quis se opor a Kant naquele momento.

"Nos anos críticos que antecederam a descoberta da nova geometria, a figura

dominante do mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que deu uma grande contribuição no desenvolvimento de ideias que levaram à sua descoberta. Poucos dos seus resultados, fruto de muitos anos de pesquisa sobre os problemas associados ao quinto postulado, foram tornados públicos durante sua vida. Algumas cartas a outros interessados naqueles problemas, críticas de tratados sobre paralelas, e notas inéditas descobertas entre seus trabalhos, são toda a evidência disponível de que foi ele o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma Geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides" (BARBOSA, 2009 apud SILVA, p.13, 2011).

Figura 4.1: Carl Friedrich Gauss, por Christian Albrecht Jensen Príncipe da matemática

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl Friedrich Gauss

Embora Gauss não tenha publicado suas descobertas feitas no período de 1815-24, dois outros homens que tinha contato com ele o fizeram, quase que simultaneamente.

4.2 (Janos) Bolyai (1775-1856)

Foi um matemático Húngaro que logo cedo foi incentivado pelo seu pai a dedicar-se à ciência.

No dia 23 de novembro de 1823, Johann (Janos) Bolyai, filho de um amigo de Gauss, Wolfgang Bolyai, escreveu a seu pai que tinha "criado um mundo novo e diferente, a partir do nada", querendo dizer com isso que tinha descoberto um espaço não euclidiano.

Janos Bolyai escreveu a seu pai :

"Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, tão logo tenha organizado o material e as minhas circunstâncias o permitam. Não completei o meu trabalho,

mas o caminho que segui torna quase certo que o objetivo será alcançado, se isso for de todo possível; o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas, e seria motivo de lamento se as perdesse. Quando as vires, querido pai, também perceberás... do nada criei um universo" (SAMUCO, 2005).

O trabalho de Bolyai foi colocado num apêndice de um dos livros do seu pai denominado Tentamen, que foi publicado em 1831. Nesta obra Wolfgang Bolyai publica as tentativas de demonstrar o postulado das paralelas, o qual ele dedicou grande parte de sua vida. Wolfgang enviou seu trabalho contendo o apêndice de seu filho para apreciação de Gauss, que não se mostrou disposto a torná-lo público. Gauss escreveu então uma bela carta de congratulações a Bolyai (mencionando que ele próprio já havia descoberto algo semelhante). Janos ficou decepcionado com a carta de Gauss e nunca mais publicou outro trabalhos sobre matemática.

Figura 4.2: Janos Bolyai

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/János_Bolyai

4.3 Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792-1856).

Segundo (MLODINOW, 2004), no mesmo ano em que Bolyai escrevera a seu pai (1823), Nikolay Ivanovich Lobachevsky, em Kazan, na Rússia, explorava as consequências da violação do postulado das paralelas de Euclides num livro texto de geometria não publicado. A primeira apresentação pública de seu trabalho foi apresentada à Sociedade Física e Matemática da cidade de Kazan, em 1826, onde Lobachevsky negava o quinto postulado. O trabalho foi rejeitado.

Em 1829 seu trabalho foi publicado numa revista científica de língua russa, chamada O Mensageiro de Kazan.

Ainda segundo Mlodinow, Lobachevsky tinha sido ensinado por Johann Bartels, que assim como Wolfgang Bolyai tinha um grande interesse em espaço não euclidiano.

Ambos discutiram suas ideias com Gauss, que propôs que Lobachevsky fosse aceito como membro da Sociedade Real de Ciências de Gottingen, a qual ele foi eleito em 1842.

Bolyai, mesmo confiante de suas ideias, não aprofundou seus estudos como Lobachevsky o fez em sua obra Pangeometria que foi publicada em francês, em 1855.

O magnífico trabalho de Lobachevsky só viria a ser reconhecido após a sua morte.

Figura 4.3: Nikolai Lobachevsky

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky

Em 1871, o matemático alemão Felix Klein (1849-1925) deu o nome de Geometria Hiperbólica à nova geometria desenvolvida por Gauss, Bolyai e Lobachevsky.

4.3.1 Geometria Hiperbólica

Para (MLODINOW, 2004), o espaço que Gauss, Bolyai e Lobachevsky descobriram - o espaço hiperbólico - é o espaço que resulta substituindo o postulado das paralelas pela suposição de que, *para qualquer reta, não existe apenas uma, mas muitas retas paralelas passando por qualquer ponto externo dado. Ou seja, a Geometria Hiperbólica utiliza o Postulado de Lobachevsky:*

"Por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r" (COUTINHO, 2001).

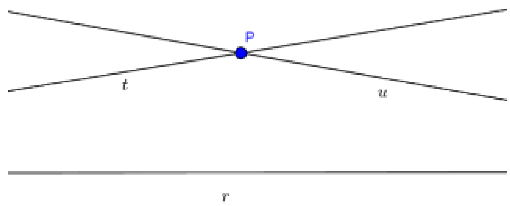
Uma das consequências do Postulado de Lobachevsky é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180°, por um número que Gauss chamou de defeito angular (MILODNOW, 2004).

A visualização do novo espaço criado por Gauss, Bolyai e Lobachevsky coube ao matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), e pelo matemático, físico e filósofo Henri Poincaré (1854-1912).

"Nem Gauss, nem Lobachevsky, nem Bolyai descobriram qualquer modo simples de visualizar este novo tipo de espaço. Isso foi realizado por Eugênio Beltrami e, de uma forma mais simples, por Henri Poincaré" (MLODINOW, p.127, 2004).

Figura 4.4: Negação do quinto postulado de Euclides apresentado por Lobachevsky.

Retas t e u passam por $P \notin r$ e são, simultaneamente, paralelas a reta r

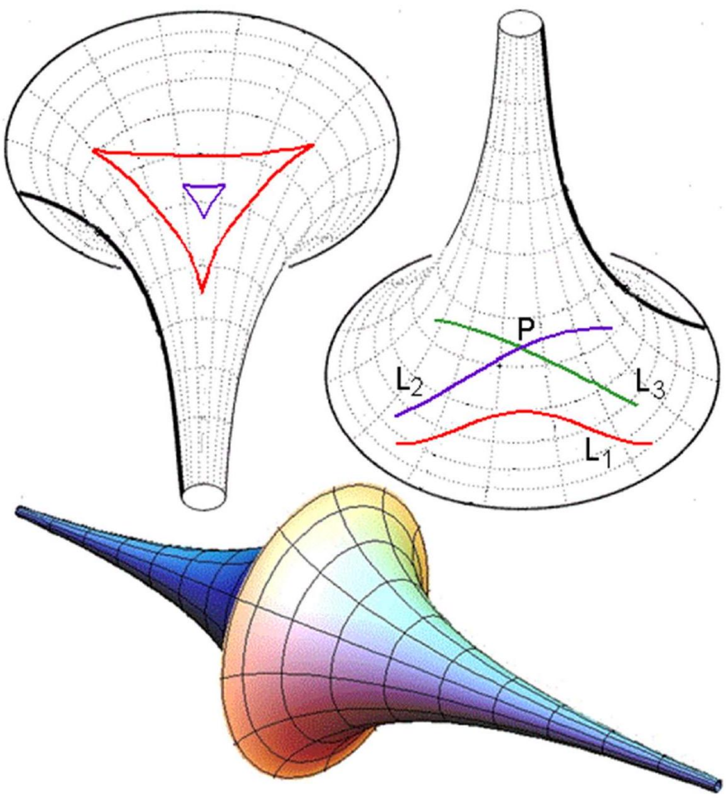


Fonte: http://www.benditamatematica.com/2016/06/alguns-fatos-historicos-da-geometria.html

Pseudo-Esfera de Beltrami

Em 1868, o matemático italiano o Eugênio Beltrami (1835-1900), foi o primeiro a apresentar um modelo para o espaço Hiperbólico conhecido como Pseudo-Esfera.

Figura 4.5: Pseudo - esfera de Beltrami



Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/09/lobachevsky-e-as-geometrias-nao.html

Segundo (COUTINHO, 2001), na superfície da pseudo-esfera, encontra-se a possibilidade da confirmação do Postulado de Lobachevsky.

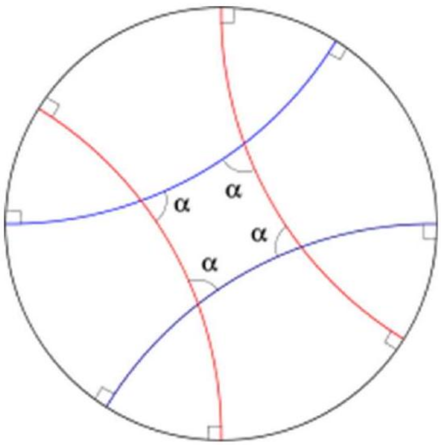
Neste modelo temos uma superfície de curvatura negativa onde a soma dos ângulos de um triângulo é menor que 180 graus. Além disso, por um ponto P podem passar infinitas “retas” paralelas a outra reta. Na figura, $L2$ e $L3$ são paralelas a $L1$ e se cruzam em um ponto P.

Embora interessante, a representação de Beltrami apresenta algumas falhas, dentre elas : as “retas” sobre ela nem sempre são infinitas como deveriam ser.

O Disco de Poincaré

Outra forma de representar o plano hiperbólico foi criada pelo grande matemático francês Henri Poincaré .

Figura 4.6: Disco de Poincaré



Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Disco_di_Poincaré

No disco de Poincaré as geodésicas são arcos de circunferência (ou linha reta) ortogonais à borda. Ângulos são aqueles formados por tangentes. Na figura, quatro linhas delimitam um quadrilátero com todos os ângulos iguais.

Segundo COUTINHO, 2001, p.44, nesse modelo, as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo (do disco), que representa o plano hiperbólico.

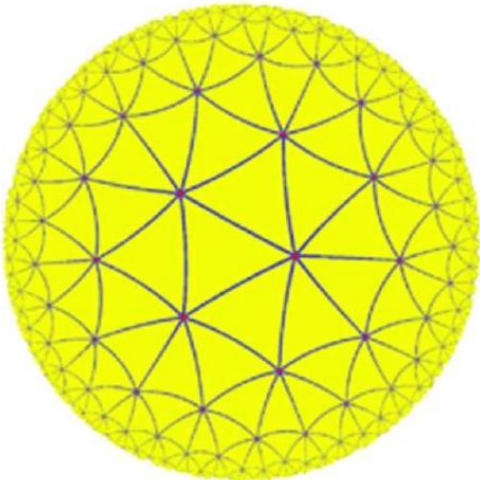
Mauritius Escher (1898-1972) um grande artista gráfico holandês, utilizou o disco de Poincaré em algumas de suas magníficas gravuras.

Figura 4.7: Gravura colorida de Escher, feita em 1959.

Fonte: https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/apostilas-eletronicas-da-dfifi/apostilas-sobre-as-geometrias-nao-euclidianas/

Na gravura acima, temos a percepção de que quanto mais os peixes se afastam do centro do disco menor eles ficam à medida que se aproxima do círculo limite. Embora os próprios habitantes (peixes) desse mundo hiperbólico não concordem com nossa percepção. Á medida que se deslocam pelo disco em direção á borda nada muda em relação ao seu tamanho já que suas "réguas" são modificadas na mesma proporção.

Figura 4.8: Uma tesselação do disco de Poincaré usando triângulos hiperbólicos.



Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Disco_di_Poincar%C3%A9

4.4 Geometria Elíptica

De acordo com MLODINOW (2004) passadas algumas décadas da descoberta do espaço hiperbólico, outro tipo de espaço não euclidiano foi descoberto: o espaço elíptico, que é o espaço obtido se assumirmos outra violação do postulado das paralelas: que todas retas de um plano devem se cruzar, ou seja, que não há retas paralelas.

4.4.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Com o surgimento da Geometria Hiperbólica, abriu-se espaço para o surgimento de novas Geometrias. E neste cenário surge o alemão Bernhard Riemann.

De acordo com (MLODINOW, 2004), em 1846 Riemann matriculou-se na Universidade de Gottingen, onde Gauss era professor. Inicialmente se matriculou em Teologia, logo em seguida mudou-se para sua verdadeira paixão: a matemática. Em 1851, Riemann entrega sua tese de doutorado à qual é examinada por Gauss, que fica impressionado.

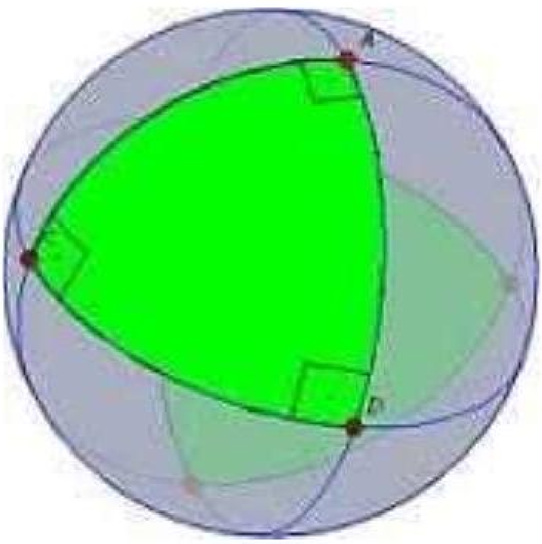
Segundo (MLODINOW, 2004), Gauss destaca que Riemann tinha demonstrado uma mente criativa, "ativa e verdadeiramente matemática e uma imaginação gloriosamente fértil". Em 1854 Riemann profere uma palestra na Universidade de Gottingen com o tema "Sobre as hipóteses em que a geometria se baseia", onde não utiliza o nome de geometria não euclidiana. Riemann explicou como a esfera podia ser interpretada como um espaço elíptico bidimensional.

(MLODINOW, 2004) destaca que Riemann deu sua própria interpretação acerca dos termos ponto, reta e plano. Os pontos eram posições seguindo a ideia de Descartes (pares de números ou coordenadas), como plano ele escolheu a superfície da esfera e as retas eram os círculos máximos, as geodésicas sobre a esfera.

(COUTINHO, 2001) destaca que Bernhard Riemann criou uma Geometria denominada Elíptica, contrariando o axioma das paralelas, estabelecendo que não existem retas paralelas a uma reta dada. Conhecida também como Geometria Riemanniana, é uma geometria tal que, dada uma reta L e um ponto P não pertencente a L, não existe reta paralela a L passando por P. Neste contexto, abandona-se a noção de 'estar entre' e as retas não são infinitas como na geometria euclidiana, mas sim ilimitadas.

Substituindo o quinto postulado de Euclides, o postulado de Riemann diz: "Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro" (COUTINHO, 2001, p.73).

Figura 4.9: Representação de um triângulo esférico



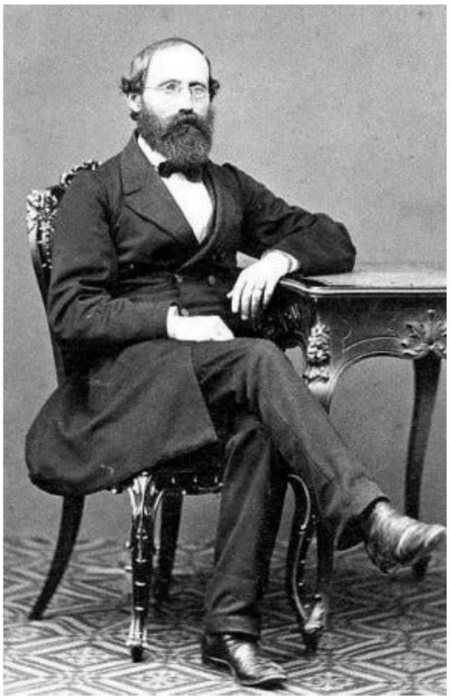
Fonte: http://www.promath.com.br/
Fonte: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica

Na figura acima temos as geodésicas ou círculos máximos sobre a esfera. Duas retas se interceptam em pontos antípodas (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera), onde esses dois pontos são os polos da reta. Os círculos máximos se interceptam e a soma dos ângulos internos nos triângulos é maior do que 180°. Novamente observando a figura acima, temos um triângulo esférico cuja soma dos ângulos internos é 270°. Contextualizando a situação acima, podemos considerar o Globo Terrestre onde o triângulo em destaque é formado pela linha do Equador e dois meridianos ligando o Equador ao pólo Norte.

"A obra de Riemann sobre geometria diferencial tornou-se a pedra angular da Teoria Geral da Relatividade de Einstein. Se Riemann não tivesse sido tão imprudente em incluir a geometria na sua lista de tópicos, ou se Gauss não tivesse sido tão ousado a ponto de escolhê-la, o instrumento matemático que Einstein precisou para sua revolução na física não teria existido. Mas antes que aquela reviravolta tivesse começado, a obra de Riemann sobre os espaços elípticos teve um impacto igualmente profundo no mundo da matemática. A necessidade de alterar postulados além do

postulado das paralelas foi igual ao desgaste dos fios numa corda. Logo, a corda se partiu. Foi somente então que os matemáticos perceberam que, pendurada na corda não estava somente a geometria, mas toda a matemática" (MLODINOW, p.146, 2004).

Figura 4.10: Bernhard Riemann (1826-1866)



Fonte: https://www.famousmathematicians.net/bernhard-riemann/

4.5 Quadro Comparativo de Alguns Conceitos Geométricos das Geometrias : Euclidiana e Não-Euclidianas

A geometria euclidiana, desenvolvida por Euclides, baseia-se em cinco postulados, incluindo o famoso postulado das paralelas, que afirma que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela que passa por esse ponto. Em contraste, a geometria elíptica, como a encontrada na superfície de uma esfera, não possui retas paralelas; todas as retas eventualmente se encontram. Já na geometria hiperbólica, existem infinitas retas paralelas que passam por um ponto fora de uma reta dada. Essas diferenças fundamentais resultam em propriedades distintas para ângulos, triângulos e outras figuras geométricas. Vejamos a tabela abaixo com alguns conceitos envolvendo as três geometrias.

Tabela 4.1: Quadro comparativo de alguns conceitos geométricos das geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas

CONTEÚDO	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA HIPERBÓLICA	GEOMETRIA ESFÉRICA
Duas retas distintas intersectam em	Nenhum ou um ponto	Nenhum ou um ponto	Dois pontos antípodos
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe (m)	Uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L.	Pelo menos duas retas que passam por P e é paralela a L.	Não há reta que passa por P e é paralela a L.
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são	Semelhantes	Congruentes	Congruentes
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°	Menor que 180°	Maior que 180°
Soma dos ângulos internos de quadrilátero	Igual a 360°	Menor que 360°	Maior que 360°
Classificação de triângulos quanto aos lados	Isósceles: dois lados com a mesma medida e dois ângulos congruentes. Eqüilátero: três lados com medidas iguais e três ângulos congruentes. Escaleno: dois lados quaisquer não são congruentes		Retilátero: um lado mede 90° Birretilátero: dois lados medem 90° Trirretilátero: cada um dos lados mede 90°
A área de um triângulo é	Independente da soma dos seus ângulos	Proporcional ao defeito da soma de seus ângulos	Proporcional ao excesso da soma de seus ângulos
Classificação de triângulos quanto aos ângulos	Retângulo: 1 ângulo reto Acutângulo: ângulos internos agudos Obtusângulo: um dos ângulos é obtuso		Retângulo: um ângulo reto Birretângulo: dois ângulos retos Trirretângulo: três ângulos retos
Bissetrizes, Alturas e Medianas de um Triângulo	Bissetrizes: são 3 semi-retas que dividem os ângulos ao meio. Alturas e Medianas: são 3 segmentos de reta		Bissetrizes, Alturas e Medianas: Possui três. São círculos máximos.

Fonte: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica

4.6 As Superfícies se Caracterizam por sua Curvatura

A curvatura do espaço é um conceito fundamental na teoria da relatividade geral de Albert Einstein. Segundo essa teoria, a presença de massa e energia curva o espaço-tempo ao seu redor, e essa curvatura é o que percebemos como gravidade.

Tipos de Curvatura

Curvatura Nula (Espaço Plano):

Exemplo: O espaço tridimensional que usamos no dia a dia, sem considerar a gravidade, é um exemplo de espaço plano.

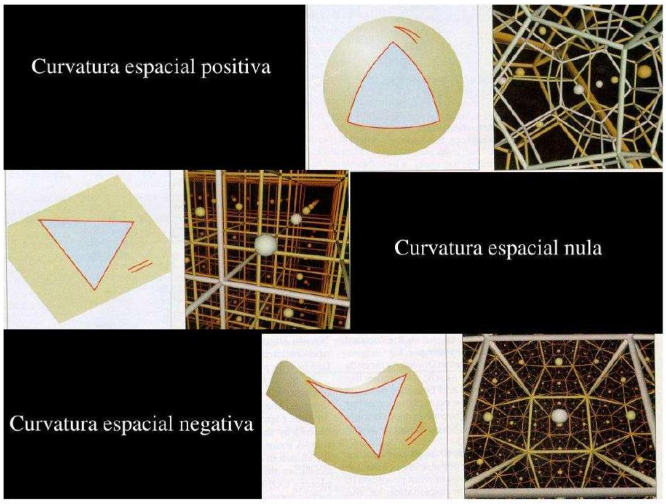
Curvatura Positiva (Espaço Esférico):

Exemplo: A superfície de uma esfera é um exemplo de espaço com curvatura positiva. No universo, isso pode ser representado por um espaço fechado e finito.

Curvatura Negativa (Espaço Hiperbólico):

Exemplo: A superfície de uma sela de cavalo é um exemplo de espaço com curvatura negativa. No universo, isso pode ser representado por um espaço aberto e infinito. Esses conceitos são essenciais para entender como a gravidade funciona e como o universo é estruturado.

Figura 4.11: Geometrias: Esférica, Euclidiana e hiperbólica



Fonte: https://www.slideserve.com/dallon/aula-n-4-os-pilares-da-cosmologia

5

A Teoria da Relatividade Restrita de Albert Einstein

Em 1903, Einstein publicou um primeiro artigo na revista alemã Annalen der Physik, de grande prestígio na época, onde considerou os fenômenos sob o ponto de vista de um fóton viajando à velocidade da luz.

Em 1905, Einstein publicou três artigos revolucionários: um tratava do movimento browniano de pequenas partículas em suspensão num líquido; outro explicava o efeito fotoelétrico com base na então recente hipótese do quantum de luz; e o terceiro, intitulado "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", foi o primeiro a introduzir a Teoria da Relatividade Restrita (ou especial), que era aplicada em movimento retilíneo e uniforme.

A relatividade restrita baseia-se em dois postulados. O primeiro é que a velocidade da luz no espaço livre tem o mesmo valor para todos os observadores, independentemente do estado de movimento deles. O segundo postulado, que pode ser chamado "princípo da relatividade", estabelece que as leis físicas são expressas pelas mesmas equações em todos os sistemas inerciais.

De acordo com (MATSUURA, 2003), toda construção lógica da Teoria da Relatividade Restrita está baseada nestes dois postulados. Para isso Einstein se viu compelido a relativizar o tempo e o espaço.

5.1 A Dilatacão do Tempo

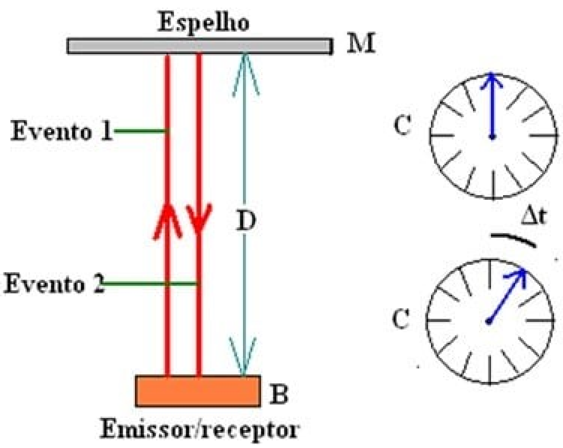
"Se a simultaneidade não é absoluta, o intervalo de tempo entre dois eventos também não é o mesmo para todos os referenciais inerciais. Assim, a marcha do tempo é relativa ao movimento do observador e não é possível manter o sincronismo entre relógios de dois sistemas inerciais em movimento relativo" (MATSUURA, p.48, 2003). (MATSUURA, 2003) ressalta que a expressão ditatação do tempo significa a duração maior de um evento que ocorre num sistema em movimento, quando medida não no tempo próprio desse sistema, mas no tempo próprio de um observador parado.

Imaginemos que estamos em um trem em movimento retilíneo e uniforme na velocidade v relativamente a uma estação; o conjunto inteiro está no vácuo. Segundo o princípio da invariância da velocidade da luz, um raio luminoso se propaga na velocidade c, quer em relação ao trem, quer em relação à estação.

Façamos então a seguinte experiência no trem: enviamos do vagão um impulso luminoso para a plataforma do trem, onde ele é refletido por um espelho, retornando assim ao ponto de partida. Se a altura do trem é d, então o tempo que o impulso gasta para fazer o vaivém é dado por:

$$t' = 2d/c. \tag{5.1}$$

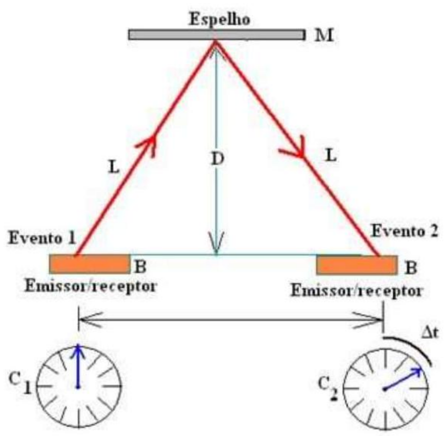
Figura 5.1: Emissão e Reflexão da luz (Perspectiva do passageiro)



Fonte: https://www.preparaenem.com/fisica/dilatacao-do-tempo.htm

Vamos considerar o mesmo evento agora visto da estação. Durante a experiência o trem se desloca em relação à estação: quando o impulso luminoso que parte do ponto B_1 chega no espelho, o ponto de impacto está em M para o observador da estação e, quando retornar ao vagão, o ponto estará em B_2. Assim, o impulso luminoso terá percorrido uma distância maior (os dois lados do triângulo isósceles B_1MB_2, em vez de duas vezes a altura d), mas com a mesma velocidade c, o que lhe exigiu mais tempo.

Figura 5.2: Emissão e Reflexão da luz (Perspectiva do observador na estação)



Fonte: https://www.preparaenem.com/fisica/dilatacao-do-tempo.htm

Consideremos na figura acima: Evento 1 = B_1, Evento 2 = B_2, Espelho = M e Interseção do segmento de medida D com a base do triângulo = C.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo B_1MC obtemos:

$$(MC)^2 = (B_1M)^2 - (B_1B_2/2)^2 \tag{5.2}$$

Se t designa a duração (desconhecida) do evento para um observador em repouso na estação, a distância percorrida pelo impulso para ir é, para esse observador:

$$B_1M = ct/2 \tag{5.3}$$

E a distância percorrida durante o mesmo tempo pelo trem é:

$$B_1C = B_1B_2/2 = vt/2 \tag{5.4}$$

Substituindo as equações (3) e (4) na equação (2) e sabendo que $MC = d$, obtemos:

$$d^2 = \left(c^2 - v^2\right) t^2/4 \tag{5.5}$$

Ou seja,

$$t^2 = \left(4d^2/c^2\right) \cdot \left(1/\left(1 - v^2/c^2\right)\right) \tag{5.6}$$

Substituindo na equação (1) $2d/c$ por t', obtemos a duração do evento no referencial da estação:

$$t = t'/\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \tag{5.7}$$

Fazendo $t = \Delta t$ e $t' = \Delta t_0$ teremos:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Δt_0 - tempo medido pelo observador em repouso (tempo próprio)
Δt - tempo medido pelo observador em movimento
v - velocidade do observador em movimento
c - velocidade da luz

O tempo medido pelo observador em movimento é igual ao tempo próprio multiplicado por um fator de correção, denominado fator de Lorentz. Assim, a fórmula pode ser reescrita como :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \Delta t = \gamma \Delta t_0.$$

Vamos exemplificar.

Suponhamos que dois relógios atômicos estejam perfeitamente sincronizados e que um deles seja colocado para se mover a 60% da velocidade de luz no vácuo).

passados 10s no relógio em repouso, quantos segundos terão passado no relógio que se movia em alta velocidade?

Vamos calcular o fator de Lorentz com as informações fornecidas. Observe:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0.36c^2}{c^2}}} \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.36}}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0.64}} \implies \gamma = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

Para obtermos qual foi o tempo medido pelo referencial em movimento, devemos multiplicar o tempo próprio pelo fator de correção de Lorentz.

$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \rightarrow \Delta t = 1.25 \times 10$

$\Delta t = 12{,}5s$

Portanto, caso um dos relógios se movesse com velocidade igual a 60% da velocidade da luz (0,6c), um evento de 10 s teria sua duração estendida para 12,5s. É importante ressaltar que só perceberíamos a dilatação do tempo caso observássemos o evento a partir do referencial em repouso e vice-versa.

O exemplo anterior foi retirado de “Dilatação do tempo” em:

https://brasilescola.uol.com.br/fisica/dilatacao-tempo.htm

Desta forma concluímos que a duração do evento não é a mesma conforme este é observado a partir do referencial da estação ou do trem. Para um observador na estação, o tempo transcorre mais lentamente no trem em movimento do que na estação: o tempo é dilatado.

5.2 A Contração Relativística do Comprimento

(MATSUURA, 2003) cita um exemplo bastante didático:

O tempo para um trem veloz percorrer uma certa distância entre dois pontos é medido por um observador na plataforma com o relógio da estação. A duração desse mesmo evento também é medida por um passageiro que viaja neste trem com seu respectivo relógio. Já sabemos que a duração medida pelo passageiro será menor que a medida pelo observador da estação. Ora, a velocidade do trem é a mesma para ambos os observadores. A distância que cada observador determina é a velocidade do trem multiplicada pelo tempo de cada observador. Assim, podemos concluir que para o observador em movimento houve uma contração do comprimento na direção do movimento. É importante ressaltar que a contração do espaço está intimamente relacionada com a dilatação do tempo.

Quando a velocidade é 87% da velocidade da luz a contração do espaço é de 50% e o tempo dilata ao dobro. Quando a velocidade é a da luz, o espaço se contrai até se anular, enquanto o tempo se dilata ao infinito, isto é, fica parado” (MATSUURA, p.51, 2003).

Quanto mais próximo da velocidade da luz estiver a velocidade relativa entre objeto e observador, mais evidente fica estes fenômenos relativísticos. A expressão abaixo nos fornece a contração do espaço:

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Onde, L_0 é o comprimento do objeto medido no mesmo referencial (comprimento próprio),
L é o comprimento do objeto medido por um observador com velocidade relativa ao objeto não nula,
v é a velocidade relativa entre o objeto e o observador,
c é velocidade da luz,
$\gamma(v)$ é o fator de Lorentz, definido como

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Vejamos um exemplo:

Imaginemos um objeto se deslocando a 80% da velocidade da luz, atravessando uma distância igual a $10km$, medida por um referencial em repouso. A distância percorrida pelo objeto em movimento será:

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Vamos considerar a velocidade v do corpo como $\mathbf{0{,}8c}$, ou seja, 80% da velocidade da luz. Sendo $\boldsymbol{L_0}$ a distância observada pelo referencial em repouso, teremos:

$$L = 10\sqrt{1 - \frac{0{,}8^2c^2}{c^2}}$$
$$L = 10\sqrt{1 - \frac{0{,}64}{1}}$$
$$L = 10\sqrt{1 - 0{,}64}$$
$$L = 10\sqrt{0{,}36} = 10 \cdot 0{,}6 = 6\ km$$

O exemplo anterior foi retirado de:
https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-fisica/exercicios-sobre-contracao-comprimento.

Portanto, o objeto em movimento percorrerá a distância de $6km$.

O comprimento sofreu uma contração em relação à medida do comprimento em repouso.

5.3 Equivalência Entre Matéria e Energia ($E = mc^2$)

Ainda em 1905, Einstein publicou outro artigo sobre a relatividade restrita: A inércia de um corpo depende do seu conteúdo de energia? Neste artigo Einstein apresentou sua Célebre Fórmula $E = mc^2$.

Segundo (MATSUURA, 2003), a variação da massa requer dispêndio de energia. Isso está na base da equivalência entre energia e massa. É o que a equação acima nos mostra. Nela E denota a energia total da partícula, m a massa (que varia com a velocidade) e c^2 é a velocidade da luz elevada ao quadrado.

"A energia é igual á massa vezes o quadrado da velocidade da luz. A velocidade da luz, claro, é enorme. Seu quadrado é quase inconcebivelmente maior. Por isso uma pequena quantidade de matéria, se completamente convertida em energia, tem um poder enorme. Um quilo de massa convertido em energia resulta em cerca de 25 bilhões de quilowatts-hora de eletricidade. Em termos mais vívidos: a energia da massa de uma uva-passa poderia fornecer a energia necessária para a cidade de Nova York durante um dia" (ISAACSON, p.155, 2007).

6

Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein

Após formular a teoria da relatividade restrita em 1905, Einstein percebeu que a mesma estava incompleta em pelo menos dois aspectos. Primeiramente, a teoria afirmava que nada poderia se propagar mais rápido que a luz; essa afirmação conflitava com a teoria da gravidade de Newton, uma vez que esta concebia a gravidade como uma força que agia instantaneamente sobre os objetos distantes. O outro aspecto é que a relatividade restrita aplicava-se em objetos com velocidade constante, ou seja, não contemplava a gravidade.

Segundo (ISAACSON, 2007), nos 10 anos seguintes Einstein dedicou todos seus esforços para elaborar uma teoria de campo da gravidade e com isso generalizar a sua teoria da relatividade incluído nela movimentos acelerados.

6.1 O Principio da Equivalência

Ao fim de 1907, Einstein teve seu primeiro avanço conceitual importante enquanto escrevia sobre relatividade para um anuário científico.

Segundo (ISAACSON, 2007), um experimento mental sobre o que um observador em queda livre sentiria levou Einstein a adotar o princípio de que os efeitos locais de acelerar e estar num campo gravitacional eram impossíveis de distinguir. Uma pessoa numa câmera sem janelas com os pés apoiados no chão (base da câmera) não seria capaz de distinguir se este acontecimento era pelo fato de a câmera estar no espaço sideral sendo acelerada pra cima, ou pelo fato de a câmera estar em repouso num campo gravitacional.

Isso levou Einstein a formular o "princípio da equivalência", que guiaria sua busca por uma teoria da gravidade e sua tentativa de generalizar a relatividade. "Percebi que seria capaz de estender ou generalizar o princípio da relatividade para aplicá-lo a sistemas acelerados, além dos que se moviam em velocidade uniforme", explicou ele mais tarde. "E, ao fazê-lo, supus que poderia resolver simultaneamente o problema da gravitação" (ISAACSON, p.206, 2007).

Einstein notou que uma consequência dessa equivalência é que a gravidade deveria curvar um raio de luz.

6.2 Espaço-Tempo Curvo

(ISAACSON, 2007) comenta que em 1912 Einstein abordou seu amigo Marcel Grossmann, cujas anotações ele usava quando faltava às aulas de matemática na Politécnica de Zurique. Grossmann era um matemático em Zurique que se especializara em Geometria.

“Grossmann, você tem que me ajudar ou vou enlouquecer”, disse Einstein.

Segundo (MLODINOW, 2004), ao pesquisar a literatura especializada, Grossmann descobriu a complexa e misteriosa obra de Riemann sobre geometria diferencial. Grossmann ressalta que a matemática que Einstein precisava existia e era “uma confusão terrível em que os físicos não deveriam se envolver”. Mas Einstein não só se envolveu mas tinha descoberto as ferramentas para formular a sua teoria. “A ideia central da relatividade geral é que a gravidade deriva da curvatura do espaço-tempo”, diz o físico James Hartle. “Gravidade é geometria”.

“Gauss e outros desenvolveram diferentes tipos de geometria capazes de descrever a superfície das esferas e outras superfícies curvas. Riemann levou o caso adiante: desenvolveu um modo de descrever uma superfície curva independentemente de como sua geometria mudava, mesmo que variasse de uma esfera para um plano e depois para uma hipérbole de um ponto ao outro. Ele também foi mais longe na análise da curvatura das superfícies bidimensionais e, com base no trabalho de Gauss, explorou as diversas formas como a matemática poderia descrever a curvatura do espaço tridimensional e até quadridimensional” (ISAACSON, p.210, 2007).

Riemann descobriu maneiras de determinar matematicamente a distância entre dois pontos no espaço, independentemente de quão curvo e retorcido seja ele.

(ISAACSON, 2007) comenta que Riemann usou um objeto matemático chamado tensor. Na geometria euclidiana, um vetor precisa mais do que um número para representá-lo (módulo, direção e sentido). Na geometria não euclidiana, onde o espaço é curvo, utiliza-se algo mais geral para incorporar mais componentes, são os chamados tensores métricos. Para espaços bidimensionais, o tensor métrico tem três componentes. Para o espaço tridimensional, tem seis componentes independentes. E quando chegamos no espaço quadridimensional, ou seja, quatro dimensões (comprimento, largura, altura e o tempo) conhecido como espaço-tempo, o tensor métrico possui dezesseis componentes, sendo dez deles independentes.

Além do tensor métrico de Riemann, Einstein adotou também os tensores dos matemáticos italianos Gregório Ricci-Curbastro e Tulio Levi Civita.

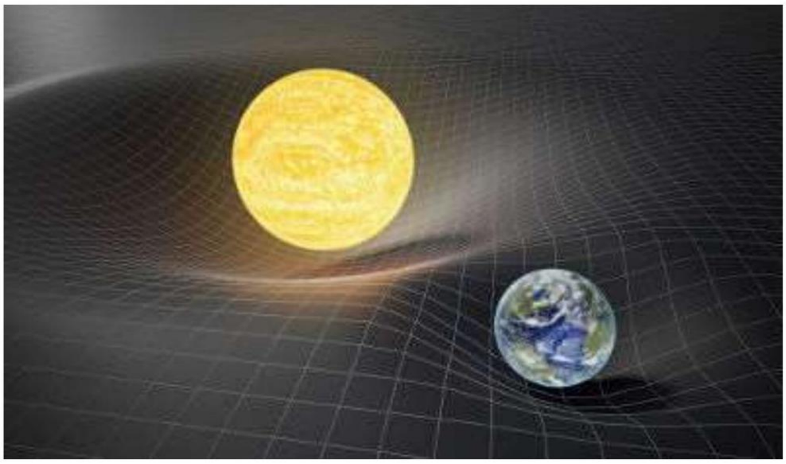
Segundo (ISAACSON, 2007), ao buscar a teoria da relatividade geral, Einstein tinha como meta encontrar as equações matemáticas que descrevessem dois processos complementares:

1. Como um campo gravitacional age sobre a matéria, dizendo a ela como se mover.

2. E, por sua vez, como a matéria gera campos gravitacionais, no espaço-tempo, dizendo a ele como se curvar.

Sua descoberta revolucionária foi que a gravidade podia ser definida como uma curvatura do espaço-tempo.

Figura 6.1: Grandes massas alteram a curvatura do espaço, produzindo a gravidade.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/teoria-relatividade-geral.htm

Anos depois, quando seu filho mais novo, Eduard, perguntou porque ele era tão famoso, Einstein respondeu usando uma imagem simples para descrever sua grande descoberta de que a gravidade era a curvatura no tecido do espaço-tempo. Quando um besouro cego anda sobre a superfície de um galho curvo, ele não percebe que o caminho percorrido é uma curva, disse. "Eu tive a sorte de perceber o que o besouro não percebeu" (ISAACSON, p.212, 2007).

6.3 A Fórmula do Universo

Einstein publicou a obra prima da sua vida, as equações de campo da Relatividade Geral em 1915. A equação revelou a origem e a forma do Universo, além de descrever coisas inconcebíveis, como os buracos negros. "A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço curvo diz à matéria como se mover", diz Jonh Wheeler, físico americano.

A equação de campo de Einstein, parte fundamental da teoria da relatividade geral, descreve como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo, resultando no fenômeno que chamamos de gravidade e representada matematicamente como:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}R_{g_{\mu v}} + \Lambda_{g_{\mu v}} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu v}$$

O lado esquerdo da equação representa a curvatura do espaço e do tempo.

Temos o tensor métrico $g_{\mu v}$ que nos permite obter a distância entre dois pontos do espaço-tempo, o tensor de Ricci $R_{\mu v}$ e o escalar de Ricci R.

O lado direito representa a matéria e a energia, onde o tensor de stress-energia-momento $T_{\mu v}$ nos diz quanta massa, velocidade e rotação existe num corpo.

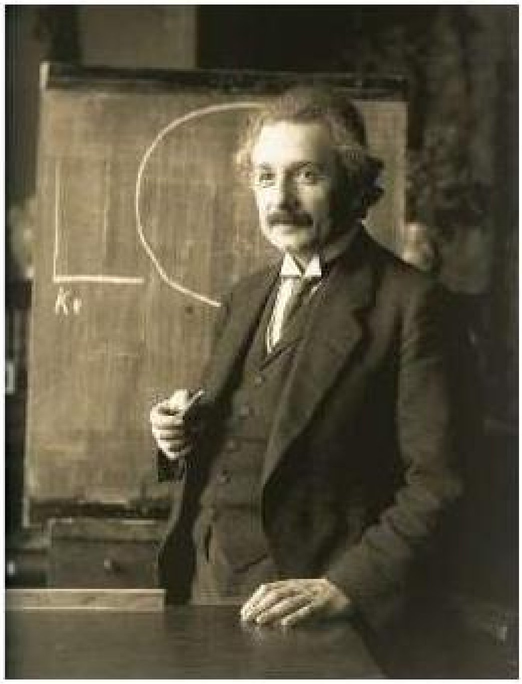
$8\pi G/c^4$ é a constante gravitacional de Einstein.

Λ é a constante cosmológica de Einstein.

Portanto as equações de alguma forma medem como o espaço-tempo é distorcido na presença dessa massa ou corpo e também nos diz qual a massa que precisamos ter para ter uma determinada geometria.

"A relatividade geral prediz as trajetórias-do-mundo da luz e dos corpos materiais no espaço-tempo que tem curvatura introduzida pela presença de matéria e/ou energia" (MATSUURA, p.79, 2003).

Figura 6.2: Albert Einstein durante aula em Viena, 1921. Foto: Ferdinand Schmutzer. Restaurada por Adam Cuerden



Fonte: https://www.infoescola.com/biografias/albert-einstein/

(ISAACSON, 2007) destaca sobre o registro do físico Brian Greene:

"Espaço e tempo tornam-se jogadores no cosmos em expansão. Eles ganham vida. A matéria aqui faz o espaço se curvar ali, o que leva a matéria aqui a se mover, o que leva o espaço lá a se deformar ainda mais, e assim por diante. A relatividade geral dá a coreografia para a ciranda cósmica do espaço, tempo, matéria e energia".

6.4 Encurvamento Gravitacional da Trajetória da Luz

De acordo com (MATSUURA, 2003), Einstein predisse um encurvamento gravitacional dos raios luminosos de estrelas que, antes de chegarem aos nossos olhos, tangenciam a superfície do Sol. Esse encurvamento da trajetória da luz traça a curvatura do espaço pela presença do Sol. Esse fenômeno só pode ser detectado por ocasião de eclipses totais do Sol.

Através de comparação de imagens das mesmas estrelas fotografadas seis meses antes ou depois, sem a presença do Sol, torna-se possível medir os deslocamentos angulares dessas estrelas de fundo próximas do disco solar.

O encurvamento gravitacional da trajetória da luz foi confirmado, no eclipse solar em 29 de maio de 1919, por uma equipe inglesa de astrônomos na ilha de Príncipe, na costa da Guiné, África. Esse mesmo eclipse foi observado por outra equipe inglesa no Brasil, mais especificamente na cidade de Sobral, Ceará. Foi a partir dessa confirmação que Einstein se tornou uma celebridade mundial.

Figura 6.3: Uma das fotografias do eclipse total tiradas em Sobral, (CE.)

Fonte: https://daed.on.br/sobral/

Figura 6.4: Imagem das equipes que observaram o eclipse total do sol no dia 29 de maio de 1919, em Sobral (CE).

Fonte: https://daed.on.br/sobral/

Da esquerda para a direita:
Equipe Brasileira: Luiz Rodrigues (1°), Theophilo Lee (2°), Henrique Morize (4°),

Allyrio de Mattos (7°), Domingos Costa (9°), Lélio Gama (10°), Antônio C. Lima (11°) e Primo Flores (12°).

Equipe Inglesa: Charles Davidson (5°) e Andrew Crommelin (6°).

Equipe Americana: Daniel Wise (3°) e Andrew Thomson (8°).

6.5 Lentes Gravitacionais

Outro fenômeno explicado pelo encurvamento da trajetória da luz é o das Lentes Gravitacionais. Um objeto massivo pode atuar como uma lente para a luz de um astro mais distante. Segundo (MATSUURA, 2003), numa situação ideal, se esse objeto massivo estiver exatamente na linha-de-visada, e se a Terra estiver na distância adequada, os raios luminosos do astro distante poderão ser convergidos na Terra de modo a concentrar os raios luminosos e aumentar o brilho aparente do astro. Quando a distância da Terra não é a ideal, em vez da concentração num único ponto, forma-se um anel ou pares de imagens simétricas ao redor da imagem do astro mais distante.

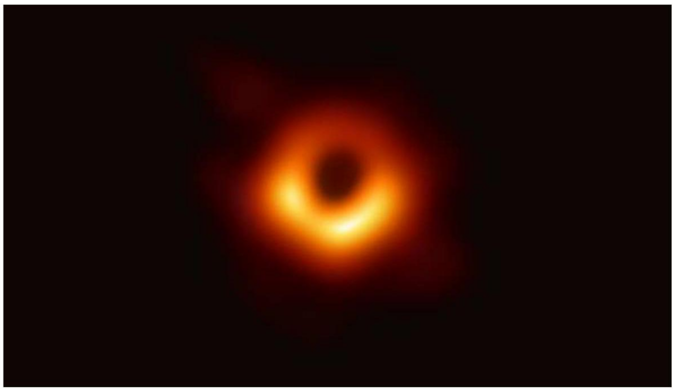
6.6 Buracos Negros

Enquanto servia o exército alemão no fronte russo, durante a Primeira Guerra Mundial, o astrofísico Karl Schwartzschild (1876-1916) tomou conhecimento da relatividade geral. Logo começou a refletir sobre as predições que poderiam ser feitas em relação às estrelas. Em poucos dias, calculou a curvatura do espaço-tempo ao redor de um objeto perfeitamente esférico e sem rotação. (MATSUURA, 2003) comenta que Schwartzschild enviou o trabalho para Einstein que o apresentou, em 1916, na sessão de 13 de janeiro na Academia Prussiana de Ciências em Berlim. Schwartzschild calculou em seguida o espaço-tempo no interior dessa esfera e também o enviou para Einstein, que o apresentou na Academia. Mas Schwartzschild morreu poucos meses depois.

Segundo Schwartzschild, se o Sol fosse contraído até um raio crítico de 18,5 km, ele se tornaria um buraco negro. Por causa da dilatação gravitacional do tempo, esse marcharia cada vez mais devagar, quanto mais se aproximar desse raio crítico vindo do exterior. Exatamente na superfície da esfera com o raio crítico, o tempo pararia, isto é, dilataria ao infinito. Por isso, essa superfície atua como um horizonte do buraco negro.

"A geometria de Schwartzschild, concebida para uma situação extremamente simples e idealizada, tornou-se fundamental no estudo, não só dos buracos negros, mas das mais importantes situações da relatividade geral que podem ser modeladas por uma concentração esférica de massa, tais como a anomalia do periélio de Mercúrio, o encurvamento gravitacional da trajetória da luz" (MATSUURA, p.86, 2003).

Figura 6.5: Pela primeira vez na história, imagem de um buraco negro é divulgada (Foto: Event Horizon / Twitter)



10 de abril de 2019 (Data histórica para a ciência mundial).
Fonte: https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Espaco/noticia/2019/04/primeira-foto-de-um-buraco-negro-um-dia-historico-paraciencia.html

7

Considerações Finais

A partir deste trabalho, podemos perceber o quanto a Geometria e a astronomia estão intimamente relacionadas desde a antiguidade, quando os primeiros modelos geométricos foram criados para explicar os fenômenos celestes. Ao longo da história, diversos avanços na matemática foram motivados ou influenciados pela astronomia, como a trigonometria esférica, a geometria analítica, o cálculo diferencial e integral, a mecânica celeste, a gravitação universal, a relatividade e a cosmologia. Neste trabalho, elencamos diversas situações de como a geometria, em suas diversas formas, desempenha um papel fundamental na compreensão e na descrição do universo.

Em particular, realizamos um resgate histórico sobre as geometrias euclidiana e não euclidianas comparando alguns conceitos importantes destas geometrias. Além disso, várias aplicações na astronomia tais como: A determinação da circunferência da Terra, a determinação das distâncias e posições dos astros, usando conceitos de geometria plana, esférica e analítica, a descrição dos movimentos dos planetas, usando as leis de Kepler, que são baseadas em propriedades geométricas das elipses, e as leis de Newton, que usam o cálculo para derivar as equações diferenciais que regem as órbitas.

Abordamos também, através da Teoria da Relatividade Restrita e Geral de Einstein, as novas concepções sobre a matéria, o movimento, o espaço, o tempo, energia, aceleração e gravidade. Em particular vimos na Relatividade Geral que a gravidade é uma consequência da curvatura do espaço-tempo causada por corpos massivos (como o Sol por exemplo), que é descrito por uma geometria não-euclidiana de quatro dimensões.

Portanto, a geometria desempenha um papel crucial na definição das propriedades do universo, como sua forma, seu tamanho, sua idade e seu destino.

Com este trabalho, esperamos ter contribuído para a divulgação e o ensino da geometria e da astronomia, mostrando como essas duas áreas do conhecimento humano se complementam e se enriquecem mutuamente. Também esperamos ter despertado a curiosidade e o interesse dos leitores por esses temas fascinantes, que nos permitem explorar a beleza e a complexidade do universo em que vivemos.

8

Referências Bibliográficas

1. ÁVILA, GERALDO. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga. In Explorando o Ensino da Matemática, vol. II, páginas 39 – 46.

2. MLODINOW, LEONARD. A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço / Leonard Mlodinow, tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo- Geração Editorial- 2004.

3. HART-DAVIS, ADAM. 160 Séculos de Ciência, volume 2: renascimento e iluminismo/ editor: Adam Hart- Davis; editor da edição brasileira: Luiz Carlos Pizarro Marin;[traduão: Aracy Mendes da Costa]. - São Paulo: Duetto Editorial, 2010.

4. Scientific American, série Gênios da Ciência. Galileu, Universo em Movimento. Texto: Enrico Bellone, prof. de história das ciências da Universidade de Pádua.

5. Scientific American, série Gênios da Ciência. Einstein, O Olhar da Relatividade. Texto: Silvio Bergia, prof. de física da Universidade de Bolonha.

6. ISAACSON, Walter. Einstein : Sua vida, seu universo./ Walter Isaacson; tradução Celso Nogueira...[et al].- São Paulo : Companhia das Letras,2007.

7. MATSUURA, Oscar T. Teoria da Relatividade. Oscar T. Matsuura. Super Interessante (Coleção para saber mais). Editora Abril, 2003

8. COUTINHO, Lázaro (2001). Convite ‘as geometrias não-euclidianas. 2 a edição. Rio de Janeiro: Interciência

9. ROBINSON, Andrew. Einstein: Os 100 anos da Teoria da Relatividade/ Robinson Andrew; tradução de Regina Lyra, Marco Mariconi; revisão técnica de Marco Mariconi. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

10. BOYER, C.B. História da Matemática/ Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach, tradução Helena Castro. 32a Edição, São Paulo: Editora Edgar Blucher LTDA,2012.

11. https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica. Acesso em 20/06/2023.

12. https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/6211/1/A%20importância%20da %20matemática%20no%20desenvolvimento %20da%20astronomia.pdf. Acesso em 23/06/2023.

13. http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acesso em 15/07/2023.

14. https://universodafisicaufes.wordpress.com/aristarco-de-samos/. Acesso em 25/08/2023.

15. https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo. Acesso em 09/09/2023.

16. https://www.famousmathematicians.net/bernhard-riemann/. Acesso em 10/10/2023.

17. file://C:/Users/AdminUser/Downloads/TCC Eligio%20(6).pdf

18. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Almagest_1.jpeg?uselang=pt #Licenciamento. Acesso em 11/10/2023.

19. https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm. Acesso em 15/10/2023.

20. Kepler e a órbita elíptica. Revista do Professor de Matemática. RPM 15,1987.

A

Apêndice I: Propostas de atividades a serem trabalhadas na educação básica

A.1 ATIVIDADE 1: Efeitos Relativísticos

Nesta atividade, exploraremos os fascinantes conceitos de espaço, tempo e relatividade, fundamentais para a compreensão da física moderna. A Teoria da Relatividade, desenvolvida por Albert Einstein, revolucionou nossa percepção do universo, mostrando que o tempo e o espaço não são absolutos, mas relativos ao observador. Discutiremos a dilatação do tempo e a contração do espaço, fenômenos que ocorrem em velocidades próximas à da luz.

Esta atividade contemplará conceitos como espaço, tempo, velocidade, teorema de Pitágoras; e tem como objetivo incentivar os alunos nas discussões em grupos, a aplicar esses conceitos em diferentes contextos, desenvolvendo uma compreensão crítica da relatividade.

Nesta atividade são contempladas as seguintes habilidades da BNCC:

1. (EM13CNT204) - Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra (espaço; tempo; distância; velocidade).

2. (EM13CNT101FIS01PE) - Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais, as transformações, as conservações e as variações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia mecânica e de movimento.

3. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.

Público – alvo: Alunos do ensino médio.
Duração: 1 hora e 40 minutos.

A.1.1 Introdução Teórica

Dilatação do tempo e Contração do espaço

Comece com uma breve explicação sobre a Teoria da Relatividade Especial, focando na contração do comprimento e na dilatação do tempo (Ver capítulo 5, sessão 5.1 e 5.2).

Explique sobre a invariância da velocidade da luz (c) independentemente do referencial (ver sessão 5.1).

Explique como objetos em movimento próximo à velocidade da luz parecem mais curtos em sua direção de movimento para um observador estático e como o tempo parece passar mais lentamente para o objeto em movimento (ver sessão 5.1 e 5.2).

A.1.2 Cenário Hipotético

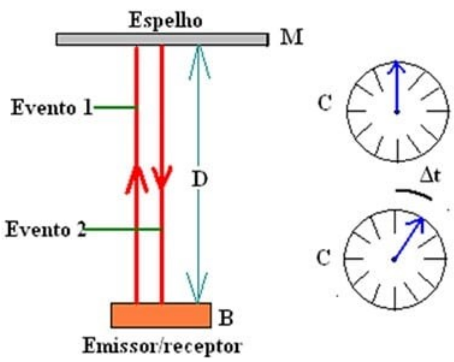
Peça aos alunos para imaginarem um trem que viaja a uma velocidade próxima à da luz (60% por exemplo). Dentro do trem há um espelho no teto do vagão.

Um raio luminoso é projetado no espelho e refletido.

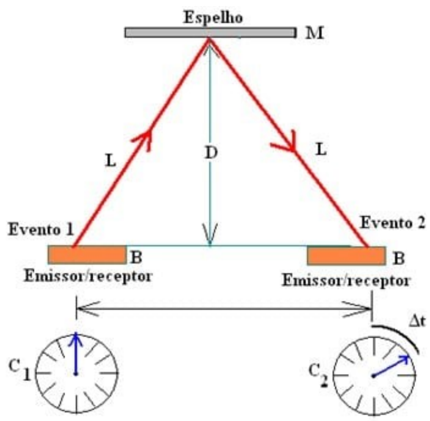
Tanto o passageiro quanto o observador possui um relógio.

Perspectivas:

- Um observador dentro do trem verá o caminho de ida e volta do raio luminoso formando um segmento vertical (distância percorrida pelo raio de luz) (ver sessão 5.1).



- Um observador na estação verá o caminho de ida e volta do raio luminoso formando um triângulo isósceles, ou seja, a distância percorrida pelo raio luminoso será maior, mas com a mesma velocidade c, o que lhe exigiu mais tempo (ver sessão 5.1).



A.1.3 Cálculos Relativísticos

Dilatação do Tempo: Peça aos alunos para calcular o tempo que o pulso de luz leva para ir de um espelho ao outro dentro do trem, tanto para um observador dentro do trem quanto para um fora dele, usando a fórmula da dilatação do tempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Δt_0 - tempo medido pelo observador em repouso (tempo próprio)
Δt - tempo medido pelo observador em movimento
v - velocidade do observador em movimento
c - velocidade da luz
Indague os alunos com a seguinte pergunta: Passados $10s$ no relógio em repouso, quantos segundos terão passado no relógio que se movia em alta velocidade? Os alunos observarão que a resposta será de 12,5 segundos (ver sessão 5.1).

Contração do Comprimento: Peça aos alunos para calcular o comprimento do trem do ponto de vista de um observador fora do trem, usando a fórmula da contração do comprimento:

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

em que
L_0 é o comprimento do objeto medido no mesmo referencial (comprimento próprio),
L é o comprimento do objeto medido por um observador com velocidade relativa ao objeto não nula,
v é velocidade relativa entre o objeto e o observador,
c é velocidade da luz,
$\gamma(v)$ é o fator de Lorentz, definido como

$$\gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Exemplo: Imaginemos um objeto se deslocando a 80% da velocidade da luz, atravessando uma distância igual a 10 km, medida por um referencial em repouso (ver sessão 5.2).

Peça aos alunos para efetuarem os cálculos para o obter a distância do objeto em movimento.

A.1.4 Discussão

Após os cálculos, promova uma discussão sobre os efeitos relativísticos e como eles desafiam nosso entendimento de espaço e tempo.

A.1.5 Conclusão

Finalize a atividade com uma reflexão sobre a importância da Teoria da Relatividade e da Geometria na compreensão do universo.

Observação:

a) Essa atividade pode ser trabalhada com os alunos individualmente ou em grupos.

b) Os cálculos podem ser feitos com o uso da calculadora.

c) A atividade engaja os alunos com cálculos matemáticos, conceitos geométricos (segmento, triângulos, distâncias, teorema de Pitágoras)

d) A atividade pode ser trabalhada de forma interdisciplinar incentivando os alunos a pensarem criticamente sobre conceitos fundamentais da física (Espaço, velocidade, tempo).

A.2 ATIVIDADE 2: Explorando Geometrias

Nesta atividade, os alunos serão introduzidos aos conceitos fundamentais das geometrias euclidiana e não euclidiana. Através de atividades práticas e discussões em grupo, eles irão explorar como diferentes postulados geométricos podem alterar a forma como entendemos o espaço e as formas.

Esta atividade tem como principais objetivos: Despertar a curiosidade dos alunos sobre diferentes formas de entender o espaço e incentivá-los a pensar de maneira crítica e criativa, explorar as diferenças entre geometria euclidiana, hiperbólica e elíptica; e aplicar conceitos de geometria não euclidiana em situações práticas.

Nesta atividade são contempladas as seguintes habilidades da BNCC:

1. (EF06MA23) - Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.

2. (EF06MA24) - Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos.

Público – alvo: Alunos do ensino fundamental e médio.
Duração: 1 hora e 40 minutos.

A.2.1 Comece com uma discussão sobre os três tipos de geometria

Explique como a geometria euclidiana é baseada em planos e retas, enquanto a geometria esférica lida com superfícies curvas como uma esfera, e a geometria hiperbólica envolve superfícies de Sela.

Explique que na geometria euclidiana, as retas paralelas nunca se encontram; na esférica, as retas "paralelas" eventualmente se encontram (como os meridianos na Terra); e na hiperbólica, há infinitas retas "paralelas" que podem passar por um ponto fora de uma reta dada (ver sessão 4.5).

A.2.2 Geometria Euclidiana:

Atividade Prática:

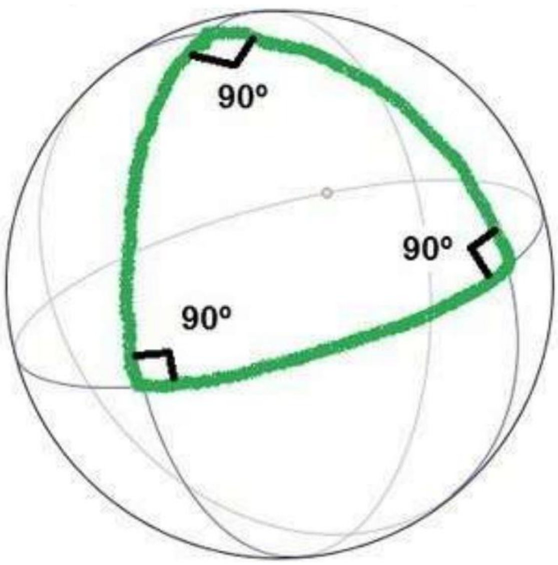
- Utilize papel quadriculado para que os alunos possam desenhar triângulos e calcular seus ângulos internos (usando transferidor), verificando que a soma é sempre 180 graus.

- Utilize papel quadriculado para que os alunos possam desenhar quadriláteros e calcular a soma destes seus ângulos internos (usando transferidor), verificando que a soma é igual a 360 graus.

A.2.3 Geometria Esférica:

Atividade Prática:

- Forneça aos alunos balões ou bolas para que eles possam desenhar triângulos na superfície curva e medir os ângulos internos, observando que a soma destes ângulos será maior que 180 graus.



Fonte: https://es.quora.com/Qué-tan-cierto-es-que-en-geometría-moderna-los-ángulos-internos-de-untriangulo-no-suman-180-grados

- Forneça aos alunos balões ou bolas para que eles possam desenhar quadriláteros na superfície curva e medir os ângulos internos, observando que a soma dos ângulos será maior que 360 graus.

- Use uma superfície esférica (como uma bola) para demonstrar geodésicas (o análogo de "linhas retas") e como elas se comportam de maneira diferente do esperado na geometria euclidiana.

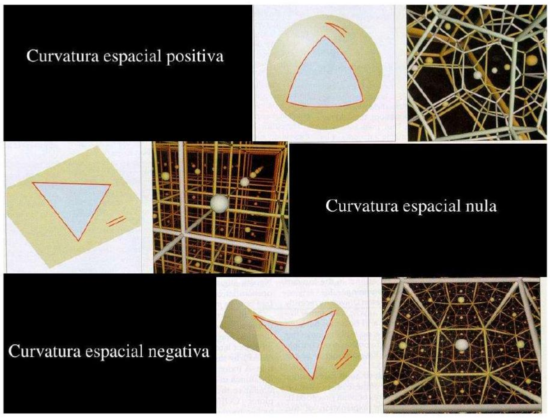
A.2.4 Geometria Hiperbólica:

Atividade Prática:

- Use folhas de papel vegetal para desenhar triângulos e distorcer a folha, formando uma superfície de Sela. Peça para medirem os ângulos internos e notarem que a soma será menor que 180 graus.
- Use folhas de papel vegetal para desenhar quadriláteros e distorcer a folha, formando uma superfície de Sela. Peça para medirem os ângulos internos e notarem que a soma será menor que 360 graus.
- Use modelos de papel apropriado que representem o plano hiperbólico e mostre como as linhas se comportam

A.2.5 Curvatura do Espaço

Faça uma breve associação da curvatura nula, negativa e positiva com as respectivas geometrias euclidiana, hiperbólica e esférica, respectivamente: nula na euclidiana, positiva na esférica e negativa na hiperbólica (ver sessão 4.6).



Fonte: https://www.slideserve.com/dallon/aula-n-4-os-pilares-da-cosmologia

A.2.6 Relatividade Geral

Introduza a ideia de que a teoria da relatividade geral de Einstein descreve a gravidade como uma consequência da curvatura do espaço-tempo causada pela massa e energia presentes (ver sessão 6).

A.2.7 Conexão com a Relatividade

Explique que, assim como as superfícies esféricas e hiperbólicas têm curvaturas que afetam as trajetórias das linhas, a presença de massa e energia no universo afeta a trajetória dos objetos, curvando o espaço-tempo ao redor deles (ver sessão 6).

A.2.8 Discussão e Conclusão

Promova uma discussão sobre as diferenças entre os resultados encontrados nas três geometrias.

Questione como essas geometrias podem ser aplicadas no mundo real e a importância de entender diferentes sistemas geométricos.

Essa atividade prática permite que os alunos visualizem e compreendam as propriedades fundamentais de cada tipo de geometria e como elas se diferenciam uma da outra.

É importante ressaltar que a geometria esférica pode ser associada à gravidade em torno de corpos massivos como estrelas e planetas.

Fazer com que os alunos percebam a importância da geometria na gravidade, na Astronomia e na compreensão do universo.