UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROGÉRIO FIGUEREIDO LIRA

APLICAÇÃO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA EM GEOMETRIA

UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA PARA DEMONSTRAR TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS USANDO INDUÇÃO MATEMÁTICA

PALMAS (TO)
2024

ROGÉRIO FIGUEREIDO LIRA

APLICAÇÃO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA EM GEOMETRIA

UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA PARA DEMONSTRAR TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS USANDO INDUÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Cléber Mendonça Teixeira.

PALMAS (TO)

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L768a Lira, Rogério Figuereido.

Aplicação da Indução Matemática em Geometria: Uma Abordagem Sistemática para Demonstrar Teoremas Geométricos Clássicos usando Indução Matemática. / Rogério Figuereido Lira. – Palmas, TO, 2024.

69 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2024.

Orientador: Paulo Cléber Mendonça Teixeira

1. indução matemática. 2. geometria. 3. ensino de matemática. 4. proposta didática. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ROGÉRIO FIGUEREIDO LIRA

APLICAÇÃO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA EM GEOMETRIA
UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA PARA DEMONSTRAR TEOREMAS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS USANDO INDUÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, foi avaliada para obtenção do título de Mestre e aprovada em sua forma final pelo Orientador e Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 29/08/2024

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
PAULO CLEBER MENDONCA TEIXEIRA
Data: 05/09/2024 10:04:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Cléber Mendonça Teixeira
Orientador - UFT/PALMAS

Documento assinado digitalmente
WARLEY GRAMACHO DA SILVA
Data: 06/09/2024 16:19:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Warley Gramacho da Silva
Membro Interno - UFT/PALMAS

Documento assinado digitalmente
ALBANO DIAS PEREIRA FILHO
Data: 25/08/2024 15:10:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Albano Dias Pereira Filho
Membro Externo - IFTO/Porto Nacional

Dedico este trabalho em primeiro lugar a Deus, que é a razão por trás de minha existência; meus pais e irmãos, que me fornecem suporte; minha esposa, por sua compreensão; e meu filho, por seu amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus pela minha vida, saúde e sabedoria, pois sem Ele, nunca chegaria a este ponto.

Agradeço à minha família, em especial, agradeço aos meus pais Almerinda Trindade de Figuereido Lira e Pedro Moreira Lira, aos meus irmãos, Rony, Ione, Fátima e Ronaldo, a minha esposa, Onilse Moreira Nascimento e a meu amado filho Mateus Nascimento Lira, por me apoiarem e principalmente compreenderem os momentos de ausência em virtude dos estudos.

Sou profundamente grato ao Dr. Paulo Cleber Mendonça Teixeira, por seus valorosos conselhos e contribuições que foram fundamentais para esta pesquisa.

Agradeço aos meus professores do PROFMAT-PALMAS, Rogério Rocha, Hellena Apolinário, Andrés Lázaro, Gilmar Pires, Paulo Alexandre, Warley Gramacho, Betty Lázaro, Paulo Cléber, por contribuírem com minha formação e qualificação profissional.

Agradeço também aos amigos da turma 2022 do PROFMAT-PALMAS Jairomar, Henrique, Letícia, Sanya, Mirray, Romis, Dona Letícia, que sempre me apoiaram e incentivaram a perseguir meus sonhos e objetivos.

Aos professores da banca examinadora, Prof. Dr. Warley Gramacho da Silva e Prof. Dr. Albano Dias Pereira Filho, pela leitura atenta e valiosas correções.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado. À Universidade Federal do Tocantins (UFT), que possibilitou prosseguir na minha formação. Enfim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para esse momento especial em minha vida. Muito obrigado!

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o mundo."

(Galileu Galilei)

RESUMO

Este trabalho explora a aplicação da indução matemática em geometria, destacando sua importância histórica e conceitual. Inicia-se com uma introdução aos princípios básicos da geometria, fundamentos essenciais para compreender a indução matemática em contexto geométrico. Os objetivos deste estudo incluem demonstrar a eficácia da indução matemática na prova de teoremas fundamentais e discutir suas aplicações práticas em geometria. A pesquisa realizada envolveu uma revisão histórica e teórica dos princípios da indução matemática, seguida de exemplos práticos de aplicação. Pode-se inferir que a indução matemática oferece uma abordagem robusta para a prova de teoremas em geometria, promovendo uma compreensão mais profunda das estruturas matemáticas fundamentais.

Palavras-chave: indução matemática; geometria.

ABSTRACT

This work explores the application of mathematical induction in geometry, highlighting its historical and conceptual importance. It begins with an introduction to the basic principles of geometry, essential foundations for understanding mathematical induction in a geometric context. The objectives of this study include demonstrating the effectiveness of mathematical induction in proving fundamental theorems and discussing its practical applications in geometry. The research carried out involved a historical and theoretical review of the principles of mathematical induction, followed by practical examples of application. It can be inferred that mathematical induction offers a robust approach to theorem proving in geometry, promoting a deeper understanding of fundamental mathematical structures.

Keywords: mathematical induction; geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIF	Princípio da Indução Finita
PIFG	Princípio da Indução Finita Generalizado

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$C_{n,p}$	Número de combinações de n elementos tomados p de cada vez.
$D(n)$	Número de diagonais de um polígono convexo de n lados
A	Número de arestas de um poliedro.
F	Número de faces de um poliedro.
$n!$	Fatorial de n definido como o produto de todos os inteiros positivos de 1 até n.
$P(n)$	Proposição relativa ao número natural n.
V	Número de vértices de um poliedro.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina repleta de conceitos e técnicas que possibilitam a resolução de problemas complexos de maneira sistemática e lógica. Entre essas técnicas, o princípio da indução matemática se destaca como uma ferramenta fundamental para provar a veracidade de afirmações que envolvem números naturais e suas propriedades.

> Os PCNs, sugerem que o exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se enfatizar, contudo, o papel heurístico que têm desempenhado os contextos materiais como fontes de conjecturas matemáticas. Essas características permitem conceber o saber matemático como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação, e, também, permeável aos problemas nos vários outros campos científicos. Um saber matemático desse tipo pode ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento (Brasil, 1998, p. 26).

A geometria, como disciplina matemática, desempenha um papel crucial na compreensão das formas, dos espaços e das relações espaciais. Desde os primórdios da civilização humana, o estudo das formas geométricas e de suas propriedades tem intrigado e fascinado os matemáticos e filósofos. Da antiga Grécia aos dias atuais, a geometria, o cálculo diferencial e integral, e a álgebra linear têm se consolidado como pilares do conhecimento geométrico, oferecendo ferramentas essenciais para a análise e a resolução de problemas complexos em várias áreas do conhecimento científico e tecnológico.

No contexto acadêmico contemporâneo, a pesquisa em geometria tem se beneficiado significativamente do uso de métodos indutivos, dos quais a indução matemática se destaca como uma abordagem poderosa e sistemática para demonstrar a validade de afirmações matemáticas que seguem um padrão recursivo. Esta introdução visa contextualizar a importância da indução matemática na investigação geométrica, explorando como essa metodologia pode ser aplicada para estabelecer e provar teoremas fundamentais que são essenciais para a compreensão e o avanço do conhecimento na geometria.

O problema de pesquisa central deste trabalho reside na investigação da aplicação específica da indução matemática em teoremas geométricos, destacando a estrutura lógica subjacente a esses teoremas e demonstrando como a indução matemática oferece uma maneira sistemática de provar suas generalizações e extensões. A lacuna de conhecimento identificada é a necessidade de uma análise detalhada e abrangente das técnicas de indução matemática aplicadas à geometria, explorando tanto os fundamentos teóricos quanto as aplicações práticas desses métodos em problemas geométricos específicos.

Os objetivos deste trabalho são claros e definidos: primeiramente, investigar a evolução histórica da indução matemática e sua aplicação inicial em teoremas geométricos clássicos; em segundo lugar, demonstrar a aplicação prática da indução matemática em teoremas contemporâneos da geometria, evidenciando sua relevância contínua e sua capacidade de estabelecer resultados precisos e robustos; e finalmente, explorar as implicações pedagógicas da indução matemática, discutindo como essas técnicas podem ser ensinadas e aprendidas de maneira eficaz no contexto educacional atual.

A justificativa para este estudo reside na importância crucial da geometria como disciplina matemática fundamental, cujas aplicações vão desde a engenharia e a arquitetura até a física teórica e a ciência da computação. Ao explorar a indução matemática como uma ferramenta para resolver problemas geométricos, este trabalho não apenas contribui para o avanço do conhecimento acadêmico, mas também oferece *insights* valiosos que podem ser aplicados em diversas áreas da ciência e da tecnologia. A compreensão aprofundada desses métodos pode levar a novas descobertas e inovações no campo da geometria, promovendo assim o desenvolvimento contínuo da matemática como um todo.

Metodologicamente, este estudo adotará uma abordagem analítica e descritiva, utilizando revisões bibliográficas detalhadas, análise crítica de teoremas e demonstrações matemáticas, e estudo de casos específicos onde a indução matemática é aplicada com sucesso na geometria. As técnicas e métodos empregados neste trabalho visam não apenas responder à questão central de pesquisa, mas também fornecer um quadro metodológico claro que pode ser replicado e expandido em futuras investigações no campo da matemática aplicada.

A estrutura deste trabalho está organizada de maneira a proporcionar uma análise abrangente e coesa da aplicação da indução matemática em geometria. O capítulo inicial introduzirá os conceitos básicos da geometria, estabelecendo assim o pano de fundo histórico e conceitual necessário para uma compreensão mais profunda da geometria como disciplina matemática. O segundo capítulo explorará em detalhes a indução matemática, desde seus fundamentos históricos até suas aplicações contemporâneas na prova de teoremas. Por fim, o terceiro capítulo focará na aplicação prática da indução matemática em teoremas específicos da geometria, destacando exemplos concretos e suas implicações teóricas.

Este trabalho foi significativamente enriquecido com o uso de figuras geométricas planas, proporcionando uma visualização clara e detalhada dos conceitos abordados. Diferente dos demais trabalhos, ele se destaca ao integrar representações visuais diretamente com o desenvolvimento teórico, facilitando a compreensão dos temas e oferecendo uma abordagem didática que combina explicações conceituais com ilustrações geométricas precisas. Essa integração torna o conteúdo mais acessível e dinâmico, proporcionando uma experiência mais completa ao leitor.

Em suma, este trabalho se propõe a oferecer uma contribuição significativa para o estudo da matemática aplicada, especificamente no campo da geometria, ao investigar e demonstrar como a indução matemática pode ser efetivamente utilizada para resolver problemas geométricos complexos e estabelecer teoremas fundamentais. Ao finalizar esta introdução, espera-se que o leitor tenha uma compreensão clara dos objetivos, da relevância e da estrutura deste trabalho, preparando-o para uma exploração mais aprofundada das interseções entre a indução matemática e a geometria.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A importância da geometria no ensino de matemática

A geometria, como disciplina fundamental na educação matemática, tem sido objeto de estudo e desenvolvimento por diversos pesquisadores ao longo dos anos. Autores como Aires, Campos e Poças (2015) exploraram o raciocínio geométrico em contextos educacionais específicos, destacando a importância da definição conceitual, como no estudo da definição de quadrado entre alunos do 6º ano. Suas pesquisas evidenciam a necessidade de compreender não apenas a aplicação de conceitos geométricos, mas também os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática.

Almeida e Silva (2012), por meio de uma abordagem semiótica, analisaram as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática, contribuindo para uma melhor compreensão dos modos de inferência matemática. Essa perspectiva revela como a semiose pode influenciar a forma como os estudantes interagem e interpretam problemas geométricos, ampliando suas capacidades de raciocínio matemático.

O uso do Geogebra como ferramenta didática é explorado por Amado, Sanchez e Pinto (2015), que investigaram a demonstração matemática em sala de aula, focando na reta de Euler. Seu estudo destaca como a tecnologia pode facilitar a visualização e a compreensão de conceitos geométricos complexos, promovendo uma aprendizagem mais interativa e eficaz.

Aristóteles (1995), em sua obra Ethics, aborda questões filosóficas que permeiam o pensamento lógico e ético, influenciando indiretamente o desenvolvimento da lógica matemática ao longo da história. Seus princípios éticos e lógicos continuam a fornecer fundamentos para investigações mais profundas no campo da geometria e da matemática como um todo.

Balieiro Filho (2018) conduziu um estudo sobre a lógica matemática, explorando conceitos em companhia de Malba Tahan. Sua pesquisa destaca como a lógica é fundamental para o entendimento dos princípios geométricos e como diferentes abordagens filosóficas podem enriquecer o ensino e a aprendizagem da geometria nas escolas.

Barguil (2016) propôs o Fiplan como recurso didático para o ensino de geometria na educação infantil e no ensino fundamental. Sua abordagem demonstra como estratégias educacionais inovadoras podem ser aplicadas para tornar o ensino da geometria mais acessível e envolvente para os alunos desde as séries iniciais.

Beites, Branco e Costa (2020) exploraram esquemas de demonstração para proposições de Álgebra Linear, destacando a importância da lógica na construção e validação de argumentos matemáticos. Seu trabalho contribui para uma melhor compreensão dos processos dedutivos envolvidos na geometria e em outras áreas da matemática aplicada.

Bicudo (2010) discutiu a Filosofia da Educação Matemática, enfatizando a fenomenologia e suas implicações nas concepções pedagógicas da geometria. Sua análise filosófica revela como a fenomenologia pode fornecer novas perspectivas para o ensino e a aprendizagem da geometria, integrando aspectos cognitivos e experienciais.

Braga e Dorneles (2011) realizaram uma análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental, destacando os desafios e as estratégias para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos entre os alunos. Seu estudo oferece *insights* valiosos sobre as etapas do desenvolvimento cognitivo na geometria escolar.

Brandão e Amouloud (2018)investigaram os significados geométricos mobilizados por estudantes ao criarem situações-problema, explorando como a contextualização pode facilitar a aplicação prática dos conceitos geométricos no cotidiano dos alunos. Essa abordagem contribui para uma aprendizagem mais significativa e integrada dos princípios geométricos.

Reid e Knipping (2010) discutiram a prova na educação matemática, examinando pesquisas sobre o aprendizado e o ensino de provas matemáticas. Sua análise revela como a compreensão das estratégias de prova pode influenciar o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, essencial para a geometria e disciplinas correlatas.

Romano, Schimiguel e Fernandes (2015) realizaram uma revisão bibliográfica sobre livros didáticos de matemática, tecnologia e ensino de geometria no Ensino Fundamental e Médio. Sua pesquisa identifica tendências e desafios na utilização de recursos tecnológicos para o ensino da geometria, destacando a evolução das abordagens pedagógicas ao longo do tempo.

Salatiel (2012) investigou a lógica de Aristóteles, explorando os fundamentos filosóficos que permeiam o pensamento lógico-matemático. Sua análise contribui para uma compreensão mais profunda das raízes históricas da lógica formal e sua influência no desenvolvimento da geometria como disciplina acadêmica.

Santos, Pereira e Nunes (2017) investigaram as concepções de professores de matemática sobre a álgebra escolar, evidenciando como diferentes perspectivas pedagógicas podem influenciar o ensino e a aprendizagem da geometria. Seu estudo destaca a importância da formação docente na promoção de práticas educacionais eficazes em contextos escolares.

Silva, Ferreira e Gomes (2016) propuseram uma abordagem inovadora para o ensino de geometria plana no ensino fundamental, utilizando jogos como instrumento educacional. Sua pesquisa demonstra como atividades lúdicas podem facilitar a compreensão e a aplicação dos conceitos geométricos, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica e participativa.

Smith (2012) explorou a lógica de Aristóteles, oferecendo uma investigação filosófica sobre os princípios que fundamentam o raciocínio lógico. Sua análise contribui para uma compreensão mais abrangente dos fundamentos teóricos da geometria e sua conexão com a filosofia da lógica.

Sousa (2013) investigou a elaboração coletiva de produtos educacionais por professores de matemática, destacando como essa prática colaborativa pode enriquecer o desenvolvimento curricular na geometria e em outras disciplinas matemáticas. Seu estudo oferece insights sobre estratégias colaborativas para promover a inovação no ensino da geometria.

Souza (2016) explorou o raciocínio abdutivo na produção de conhecimento matemático, discutindo como diferentes formas de raciocínio podem influenciar a construção de argumentos geométricos. Sua pesquisa evidencia a importância de abordagens variadas para promover uma compreensão mais holística e integrada da geometria entre os estudantes.

Utimura e Curi (2016) investigaram as aprendizagens dos alunos no contexto do projeto de docência compartilhada e estudos de aula, focando no ensino de figuras geométricas espaciais. Seu estudo destaca como a colaboração entre professores pode promover uma melhor compreensão dos conceitos geométricos complexos, integrando teoria e prática de maneira eficaz.

Vale e Barbosa (2019) exploraram o pensamento algébrico e seu contributo na construção da generalização matemática, evidenciando como a visualização pode facilitar a compreensão dos princípios geométricos abstratos. Sua pesquisa destaca a importância da visualização na promoção de uma aprendizagem mais intuitiva e conceitualmente robusta na geometria.

Timóteo (2018) mostra que para resolver certos problemas geométricos, ainda é muito útil encontrar, em uma figura, uma solução empírica, que guia a solução verdade. Logo à primeira vista, pode parecer que o processo indutivo é extremamente limitado, mas ele é fundamental no desenvolvimento das generalizações sobre figuras geométricas.

Ao integrar as contribuições desses diversos autores, é possível compreender a amplitude e a complexidade da geometria como campo de estudo na educação matemática. Cada pesquisa e abordagem oferece *insights* valiosos sobre como os princípios geométricos podem ser ensinados e aprendidos de maneira mais eficaz, promovendo uma compreensão mais profunda e integrada dos conceitos matemáticos. Essas perspectivas não apenas enriquecem o corpo teórico da geometria, mas também fornecem orientações práticas para educadores e pesquisadores interessados em promover uma educação matemática de qualidade.

Em resumo, a geometria tem uma importância histórica significativa no ensino da matemática por sua aplicabilidade em diversas áreas, sua conexão com outras áreas da matemática, seu papel na evolução da matemática ao longo do tempo e seu papel no desenvolvimento cognitivo dos alunos. No entanto, a forma como a geometria é normalmente ensinada pode muitas vezes ser desvinculada da realidade dos alunos, dificultando assim o processo de aprendizagem.

Para neutralizar isso, é crucial que os professores de matemática contextualizem o ensino da geometria, devendo demonstrar como ela pode ser aplicada em situações genuínas e relevantes. Isso é especialmente importante na geometria do ensino básico, pois é durante esse período que muitos alunos são apresentados à geometria. Ao contextualizar o assunto de maneira significativa, os professores podem despertar o interesse dos alunos e possibilitar um aprendizado mais eficaz.

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente (Brasil, 1998, p. 40).

Dessa maneira, a matemática é uma área do conhecimento que contribui para o desenvolvimento de muitas das capacidades que o aluno possui, como a comunicação, a resolução de problemas, a tomada de decisões, a inferência e a criatividade. Tomando como base fundamental para o nosso estudo, tornando-se uma ferramenta essencial para o ensino da geometria no que tange a resolução problemas por meios de comandos.

O ensino da geometria plana, incluindo a classificação e propriedades dos polígonos, é enriquecido pelo uso de ferramentas tecnológicas como o Geogebra, conforme discutido por Amado, Sanchez e Pinto (2015). O Geogebra permite visualizações interativas das propriedades matemáticas dos polígonos, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e promovendo uma aprendizagem mais dinâmica e participativa em sala de aula.

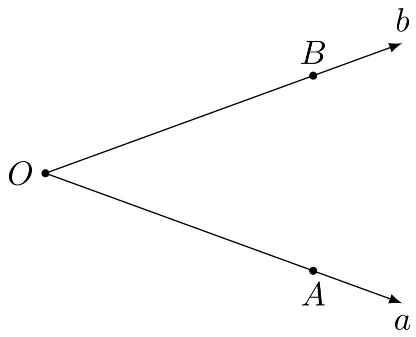
A classificação dos polígonos é um tema central na geometria plana, oferecendo uma ampla gama de conceitos matemáticos e aplicações práticas. A compreensão das propriedades geométricas dos polígonos, como área, soma dos ângulos internos e número de diagonais, é essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e habilidades analíticas dos estudantes, preparando-os para desafios matemáticos mais complexos e para aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

2.2 Ângulos e Polígonos

2.2.1 Ângulo

Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Figura 1 – Ângulo definido por duas retas não colineares



Fonte: Autor (2024)

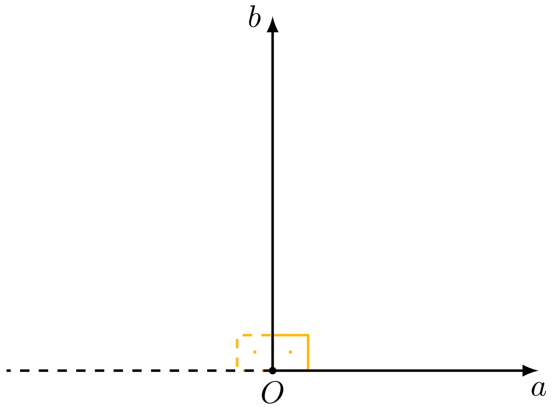
$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

Conforme mostrado na Figura 1 ponto O é o vértice do ângulo. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

2.2.1.1 Classificação dos ângulos

Ângulo reto é todo ângulo que mede 90°, como ilustra a Figura 2,

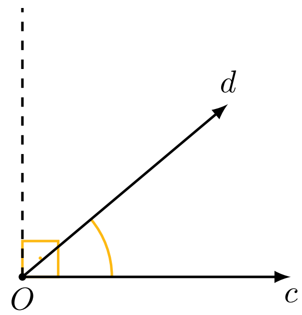
Figura 2 – Ângulo reto $\widehat{ab}$



Fonte: Autor (2024)

Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

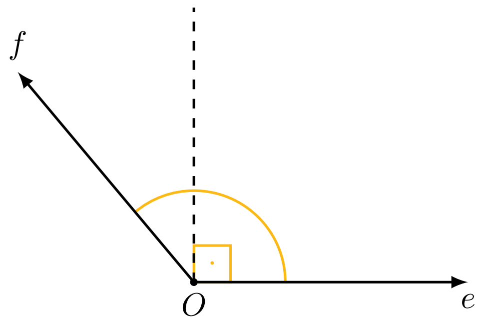
Figura 3 – Ângulo agudo $\widehat{cd}$



Fonte: Autor (2024)

Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Figura 4 – Ângulo agudo $\widehat{ef}$

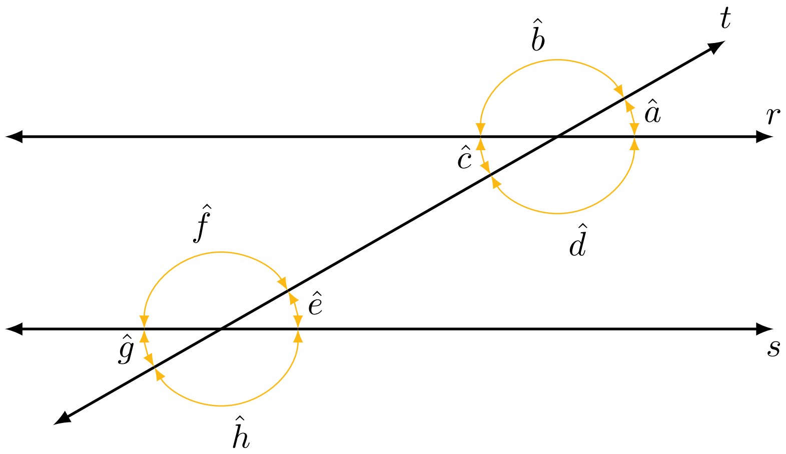


Fonte: Autor (2024)

2.2.2 Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Sejam r e s duas retas paralelas ($r \parallel s$) e seja t uma reta transversal a r e a s, como ilustra a Figura 5

Figura 5 – Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: Autor (2024)

Tem-se as seguintes relações entre os ângulos que aparecem na figura:

- Ângulos alternos internos são congruentes ($\hat{d} \equiv \hat{f}$ e $\hat{c} \equiv \hat{e}$)
- Ângulos alternos externos são congruentes ($\hat{a} \equiv \hat{g}$ e $\hat{b} \equiv \hat{h}$)
- Ângulos correspondentes são congruentes ($\hat{a} \equiv \hat{e}$, $\hat{d} \equiv \hat{h}$, $\hat{b} \equiv \hat{f}$ e $\hat{c} \equiv \hat{g}$)
- Ângulos colaterais internos são suplementares ($\hat{d} + \hat{e} = 180°$ e $\hat{c} + \hat{f} = 180°$)
- Ângulos colaterais externos são suplementares ($\hat{a} + \hat{h} = 180°$ e $\hat{b} + \hat{g} = 180°$)

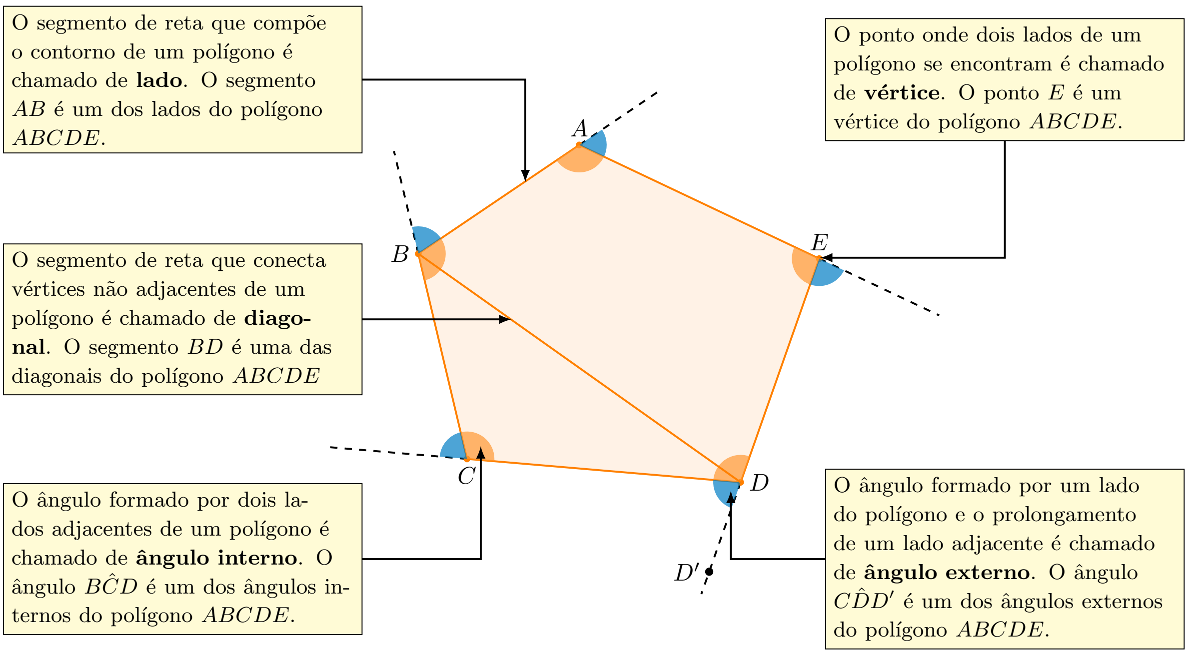
2.2.3 Polígonos

A palavra polígono tem origem grega, em que *poli* indica **muitos** e *gonos*, **ângulos**.

Denominamos **polígono** toda figura geométrica plana formada por uma região e por seu contorno, fechada e composta apenas de segmentos de reta que não se cruzam. O **perímetro** de um polígono corresponde à soma das medidas de seus lados.

A Figura 6 mostra alguns aspectos importantes sobre polígonos.

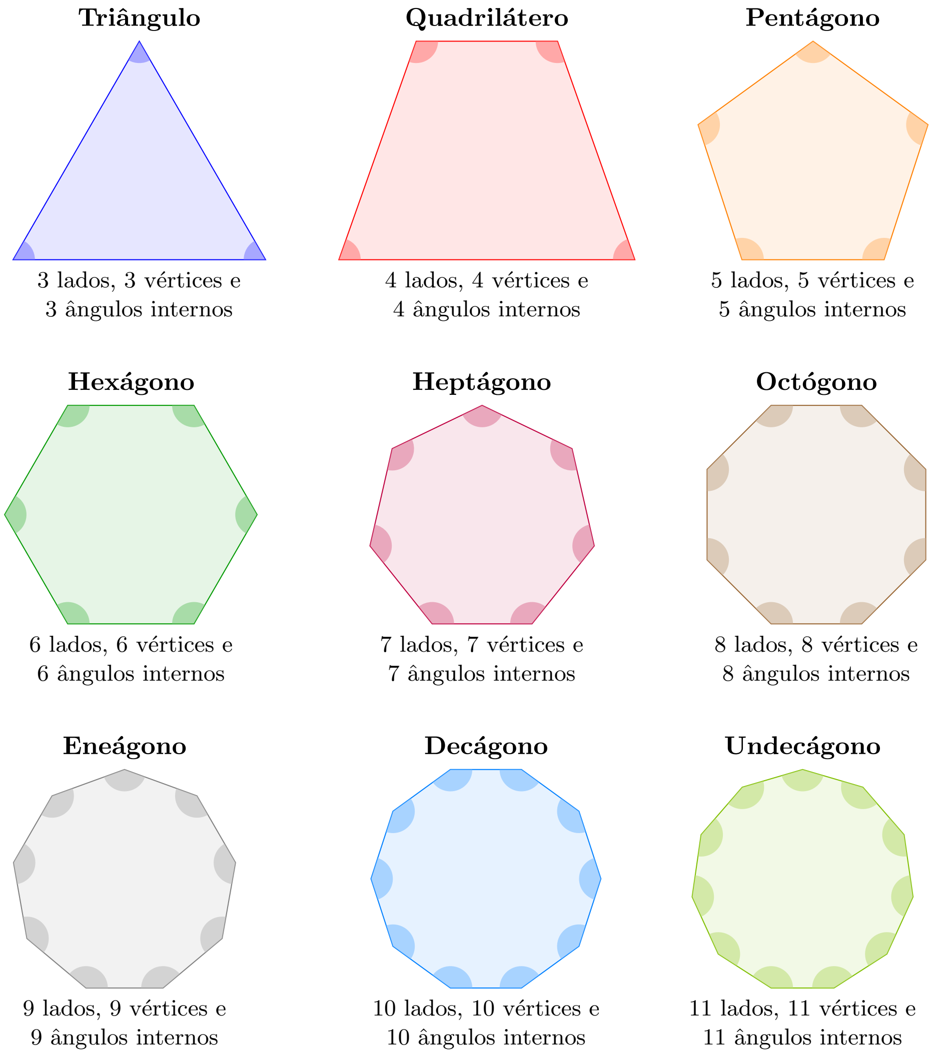
Figura 6 – Principais conceitos relacionados a um polígono



Fonte: Autor (2024)

Podemos classificar um polígono de acordo com a quantidade de vértices, lados e ângulos internos. Essas três quantidades são iguais, como ilustra a Figura 7.

Figura 7 – Classificação dos polígonos em função do número de vértices, lados e ângulos internos

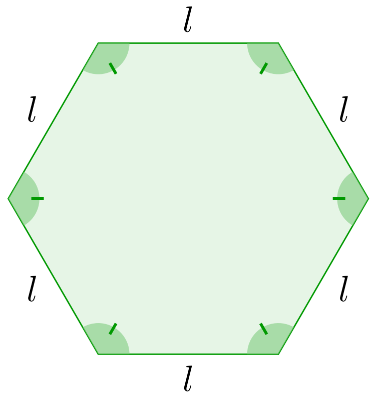


Fonte: Autor (2024)

Essa classificação básica permite categorizar os polígonos conforme sua complexidade e características estruturais.

Quando um polígono possui todos os lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes, dizemos que é um **polígono regular**. Observe um exemplo.

Figura 8 – Polígono regular com seis lados (Hexágono)

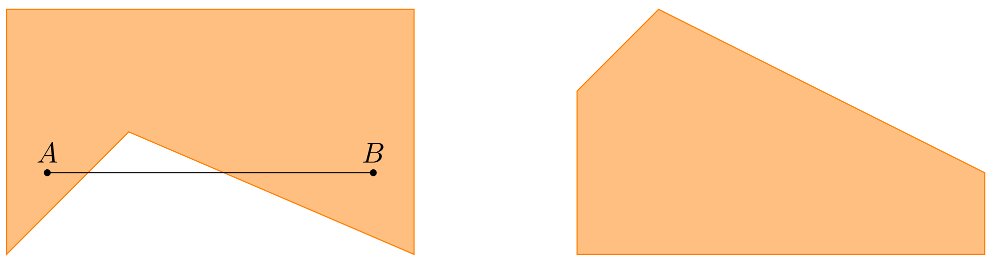


Fonte: Autor (2024)

Quando é possível traçar um segmento de reta com extremidades no polígono, de maneira que algum ponto desse segmento seja externo ao polígono, dizemos que esse é um **polígono não convexo**. Caso isso não seja possível, dizemos que esse é um **polígono convexo**.

Veja os exemplos.

Figura 9 – Polígonos convexo e não convexo



(a) Polígono não convexo (b) Polígono convexo

Fonte: Autor (2024)

2.2.4 Área das principais figuras planas

2.2.4.1 Área do retângulo e do quadrado

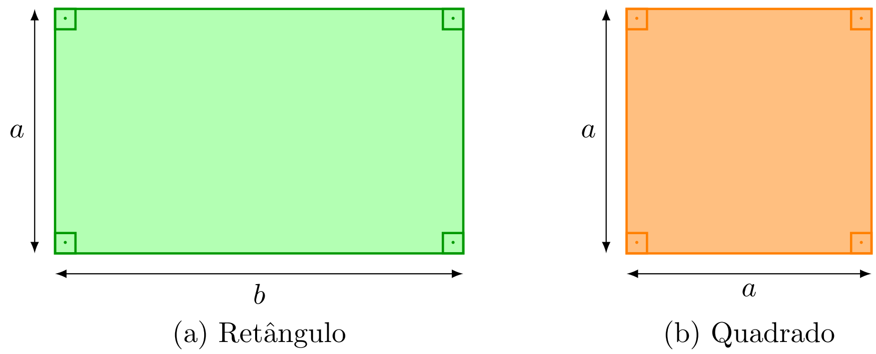
Para calcular a área de um retângulo, podemos multiplicar a medida do comprimento b pela medida da largura a, ou seja,

$$A = a \cdot b \text{ ou } b \cdot a$$

Como o quadrado é um caso particular de retângulo, em que os lados têm medidas iguais a a, podemos calcular sua área multiplicando a medida de um lado por ela mesma. Então,

$$A = a \cdot a \Rightarrow A = a^2$$

Figura 10 – Quadriláteros Retangulares

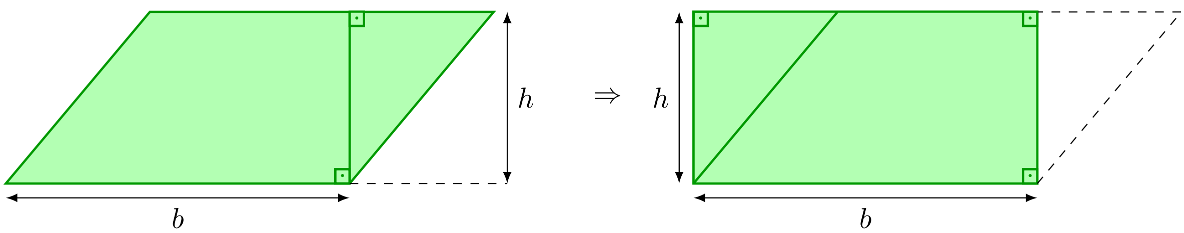


Fonte: Autor (2024)

2.2.4.2 Área do paralelogramo

Podemos deduzir uma expressão para calcular a área de um paralelogramo, em que b é a medida da base e h é a medida da altura. Para isso, decompomos esse paralelogramo e deslocamos um triângulo obtido de maneira a compor um retângulo de mesma área do paralelogramo, conforme representado a seguir.

Figura 11 – Paralelogramo



Fonte: Autor (2024)

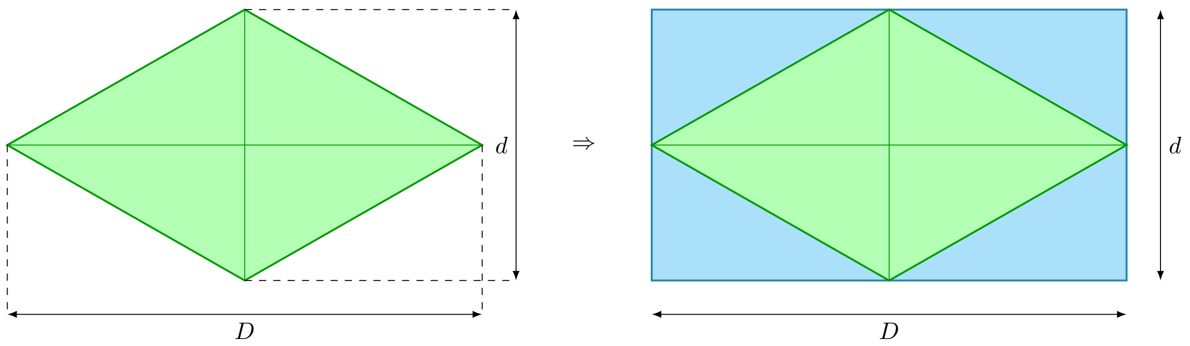
Assim, a área desse paralelogramo é dada por

$$A = b \cdot h.$$

2.2.4.3 Área do losango

Considere um losango em que D é a medida da diagonal maior e d, a medida da diagonal menor. Para deduzir uma expressão que calcule a área desse losango, podemos inicialmente traçar suas diagonais. Depois, podemos construir um retângulo traçando cada lado de maneira que passe por um vértice desse losango e seja paralelo a uma de suas diagonais.

Figura 12 – Losango



Fonte: Autor (2024)

A área do losango corresponde à metade da área do retângulo obtido. Assim, podemos expressar a área desse losango por:

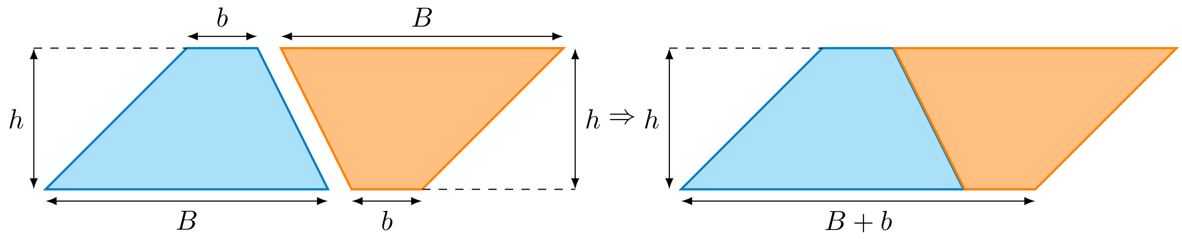
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

2.2.4.4 Área do trapézio

Considere o trapézio azul representado na Figura 13, em que b é a medida da base menor, B é a medida da base maior e h é a medida da altura.

Podemos deduzir uma expressão para calcular a área desse trapézio, construindo um novo trapézio congruente a ele, em outra posição, conforme representado a seguir. Depois, com esses dois trapézios congruentes, compomos um paralelogramo.

Figura 13 – Trapézio



Fonte: Autor (2024)

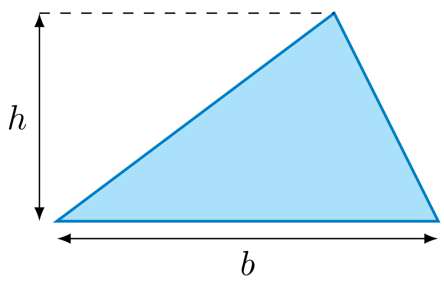
A área do trapézio em azul corresponde à metade da área do paralelogramo obtido. Assim, podemos expressar a área desse trapézio por:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

2.2.4.5 Área do triângulo

Considere o triângulo representado na Figura 14, em que b é a medida da base e h é a medida da altura.

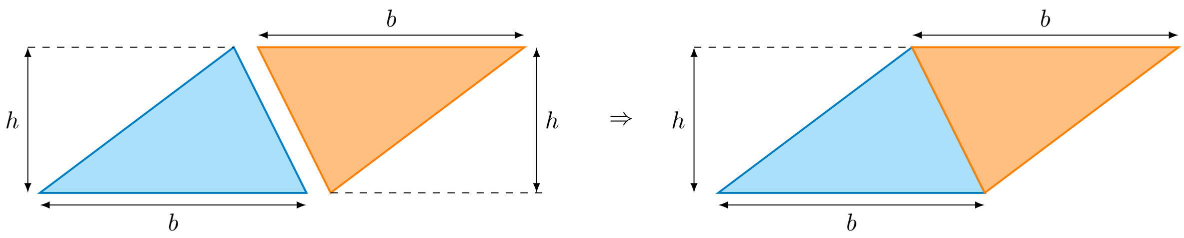
Figura 14 – Triângulo de base b e altura h



Fonte: Autor (2024)

Podemos deduzir uma expressão para o cálculo da área desse triângulo, construindo um novo triângulo congruente a ele, em outra posição, conforme representado na Figura 15. Observe que, unindo esses dois triângulos congruentes, compomos um paralelogramo.

Figura 15 – Justaposição de triângulos congruentes



Fonte: Autor (2024)

Como os dois triângulos são congruentes, a área do triângulo azul corresponde à metade da área do paralelogramo obtido, então a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula:

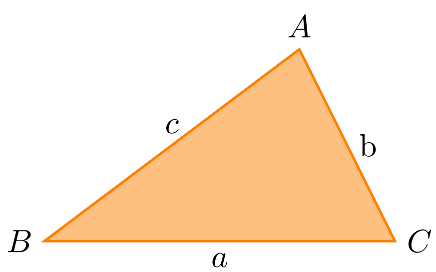
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Outra expressão que pode ser utilizada para calcular a área de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas de seus três lados, é a **fórmula de Herão**. Tal expressão recebe esse nome em homenagem ao estudioso grego Herão de Alexandria (c. 10 d.C.-70 d.C.), que a apresentou em um de seus trabalhos.

Fórmula de Herão: Seja s o semiperímetro definido como metade do perímetro de uma figura geométrica plana. Para um triângulo cujos lados medem a, b e c tem-se:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Figura 16 – Triângulo ABC de lados a, b e c



Fonte: Autor (2024)

É possível verificar que a área desse triângulo é dada por:

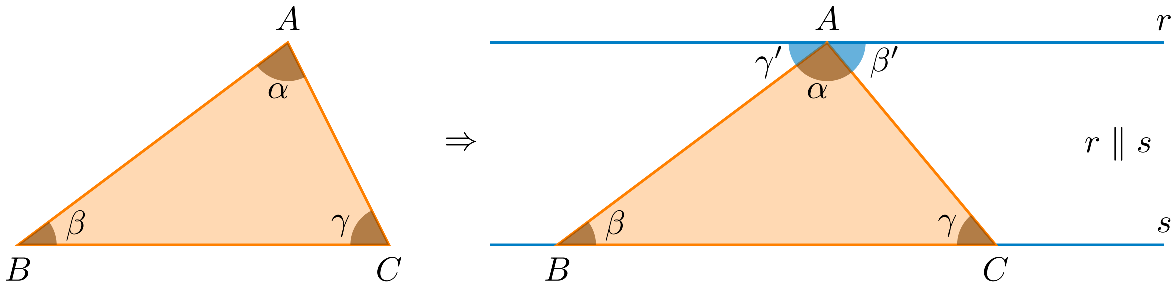
$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

2.2.5 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

A soma das medidas dos ângulos interno de um triângulo é igual a 180°.

Demonstração. Observe o esquema:

Figura 17 – Triângulo ABC de ângulos internos α, β e γ



Fonte: Autor (2024)

Qualquer que seja o triângulo, é possível conduzirmos por um de seus vértices uma reta (neste caso r) que seja paralela à reta (s) que contém o lado oposto ao vértice considerado.

Assim, os outros lados do triângulo resultam transversais das paralelas r e s, determinando ângulos alternos internos γ e γ' e β e β'. Logo,

$$\gamma = \gamma' \text{ e } \beta = \beta'$$

Como $\alpha + \beta + \gamma' = 180^\circ$, então

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$\square$

2.2.6 Soma dos ângulos interno de um polígono de n lados ($n \geq 3$)

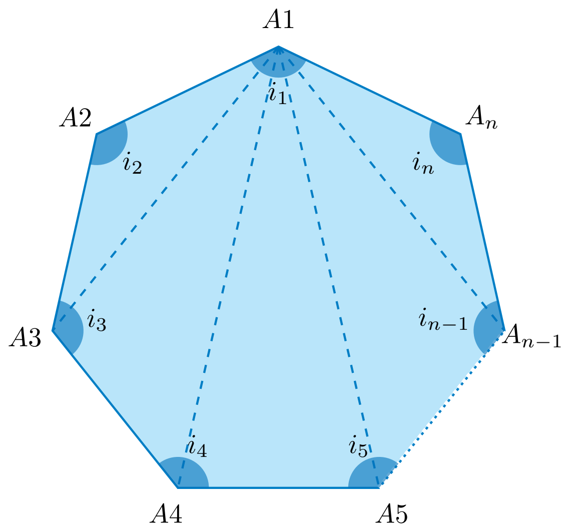
A soma dos ângulos internos de um polígono é um conceito clássico da geometria plana, explorado por matemáticos desde os tempos de Euclides. Esta propriedade é essencial para compreender a estrutura geométrica dos polígonos e suas implicações teóricas e práticas, como discutido por Poincaré (1902) em “Science and Hypothesis”.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é:

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3\cdots A_n$ um polígono de n lados, conformo ilustrado na Figura

Figura 18 – Ângulos internos de um polígono de n lados



Fonte: Autor (2024)

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.

O polígono fica então dividido em $n-2$ triângulos e a soma S dos ângulos internos do polígono $S = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$ é igual à soma dos ângulos internos dos $n-2$ triângulos.

Logo,

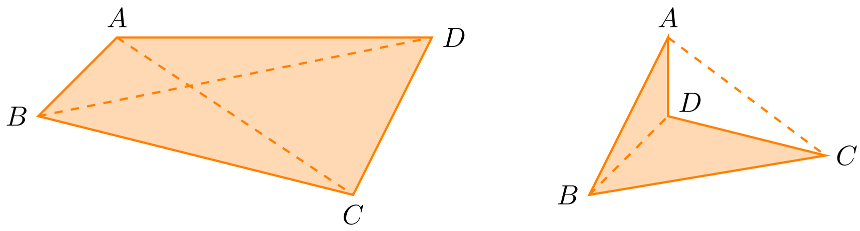
$$S = (n-2)\cdot\pi \text{ ou } S = (n-2)\cdot 180^\circ$$

$\square$

2.2.7 Número de diagonais de um polígono de n lados ($n \geq 3$)

Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

Figura 19 – Diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ em um quadrilátero convexo (a) e um quadrilátero côncavo (b)



(a) Quadrilátero $ABCD$ convexo (b) Quadrilátero $ABCD$ côncavo

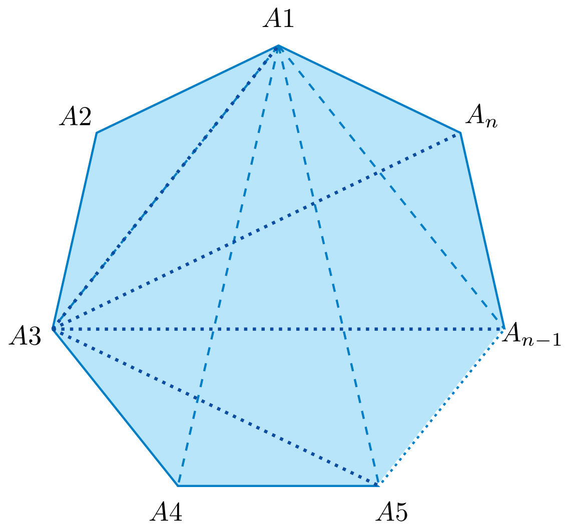
Fonte: Autor (2024)

O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geq 3$) é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono de n lados, conformo ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Diagonais de um polígono de n lados



Fonte: Autor (2024)

Consideremos, por exemplo o vértice A_1. Por esse vértice, temos: $(n-3)$ diagonais, destacadas em *tracejado* na Figura 20. De forma semelhante, na mesma figura, são mostradas as $(n-3)$ diagonais que passam pelo vértice A_3, destacadas em *pontilhado*.

Se com extremidade em cada vértice temos $(n-3)$ diagonais, então com extremidades nos n vértices, temos: $n \cdot (n-3)$.

Porém, nesta conta $n \cdot (n-3)$ cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices. (Por exemplo, na conta acima, $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$.)

Logo, o número d de diagonais é:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

□

2.2.8 Números binomiais

Chama-se **número binomial** o número $\binom{n}{p}$, com n e p naturais, $n \geq p$, tal que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Note que $\binom{n}{p} = C_{n,p}$.

Propriedades:

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$

2.2.9 Relações de Euler

Essa fórmula, que foi descoberta pelo matemático suíço Leonhard Euler no século XVIII, não apenas unifica vários aspectos da geometria dos poliedros, mas também serve como uma ponte para a topologia, uma área da matemática que estuda as propriedades dos espaços que são mantidos sob deformações constantes. A relação de Euler demonstra uma unidade fundamental nas configurações geométricas tridimensionais e é aplicável a todos os poliedros convexos, independentemente de sua forma específica.

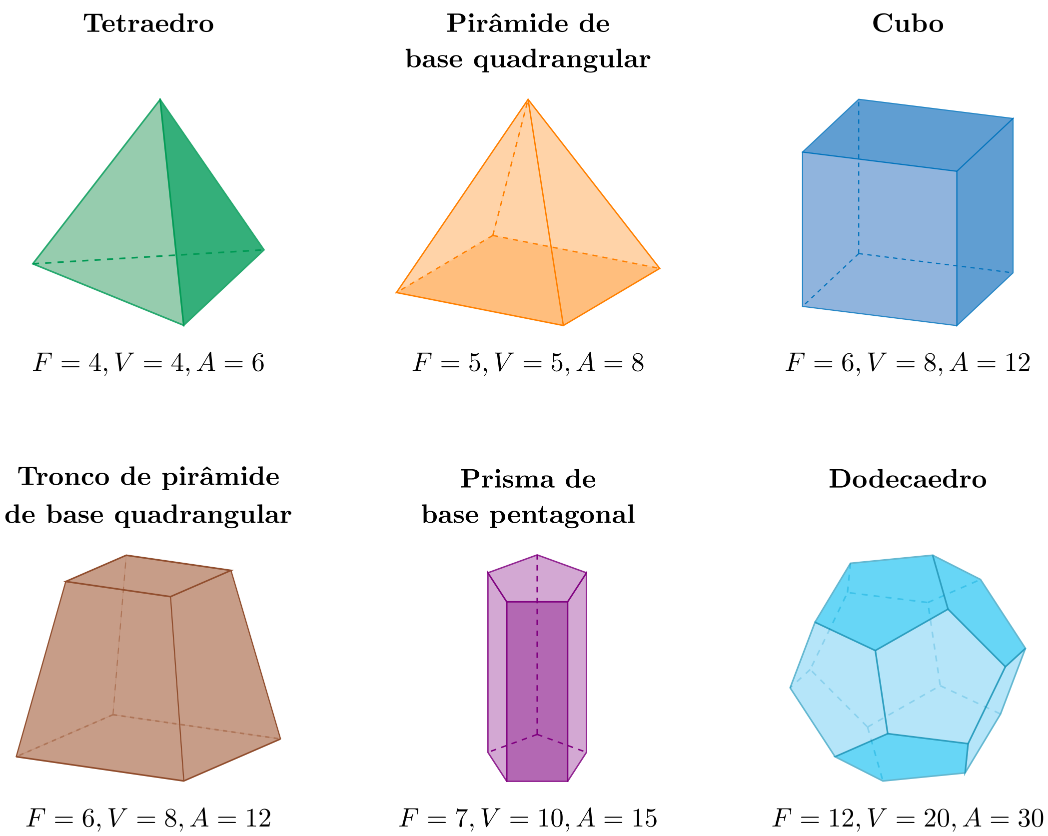
A relação de Euler é útil não apenas na teoria, mas também na prática, em áreas como computação gráfica, design de estruturas e química molecular, onde a compreensão das formas e conexões dos poliedros é fundamental.

Compreender a relação de Euler nos dá uma ferramenta poderosa para analisar e interpretar a geometria e as propriedades topológicas dos poliedros. Isso revela a beleza e a simplicidade que podem surgir das formas mais complexas.

Leonhard Euler descobriu uma importante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um poliedro convexo.

Observe estes exemplos:

Figura 21 – Exemplos de poliedros convexos



Fonte: Autor (2024)

Observe que, para cada um dos poliedros, o número de arestas é exatamente 2 unidades menos do que a soma do número de faces com o número de vértices.

Essa relação pode ser escrita assim:

$$V - A + F = 2$$

O valor 2 dessa expressão é uma característica de todos os poliedros convexos.

3 INDUÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, será apresentada uma breve história do surgimento do Princípio de Indução, abordando-o através dos Axiomas de Peano.

3.1 O aparecimento do princípio de indução

O Princípio da Indução Matemática, conforme relatado por Costa (2020), teve suas primeiras menções nos tempos de Euclides, quando ainda se caracterizava por pouca clareza e rigor na matemática. Naquela época, a matemática não tinha o caráter de ciência exata, que exige uma linguagem precisa, onde todas as afirmações necessitam de prova. Não havia, portanto, a obrigação de demonstrar ou provar teorias, o que eliminava a preocupação em nomear e caracterizar conceitos.

Nos trabalhos de Mauro Lico e Pascal, segundo Dias e Reis (2011), mesmo com uma maior clareza, o raciocínio indutivo ainda não possuía uma denominação específica. Wallis, conforme Lima *et al.* (1997), foi o primeiro a utilizar o termo “indução” para descrever uma forma de demonstrar teoremas, embora seu trabalho “Aritmética Infinita”, publicado em 1656, tratasse a indução mais como uma ciência experimental do que como uma indução matemática.

De acordo com Luchetta (2020), foi apenas em 1838 que De Morgan, em seu artigo “Indução (Matemática)”, criou a expressão “Indução Matemática”, demonstrando que a indução é um raciocínio que permite a transição de n para $n+1$. Posteriormente, Grassmann, em 1861, utilizou extensivamente o processo de Indução Matemática em seu “Tratado de Aritmética”, embora ainda sem nomeá-lo e demonstrá-lo explicitamente. Esse método, contudo, foi bem aceito por seus contemporâneos.

Dedekind, conforme Prodanov e Freitas (2013), em seu trabalho “O que são os números e qual o seu significado”, nomeou o processo como “Indução Completa”. Somente em 1889, Peano, um dos precursores do logicismo, deu uma construção axiomática à aritmética, reduzindo-a a um puro simbolismo formal. Peano, em seu trabalho sobre a fundamentação teórica dos números naturais, buscou simplificar e organizar a matemática, publicando diversas edições de seu trabalho. Em “Arithmetices Principia nova methodo exposita”, ele introduziu símbolos usados até hoje.

Peano, conforme descrito por Ferreira (2011), organizou a matemática de maneira lógica, culminando na quinta e última edição do “Formulario Mathematico” em 1908, que continha 4200 fórmulas e teoremas, a maioria deles provados. Trabalhando na escrita, ele organizou o latim de forma a criar um idioma matemático. Este método atingiu um novo nível de precisão, eliminando ambiguidades nas resoluções de problemas matemáticos. Sua obra “Princípio aritméticos: novo método de exposição”, destaca que os axiomas de Peano representaram a tentativa mais singular do século XIX de reduzir a aritmética comum ao simbolismo formal, atingindo um grau de precisão sem precedentes.

Após essa breve história sobre a indução matemática, encontrada nos trabalhos de Dias e Reis (2011) e Lima *et al.* (1997), inicia-se a discussão de um dos conceitos mais fundamentais da matemática: O Princípio de Indução Finita, um instrumento eficaz para a demonstração de diversas propriedades no conjunto dos números naturais.

3.2 Axiomas de Peano

Os axiomas de Peano são fundamentos cruciais da teoria dos números naturais e da matemática em geral. Eles foram propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano no final do século XIX e servem como uma base axiomática para a aritmética dos números naturais. Estes axiomas são formulados para definir os números naturais, começando com o número 1, e descrevem suas propriedades e operações básicas.

Os axiomas de Peano consistem em um conjunto de axiomas que delineiam as propriedades essenciais dos números naturais e da operação de sucessão. Esses axiomas são fundamentais porque permitem a construção de todo o conjunto dos números naturais a partir de um ponto de partida simples, garantindo a consistência e a completude da aritmética básica.

Conforme afirmam Morgado e Carvalho (2009), os axiomas de Peano são assim citados:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.

3. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

A noção de sucessor de um número natural está intimamente relacionada à ideia de adição: tomar o sucessor é equivalente a somar uma unidade. Os axiomas de Peano podem ser reescritos como se segue, representando como $n+1$ o sucessor de n:

1. Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n+1$.

2. Se $m+1=n+1$, então $m=n$.

3. Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n+1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então $X = \mathbb{N}$.

3.3 A caracterização dos métodos de indução: a indução empírica

Galvão (2007) e Oliva (1990) exploram a universalidade das observações humanas desde tempos antigos, como perceber que o amanhecer e o anoitecer determinam o dia e a noite, ou notar as mudanças climáticas que definem as estações, até as migrações de animais. Esses exemplos, baseados na repetição de eventos, demonstram que o raciocínio indutivo existia antes de ser formalizado cientificamente. Francis Bacon (1561-1626), segundo Costa (2020), foi um filósofo que sistematizou a generalização como método científico, defendendo a indução empírica como forma de conferir cientificidade a qualquer área do conhecimento. Bacon afirma que sua lógica indutiva se aplicaria a todas as ciências, não apenas às ciências naturais, contrastando com a lógica silogística tradicional.

O descontentamento de Bacon com os métodos de pesquisa anteriores, conforme relatado por Galvão (2007), motivou sua busca por um método mais adequado, capaz de superar as limitações cognitivas humanas. Conforme o autor, Bacon propôs que a única maneira de dominar a natureza seria através da indução empírica. Oliva (1990) reforça essa visão, destacando a convicção de Bacon de que a inferência indutiva poderia tornar a descoberta científica independente da imaginação.

Bacon (2003) critica a indução puramente metafísica e a indução por enumeração simples, que considera superficial e suscetível a erros, como exemplificado pela falácia de que todos os cisnes são brancos após observar apenas cisnes brancos. Ele argumenta que a indução válida deve analisar a natureza considerando também os casos negativos antes de concluir sobre os positivos. Este método, baseado na experimentação e observação, contrasta com a tradição metafísica que

Bacon critica, embora Zaterka (2012) argumente que a indução de Bacon mantém elementos metafísicos ao tentar acessar a natureza através de tábuas que organizam fatores influentes.

Bacon (2003) propõe que o conhecimento, ao analisar fatores diversos que influenciam os eventos, serve como ferramenta para o pesquisador dominar e estudar a natureza. Chalmers (1993) explica que Bacon e seus contemporâneos enfatizavam a consulta direta à natureza em vez de aos textos aristotélicos para compreensão científica. Bacon também delineia o papel do pesquisador, que deve buscar observações puras, livres de preconceitos e influências pessoais. Para isso, ele identifica quatro tipos de ilusões cognitivas, ou ídolos, que obscurecem a mente do pesquisador e impedem a busca pela verdade.

Bacon (2003) argumenta que os ídolos e noções falsas, implantados no intelecto humano, não só dificultam o acesso à verdade, mas também podem ressurgir como obstáculos à instauração das ciências, a menos que os homens, cientes deles, se precavenham. Os quatro ídolos definidos por Bacon são: ídolos da tribo, da caverna, do foro e do teatro. Cada um está associado a características humanas que, segundo Bacon, influenciam negativamente o desenvolvimento da ciência, tornando o processo subjetivo.

Bacon (2003) identifica nos ídolos da tribo a natureza humana como um obstáculo, uma vez que nossas concepções e atitudes podem nos desviar da verdade. Nos ídolos da caverna, ele destaca a influência da vivência pessoal de cada indivíduo na sua observação e conclusões. Nos ídolos do foro, a relação entre as pessoas, principalmente através das palavras, é vista como um obstáculo, pois "as palavras, impostas de maneira imprópria e inepta, bloqueiam espantosamente o intelecto" (Bacon, 2003, p. 15). Finalmente, nos ídolos do teatro, Bacon aponta que as verdades absolutas ditadas por dogmas, tradição, fé ou negligência são ilusões que impedem a percepção da realidade.

Segundo Bacon, a indução empírica permite ao pesquisador afastar esses ídolos, embora ele também afirme que o pesquisador deve abrir mão deles para o verdadeiro desenvolvimento do conhecimento científico. Bacon acreditava que, se a indução empírica fosse influenciada pelos ídolos, os resultados seriam distorcidos, pois estariam contaminados por preconceitos e subjetividades do pesquisador. Silva (2008, p. 5) ressalta que, na visão de Bacon, "com o afastamento dos 'ídolos', das noções falsas, seria possível alcançar a observação pura e neutra sobre a natureza, a única capaz de propiciar a efetiva explicação dos fenômenos".

Bacon também discute a necessidade de construir tábuas com instâncias do evento, sua presença, ausência e grau, para contribuir no processo de indução. Na tábua de essência e presença, deveriam ser anotados todos os casos possíveis em que um fenômeno aparece. A tábua de desvio ou ausência de fenômenos próximos verifica os casos semelhantes em que o fenômeno não ocorre. Por fim, a tábua de graus ou de comparação anota a intensidade da ocorrência do fenômeno, buscando correlações entre as modificações. Esses experimentos, independentemente de serem classificados como lucíferos ou frutíferos, deveriam ser registrados nessas tábuas (Raicik; Peduzzi; Angotti, 2018, p. 115).

Embora Bacon não considere a metafísica como forma de se fazer ciência, a construção dessas tábuas indica que o conhecimento e a filosofia estão presentes no processo. O método de Bacon busca evitar generalizações apressadas, observando um fenômeno em diferentes circunstâncias e correlacionando as observações para construir conhecimento científico. Na segunda parte de sua obra, Bacon apresenta vinte e sete prerrogativas de seu método experimental e, após desenvolver tábuas "dispostas de tal modo que o intelecto com elas possa operar" Bacon (2003, p. 82), sugere recorrer a outras técnicas de indução.

Raicik, Peduzzi e Angotti (2018, p. 115) descrevem os recursos que Bacon identificou para a metodologia científica, incluindo instâncias prerrogativas, auxílios da indução, retificação da indução, variação da investigação conforme a natureza do assunto, prerrogativas da natureza, limites da investigação, dedução e prática, preparativos para a investigação e a escala ascendente e descendente dos axiomas. Silva (2008, p. 16) destaca que o método de pesquisa científica de Bacon consiste em eliminar os obstáculos à instauração das ciências, como os ídolos, conhecer a forma e a lei que regula o processo, organizar um registro completo da história do fenômeno ou natureza estudados por meio das tábuas de presença, ausência e graus, enunciar uma primeira hipótese explicativa provisória, testar a hipótese pelas instâncias prerrogativas e, por fim, confirmar ou não a hipótese, retomando o método indutivo se necessário.

Bachelard e Popper, citados por Silva (2008), criticam a perspectiva metodológica de Bacon. Wright (1951) citado por Oliva (1990, p. 16) argumenta que Bacon supunha que a acumulação de dados empíricos levaria automaticamente à descoberta de uniformidades naturais, uma visão que desconsidera a curiosidade científica moderna. Laudan (2011, p. 5) critica Bacon por não apresentar uma proposta para o desenvolvimento da ciência em um âmbito metafísico, comparando sua abordagem à de Rudolf Carnap, que admitiu que a lógica indutiva não poderia ser aplicada em todos os contextos científicos, como a teoria da relatividade geral de Einstein (Carnap, 1962 apud Laudan, 2011).

Apesar das críticas, é inegável que a obra de Bacon revolucionou a ciência de sua época e continua a influenciar métodos científicos contemporâneos. Sua filosofia permite um contraponto com epistemologias posteriores, evidenciando contribuições que permanecem relevantes nos estudos da filosofia das ciências.

3.4 A caracterização dos métodos de indução: a indução matemática

Uma das principais distinções entre a Matemática e outras ciências naturais, como as ciências exatas e da terra, reside nos objetos de estudo de cada área. Nas ciências naturais, os objetos de conhecimento estão presentes na natureza e são perceptíveis, como a chuva, a gravidade ou organismos. Já os objetos matemáticos são completamente teóricos ou formais. Duval (2008, p. 21) aponta que, diferentemente de outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são acessíveis por meio de observação direta ou microscópica, como com o uso de microscópios, telescópios ou aparelhos de medida. O acesso a esses objetos é realizado através de representações semióticas, o que explica o desenvolvimento e diversificação dos registros de representação ao longo da evolução do conhecimento matemático.

Duval (2008) sugere que os objetos matemáticos só se tornam acessíveis por meio dos registros de representação desses objetos. Damm (2002, p. 137) reforça essa ideia ao afirmar que não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado sem o auxílio de uma representação. Um exemplo disso é o objeto "circunferência centrada na origem e de raio dois", que pode ser representado por "$x^2 + y^2 = 4$" no registro algébrico ou por um desenho no plano cartesiano no registro gráfico. Esses registros são essenciais para a manipulação dos objetos matemáticos. Duval ainda ressalta que essas representações permitem acesso a partes do objeto representado, mas o objeto em si não deve ser confundido com sua representação, pois é inteiramente conceitual.

Portanto, o método de Bacon não pode ser aplicado na Matemática da mesma forma que nas ciências empíricas, já que os objetos matemáticos não são perceptíveis aos sentidos humanos da mesma maneira. O desenvolvimento do conhecimento matemático deve ocorrer por métodos distintos, especialmente no que diz respeito à indução. No entanto, alguns aspectos do desenvolvimento matemático são apoiados por Bacon. Por exemplo, em um nível superficial, o desenvolvimento da matemática não é influenciado por subjetividades do pesquisador, pois suas opiniões e crenças não afetam os resultados ou teorias propostas, desde que sejam bem construídos e demonstrados verdadeiros. No entanto, a criatividade do pesquisador e sua história pessoal impulsionam o desenvolvimento da ciência, um aspecto que Bacon considerava secundário.

A construção do conhecimento matemático ocorre pela criação e desenvolvimento de teorias, que são constituídas por conceitos e resultados. Cada resultado deve ser provado verdadeiro, ou seja, demonstrado. Embora seja possível supor um resultado, ele só será considerado verdadeiro quando for encontrada uma demonstração que o comprove. As demonstrações matemáticas possuem características específicas: são aceitas pelos matemáticos, respeitam certas regras, partem de axiomas considerados verdadeiros e são deduzidas a partir de regras lógicas. Almouloud (2007, p. 3) explica que esses enunciados trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, que não pertencem ao mundo sensível, embora façam referência a ele.

Segundo Almouloud (2007, p. 2), a demonstração é um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais. Na Matemática, existem verdades absolutas, pois um resultado demonstrado será verdadeiro dentro do conjunto de hipóteses, definições e resultados anteriores. Assim, a Matemática apresenta uma perspectiva contrária à filosofia das ciências empíricas, sendo uma ciência cumulativa em diversos campos do conhecimento. O desenvolvimento do conhecimento matemático corrobora conhecimentos anteriores, e mesmo que resultados de áreas distintas sejam contraditórios, continuam sendo verdadeiros dentro de seus campos de restrição.

Na Matemática, a ciência se desenvolve por meio de diversos métodos, sem que nenhum se sobressaia como absoluto. Em geral, esses métodos estão associados à lógica dedutiva, conforme proposto por Popper, mas também há o uso de métodos indutivos. Nesse contexto, destaca-se a indução matemática. Morgado e Carvalho (2009) atribui a origem do processo de demonstração por indução matemática a Blaise Pascal (1632-1662). Entretanto, em um artigo de 1909, Giovanni Vacca credita ao matemático italiano Francesco Maurolico (1494-1575) a derivação e uso deste método.

Conforme Boyer e Merzbach (2011, p. 524), Giuseppe Peano, ao fundamentar sua aritmética, define três conceitos primitivos: zero, número e a relação "é sucessor de". Esses conceitos devem satisfazer axiomas como: zero é um número; se a é um número, seu sucessor é um número; zero não é sucessor de nenhum número; dois números com sucessores iguais são iguais; e se um conjunto S de números contém zero e o sucessor de cada número em S, então todo número está em S. O último axioma, conhecido como Princípio de Indução, indica a relação entre indução matemática e o conjunto dos números naturais. Morgado e Carvalho (2009, p. 23) explica que a indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática para demonstrar teoremas específicos.

A indução matemática aplica-se a resultados que estabelecem uma relação com os números naturais, permitindo o uso do princípio da indução. Portanto, nem todas as demonstrações podem utilizar a indução matemática, devido ao conteúdo e à área do que se quer demonstrar. Quando aplicável, a indução matemática segue três passos: verificar se o primeiro caso da indução é verdadeiro; supor que a indução é válida para um caso qualquer n; e verificar se a indução é válida para o próximo caso $n+1$.

Teorema 3.1 (Princípio da Indução Finita). *Seja $P(n)$ uma proposição relativa ao número natural n. Suponha que:*

i) *$P(1)$ é valida.*

ii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.*

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em termos simples, se a indução é verdadeira para um caso qualquer e também para o próximo caso, então, sempre que a afirmação for verdadeira para um caso, será para o próximo. Assim, se o primeiro caso da indução for verdadeiro, todos os casos subsequentes também serão. Dessa maneira, a verificação da verdade para o primeiro caso implica que todos os casos da indução serão verdadeiros.

Exemplo:

Teorema 3.2. *"A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2."*

Demonstração. Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural n, da fórmula

$$1+3+3+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Observe que $P(1)$ é verdadeira, já que a fórmula é trivialmente válida para $n=1$. Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira; ou seja, que

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeira. Somando $2n+1$, que é o próximo número ímpar após $2n-1$, a ambos os lados da igualdade acima, obtemos a igualdade também verdadeira:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

Isso mostra que $P(n+1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a fórmula é válida para todo número natural n. $\square$

Você tem ideia de quando foi feita pela primeira vez a demonstração acima? Bem, o primeiro registro que se tem é de 1575 e foi realizada por Francesco Maurolycos.

Hefez (2009) destaca que na demonstração acima, poderia parecer que estamos usando o fato de $P(n)$ ser verdadeira para deduzir que $P(n+1)$ é verdadeira para em seguida concluir que $P(n)$ é verdadeira. O que está ocorrendo? Estamos usando a tese para provar o teorema?

A resposta é não! Preste bem atenção, pois essa é a parte mais delicada de toda a história.

Dado um número natural n, temos duas possibilidades:

(a) $P(n)$ é verdadeira, ou

(b) $P(n)$ é falsa.

A hipótese (*ii*) do Teorema 3.1 não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de n, ou mesmo para todos os valores de n. O que a hipótese (*ii*) exige é que sempre que algum n pertença à categoria (a) acima. Então, $n+1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando n pertencer à categoria (b).

Por exemplo, a sentença aberta $P(n) : n = n+1$ satisfaz (por vacuidade) à hipótese (*ii*) do Teorema 3.1, já que nenhum pertence à categoria (a). O que falha para que o Teorema nos garanta que $P(n)$ é verdadeira para todo n é que a hipótese (*i*) não é verificada, pois $P(1) : 1 = 2$ é falsa!

Essa distinção entre indução empírica e matemática é ressaltada por Polya (2006), que afirma que na primeira, a observação de casos finitos leva à suposição de uma conclusão, enquanto na segunda, há a verificação de que todos os casos são verdadeiros, garantindo a certeza da afirmação proposta. Morgado e Carvalho (2009) complementa que, na matemática, não há espaço para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A prova por indução matemática estabelece que uma determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira.

No entanto, isso não exclui o uso de observações de casos verdadeiros na busca pelo conhecimento matemático. Esse método é frequentemente usado para identificar padrões e formular hipóteses e teoremas, que só serão aceitos como verdadeiros quando demonstrados por algum método, não necessariamente o de indução matemática. Morgado e Carvalho (2009) aponta que matemáticos concluem que tais observações fortalecem a sugestão de que talvez sejam válidas. Polya (2006) observa que muitos fatos matemáticos foram inicialmente encontrados por indução e posteriormente demonstrados. A matemática, quando apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas em seu desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental.

Sominski (1996) acrescenta que a indução desempenha um papel heurístico importante na matemática, permitindo a formulação de soluções prováveis, mas as proposições matemáticas são sempre demonstradas dedutivamente. Nenhum resultado matemático pode ser considerado verdadeiro se não for deduzido das proposições iniciais. Morgado e Carvalho (2009) também destaca que a passagem de n para $n+1$ é a fase dedutiva da indução matemática, essencial para a validade da indução matemática.

Teorema 3.3 (Princípio da Indução Finita Generalizado). *A partir do Princípio da Indução Finita, podemos obter variantes que são úteis para construir determinadas demonstrações. Começamos com uma variante que é útil para demonstrar propriedades que são válidas para números naturais a partir de um certo número natural n_0 (o valor de n_0 pode ser 0, naqueles casos em que seja de interesse considerar 0 como um número natural).*

Seja $P(n)$ uma proposição relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Suponhamos que:

i) $P(n_0)$ é válida.

ii) Para todo $n \geq n_0$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

Exemplo: Demonstrar a proposição:

$$P(n) : 2^n < n!, \text{ para todo natural } n \geq 4.$$

Demonstração. (i) $P(4)$ é verdadeira, visto que:

$$2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24$$

é verdadeira.

(ii) Supõe-se que a proposição $P(n)$ é verdadeira, isto é, que:

$$P(n) : 2^n < n!, \text{ para todo natural } n \geq 4.$$

Então, por ser $2 < n+1$ para $n \geq 4$, tem-se:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < (n+1) \cdot n!$$

que equivale a $2^{n+1} < (n+1)!$ isto é, a proposição $P(n+1)$ é verdadeira. Logo, Pelo Teorema 3.3, a proposição $P(n)$ é valida para todo número natural $n \geq 4$.

Observa-se que a proposição $P(n)$ é falsa para $n = 1, 2, 3$, pois, tem-se:

para $n = 1$: $2^1 = 2 > 1 = 1!$,

para $n = 2$: $2^2 = 4 > 2 = 2!$,

para $n = 3$: $2^3 = 8 > 6 = 3!$.

$\square$

4 APLICAÇÃO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA EM GEOMETRIA

A aplicação da indução matemática em geometria é um campo vasto e crucial para a demonstração de teoremas fundamentais e propriedades estruturais de figuras geométricas. Este capítulo explora em profundidade como a indução matemática é utilizada para estabelecer e provar teoremas geométricos, desde os fundamentos clássicos até aplicações avançadas em geometria euclidiana, não-euclidiana e algébrica.

4.1 A relação entre a Indução Matemática e a Geometria

A indução matemática é um método fundamental na matemática que permite provar proposições para todos os números naturais, baseando-se em dois passos principais: o caso base, onde a proposição é verificada para um número inicial, e o passo indutivo, onde assume-se que a proposição é válida para um número arbitrário n e demonstra-se que ela também é válida para $n+1$. Este método é amplamente utilizado para estabelecer propriedades sobre números naturais, mas também encontra aplicações em outras áreas da matemática, incluindo a geometria.

Na geometria, a indução matemática é frequentemente utilizada para provar teoremas sobre figuras geométricas e suas propriedades.

Além disso, a indução matemática é aplicada na geometria para provar propriedades de sequências geométricas, como a sequência de Fibonacci, que tem aplicações em modelagem de padrões naturais e estruturas em plantas e conchas. O método permite não apenas demonstrar que certas propriedades são verdadeiras para casos específicos, mas também estender essas propriedades para um número infinito de casos através de um raciocínio indutivo estruturado.

Um exemplo clássico de aplicação da indução matemática na geometria é a prova de que um polígono convexo com n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos através de diagonais não-intersectantes. Inicia-se a prova mostrando que o teorema é válido para um triângulo (caso base) e, em seguida, assume-se que é válido para um polígono com n lados e prova-se que é verdadeiro para um polígono com $n+1$ lados, baseando-se na estrutura do polígono e na definição de diagonais não-intersectantes.

Autores como Euclides, em seus Elementos, utilizaram princípios de indução para estabelecer teoremas fundamentais sobre geometria euclidiana. O método de construção de provas geométricas através de passos indutivos influenciou significativamente o desenvolvimento da geometria clássica e sua formalização em sistemas axiomáticos.

Além disso, matemáticos modernos como Hilbert e Poincaré exploraram as implicações da indução matemática na geometria não-euclidiana e na topologia, áreas onde as noções tradicionais de distância e paralelismo são estendidas e generalizadas. A aplicação da indução matemática nestes contextos envolve a adaptação de técnicas indutivas para estruturas geométricas mais complexas e abstratas, como espaços métricos e variedades diferenciáveis.

Na geometria algébrica, a indução matemática é utilizada para provar teoremas sobre curvas e superfícies definidas por equações polinomiais, como a curva elíptica e a superfície cúbica. A estrutura indutiva das provas permite estabelecer propriedades fundamentais dessas estruturas geométricas e sua relação com conceitos algébricos mais abstratos, como grupos e anéis.

Em suma, a relação entre a indução matemática e a geometria é profunda e multifacetada, influenciando tanto o desenvolvimento histórico da matemática quanto suas aplicações contemporâneas em diversas áreas. Através de exemplos concretos e aplicativos, este texto explorou como o método da indução matemática é empregado para estabelecer teoremas e propriedades geométricas, conectando a teoria matemática pura com suas aplicações práticas na análise e modelagem de estruturas geométricas complexas.

4.2 Exemplos de Aplicações da Indução Matemática em Geometria

A aplicação da indução matemática na geometria vai além dos conceitos básicos e explora teoremas mais avançados e complexos. Este subtópico aborda como a técnica de indução matemática é utilizada para demonstrar propriedades geométricas mais sofisticadas e aplicadas.

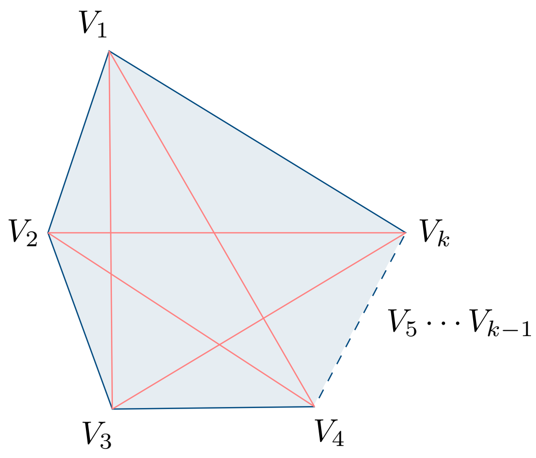
4.2.1 Número de diagonais de um polígono convexo

Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por

$$D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \tag{1}$$

diagonais.

Figura 22 – Diagonais em um polígono convexo de vértices $V_1, V_2, \cdots, V_k$



Fonte: Autor (2024)

Demonstração.

i) Para $n = 3$, o polígono convexo e um triângulo, portanto o número de diagonais é igual a zero.

$$D(3) = \frac{3 \cdot (3-3)}{2} = 0$$

ii) Suponha que a fórmula expressa na Equação (1) é verdadeira para um polígono convexo de k lados. Ou seja,

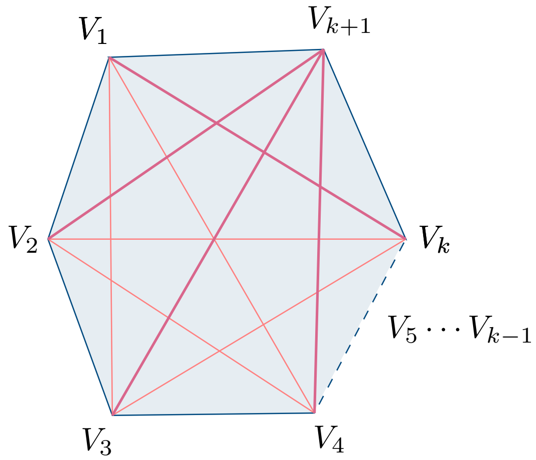
$$D(k) = \frac{k \cdot (k-3)}{2} \tag{2}$$

iii) Precisamos mostrar que a fórmula é verdadeira para um polígono convexo de $k+1$ lados.

Procedimento para adição de um lado ao polígono de k lados:

Adicionamos um novo vértice a um polígono de k lados para formar um novo polígono de $k+1$ lados.

Figura 23 – Diagonais em um polígono convexo de vértices $V_1, V_2, \cdots, V_{k+1}$



Fonte: Autor (2024)

Este novo vértice cria $k-1$ novas diagonais.

Então o número de diagonais no polígono de $k+1$ lados é:

$$D(k+1) = D(K) + (k-2) + 1$$
$$D(k+1) = D(k) + (k-1) \tag{3}$$

Substitua $D(k)$ em 3 pela hipótese de indução 2, temos:

$$D(k+1) = \frac{k \cdot (k-3)}{2} + (k+1)$$
$$D(k+1) = \frac{k^2 - 3k}{2} + k + 1$$
$$D(k+1) = \frac{k^2 - 3k + 2(k-1)}{2}$$
$$D(k+1) = \frac{k^2 - 3k + 2k - 1}{2}$$
$$D(k+1) = \frac{k^2 - k - 2}{2}$$

Simplificando a expressão para obter a fórmula desejada, temos:

$$D(k+1) = \frac{(k+1) \cdot [(k+1) - 3]}{2}$$

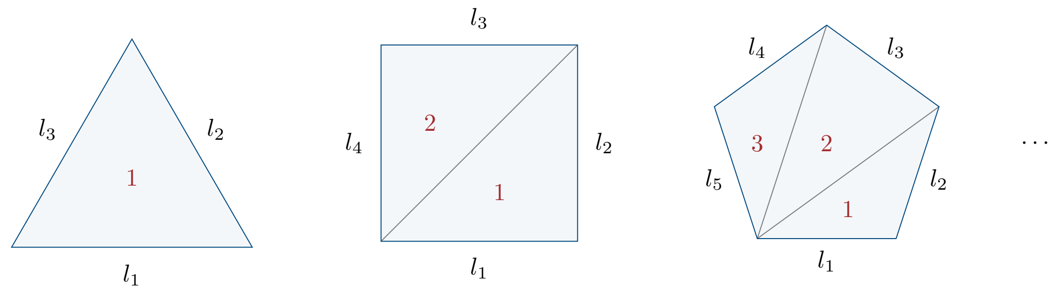
Portanto, pelo princípio da indução matemática, a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$. $\square$

4.2.2 Número de triângulos formados pela divisão de um polígono convexo através de diagonais não-intersectantes

Prove que o número de triângulos formados ao dividir um polígono convexo de n lados é igual a

$$T(n) = n - 2 \tag{4}$$

Figura 24 – Divisão de um polígono convexo em triângulos



Fonte: Autor (2024)

Demonstração.

i) Para $n = 3$, o polígono de 3 lados e já é um triângulo em si. Portanto, o número de triângulos formados é 1.

$$T(3) = 3 - 2 = 1$$

ii) Suponha que a fórmula é verdadeira para um polígono convexo de k lados. Ou seja, o número de triângulos formados ao dividir um polígono convexo de k lados é igual a $k - 2$.

iii) Precisamos mostrar que a fórmula é verdadeira para um polígono convexo de $k+1$ lados.

Procedimento:

Considere um polígono convexo de $k+1$ lados. Escolha um vértice e desenhe diagonais a partir desse vértice para todos os outros vértices não adjacentes. Isso dividirá o polígono de $k+1$ lados em $k-1$ triângulos.

Pela hipótese de indução, sabemos que o número de triângulos formados ao dividir um polígono convexo de k lados é $k-2$.

Ao adicionar um novo vértice e conectar esse vértice aos outros, estamos essencialmente adicionando 1 novo triângulo para cada nova conexão feita a partir do novo vértice até o vértice base. Isso resulta em um triângulo adicional ao já existente número de triângulos no polígono de k lados.

Portanto, ao adicionar o novo vértice, a soma total dos triângulos no polígono de $k+1$ lados é:

$$T(k+1) = T(k) + 1 = (k-2) + 1 = k-1$$

Ajustando a fórmula para o número de triângulos no polígono de $k+1$ lados, temos:

$$T(k+1) = (k+1) - 2$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, mostramos que a fórmula para o número de triângulos formados ao dividir um polígono convexo de n lados é

$$T(n) = n - 2$$

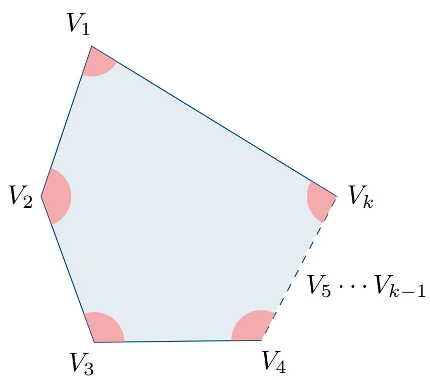
Essa fórmula é válida para qualquer $n \geq 3$. □

4.2.3 Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a

$$T(n) = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Figura 25 – Soma dos ângulos internos de um polígono convexo de k vértices



Fonte: Autor (2024)

Demonstração.

i) Para $n = 3$, o polígono é um triângulo, é a soma dois ângulos internos como já sabemos é igual a $180°$.

$$T(3) = (3-2)\cdot 180° = 1\cdot 180° = 180°$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = 3$.

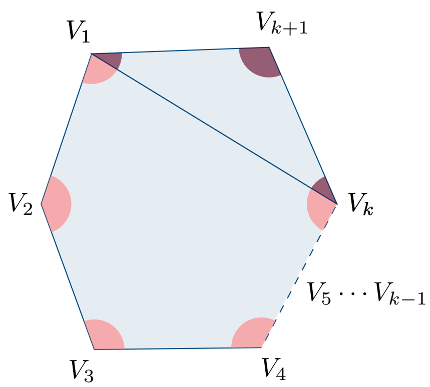
ii) Suponha que a fórmula é verdadeira para um polígono convexo de k lados. Ou seja, a soma dos ângulos internos de um polígono de k lados é igual a $T(k) = (k-2)\cdot 180°$.

iii) Precisamos mostrar que a fórmula é verdadeira para um polígono convexo de $k+1$ lados.

Procedimento:

Ao adicionar um novo vértice a um polígono convexo de k lados, desenhamos uma diagonal a partir desse novo vértice para um vértice não adjacente. Isso divide o polígono em dois polígonos menores: um triângulo e um polígono de k lados.

Figura 26 – Soma dos ângulos internos de um polígono convexo de $k+1$ vértices



Fonte: Autor (2024)

A soma dos ângulos internos do polígono de k lados é pela hipótese de indução e a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$.

Então, a soma dos ângulos internos do polígono de $k+1$ lados é a soma dos ângulos internos do polígono de k lados mais a soma dos ângulos internos do triângulo adicional:

$$T(k+1) = T(k) + 180^\circ$$
$$T(k+1) = (k-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ$$
$$T(k+1) = 180^\circ \cdot k - 360^\circ + 180^\circ$$
$$T(k+1) = 180^\circ \cdot k - 180^\circ$$
$$T(k+1) = (k-1) \cdot 180^\circ$$

Ajustando a fórmula para $n = k+1$, temos:

$$T(k+1) = [(k+1) - 2] \cdot 180^\circ$$

Portanto, a fórmula é válida para $k+1$ lados.

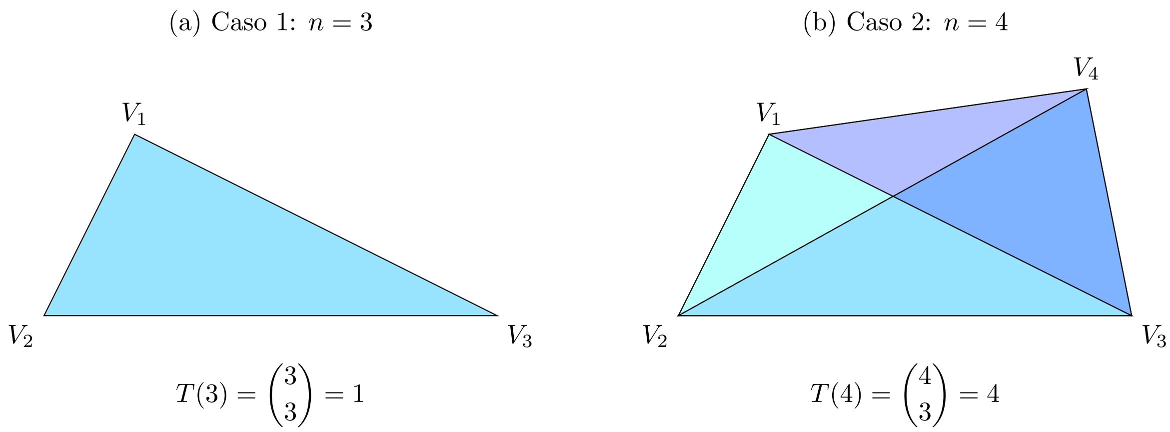
Pelo princípio da indução matemática, mostramos que a fórmula $(n-2) \cdot 180^\circ$ para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é válida para qualquer $n \geq 3$. $\square$

4.2.4 Número de triângulos formados por n pontos em um plano, onde nenhum dos três pontos são colineares

Prove que o número de triângulos formados por n pontos em um plano, onde nenhum dos três pontos são colineares é igual a

$$T(n) = \binom{n}{3} \tag{5}$$

Figura 27 – Triângulos formados por n pontos não colineares



Fonte: Autor (2024)

Demonstração.

i) Para $n = 3$, o número de triângulos formados é exatamente 1, pois todos os 3 pontos formam um único triângulo.

$$T(3) = \binom{3}{3} = 1$$

ii) Suponhamos que a fórmula 5 seja válida para o número de triângulos formados por k pontos em um ponto é:

$$T(k) = \binom{k}{3} \tag{6}$$

onde $\binom{k}{3}$ é o coeficiente binomial que representa "k escolhe 3", ou seja, o número de maneiras de escolher 3 pontos a partir de k pontos num plano, seja verdadeira.

iii) Vamos mostrar que, se a fórmula é verdadeira para k pontos, então ela também é verdadeira para $k+1$ pontos.

Procedimento:

Considere os $k+1$ pontos.

O número de triângulos que podem ser formados a partir desses $k+1$ pontos é igual ao número de triângulos formados pelos k pontos, mais o número de triângulos formados escolhendo 2 pontos dos k pontos e adicionando o novo ponto $(k+1)$.

✓ Número de triângulos formados pelos k pontos (Hipótese de Indução):

$$T(k) = \binom{k}{3} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{6}$$

✓ Número de triângulos formados escolhendo 2 pontos dos k pontos e adicionando o novo ponto:

$$\binom{k}{2} = \frac{k \cdot (k-1)}{2}$$

Então, o número total de triângulos formados por $k+1$ pontos é:

$$T(k+1) = T(k) + \binom{k}{2} = \binom{k}{3} + \binom{k}{2}$$

$$T(k+1) = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{6} + \frac{k \cdot (k-1)}{2}$$

Vamos simplificar a expressão acima. Colocando $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$ em evidência e resolvendo dentro dos parênteses, temos:

$$T(k+1) = \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot \left(\frac{k-2}{3} + 1\right)$$
$$T(k+1) = \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot \frac{(k+1)}{3}$$
$$T(k+1) = \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k-1)}{6}$$

Vemos que:

$$T(k+1) = \binom{k+1}{3}$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, mostramos que a fórmula para o número de triângulos formados por n pontos, onde nenhum três pontos são colineares, é:

$$T(n) = \binom{n}{3}$$

Essa fórmula é válida para todos os $n \geq 3$. □

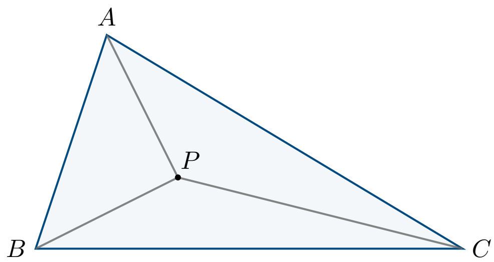
4.2.5 Relação entre a área de um polígono convexo de n lados e a área dos triângulos formados ao ligar um ponto interno P aos vértices do polígono

Prove que a soma das áreas desses triângulos é igual a área do polígono.

Demonstração.

i) Para $n = 3$, o polígono convexo é um triângulo. Se P é um ponto dentro do triângulo, ao traçar segmentos de reta de P para os três vértices do triângulo, obtemos três triângulos menores.

Figura 28 – Ponto P interno ao triângulo ABC



Fonte: Autor (2024)

Então a soma das áreas desses três triângulos menores é igual à área do triângulo original, ou seja:

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \text{Área}(\triangle ABP) + \text{Área}(\triangle ACP) + \text{Área}(\triangle BCP)$$

Este fato é facilmente observável, pois estamos apenas dividindo a área do triângulo original em três partes menores.

ii) Suponha que a relação seja verdadeira para um polígono convexo de k lados. Ou seja, se P é um ponto dentro de um polígono convexo de k lados, a soma das áreas dos triângulos formados ao conectar P aos vértices do polígono é igual à área do polígono.

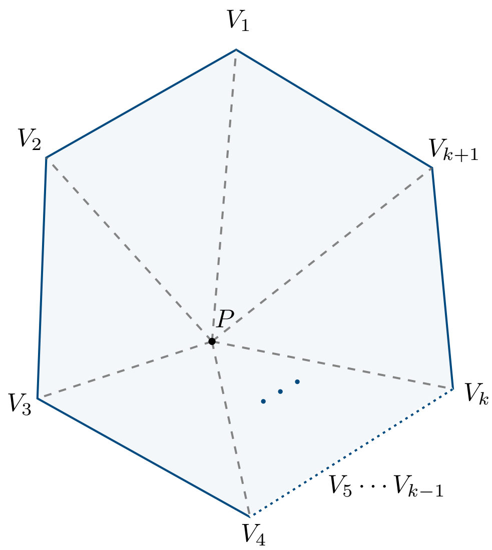
iii) Vamos mostrar que, se a fórmula é verdadeira para k pontos, então ela também é verdadeira para $k+1$ pontos.

Procedimento:

Vamos considerar um polígono convexo de $k+1$ lados, com vértices $V_1V_2\cdots V_kV_{k+1}$.

Seja P um ponto dentro desse polígono, ligando P a todos os V_{k+1} vértices do polígono, então obtemos $k+1$ triângulos.

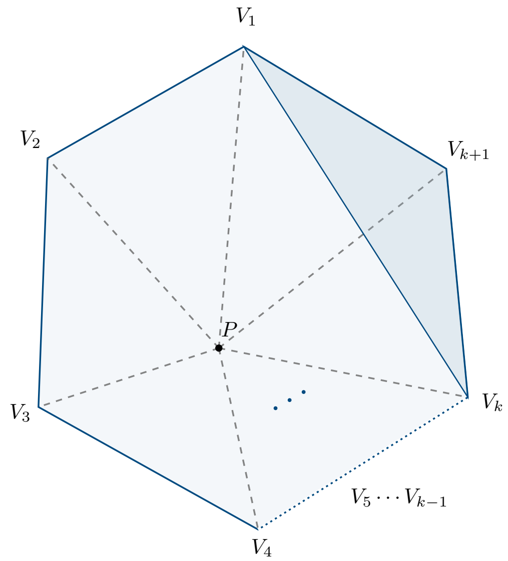
Figura 29 – Triângulo $V_1V_kV_{k+1}$ adicionado ao polígono $V_1V_2\cdots V_k$



Fonte: Autor (2024)

Dividindo o polígono de $k+1$ lados em dois, obtemos um polígono de k lados (por exemplo, formado pelos vértices $V_1V_2\cdots V_k$ e o triângulo adicional de vértices $V_1V_kV_{k+1}$.

Figura 30 – Ponto P interno ao polígono de $k+1$ lados



Fonte: Autor (2024)

Pela hipótese de indução, a soma das áreas dos triângulos formados ao conectar P aos vértices do polígono de k lados é igual à área desse polígono de k lados.

Portanto, ao adicionar o novo vértice V_{k+1}, temos um novo triângulo de vértices $V_1V_kV_{k+1}$. A soma das áreas dos triângulos formados no polígono de $k+1$ lados inclui esse novo triângulo, ou seja:

$$\text{Área do polígono de } k+1 \text{ lados} = \text{Área do polígono de } k \text{ lados} + \text{Área}(V_1V_kV_{k+1})$$

$$\text{Área}(V_1V_2\cdots V_kV_{k+1}) = \text{Área}(V_1V_2\cdots V_k) + \text{Área}(V_1V_kV_{k+1})$$

Pelo princípio da indução matemática, mostramos que a soma das áreas dos triângulos formados ao conectar um ponto interno P aos vértices de um polígono convexo de n lados é igual à área do polígono, para qualquer $n \geq 3$.

Essa relação é de extrema importância para se entender como a área de um polígono convexo pode ser decomposta em áreas menores (triângulos), e isso vale independentemente do número de lados do polígono convexo.

$\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A conclusão deste trabalho marca o encerramento de uma jornada dedicada à exploração e aplicação da indução matemática em geometria. Ao longo dos capítulos anteriores, foi possível mergulhar na história e nos fundamentos dessa poderosa técnica matemática, desde seus axiomas fundamentais até suas aplicações práticas em teoremas clássicos. Este capítulo final reúne os resultados alcançados, avalia a contribuição do estudo para a área de matemática e reflete sobre as implicações de tais descobertas.

O cerne deste trabalho reside na aplicação da indução matemática em contextos geométricos, visando não apenas demonstrar teoremas específicos, mas também destacar a relevância histórica e conceitual dessa técnica. Iniciamos nossa investigação com a formulação do problema central: como a indução matemática pode ser aplicada de maneira eficaz na geometria, ampliando nossa compreensão dos princípios matemáticos fundamentais?

Para responder a essa questão, estabelecemos objetivos claros que guiaram nossa pesquisa. Primeiramente, mergulhamos nos fundamentos da geometria. Esses conceitos básicos não apenas fundamentaram nossa análise teórica, mas também serviram como exemplos cruciais para ilustrar a aplicação prática da indução matemática.

Em seguida, exploramos a história da indução matemática, desde suas origens com Francesco Maurolico até sua formalização nos axiomas de Peano. Este estudo histórico proporcionou uma base sólida para compreendermos a evolução e a aplicação contemporânea dessa técnica.

Nosso objetivo seguinte foi aplicar diretamente a indução matemática em problemas geométricos específicos. Demonstramos como é possível utilizar o método indutivo para provar teoremas complexos. Essa aplicação não apenas reforçou a eficácia da indução matemática, mas também destacou sua versatilidade em contextos geométricos avançados.

Por fim, refletimos sobre a relevância dessas descobertas para o ensino e pesquisa em matemática. O uso da indução matemática não se limita à prova de teoremas isolados; ele também promove uma compreensão mais profunda das estruturas matemáticas e estimula o desenvolvimento de novas teorias e aplicações práticas.

Ao longo deste estudo, obtivemos resultados significativos que corroboram a eficácia e a aplicabilidade da indução matemática em geometria, a partir da análise dos teoremas provados.

À luz dos resultados obtidos, é crucial reconhecer as implicações mais amplas dessa pesquisa. A indução matemática não é apenas uma ferramenta de prova teórica; ela é um pilar fundamental para o avanço contínuo da matemática pura e aplicada. A aplicação bem-sucedida da indução em contextos geométricos reforça sua posição como uma técnica essencial para investigar e desvendar novos princípios matemáticos.

No contexto educacional, nossas descobertas têm o potencial de transformar a maneira como a geometria é ensinada e compreendida. Ao integrar exemplos concretos de aplicação da indução matemática, podemos enriquecer o currículo escolar e inspirar futuras gerações de estudantes a explorar o vasto mundo da matemática com uma abordagem rigorosa e criativa.

Este estudo não apenas consolidou o uso da indução matemática em geometria, mas também abriu novas direções para pesquisas futuras.

Por fim, a conclusão deste trabalho destaca a importância de continuar explorando e refinando técnicas matemáticas tradicionais, como a indução matemática, para enfrentar os desafios contemporâneos da ciência e da tecnologia. Através de um compromisso contínuo com a excelência acadêmica e a inovação científica, podemos garantir que a matemática continue a ser uma fonte de descobertas e soluções para os problemas mais complexos da sociedade moderna.

REFERÊNCIAS

AIRES, A. P.; CAMPOS, H.; POÇAS, R. Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6. º ano de escolaridade. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 18, n. 2, p. 151–176, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 18, p. 623–642, 2012.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. Utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de euler. **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 637–657, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>. Acesso em: 06 jul. 2024.

ARISTÓTELES. **Nichomachean Ethics**. Princeton: Princeton University Press, 1995.

BACON, F. **Novum Organum ou Verdadeiras Indicações Acerca da Interpretação da Natureza**. Pará de Minas: Virtual Books Online, 2003.

BALIEIRO FILHO, I. F. Um passeio pelo labirinto da lógica matemática em companhia de malba tahan. **Revista de Educação Matemática**, v. 15, n. 19, p. 247–264, 2018.

BARGUIL, P. M. Fiplan: recurso didático para o ensino e a aprendizagem de geometria na educação infantil e no ensino fundamental. In: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: [s.n.], 2016.

BEITES, P. B.; BRANCO, M. L. F. R.; COSTA, M. C. R. P. P. Esquemas de demonstração para proposições de álgebra linear com valor lógico verdade. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 23, n. 1, p. 37–78, 2020.

BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n. 2, p. 273–289, 2011.

BRANDÃO, A. K. D. C.; AMOULOUD, S. A. G. Os significados geométricos mobilizados por estudantes ao criarem situações-problema. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 7, n. 1, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

CARNAP, R. **Logical Foundation of Probability**. Chicago: The University of Chicago Press, 1962.

CHALMERS, A. F. **O que é ciência, afinal?** Brasília-DF: Editora Brasiliese, 1993.

COSTA, F. A. P. **A sequência Fibonacci**: uma proposta interdisciplinar no ensino da matemática. 24 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) — Universidade Federal do Ceará, Instituto UFC Virtual, Russas, 2020.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: AL., S. D. A. M. et (Ed.). **Educação Matemática: Uma Introdução**. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135–153.

DIAS, C. B.; REIS, S. B. **Construção dos números naturais a partir dos axiomas de Peano**. 53 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Papirus, 2008. p. 3–11.

FERREIRA, J. **A construção dos números**: a construção dos números. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GALVãO, R. C. S. Francis bacon: teoria, método e contribuições para a educação. **Interthesis**, v. 4, n. 2, 2007.

HEFEZ, A. **Indução Matemática**. OBMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2024.

LAUDAN, L. **El progreso y sus problemas**: Hacia una teoría del crecimiento científico. Madrid: Encuentro Ediciones, 2011.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LUCHETTA, V. O. J. **Matemática Elementar**: Lógica matemática; introdução do simbolismo matemático. São Paulo: [s.n.], 2020.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

OLIVA, A. **Filosofia da Ciência**. São Paulo: Zahar, 1990.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro-RJ: Editora Interciência, 2006.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, R. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

RAICIK, A. C.; PEDUZZI, L. O.; ANGOTTI, J. A. P. A estrutura conceitual e epistemológica de uma controvérsia científica: implicações para o ensino de ciências. **Experiências em ensino de Ciências**, v. 13, n. 1, p. 42–62, 2018.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, learning and teaching. Canada: Sense Publishers, 2010.

ROMANO, G. O.; SCHIMIGUEL, J.; FERNANDES, M. E. Uma revisão bibliográfica e pesquisa sobre livros didáticos de matemática, tecnologia e ensino de geometria no ensino fundamental e médio. **REnCiMa**, v. 10, n. 4, p. 212–226, 2015.

SALATIEL, R. A lógica de aristóteles. **Investigação Filosófica**, v. 3, n. 2, 2012.

SANTOS, A. B. C.; PEREIRA, J. C. S.; NUNES, J. M. V. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 19, n. 1, p. 81–103, 2017.

SILVA, E. S.; FERREIRA, J. A.; GOMES, L. P. S. Uma proposta de ensino de geometria plana no ensino fundamental: o jogo como instrumento no processo de ensino e aprendizagem. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 6, p. 74–84, 2016.

SILVA, F. M. D. **Sobre a Indução em Francis Bacon**. Maringá - Paraná: [s.n.], 2008. 14 p. Disponível em: <http://www.urutagua.uem.br/014/14silva_fernando.htm>. Acesso em: 10 jul. 2024.

SMITH, R. A lógica de aristóteles. **Investigação Filosófica**, v. 3, n. 2, 2012.

SOMINSKI, I. S. **Método De Indução Matemática**. São Paulo: Atual, 1996.

SOUSA, M. C. Quando professores que ensinam matemática elaboram produtos educacionais, coletivamente, no âmbito do mestrado profissional. **Bolema**, v. 27, p. 875–899, 2013.

SOUZA, J. S. Raciocínio abdutivo: investigação e produção de conhecimento matemático. In: **XX EBRAPEM – Encontro Brasileiro de estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Curitiba-PR: [s.n.], 2016.

TIMÓTEO, S. C. S. **Fundamentos de Lógica Matemática para o Ensino Médio**: um estudo aplicado em geometria plana. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas, Tocantins, 2018.

UTIMURA, G. Z.; CURI, E. Aprendizagens dos alunos no âmbito do projeto docência compartilhada e de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5º ano. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 18, n. 2, p. 1015–1037, 2016.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 21, n. 3, p. 398–418, 2019.

WRIGHT, G. H. **A Treatise of Induction and Probability**. London: Routledge and K. Pau, 1951.

ZATERKA, L. As teorias da matéria de francis bacon e robert boyle: Forma, textura e atividade. **Scientiae Zudia**, São Paulo, v. 10, n. 4, p. 681–709, 2012.

APÊNDICE A – SUGESTÃO DE ATIVIDADE

TEMA DA ATIVIDADE:

“Descobrir a Fórmula para o Número de Diagonais de um Polígono Convexo”

1. **Objetivo:**

   Os alunos irão explorar e deduzir a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo, aplicando conceitos básicos de contagem e observação de padrões.

2. **Competência Específica:**

   - **Competência 2:** “Compreender e aplicar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver problemas, desenvolver o raciocínio lógico, crítico e criativo, e comunicar-se matematicamente.”

3. **Habilidades Relacionadas:**

   - **Habilidade EM13MT01:** “Reconhecer e utilizar propriedades de figuras geométricas planas e espaciais para resolver problemas.”
   - **Habilidade EM13MT02:** “Utilizar conceitos e propriedades geométricas para resolver problemas em contextos diversos.”

4. **Material Necessário:**

   ✓ Papel quadriculado;

   ✓ Lápis e borracha;

   ✓ Régua;

   ✓ Marcadores coloridos;

   ✓ Calculadora (opcional).

5. **Passo a Passo da Atividade:**

   - **Introdução ao Conceito de Diagonais:**

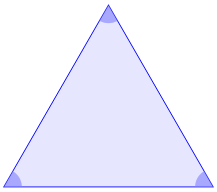
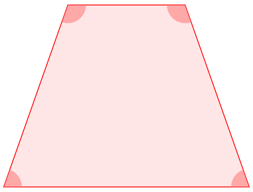
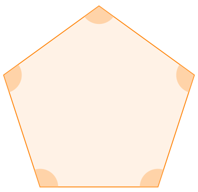
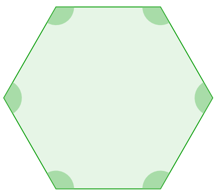
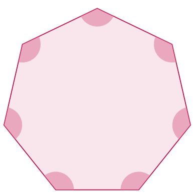
     Explique o que é uma diagonal: uma linha reta que conecta dois vértices não adjacentes de um polígono.

     Comece com exemplos simples como um triângulo, um quadrado e um pentágono. Desenhe os polígonos e peça aos alunos que identifiquem e contem as diagonais.

   - **Exploração com Polígonos Simples:**

- Triângulo (3 lados): Desenhe um triângulo e pergunte: "Quantas diagonais podemos desenhar?" Os alunos verão que um triângulo não tem diagonais.
- Quadrado (4 lados): Desenhe um quadrado e pergunte: "Quantas diagonais podemos desenhar?" (Resposta: 2 diagonais).
- Pentágono (5 lados): Desenhe um pentágono e pergunte: "Quantas diagonais podemos desenhar?" (Resposta: 5 diagonais).
- Continue com hexágono (6 lados) e heptágono (7 lados), pedindo aos alunos para contar as diagonais.

- **Identificação de Padrões:**

Polígono	**Número de lados (n)**	**Número de diagonais (D)**
Triângulo  3 lados, 3 vértices e 3 ângulos internos	3	
Quadrilátero  4 lados, 4 vértices e 4 ângulos internos	4	
Pentágono  5 lados, 5 vértices e 5 ângulos internos	5	
Hexágono  6 lados, 6 vértices e 6 ângulos internos	6	
Heptágono  7 lados, 7 vértices e 7 ângulos internos	7	
$\cdots$		

- **Peça aos alunos para observar e tentar identificar um padrão ou fórmula que relaciona o número de lados (n) ao número de diagonais (d).**

6. **Desenvolvendo a Fórmula:**

   - Oriente os alunos a pensarem no total de conexões possíveis entre os vértices de um polígono de n lados. Para cada vértice, há $n-1$ conexões possíveis (com os outros $n-1$ vértices).
   - No entanto, dessas conexões, 2 são as arestas adjacentes ao vértice, que não são diagonais.
   - Portanto, para cada vértice, há $n-3$ diagonais possíveis.
   - Explique que como cada diagonal conecta dois vértices, acabamos contando cada diagonal duas vezes. Então, a fórmula para o número total de diagonais é:

$$D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

7. **Verificação e Aplicação da Fórmula:**

   Peça aos alunos para aplicar a fórmula em diferentes polígonos (por exemplo, octógono, eneágono) para verificar se os resultados coincidem com o número real de diagonais que eles poderiam desenhar.

8. **Discussão e Reflexão:**

   Discuta como a fórmula foi derivada e como a observação de padrões levou à descoberta de uma relação geral.

   Pergunte aos alunos sobre outros tipos de padrões ou fórmulas que poderiam ser descobertos em geometria usando métodos semelhantes.

   Caso necessário, comente sobre:

   ✓ Número de triângulo formados pela divisão de um polígono convexo através de diagonais não-intersectantes.

   ✓ Soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

9. **Conclusão da Atividade:**

   Os alunos devem compreender como a contagem e a observação de padrões podem levar à descoberta de fórmulas matemáticas, além de ganharem uma compreensão prática de como as diagonais em polígonos convexos são calculadas.