Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Josenildo Brandão da Silva Souza

MATRIZES POR TRÁS DE UM CUBO MÁGICO

Teresina - 2024

Josenildo Brandão da Silva Souza

Dissertação de Mestrado:

MATRIZES POR TRÁS DE UM CUBO MÁGICO

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA.

Teresina - 2024

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586m Silva, Josenildo Brandão da.
Matrizes por trás de um cubo mágico / Josenildo Brandão da Silva. -- 2024.
71 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Antonio Kelson Vieira da Silva."

1. Matrizes. 2. Ferramenta de ensino. 3. Cubo mágico. 4. Ensino aprendizagem. I. Silva, Antonio Kelson Vieira da. II. Titulo.
CDD 512.5

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***"MATRIZES POR TRÁS DE UM CUBO MÁGICO"***, defendida pelo mestrando Josenildo Brandão da Silva, em 28 de agosto de 2024 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Antonio Kelson V da Silva

Antonio Kelson Vieira da Silva
Presidente da Banca
examinadora

Manoel Vieira de Matos Neto

Manoel Vieira de Matos Neto
Examinador Interno

Liane Mendes Feitosa Soares

Liane Mendes Feitosa Soares
Examinador Interno

Cícero Pedro de Aquino

Cicero Pedro de Aquino
Examinador Externo

Dedico esta dissertação a Deus... Toda honra e louvor!

Agradecimento

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois é a maior razão por essa conquista. Agradeço, Pai, pelos livramentos, por cada promessa cumprida. Dedico esse diploma ao Senhor. Amo-te, Pai... Amo-te, Jesus... Amo-te, Espírito Santo.

À minha querida esposa, Jessica Mayara, pelo amor, incentivo, paciência e apoio incondicional. À minha sogra, Maria Lisbeth, pelo apoio e incentivo. Aos meus filhos Dhessyca, Dheniffe e Dhonatan, que sempre souberam compreender a minha ausência, devido a minha dedicação ao mestrado.

Aos meus pais, Antônio José e Maria Vanda, pela educação, incentivo e todos os ensinamentos. Ao meu eterno avó, João Alves, que partiu para a glória, pelos ensinamentos e incentivo.

Aos professores do programa PROFMAT, pelos ensinamentos, e aos colegas em geral que contribuíram de alguma forma para a realização dessa conquista..

Ao meu orientador, Prof. Dr. ANTONIO KELSON, por sua paciência, incentivo e apoio incansável ao longo deste período. Este trabalho não teria sido possível sem a sua orientação e confiança em mim. Serei eternamente grato por ter tido a honra de tê-lo como meu orientador. Muito obrigado!

“*28 Vinde a mim, todos os que estais cansados e oprimidos, e eu vos aliviarei.*
29 Tomai sobre vós o meu jugo, e aprendei de mim, que sou manso e humilde de coração; e encontrareis descanso para as vossas almas.
30 Porque o meu jugo é suave e o meu fardo é leve. ".

Mateus 11:28-30

Resumo

A matemática é uma ferramenta fundamental para a nossa sobrevivência em uma sociedade. Porém, ao adentrarmos na sala de aula encontramos uma outra realidade. Alunos com dificuldades na compreensão e assimilação dos conteúdos, tais fatos estão ligados tanto a fatores externos como internos, entre eles: Acalculia, Discalculia e a Ansiedade matemática. Visando uma transformação desse cenário, propomos o jogo Cubo Mágico como uma ferramenta metodológica para o ensino de matrizes, propriedades e aplicações. Para isso, apresentamos no Capítulo 1: as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem; no Capítulo 2: a história do Cubo Mágico e a matemática que o envolve. Nos capítulos 3 e 4 consta a definição de matrizes e suas propriedades. Por fim, apresentamos aplicações dos resultados obtidos em três áreas: Criptografia, Cinemática e Tomografia Computadorizada.

Palavras-chave: Cubo Mágico; Matrizes; Matrizes de rotação.

Abstract

Mathematics is an essential tool for thriving in society. However, upon entering the classroom, we encounter a different reality. Many students struggle with understanding and absorbing content, which can be attributed to both external and internal factors, including Acalculia, Dyscalculia, and math-related anxiety. In an effort to reshape this scenario, we propose the Magic Cube game as a teaching method for introducing matrices, their properties, and applications. In Chapter 1: We address the challenges within the teaching-learning process; Chapter 2: Covers the history of the Rubik's Cube and its mathematical foundations. Chapters 3 and 4 explore the definition of matrices and their key properties. Lastly, we highlight applications of these results in three fields: Cryptography, Kinematics, and Computed Tomography.

Keywords: Magic Cube; Matrices; Rotation matrices.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Em uma sociedade moderna, as relações humanas, apesar de complexas, são essenciais para o desenvolvimento comportamental e profissional de um indivíduo. Assim, deve-se analisar o relacionamento entre professor/aluno, pois esse envolve intenções e interesses, sendo essa interação o eixo das consequências de desenvolvimento, já que a educação é uma das fontes essenciais do desenvolvimento comportamental e elemento agregador de valores nos membros da espécie humana. O conhecimento é fruto da atividade e relações humanas marcado social e culturalmente (Brait *et al.*, 2010).

"Neste sentido, a interação estabelecida entre o ensino/aprendizagem caracteriza-se pela seleção, preparação, organização e sistematização didática dos conteúdos para facilitar o aprendizado dos alunos" (Brait *et al.*, 2010, p.3). Para Gomes (2006) as práticas pedagógicas necessitam ter uma dinâmica própria, que permita ao aluno o exercício do pensamento reflexivo capaz de integrar a arte, a cultura e os valores, assim, conduzindo o aluno ao processo de aprendizagem. Segundo Brait *et al.* (2010, p.3) "para que o professor consiga êxito entre os alunos, cabe uma difícil tarefa de despertá-los à curiosidade, ao aprendizado prazeroso, e à necessidade de cultivar sempre novos conhecimentos em meio às atividades propostas e acompanhadas pelo professor".

Maraschin (2020 *apud* Cruz, 2008) menciona que o papel principal da escola e do professor não é apenas divulgar informações, mas instigar no aluno o conhecimento e a descoberta. Para que ocorra esse cenário, Cruz (2008) enfatiza que tanto o papel do professor quanto do aluno deverão mudar. O professor assumirá função de mediador do saber, auxiliando o aluno a analisar as fontes de informações que mais se evidenciam sobre determinado fato ou assunto. E o aluno assumirá o papel participativo no seu processo de aprendizagem, isto é, não sendo um mero recebedor de informações. Cruz (2008, p.6) ainda ressalta que:

> Então, professor e aluno terão de aprender a lidar com as novas tecnologias e também com os modelos tradicionais para adquirir as informações necessárias para sua formação profissional e pessoal. Como se percebe, o desafio não é simples, requer que professores e alunos se preparem para trabalhar com um universo tecnológico no qual eles ainda estão se iniciando (Cruz, 2008, p.6).

Contudo, essas mudanças de papéis, da escola, do profesor e do aluno não serão tão simples. Uma vez que, o sistema educacional brasileiro vem enfrentando grandes desafios no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem, principalmente, no componente curricular matemática. Tais desafios englobam tanto a falta de compreensão dos objetos de estudos como sua aplicação no cotidiano do aluno. As dificuldades enfrentadas pelos alunos provêm de fatores internos e fatores externos, dentre os fatores externos podemos citar o uso excessivo de tecnologias de informações, tal como redes sociais, problemas sociais enfrentados pela família e até mesmo a desestruturação desta, além de possíveis metodologias adotadas por professores que se tornam ineficientes ou insuficientes.

Já no que tange aos fatores internos existem, hoje, diversos transtornos ou distúrbios que têm influenciado na defasagem da qualidade da educação. Podemos citar os transtornos da acalculia, discalculia e ansiedade matemática (Carmo; Simionato, 2012). Tais fatores podem provocar sentimentos negativos no que se refere ao currículo de matemática ou até mesmo uma perda de estímulos para se apropriar de um objeto de conhecimento tão indispensável para uma sociedade em desenvolvimento. Nesses momentos de dificuldades é de suma importância que o professor busque estratégias com o objetivo de sanar ou amenizar as barreiras educacionais com novas práticas de ensino, como: Pesquisa, Projetos, Sequências didáticas, entre outros.

Segundo Freire (1996, p. 25) “ensinar não é apenas transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a produção ou de sua construção”. Assim, vemos, hoje, a necessidade de que os objetos de conhecimentos estejam relacionados com o cotidiano do aluno objetivando, posteriormente, a formalização de seus conceitos tornando a aprendizagem mais significativa.

Por diversos anos, o ensino da matemática foi pautado na memorização e repetição de processos sem a preocupação com a compreensão dos objetos de conhecimentos. Assim, o centro do ensino era o professor como detentor do saber matemático, assumindo o papel de expositor dos conteúdos e não de mediador entre o aluno e o conteúdo tratado. Segundo Freire (2005, p. 68 *apud* Brighente; Mesquida, 2016, p.7) “o educador é o que diz a palavra; os educandos, os que a escutam docilmente; o educador é o que disciplina; os educandos, os disciplinados”.

Para a transformação desse cenário foi necessário estabelecer reformas curriculares e metodológicas que mudassem a realidade educacional descrita acima. Um viés que auxilia na compreensão e construção do conhecimento matemático é o ensino baseado na resolução de problemas, uma vez que é possível a utilização de diversos conceitos e práticas matemáticas e outros campos do conhecimento.

No entanto, é necessária a busca por novas práticas e tendências metodológicas que visem promover o processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, a Etnomatemática, pois trabalha a realidade do aluno como princípio de toda a ação pedagógica. Outra estratégia a ser usada no processo educacional é o Lúdico (adjetivo derivado do latim *Ludus* que remete a jogos e divertimento), o uso desse material proporciona ao aluno uma aprendizagem de modo divertido, pois contribui para o desenvolvimento intelectual e da criatividade do aluno. O jogo é considerado uma importante estratégia pedagógica e promove o desenvolvimento integral e dinâmico de novas percepções, expectativas e motivações. Desse modo, o professor é uma peça fundamental para que ocorra a interação entre o material lúdico e o aluno, portanto, é de suma importância que o professor tenha conhecimento prévio do material a ser usado e da metodologia a ser abordada permitindo, assim, a exploração do potencial da atividade lúdica no desenvolvimento de habilidades. Segundo Macedo *et al.* (2000 *apud* Machado, 2011, p.20) "Pode-se dizer, portanto, que serve qualquer jogo, mas não de qualquer jeito".

Os jogos de raciocínio lógico ajudam na memorização, contagem, cálculos mentais, noções de espaço e formas, entre outros. Devido a uma ampla variedade de jogos, as características que cada um apresenta e os seus elementos, eles auxiliam na compreensão dos conteúdos trabalhados, pois os jogos devem ser alvo de estudo e observação, a fim de serem definidos os objetos de conhecimentos a eles atrelados, para que possam ser utilizados de modo eficiente e que alcancem os objetivos traçados. Segundo diversos estudiosos, como D'Ambrosio (2003) e Reis (2013), os jogos tornam o processo de aprendizagem mais prazeroso, consequentemente, mais significativo e marcante, visto que está atrelado a parte emocional. Assim, devemos encarar o lúdico como uma ferramenta facilitadora e que pode despertar o interesse e a motivação para o estudo da matemática. Além disso, pode ser aplicado tanto no início como no final de cada conteúdo.

Dessa forma, o professor desempenha um papel primordial na interação entre o material lúdico e o aluno. Por isso, é crucial que ele possua um conhecimento prévio do material sobre os recursos que irá utilizar e a metodologia a ser aplicada. Isso possibilita a exploração do potencial das atividades lúdicas no desenvolvimento de diversas habilidades. Portanto, é necessário reiterar que para que o uso de materiais lúdicos tenha eficiência no processo de ensino aprendizagem, é necessário fazer um planejamento, caso contrário, se tornará uma ferramenta obsoleta e como passatempo para os alunos.

Diante disso, o material lúdico abordado neste trabalho será o Cubo Mágico. Trata-se de um quebra-cabeça composto por 27 pequenos cubos empilhados, que juntos formam o cubo numa configuração tridimensional 3x3x3. Cada face do cubo é marcada com uma cor diferente, tais como: Azul, Verde, Laranja, Amarelo, Vermelho e Branco. Segundo Silva (2017) esse quebra-cabeça foi inventado na década de 70 e permite que quaisquer das faces possam ser giradas em seu próprio eixo central. O objetivo central é, após algumas manipulações nas faces do cubo, retornar à configuração inicial, isto é, uma cor por face. Neste trabalho, teremos um capítulo dedicado a conhecer melhor o Cubo Mágico.

Visando a aplicação do lúdico em sala de aula, este trabalho tem como objetivo geral propor uma correlação entre o Cubo Mágico e as aplicações e o estudo de matrizes, visto a riqueza deste conteúdo e a sua aplicabilidade. A fim de alcançar esse propósito, o objetivo específico é modelar os elementos de uma matriz em um Cubo Mágico mediando uma inter-relação entre as matrizes de rotação e os movimentos do cubo.

Por fim, este trabalho será dividido em 7 Capítulos: no 1º Capítulo serão apresentados alguns transtornos de aprendizado como: discalculia, acalculia e ansiedade matemática; no 2º Capítulo será apresentado o Cubo Mágico; no 3º Capítulo veremos as permutações das faces do Cubo Mágico e como podem ser escritas na forma de matrizes; no 4º Capítulo será apresentado o conceito de Matrizes e suas propriedades; 5º Capítulo serão apresentadas as matrizes de rotações e suas correspondências com os movimentos L, L', R, R', U, U', B, B', F, F', D e D'; no 6º Capítulo serão apresentadas algumas aplicações de matrizes e no 7º Capítulo serão apresentadas as considerações finais deste trabalho.

CAPÍTULO 1

Desafios do processo de ensino-aprendizagem

A matemática é uma ferramenta fundamental para a nossa sobrevivência em sociedade. Pois, diariamente, lidamos com situações que necessitam de cálculos e raciocínio lógico, a fim de solucioná-las, ou seja, são situações que exigem um pensamento matemático. Segundo Basto (2006, *apud* Peretti, 2009) a matemática desempenha um papel decisivo na formação do cidadão, pois permite o desenvolvimento de habilidades extremamente importantes como: raciocínio lógico dedutivo, o que fortalece a capacidade intelectual e estrutural do pensamento.

Percebemos, ao longo do tempo, um aumento de estudos relacionados às dificuldades matemáticas, uma vez que a aprendizagem de novas habilidades matemáticas sempre foi considerada como difícil, porém, para alguns, tais dificuldades estão sendo tratadas como normais (Peretti, 2009). "Desse modo, a matemática ao se configurar para os alunos como algo difícil de compreensão, sendo de pouca utilidade prática, produz representações e sentimentos que vão influenciar no desenvolvimento da aprendizagem" (Santos; França; Santos, 2007, p.27). Portanto, é primordial que o professor planeje a forma que cada assunto será abordado, pois o mero exercício por parte do aluno de memorizar os resultados, não sabendo como foram obtidos se torna obsoleto.

Segundo os PCN's (*apud* Santos; França; Santos, 2007, p.27):

> É importante que estimule os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática, como ela foi construída, como pode construir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados à investigação científica. Desse modo, o aluno pode identificar os conhecimentos matemáticos como meios que o auxiliam a compreender e atuar no mundo (PCN's, *apud* Santos; França; Santos, 2007, p.27).

Atualmente, o processo de aprendizagem matemática, no Brasil, enfrenta grandes desafios que vão desde a compreensão até a aplicação dos conteúdos estudados. Conforme Fiorentini (1990 *apud* Silva, 2021), a aprendizagem matemática passa por alguns obstáculos que devem ser superados, a exemplo, o fato do aluno sentir dificuldade em entender como a escola ensina e, na sua grande maioria, aplicar os conhecimentos já adquiridos mesmo quando aprovados na disciplina. Além disso, a falta de motivação dos alunos e, muitas vezes, dos professores e/ou a deficiência na escolha de metodologias adequadas também tem contribuído para a ineficácia deste processo.

Porém, é possível observar dentro da educação matemática no ambiente escolar, um excesso de sistematização dos conteúdos, o que tem distanciado os conhecimentos teóricos dos conhecimentos práticos, provocando aos alunos uma dificuldade de compreensão do conteúdo trabalhado, levando - os a uma falta de interesse pela aprendizagem matemática. Tal fato é confirmado por Santos; França; Santos (2007, p.12), quando os autores afirmam: "Hoje dando-se prioridade aos elementos teóricos para resolução de problemas não ligados à realidade dos alunos, que não os compreendem, surgiram as dificuldades em matemática, levando muitos ao desinteresse pela disciplina".

Nesse sentido, o professor desempenha um papel crucial no processo de ensino e aprendizagem matemática, seu papel vai muito além de, simplesmente, ser um mediador entre o conhecimento e o aluno, mas um articulador entre os conteúdos sistematizados e a aplicação matemática. O educador da atualidade tem por objetivo preparar as novas gerações para a vida, isto é, proporcionar ao educando um ensino adequado e de qualidade, que possibilite adquirir novos conhecimentos e habilidades que precisam para seu desempenho no meio da sociedade moderna (Santaló, 2009 *apud* Masola; Allevato, 2019).

Dessa forma, podemos levantar o seguinte questionamento: As dificuldades do processo de ensino e aprendizagem estão atrelados somente às metodologias inadequadas que dificultam tal processo? Segundo Garcia (1998 *apud* Masola; Allevato, 2019), as dificuldades de aprendizagem matemática podem ser tratadas como dificuldades no desenvolvimento de habilidades ligadas à Matemática e podem estar relacionadas à deficiência mental, à escolarização escassa e/ou inadequada, ou a déficits visuais ou auditivos.

Alguns autores também atribuem essas dificuldades de aprendizagem a dois transtornos poucos conhecidos: **ACALCULIA** e **DISCALCULIA**. Garcia (1998 *apud* Masola; Allevato, 2019) considera que os termos "problemas da aprendizagem na matemática", "transtornos aritméticos", "transtornos de matemática", "problemas específicos de matemática" podem se referir ao mesmo campo, podendo ser esclarecidos com o uso dos termos: Acalculia e discalculia. Segundo Vorcaro (2007), dificuldades de leitura e compreensão, dificuldades de entender conceitos e símbolos, dificuldades com sequências numéricas e fatos matemáticos ou a falta de habilidades para desenvolver qualquer tarefa matemática, podem estar relacionadas aos transtornos de acalculia e discalculia. Porém, o que são esses transtornos?

a. DISCALCULIA

Discalculia é uma disfunção na região frontal do cérebro que provoca a falta de habilidades com a matemática (Alves, 2021). Segundo Garcia (1998 *apud* Masola; Allevato, 2019), a Discalculia é um transtorno neurológico causado pela má formação do cérebro e se manifesta como uma dificuldade para realizar operações matemáticas, classificar números e colocá-los em ordem.

O estudo sobre este transtorno de aprendizagem é uma área ainda em expansão, pois existe pouca literatura a seu respeito. O estudo é pouco abordado entre os professores da área e entre a sociedade em geral, uma vez que muitos alunos que apresentam esse transtorno, na maioria dos casos, taxam-se como: "*Sou burro e não aprendo matemática*". Segundo Wajnsztejn e Lopes (2010 *apud* Pimentel; Lara, 2017) a discalculia é considerada mais rara em comparação com a dislexia, e de difícil diagnóstico, por esse motivo poucos professores conseguem diagnosticá-la.

Segundo Kosc (1974 *apud* Pimentel; Lara, 2017) esse transtorno pode ser classificado em seis tipos: **discalculia verbal**, **discalculia practognóstica**, **discalculia léxica**, **discalculia gráfica**, **discalculia ideognóstica** e **discalculia operacional**.

Ademais, Natércia Vorcaro que é professora de Matemática, Psicopedagoga Institucional e autora do blog discalculicos, afirma que a discalculia tem cura, pois o diagnóstico de discalculia é apenas uma descrição do atual estágio de desenvolvimento. Uma vez que, com o desenvolvimento da criança as dificuldades poderão ser minimizadas ou até mesmo quase desaparecerem.

Ainda na visão desta autora: "Se a criança está recebendo tratamento adequado, a possibilidade de desenvolvimento da capacidade matemática é grande."

b. ACALCULIA

Acalculia se destingue da discalculia por não ser classificada propriamente como um transtorno, mas como um distúrbio provocado por uma lesão cerebral, a exemplo, traumatismo craniano, que leva ao detrimento de habilidades matemáticas (Alves, 2021).

Ainda segundo a autora, a acalculia pode eclodir em qualquer fase da vida do indivíduo, uma vez que, ela surge através de um dano sofrido pelo cérebro. Assim, o indivíduo perde seus conhecimentos matemáticos já adquiridos após desenvolver acalculia.

> A Acalculia é um transtorno da matemática causado por lesão cerebral, o que faz com que a pessoa perca a habilidade na Matemática, fazendo com que o cérebro ative uma outra área para resolver cálculos, porém, essa região apresenta falhas nessa execução. A Acalculia pode ser definida em dois tipos: desordens primárias em cálculo (chamadas de acalculia primária) e as acalculias derivadas de outros distúrbios cognitivos (chamadas de acalculias secundárias) (Silva, 2016 *apud* Lara; Arias, 2020 p.56).

Existem ainda diversos fatores que influenciam as deficiências de conhecimentos básicos em alguns estudantes. Para Carmo e Simionato (2012) os alunos podem apresentar casos de ansiedade em relação à matemática denominada **Ansiedade Matemática**, que é frequente diante de situações que exigem a manipulação e aplicação de conhecimentos matemáticos. Assim, o aluno apresenta dificuldades quanto a execução de atividades que envolvam conhecimentos matemáticos. Os alunos que demonstram quadro de ansiedade matemática apresentam reações semelhantes à ansiedade crônica quando expostos a situações que envolvem o uso da matemática.

> Tipicamente, um estudante com ansiedade diante da matemática não conseguirá se concentrar ao fazer exercícios dessa disciplina em sua casa; poderá ficar agressivo ao ser questionado pelo professor na sala de aula sobre alguma atividade, apresentar taquicardia ao realizar um exame de matemática, entre outras reações. As reações fisiológicas que se apresentam nessas ocasiões impedem o aluno de apresentar um bom desempenho nas tarefas (Carmo, 2011 *apud* Carmo; Simionato, 2012, p.318).

Embora, diante desses grandes desafios não exista uma receita pronta, Santos, França e Santos (2007) nos recomendam que antes de escolhermos um material didático ou um jogo, devemos refletir sobre as dificuldades apresentadas por nossos alunos, saber o papel de cada aluno, sobre o tipo de aluno que queremos formar e qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno. Segundo os PCN's (*apud* Santos; França; Santos, 2007, p. 33):

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular da matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua prática. Dentre elas, destaca-se a história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas,como também os instrumentos para construção das estratégias de resolução (PCN's *apud* Santos; França; Santos, 2007, p. 33).

A aplicação de jogos educativos durante as aulas de matemática apresenta-se como um dos caminhos que proporciona o desenvolvimento de atividades de resolução de problemas matemáticos (Ramos, 2021). Portanto, apresentaremos a seguir o Cubo Mágico como uma ferramenta metodológica de grande potencialidade, pois motivará os estudantes e promoverá o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade, além de estimular seu raciocínio lógico.

CAPÍTULO 2

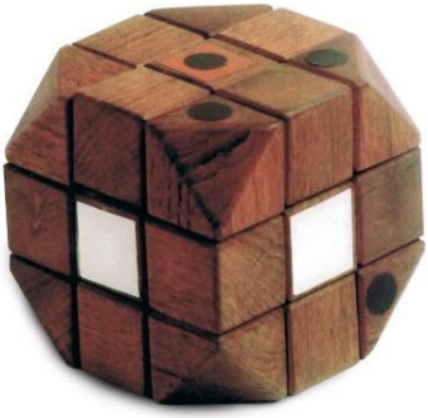
Erno Rubik e uma obra de arte: o Cubo Mágico

Em 13 de julho de 1944, em Budapeste - Hungria, em meio ao caos da 2º Guerra Mundial, nasce Erno Rubik, filho de uma Poetisa e de um Engenheiro Aeronáutico. Aos 23 anos de idade, inicia seus estudos em escultura na Faculdade de Arquitetura da Escola Técnica de Budapeste, fazendo Pós-Graduação em escultura e arquitetura de interiores. Mais tarde, alcançou o cargo de professor no Departamento de Desenho de Interiores da Academia de Artes e Trabalhos Manuais Aplicados de Budapeste, na Hungria.

Devido sua paixão pela docência, Erno sempre procurava por novas metodologias, a fim de tornar mais emocionante a transmissão do conhecimento, pois acreditava que a educação era a melhor maneira de descobrir e aprender por intermédio da busca constante de novos meios para o ensino (Silva, 2015). Devido ao seu fascínio pelo Espaço, esculturas, design e o movimento no espaço e tempo, Erno começou a buscar formas de inovar seus meios de comunicar ideias a partir da utilização de modelos reais feitos de papéis e papelão, que começou a desafiar seus alunos a manipular e experimentar formas 3D de fácil compreensão.

Segundo Silva (2015), Erno sempre viu o cubo como uma obra de arte, uma escultura móvel que traz consigo problemas desconcertantes e inteligência triunfal reunindo: **Simplicidade**, **Complexidade**, **Estabilidade**, **Dinâmica**, **Ordem** e **Caos**. No início, Erno pretendia desenvolver um quebra-cabeça, por inspiração no quebra-cabeça trangran e Pentomino, que tivesse formato cúbico e que permitia as peças se moverem entre si. Porém, aqui surge a primeira barreira: desenvolver um mecanismo que segurasse todas as peças e que permitisse tais movimentações. Assim, Erno tentou diversos modelos, sem sucesso, até mesmo com as peças presas por elástico. No início do projeto, parecia quase impossível desenvolver um mecanismo com tamanha complexidade e simplicidade. Porém, a história conta que Rubik encontrou a solução enquanto observava o curso do rio Danúbio numa tarde de domingo.

Figura 2.1: Primeiro cubo mágico



Fonte: Site Energia Inteligente UFJF

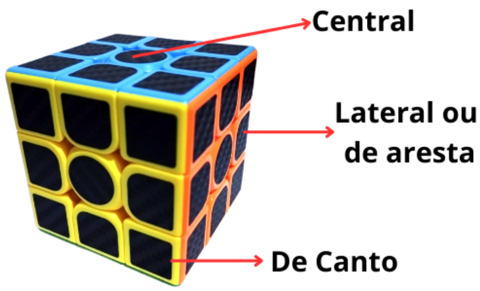
A mecânica do Cubo Mágico é baseada em um sistema de rotação das camadas. Cada uma das faces do cubo podem ser giradas em um quarto de volta em qualquer direção, cujo objetivo é embaralhar as cores e, em seguida, tentar resolvê-las (Pedrotti, 2023). No final do projeto, as peças se unem por que se encaixam umas com as outras. As primeiras peças eram feitas de madeira e pitadas a mão pelo próprio inventor, cada uma de uma cor. O propósito era para uma melhor visualização dos movimentos pelas pessoas ao manipularem as faces dos cubos.

Figura 2.2: Mecanismo do cubo mágico

Fonte: site Ziicube

Em 19 de maio de 1974, foi criado o primeiro protótipo do quebra-cabeça em formato de um cubo. Erno ao observar o protótipo viu o seu grande potencial, assim o próximo passo era iniciar a sua fabricação. As primeiras unidades do quebra-cabeça foram fabricadas e distribuídas pela Politechnika, na Hungria, recebendo grande aceitação por parte da população local. Porém, o brinquedo ainda era um pouco pesado, pois possuia o dobro do peso em comparação às unidades produzidas posteriomente. O cubo é composto por 27 cubinhos, cada face possui 9 cubinhos sendo um localizado no centro do cubo, porém, ele é chamado de cubinho virtual. Nós iremos classificar esses pequenos cubos como: central, lateral ou de aresta e de canto.

Figura 2.3: Classificação dos cubinhos



Fonte: Acervo do pesquisador

Entretanto, devido ao Regime Comunista enfrentado pela Hungria, o cubo de Rubik, popularmente conhecido como "Cubo Mágico" enfrentou grandes barreiras para ser exportado para outros países. Entretanto, no ano de 1975, Erno solicita o pedido da patente do Cubo Mágico, a qual só foi concedida dois anos mais tarde. Rapidamente, ganhou notoriedade e popularidade por toda a Hungria, obtendo no ano de 1980, escala a nível mundial.

Alguns matemáticos levaram o Cubo Mágico para algumas conferências internacionais e também a uma feira de brinquedos realizada na cidade de Nuremberg - Alemanha em 1979. O que ajudou a divulgar ainda mais o brinquedo e desde então a história do Cubo Mágico ganhou proporções ainda maiores. O que chamou a atenção de alguns especialistas em brinquedos, entre eles Tom Kremer. Kermer, inicialmente, era especialista em brinquedos da Ideal Toy Company e, posteriormente, fundador da empresa Sevem Towns.

No ano de 1980, a companhia de brinquedos Ideal Toy Company inicia a produção industrial e a distribuição mundial do cubo, que em um curto prazo de 2 anos vendeu cerca de 100 milhões de unidades. Devido o seu grande sucesso e sua larga expansão entre os jovens, adultos e entre diversas profissões, foram lancados alguns livros que ensinavam passo a passo de como reorganizar as faces do cubo. Segundo a história, o próprio Erno Rubik demorou cerca de um mês para resolvê-lo, chegando até a duvidar se teria algum algoritmo possível que permitisse torná-lo ao aranjo inicial.

Porém, no ano de 1985, os direitos autorais sobre o cubo de Rubik (Cubo Mágico) foram vendidos para a empresa Sevem Towns, que o reintroduziu no mercado e até os dias de hoje é um dos passatempos mais vendidos em todo o mundo. Devido a grande popularidade desse brinquedo, já foram lançadas algumas versões diferentes do modelo original e tradicional do Cubo Mágico 3x3x3. Entre essas versões, podemos citar os modelos: triangulares, circulares, megaminx, entre outros. No formato cúbico ele possui algumas variações tais como os modelos: 2x2x2, 7x7x7, 12x12x12 e até mesmo 21x21x21. Devido essa grande popularidade, ele inspirou uma série de competições e eventos em todo o mundo, incluindo campeonatos mundiais, cujo objetivo é resolver o Cubo Mágico na menor quantidade de tempo possível.

Figura 2.4: Variados modelos de cubo mágico

Fonte: Site Energia Inteligente UFJF

Segundo Silva (2015, *apud* Pedrotti, 2023, p.10):

> A beleza do Cubo de Rubik é que quando você vê um embaralhado, você sabe o que deve ser feito, sem instrução alguma. Porém, sem instruções de como proceder é quase impossível de se resolver, tornando com que o cubo de Rubik seja umas das invenções mais frustrantes e viciantes já produzidas (Silva, 2015 *apud* Pedrotti, 2023, p.10).

Para resolvê-lo requer um tempo de dedicação e aperfeiçoamento, podendo ser de extrema complexidade para iniciantes que desejam ser autodidatas na sua resolução.

2.1 Notação de Singmaster

Ao nos debruçarmos sobre a literatura a respeito do Cubo Mágico, observamos que cada face do cubo é didaticamente identificada pela primeira letra do nome em inglês que aquela face está posicionada: Front (F), Back (B), Upper (U), Down (D), Left (L) e Right (R).

No tocante às movimentações das faces do cubo, cada face pode girar um quarto de volta ou meia volta, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. Indicamos os respectivos movimentos de um quarto de volta em sentido horário por F, B, U, D, L e R. No sentido anti-horário, identificaremos um viro de 90º de uma face com um apóstrofo (')

ao lado da letra, isto é, U', F', R', D', B', L'. Assim, poderemos representar um "rearranjo", do cubo por meio de uma letra do alfabeto U, F, R, D, B, L, U', F', R', D', B', L'.

Os movimentos de rotação serão orientados "positivamente ou diretamente" no sentido horário, e "negativamente ou inversamente" no sentido anti-horário, ambos com a face voltada para nossa frente, além disso, em cada movimentação será de um quarto de volta (Santos, 2010). A seguir, destacaremos 12 movimentos básicos, isto é, 6 movimentos orientados positivamente e 6 movimentos orientados negativamente. Para uma melhor compreensão dos movimentos, iremos considerar o cubo no seu estado inicial (cada face de uma única cor).

Movimento U e U'

Tomando a face amarela como referência, esse movimento U consiste em girar a face denominada de Upper (face Superior) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento U' consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.5: Rotação da face Upper (Superior)

Fonte: Acervo do pesquisador

Movimento B e B'

Tomando a face amarela como referência, esse movimento B consiste em girar a face denominada de Back (face Trazeira) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento B' consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.6: Rotação da face Back (Trazeira)

Fonte: Acervo do pesquisador

Movimento F e F'

Tomando a face amarela como referência, esse movimento F consiste em girar a face denominada de Front (face Frontal) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento F' consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.7: Rotação da face Front (Frontal)

Fonte: Acervo do pesquisador

Movimento D e D'

Tomando a face amarela como referência, esse movimento D consiste em girar a face denominada de Down (face Inferior) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento D' consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.8: Rotação da face Down (Inferior)

Fonte: Acervo do pesquisador

Movimento L e L'

Tomando a face amarela como referência, esse movimento L consiste em girar a face denominada de Left (face Esquerda) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento L' consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.9: Rotação da face Left (Esquerda)

Fonte: Acervo do pesquisador

Movimento R e R’

Tomando a face amarela como referência, esse movimento R consiste em girar a face denominada de Right (face Direita) um ângulo de 90º no sentido horário, enquanto o movimento R’ consiste em girar a mesma face em um ângulo de 90º no sentido anti-horário.

Figura 2.10: Rotação da face Right (Direita)

Fonte: Acervo do pesquisador

> É imediato reconhecer que as rotações não são mais que permutações do conjunto dos “cubinhos” que constituem o cubo e que executar rotações sucessivamente corresponde a compor essas permutações. Assim, não é surpreendente que RU’ e U’R não correspondam ao mesmo rearranjo do cubo, já que a composição de funções não é, em geral, comutativa (Davis, 2009 *apud* Santos, 2010, p. 13).

Devido a essa grande complexidade de solução, o Cubo Mágico pode se tornar o aliado perfeito no ensino e aprendizagem da matemática. Em decorrência da grande variedade de permutações de suas faces, ele atrai a curiosidades de alunos para a matemática, pois ajuda a compreender alguns conteúdos que para muitos parecem ser complexos, tais como: Geometria Espacial, Rotação, Análise Combinatória, Permutações, Matrizes entre outros.

2.2 Cubo Mágico e a Matemática

Um grande desafio é traduzir a matemática da linguagem tradicional, isto é, de “simples” aplicações de regras, manipulações de operações e símbolos e resoluções de equações para uma linguagem de procedimentos práticos que desenvolva no aluno uma correlação entre a matemática e as demais áreas do conhecimento. Segundo Silva (2015, p. 18), este é um grande desafio no ensino da matemática o de “[...] tornar a matemática do cotidiano mais motivadora e significante para os estudantes, utilizando recursos pedagógicos que sejam excitantes, eficazes e que busquem renovar o ensino”.

Outro grande desafio no ensino da matemática é tornar a álgebra, ramo da matemática que estuda a manipulação formal de equações, em algo de simples aplicação focada na compreensão de conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações são, na grande maioria, artificiais e os alunos não têm a oportunidade de refletir e nem articular seus conhecimentos. Pois os alunos memorizam procedimentos que são assumidos como "fáceis", operações sobre sequências de símbolos e que envolvem problemas com poucos significados. Assim, podemos olhar para o Cubo Mágico como uma ferramenta passível de ser aplicada na Educação Básica, ilustrando a importância do lúdico como uma metodologia que visa tornar mais agradável o processo de ensino-apredizagem.

O Cubo Mágico é uma ferramenta pedagógica extramamente versátil para o professor nas aulas de matemática. Ao lidar com o Cubo Mágico em sala de aula, o professor desperta no aluno o raciocínio lógico e a concentração. Segundo Silva (2015, p. 13):

> Exige raciocínio lógico, concentração e outras habilidades. Um prato cheio para aulas de Matemática, por exemplo. Para conseguir resolver o enigma do cubo mágico é preciso mexer em poucas peças para não bagunçar as outras. É lógica, é matemática. O cubo possui 43 quintilhões de combinações possíveis. Para um nível básico, em sete etapas é possível montar (Silva, 2015, p. 13).

"Conhecer as potencialidades do Cubo Mágico e promover a sua utilização pode motivar o estudante a desenvolver habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade, além de estimular seu raciocínio lógico" (Pedrotti, 2023, p. 14). Assim, ao aplicarmos essa feramenta nas práticas pedagógicas podemos tornar o ensino da matemática ainda mais atrativo e eficiente.

Resolver o Cubo Mágico requer o desenvolvimento e a aplicação de algumas habilidades e estratégias, pois estimula a imaginação e a criatividade, habilidades essas indispensáveis para encontrar maneiras de resolver problemas, o que conduz a descobertas inovadoras. Com base em estudos e pesquisas desenvolvidas por Florentino *et al.* (2021 *apud* Pedrotti, 2023), aplicar o Cubo Mágico como ferramenta pedagógica proporciona aos alunos uma experiência enriquecedora para o ensino e aprendizagem da matemática. Durante a aplicação do projeto, pelos referidos autores, eles destacam alguns benefícios, tais como: o desenvolvimento de habilidades e superação de algumas dificuldades de aprendizado, maior persistência e concentração, e raciocínio lógico por parte dos estudantes envolvidos no projeto.

Os autores ainda destacam uma grande contribuição para a socialização, autoestima e uma melhor comunicação entre os alunos, trazendo resultados surpreendentes, inclusive para os alunos que apresentavam dificuldades de aprendizado. Segundo Silva (2015, p. 32):

> [...] a teoria dos jogos matemáticos não é um mero divertimento de excêntricos, sendo, assim um tópico moderno de investigação científica. Muitos problemas de jogos matemáticos e combinatórios podem ser inseridos em correspondência com problemas clássicos, no sentido em que demonstrar uma propriedade sobre um jogo é equivalente a demonstrar um teorema matemático (Silva, 2015, p. 32).

O cubo de Rubik é conhecido como jogo de permutações, pois é baseado nas permutações ou movimentações dos cubinhos que o compõe. Assim, resolver o Cubo Mágico é encontrar uma permutação dentre todas as possíveis que restaure o estado inicial do Cubo Mágico. Desvendar uma solução para o Cubo é uma extraordinária forma de as pessoas sentirem como os elementos de um grupo qualquer podem ser combinados (Moya, 2015) e como cada cubinho pode transportar informações.

Ao passo que manipulamos o Cubo Mágico, se faz necessário realizar vários movimentos ao mesmo tempo, por exemplo, R seguido de U seguido de R' seguido de U', após aplicarmos 6 vezes, o cubo retornará ao seu estado "resolvido". Ao aplicarmos alguns movimentos sucessivos damos o nome de sequências do Cubo Mágico. É importante ressaltar que ao aplicarmos uma sequências de movimentos, o cubo sai de uma configuração 1 para uma configuração 2 com uma nova situação.

Do mesmo modo se não aplicarmos nenhuma movimentação no cubo, isto é, deixá-lo inalterado, este movimento é chamado de identidade e representado por I. É evidente que se aplicarmos F seguido do seu oposto é o mesmo que não fazer nada no cubo, ou seja, FF'= I o mesmo ocorre ao aplicarmos $F^{4 \cdot k} = I$ para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ (Santos, 2010). O mesmo fato ocorre quando aplicamos uma sequência de movimentos no Cubo Mágico, por exemplo, RULU, seguidos de seus movimentos opostos U'L'U'R', esta sequência desfaz os movimentos executados pela primeira, ou seja, $RULRU'L'U'R' = I$.

Santos (2010, p. 15) ressalta que o cubo "possui movimentos identificados como comutativos e não comutativos. O primeiro ocorre com faces não-adjacentes, por exemplo, FB=BF ou LR=RL e o segundo ocorre com quaisquer faces adjacentes." Isso torna o Cubo Mágico ainda mais intrigante.

A seguir, veremos algumas permutações das faces do cubo e a escrita na forma matricial, alcançando assim o objetivo deste trabalho.

CAPÍTULO 3

Permutações e escrita matricial

Definição 3.0.1 *Seja M um conjunto com m elementos, isto é,* $M = a_1, a_2, \cdots, a_m$. *Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r (1 ≤ r ≤ m) a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.*

Exemplo 1 *Dado* $M = \{a, b, c, d\}$ *Os arranjos dos quatro elementos de M, tomados dois a dois, são os pares ordenados (x,y) formados com elementos distintos de M. Vejamos todos os arranjos possíveis:*
(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)
Contudo, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem obtemos o número de arranjos possíveis.

$$4 \cdot 3 = 12$$

Definição 3.0.2 *Seja M um conjunto com m elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. *Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que* $r = m$.

Exemplo 2 *Dado um conjunto* $A = (a, b, c)$ *é possível escrever um total de 6 permutações ou arranjos. Vejamos todas as permutações possíveis:*
(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Exemplo 3 *Dado um conjuto* $B = (1, 2, 3, 4)$ *é possível escrever um total de 24 permutações ou arranjos. Vejamos todas as permutações possíveis:*
(1,2,3,4)(1,2,4,3)(1,3,2,4)(1,3,4,2)(1,4,2,3)(1,4,3,2)
(2,1,3,4)(2,1,4,3)(2,3,1,4)(2,3,4,1)(2,4,1,3)(2,4,3,1)

(3,1,2,4)(3,1,4,2)(3,2,1,4)(3,2,4,1)(3,4,2,1)(3,4,1,2)
(4,1,2,3)(4,1,3,2)(4,2,1,3)(4,2,3,1)(4,3,2,1)(4,3,1,2).

Partindo da definição de permutação, observamos que objetos distintos podem ser arranjados de várias ordens diferentes. Contudo, é possível obtermos a quantidade de permutações de um conjunto sem a necessidade de listar todas as formas possíveis.

Definição 3.0.3 *Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por P_m o número de permutações dos m elementos de M. Assim,*

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ ... \ \cdot [m-(m-1)]$$

$$\boxed{P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ ... \ \cdot 2 \cdot 1 = m!}$$

Assim, dizemos que o número de permutações de m objetos é dado por m-fatorial. Algo importante de ressaltar é que ao movimentarmos as faces do cubo, alteramos as configurações das facetas dos cubinhos. Porém, segundo o Professor Schutze (2005, *apud* Santos, 2010), nem todas as configurações são possíveis, uma vez que os cubinhos das arestas não podem ser trocados com os cubinhos dos cantos, assim existem algumas restrições de combinações. Utilizando os conhecimentos de Análise Combinatória, podemos facilmente calcular o número de permutações do Cubo Mágico a partir do seguinte raciocínio:

- Permuta-se os oito vértices do cubo, ou seja, temos 8! permutações possíveis;
- Permuta-se as 12 arestas do cubo, ou seja, temos 12! permutações possíveis. Porém, apenas metade das possibilidades possíveis é verdadeira, uma vez que não é possível permutar duas arestas sem trocar a posição de dois vértices e vice-versa; Assim, podemos escrever $\frac{12!}{2}$.
- Cada vértice possui três cores distintas. É possível girar todos os vértices do cubo, exceto um, sem que nada mais mude no cubo. Dado que a orientação do último vértice será determinada pela orientação dos demais, temos 3^7 orientações distintas para os vértices;
- As peças laterais possuem duas orientações. É possível girar todas as peças laterais, exceto um, sem que nada mais mude no cubo. Dado que a orientação da última lateral será determinada pela orientação das demais, temos 2^{11} orientações distintas para as laterais;

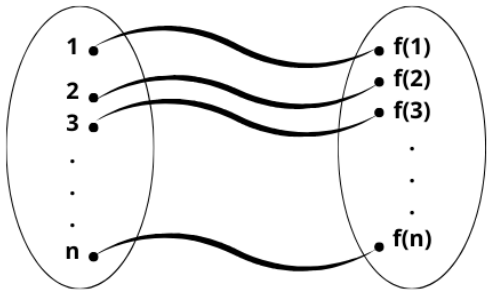
Dessa forma, o número total de combinações no Cubo Mágico será:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000$$

Apesar desse número exorbitante, não é difícil de encontrarmos uma combinação que solucione o Cubo Mágico.

Além disso, podemos representar permutações como uma função bijetiva α, que associa os elementos de M em M, ou seja, α: $M \to M$.

Figura 3.1: Função bijetiva



Fonte: Acervo do pesquisador

Ademais, para uma melhor análise, iremos escrever tais permutações da face do Cubo Mágico em forma de tabela com duas linhas. Tomando um conjunto $A = (1, 2, 3, \cdots, n)$ podemos escrever suas permutações em uma tabela de duas linhas. Na 1ª linha ficará os elementos na sua sequência inicial e na 2ª linha ficará as imagens dessa sequência. Vejamos:

Tabela 3.1: Permutações escrita em tabela

1	2	3	⋯	n
f(1)	f(2)	f(3)	⋯	f(n)

Fonte: Acervo do pesquisador

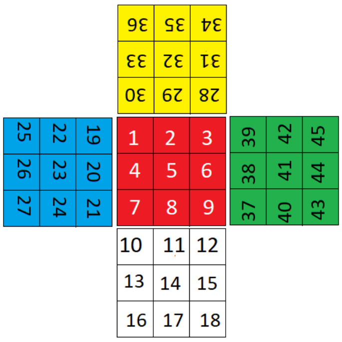
Vejamos um exemplo.

Exemplo 4 *Dado um conjunto $A = (1, 2, 3, \cdots, n)$, representaremos uma de suas várias permutações ma forma de tabela (denominado forma matricial, teremos um capítulo dedicado ao estudo de matrizes).*

$$P_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

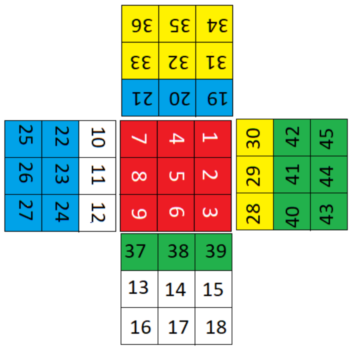
Ao analisarmos o Cubo Mágico, observamos que os movimentos de suas faces se comportam como permutações das 54 faces visíveis dos cubinhos que o compõe. Ao movimentá - las podemos aplicar os conceitos acima citados. Vejamos as figuras a seguir.

Figura 3.2: Panificação do cubo



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 3.3: Rotação de 90º sentido horário



Fonte: Acervo do pesquisador

Rotacionando a face vermelha em um giro de 90º no sentido horário, observamos que a primeira linha de cada face permuta umas com as outras, mudando, assim, sua organização. Aplicando uma relação biunívoca ao elementos da face vermelha, observamos que:

$$P_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Permuta} \Rightarrow P_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

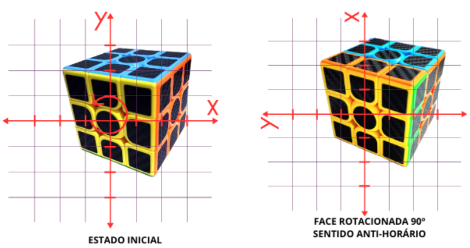
O mesmo fato ocorre para as demais faces. Vejamos outro exemplo, rotacionando a face branca em um giro de 90º no sentido horário e aplicando uma relação biunívoca aos elementos da face branca, temos:

$$P_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow P_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 37 & 38 & 39 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Portanto, teremos 43.252.003.274.489.856.000 formas de escrever as permutações das faces do Cubo Mágico em um modelo matricial.

Outra maneira de representarmos as rotações das camadas de um cubo é através das chamandas matrizes de rotações. Supondo um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no centro do Cubo Mágico, veja a figura 3.4, e tomando um par ordenado (x,y) no vértice do cubo. Vamos, agora, supor que giramos os dois eixos desse sistema cartesiano, assim a face do cubo também é girada, permitindo giros de 90º, 180º, 270º e 360º.

Figura 3.4: Rotação da face do cubo



Fonte: Acervo do pesquisador

A seguir, veremos a definição de matrizes e suas respectivas propriedades, bem como algumas aplicações em nossa sociedade.

CAPÍTULO 4

Matrizes

Inicia-se este capítulo com a definição de Matrizes, este conceito é de suma importância para o desenvolvimentos dos capítulos seguintes.

4.1 Matrizes

Podemos compreender uma matriz como um quadro retangular de dados dispostos em linhas e colunas, que pode conter números, funções ou elementos de qualquer natureza. Porém, é necessária uma definição formal, assim:

Definição 4.1.1 *Dados m, $n \in \mathbb{N}$, chama-se Matriz A, toda tabela retangular A composta por números reais a_{ij}, distribuídos em m linhas e n colunas, onde j, $i \in \mathbb{N}$ são os* ***índices*** *que permitem identificar um dado elemento na matriz que está na i-ésima linha e j-ésima coluna. A representação de uma tal matriz é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ou simplesmente: $A = (a_{ij})_{mxn}$ Deixando subentendido que $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.
Importante ressaltar que para nomear as matrizes usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto: **A, B, C, etc**. Os elementos ou entradas da matriz são representados por

letras minúsculas de nosso alfabeto, acompanhadas de um índice duplo que indica a sua localização na matriz. Na matriz A citada acima, a entrada a_{21} se refere ao elemento localizado na 2ª linha e 1ª coluna. A entrada a_{32} se refere ao elemento localizado na 3ª linha e 2ª coluna. Vejamos alguns exemplos de matrizes:

Exemplo 5 $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B_{2x3} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 25 \end{bmatrix}$ $\quad C_{3x3} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & 8 \\ 7 & -6 & 9 \\ \frac{7}{3} & 5 & 1 \end{bmatrix}$

As matrizes A, B e C são do tipo 2x2, 2x3 e 3x3, respectivamentes. Isto é, a matriz B possui 2 linhas e 3 colunas, já a matriz C possui 3 linhas e 3 colunas. Quanto aos elementos da matriz A, a entrada $a_{21} = 3$ e $a_{22} = 4$. No que tange a matriz B, as entradas $b_{12} = 7$, $b_{23} = 25$ e $b_{21} = 3$.
Podemos destacar que a igualdade entre duas matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$ ocorre se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e $j = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. Veja alguns exemplos:

Exemplo 6 $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Observa-se que as matrizes A e B são diferentes, tendo em vista que $3 = a_{11} \neq b_{11} = 8$. Contudo, as matrizes C e D são iguais, pois $8 = a_{11} = b_{11} = 8$, tal fato ocorre com as demais entradas.
Algumas matrizes recebem nomes especiais:

- **MATRIZ LINHA**: toda matriz que possui n colunas e uma única linha. Ela tem o seguinte formato:

  Exemplo 7
  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \, ou \, A = (a_{1j})_{1xn}$$

- **MATRIZ COLUNA**: toda matriz que possui m linhas e uma única coluna. Ela tem o seguinte formato:

  Exemplo 8
  $$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \, ou \, B = (b_{1j})_{mx1}$$

- **MATRIZ QUADRADA**: toda matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, tal que m = n, ou seja, quando o número de linhas de uma matriz A for igual ao número de colunas de A. Então, dizemos simplesmente que a matriz A tem ordem n

Exemplo 9 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 8 & 42 \end{bmatrix}$ *é uma matriz quadrada de ordem 2.*

$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 78 & -5 & 7 \\ 9 & -\frac{9}{7} & 7 \end{bmatrix}$ *é uma matriz quadrada de ordem 3.*

  - <u>Diagonais de uma matriz quadrada</u>

    As matrizes quadradas possuem duas diagonais: **a diagonal principal** e **a diagonal secundária**. Nas matrizes quadradas $A = [a_{ij}]_{nxn}$, as entradas a_{ij}, tais que $i = j$ constituem um conjunto que pertence a diagonal principal, ao passo que as entradas com $i + j = n + 1$ formam um conjunto pertencente a diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

    Os elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, pertencem a diagonal principal da matriz. Os elementos $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \cdots, a_{n1}$. vejamos um exemplo para melhor compreensão:

Exemplo 10

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{\frac{7}{3}} & -9 & 25 \\ 3 & \color{red}{24} & -8 \\ 8 & 14 & \color{red}{5} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -9 & \color{blue}{25} \\ 3 & \color{blue}{24} & -8 \\ \color{blue}{8} & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal de A. *Diagonal secundária de A.*

  - <u>Traço da matriz quadrada</u>

    Traço de uma matriz quadrada A é o nome dado a soma das entradas da diagonal principal dessa matriz. É representado por tr(A). Deste modo, dado uma matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$, tem - se:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

- **MATRIZ DIAGONAL**: dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{nxn}$ dizemos que esta matriz é diagonal quando todos os elementos não pertencentes a diagonal principal são iguais a zero, não impendindo, porém, que haja elementos iguais a zero nessa diagonal.

  De um modo mais formal, temos a seguinte definição de matriz diagonal.

  "Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{nxn}$ é denominada matriz diagonal quando

$a_{ij} = 0$*, para todo* $i \neq j$*".*

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 11 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

As matrizes A e B são exemplos de matriz diagonal

- **MATRIZ IDENTIDADE (OU UNIDADE)**: dada uma matriz diagonal, dizemos que esta matriz é dita identidade quando todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Vejamos:

$$A_{nxn} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12 $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

As matrizes acima são exemplos de matrizes identidade.

  - OBSERVAÇÃO

    A matriz identidade também é conhecida como **matriz escalar**. Para uma melhor compreensão: uma matriz diagonal é dita matriz escalar quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exemplo 13 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

As matrizes A e B são exemplos de matrizes escalar.

- **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR**: dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, dizemos que esta matriz A é dita matriz triangular superior quando todas as entradas abaixo da diagonal principal são iguais a 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 14 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -9 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

As matrizes A e B são exemplos de matriz triangular superior.

- **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR**: dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, dizemos que esta matriz A é dita matriz triangular inferior quando todas as entradas acima da diagonal principal são iguais a 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 15 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

As matrizes A e B são exemplos de matriz triangular inferior.

- **MATRIZ NULA OU MATRIZ ZERO**: Dado uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ é dita matriz nula ou matriz zero quando todos os seus elementos são 0, ou seja, quando $a_{ij} = 0$, para quaisquer i e j.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 16 $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Esta é uma matriz nula*

- **IGUALDADE DE MATRIZES**: dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{pxq}$ são iguais quando as seguintes condições são satisfeitas:

  a. Ambas devem ter a mesma ordem, ou seja, $m = p$ e $n = q$;

  b. As entradas $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer i e j.

Exemplo 17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & -8 \\ 9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 4 & -8 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$
As matrizes A e B não são iguais, pois as entradas $a_{11} = 1 \neq b_{11} = 3$.

4.2 Operações com matrizes

4.2.1 Adição de matrizes

Dado duas matrizes de mesma ordem $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$ podemos definir a soma entre duas matrizes.

Definição 4.2.1 *Dada duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{mxn}$ *e* $B = [b_{ij}]_{mxn}$ *a soma* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} = C = [c_{ij}]_{mxn}$*, onde* $[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Exemplo 18 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 8 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *então* $A + B = C =$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+7 & 9+9 \\ 4+6 & 9+3 & 8+8 \\ 7+6 & 8+5 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 18 \\ 10 & 12 & 16 \\ 13 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

Partindo da definição de somas de matrizes, podemos definir a subtração entre duas matrizes. Veja:

Definição 4.2.2 *Dada duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{mxn}$ *e* $B = [b_{ij}]_{mxn}$ *a subtração* $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn} = C = [c_{ij}]_{mxn}$*, onde* $[c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Exemplo 19 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 8 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *então* $A - B = C =$

$$C = \begin{bmatrix} 1-4 & 3-7 & 9-9 \\ 4-6 & 9-3 & 8-8 \\ 7-6 & 8-5 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades sobre soma de matrizes

Com base nas definições acima citadas, podemos definir as propriedades de matrizes. Dada, então, as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B= [b_{ij}]_{mxn}$ e $C = [c_{ij}]_{mxn}$. São válidas as seguintes afirmações:

A. COMUTATIVA:$A + B = B + A$.

Esta propriedade é semelhante a propriedade comutativa aplicada aos números reais, ou seja, a *e* $b \in \mathbb{R}$, então vale $a + b = b + a$. Assim, como os valores das entradas de uma matriz são números reais, temos:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij} = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

.

B. ASSOCIATIVA: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Assim como a propriedade anterior, esta se baseia na propriedade associativa dos números reais. Dados a *e* $b \in \mathbb{R}$, temos $(a + b) + c = a + (b + c)$. Portanto:

$$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] =$$

$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$$

.

C. ELEMENTO NEUTRO

Para toda matriz A, existe uma matriz $M = [m_{ij}]$, de modo que $A + M = A$

$$[a_{ij} + m_{ij}] = [a_{ij}] \Rightarrow [m_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] \Rightarrow [m_{ij}] = 0$$

Como i e j são arbitrários, temos que $m_{ij} = 0$ para todo i e todo j. Como os elementos serão todos nulos, temos que a matriz M é uma matriz nula. Assim, fica provado a existência da matriz M.

Contudo, surge uma dúvida, esta matriz é única?

Para isso, supondo que exista uma matriz $M' = [m'_{ij}]$, tal que $M' + A = A$.

$$[a_{ij} + m'_{ij}] = [a_{ij}] \Rightarrow [a_{ij} + m'_{ij}] = [a_{ij} + m_{ij}] \Rightarrow [m'_{ij}] = [m_{ij}] \Rightarrow M = M'$$

Assim, provamos que a matriz M existe e é única.

D. ELEMENTO OPOSTO

Para toda matriz A existe uma única matrizA' tal que $A+A'=0$. Dada uma matriz nula M, temos que, $A+A'=M$

$$[a_{ij}]+[a'_{ij}]=[m_{ij}] \Rightarrow [a'_{ij}]=[m_{ij}-a_{ij}] \Rightarrow [a'_{ij}]=-[a_{ij}]$$

Assim, concluimos que os elementos da matriz A' são exatamente o oposto dos elementos da matriz A.
Contudo, ainda surge uma dúvida, esta matriz é única?
Para isso, supondo que exista uma matriz $B=[b_{ij}]$, tal que $A+B=0$

$$[a_{ij}]=[b_{ij}]=0 \Rightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]=[a_{ij}]=[a'_{ij}] \Rightarrow [b_{ij}]=[a'_{ij}] \Rightarrow B=A'$$

Assim, fica provado que o **elemento oposto** existe e é único. Adotaremos como nomenclatura $-A$, para nos referimos a matriz oposta da matriz A.

4.2.2 Multiplicação de matrizes

Antes de adentrarmos no conceito de multiplicação entre matrizes, veremos como ocorre o produto entre um números real e suas respectivas propriedades.

Definição 4.2.3 *Dado um número real k e uma matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ chama-se produto de um número escalar por uma matriz kA a matriz $B=(b_{ij})_{mxn}$ tal que $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ para todo i e todo j.*

Em outras palavras, multiplicar um número k por uma matriz A é contruir uma matriz B cujos elementos são obtidos a partir do produto dos elementos da matriz A pelo número k.

$$k\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} & \cdots & k\cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & k\cdot a_{m3} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 20

$$5\cdot\begin{bmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 25 & 15 \\ 40 & 30 & -15 \\ 25 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 72 \\ 24 & 24 & -8 \end{bmatrix}$$

O produto de um número real k por uma matriz A goza de algumas propriedades, as quais serão listadas a baixo:

- Dado duas matrizes A e B e dois números reais a e b (quaisquer), valem as propriedades:

  A. $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$

  B. $a \cdot (A + \cdot B) = a \cdot A + a \cdot B$

  C. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

  D. $1 \cdot A = A$

De posse da definição do produto de um escalar por uma matriz, apresentaremos a seguir a definição do produto entre matrizes e suas respectivas propriedades. Veja a definição:

Definição 4.2.4 *Dadas duas matrizes* $A = (a_{ij})_{mxn}$ *e* $B = (b_{ij})_{nxp}$*, chama -se produto de* $A \cdot B$ *a matriz* $C = (c_{ij})_{mxp}$ *tal que*

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

em outras palavras:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ *e todo* $k = \{1, 2, 3, \cdots, p\}$

A partir desta definição é importante ressaltar:

i. O produto $A \cdot B$ ocorre se, e somente se, os números de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Uma vez que A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $p \times n$.

ii. O produto $A \cdot B$ é uma matriz que apresenta o número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B. Uma vez que a matriz C é do $m \times p$.

iii. Partindo da definição, o elemento c_{ik} da Matriz C deve ser obtido pelo seguinte procedimento.

  (1) Toma-se a linha i da matriz A

  $\boxed{a_{1i}\, a_{i2}\, a_{i3}\, \cdots a_{in}}$ (n elementos)

  (2) Torna-se a coluna k da matriz B:

  $$\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}} \qquad \text{(n elementos)}$$

(3) Coloca-se a linha i de A na "vertical" ao lado da coluna k de B.

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{i1k} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array}}$$

(4) Calculando os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado.

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{i1} \times b_{1k} \\ a_{i2} \times b_{2k} \\ a_{i3} \times b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \times b_{nk} \end{array}}$$

(5) Soma-se esses n produtos.

$$\boxed{a_{i1} \times b_{1k} + a_{i2} \times b_{2k} + a_{i3} \times b_{3k} + \cdots a_{in} \times b_{nk} = c_{ik}}$$

Vejamos alguns exemplos para melhor compreensão e fixação desta definição.

Exemplo 21 *Dadas duas matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}_{2x3}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}_{3x1}$*, calculemos* $A \cdot B$.

Solução:

Analisando as matrizes A e B, observamos que o número de colunas de A é igual ao número de linhas B, decorre, assim, que existe $A \cdot B$ e é do tipo 2×1.

- Multiplicando a 1ª linha de A pela 1º coluna de B, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 3 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 9 \\ 7 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} 3 \cdot 6 \\ 6 \cdot 9 \\ 3 \cdot 7 \end{array}} \text{ Somando esses produdos } \boxed{3 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 7}$$

- Multiplicando a 2ª linha de A pela 1º coluna de B, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 5 \\ -3 \\ 8 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 9 \\ 7 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} 5 \cdot 6 \\ -3 \cdot 9 \\ 8 \cdot 7 \end{array}} \text{ Somando esses produdos } \boxed{5 \cdot 6 + (-3) \cdot 9 + 8 \cdot 7}$$

Assim,

$$\boxed{\begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 6 + (-3) \cdot 9 + 8 \cdot 7 \end{bmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 18 + 54 + 21 \\ 30 - 27 + 56 \end{bmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 93 \\ 59 \end{bmatrix}}.$$

Exemplo 22 *Calcule o produto entre as seguintes matrizes* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução

Analisando as matrizes A e B, observamos que o número de colunas de A é igual ao

número de linhas B, decorre, assim, que existe $A \cdot B$ e é do tipo 2×2. Fazendo $A \cdot B = C$, devemos calcular c_{11}, c_{12}, c_{21} e c_{22}.
- Multiplicando a 1ª linha de A pela 1º coluna de B, encontraremos c_{11}:
$c_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \times 4 + 1 \times 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C_{11} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$
- Multiplicando a 1ª linha de A pela 2º coluna de B, encontraremos c_{12}:
$c_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \times 7 + 1 \times 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{12} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$
- Multiplicando a 2ª linha de A pela 1º coluna de B, encontraremos c_{21}:
$c_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 0 \times 2 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{21} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$
- Multiplicando a 2ª linha de A pela 2º coluna de B, encontraremos c_{22}:
$c_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \times 7 + 0 \times 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{22} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$
Assim, podemos concluir que $A \times B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

Quando tratamos do produto entre uma matriz A e uma matriz identidade I_n(quando os elementos da diagonal principal é igual a 1 e os demais elementos iguais a zero), notamos que ela goza de uma propriedade específica. Vejamos essa propriedade em formato de teorema.

Teorema 4.2.5 *Dada uma matriz A= $(a_{ij})_{mxn}$, uma matriz I_n e uma matriz I_m, então $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$*

Demonstração:
Sendo $I_n = (\beta_{ij})_{nxn}$ e $C = AI_n = (c_{ij})_{mxn}$. Temos:
$c_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + a_{i3}\beta_{3j} + \cdots + A_{ii}\beta_{ii} + \cdots + a_{in}\beta_{nj} =$
$= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \cdots + a_{ii} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ii}$
Para todo i e j, então $A \cdot I_n = A$.
De maneira análoga, provemos que $I_m \cdot A = A$
Fazendo $C = I_m A = (c_{ij})_{mxn}$. Temos:
$c_{ij} = \beta_{1j}a_{i1} + \beta_{2j}a_{i2} + \beta_{3j}a_{i3} + \cdots + \beta_{ii}A_{ii} + \cdots + \beta_{nj}a_{in} =$
$= 0 \cdot a_{i1} + 0 \cdot a_{i2} + 0 \cdot a_{i3} + \cdots + 1 \cdot a_{ii} + \cdots + 0 \cdot a_{in} = a_{ii}$
Assim como o produto de uma matriz por uma escala goza de algumas propriedades, o produto entre duas matrizes goza de algumas propriedades específicas.

Propriedades sobre multiplicação entre matrizes

A. É associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - Para quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{jl})_{nxr}$ e $C = (c_{lp})_{rxq}$

Demonstração:

Seja $D = AB$, assim $D = (d_{il}) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \cdot b_{jl}$

Daí, $(AB)C = DC$. Assim $DC = (DC_{ip}) = \sum_{l=1}^{t} d_{il} \cdot c_{lp} \Rightarrow \sum_{l=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \cdot b_{jl} \cdot c_{lp}$

Seja $Z = BC$, assim $Z = (z_{jp}) = \sum_{l=1}^{t} b_{jl} \cdot c_{lp}$

Daí, $A(BC) = AZ$. Assim $AZ = (AZ_{ip}) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \cdot z_{jp} \Rightarrow \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} a_{ij} \cdot b_{jl} \cdot c_{lp}$

Portanto, concluímos que $(AB)C = A(BC)$

B. Distributiva à direita em relação à adição: $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ - Para quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ e $C = (c_{jt})_{nxp}$

Demonstração:

Seja $S = A + B$, assim $s = A + B = (s_{ij})_{mxn} = (a_{ij}) + (b_{ij})$

Daí, $(A+B)\cdot C = (S\cdot C)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\cdot c_{jt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot c_{jt} + b_{ij}\cdot c_{jt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot c_{jt} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\cdot c_{jt} =$ $A \cdot C + B \cdot C$

Assim, concluímos que $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

C. Distributiva à esquerda : $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ - Para quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ e $C = (c_{ti})_{pxm}$.

Demonstração:

Seja $M = A + B$, assim $m = A + B = (m_{ij})_{mxn} = (a_{ij}) + (b_{ij})$

Daí, $C \cdot (A + B) = (C \cdot M)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ti} \cdot m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ti} \cdot a_{ij} + c_{ti} \cdot b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ti} \cdot a_{ij} +$ $\sum_{j=1}^{n} c_{ti} \cdot b_{ij} = C \cdot A + C \cdot B$

Assim, concluímos que $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

D. $(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$

- Para quaisquer que seja o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jy})_{nxp}$

Demonstração:

Fazendo $C = k \cdot A = (c_{ij})_{mxn}$.

Daí, $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot b_{jy} = \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jy} \Rightarrow$ por se tratar de números reais, podemos aplicar as propriedades comutativa e associativa da multiplicação $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jy} =$ $\sum_{j=1}^{n} k \cdot (a_{ij} \cdot b_{jy}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jy})$.

OBSERVAÇÃO 1

É necessário notar que a multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa, isto é, para quaisquer matrizes A e B temos $A \cdot B \neq B \cdot A$

Faremos a demonstração através de um contra exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ vejamos que $A \cdot B \neq B \cdot A$

Solução:

Efetuando os passos de multiplicação entre matrizes já mencionadas neste trabalho, temos que:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 6 \cdot 8 & 3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 \\ 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 & 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 48 & 27 + 18 \\ 24 + 24 & 36 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 45 \\ 48 & 45 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 & 6 \cdot 6 + 9 \cdot 3 \\ 8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 8 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 36 & 36 + 27 \\ 24 + 12 & 48 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 63 \\ 36 & 55 \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que $A \cdot B \neq B \cdot A$

OBSERVAÇÃO 2.

È importante ressaltar que os números racionais gozam da sequinte implicação :

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \,\text{ou}\, B = 0$$

Porém, essa implicação não é válida para o produto de matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é uma matriz nula.

Exemplo:

Dadas as matrizes não nula $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vejamos que o produto de matrizes é igual a zero.

Solução:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos concluir que é possível o produto entre duas matrizes não nulas ser nulo.

4.3 Matriz transposta

Dada uma matriz A, dizemos que a matriz transposta de A, representada por A^T, é a matriz cujas linhas são formadas pelas colunas da matriz original e, igualmente, as colunas da matriz transposta são obtidas a partir das linhas da matriz original. Vejamos, a seguir, uma definição formal de matriz transposta.

Definição 4.3.1 *Dada uma matriz* $A = (a_{ij})_{mxn}$*, chama-se matriz transposta de A a matriz* $A^T = (a'_{ji})_{nxm}$ *tal que* $a'_{ji} = a_{ij}$*, para todo i e todo j.*

Exemplo 23 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

Exemplo 24 $B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$

Exemplo 25 $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

Exemplo 26 $D = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÃO

É importante ressaltar que a diagonal principal de uma matriz quadrada é igual a diagonal principal da matriz transposta.

Exemplo 27 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & -9 & 8 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 6 & -9 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, verificamos que as diagonais principais são iguais.

As matrizes transpostas gozam de algumas propriedades importantes, as quais veremos a seguir:

(1) $(A^T)^T = a$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$;

(2) Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, então $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(3) Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$;

(4) Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (B_{ij})_{mxp}$, então $(A \cdot B) = A^T \cdot B^T$.

Vejamos alguns exemplos para melhor compreensão dessas propriedades:

Exemplo 28 *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ *temos que:*

(1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$

(2) $A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = A^T + B^T$

(3) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} \Rightarrow (3 \cdot A)^T = \begin{bmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 3 \cdot A^T$

4 $A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ b \cdot e + d \cdot f & c \cdot f + d \cdot h \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} a \cdot e + b \cdot g & b \cdot e + d \cdot f \\ a \cdot f + b \cdot h & c \cdot f + d \cdot h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = B^T \cdot A^T.$$

Contudo, ao analisamos o exemplo de números 26 verificamos que a matriz D é igual a sua transposta. Quando isso ocorre demoninamos tais matrizes como **SIMÉTRICAS**.

4.4 Matriz simétrica

Definição 4.4.1 *Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada, de ordem n, tal que* $(a_{ij}) = (a_{ji})$ *para todo i e para todo j natural.*

Em outras palavras, dizemos que uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^T$, isto é, quando a matriz A é igual a sua transposta.
Vejamos alguns exemplo:

Exemplo 29 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & -6 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

Contudo, se a matriz $A = -A^t$ ela é dita antissimétrica. Veja a definição:

Definição 4.4.2 *Chama-se matriz antissimétrica toda matriz quadrada, de ordem n, tal que* $(a_{ij}) = (-a_{ji})$ *para todo i e para todo j natural.*

Exemplo 30 $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 9 \\ -8 & 0 & 3 \\ -9 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

4.5 Matriz inversível

Definição 4.5.1 *Dada uma matriz A quadrada de ordem n. Dizemos que A é* ***matriz inversível*** *se existir uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

Teorema 4.5.2 *Se a matriz A é inversível, então é úníca a matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

Demonstração

Supondo que exista uma matriz C que satisfaça as condições acima, ou seja, $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Temos:

$$C = I_n \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot I_n = B$$

Definição 4.5.3 *Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.*

OBSERVAÇÃO

É evidente que a matriz A^{-1} é única (teorema 4.5.2) e também quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.

Exemplo 31 *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ *é inversível e* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 7 + 7 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

2. $A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 7 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Exemplo 32 *Qual é a inversa da matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$*?*

Solução:

1. *Fazendo* $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*, temos:*

   $B^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Portanto, teremos

$$\begin{bmatrix} 2a+b & 5a+3b \\ 2c+d & 5c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 5a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } b=-5.$$

e

$$\begin{cases} 2c+d=0 \\ 5c+3d=1 \end{cases} \Rightarrow c=-1 \text{ e } d=2$$

isto é, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3+5\cdot(-1) & 2\cdot(-5)+5\cdot 2 \\ 1\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$

CAPÍTULO 5

Matrizes de rotação

As matrizes de rotação são matrizes que permitem o movimento de rotação tanto dos eixos coordenados como também de objetos localizados em um sistema de coordenadas. Segundo Fernandes(2018):

> Matriz de rotação é uma matriz usada para fazer rotações no espaço euclidiano. Por exemplo, girar um cubo em cada um dos seus 3 eixos. Então, se há 3 eixos de rotação, há 3 matrizes de rotação que permitem o giro em torno de cada um desses eixos. Matriz de rotação é uma matriz quadrada, de dimensão (3x3).

Vejamos uma definição formal:

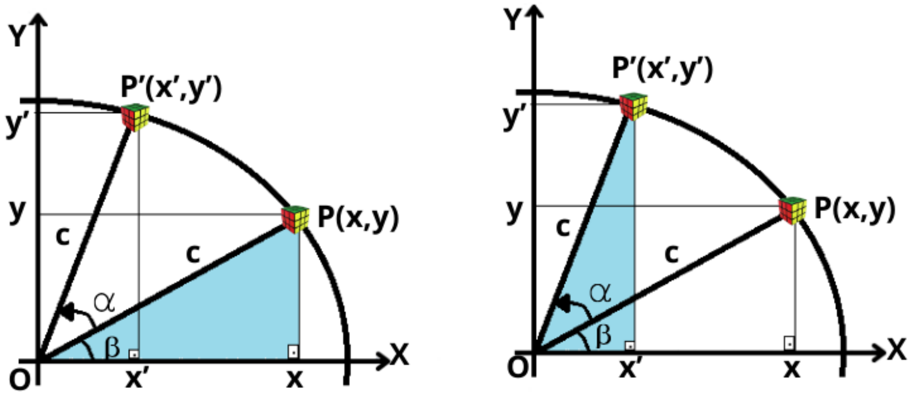
Definição 5.0.1 *Sejam E e F espaços vetoriais. Uma transformação linear $f : E \to F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $f(v) = f \cdot v = fv \in F$ de modo que valham, para quaisquer u, $v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:*

$$f(u + v) = fu + fv$$
$$f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot fv$$

Definição 5.0.2 *Seja R uma transformação linear, onde $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Esta transformação leva cada vetor v no vetor Rv que dele resulta pela rotação do ângulo α em torno da origem.*

Ao analisarmos a imagem 5.1, observamos o movimento de rotação de um objeto localizado no ponto P para o ponto P'. Porém, surge dois questionamentos: 1º) Como ocorre o movimento de rotação? 2º) Como expressar este movimento na forma matemática?

Figura 5.1: Movimento de rotação do ponto P



Fonte: Versão adaptada do canal YouTube Edson Simões

Analisando a figura, observamos dois triângulos retângulos ($\triangle$ OXP e $\triangle$ OX'P'). Aplicando alguns conceitos básicos de trigonometria, poderemos responder os dois questionamentos que surgiu. Vejamos:

1. Tomando o triângulo retângulo $\triangle$OXP, podemos obter informações como Seno e Cosseno.

   $\cos\beta = \frac{x}{c}$ (1)
   $\text{sen}\beta = \frac{y}{c}$ (2)

RECORDE

$\cos\beta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\text{sen}\beta = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$

2. Tomando o triângulo retângulo $\triangle$OX'P', podemos obter informações como Seno e Cosseno.

   $\cos(\alpha+\beta) = \frac{x'}{c}$ (3)
   $\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{y'}{c}$ (4)

RECORDE

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta$
$\text{sen}(\alpha\pm\beta) = \text{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\text{sen}\beta\cdot\cos\alpha$

Desenvolvendo a equação 3, obtemos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x'}{c} \Rightarrow x' = c\cdot\cos(\alpha+\beta)$$
$$x' = c\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta)$$
Substituindo as equações 1 e 2
$$x' = c\cdot(\frac{x}{c}\cdot\cos\alpha - \frac{y}{c}\cdot\text{sen}\alpha)$$
$$x' = \frac{c}{c}(x\cdot\cos\alpha - y\cdot\text{sen}\alpha)$$
$$\boxed{x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\text{sen}\alpha}$$

Desenvolvendo a equação 4, obtemos:

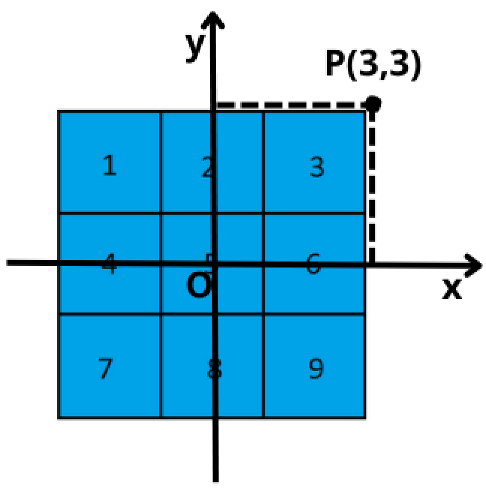
$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{y'}{c} \Rightarrow y' = c \cdot \text{sen}(\alpha+\beta)$$
$$y' = c \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\text{Substituindo as equações 1 e 2}$$
$$y' = c \cdot (\frac{x}{c} \cdot \text{sen}\alpha + \frac{y}{c} \cdot \cos\alpha)$$
$$y' = \frac{c}{c} \cdot (x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha)$$
$$\boxed{y' = x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha}$$

Portanto, as novas coordenadas do objeto após o movimento de rotação é dado por: $x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \text{sen}\alpha$ e $y' = x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha$. Estas equações podem ser melhor traduzidas na forma matricial, vejamos:
$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Assim, fica definido a matriz de rotação.

5.1 Matriz de rotação aplicada na face do Cubo Mágico

Projetando uma das faces do Cubo Mágico em sistema de coordenadas cartesianas e fixando o centro do cubo ao centro do sistema. Aplicando a matriz de rotação no ponto P (conforme a figura 5.2) em um ângulo de 90º no sentido anti-horário, podemos observar o movimento F' no Cubo Mágico.

Figura 5.2: Face do Cubo Mágico aplicado no sistema de coordenadas



Fonte: Acervo do pesquisador

Aplicando a matriz de rotação no ponto P(3,3), teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90 & -\operatorname{sen} 90 \\ \operatorname{sen} 90 & \cos 90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

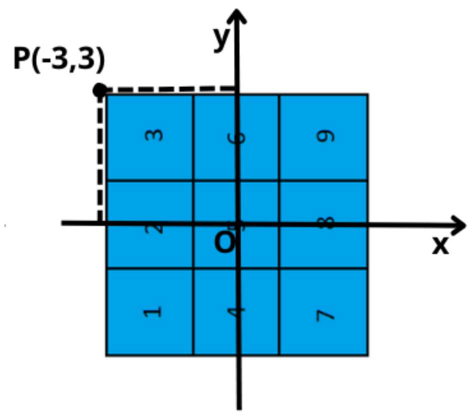
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x' = -3}\, e\, \boxed{y' = 3}$$

Figura 5.3: Face do Cubo Mágico rotacionada 90º graus



Fonte: Acervo do pesquisador

Contudo, ao aplicarmos os movimentos F, F', B, B', U, U', D, D', L, L', R, R' nas faces do Cubo Mágico, não lidamos apenas com a rotação de uma camada, mas com três camadas. Procedendo de maneira análoga, podemos aplicar a matriz de rotação em cada um dos seus eixos (eixo x, eixo y e eixo z).

Rotação em torno do eixo z

Para rotacionar o cubo em torno do eixo z, aplicamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim aplicamos os movimentos F, F', B e B'.

Rotação em torno do eixo y

Para rotacionar o cubo em torno do eixo y, aplicamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim aplicamos os movimentos U, U' D e D'.

Rotação em torno do eixo x

Para rotacionar o cubo em torno do eixo x, aplicamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim aplicamos os movimentos R, R', L e L'.

A seguir, veremos algumas aplicações sobre matrizes e suas propriedades.

CAPÍTULO 6

Aplicações de Matrizes

Para os que estão familiarizados com as matrizes e suas propriedades, veremos neste capítulo algumas de suas aplicações no cotidiano como uma poderosa e eficaz ferramenta de trabalho em diversos contextos da sociedade.

6.1 Criptografia

A primeira aplicação de matrizes a ser vista é a criptografia, pois é o estudo de codificar e decodificar mensagens objetivando torná-las secretas. Segundo Lessa ([202-])

> Atualmente, o uso da criptografia evoluiu e consequentemente aumentou o interesse no assunto devido a necessidade de manter a privacidade da informação que nós acessamos. Sem ela, nossas senhas de redes sociais, dispositivos, contas bancárias entre outras, seriam facilmente decifradas e não teríamos nenhuma segurança de nossas informações.

Para ampliar a nossa compreensão, vejamos um exemplo prático:

Exemplo 33 *Maria deseja enviar uma mensagem criptografada para seu esposo. Porém, eles resolveram fazer um teste criptografando a palavra CASA trocando cada letra por um número, conforme a tabela 6.1, e aplicando as matrizes como chave codificadora e decodificadora.*

Tabela 6.1: Letras representadas por números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	#
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Fonte: acervo do pesquisador

Para este exemplo, iremos usar como chave codificadora a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ *e a sua inversa* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ *como chave decodificadora.*

$$M = \begin{bmatrix} C & A \\ S & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$$

M' = mensagem codificada

$$M' = M \cdot C \Rightarrow M' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \\ 19 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 19 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 21 & 64 \end{bmatrix}$$

Portanto, a mensagem codificada é representada por $\boxed{\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 21 & 64 \end{bmatrix}}$

Para decodificar a mensagem, basta multiplicar M' por C^{-1}*, Assim:*

$$M = M' \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 21 & 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 7 + 16 \cdot (-2) & 5 \cdot (-3) + 16 \cdot 1 \\ 21 \cdot 7 + 64 \cdot (-2) & 21 \cdot (-3) + 64 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & A \\ S & A \end{bmatrix} = CASA$$

A partir do exemplo anterior (33), podemos enviar mensagens um pouco maiores, criptografadas pelo método matricial. Vejamos um exemplo a sequir:

Exemplo 34 *Neste exemplo, usaremos o método matricial para codificar e docodificar a seguinte mensagem:* ***MESTRADO NA UFPI****. Aplicando as matrizes* $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *e* *sua inversa* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *como chaves codificadora e decodificadora, respectivamente. Para isso, usaremos a tabela 6.1 para converter as letras em números e o símbolo # para indicar um espaço entre as palavras.*

M	E	S	T	R	A	D	O	#	N	A	#	U	F	P	I
13	5	19	20	18	1	4	15	28	14	1	28	21	6	16	9

Como as chaves de Criptografia são uma matriz 2x2, iremos organizar nossos dados em um matriz 8x2, a fim de aplicarmos o produto de matrizes.

$$M = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 19 & 20 & 18 & 1 & 4 & 15 \\ 28 & 14 & 1 & 28 & 21 & 6 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

Para codificar a matriz M, multiplicaremos a matriz C à direita da matriz M:

$$M' = C \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 5 & 19 & 20 & 18 & 1 & 4 & 15 \\ 28 & 14 & 1 & 28 & 21 & 6 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 67 & 29 & 58 & 88 & 75 & 9 & 28 & 54 \\ 54 & 24 & 39 & 68 & 57 & 8 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Os elementos de M' constituem a mensagem codificada, e utilizaremos vírgulas entre os elementos para maior compreensão.

$$\boxed{M'=67,29,58,88,75,9,28,54,54,24,39,68,57,8,24,39}$$

Para decodificar a mensagem, devemos a aplicar a matriz C^{-1} *na matriz m' através do produto de matrizes. Portanto* $C^{-1} \cdot M' = M$*:*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 67 & 29 & 58 & 88 & 75 & 9 & 28 & 54 \\ 54 & 24 & 39 & 68 & 57 & 8 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 19 & 20 & 18 & 1 & 4 & 15 \\ 28 & 14 & 1 & 28 & 21 & 6 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

Portanto, finalizando a decodificação teremos:

13	5	19	20	18	1	4	15	28	14	1	28	21	6	16	9
M	E	S	T	R	A	D	O	#	N	A	#	U	F	P	I

6.2 Cinemática

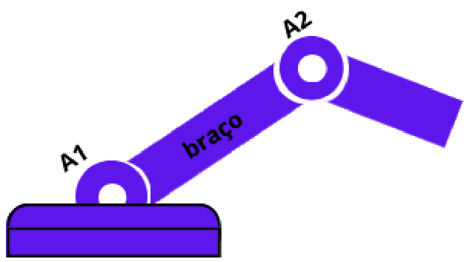
O próximo exemplo a ser analisado é a Cinemática, que é o ramo da Mecânica (Física) que se dedica ao estudo dos movimentos dos corpos móveis em um intervalo de tempo, em trajetórias retilíneas e curvilíneas ou caóticas. Segundo Helerbrock ([202-]).

> Essa área de estudos da Física permite que o movimento seja equacionado, dessa forma, é possível prever a posição, a velocidade ou quaisquer outros parâmetros do movimento de um móvel em instantes posteriores ao presente.

Vejamos uma aplicação prática:

Exemplo 35 *Dado um braço mecânico com duas articulações A1 e A2, cujo comprimento entre elas é de 100cm, conforme a figura 6.1. Deseja - se mover este braço em um ângulo de 45º em relação a articulação A1. Sabendo que ele está a uma altura de 60 cm em relação a base, qual será a nova posição do braço mecânico?*

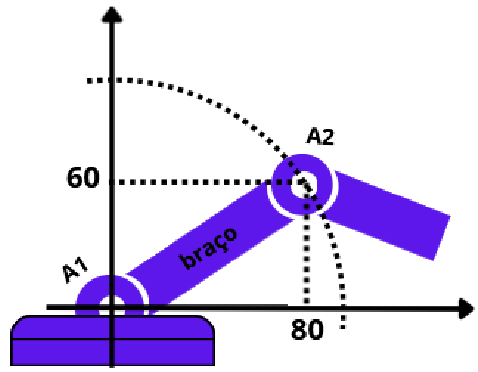
Figura 6.1: Braço mecânico



Fonte: Acervo do pesquisador

Fixando o centro do sistema de coordemadas carteseanas na articulação da base do braço e traçando uma circunferência de raio 100cm, é possível localizar as coordenadas da articulação 2 (A2), conforme a figura 6.2.

Figura 6.2: Braço mecânico aplicado no sistema de coordenadas



Fonte: Acervo do pesquisador

Assim, podemos aplicar a matriz de Rotação em um ângulo de 45º, movimentando o braço robótico conforme o pretendido. Seja x' e y' a nova localização da articulação A2, teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\text{sen}\,45 \\ \text{sen}\,45 & \cos 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}$$

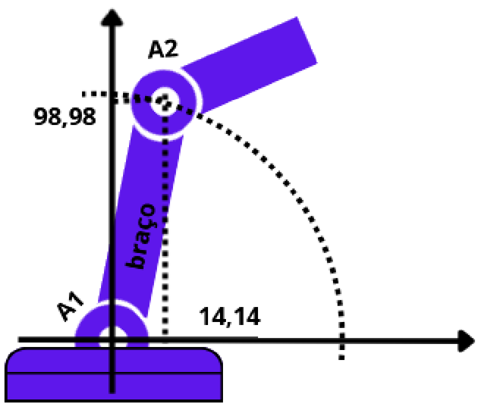
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 \\ 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,14 \\ 98,98 \end{bmatrix}$$

Portanto, as novas coordenadas serão

$$\boxed{x' = 14,14 \text{ e } y' = 98,98}$$

Figura 6.3: Braço mecâgico após o giro de 45º



Fonte: Acervo do pesquisador

6.3 Tomografia Computadorizada

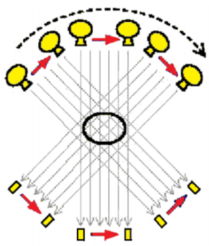
Finalizaremos as aplicações com a Tomografia Computadorizada. Segundo Meldau ([202-])

> A tomografia computadorizada (TC) é um exame complementar imagiológico capaz de evidenciar secções ou "fatias" do corpo. Essas imagens são obtidas por meio de um processamento por computador de informações coletadas em seguida à exposição do corpo a uma batéria de raios-X.

Os raios-x ao serem disparados pela máquina tem comportamentos diferentes a depender dos obstáculos a serem transpassados. Obstáculos mais densos ou formados por elementos mais pesados absorvem mais a radiação. Essa atenuação de intensidade é medida por um detector localizado no lado oposto ao emissor (Silva, 2018).

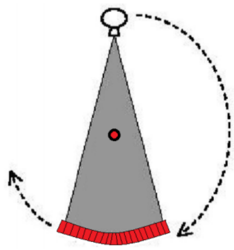
O modelo de escaneamento pode variar de acordo com o modelo do equipamento podendo ser: **Paralelo**, conforme a figura 6.4, ou **Cônico**, conforme a figura 6.5 . No modelo Paralelo um único emissor possui um único detector que se move sincronicamente em um ângulo pré-determinado. No modelo **Cônico**, uma única fonte possui diversos detectores que atuam simultaneamente (Silva, 2018).

Figura 6.4: Modelo de escaneamento paralelo



Fonte: Sinara Martins - Tomografia computadorizada, pag 56

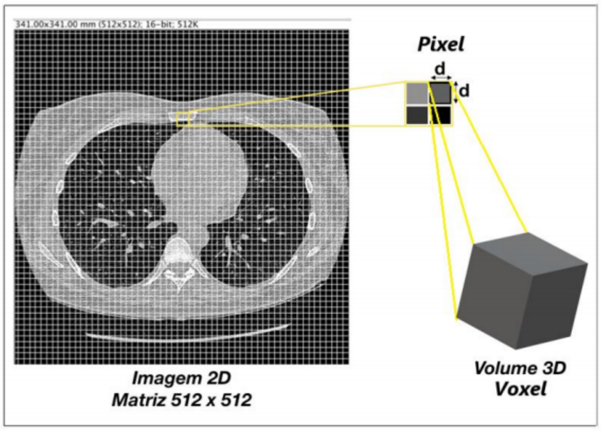
Figura 6.5: Modelo de escaneamento cônico



Fonte: Sinara Martins - Tomografia computadorizada, pag 56

Contudo, para que a imagem possa ser visualizada no monitor é necesssário compor esta imagem como uma matriz, cujos elementos são chamados Pixels e Voxels. O Pixel é a menor unidade de dimensão (planar) da imagem; o Voxel é o menor ponto tridimensional (volume) da imagem. Portanto, a qualidade da imagem dependerá das dimensões da matriz, que podem ser: 64x64, 256x256, 512x512 e 1024x1024.

Figura 6.6: Imagem composta por pixels



Fonte: Rodrigo João Nunes - [...] em exames tomográfos torácicos,2021

Vejam o exemplo.

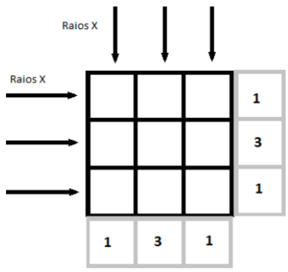
Este exemplo foi adaptado da dissertação TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

[...]- Sinara Martins Tarta da Silva, 2018.

Exemplo 36 *Supondo que os objetos submetidos a um tomógrafo simplificado sejam matrizes compostas por 0 e 1 (branco ou preenchido), em que cada raio X é atenuado pelo valor total de cada célula, e que são informados os totais de atenuação de raio X. Deseja-se reconstruir essas matrizes por meio das seguintes informações fornecidas abaixo:*

A)

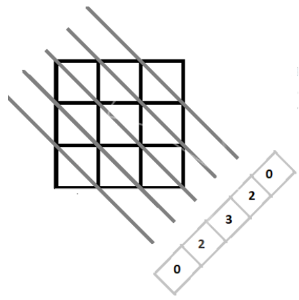
Figura 6.7: Raios-x transpassando horizontal e verticalmente



Fonte: Sinara Martins - Tomografia computadorizada, pag 66

B)

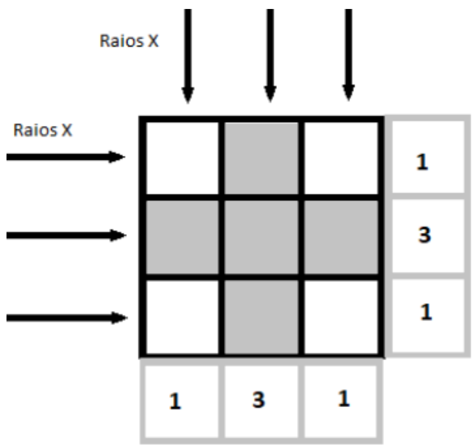
Figura 6.8: Raios-x transpassando diagonalmente



Fonte: Sinara Martins - Tomografia computadorizada, pag 66

Para a resolução do item A) devemos analisar a imagem 6.7, Cada número indica o fator absorção, ou seja, o número de células em cada linha e coluna devem ser coloridos. Assim:

Figura 6.9: Células que reagiram aos raios-x - item A



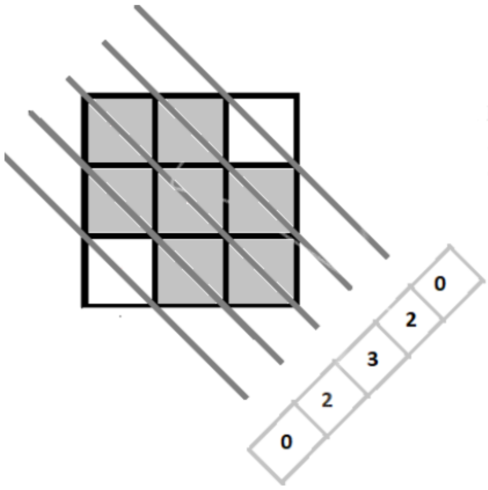
Fonte: Adaptada pelo pesquisador

Portanto podemos traduzir tais dados para a seguinte matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a resolução do item B), procederemos de maneira análoga ao item anterior, assim teremos:

Figura 6.10: Células que reagiram aos raios-x - item B



Fonte: Adaptada pelo pesquisador

Portanto, podemos traduzir tais dados para a seginte matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, finalizamos as aplicações de matrizes. A seguir, apresentaremos as considerações finais deste trabalho.

CAPÍTULO 7

Considerações Finais

A matemática foi evoluindo ao longo do tempo como parte fundamental em uma sociedade em construção. Para onde olhamos conseguimos uma porção da matemática, seja em casa, supermercados, carros e até mesmo na tela de nossos celulares. Citanto Galileu Galilei: "A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo".

Contudo, ao olharmos para o nosso sistema educacional brasileiro, encontramos uma realidade totalmente contrária. Na grande maioria, vemos uma matemática voltada para uma simples reprodução de métodos e fórmulas, que para o aluno não passa de uma disciplina "chata"e "difícil". É impossível apontarmos um culpado, pois vários fatores contribuem para esta realidade. Porém, podemos buscar alternativas que visam amenizar e mudar esta realidade.

Este trabalho propõe uma abordagem diferente para o ensino da matemática na educação básica, mostrando a possibilidade e relevância do uso do jogo Cubo Mágico (cubo de Rubik) como uma ferramenta metodológica nas aulas de matemática, visando despertar o interesse dos alunos desmotivados e melhorar o desempenho dos alunos que temem e sentem-se incapazes de aprender.

Buscamos demonstrar as potencialidades do Cubo Mágico e motivar sua utilização em sala de aula, pois auxilia os alunos a desenvolver certas habilidades, como: resoluções de problemas, pensamento crítico, criatividade, raciocínio lógico, além da imaginação. O que instiga ao aluno buscar novas alternativas que torne o processso de resolução do cubo ainda mais rápido.

Motivados pela versatilidade do cubo, propomos uma correlação entre os movimentos de suas faces com as matrizes e suas propriedades. Associando o giro das faces com as matrizes de rotações. Propomos ainda aplicações diferenciadas como: Criptografias, Cinemática e Tomografia computadorizada; objetivando despertar ainda mais o interesse dos alunos por um conteúdo tão rico de aplicações.

Referências

ALVES, A. C. Discalculia como transtorno de aprendizagem da matemática: Discussão necessária na formação. 46 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021.

BRAIT, L. F. R. et al. A relação professor/aluno no processo de ensino e aprendizagem, Itinerarius Reflectionis Jataí, v.8, n. 1, 2010.

BRIGHENTE, M. F.; MESQUIDA, P., Paulo Freire: da denúncia da educação bancária ao anúncio de uma pedagogia libertadora. Pro-Posições, Campinas, v. 27, n. 1, p. 155-177, jan./abr. 2016

CARMO, J. S.; Simionato, A. M. Reversão de ansiedade à matemática: alguns dados da literatura. Psicologia em Estudo, Maringá, v. 17, n. 2, p. 317-327, 2012.

CRUZ, J. M. O. Processo de ensino-aprendizagem na sociedade da informação, Educação & Sociedade, Campinas, v. 29, n. 105, p. 1023-1042, set./dez. 2008.

DAVALOS, C. C. A. Dificuldades no processo de ensino de matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. 2018. 44f. Dissertação (Especialização). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação. Medianeira, 2018.

FERNANDES, D. Matrizes de Rotação - 3D; Linkedin. 2018. Disponível em: <https://pt.linkedin.com/pulse/matrizes-de-rota%C3%A7%C3%A3o-3d-dinis-fernandes> Acesso em: 12 ago. 2024.

FREIRE, P. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GOMES, A. M. A. et al. Os saberes e o fazer pedagógico: uma integração entre teoria e prática. Educar, Curitiba, n. 28, p. 231-246, 2006. Editora UFPR.

HELERBROCK, R. Introdução à Cinemática; Brasil Escola. [202-]. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/introducao-cinematica.htm. Acesso em: 13 ago. 2024.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática Elementar 4. São Paulo: Atual, 1985.

KOCH, L. I. Matrizes de rotação: uma aplicação na movimentação de braços robóticos. 114 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2021. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6137&id2=171054003>

LARA, M. A.; ARIAS, A. P. Discalculia e aprendizagem matemática. Caderno Intersaberes. Curitiba, v. 9, n. 22, 2020. Disponível em:<https://www.cadernosuninter.com/index.php/intersaberes/article/view/1644>. Acesso em: 12 ago. 2024.

LESSA, J. R. Matrizes no cotidiano; Infoescola. [202-]. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/matrizes-no-cotidiano/> Acesso em: 12 ago. 2024.

LIMA, E. L. Álgebra linear. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MACHADO, A. I. O lúdico na aprendizagem da matemática. 2011. 58f. Monografia (Especialização). Universidade de Brasília – UnB. Programa de Pós-Graduação em Processos de Desenvolvimento Humano e Saúde. Brasilia, 2011.

MASOLA, W.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019. DOI: 10.24116/emd.v3n7a03. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/78>. Acesso em: 12 ago. 2024.

MELDAU, D. C. Tomografia Computadorizada; Infoescola.[202-]. Disponível em: <https://www.infoescola.com/exames-medicos/tomografia-computadorizada/>. Acesso em: 13 ago. 2024.

MOYA, C. S. Uma visão Matemática do Cubo Mágico. 65 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https: //sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2642&id2=74949>

PEDROTTI, V. A. Além das Faces Coloridas: Desvendando a Matemática por meio do Cubo Mágico. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2023.

PERETTI, L. Discalculia-Transtorno de aprendizagem. 30 p. Monografia (Graduação) - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2009.

PIMENTEL, L. S.; LARA, I. C. M. Discalculia: o cérebro e as habilidades matemáticas. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. 7. 2017.

Canoas. Anais... Canoas. Editora ULBRA, 2018.

RAMOS, A. E. V. Educação matemática e o lúdico: uma propostra para o aprendizado de conteudos de matemática no ensino fundamental. 55 p. Dissertaçã (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC. Joinville, 2021. Disponível em:<https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6421&id2=171055113>

REIS, A. M. A Matemática Egípcia – Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind. 2018. 58f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, 2018.

SANTOS, J. A.; França, K. V.; Santos, L. S. B. Dificuldades na Aprendizagem de Matemática. 41 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTOS, J. O. Álgebra no cubo de Rubik. 38 p. Monografia (Graduação) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2010.

SILVA, F. G. S. Matrizes e algumas aplicações. 178 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Regional do Cariri - URCA, Juazeiro do Norte, 2021. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6291&id2=171055099>

SILVA, H. V. L. O uso do cubo mágico para o ensino da geometria plana e espacial no ensino médio. 2017. 51f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Piauí. Pos-Graduação em Matemática. Teresina, 2017.

SILVA, J. V. N. Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta-PB. 72 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2054&id2=82829>.

SILVA, S. M. T. Tomografia computadorizada: Uma Proposta para a Aplicação da Matemática no Ensino Médio. 76 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3985&id2=160680055>.

SOUZA, A. A. et al. A evolução da matemática no contexto educacional brasileiro, Instituto Saber de Ciências Integradas, Sinop, v. 3, 2020.

VORCARO, N. Dificuldades de Aprendizagem da Matemática: Discalculia, Acalculia e Pseudo-Discalculia; Discalculicos, 2007. Disponível em: <http://discalculicos.blogspot.com/>. Acesso em: 12 ago. 2024.