Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

O uso da linguagem computacional R como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas através do R Studio

João Wilson Ferreira Lima Junior

Teresina, 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

L732u Lima Júnior, João Wilson Ferreira.
O uso da linguagem computacional R como ferramenta para o ensino de funções trigonometricas através do R Studio / Joâo Wilson Ferreira Lima Júnior. -- 2024.
75 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientadora: Profa. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares."

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções trigonométricas. 3. Ensino médio. 4. Linguagem R I. Soares, Liane Mendes Feitosa. II. Titulo.

CDD 510.7

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

João Wilson Ferreira Lima Junior

O uso da linguagem computacional R como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas através do R Studio

Dissertação submetida a banca examidora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 14/08/2024.

Trabalho aprovado. Teresina, 14 de agosto de 2024:

Liane Mendes Feitosa Soares
Presidente da Banca examinadora

Antônio Kelson Vieira da Silva (UFPI)
Examinador Interno

Carlos Humberto Soares Júnior
Examinador Interno

Cicero Pedro de Aquino
Examinador Externo

Teresina
2024

Dedico esta dissertação a Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me guiar e me dar forças ao longo desta jornada, e à minha família pelo amor incondicional, apoio constante e compreensão. Sem vocês, este trabalho não teria sido possível.

Agradeço a Professora Dra. Liane Mendes Feitosa Soares, por sua orientação, dedicação e encorajamento para que este trabalho pudesse ser concluído.

Agradeço também os nobres professores deste curso de mestrado, por compartilharem seus conhecimentos e contribuírem para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Sem o apoio de cada um de vocês, este trabalho não teria sido possível.

E agradeço também os meus colegas de turma pelo suporte e colaboração, que tornaram esta experiência ainda mais enriquecedora. O apoio de vocês foi fundamental.

“"Ensinar é aprender duas vezes.".”

(Joseph Joubert)

Resumo

Esta dissertação explora o uso da linguagem R por meio do R Studio como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas no ensino médio. Com o intuito de proporcionar uma experiência de aprendizagem mais interativa e visual, foi proposta uma sequência didática que integra o R Studio como recurso principal. Este trabalho abrange uma revisão de literatura sobre funções trigonométricas e o uso de tecnologias educacionais, seguida da descrição da metodologia e da aplicação prática da sequência didática. Por fim, ressalta-se que o uso do R Studio facilita a visualização de conceitos trigonométricos complexos, aumentando a compreensão dos alunos e seu engajamento.

Palavras-chave: Ensino médio, funções trigonométricas, linguagem R, R Studio.

Abstract

This dissertation explores the use of the R programming language through R Studio as a tool for teaching trigonometric functions in high school. Aiming to provide a more interactive and visual learning experience, a didactic sequence was proposed, integrating R Studio as the main resource. The work includes a literature review on trigonometric functions and the use of educational technologies, followed by a description of the methodology and the practical application of the didactic sequence. Finally, it is emphasized that the use of R Studio facilitates the visualization of complex trigonometric concepts, enhancing students' understanding and engagement.

Keywords: High School, Trigonometric Functions, R Programming Language, R Studio.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Atualmente, o uso de novas tecnologias educacionais que auxiliem o aluno a compreender conteúdos de matemática vêm sendo constantemente utilizadas e adotadas como materiais de ensino em todos os níveis do processo educacional especialmente no ensino médio, visto que, os estudantes ao ingressarem nesse nível de ensino apresentam muitas dificuldades em compreender os conceitos matemáticos apresentados, muitas vezes ocasionado por déficits de aprendizado nas séries iniciais ou pela falta de ferramentas que facilitem a compreensão e possam proporcionar significado ao conteúdo abordado.

Diversas vezes os estudante acabam desestimulados por conta de terem bastante acesso a tecnologias e poderem perceber a praticidade que elas podem proporcionar e mesmo assim continuarem submetidos a métodos de ensino tradicionais, sendo que buscam por formas inovadoras de ensino que tragam dinamismo para as aulas através de ferramentas que estão conectadas com suas realidades.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a matemática no ensino médio possui um caráter formativo, que auxilia na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo e ainda é uma ferramenta bastante útil para o nosso cotidiano nas mais diversas atividades da vida humana.

Ainda de acordo os PCN:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCN, 1999)

É importante salientar que o conhecimento matemático permite que a pessoa possa agir de maneira mais crítica diante da realidade, visto que, segundo os (PCN, 1999) esse conhecimento não traz à condição dos alunos saberem diversas estratégias complexas, mas sim de terem a segurança de saberem usá-las no momento certo nos mais diferentes contextos.

No campo da matemática o estudo das funções reais no contexto de ensino da educação escolar é baseado na compreensão das definições, construções e interpretação de gráficos. Apresentado nos anos finais do ensino fundamental, mais precisamente no 9° ano, o conteúdo de funções serve como base para uma considerável parte dos conteúdos vistos no ensino médio com atenção especial no 1° ano, pois neste são revistos sobre uma ótica mais aprofundada os tópicos de função vistos no 9° ano, além de serem abordados outros tipos de funções.

Conforme proposta da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) para o conteúdo de funções no ensino médio, no 1° ano este deve ser visto como um tipo de relação de dependência entre duas variáveis com ideias dos conjuntos domínio e imagem associados a representações em gráficos assim como na forma algébrica. Já em relação ao 2° ano, o aluno deverá reconhecer funções que são definidas por duas ou mais sentenças conforme suas representações gráfica e algébrica, e ainda sendo capaz de identificar o domínio, imagem, além de perceber quando cada função dessa natureza é crescente e/ou decrescente. E finalmente no 3° ano saber aplicar o uso de funções como representativas de situações reais utilizando ou não tecnologias do meio digital. Também nessa série, o aluno deve ter domínio das variações que ocorrem nos gráficos de certas funções quando se altera coeficientes nas estruturas algébricas.

O ensino de matemática, em grande parte dos centros de ensino, ocorre de maneira tradicional onde são feitos muitos exercícios para estimular a mera memorização de conceitos, definições, teoremas e outros elementos presentes na matemática sem que sejam mostradas aplicações do conteúdo ensinado fazendo com que o aluno não tenha ideia de como utilizá-lo, a não ser para fins de atividades avaliativas. Biembengut e Hein (2011) reforçam que, existe um consenso a respeito do ensino de matemática ter que direcionar-se em promover o conhecimento matemático juntamente com a habilidade em usá-lo.

Diante desse contexto, utilizar ferramentas alternativas de ensino através do uso de tecnologias digitais que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem em matemática é imprescindível para que o aluno enxergue significado no conteúdo que é ensinado, além de poder perceber as aplicações práticas que possa ter. Mas é importante salientar que o uso dessas tecnologias não é somente para tornar o assunto ensinado atrativo para o aluno e/ou facilitar o trabalho do professor e sim que por ser uma nova linguagem, instigue o aluno a investigar para assim compreender os conteúdos e ainda potencializar a capacidade de enxergar significado. Nesse sentido, surge a seguinte indagação: de que maneira o software R por meio do R Studio pode contribuir no ensino de funções trigonométricas no ensino médio no sentido de auxiliar o professor no processo de ensino desse conteúdo? Esta pesquisa busca preencher uma lacuna no entendimento atual sobre estratégias eficazes no ensino de funções trigonométricas, explorando o potencial pedagógico do software R Studio como uma ferramenta inovadora no contexto educacional. Assim, o desejo é de não apenas contribuir para a melhoria do ensino de matemática, mas também para a promoção de métodos mais dinâmicos e eficazes na transmissão do conhecimento trigonométrico tendo como aliado um recurso computacional, portanto se fez necessário esse trabalho de dissertação com o propósito de promover uma ferramenta que possa melhorar a prática docente na educação básica, especialmente, no ensino médio.

Em conformidade com (Brasil, 2018) a nova BNCC na área de matemática e suas tecnologias, o aluno deve saber não apenas resolver os problemas, mas também formulá-los, descrevendo dados e selecionando modelos matemáticos e ainda desenvolver o pensamento computacional. Nesse sentido, fo levado em consideração o conteúdo de funções trigonométricas devido uma parcela considerável de estudantes terem dificuldades em aprender o conteúdo por envolver conceitos abstratos e, ainda, em conectar as fórmulas e propriedades com aplicações práticas. E com o propósito de auxiliar a diminuir essas dificuldades foi pertinente a escolha da linguagem computacional R por meio do software R Studio, visto que uma abordagem tecnológica facilita a superação de obstáculos conceituais e proporciona um aprendizado mais significativo. Portanto, o propósito deste trabalho é antes de tudo o de atuar como suporte educacional para docentes que procuram a utilização de recursos tecnológicos para enriquecer e assim melhorar à sua atuação em sala de aula proporcionando ao aluno ser protagonista, de fato, de sua própria aprendizagem.

Os Referenciais Curriculares da Sociedade Brasileira de Computação "considera os conhecimentos básicos de computação tão importantes para a vida na sociedade contemporânea quanto os conhecimentos básicos de matemática, filosofia, física ou outras ciências" (SBC, 2020, p.8). Nesse sentido, se faz necessário a inclusão do pensamento computacional no processo de ensino-aprendizagem, pois ainda conforme os referenciais curriculares da (SBC, 2020) em seu eixo 1 possibilita ao estudante a capacidade de compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas e, também soluções, de forma metódica e sistemática, através da construção de algoritmos.

Desse modo, o uso de tecnologias digitais no ensino médio é essencial para promover um maior protagonismo do jovem na sua formação e ainda adequá-lo na sociedade que está em constante desenvolvimento. O uso da computação nesse contexto é de grande valia, visto que, hoje vivemos em uma era de muitas informações e conforme as Diretrizes para ensino de Computação na Educação Básica (SBC, 2019, p.3) "a Computação investiga processos de informação, desenvolvendo linguagens e técnicas para descrever processos existentes e também métodos de resolução e análise de problemas, gerando novos processos". Assim é possível para o professor o uso do R Studio como ferramenta de ensino podendo proporcionar para o aluno uma melhor aprendizagem de funções trigonométricas potencializando a sua capacidade de abstrair que é uma habilidade fortemente ligada à matemática.

Segundo Guardia (2019), o software R como ferramenta de análise matemática pode ser utilizado como aparato de apoio ao ensino de matemática, pois desenvolve no aluno o raciocínio lógico e o pensamento computacional, sendo estes fatores imprescindíveis para se relacionar com o mundo moderno. Desse modo, a linguagem de programação R será utilizada para a compreensão das funções trigonométricas de um ponto de vista algébrico e geométrico por ser uma linguagem em que sua popularidade aumentou consideravelmente nos últimos anos sendo utilizada com frequência no ambiente acadêmico sendo de acesso gratuito e fácil de aprender.

A linguagem R foi criada em 1996 por Ross Ihaka e Robert Gentleman que quando ligada a um ambiente integrado é possível fazer manipulação de dados, cálculos e ainda gerar gráficos (Maia; Pertenelli; Mello, 2010). "É importante salientar que o R não é um programa estatístico, mas que devido a suas rotinas permite a manipulação, avaliação e interpretação de procedimentos estatísticos aplicado a dados" (Maia; Pertenelli; Mello, 2010, p.6). Portanto, além de tarefas estatísticas ainda é possível fazer outras operações matemáticas, e também gerar diferentes tipos de gráficos com total controle do usuário.

Visto que o uso dessa linguagem será através do R Studio; este é um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) para a linguagem de programação R, no qual fornece uma interface de fácil manuseio para os usuários que trabalham com análise de dados, estatísticas e visualizações. Possibilita, ainda, uma ótima interação, onde os comandos podem ser digitados e executados linha por linha, permitindo uma análise interativa dos dados. O usuário do R Studio organiza seu trabalho em projetos, permitindo a fácil organização de arquivos, scripts e dados. Com isso, o programa ajuda a manter o contexto de trabalho e colaborar com outros usuários. No campo de visualizações interativas permite a criação de gráficos interativos diretamente no ambiente do R Studio utilizando a biblioteca ggplot2, destacando que este será o pacote será o utilizado para a criação de gráficos relacionados a funções trigonométricas.

Este trabalho tem como objetivo geral utilizar a linguagem computacional R como uma ferramenta de ensino para auxiliar no processo de ensino aprendizagem motivando o professor a ensinar com o uso de tecnologias digitais ao invés de somente métodos tradicionais proporcionando, assim, uma abordagem prática, interativa e personalizável para o ensino de funções trigonométricas e provendo uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos.

Os objetivos específicos são, E os objetivos específicos são, enfatizar a importância do uso de tecnologias digitais para o ensino de funções trigonométricas, compreender a linguagem R para executar no R Studio, criar uma sequência didática que possa ser aplicada para alunos de ensino médio que envolva o uso da linguagem R por meio do R Studio como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas.

No tocante a estrutura deste trabalho de dissertação:

1. É apresentada a revisão de literatura abordando o contexto histórico e os principais conceitos sobre funções trigonométricas, uso de tecnologias educacionais em sala de aula. Este capítulo fornecerá a base teórica que sustenta a pesquisa.

2. É abordado os softwares R e R Studio, inicialmente, também, por meio de um breve contexto histórico, onde pode ser executado, bem como instruções de instalação e uso e suas aplicações no ensino de matemática, apresentar as atividades propostas com uso do R Studio com o intuito de incentivar os alunos para o estudo de funções trigonométricas bem como servir de auxílio para o professor de modo a facilitar o ensino do conteúdo proposto.

3. Por fim, são mostradas as conclusões obtidas com as atividades propostas e as considerações finais deste trabalho de dissertação.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Um pouco da história da trigonometria

Há uma incerteza quanto a origem da trigonometria, porém, segundo Darela (2011) as primeiras evidências em rudimentos do uso da trigonometria apareceram no Egito seguido de Babilônia e China, através do cálculo de razões entre números e entre lados de ângulos semelhantes. Conforme o problema 56 do Papiro de Rhind há rudimentos de trigonometria e triângulos semelhantes. Quando as pirâmides eram construídas era necessário manter constante a inclinação das faces, fato esse, que pode ter levado os egípcios a inserir um conceito equivalente ao de cotangente (Boyer, 1999). “A palavra egípcia seqt significava o afastamento horizontal de reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura” (Boyer, 1999, p.14). No papiro não ficou claro o que significava essa palavra, mas de acordo com Costa (2003) pelo contexto da situação expressa em relação as pirâmides, a palavra seqt tem um significado equivalente ao de cotangente.

No Egito, outro indício do uso da trigonometria ocorreu aproximadamente em 1500 a.C. que foi a associação entre as sombras projetadas por uma vara vertical com sequências numéricas, onde cada comprimento correspondia com uma certa hora do dia. Portanto, já era possível se chegar à conclusão de que tal ideia já introduzia o que viria ser alguns séculos depois as funções tangente e cotangente (Costa, 2003).

> "Os egípcios também tiveram a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical às sequências numéricas, relacionando, assim, o comprimento da vara com as horas do dia, formando um relógio de sol, que poderia ser chamado de gnômon"(Darela, 2011, p.179).

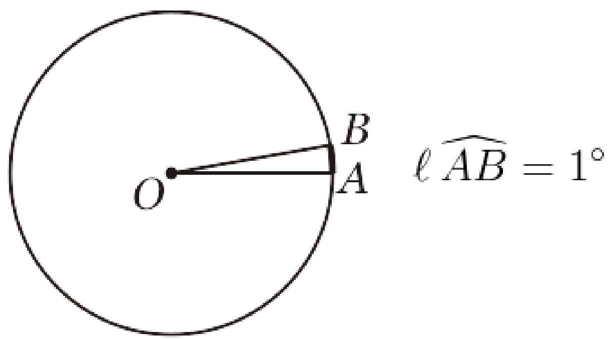
Segundo Darela (2011), na babilônia o uso da trigonometria esteve ligado à ciência e à religião. Nesse contexto eram criados os calendários para atividades de plantio e de astrologia, e ainda eram estudadas as fases da lua, as estações do ano, além dos pontos cardeais. E na china foi evidenciado o uso da trigonometria em aproximadamente 1100 a.C. onde os triângulos retângulos tinham a utilidade de medir distâncias, comprimentos e profundidades. Posteriormente, os conhecimentos de trigonometria adquiridos pelos egípcios, gregos e chineses foram transmitidos aos gregos.

Na Grécia, os conhecimentos sobre trigonometria tiveram um grande desenvolvimento que chegou a superar os seus mestres fazendo com que os gregos se tornassem exemplo para o restante do mundo. Dentre os principais matemáticos gregos que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria estavam Erastótenes, Hiparco de Niceia e Claudio Ptolomeu.

Erastótenes, nascido na cidade de Cirene no oeste da Grécia, estudou na escola de Platão. Além de matemático, também se destacou como astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Conforme Darela (2011), era conhecido como β (beta) que é a segunda letra do alfabeto grego por não ter conseguido ser o precursor nas ideias que desenvolveu ao longo de suas atividades intelectuais. Todavia, foi o primeiro a demonstrar o comprimento do círculo máximo da terra analisando as sombras que eram projetadas por colunas verticais nos municípios de Alexandria e Siena.

Hiparco de Niceia não só foi matemático como também astrônomo, construtor e cartógrafo. Teve uma grande influência da matemática desenvolvida na babilônia. Desse modo, acredita-se que foi Hiparco o idealizador da circunferência em 360 partes iguais onde cada uma dessas partes recebeu o nome de 1 grau.

Figura 1 – Arco de 1 grau



Fonte: O baricentro da mente (2014).

Ainda de acordo com Darela (2011), as contribuições mais importantes de Hiparco foram na área de trigonometria em que lhe foi atribuída por meio de Têon de Alexandria uma obra acerca de um tratado composto por doze livros que versa sobre a construção de uma tábua trigonométrica.

Ptolomeu, natural de Alexandria foi geômetra, filósofo e astrônomo. Contribuiu com diversos ramos da ciência, porém seu maior destaque foi na trigonometria. Teve como mais importante obra um tratado composto por treze livros conhecida como Almagesto, nessa obra é encontrada uma tábua trigonométrica onde são dadas as medidas de cordas entre 0° e 180° variando a cada meio grau. Ele pode ter dado o sinal da famosa relação fundamental da trigonometria, além de ter tido conhecimento do que atualmente são as relações de soma e diferença de arcos em relação ao seno e cosseno.

Para Costa (2013), o conceito de função não foi desenvolvido na Grécia antiga, mas em estudos de autoria de Aristóteles constam ideias sobre quantidade variáveis. O desenvolvimento das funções trigonométricas está profundamente enraizado na história da matemática e tem suas origens em várias civilizações antigas, portanto, essas funções evoluíram ao longo dos séculos, combinando contribuições de várias culturas e períodos históricos.

Foi na Europa do século XIV que alguns passos foram dados culminando no desenvolvimento da matemática. Foi nesse contexto que pela primeira vez as ideias de quantidades variáveis e de funções. "Paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, que já vinha ocorrendo na Europa desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das 12 funções" (Costa, 2013, p.12).

> "As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no Canon 13 DoctrinaeTtriangulorum de Joachim Rhaeticus em Leipzig, 1551, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto perpendiculum, basis e hypotenusa" (Costa, 2013, p.13,14).

Segundo Nogueira (2013), entre 850 e 929 que um matemático árabe chamado al-Battani utilizou a trigonometria dos hindus com o acréscimo de uma ideia genial que foi o uso do círculo de raio unitário surgindo, assim, a função seno. E mais tarde, em meados do século X, os matemáticos islâmicos já estavam fazendo uso das funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

2.2 O uso de softwares educacionais no ensino de matemática

Em plena Era da Informação é inegável que o uso de tecnologias na educação tem se tornado uma prática cada vez mais comum em sala de aula. Melo (2015) afirma que, com a chegada das transformações de cunho social, cultural, educacional, comportamental, político e econômico vem se definindo uma nova referência tecnológica que acaba por gerar uma nova cultura que é consequência da utilização das atuais tecnologias. No campo educacional, com ênfase nas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), é gerado um grande impacto em sua dinâmica, visto que, na educação presencial, por exemplo, são enxergadas como fortalecedoras do processo de ensino-aprendizagem (Melo, 2015) e de um modo geral, consoante Lima (2021) fazem com que as aulas se tornem mais interessantes fazendo com que o aluno tenha a chance de gerar conhecimento de maneira independente e que tenha significado.

No ensino de matemática as tecnologias oferecem uma variedade de ferramentas e recursos que podem tornar o seu aprendizado mais envolvente, interativo e acessível para os alunos.

> "Especificamente, o ensino de matemática, associado ao uso de recursos tecnológicos permitem aos professores e alunos alcançarem novos olhares sobre o objeto de estudo, explorando e consolidando conceitos rumo à construção de um conhecimento sólido e de maneira mais agradável e diversificada" (Maltempi, 2012, Apud,Gonçalves, 2019, p.54).

Nesse sentido os softwares educacionais se tornaram um poderoso aliado no ensino de matemática, visto que, geralmente são projetados para serem interativos e envolventes. Podem apresentar conceitos matemáticos de uma forma mais dinâmica e atraente, o que ajuda a capturar a atenção dos alunos e a manter seu interesse ao longo das aulas.

Nessa conjuntura, entra em cena a computação aplicada no ensino de matemática por meio do pensamento computacional que é uma abordagem que visa desenvolver habilidades de resolução de problemas e raciocínio lógico utilizando conceitos e técnicas da computação. Conforme define a Sociedade Brasileira de Computação em suas diretrizes para o ensino de computação na educação básica (SBC, 2017), "o Pensamento Computacional se refere à capacidade de compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas (e soluções) de forma metódica e sistemática, através da construção de algoritmos"(SBC, 2017, p.5). Portanto, quando integrado ao ensino de matemática, o pensamento computacional permite aos educadores ajudar os alunos a desenvolver não apenas habilidades matemáticas, mas também habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico, colaboração e criatividade.

Existem os softwares para o ensino de matemática, pois estes também visam promover a compreensão dos conceitos matemáticos, além de desenvolver habilidades cognitivas e de resolução de problemas por parte dos alunos. Conforme Feitosa e Pinto (2023), os softwares educativos instruem de forma programada por meio da execução de exercícios ensinados pelo computador aos alunos e ainda:

> "Utilizam simulações possibilitando ao aluno manipular situações reais ou casos imaginários emitidos pela memória artificial do computador, e observar os usos dos gráficos, textos e animações que estimulam a organizar e estruturar as variáveis de situações do cotidiano" (Feitosa; Pinto, 2023, p.443).

É importante salientar que é necessário no cenário atual da educação o ensino de matemática com o uso do computador através do uso de softwares educativos devido serem, segundo Feitosa e Pinto (2023), recursos simbólicos que mediam o conhecimento sendo, portanto, uma ferramenta poderosa para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem devido ter como principais vantagens a capacidade de tornar o aprendizado mais atraente e capaz de envolver o estudante. No entanto conforme explica Valente

(1999), o aprender não deve ser restrito somente ao software, e sim a interação do aluno com o software, por isso é de fundamental importância a escolha correta do programa computacional que será utilizado pelo educador para que o aluno possa alcançar a compreensão do conteúdo abordado em sala de aula. Valente (1999) ainda ressalta que softwares que usam programação favorecem o alcance desse patamar de entendimento em vista de outros que não apresentam essa característica de programar requerendo, assim, uma maior participação do professor fazendo com que seja necessário a criação de situações extras para que seja possível a compreensão.

> “Quando o aprendiz programa o computador, este pode ser visto como uma ferramenta para resolver problemas. O programa produzido utiliza conceitos, estratégias e um estilo de resolução de problemas. Nesse sentido, a realização de um programa exige que o aprendiz processe informação, transforme-a em conhecimento que, de certa maneira, é explicitado no programa” (Valente, 1999, p.90,91).

Portanto, a programação termina por ser uma ferramenta poderosa e eficaz no ensino de matemática, pois aluno é instigado a utilizar a criatividade para resolver um determinado problema proposto dentro do conteúdo ensinado, visto que, a visualização de conceitos matemáticos em muitos casos são abstratos e podem ser difíceis de compreender apenas com explicações teóricas e nesse contexto o uso de linguagens de programação permite aos alunos criar visualizações interativas, gráficos e animações que os ajudam a compreender melhor esses conceitos. Por exemplo, ao ensinar funções, os alunos podem escrever um código para plotar gráficos e visualizar como diferentes parâmetros afetam a forma da função.

No entanto, é importante frisar para ser possível ter sucesso com o uso da programação no ensino de matemática depende muito da forma como é integrada ao currículo, da disponibilidade de recursos adequados e do apoio da comunidade escolar. Além disso, é fundamental que os alunos não somente aprendam a escrever código, mas também entendam os conceitos matemáticos envolvidos e saibam aplicá-los de maneira significativa em diferentes contextos.

Para isso é importante que o professor ao adotar essa estratégia de ensino precisa, segundo Jordão (2009), ter propriedade sobre esses recursos tecnológicos e saber incorporá-los a sua rotina em sala de aula. E ainda destaca que:

> “Somente formações que permitam reflexão crítica, planejamento e, acima de tudo, a vivência da aplicação das estratégias envolvendo as tecnologias digitais com os alunos, durante o processo de formação, podem trazer benefícios para a educação” (JORDÃO, 2009, p.10).

Em vista disso, o professor deve ser visto como o facilitador da aprendizagem e não somente aquele que, em sala de aula, aplica o conteúdo e o estudante tem que aprender. (Reginaldo, Baldessar e Fernandes, 2014) afirmam que o professor na ótica do aluno é um motivador do processo de ensino-aprendizagem atuando como uma conexão entre o aprendiz e o objeto de aprendizagem. E nesse contexto

> "É vital para o professor entender a forma como o aluno de hoje aprende, e se preparar para utilizar estratégias que tornem a aprendizagem prazerosa e significativa" (JORDÃO, 2009, p.10).

Portanto, é essencial que o educador identifique e compreenda as necessidades individuais e coletivas dos alunos, bem como os recursos tecnológicos disponíveis. Isso envolve conhecer as habilidades dos alunos, seus estilos de aprendizagem e os objetivos de aprendizagem específicos para depois selecionar e adaptar as tecnologias educacionais de acordo com os objetivos de aprendizagem e as características dos alunos. Jordão (2009) ainda reforça que o professor precisa pôr em prática os conceitos vistos e verificar se é viável a utilização destes e se as estratégias aplicadas serviram para os alunos de acordo com suas realidades. Isso envolve a escolha de aplicativos, plataformas online, softwares ou dispositivos que complementem e enriqueçam o processo de ensino e aprendizagem.

2.3 Funções trigonométricas

Esta seção versa sobre as funções trigonométricas. Essas funções são de grande utilidade e estão presentes em vários ramos da matemática. Ocorrem de forma mais conveniente na circunferência de raio unitário, mas antes desse assunto ser mais aprofundado veremos alguns conceitos básicos, porém necessários.

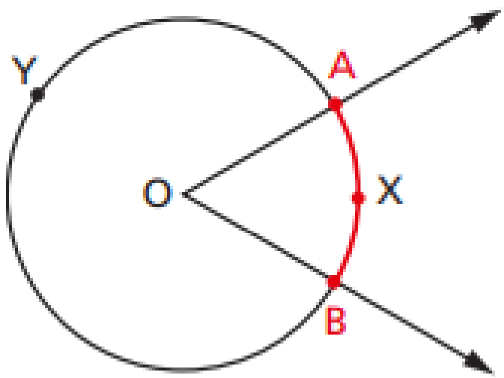
Definição 2.1. Ângulo é a reunião de duas semirretas orientadas que possuem a mesma origem.

Definição2.2. Seja uma circunferência de centro O e raio e ângulo central AÔB. Considere os pontos A e B que pertencem aos lados do ângulo e a circunferência, portanto a circunferência ficará dividida em duas partes denominadas arcos de circunferência sendo um AXB e o outro AYB com A e B como extremidades (Iezzi, 2013).

Definição 2.3. O ângulo que tem o seu vértice no centro da circunferência que o contém é denominado ângulo central.

No contexto dos arcos de circunferência somos levados a efetuar as suas medidas. Se quisermos comparar dois arcos de circunferência devemos encontrar uma forma que permita concluir qual deles é o maior ou se ainda possuem a mesma medida. Uma forma

Figura 2 – circunferência de centro dividida nos arcos AXB e AYB



Fonte: Iezzi (2013).

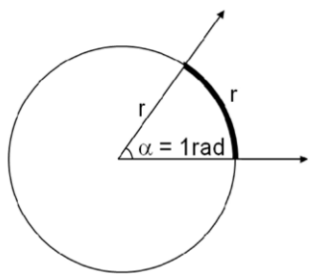
de se chegar a essa conclusão é tomando um arco unitário e observando quantas vezes o arco unitário cabe em cada um dos dois arcos.

Para Iezzi (2013) ocorreriam confusões de adotar uma unidade de medida para arcos se caso cada um escolhesse a sua, portanto se fez necessário limitar a apenas duas unidades, o grau e o radiano.

Definição 2.4. Grau é o arco unitário de medida $\frac{1}{360}$ da circunferência que o contém. E ainda temos que a medida tomada em graus de um arco de circunferência equivale a medida do seu ângulo central correspondente.

Definição 2.5. O radiano é definido como um arco cujo seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Figura 3 – Representação do arco de 1 radiano



Fonte: https://app.estuda.com/questoes/?id=7018258

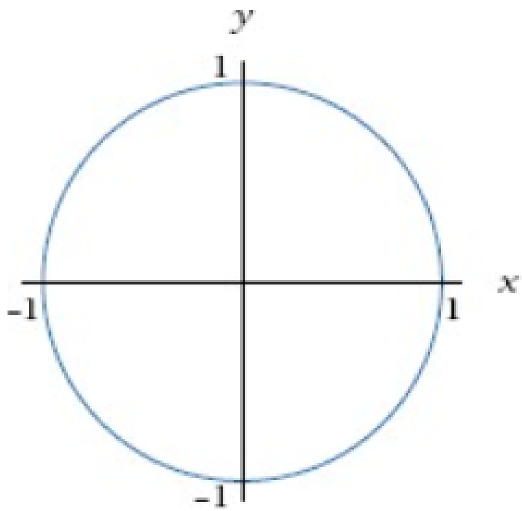
Segundo Iezzi (2013), uma circunferência mede 360°, já em radiano não é tão simples assim informar quanto mede uma circunferência, mas que é possível estabelecer uma correspondência, visto que, um radiano cabe aproximadamente seis vezes numa circunferência, isto é, 6,2831...rad que podemos utilizar na forma 2*pi* rad de modo que torne simples a correspondência.

360° ——————— $2pi$
180°———————- pi

Desse modo, é possível ter a medida da circunferência assim como de arcos de circunferência tanto em graus quanto em radianos.

No contexto da circunferência unitária, isto é, com raio igual a 1 a trigonometria se desenvolve de maneira mais confortável (Axler, 2016). Este ente geométrico intercepta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas (1, 0), (0, 1), (-1, 0) e (0, -1) e conforme Axler (2016), no plano xy é conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 1$ (equação da circunferência de raio 1).

Figura 4 – A circunferência unitária



Fonte: Axler (2016).

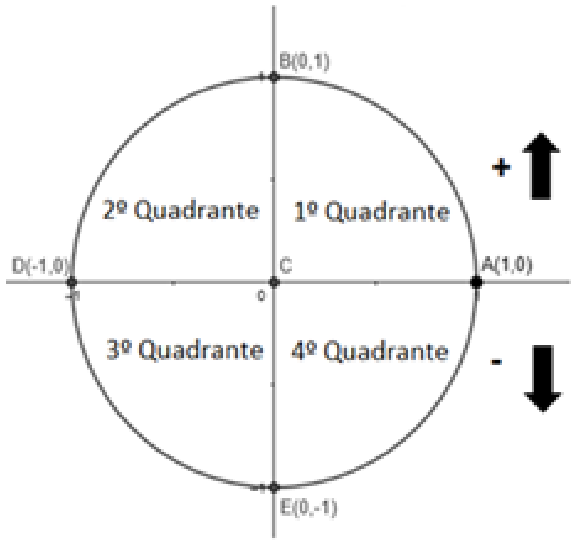
Com a ideia de circunferência de raio unitário é possível adentrar no ambiente do ciclo trigonométrico que desempenha um papel fundamental na trigonometria e que será definido a seguir.

Definição 2.5. Define-se como ciclo trigonométrico a circunferência de raio 1 com centro na origem de um plano cartesiano de eixos coordenados, onde esses eixos dividem o plano em quatro regiões iguais denominadas quadrantes.

É possível fazer uma correspondência que consiste em associar a cada número real x, com $0 \leq x < 2\pi$, um único ponto P da circunferência trigonométrica da seguinte forma:

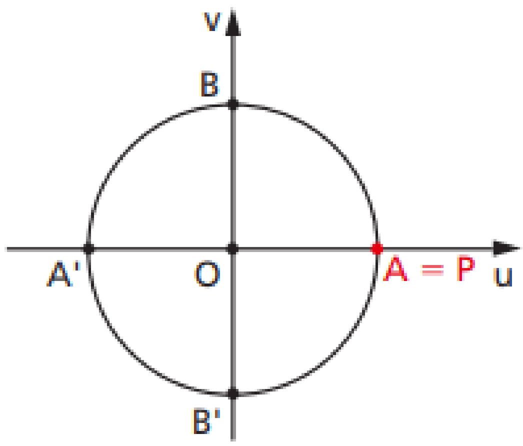
1. Se $x = 0$, então P coincide com a origem do ciclo (ponto A).

Figura 5 – Ciclo trigonométrico dividido em quadrantes



Fonte: https://dex.descomplica.com.br/materiais-e-tv-uee/materiais-e-tv-uee-8c9a03/semi-enem-retransmissao-ciclo-trigonometrico-e-reducao-de-quadrantes/explicacao/1

Figura 6 – Ponto P coincidindo com a origem do ciclo trigonométrico.



Fonte: Iezzi (2013).

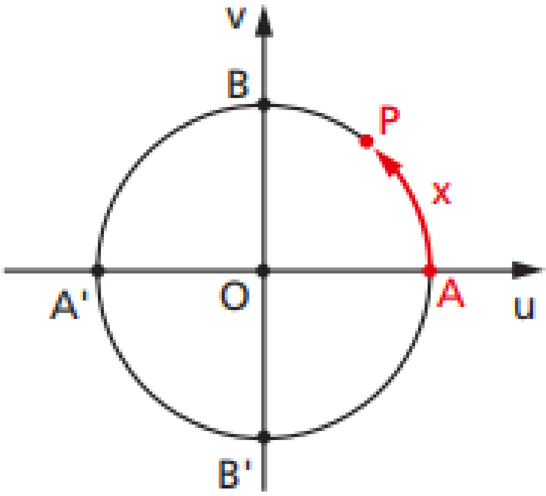
2. Se $x > 0$, então a partir da origem do ciclo (ponto A), no sentido anti-horário, marcamos um arco de medida x tendo P como a outra extremidade.

O próximo conceito a ser abordado se trata de funções periódicas e, em particular, nas funções trigonométricas a periodicidade desempenha um papel crucial.

Definição 2.5. Sejam os conjuntos X e Y, não vazios, e uma função $f : X \to Y$. Dizemos que f é periódica se existir um número real k positivo tal que $f(x + k) = f(x)$ para todo x real.

As funções trigonométricas são periódicas e são fundamentais para modelar e

Figura 7 – Representação do ponto P no ciclo para um número real x > 0.

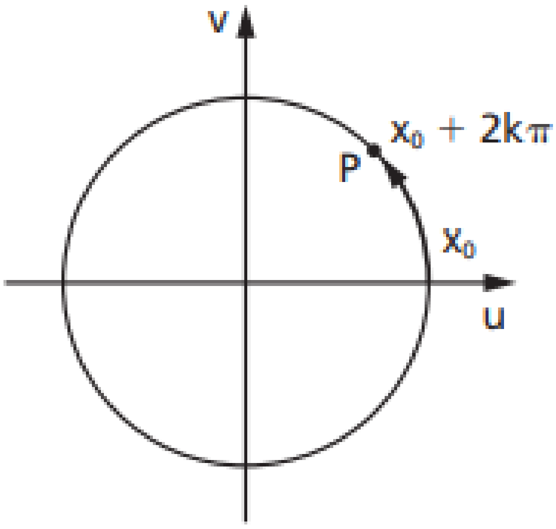


Fonte: Iezzi (2013).

entender uma variedade de fenômenos naturais e físicos. Sua aplicabilidade abrange desde problemas matemáticos básicos até aplicações mais avançadas em campos como engenharia, física, música e ciência de dados.

Nesse contexto de periodicidade de funções que são aquelas em que seus valores se repetem a cada determinado intervalo, existe a ideia de arcos côngruos que são arcos que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico, isto é, sendo P a imagem de um número real x0, então é imagem de todo $x = x_0 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ como ilustrado na figura 8.

Figura 8 – Representação no ciclo trigonométrico de P como imagem x e seus arcos côngruos.



Fonte: Iezzi (2013).

Os eixos coordenados dividem a circunferência trigonométricas em quatro quadrantes iguais. Considerando um número real x, no sentido de encontrar a sua imagem P no ciclo, conforme Iezzi (2013), podemos fazer uso da seguinte linguagem:

1. x pertence ao primeiro quadrante se, e somente se, $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
2. x pertence ao segundo quadrante se, e somente se, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$.
3. x pertence ao terceiro quadrante se, e somente se, $\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.
4. x pertence ao quarto quadrante se, e somente se, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$.

2.3.1 Função seno

Definição 2.8 A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x o real $sen\ x$, isto é, $f(x) = sen\ x$ é denominada função seno.

2.3.1.1 Características da função seno

- A função seno é tal que $-1 \leq sen\ x \leq 1$, isto é, possui imagem no intervalo $[-1, 1]$;
- É periódica de período 2π, ou seja, $senx = sen(x + 2k\pi)$;
- É uma função ímpar, pois $f(-x) = -senx = -f(x)$;
- Se x está no primeiro ou no segundo quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no terceiro ou quarto quadrante, $f(x) < 0$;
- Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, $f(x)$ é crescente e se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, $f(x)$ é decrescente.

2.3.1.2 Gráfico

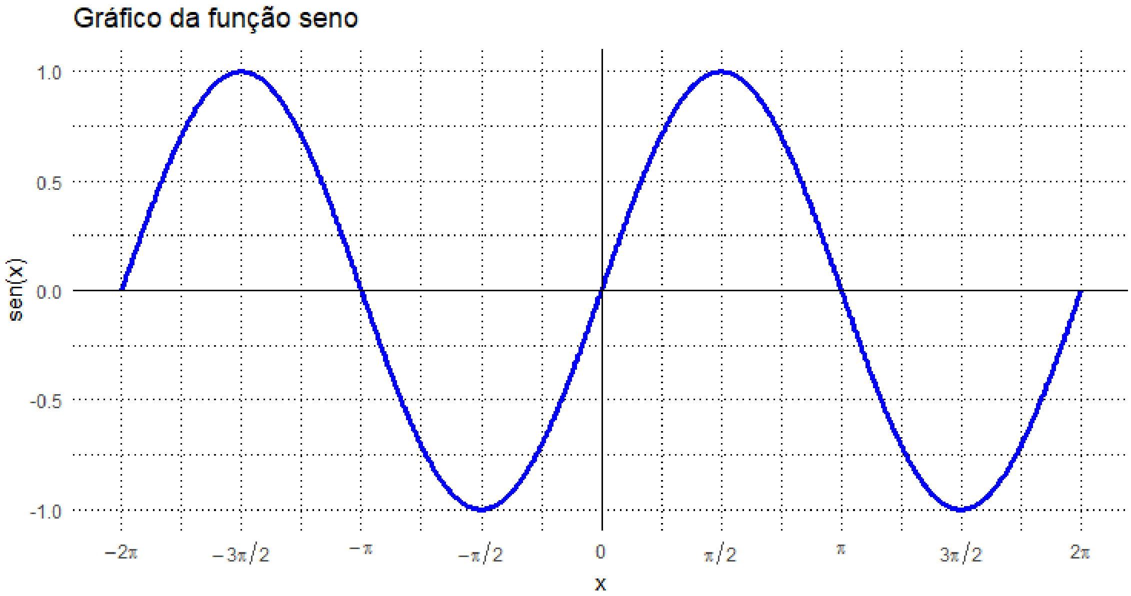
2.3.2 Função cosseno

Definição 2.9 A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x o real $cos\ x$, isto é, $f(x) = cos\ x$ é denominada função cosseno.

2.3.2.1 Características da função cosseno

- A função seno é tal que $-1 \leq sen\ x \leq 1$, isto é, possui imagem no intervalo $[-1, 1]$;
- É periódica de período $2\pi, ouseja, sen\ x = sen\ (x + 2k\pi)$;

Figura 9 – Gráfico da função seno.



Fonte: autor

- É uma função par, pois $f(-x) = cos = f(x)$;
- Se x está no primeiro ou no quarto quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no segundo ou terceiro quadrante, $f(x) < 0$;
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, $f(x)$ é decrescente e se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, $f(x)$ é crescente.

2.3.2.2 Gráfico

2.3.3 Função tangente

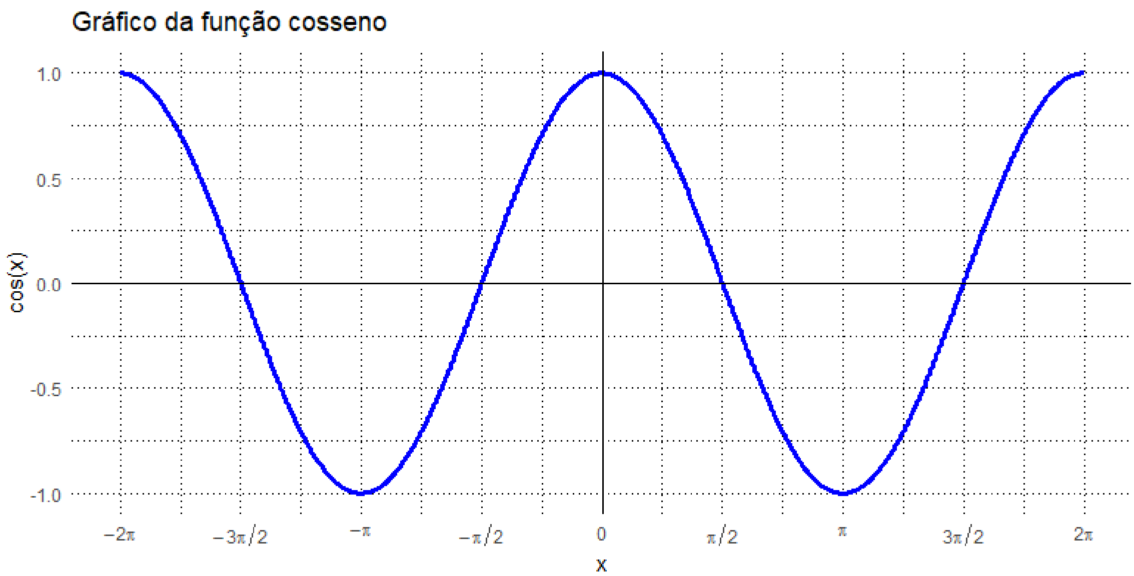
Definição 2.10 Sejam um conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ e f uma função. Denominamos função tangente a função $f: A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tg\ x$.

É importante salientar que quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a tangente de x não é definida devido a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica ficar paralela ao eixo das tangentes.

2.3.3.1 Características da função tangente

- Possui domínio $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;
- A imagem é $\mathbb{R}$;
- É periódica de período igual a π, isto é, $tg\ x = tg\ (x + k\pi)$.

Figura 10 – Gráfico da função cosseno.

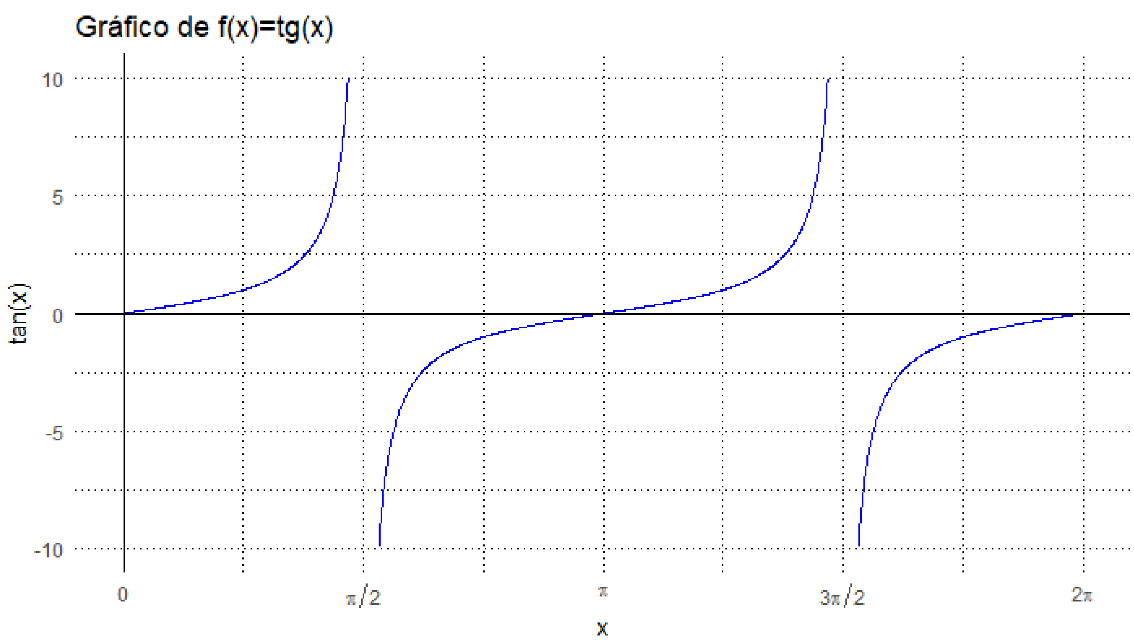


Fonte: autor

- Se x está no primeiro ou no terceiro quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no segundo ou quarto quadrante, $f(x) < 0$; Os valores de $f(x) = tg\ x$ são crescentes em todos os quadrantes.

2.3.3.2 **Gráfico**

Figura 11 – Gráfico da função tangente.



Fonte: autor

2.3.4 Função cotangente

Definição 2.11 Sejam um conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ e uma função f. Denominamos função tangente a função $f: \ A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cotg\ x$.

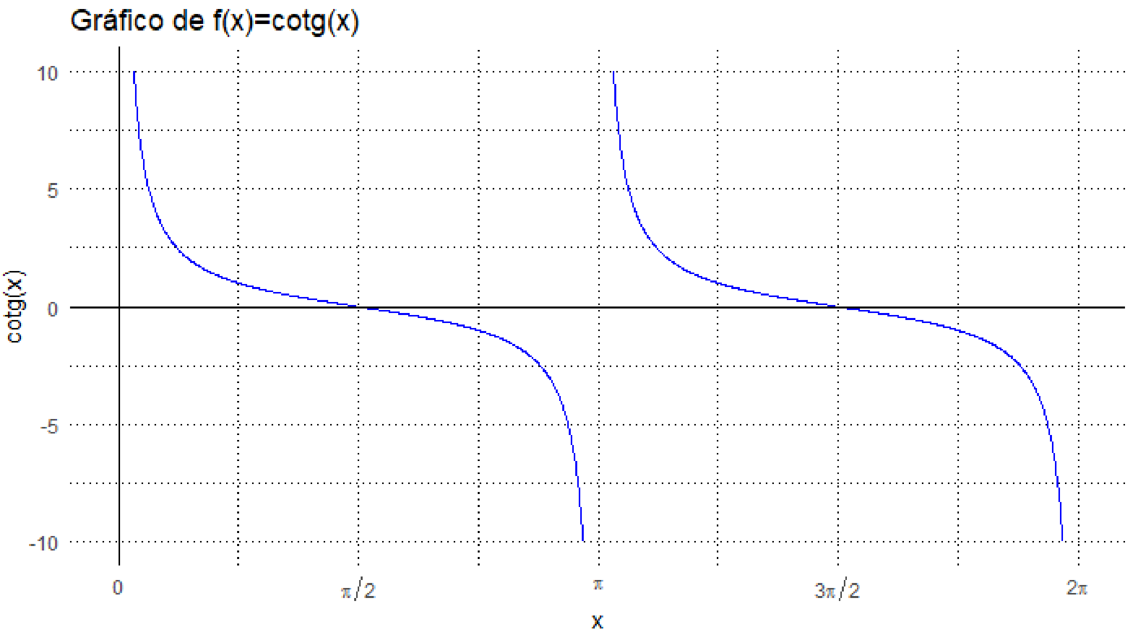
Quando ocorre $x = k\pi$ a cotangente de x não é definida devido a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica ficar paralela ao eixo das cotangentes.

2.3.4.1 Características da função cotangente

- Possui domínio $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$;
- A imagem é $\mathbb{R}$;
- É periódica de período igual a π, ou seja, $cotg\ x = cotg\ (x + k\pi)$.
- Se x está no primeiro ou no terceiro quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no segundo ou quarto quadrante, $f(x) < 0$; Os valores de $f(x) = cotg(x)$ são decrescentes em todos os quadrantes.

2.3.4.2 Gráfico

Figura 12 – Gráfico da função cotangente.



Fonte: autor

2.3.5 Função Secante

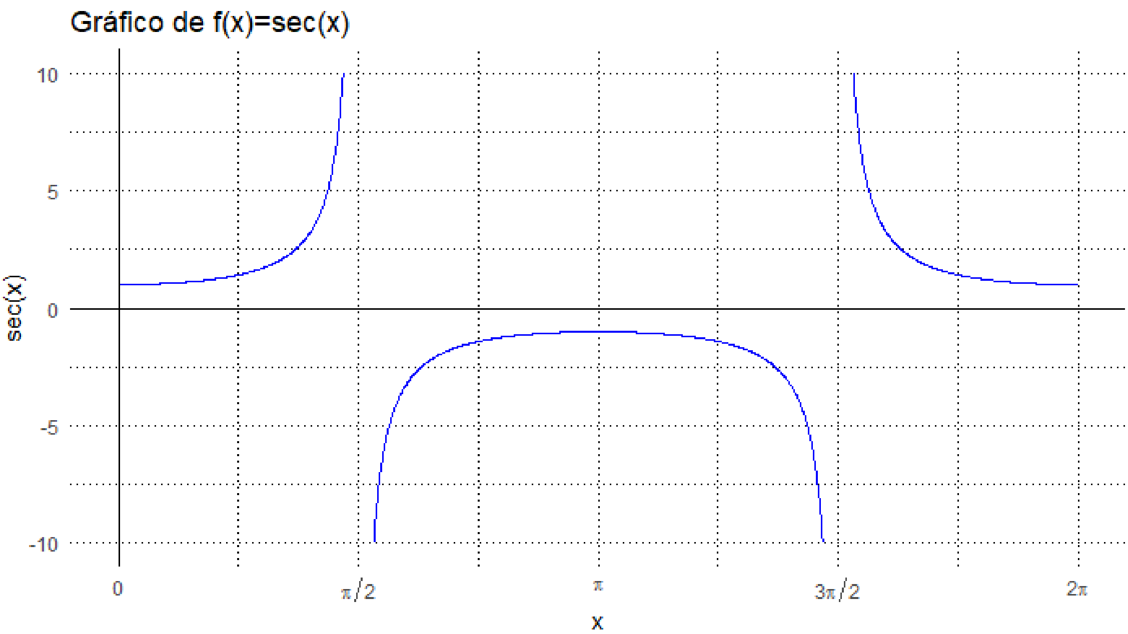
Definição 2.11 Sejam um conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ e f uma função. Denominamos função secante a função $f: \ A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sec\ x$.

2.3.5.1 Características da função secante

- Possui domínio $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;
- A imagem é todo y real tal que $y \leq -1$ ou $y \geq 1$;
- É periódica de período igual a 2π, isto é, $sec\ x = sec(x + 2k\pi)$.
- Se x está no primeiro ou no quarto quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no segundo ou terceiro quadrante, $f(x) < 0$;
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, $f(x)$ é crescente e se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, $f(x)$ é decrescente.

2.3.5.2 Gráfico

Figura 13 – Gráfico da função secante.



Fonte: autor

2.3.6 Função cossecante

Definição 2.12 Sejam um conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ e uma função f. Denominamos função cossecante a função $f: A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cossec\ x$.

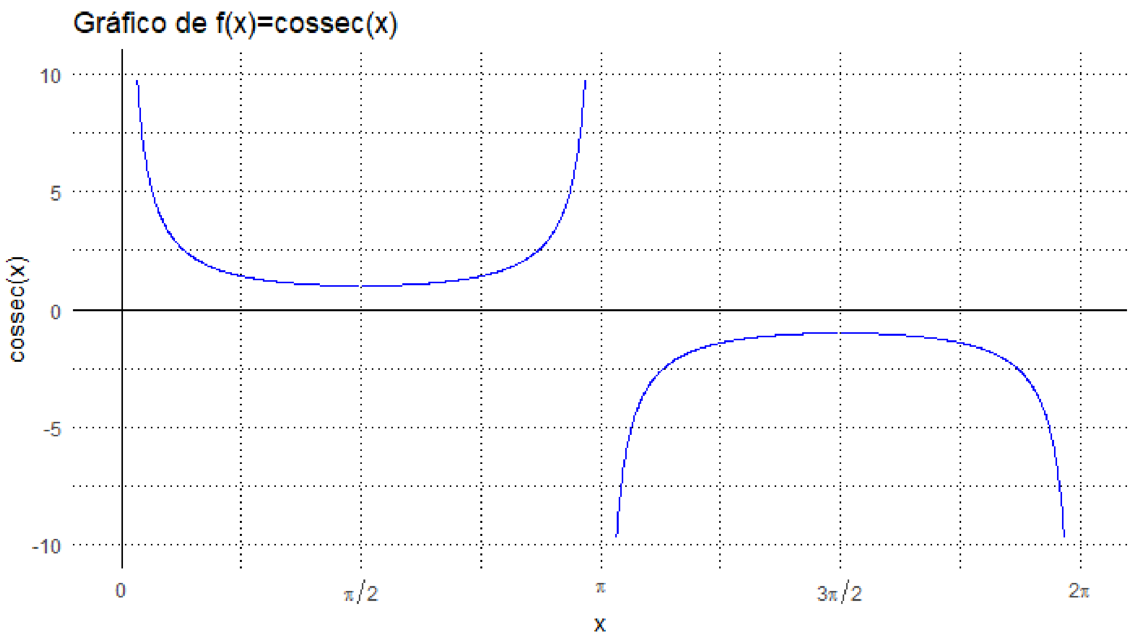
2.3.6.1 Características da função cossecante

- Possui domínio $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$;
- A imagem é todo y real tal que $y \leq -1$ ou $y \geq 1$;

- É periódica de período igual a 2π, isto é, $cossec\ x = cossec(x + 2k\pi)$.
- Se x está no primeiro ou no segundo quadrante, $f(x) > 0$ e se x está no terceiro ou quarto quadrante, $f(x) < 0$;
- Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, $f(x)$ é crescente e se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, $f(x)$ é decrescente.

2.3.6.2 Gráfico

Figura 14 – Gráfico da função cossecante.



Fonte: autor

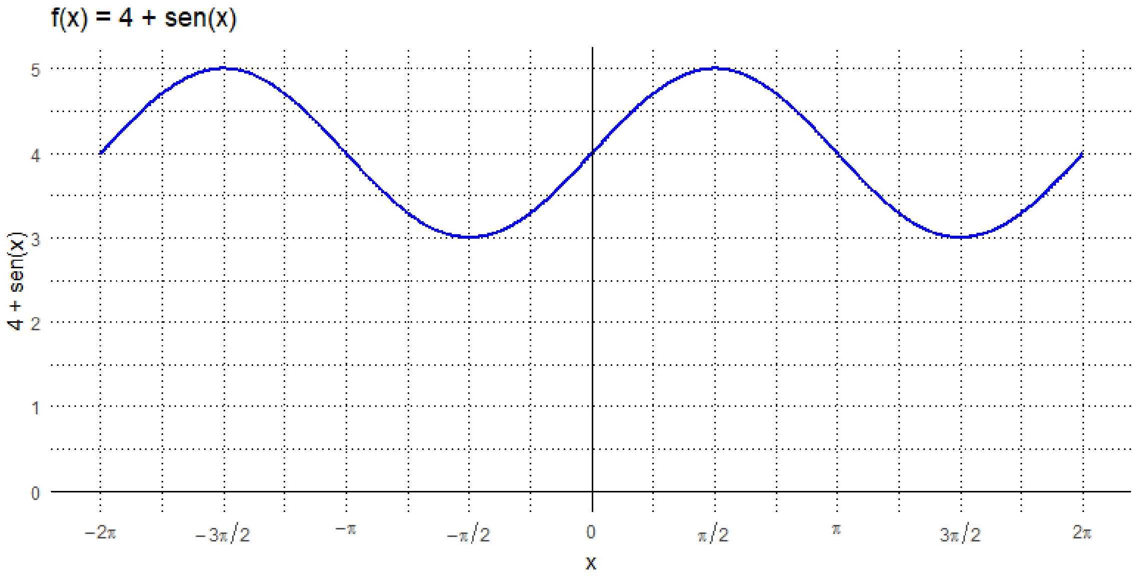
Além dessas funções trigonométricas estudadas até aqui existem outras que aparecem a partir de alterações feitas na estrutura da forma fundamental de cada uma dessas funções. Nesse sentido veremos algumas variações nas estruturas das funções seno e cosseno incluindo alterações nos gráficos gerados. Essas variações são bastante utilizadas para a representação de fenômenos periódicos, conforme (Dante, 2013), as funções trigonométricas são de uma excelente utilidade para descrever fenômenos periódicos por serem do tipo periódicas.

2.3.7 Algumas variações nas funções seno

A função seno na sua forma $y = sen\ x$ é uma função periódica que descreve as variações de uma onda senoidal. Porém, quando escrita na forma $y = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ apresenta parâmetros a, b, ced que são números reais de forma que alteram o comportamento da função das seguintes formas:

a) Quando é alterado o coeficiente a, o gráfico da função passa a apresentar um deslocamento vertical em relação ao eixo x. Se a é positivo, a função é deslocada para cima; se a é negativo, é deslocada para baixo. Considere a função dada por $f(x) = 4 + senx$ e observe o comportamento gráfico na figura 15.

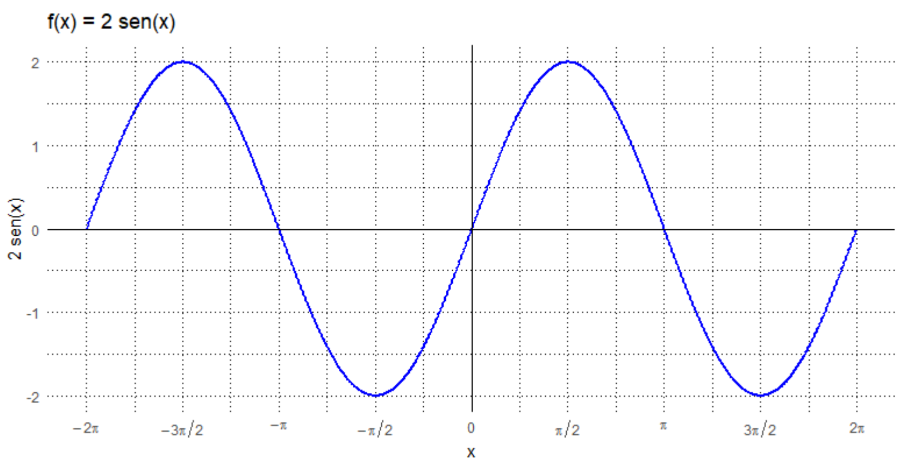
Figura 15 – Gráfico da função dada por f(x) = 4 + sen x.



Fonte: autor

b) Alterações no coeficiente b provocam mudanças na amplitude que determina o valor máximo e valor mínimo da função. Sendo a amplitude b, então o valor máximo é b e o valor mínimo é $-b$. Considere a função dada por $g(x) = 2 \cdot sen\ x$. O comportamento do gráfico fica conforme indicado na figura 16.

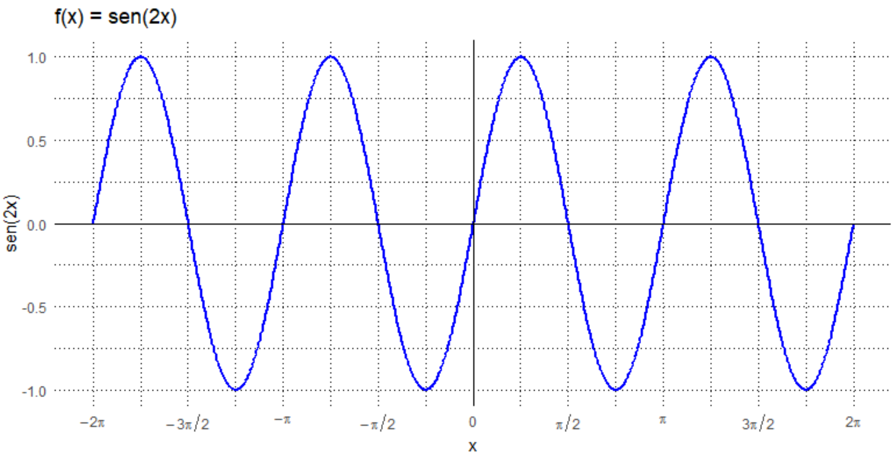
Figura 16 – Gráfico da função dada por g(x)=2$\cdot$*sen x*



Fonte: autor

c) No caso de alterações no coeficiente c, ocorre na função mudanças no seu período. Segundo (Bonjorno; Giovanni Jr; Sousa, 2016), de modo geral o período p de uma função da forma $y = a + sen\ (c \cdot x + d)$, com $a, b, c e d$ reais é $p = \frac{2\pi}{|c|}$. Considere a função dada por $h(x) = sen\ (2 \cdot x)$ e observe o gráfico explicitado na figura 17.

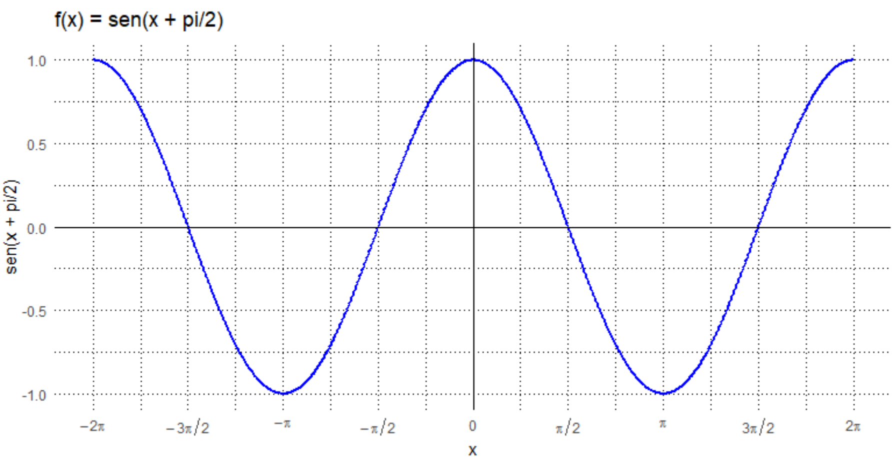
Figura 17 – gráfico da função dada por h(x) = sen $(2 \cdot x)$



Fonte: autor

d) Quando ocorre alterações no coeficiente real d, o gráfico da função apresenta um deslocamento horizontal da onda senoidal. Na função dada por $i(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$ é possível verificar um deslocamento horizontal de $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda conforme é mostrado na figura 18.

Figura 18 – gráfico da função $i(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$



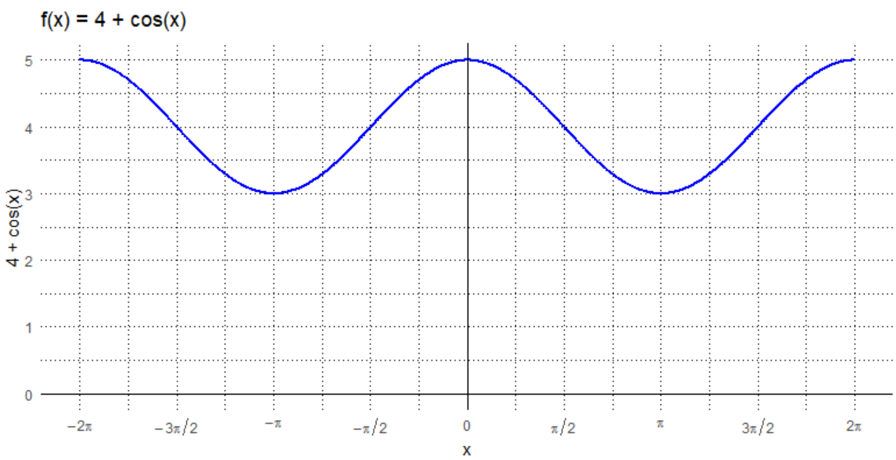
Fonte: autor

2.3.8 Variações na função cosseno

Vamos agora observar o que acontece com a função cosseno quando são feitas alterações em sua estrutura de modo que seja escrita na forma $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$ com a, b, ced números reais. Esses coeficientes modificam o comportamento da função das seguintes formas:

a) Considere a função dada por $f(x) = 4 + cos\ x$ em que o coeficiente a é alterado para o valor 4 e observe que ocorre um deslocamento vertical de 4 unidades no gráfico conforme o gráfico mostrado na figura 20.

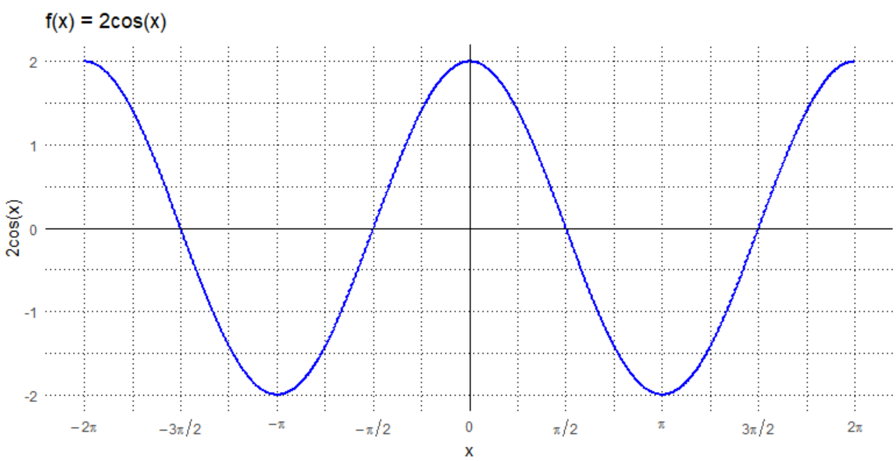
Figura 19 – gráfico da função dada por $f(x) = 4 + cos\ x$



Fonte: autor

b) Na função dada por $g(x) = 2 \cdot cos\ x$, a alteração no coeficiente b modificou a amplitude da função conforme é possível perceber no gráfico da figura 21.

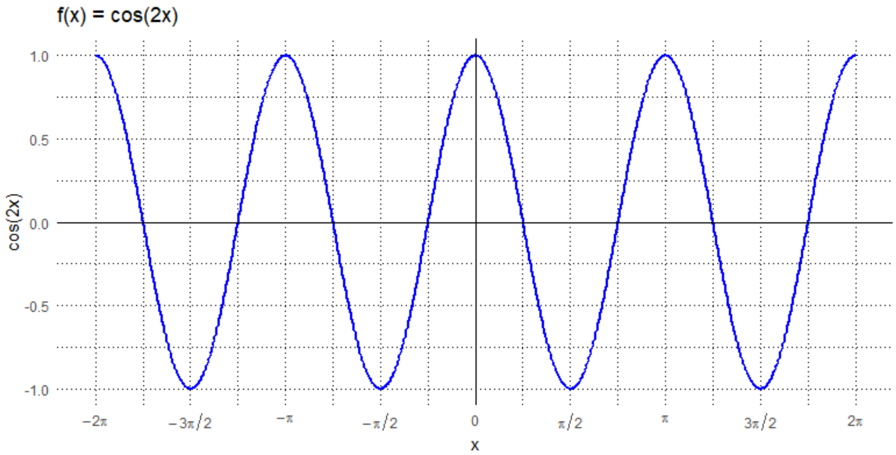
Figura 20 – gráfico da função dada por g(x) = 2·$cos\ x$



Fonte: autor

c) Observe na função dada por $h(x) = cos\ (2 \cdot x)$ que a alteração no coeficiente c provoca na função uma alteração no período de modo que $c = 2$ faz com o período se reduza a π radianos e observe o gráfico explicitado na figura 21.

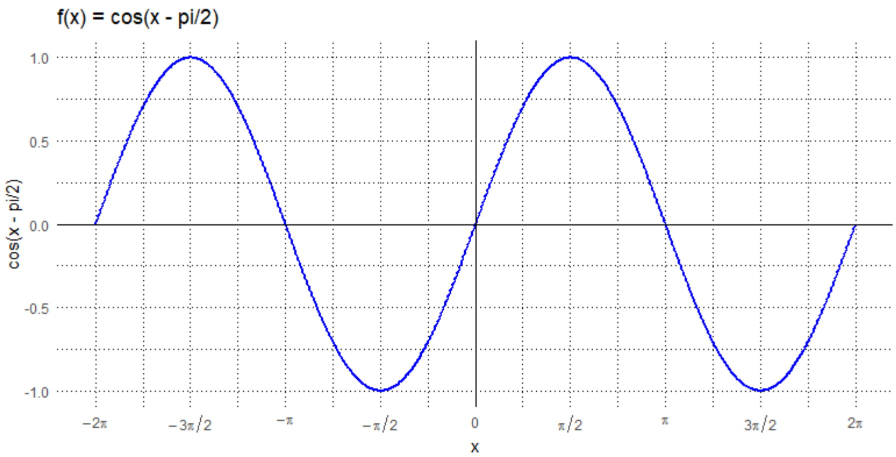
Figura 21 – gráfico da função dada por h(x) = cos $(2{\cdot}x)$



Fonte: autor

d) Na função dada por $i(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$ é possível verificar um deslocamento horizontal de $\frac{\pi}{2}$ rad para a direita conforme é mostrado na figura 22.

Figura 22 – gráfico da função dada por $i(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$



Fonte: autor

3 Aplicando o R Studio

Este capítulo é dedicado a mostrar como o professor deve orientar os alunos em relação ao uso do R Studio desde a instalação até fazer comandos básicos e compreender os operadores matemáticos dentro desse ambiente. E além disso, construir variáveis e vetores, operar com eles e fazer seus primeiros gráficos com linguagem de programação.

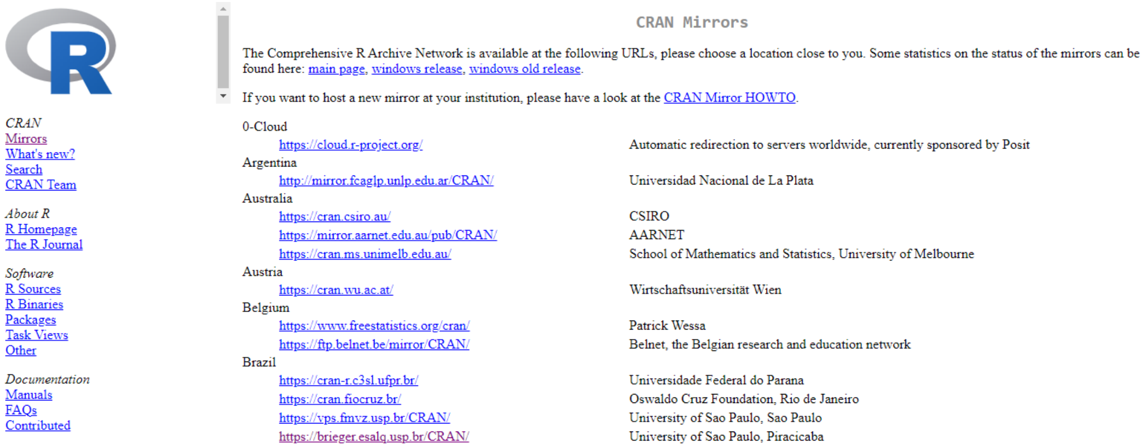
O R Studio é um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) projetado especificamente para trabalhar com a linguagem de programação R que segundo Ritter, They e Konzen (2019), apresenta uma interface mais amigável e mais funcional, que possui janelas de plotagem de gráficos, de histórico, de gerenciamento da área de trabalho e de editor de texto com ênfase na linguagem de programação que permite execução direta de código. Desse modo, simplifica o desenvolvimento de código R, análise de dados e criação de visualizações.

3.1 Baixando o software R

O R é um software que está disponível para os sistemas operacionais Microsoft Windows, macOs e Linux (Debian, Fedora/Redhat, Ubuntu) e para instalação basta acessar o site https://cran.r-project.org/, logo após para realizar o download, acesse a página https://cran.r project.org/mirrors.html e escolha um espelho de download próximo de você conforme figura 23. Aparecerá uma página em que é possível selecionar um instalador compatível com os três sistemas operacionais: Windows, Linux e Mac (OS).

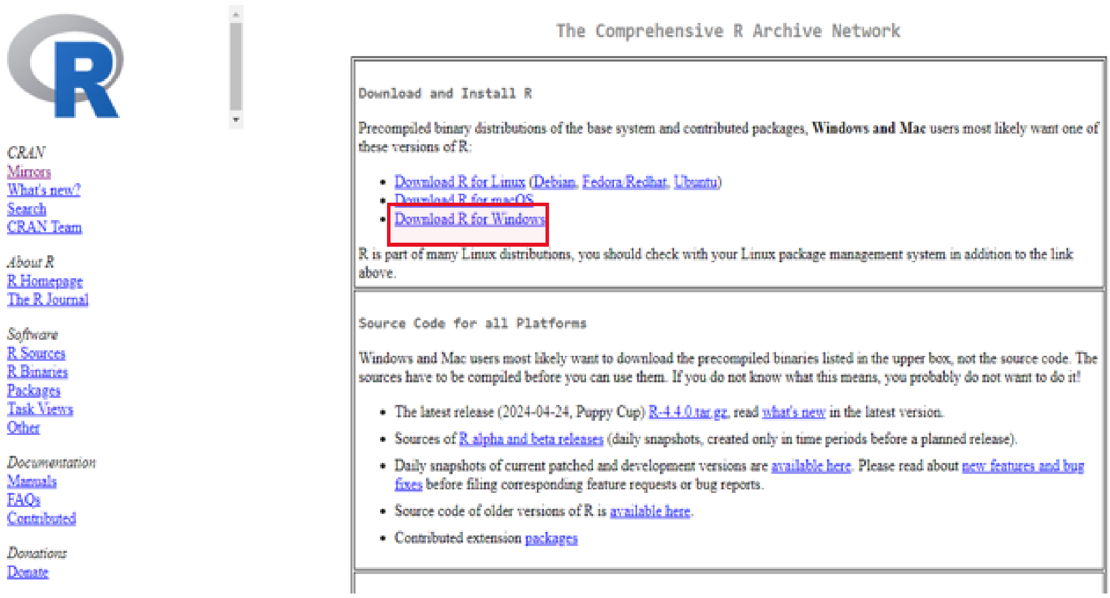
Aqui será mostrado um exemplo de instalação do R para Windows onde o espelho escolhido foi o da Universidade de São Paulo em Piracicaba. Como pode ser visto na figura 24 o site já direciona para uma página que exibe o instalador a ser escolhido de acordo com sistema operacional.

Figura 23 – Página para seleção do espelho mais próximo.



Fonte: autor

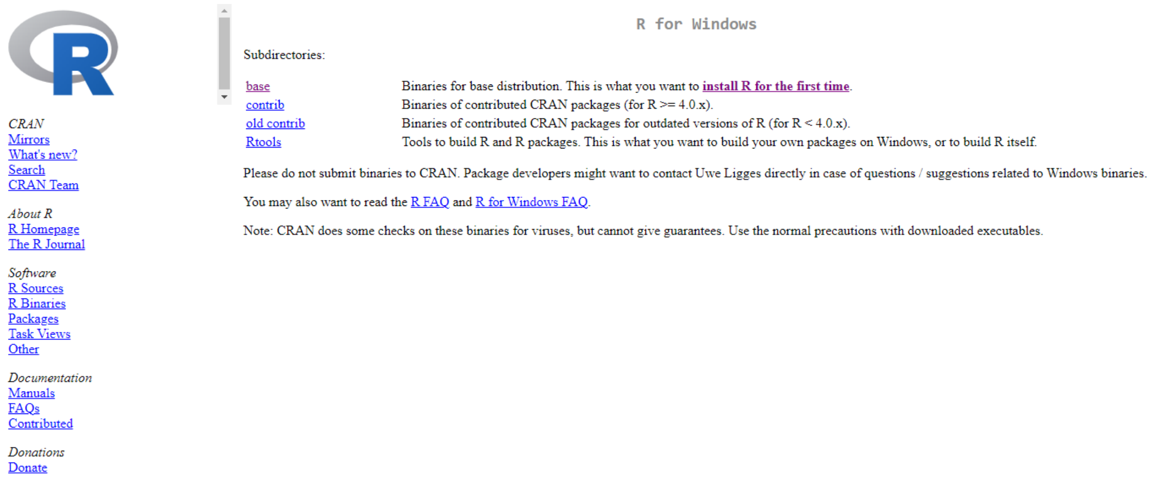
Figura 24 – Página de download do instalador com escolha do sistema operacional.



Fonte: autor

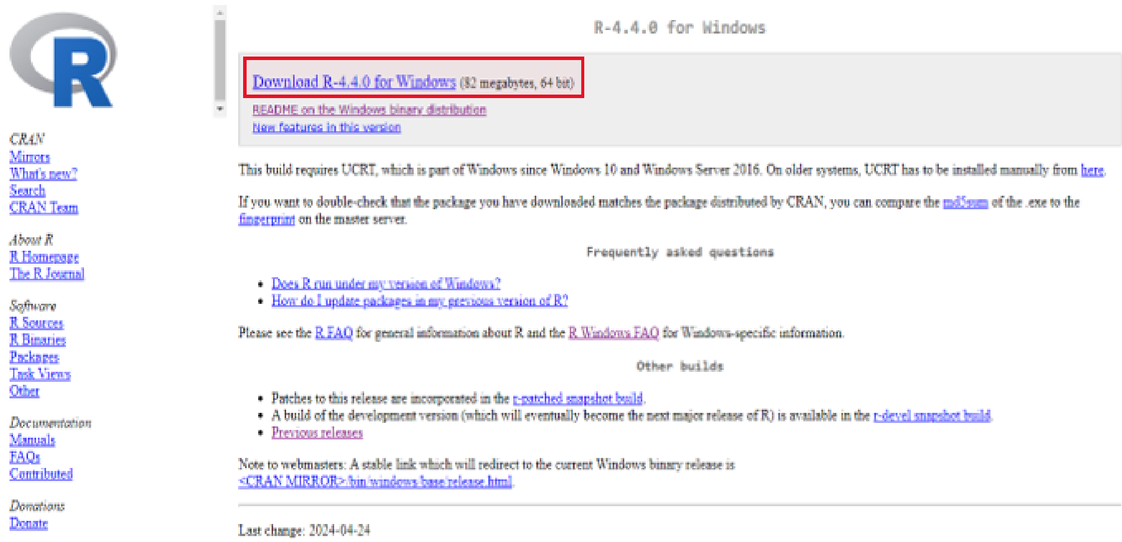
Após escolhido o sistema operacional, o site direciona para a página de execução do instalador como é mostrado na figura 25 para depois encaminhar para a de seleção da versão mais atualizada do R, figura 26 e assim o download é feito seguido da instalação na máquina.

Figura 25 – Página de execução do instalador.



Fonte: autor

Figura 26 – Página de execução do instalador.



Fonte: autor

3.2 Baixando o software R Studio

Para a instalação do R Studio é necessário primeiramente que o computador tenha instalado o R. Feito isso, o próximo passo é acessar o link https://posit.co/downloads/ onde está disponível o arquivo instalador, figura 27.

Figura 27 – Página para download do instalador do R Studio.

Fonte: autor

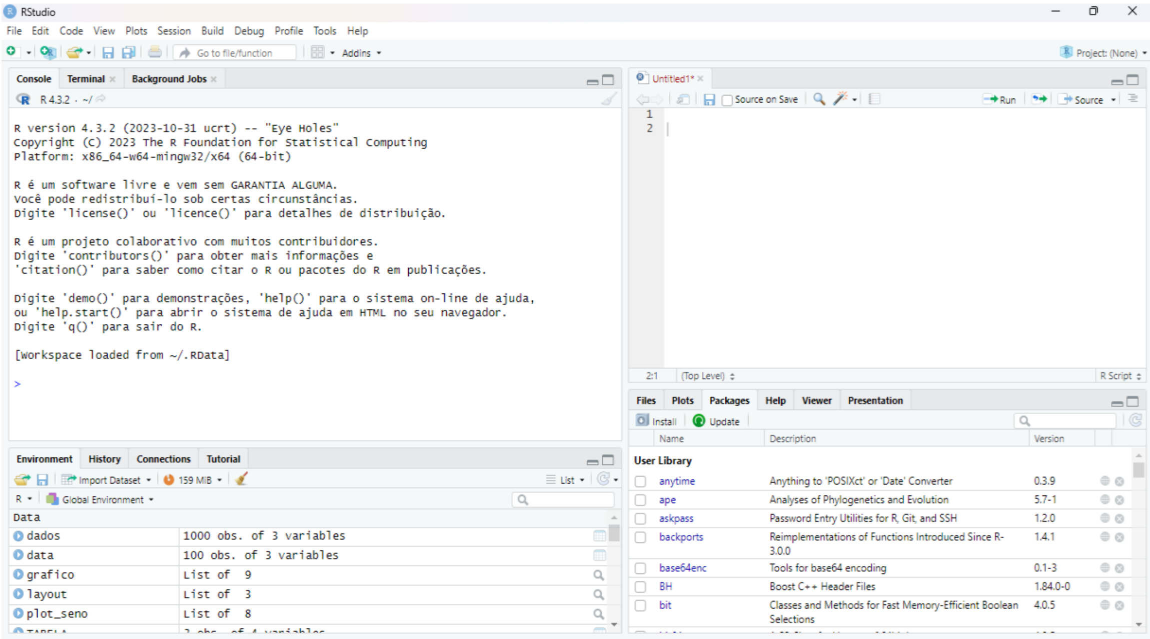
Ao clicar para baixar o software, o site direcionará para a página onde consta o arquivo para o R e o R Studio devendo ser escolhido o segundo, este apresenta a versão mais recente do programa figura 28.

Figura 28 – Página para download do instalador do R Studio em versão mais recente.

Fonte: autor

Assim que instalado no computador é necessário buscar o ícone do R Studio para abrir o programa. Na figura 29 é mostrado o software aberto e pronto para uso.

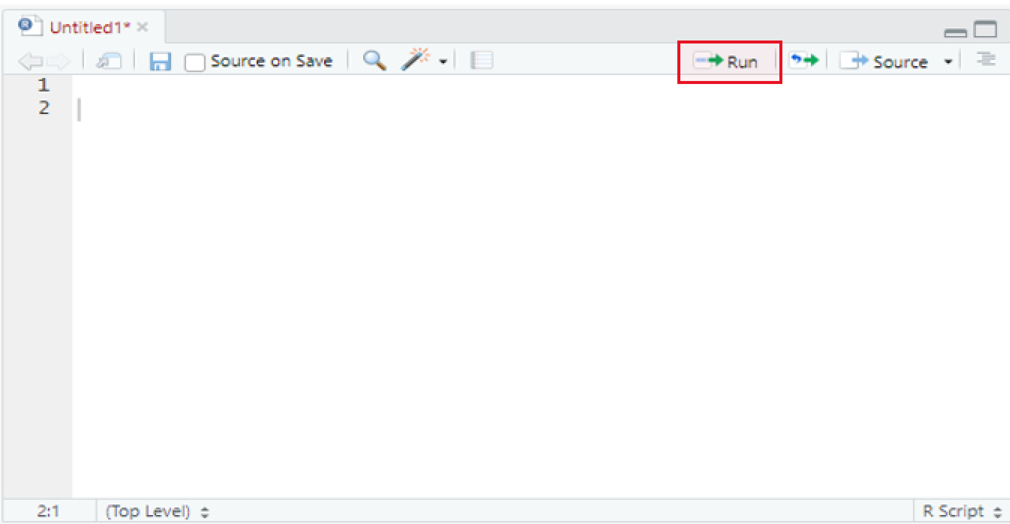
Figura 29 – IDE do R Studio.



Fonte: autor

A IDE do programa fica dividida em quatro partes que são móveis e ainda podem ter os seus tamanhos ajustados conforme a configuração que agrade o usuário. Conforme mostrado na figura 29, na parte superior direita fica o ambiente onde poderão ser feitos os códigos e linhas de programação sem que o programa execute de imediato. Para executar uma linha de códigos basta que seja dado um click no botão run ou usar as teclas de atalho CTRL + ENTER, figura 30. Para executar várias linhas de código basta selecioná-las e fazer o mesmo comando.

Figura 30 – Ambiente onde são feitas linhas de códigos não executadas imediatamente.



Fonte: autor

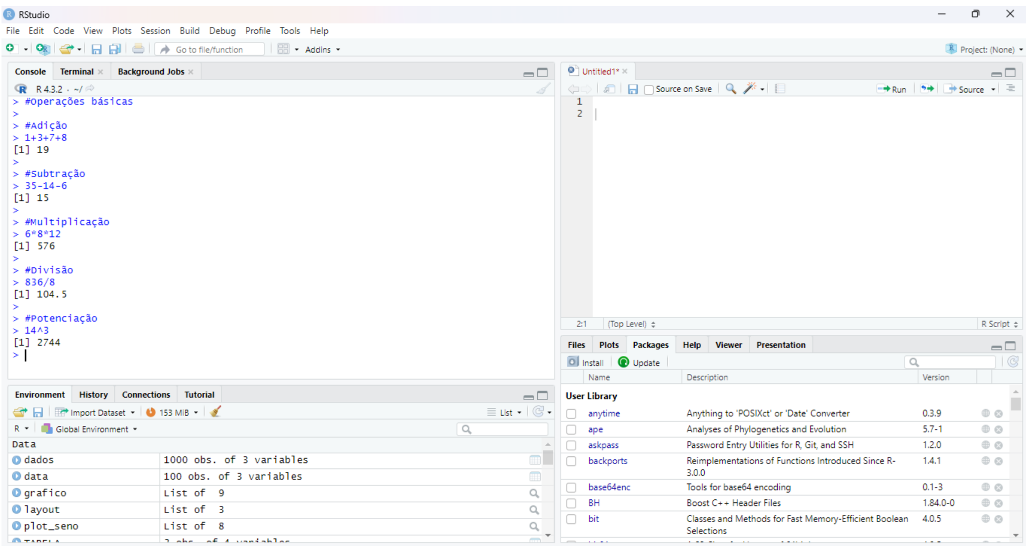
Na parte superior direita da figura 29 é mostrado o console do R. Toda vez que uma linha de código for executada é nele que é mostrado o resultado, inclusive mensagens de erro que possam ocorrer na escrita dos códigos. No canto inferior esquerdo fica o ambiente das variáveis, vetores, funções, conexões, entre outros. Toda vez que é criada alguma informação que é armazenada na memória do programa é nesse local que estará disponível. Na parte inferior direita ficam as bibliotecas, onde estão presentes os pacotes, aba de visualização de plotagens de gráficos, buscador de arquivos e outros recursos disponíveis. Outros pacotes podem ainda ser instalados para serem utilizados durante a execução de algum código.

3.3 Funcionalidades básicas

Antes de estudar funções trigonométricas com o auxílio do R Studio é importante que os alunos tenham conhecimento de algumas operações e funções básicas em linguagem R para que consigam utilizar o programa com foco no conteúdo abordado. Em relação às operações aritméticas básicas, é possível utilizar o software como calculadora. Os comandos dessas operações são os seguintes:

1. Adição: +
2. Subtração: -
3. Multiplicação: *
4. Divisão: /
5. Potenciação: ^

Figura 31 – Exemplo de operações aritméticas feitas no R Studio.



Fonte: autor

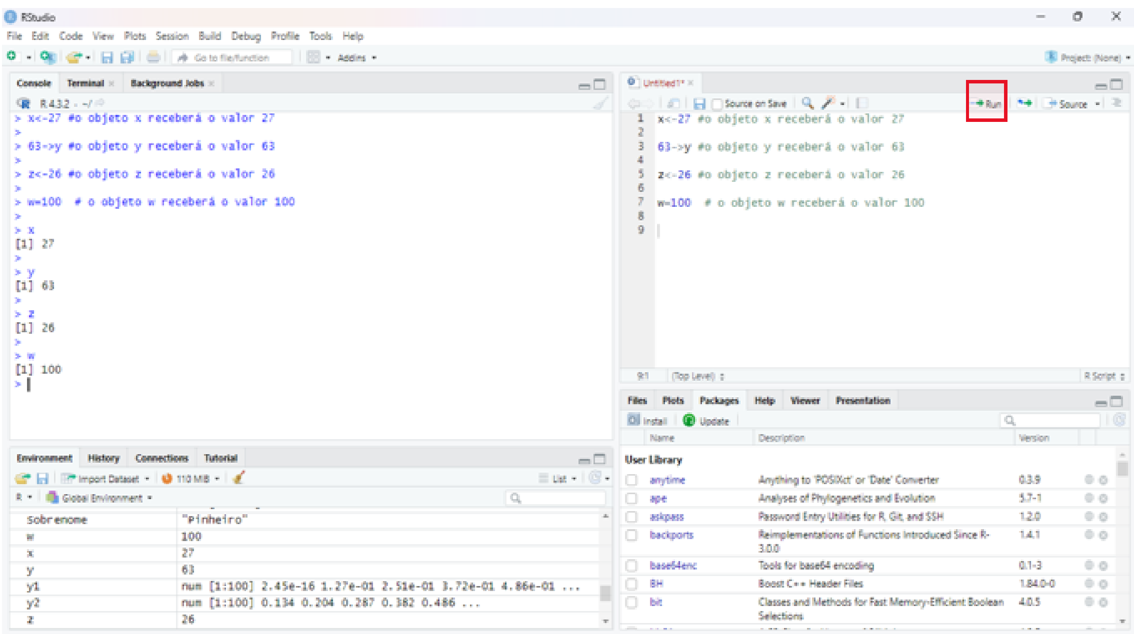
3.4 Manipulação de objetos

Na linguagem R, a manipulação de objetos refere-se ao processo de criação, modificação e manipulação de diferentes tipos de objetos de dados. Um objeto em R pode ser desde um vetor simples até estruturas de dados mais complexas, como listas, matrizes e data frames. A manipulação de objetos é fundamental no uso do R Studio, pois é preciso criar, armazenar e manipular dados para produzir gráficos.

3.4.1 Criando um objeto

Para criar um objeto em R, basta atribuir um valor a ele usando o operador de atribuição “<-"ou o operador de igualdade “=”. É importante ressaltar que a denominação dada um objeto deve iniciar com letra maiúscula ou minúscula, seguida de outra letra, número, ou caracteres especiais como o ponto.

Figura 32 – Exemplo de criação de objetos no R Studio.



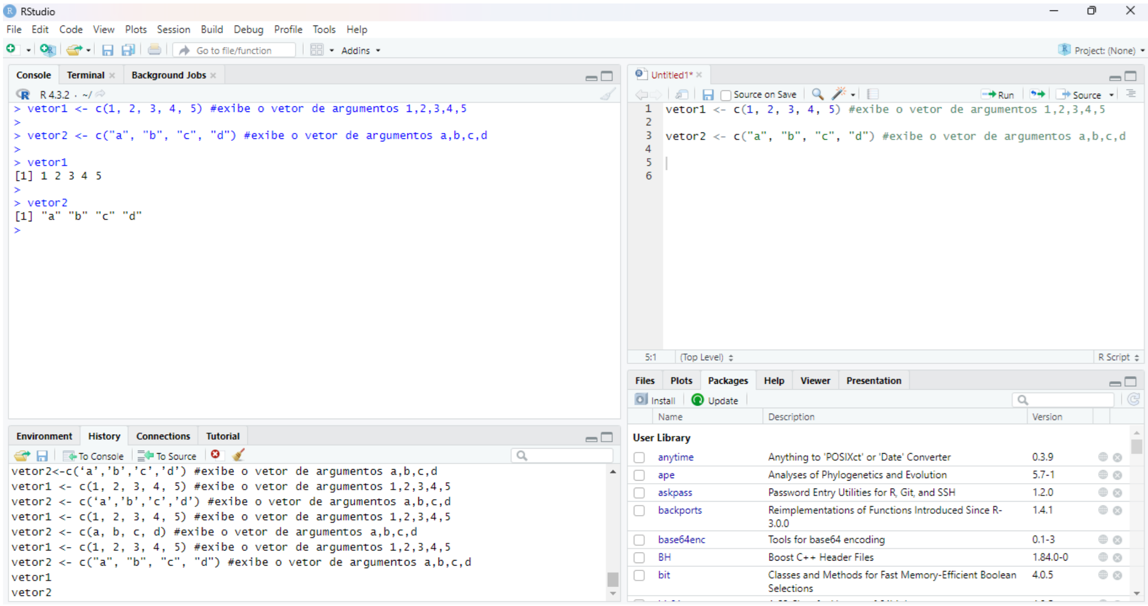
Fonte: autor

Na figura 32 é mostrado um caso de criação de objetos de modo que cada linha de código é executada posteriormente no console do R por meio do botão “run” e ainda é feita a execução dos objetos no mesmo ambiente.

3.4.2 Criando vetores

Em R, vetores são estruturas de dados fundamentais (objetos) que armazenam mais de um valor. Uma maneira de criar um vetor é utilizando a função “c( )” que cria um vetor a partir dos seus argumentos. Para isso basta atribuir uma denominação ao vetor que será criado junto com a função e os argumentos dentro dos parênteses.

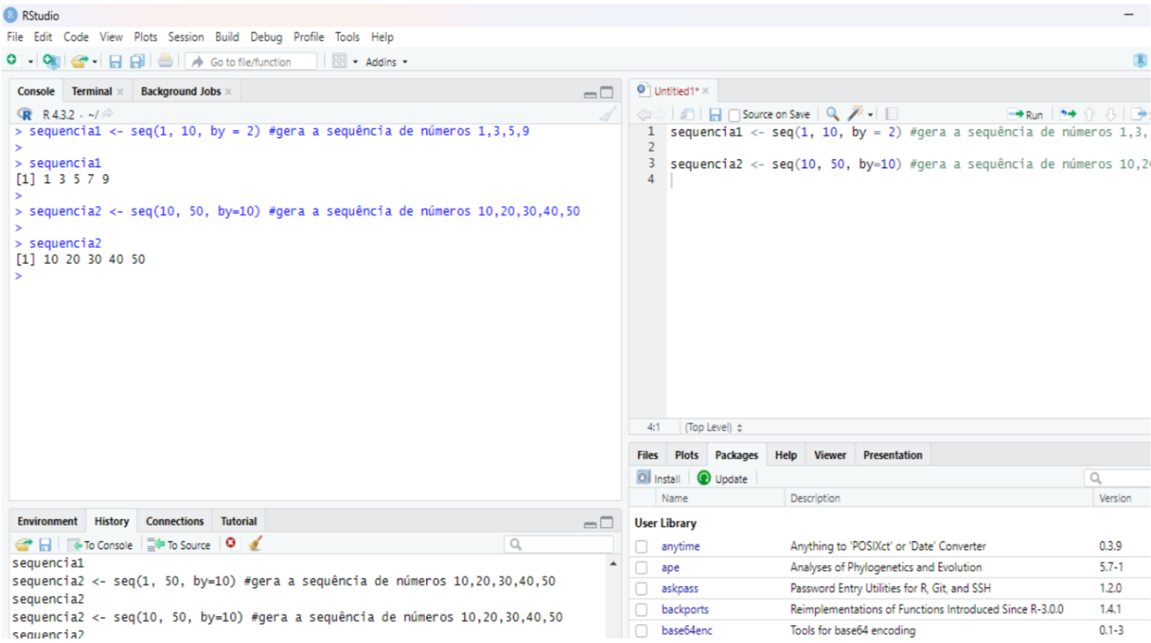
Figura 33 – Exemplo de criação e execução de vetores com a função “c( )” no R Studio.



Fonte: autor

Outra forma de criação de vetores é por meio da função “seq( )” no qual são criadas sequências numéricas. Nos argumentos constam os limites inferior e superior podendo, também, ter presente o espaço entre cada número da sequência.

Figura 34 – Exemplo de criação e execução de vetores com a função “seq( )” no R Studio.

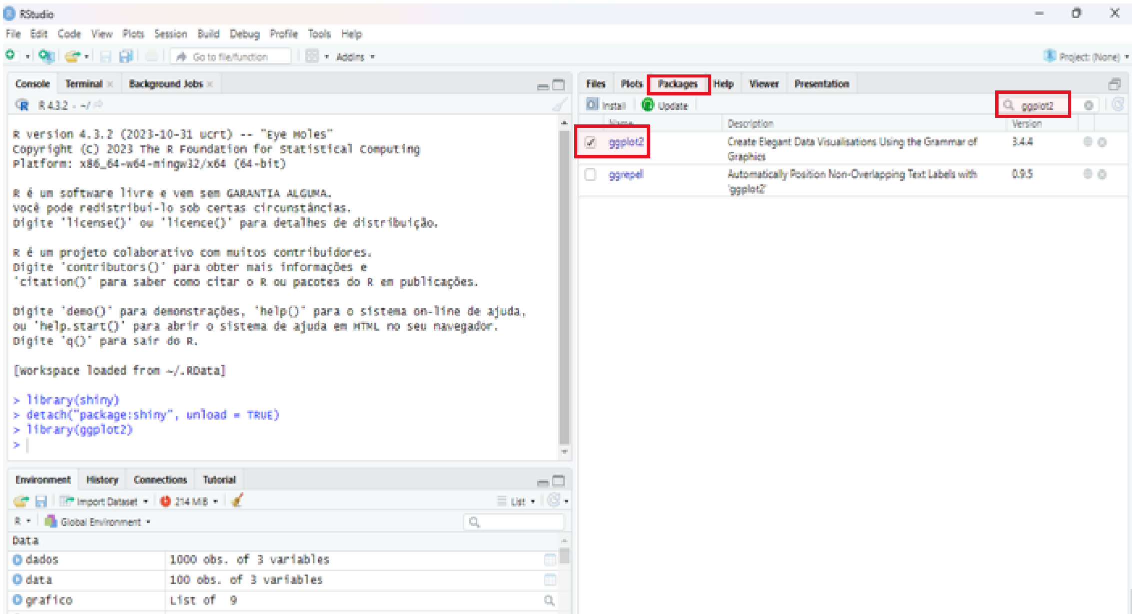


Fonte: autor

3.4.3 Instalando pacotes para construção de gráficos

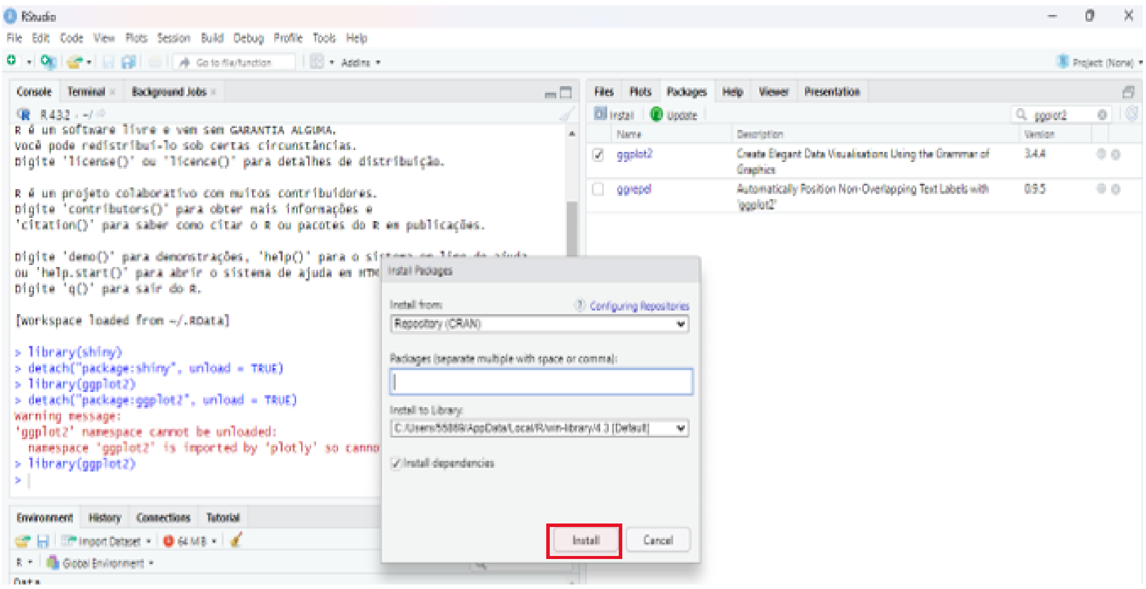
Para executar a instalação do pacote “ggplot2” é necessário abrir o menu de pacotes é acessar a aba de ferramentas para e selecionar o instalador de pacotes. Logo após, na janela que for aberta é preciso digitar o nome do pacote que desejado para baixar e efetuar a instalação, figura 35.

Figura 35 – Seleção do pacote “ggplot2” através da aba de pacotes.



Fonte: autor

Figura 36 – Janela de comando para efetuar instalação de pacotes.

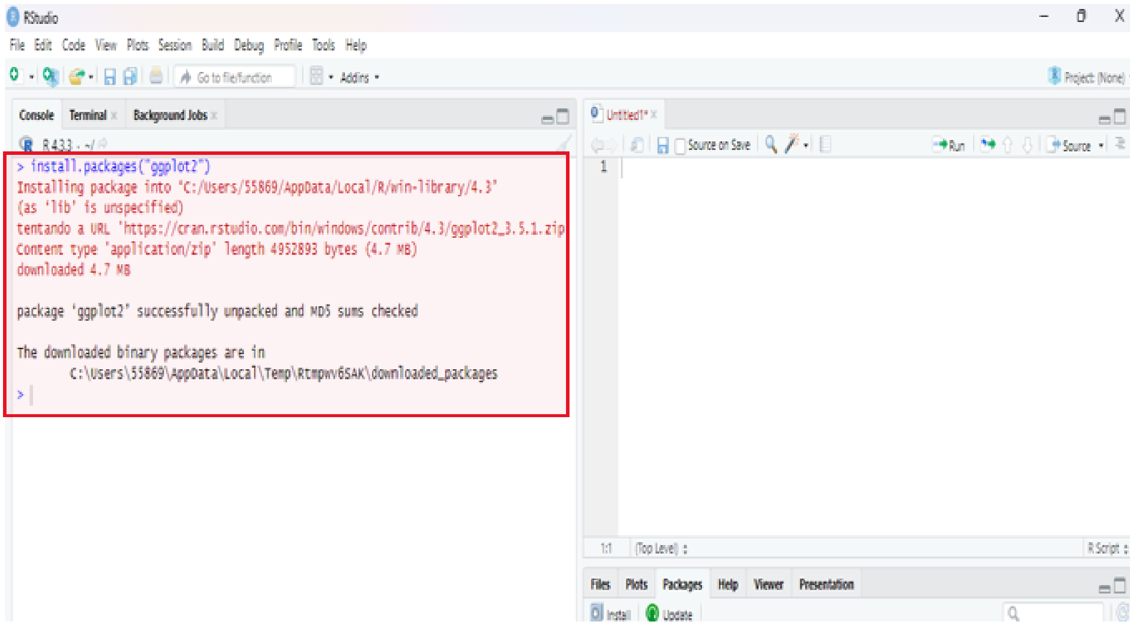


Fonte: autor

O docente deve orientar os alunos sobre a instalação de pacotes, no R Studio, necessários para que possa ser possível a construção de gráficos das funções estudadas. Para isso será feita a importação da biblioteca "ggplot2" usando o comando "library(ggplot2)" no console R para que o pacote possa ser usado.

Outra forma para instalar este pacote é executando diretamente no campo do console R através do comando "install.package("ggplot2")", figura 37, e ativando, também, por meio do comando "library(ggplot2)" para permitir o uso.

Figura 37 – Instalação do pacote "ggplot2" pelo console do R.



Fonte: autor

3.4.4 Construindo gráficos de funções trigonométricas no R Studio

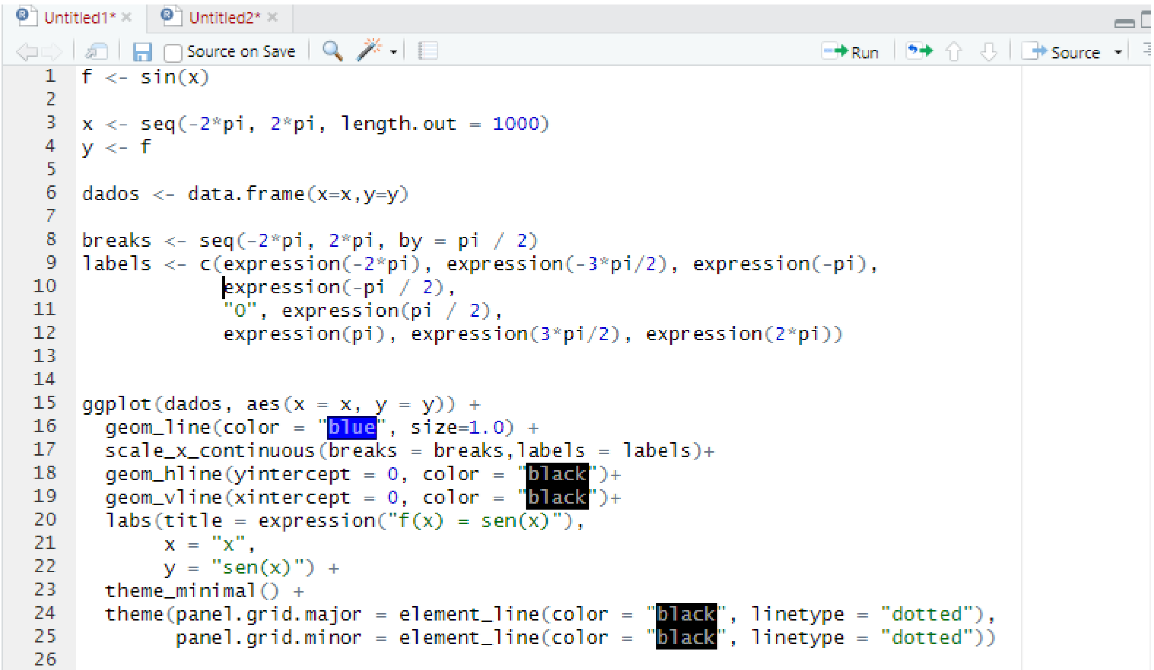
Afim de que o aluno possa explorar as funções trigonométricas de forma prática, o R Studio pode ser uma excelente maneira de tornar o ensino da trigonometria mais interativo e visual executando a plotagem dos gráficos de algumas funções de modo que se familiarize com a linguagem R.

Após o a instalação do programa e tendo tomado conhecimentos das funcionalidades básicas e com o propósito de tornar o estudo de funções trigonométricas mais atraente para o aluno foram preparadas atividades na intenção de demonstrar como essas funções podem ser visualizadas e manipuladas usando o R Studio.

Esta é uma proposta para professores de matemática do ensino médio que procuram por metodologias alternativas que visam auxiliar os estudantes a atenuar dificuldades em determinados conteúdos e que se constitui, primeiramente, de uma revisão das funções trigonométricas em que o docente pode começar explicando aos alunos os conceitos básicos das funções trigonométricas e suas propriedades.

Para plotar um gráfico de função trigonométrica, por exemplo, função seno é necessário que seja criada, primeiramente, uma sequência de valores para o eixo x do plano, explicitar a função na qual seus valores serão calculados e criar um "dataframe" para organizar os valores calculados e facilitar a plotagem do gráfico. Como será utilizado o pacote "ggplot2" para gerar o gráfico, as linhas de comandos utilizados são mostradas no R Script conforme figura 38.

Figura 38 – Linhas de comandos para plotar o gráfico da função seno.



Fonte: autor

O significado dos códigos para plotar o gráfico são os seguintes:

1. "f <- sin(x)" define a função seno a ser plotada.

2. "x <- seq (-2*pi, 2*pi, lenght.out = 1000)" cria um vetor com o intervalo de valores do domínio da função e o comprimento da sequência criada para um mil valores.

3. "dados <- data.frame(x=x_values, y=y_values)" origina a estrutura de dados bidimensional para organizar os dados da função tangente.

4. "breaks <- seq(-2*pi, 2*pi, by = pi / 2)" define os pontos de quebra dentro do intervalo de valores do domínio da função.

5. "labels <- c(expression(-2*pi), expression(-3*pi/2), expression(-pi), expression(-pi / 2), "0", expression(pi / 2), expression(pi), expression(3*pi/2), expression(2*pi))"

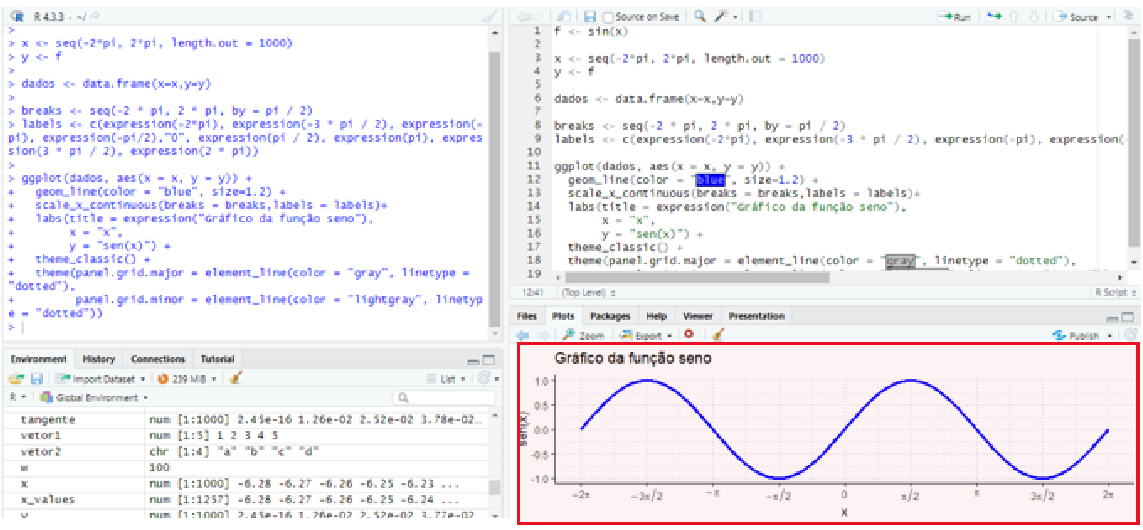
exibe os valores reais no eixo x conforme definido nos pontos de quebra na função “breaks”.

Após a parte geral de códigos que devem ser escritos para criação do gráfico da função é mostrado significado dos componentes utilizados no pacote “ggplot2”:

1. “ggplot(dados, aes(x = x, y = y))” código para acionar o pacote.
2. “geom_line(color = "blue", size = 1.2)” indica o formato da linha do gráfico incluindo cor e largura.
3. “scale_x_continuous(breaks = breaks,labels = labels)” insere na plotagem do gráfico os pontos definidos nas funções “breaks” e “labels”.
4. “geom_hline(yintercept = 0, color = "black")” e “geom_vline(xintercept = 0, color = "black")” insere os eixos x e y se interceptando na origem.
5. “labs(title = expression(“Gráfico da função seno”), x = "x", y = "sen(x)")” mostra o título da plotagem.
6. “theme_minimal()” adiciona o tema de preferência para a plotagem.
7. “theme(panel.grid.major = element_line(color = "gray", linetype = "dotted") e panel.grid.minor = element_line(color = "lightgray", linetype = "dotted")” adiciona linhas de grade na plotagem com indicação de cor e tipo de linha.

Executando todas essas linhas de comando no console do R surgirá na janela de “plots” o gráfico da função tangente conforme as preferências indicadas, figura 39.

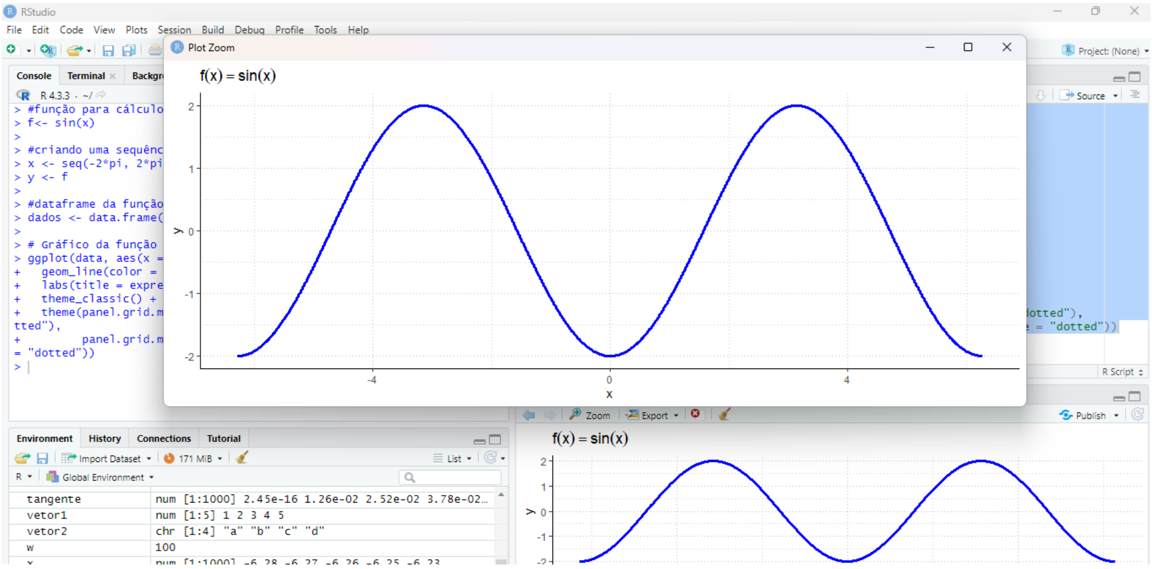
Figura 39 – Gráfico da função seno na janela de “plots”



Fonte: autor

O gráfico ainda pode ser melhor visualizado utilizando o botão “zoom” que abrirá uma nova janela exclusiva para a plotagem feita, e que ainda pode ser maximizada, figura 40.

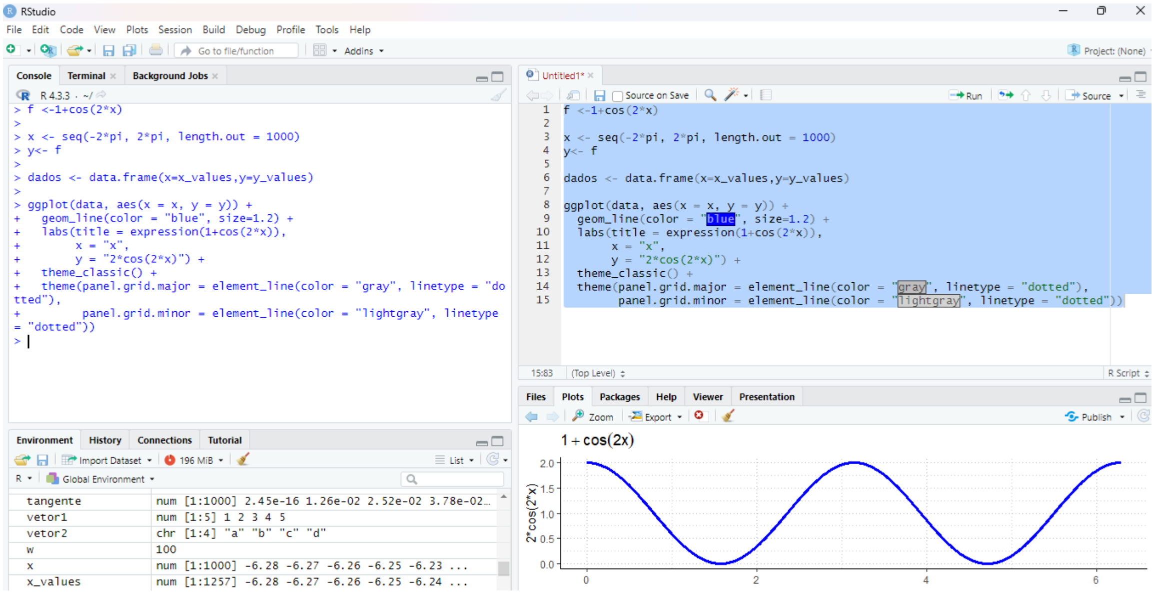
Figura 40 – Gráfico da função seno visualizado em uma janela exclusiva.



Fonte: autor

Para gerar outros gráficos os comandos são os mesmos bastando apenas mudar os valores dos parâmetros, pois estes indicam o comportamento do gráfico ao ser plotado. Considerando a função dada por $f(x) = 1 + cos\ (2x)$, para plotar o seu gráfico as linhas de comandos que devem ser escritas obrigatoriamente com alterações conforme a função dada são, “f <- 1 + cos(2*x)”, “dados <- data.frame(x=x,y=y)”, “labs(title = expression (1+cos(2*x)), x = "x", y = "1+cos(2*x)")” obtendo, assim, a seguinte forma conforme pode ser visto na figura 41.

Figura 41 – gráfico da função dada por $f(x) = 1 + cos(2x)$ na janela de plots e as linhas de comando.



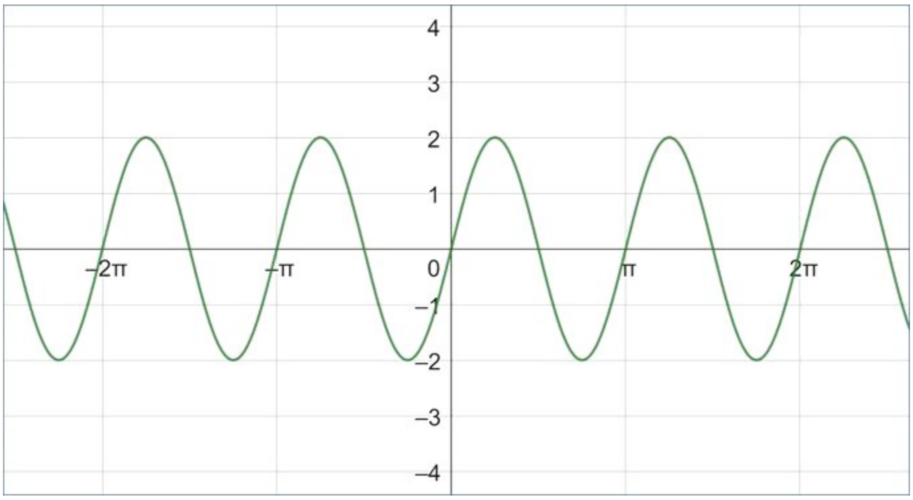
Fonte: autor

3.4.5 Explorando funções trigonométricas em exercícios com o R Studio: proposta de sequência didática

Neste tópico é mostrada a proposta de sequência didática que consiste em um método que o professor pode adotar para atenuar dificuldades dos alunos. Zabala (1998, p.18) afirma que uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”. A sequência didática aqui apresentada é composta de uma avaliação diagnóstica, aula expositiva de revisão do conteúdo de funções trigonométricas, aulas e resolução de em laboratório de informática com uso do R Studio e um verificação de aprendizagem após a atividade em laboratório.

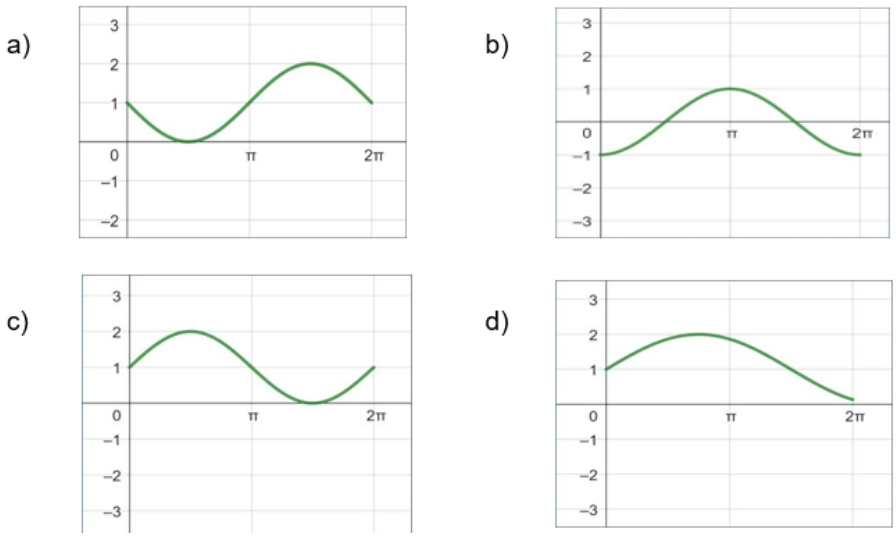
A seguir são expostas questões para serem propostas em um exame diagnóstico que inicialmente deve ser aplicado de modo que possa ser mensurado o nível de conhecimento dos alunos em funções trigonométricas.

QUESTÃO 01 - Uma função periódica se repete ao longo do eixo x. No gráfico abaixo temos a representação de uma função do tipo $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$. Qual o valor do produto $A \cdot \omega$?

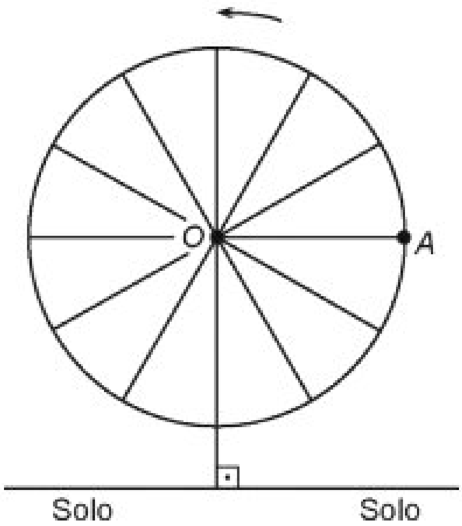


QUESTÃO 02 - A função real definida por $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$ tem período 3π e imagem [-5,5]. Qual o valor dos coeficientes A e ω?

QUESTÃO 03 - Dentre os gráficos abaixo, qual representa corretamente a função $f(x) = 1 + sen(x + \pi)$?



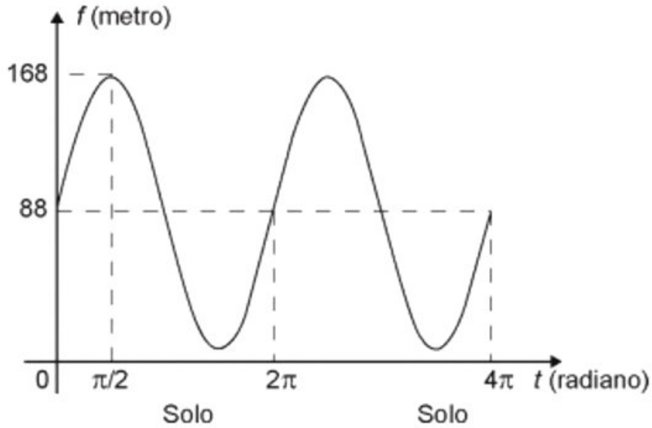
QUESTÃO 04 – (ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f em o seguinte gráfico:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80 \cdot sen(t) + 88$

b) $f(t) = 80 \cdot cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88 \cdot cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168 \cdot sen(t) + 88 \cdot cos(t)$

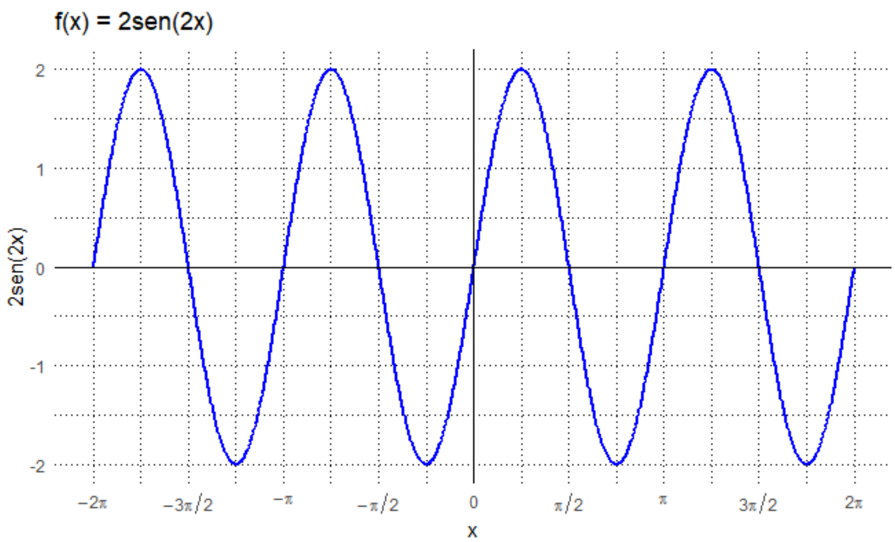
e) $f(t) = 88 \cdot sen(t) + 168 \cdot cos(t)$

Após a avaliação é feito o momento da aula expositiva de revisão do conteúdo conforme as dificuldades percebidas por meio do exame diagnóstico para que os alunos avancem para a atividade experimental em laboratório de informática. Nessa aula, primeiramente, serão dadas instruções sobre como usar o R Studio para que tivessem conhecimento de como usar este recurso tecnológico e, assim, estudarem as funções trigonométricas com o auxílio do referido software. Com o domínio das funcionalidades do programa os alunos podem resolver os seguintes exercícios com o auxílio do programa.

Exercício 01 – Construir o gráfico da função dada por $f(x) = 2 \cdot sen\ (2x)$ e identificar o período, valor máximo e valor mínimo.

Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Construir no R Studio o gráfico da função dada por $f(x) = 2 \cdot sen(2x)$.



2. Através do gráfico construído identificar o período da função dada por $f\left(x\right) = 2 \cdot sen\left(2x\right)$.

3. Através do conjunto imagem identificar os valores máximo e mínimo.

4. Identificar que elementos foram alterados na função dada por $f\left(x\right) = 2 \cdot sen\left(2x\right)$ em relação a função seno.

Exercício 02 – Construir o gráfico da função dada por $g(x) = tg\ (x + \pi)$ determinando o seu período, domínio e conjunto imagem.

Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Construir no R Studio o gráfico da função dada por $g(x) = tg\ (x + \pi)$.

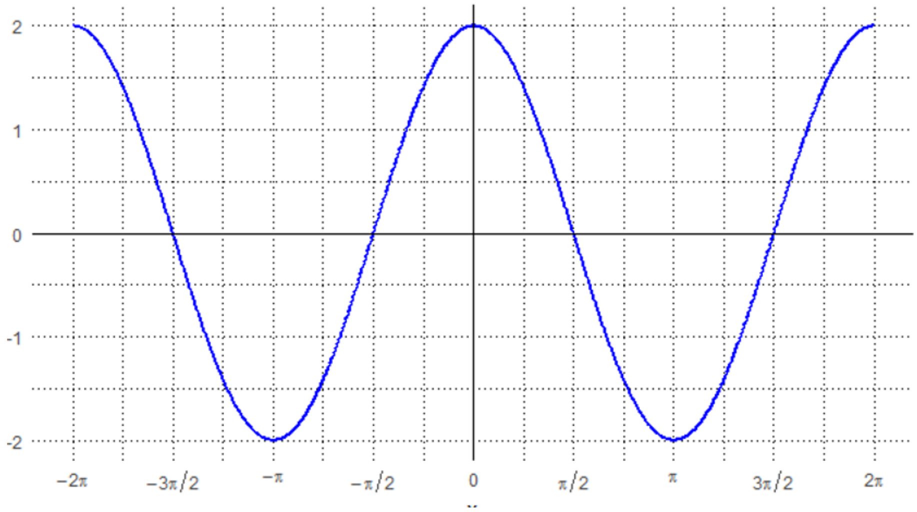
2. Identificar no gráfico o período da função.

3. Obter o domínio da função observando as assíntotas verticais e sabendo que na função tangente o domínio é todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

4. Identificar no gráfico o conjunto imagem da função dada

5. Observar se houve algum movimento de translação na função dada.

Exercício 03 – Analise o gráfico de cossenoide gerado no R Studio e determine a lei de formação que o originou.



Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Notar que a função cossenoide é da forma $f(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ conhecendo o papel de cada coeficiente.

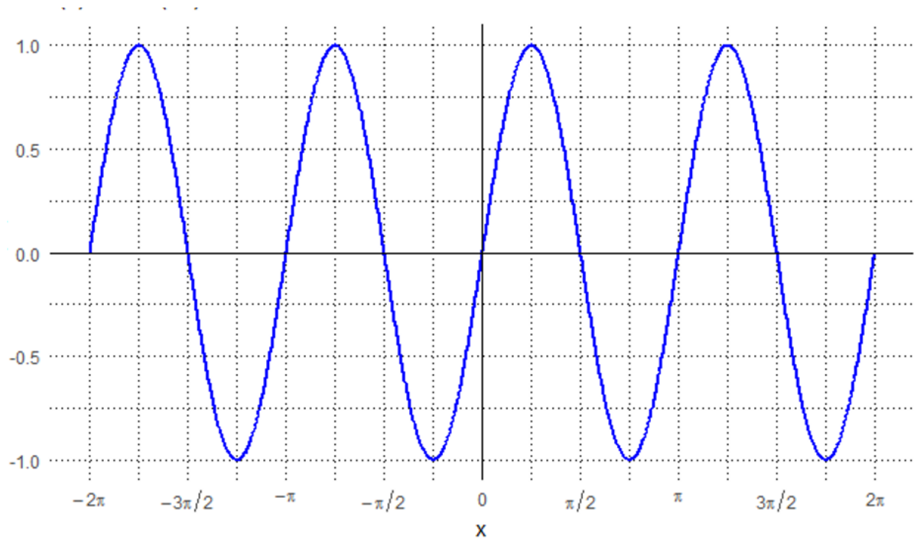
2. Identificar, por meio do gráfico, o conjunto imagem para ter os valores máximo e mínimo determinando, assim, o valor de a e b.

3. Identificar no gráfico o período da função para obter o valor do coeficiente c.

4. Observar se houve algum deslocamento horizontal no gráfico para obter o valor do coeficiente d.

5. A partir da lei de função obtida, aplica-la no R Studio para verificar se coincide com o gráfico apresentado nesta questão.

Exercício 04 – Faça um estudo do seguinte gráfico de função senoide para identificar o período, amplitude e imagem da função que o gerou.



Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Notar que a função senoide é da forma $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ conhecendo o papel de cada coeficiente.

2. Identificar, por meio do gráfico, o conjunto imagem para ter os valores máximo e mínimo determinando, assim, o valor de a e b.

3. Identificar no gráfico o período da função para obter o valor do coeficiente c.

Ocorrida a atividade em laboratório de informática, o docente deve aplicar uma verificação de aprendizagem no intuito de medir o quanto o uso do R Studio contribuiu para a compreensão do conteúdo de forma que possa ser feita uma comparação com a avaliação diagnóstica no intuito de obter informações importantes tais como o progresso dos alunos em ralação as habilidades e conhecimentos demonstrados em cada exame para verificar se conseguiram superar dificuldades identificadas na avaliação diagnóstica, e a eficácia da ferramenta de ensino utilizada, visto que através dos códigos escritos e gráficos gerados foi possível observar o comportamento das funções além de identificar e compreender cada elemento presente na lei de formação. A verificação de aprendizagem pode contar com as seguintes questões.

Questão 01 - (CEDERJ 2014) O valor máximo da função real $f(x) = 1/(2 + cos(x))$ é:

a) 1/3

b) 1/2

c) 1

d) 3

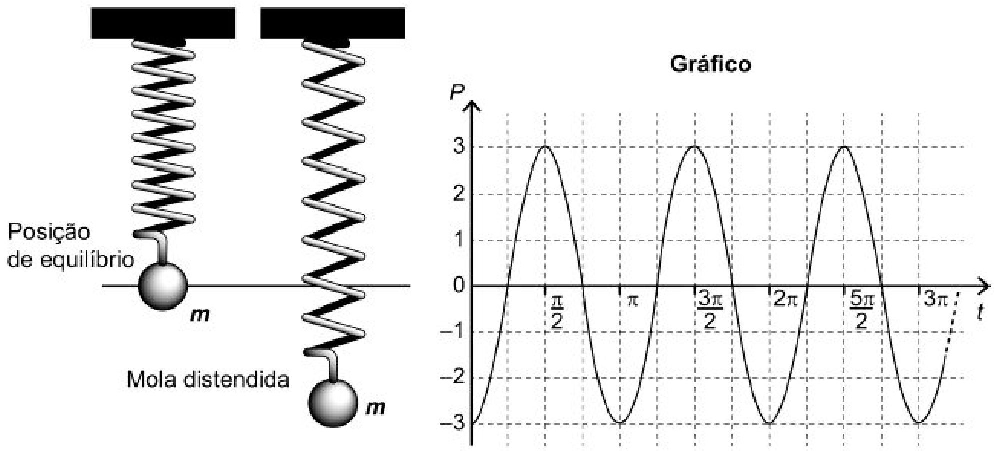
Questão 02 – Seja a função real dada por $f(x) = 3 + cos(x - \frac{\pi}{2})$, determine:

a) O período da função f.

b) A imagem da função f.

Questão 03 – A função real definida por $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$ tem período 2π e imagem [-3,3]. Qual o valor dos coeficientes A e ω?

Questão 04 - (Enem 2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cdot cos(\omega \cdot t)$ ou $P(t) = \pm A \cdot sen(\omega \cdot t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = 2\pi/T$. Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) $-3 \cdot cos(2 \cdot t)$

b) $-3 \cdot sen(2 \cdot t)$

c) $3 \cdot cos(2 \cdot t)$

d) $-6 \cdot cos(2 \cdot t)$

e) $6 \cdot sen(2 \cdot t)$

4 Considerações finais

Neste trabalho, foi apresentada uma sequência didática que pudesse ser aplicada pelo professor utilizando o software R Studio como apoio de modo que seu uso pudesse impulsionar os resultados na aprendizagem e assim servir de estímulo para que o aluno não só mostrasse interesse pelo estudo do conteúdo aqui trabalhado, como também, por toda a matemática.

Ao longo desta dissertação, foram exploradas as potencialidades do R Studio como uma ferramenta auxiliar no ensino de funções trigonométricas. O uso de tecnologias digitais no processo educativo tem se mostrado uma estratégia eficaz para engajar os alunos e promover uma compreensão mais profunda dos conteúdos matemáticos. Ainda é possível observar que por meio desta sequência didática que o uso do R Studio facilita a visualização de gráficos e o entendimento de propriedades fundamentais das funções trigonométricas, como periodicidade, amplitude e deslocamento. A interatividade proporcionada pelo software permite que o aluno experimente diferentes parâmetros e observassem suas influências nas formações dos gráficos dessas funções, o que se mostra essencial para consolidar o aprendizado.

De fato, a sua utilização se torna um fator motivador e eficaz, uma vez que, o uso feito com planejamento faz com que sua aplicação ocorra de forma satisfatória. Documentos normativos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) versam sobre a importância do uso de tecnologias digitais na educação, o desenvolvimento do pensamento computacional que contribui de forma significativa no processo de ensino-aprendizagem de matemática. O educador ao considerar esses elementos promove um ambiente de aprendizagem mais ativo e participativo.

Contudo, é necessário destacar que a integração de ferramentas como o R Studio no currículo escolar requer um planejamento cuidadoso e treinamento adequado dos professores. Além disso, é fundamental considerar as limitações tecnológicas das escolas, como a disponibilidade de computadores e acesso à internet de qualidade, para garantir que todos os alunos possam se beneficiar dessa abordagem.

Em síntese, o uso da linguagem computacional R por meio do R Studio para o ensino de funções trigonométricas mostrou-se uma abordagem promissora, que pode enriquecer significativamente o processo de ensino e aprendizagem. Espera-se que este estudo contribua para a ampliação do uso de tecnologias educacionais no ensino da matemática, incentivando novas práticas de ensino que explorem as diversas possibilidades que o R Studio e outros softwares educativos podem oferecer. Acreditamos que o futuro do ensino de matemática passa pelo uso inteligente dessas ferramentas, promovendo uma educação mais dinâmica, interativa e alinhada com as demandas do estudante.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF: MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5ª ed. São Paulo: Contexto, 2011.

SOUZA, E. F. M.; PETERNELLI, L. A.; MELLO, M. P. M. **Software Livre R: aplicação estatística.** Disponível em: <http://www.de.ufpb.br/~tarciana/MPIE/ApostilaR.pdf>. Acesso em: 27 de outubro de 2023.

GUARDIA, G. **Ensino de Matemática e Física com o R.** Disponível em: <http://www.semanadafisica.unir.br/images/material/oficina-matematica-fisica-r.pdf>. Acesso em: 23 de outubro de 2023.

Costa, N. M. L. **A História da Trigonometria.** Educação Matemática em Revista, n. 13, Brasília, 2003.

DARELA, E.; CARDOSO, M. C.; ROSA, R. C. **História da matemática: livro didático**. 3. ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2011.

NOGUEIRA, D. M. M. **Tópicos da História da Trigonometria.** 2013, 239f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013.

Sociedade Brasileira de computação. **Diretrizes para o Ensino de Computação na Educação Básica.** Porto Alegre: SBC, 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/index.php?option=com_content&view=article&id=294&Itemid=208>. Acesso em: 08 nov. 2023.

IEZZI, G.: **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria**, vol. 3. Atual, 9ª ed., 2013, ISBN 9788535716849

Dante, L. R. **Matemática, Contexto e Aplicações: 2º ano Ensino Médio.** 2ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2013.

FEITOSA, W. N.; PINTO, J. C. **Software educativo para ensino e aprendizagem de Matemática e seus usos no Ensino Médio.** Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem, [S.l.], v. 6, p. 437-452, 2023. ISSN 2764-1368.

VALENTE, J.A. **Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação.** In: VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento.* Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1999.

JORDÃO, T. C. **Formação de educadores: a formação do professor para a educação em um mundo digital.** In: Tecnologias digitais na educação. Brasília, 2009.

REGINALDO, T.; BALDESSAR, M. J.; FERNANDES, A. **A utilização das Tecnologias Digitais por professores de modo pessoal e com seus alunos na prática educativa: um estudo de caso no DALTEC - IFSC.** Revista Tecnologias na Educação, Florianópolis, v. 6, n. 10, jul. 2014. Disponível em: <http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/>. Acesso em: 23 de abril de 2024.

MELO, F. S. **O Uso das Tecnologias Digitais na Prática Pedagógica: Inovando Pedagogicamente na Sala de Aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife: 2015.

GONÇALVES, F. A. M. F. **Educação Matemática e suas Tecnologias 4**. Ponta Grossa-PR: Atena, v. 4, 2019.

LIMA, M. F.; ARAÚJO, J. F. S. **A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem.** Revista Educação Pública, v. 21, nº 23, 22 de junho de 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/23/a-utilizacao-das-tecnologias-de-informacao-e-comunicacao-como-recurso-didatico-pedagogico-no-proce

MINAYO M.C.; SANCHES. **Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade?** Caderno de Saúde Pública 9(3):239-262, 1993.

NEVES, C. D. S. **Uso de Tecnologias no Estudo de Funções Reais de Variável Real.** Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/38682374.pdf>. Acesso em: 02 de maio de 2024.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. Editora Atlas SA, 2002.

SANTOS, M. R.; VARELA, S. **A Avaliação como um Instrumento Diagnóstico da Construção do Conhecimento nas Séries Inicias do Ensino Fundamental.** Revista Eletrônica de Educação. Ano I, No. 01, ago. / dez. 2007.

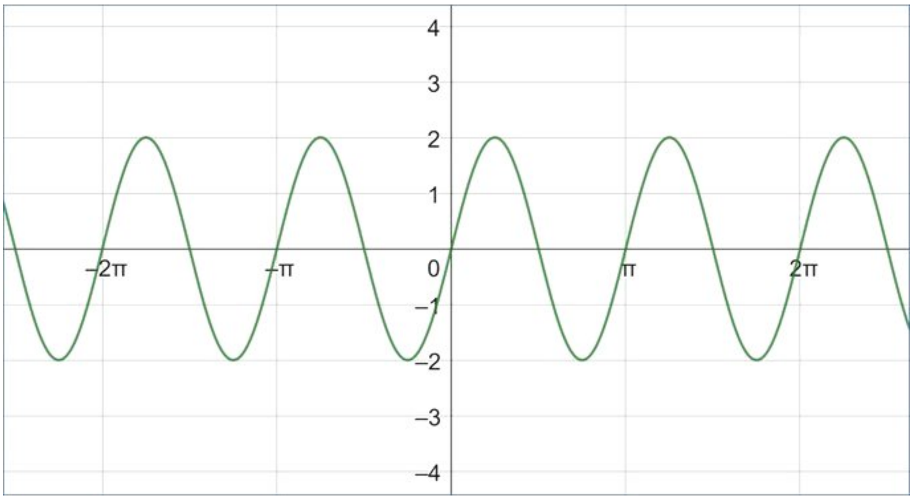
RITTER, M. N.; THEY, N. H.; Konzen, E. **Introdução ao software estatístico R.** Disponível em: <https://professor.ufrgs.br/sites/default/files/matiasritter/files/apostila_introducao_ao_r_-_ritter_they_and_konzen.pdf>. Acesso em: 06 de maio de 2024.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – Solução das questões do exame diagnóstico

QUESTÃO 01

Uma função periódica se repete ao longo do eixo x. No gráfico abaixo temos a representação de uma função do tipo $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$. Qual o valor do produto $A \cdot \omega$?



Solução:

Como a questão pede o valor do produto $A{\cdot}\omega$, é necessário que seja identificado no gráfico da função dada por $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$ a sua amplitude (para que seja obtido o valor de A e o seu período (para que seja obtido o valor de ω).

Desse modo, como a imagem da função está no intervalo $[-2, 2]$, então a amplitude é 2, isto é, $A = 2$.

Temos que o período da função senóide é $p = \frac{2\pi}{|c|}$ e que na função dada o gráfico mostra que o período é π. Assim, $\frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ levando a $\omega = 2$.

Portanto $A \cdot \omega = 4$.

QUESTÃO 02

A função real definida por $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$ tem período 3π e imagem [-5,5]. Qual o valor dos coeficientes A e ω?

Solução:

Como a imagem da função dada está definida no intervalo $[-5, 5]$, então a

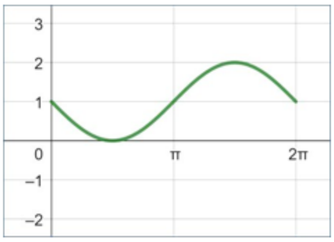
amplitude é 5, isto é, $A = 5$.

A função tem período 3π, isto é, $\frac{2\pi}{|\omega|} = 3\pi$. Isso implica em $\omega = \frac{2}{3}$.

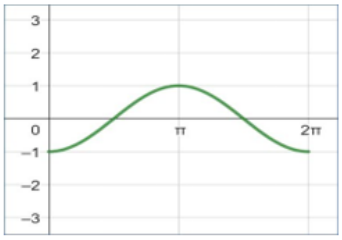
QUESTÃO 03

Dentre os gráficos abaixo, qual representa corretamente a função $f(x) = 1 + sen(x + \pi)$?

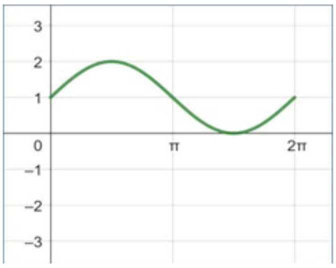
a)



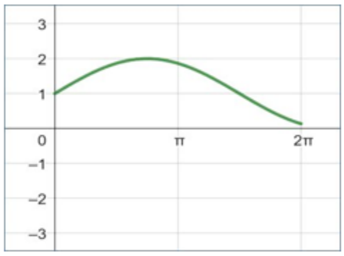
b)



c)



d)

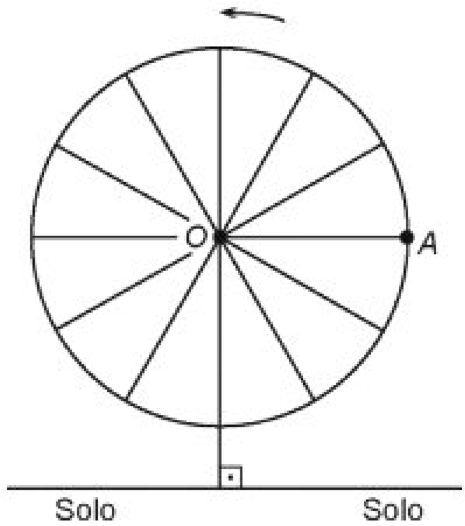


Solução:

Inicialmente, note que a função senoide dada por $f(x) = 1 + sen(x + \pi)$ deve apresentar em seu gráfico um deslocamento vertical de uma unidade para cima devido o coeficiente A ser 1 e, ainda, um deslocamento horizontal de π unidades à esquerda, fazendo com que fique com as características apresentadas no gráfico do C.

QUESTÃO 04

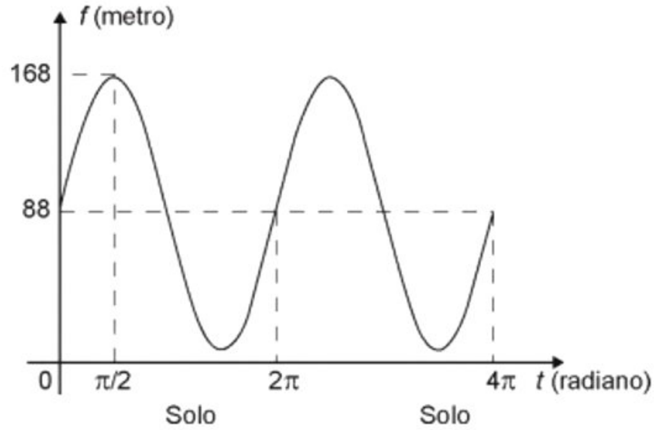
(ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponivel em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f em o seguinte gráfico:



Disponivel em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80 \cdot sen(t) + 88$

b) $f(t) = 80 \cdot cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88 \cdot cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168 \cdot sen(t) + 88 \cdot cos(t)$

e) $f(t) = 88 \cdot sen(t) + 168 \cdot cos(t)$

Solução:

Pelo gráfico apresentado $f(0) = 88$, então temos que f é uma função seno de período 2π da forma $f(t) = A + Bsen(t)$, desse modo $A = 88$. Note que $f(\frac{\pi}{2}) = 168$ donde esse é o valor máximo e $B = 168 - 88 = 80$. Portanto, $f = 80 \cdot sen(t) + 88$. Alternativa A.

APÊNDICE B – Solução das ações da atividade prática realizada com o R Studio

EXERCÍCIO 01

Construir o gráfico da função dada por $f(x) = 2 \cdot sen\ (2x)$ e identificar o período, valor máximo e valor mínimo.

Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

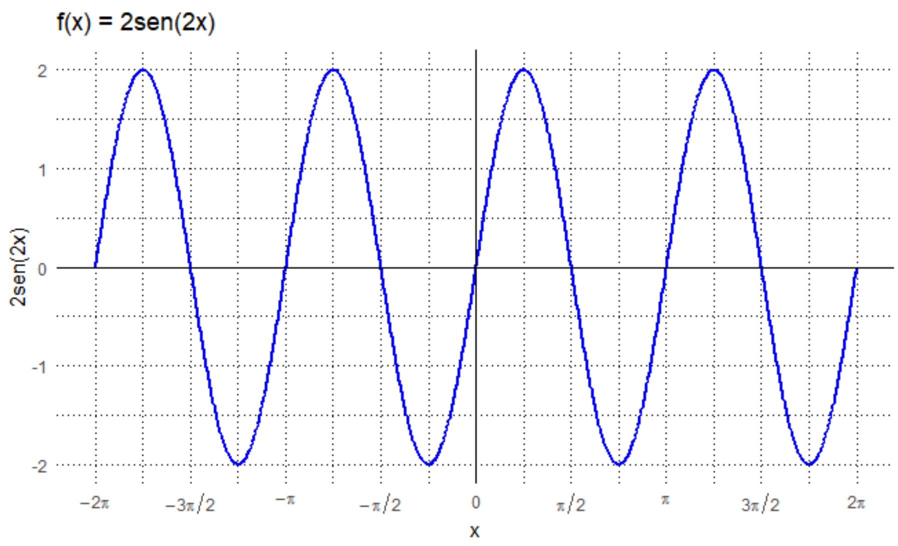
1. Construir no R Studio o gráfico da função dada por $f(x) = 2 \cdot sen(2x)$.

   Solução:

   Comandos para gerar o gráfico da função dada por $f(x) = 2 \cdot sen(2x)$.

```
f <- 2*sin(2*x)

x <- seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 1000)
y <- f

dados <- data.frame(x=x,y=y)

breaks <- seq(-2*pi, 2*pi, by = pi / 2)
labels <- c(expression(-2*pi), expression(-3*pi/2),
expression(-pi), expression(-pi / 2), "0",
expression(pi / 2), expression(pi),
expression(3*pi/2), expression(2*pi))

ggplot(dados, aes(x = x, y = y)) +
geom_line(color = "blue", size=1.0) +
scale_x_continuous(breaks = breaks,labels = labels)+
geom_hline(yintercept = 0, color = "black")+
geom_vline(xintercept = 0, color = "black")+
labs(title = expression("f(x) = 2sen(2x)"), x = "x",
y = "2sen(2x)") +
theme_minimal() +
```

```
theme(panel.grid.major = element_line(color = "black",
linetype = "dotted"),
panel.grid.minor = element_line(color = "black",
linetype = "dotted"))
```



2. Através do gráfico construído identificar o período da função dada por $f\,(x) = 2 \cdot sen\,(2x)$.

   Solução:

   Pelo gráfico gerado temos que a função apresenta período igual a π. Podemos, ainda, verificar este fato por meio da relação que dá o período da função seno na forma $f\,(x) = 2 \cdot sen\,(2x)$., isto é, $p = \frac{2pi}{|c|}$, então temos $p = \frac{2\pi}{2} \rightarrow p = \pi$.

3. Através do conjunto imagem identificar os valores máximo e mínimo.

   Solução:

   O gráfico mostra que a função apresenta valor mínimo igual a -2 e valor máximo 2. Portanto, seu conjunto imagem é $[-2, 2]$.

4. Identificar que elementos foram alterados na função dada por $f\,(x) = 2 \cdot sen\,(2x)$ em relação a função seno.

   Solução:

   Em relação a função seno na sua forma fundamental foram alterados o conjunto imagem e período.

EXERCÍCIO 02

Construir o gráfico da função dada por $g(x) = tg\ (x + \pi)$ determinando o seu período, domínio e conjunto imagem.

Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Construir no R Studio o gráfico da função dada por $g(x) = tg\ (x + \pi)$.

   Solução:

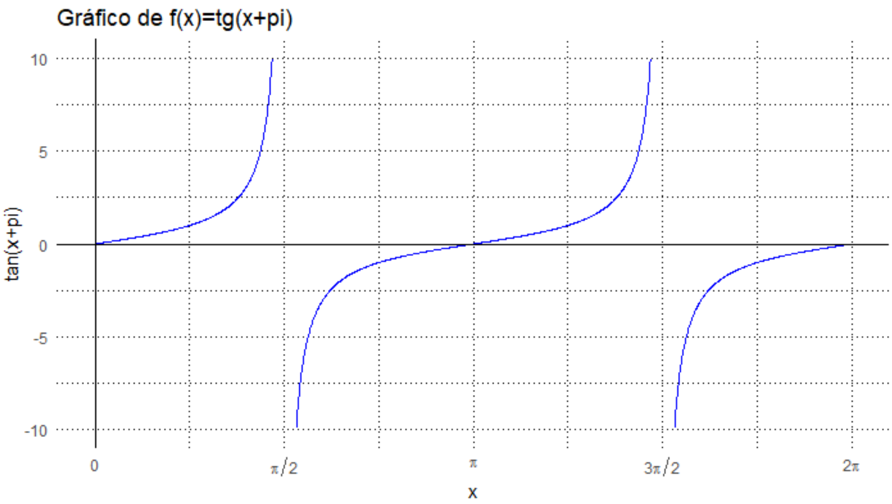
   Comandos para gerar o gráfico da função dada por $g(x) = tg\ (x + \pi)$.

```
# Definir uma pequena margem para evitar os pontos de descontinuidade
m <- 0.01

# Definir os intervalos abertos
x1 <- seq(0, pi/2 - m, length.out = 500)
x2 <- seq(pi/2 + m, pi, length.out = 500)
x3 <- seq(pi, 3*pi/2 - m, length.out = 500)
x4 <- seq(3*pi/2 + m, 2*pi, length.out = 500)

# Calcular a função tangente para cada intervalo
y1 <- tan(x1+pi)
y2 <- tan(x2+pi)
y3 <- tan(x3+pi)
y4 <- tan(x4+pi)

# Criar data frames para cada intervalo
df1 <- data.frame(x = x1, y = y1)
df2 <- data.frame(x = x2, y = y2)
df3 <- data.frame(x = x3, y = y3)
df4 <- data.frame(x = x4, y = y4)

# Combinar todos os data frames
df_total <- rbind(df1, df2, df3, df4)

# Criar o gráfico com ggplot2
ggplot() +
  # Adicionar os segmentos da função tangente
  geom_line(data = df1, aes(x = x, y = y), color = "blue") +
  geom_line(data = df2, aes(x = x, y = y), color = "blue") +
  geom_line(data = df3, aes(x = x, y = y), color = "blue") +
```

```
geom_line(data = df4, aes(x = x, y = y), color = "blue") +

# Adicionar os eixos x e y interceptando na origem
geom_hline(yintercept = 0, color = "black") +
geom_vline(xintercept = 0, color = "black") +

# Limitar o eixo y para uma visualização mais clara
ylim(-10, 10) +

# Definir os breaks e labels no eixo x
scale_x_continuous(
  breaks = c(0, pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi),
  labels = c(
    "0",
    expression(pi/2),
    expression(pi),
    expression(3*pi/2),
    expression(2*pi)
  )
) +

# Adicionar título e rótulos aos eixos
ggtitle("Gráfico de f(x)=tg(x+pi)") +
xlab("x") +
ylab("tan(x+pi)") +

# Aplicar um tema minimalista
theme_minimal() +

# Ajustar a posição dos eixos para que se interceptem na origem
theme(panel.grid.major = element_line(color = "black", linetype = "dotted"),
      panel.grid.minor = element_line(color = "black", linetype = "dotted")
)
```

2. Identificar no gráfico o período da função.

   Solução:



O período da função conforme o gráfico acima é π.

3. Obter o domínio da função observando as assíntotas verticais e sabendo que na função tangente o domínio é todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

   Como do domínio da função tangente é tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, então $x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\rightarrow$x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi - \pi$ $\rightarrow$x $\neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$

4. Identificar no gráfico o conjunto imagem da função dada

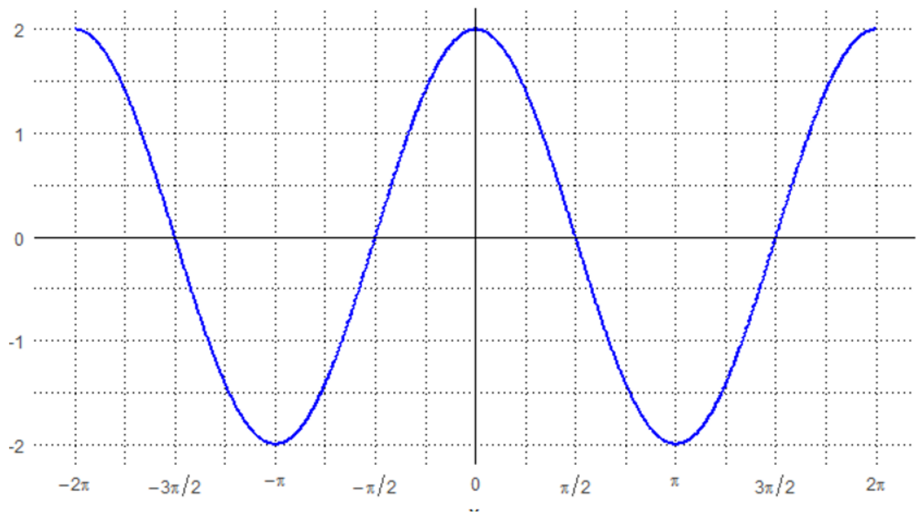
   O conjunto imagem da função é todo $y \in \mathbb{R}$

5. Observar se houve algum movimento de translação na função dada.

   Não houve movimento de translação.

Exercício 03

Analise o gráfico de cossenoide gerado no R Studio e determine a lei de formação que o originou.



Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

1. Notar que a função cossenoide é da forma $f(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ conhecendo o papel de cada coeficiente.

2. Identificar, por meio do gráfico, o conjunto imagem para ter os valores máximo e mínimo determinando, assim, o valor de a e b.

   Solução:

   Inicialmente, no gráfico não há deslocamente vertical, implicando no coeficiente $a = 0$. Note que o valor máximo e valor mínimo no gráfico da função é 2 e -2 respectivamente, portanto o coeficiente $b = 2$.

3. Identificar no gráfico o período da função para obter o valor do coeficiente c.

   Solução:

   Temos que o período da função cossenoide é dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$ e que pelo gráfico dado os imagens da função se repetem para valores posteriores a 2π e anteriores a -2π, implicando em $p = 2\pi$.
   Desse modo $\frac{2\pi}{|c|} = 2\pi$ →c = 1.

4. Observar se houve algum deslocamento horizontal no gráfico para obter o valor do coeficiente d.

   Solução:

   O gráfico da função dada não apresenta deslocamento horizontal, portanto $d = 0$.

5. A partir da lei de função obtida, aplica-la no R Studio para verificar se coincide com o gráfico apresentado nesta questão.

   Solução:

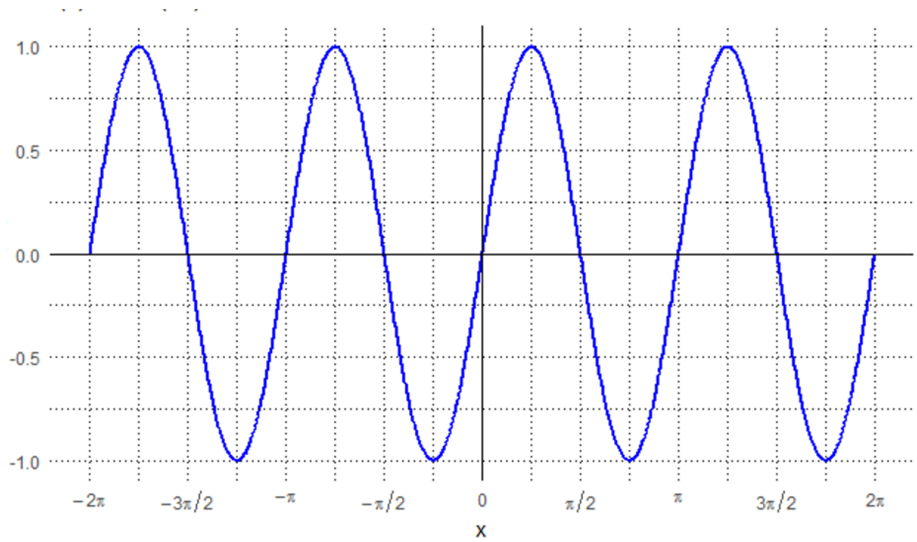
   Pelos itens anteriores temos, $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 0$. Desse modo, a função expressa pelo gráfico acima é dada por $f(x) = 2cos(x)$. Para verificar o gráfico no R Studio são utilizados os seguintes códigos.

```
f <- 2*cos(x)

x <- seq(-2*pi, 2*pi, length.out = 1000)
y <- f

dados <- data.frame(x=x,y=y)
```

```
breaks <- seq(-2*pi, 2*pi, by = pi / 2)
labels <- c(expression(-2*pi), expression(-3*pi/2), expression(-pi),
            expression(-pi / 2),
            "0", expression(pi / 2),
            expression(pi), expression(3*pi/2), expression(2*pi))
ggplot(dados, aes(x = x, y = y)) +
  geom_line(color = "blue", size=1.0) +
  scale_x_continuous(breaks = breaks,labels = labels)+
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black")+
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black")+
  labs(title = expression("f(x) = 2cos(x)"),
       x = "x",
       y = "2cos(x)") +
  theme_minimal() +
  theme(panel.grid.major = element_line(color = "black", linetype = "dotted"),
        panel.grid.minor = element_line(color = "black", linetype = "dotted"))
```

EXERCÍCIO 04

Faça um estudo do seguinte gráfico de função senoide para identificar o período, amplitude e imagem da função que o gerou.



Ações a serem realizadas para resolver essa questão.

a) Notar que a função senoide é da forma $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ conhecendo o papel de cada coeficiente.

b) Identificar, por meio do gráfico, o conjunto imagem para ter os valores máximo e mínimo determinando, assim, o valor de a e b.

Solução:

Inicialmente, no gráfico não há deslocamente vertical, implicando no coeficiente $a = 0$. Note que o valor máximo e valor mínimo no gráfico da função é 1 e -1 respectivamente, portanto o coeficiente $b = 1$.

c) Identificar no gráfico o período da função para obter o valor do coeficiente c.

Temos que o período da função cossenoide é dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$ e que pelo gráfico dado os imagens da função se repetem para valores posteriores a π e anteriores a $-\pi$, implicando em $p = \pi$.
Desse modo $\frac{2\pi}{|c|} = \pi \rightarrow \mathbf{c = 2}$.

APÊNDICE C – Solução da verificação de aprendizagem

Questão 01

(CEDERJ 2014) O valor máximo da função real $f(x) = 1/(2 + cos(x))$ é:

a) 1/3
b) 1/2
c) 1
d) 3

Solução:

Temos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$ e que a função dada terá valor máximo para $cos(x) = -1$. Substituindo em $f(x) = 1/(2 + cos(x))$ temos, $f(x) = \frac{1}{2+(-1)}$ $\rightarrow$f(x) = 1.

Portanto o valor máximo de f é 1. Alternativa C.

Questão 02 Seja a função real dada por $f(x) = 3 + cos(x - \frac{\pi}{2})$, determine:

a) O período da função f.
   Solução:
   Temos que o período da função dada pode ser obtido por meio da relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$. Note que $c = 1$, portanto $p = 2\pi$.

b) A imagem da função f.
   Solução: A imagem da função dada se encontra no intervalo $[a - b, a + b]$ e como $a = 3\ e\ b = 1$, a imagem de $f \in [2, 3]$.

Questão 03

A função real definida por $f(x) = A \cdot sen(\omega \cdot x)$ tem período 2π e imagem [-3,3]. Qual o valor dos coeficientes A e ω?

Solução:

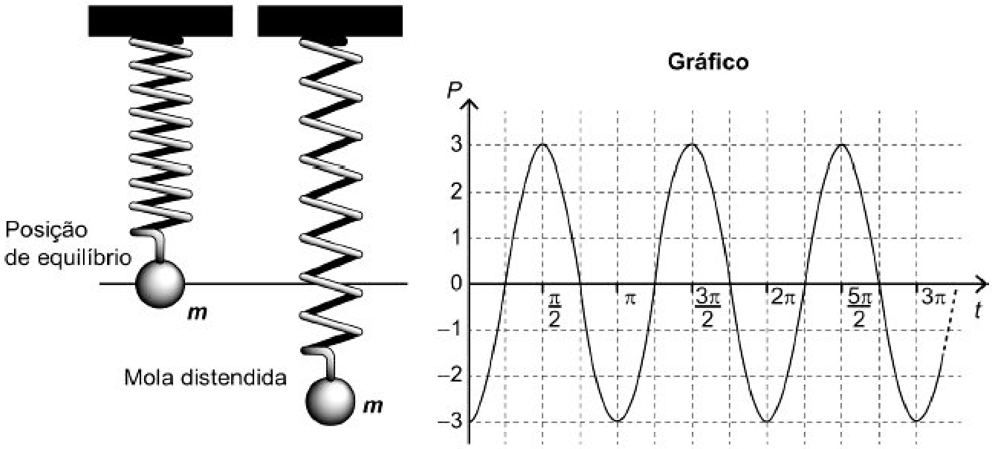
Inicilmente, temos que o período da função dada pode ser obtido pela relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, e como $p = 2\pi$ então $\frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi \rightarrow \omega = 1$.

A imagem da função está no intervalo fechado $[-3, 3]$ o que implica em uma amplitude igual a 3. Logo, $A = 3$.

Portanto o produto $A \cdot \omega = 3$.

Questão 04

(Enem 2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cdot cos(\omega \cdot t)$ ou $P(t) = \pm A \cdot sen(\omega \cdot t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = 2\pi/T$. Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) $-3 \cdot cos(2 \cdot t)$
b) $-3 \cdot sen(2 \cdot t)$
c) $3 \cdot cos(2 \cdot t)$
d) $-6 \cdot cos(2 \cdot t)$
e) $6 \cdot sen(2 \cdot t)$

Solução:

Pelo gráfico apresentado podemos obter o período da função da seguinte forma, $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$, e como o período é dado por $p = \frac{2\pi}{T}$ temos que $\frac{2\pi}{T} = \pi$ implicando em $T = 2$. Logo, $\omega = 2$.

Note que o ponto $(0, -3)$ pertence à função. Isso implica em dizer que, sendo a função do tipo cossenóide, então temos $A \cdot cos(2 \cdot 0) = -3$ $\rightarrow$A $\cdot cos(0) = -3$ $\rightarrow$A=-3

Portanto, a função será dada por $P(t) = -3 \cdot cos(2 \cdot t)$**.**