Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

LEANDRO DA SILVA ALMEIDA

Recursos Didáticos e Materiais Educativos para o Ensino de Polinômios: Abordagens e Estratégias

Orientadora: Miriam del Milagro Abdón

NITERÓI
SETEMBRO/2024

LEANDRO DA SILVA ALMEIDA

Recursos Didáticos e Materiais Educativos para o Ensino de Polinômios: Abordagens e Estratégias

Dissertação apresentada por **Leandro da Silva Almeida** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Miriam del Milagro Abdón

Niterói
2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586r Silva Almeida, Leandro da
Recursos Didáticos e Materiais Educativos para o Ensino de Polinômios: Abordagens e Estratégias / Leandro da Silva Almeida. - 2024.
79 f.: il.

Orientador: Miriam del Milagro Abdón.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

1. Ensino de Matemática. 2. Álgebra. 3. Tecnologia Educacional. 4. Produção intelectual. I. Abdón, Miriam del Milagro, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

LEANDRO DA SILVA ALMEIDA

RECURSOS DIDÁTICOS E MATERIAIS EDUCATIVOS PARA O ENSINO DE POLINÔMIOS. ABORDAGENS E ESTRATÉGIAS

Dissertação apresentada por LEANDRO DA SILVA ALMEIDA ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 25/09/2024

Banca Examinadora

MAbdón

Prof. Miriam del Milagro Abdón - Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Samuel Pacitti Gentil

Prof. Samuel Pacitti Gentil - Membro
Doutor – PUC-Rio

Prof. Aldo Amilcar Bazán Pacoricona - Membro
Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI
2024

RESUMO

Os polinômios podem ser abordados tanto sob uma perspectiva analítica, ao serem considerados como funções, quanto sob uma abordagem algébrica. Em ambas as abordagens, os alunos frequentemente enfrentam dificuldades. No caso do conceito de função, por exemplo, muitos estudantes encontram desafios significativos, em grande parte devido à sua natureza abstrata e à variedade de representações possíveis. Além disso, esse conceito muitas vezes é excessivamente associado à sua expressão algébrica, o que pode gerar confusão entre o entendimento de função e de equação.

Por outro lado, na abordagem algébrica, o principal obstáculo surge na transição da Aritmética para a Álgebra. O câmbio de pensamento que se exige do aluno nesta passagem é de caráter qualitativo. A própria linguagem algébrica constitui uma barreira significativa no processo de aprendizagem. Podemos observarque existe uma correlação entre o início do estudo mais formal da Álgebra e o fracasso escolar.

Diante dessas dificuldades, a utilização de recursos complementares ao livro didático é essencial para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, proporcionando aos alunos diferentes formas de acessar e entender os conteúdos. Neste trabalho, apresentamos, de forma sucinta, outros recursos didáticos que podem ser utilizados pelo professor em sala de aula para abordar o conteúdo de polinômios de maneira mais inovadora e dinâmica, fugindo do formato tradicional e, assim, despertando o interesse dos alunos.

Palavra-chave: Polinômios, Recursos Didáticos, Algeplan.

ABSTRACT

Polynomials can be approached from both an analytical perspective, when considered as functions, and an algebraic perspective. In both approaches, students often face difficulties. Regarding the concept of function, for example, many students encounter significant challenges, largely due to its abstract nature and the variety of possible representations. Additionally, this concept is frequently associated too closely with its algebraic expression, which can lead to confusion between the understanding of a function and an equation.

On the other hand, in the algebraic approach, the main obstacle arises in the transition from Arithmetic to Algebra. The shift in thinking required of students in this transition is qualitative in nature. The very language of algebra presents a significant barrier in the learning process. It is also evident that there is a correlation between the beginning of formal algebra studies and school failure.

Given these difficulties, the use of supplementary resources in addition to the textbook is essential to enrich the teaching and learning process, offering students different ways to access and understand the content. In this work, we briefly present other didactic resources that teachers can use in the classroom to address polynomial content in a more innovative and dynamic way, moving away from the traditional format and thus sparking students' interest.

Key words: Polynomials, didactic resources, Algeplan

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha amada filha Laura.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar presente em todos os momentos da minha vida e me dado força para superar as dificuldades.

À minha amada esposa Juliana, que sempre estar ao meu lado em todos os momentos, me apoiando e incentivando.

A minha orientadora, Miriam del Milagro Abdón, pela paciência, dedicação, apoio e inúmeros ensinamentos que me foram transmitidos, tanto pessoais quanto profissionais.

A minha família e amigos que sempre me apoiaram.

A todos os professores do PROFMAT pelo conhecimento transmitido.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Trabalhando com alunos do Ensino Médio, percebemos que eles têm bastante dificuldade em entender o conceito de função, dificuldade que aumenta quando a questão é a de aplicar esses conceitos às situações da vida real. É notório que os alunos tendem a ver a Matemática como um conjunto de fórmulas e procedimentos que parecem, à primeira vista, estar desconectados do cotidiano.

O conceito de função, por exemplo, apresenta desafios significativos para muitos alunos, principalmente devido à sua natureza abstrata e à variedade de representações possíveis, como tabelas, gráficos, expressões algébricas e descrições verbais. Muitos estudantes enfrentam dificuldades em compreender a relação entre variáveis dependentes e independentes, bem como a ideia de mapeamento entre conjuntos, o que pode prejudicar o entendimento de conceitos mais avançados, como crescimento, decrescimento, máximos e mínimos. Além disso, a transição entre diferentes representações de funções como a interpretação de gráficos e sua correspondência com expressões algébricas muitas vezes não é intuitiva para os alunos, o que exige um ensino que explore essas conexões de maneira mais clara e contextualizada. Os polinômios, apesar de serem um tipo de função mais simples em certo sentido, não escapam desse destino.

Vasconcelos (2015) analisou as pesquisas publicadas nas edições do ENEM (Encontros Nacionais de Educação Matemática) de 1987 a 2013 e identificou 3 tópicos que podem ser obstáculos para a compreensão do conceito de função por parte dos alunos. São eles:

1) O prejuízo de reduzir o conceito de função a apenas alguns significados do mesmo.
2) Os prejuízos de um ensino que singulariza a exploração de técnicas e algoritmos.
3) A forma como o professor compreende o conceito de função está relacionada ao modo como o mesmo estrutura sua prática de ensino.

Segundo a autora, tentar contornar o primeiro obstáculo mencionado acima passa pela

"…necessidade de que esse conceito seja abordado por um processo que permita ao aluno uma compreensão que se inicia nos aspectos mais intuitivos como a relação, a regularidade e o movimento, para culminarem na compreensão das formas de representação, da associação de variáveis pela teoria dos conjuntos, da noção de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, por exemplo" (Vasconcelos, 2015).

O conceito de função está excessivamente vinculado com a sua expressão algébrica, o que pode induzir uma confusão entre o conceito de função e de equação. Nós mesmos já fomos indagados por alunos em sala de aula se determinada função existia, só pelo fato de não poder dar uma expressão algébrica para ela.

O terceiro obstáculo é o mais sério do nosso ponto de vista. A pesquisa mencionada acima aponta que muitas das carências e obstáculos que ocorrem estão associadas a pouca ou equivocada compreensão que o próprio professor tem do mesmo.

Pensar os polinômios a partir de um ponto de vista meramente algébrico também não parece ser a solução, já que é evidente a dificuldade que os alunos sentem na passagem da Aritmética para à Álgebra. Segundo Paloma Gavilán

"Parece haver uma tendência na forma de compreender a álgebra escolar como a parte da Matemática que trata da simbolização das relações numéricas, interpretando-a como uma aritmética generalizada. Esta abordagem tem algumas desvantagens, uma vez que a álgebra não é apenas uma generalização da aritmética: aprender álgebra é mais do que tornar explícito o que estava implícito na aritmética" (Gavilán , 2011. Tradução nossa).

Ela também aponta que a mudança de pensamento que se exige do aluno nesta passagem é de caráter qualitativo, já que os enfoques se diferenciam em termos das estratégias usadas para resolver os problemas. Observa que existe uma correlação entre o início do estudo mais formal da Álgebra e o fracasso escolar. A linguagem algébrica é um grande obstáculo na aprendizagem. Como aponta Gavilán no artigo citado anteriormente, a maior parte dos símbolos utilizados pela Álgebra já foram utilizados pela Aritmética, com o qual já têm, para os alunos, um significado que pode não corresponder exatamente com o novo significado. A autora dá dois exemplos: o símbolo "+" em Aritmética indica a ação que deve ser feita para obter um resultado numérico enquanto na Álgebra indica uma operação que nem sempre tem que ser realizada, as vezes é até impossível fazê-la por exemplo $3 + 2x$. Outro símbolo que têm significados diferentes é o "=", na Aritmética simboliza uma equivalência, enquanto na Álgebra pode referir-se a conceitos diferentes como equações, funções, fórmulas, etc.

O uso e interpretação das letras merece um parágrafo à parte, já que, segundo Küchemann (1981, citado por Gavilán, 2011) podem ser interpretadas de seis maneiras diferentes: como letras avaliadas, letras ignoradas, letras como objeto, letras como uma incógnita específica, letras generalizando números, letras como variáveis.

Segundo Fiorentin, Miguel e Miorim (1993) as dificuldades dos alunos também podem estar relacionadas com a forma abstrata com que os professores costumam ensinar o conteúdo já que em muitas das vezes é dada uma maior ênfase às transformações das expressões algébricas, e os conteúdos são, quase sempre, apresentados através de procedimentos que conduziam a uma aprendizagem mecânica.

Antes de iniciarmos uma discussão sobre os conteúdos que os alunos devem dominar, é fundamental destacar dois documentos oficiais de grande relevância: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Esses documentos orientam a organização dos currículos escolares, estabelecendo diretrizes essenciais para o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias ao longo da educação básica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi elaborada pelo Ministério da Educação (MEC) e homologada em 2017 (para Educação Infantil e Ensino Fundamental) e 2018 (para o Ensino Médio). Tem como principais objetivos os de garantir direitos de aprendizagem e orientar a elaboração dos currículos das redes de ensino e das escolas, busca assegurar que todos os estudantes tenham acesso aos mesmos direitos de aprendizagem e desenvolvimento, independentemente da região do país em que estejam.

Estabelece as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo de sua trajetória escolar. São definidas 10 competências gerais que orientam todo o Ensino Básico. Para Matemática destacamos:

- **Raciocínio lógico-matemático**: Desenvolver a capacidade de pensar de forma lógica, analisar situações, identificar padrões, formular e testar hipóteses, e resolver problemas utilizando conceitos e operações matemáticas.
- **Comunicação matemática**: Habilidade para interpretar e expressar informações matemáticas por meio de diferentes formas de representação (gráficos, tabelas, fórmulas, etc.) e para argumentar com base em princípios matemáticos.
- **Resolução de problemas**: Capacidade de aplicar conhecimentos matemáticos em diferentes contextos, utilizando estratégias variadas para resolver problemas do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.
- **Pensamento crítico e reflexivo**: Incentivar o aluno a questionar e analisar criticamente informações e situações, promovendo a autonomia intelectual e a criatividade na solução de problemas.
- **Tecnologia e cultura digital**: Utilizar ferramentas digitais e tecnologias da informação para explorar, analisar, representar e resolver problemas matemáticos, favorecendo a integração da matemática com o mundo contemporâneo.

Entre as Habilidades encontramos

- **Ensino Fundamental – Anos Finais (6º ao 9º ano)**: Aprofunda o estudo de números, operações, álgebra, geometria e estatística. Nessa etapa, os alunos são estimulados a resolver problemas mais complexos, a trabalhar com proporções, escalas, probabilidade, e a interpretar dados estatísticos.
- **Ensino Médio**: No Ensino Médio, as habilidades são ainda mais complexas e focadas em preparar o aluno para o mundo do trabalho e para a vida em sociedade. Incluem a compreensão de funções, a análise combinatória, o estudo da trigonometria, o aprofundamento em estatística e probabilidade, e o desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico mais avançado.

Podemos citar, mais precisamente, no que diz respeito ao conteúdo de funções as seguintes Habilidades:

- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Para funções afins, destacamos:

- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Finalmente, para funções quadráticas

- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são documentos elaborados pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil, que servem como orientações pedagógicas para a Educação Básica, abrangendo tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio. Eles foram desenvolvidos entre 1997 e 1998, com o objetivo de orientar as escolas e os professores na elaboração dos currículos e práticas pedagógicas, de maneira a promover a qualidade e a equidade na educação em todo o país.

Vemos que os PCN destacam a importância da contextualização e da interdisciplinaridade e citam como exemplo o conceito de função.

> O ensino isolado desse tema (função) não permite a exploração do caráter integrador que ele possui (…) As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente (…) o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia (PCN).

Finalmente afirma que cabe ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas incentivando ao aluno a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Como vimos anteriormente, a BNCC e os PCN determinam quais competências e habilidades o aluno deve adquirir ao concluir um determinado tópico, mas quais são as competências e habilidades que o professor precisa ter para ensinar esses conteúdos de maneira eficiente? Ou seja, como tornar a aprendizagem por parte dos alunos mais significativa?

É claro que a qualidade do ensino/aprendizagem depende fortemente não só do conhecimento teórico que os professores possuem, mas também da forma com que esses são transmitidos em sala de aula.

O professor deveria ser capaz de adaptar o conteúdo aos diferentes níveis escolares, fazer analogias, dar exemplos. Existe um conhecimento do conteúdo que é voltado para o ensino e que difere do conhecimento do conteúdo que outros usuários de Matemática precisam ter.

Nesta linha, Shulman (1986) divide o conhecimento inerente ao docente nas seguintes categorias:

- conhecimento específico de conteúdo;
- conhecimento pedagógico geral;
- conhecimento do currículo;
- conhecimento pedagógico do conteúdo;
- conhecimento dos alunos e de suas características;
- conhecimentos dos contextos educacionais;
- conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais.

Posteriormente Ball, Thames e Phelps (2008) propõem um Conhecimento Matemático para o Ensino (Mathematical Knowledge for Teaching MKT) ampliando algumas categorias definidas por Shulman. A diferença do referencial anterior, o MKT é específico para a Educação Matemática.

Os domínios do MKT são:

- conhecimento comum do conteúdo (Common Content Knowledge CCK);
- conhecimento especializado do conteúdo (Specialized Content Knowledge SCK);
- conhecimento do conteúdo e dos estudantes (Knowledge of Content and Students KCS);
- conhecimento do conteúdo e do ensino (Knowledge of Content and Teaching KCT);
- conhecimento do conteúdo e do currículo (Knowledge of Content and Curriculum KCC);
- conhecimento do conteúdo no horizonte (Horizon Content Knowledge HCK).

Um exemplo, citado pelos autores, que ajuda a entender essas categorias é o seguinte: saber se um número é primo ou ser capaz de multiplicar frações, por exemplo, são conhecimentos comuns de conteúdo, um tipo de conhecimento que não é exclusivo do professor de Matemática. Já o conhecimento especializado do conteúdo pode ser pensado como "o conhecimento de matemática necessário especificamente para o trabalho de ensinar e permite ao professor exemplificar, usar representações, estabelecer relações entre temas e assuntos de diferentes épocas, adaptar currículos e suas escolhas matemáticas, entre outros. Reconhecer os erros comuns e saber por que diversos alunos os cometem é um exemplo do que os autores entendem por conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Esse conhecimento possibilita ao professor antecipar as respostas, as ações dos alunos, as possíveis dificuldades para os avanços na aula de Matemática" (Lauteschlager e Ribeiro, 2017).

Vemos que esse conhecimento especializado do conteúdo que o professor deveria ter, aquele que lhe permite desenvolver os conceitos usando diferentes estratégias evitando dar ênfase à memorização de procedimentos ou de fórmulas, é fundamental para a aprendizagem dos alunos. Vários autores, entre eles Moreira e David (2005), Pires (2000), Ferreira (2014), vem colocado em evidência a desarticulação que existe, nos cursos de Licenciatura, entre as disciplinas de formação específica em Matemática e as disciplinas de cunho mais pedagógico.

"No entanto, o aprofundamento da formação em matemática, por si só, destituído do objetivo de estabelecer interações e conexões com outros componentes de saber da profissão docente, tem sido visto como insuficiente, e até mesmo inócuo, em termos de uma preparação adequada do professor para atuar em um espaço tão complexo como a sala de aula de matemática da Escola Básica" (Ferreira, 2014 citado por Lauteschlager e Ribeiro, 2017).

Cyrino (2006) salienta que a formação dos professores se centra na racionalidade técnica, dirigida para a solução de problemas. Afirma que, como os conhecimentos são vistos de forma fragmentada, o futuro professor não consegue estabelecer uma relação entre os conhecimentos acadêmicos e o conhecimento escolar.

Isso vem mudando aos poucos com a incorporação de disciplinas voltadas a instrumentalização dos conteúdos, onde se espera que os futuros professores façam a conexão tão necessária entre conteúdos acadêmicos estudados no curso de Licenciatura e a aplicação futura em sala de aula na Educação Básica.

Certamente falta aos professores ferramentas para estabelecer essa ponte entre os dois tipos de conhecimento. Mas será que os professores dominam o conteúdo comum? No artigo "O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais" de W. Rezende (2011), o autor se questiona precisamente o que os professores de matemática (não) sabem sobre o conceito de função. Ele comenta que vários autores já têm apontado para a existência de lacunas na formação de professores a respeito do assunto de função e cita os trabalhos de Even (1990 e 1998), Hitt (1998), Costa (2008).

No caso das funções os trabalhos de Even (1990, 1998) mostram que tanto os alunos de licenciatura, mesmo num estágio avançado do curso, quantos os professores, não relacionam os vários modos de representar funções. Tais dificuldades ficaram também evidentes nos trabalhos de Hitt (1998) e Costa (2008). Nos dois trabalhos mencionados é possível perceber que os professores participantes tendem a definir função como uma relação entre conjuntos e que a representação gráfica como o diagrama de setas por exemplo, é a primeira imagem que eles têm do conceito de função. Rossini (2006) analisou mapas conceituais construídos por professores e observou, uma vez mais, a predominância do contexto estático e algébrico para a interpretação do que é uma função.

Funções afins e quadráticas, exemplos bem simples de funções polinomiais, fazem parte dos conteúdos estudados na Escola Básica. Thees (2009), no seu trabalho de pós-graduação sob a orientação de Rezende, buscou entender como os professores da Educação Básica utilizam propriedades das funções afim e quadrática na resolução de problemas. O próprio Rezende realizou uma série de oficinas com professores de Matemática entre os anos de 2007 e 2008 com a intenção de mapear as dificuldades citadas anteriormente. Como mencionado por W. Rezende (2011) quatro grupos foram considerados:

- Grupo A – 25 participantes de um minicurso apresentado no 31º Encontro do Projeto Fundão (UFRJ/2007);
- Grupo B – 10 participantes de um minicurso apresentado no V Encontro Sul Fluminense de Educação Matemática (USS/2007);
- Grupo C – 14 professores-alunos que ingressaram no Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio do IME-UFF em 2008;
- Grupo D – 19 participantes de um minicurso apresentado na Primeira Jornada de Matemática da FFP-UERJ (2008).

Segundo consta no artigo, dos 68 participantes da pesquisa, 25 eram alunos de graduação em Matemática ou pós-graduação em Matemática ou em Ensino de Matemática e ainda não atuavam como professor; 41 participantes atuam como professores de Matemática, sendo que 80% destes atuavam no Ensino Médio, graduação ou pós-graduação.

Com o objetivo de investigar o conhecimento do professor a respeito do comportamento variacional das funções afim e quadrática, os participantes tiveram que resolver uma lista de quatro problemas.

O resultado obtido, segundo o pesquisador, foi desanimador já que as repostas incorretas corresponderam a 43%, as respostas em branco a 19%, as não finalizadas 3% e as resoluções incongruentes 3%, o que totaliza mais de dois terços do total de respostas analisadas.

O índice de respostas corretas varia bastante com a questão: 77% dos participantes resolveram corretamente a primeira questão, essa porcentagem cai para 47% no caso da terceira questão. Só um participante respondeu corretamente à segunda questão.

A quarta questão merece um estudo à parte. Nenhum participante respondeu corretamente. Das respostas incorretas, em 73% das soluções apresentadas o participante utilizou uma regra de três simples entre Δn (variação do número de voltas) e Δt (variação do tempo). Cabe destacar ainda que os outros tipos de resoluções incorretas os participantes utilizaram propriedades da função afim ou linear.

O autor se questiona por que prevalece o modelo linear ou afim nas respostas dadas pelos professores que participaram da pesquisa? Por que os professores de matemática não usam outros modelos em suas resoluções? Por que eles situam o problema no universo algébrico, onde o mecanismo conhecido como “regra de três” é a chave para solução do problema? Conclui observando que o comportamento variacional da função quadrática, ou mesmo de outras funções elementares usualmente ensinadas na Educação Básica, não é levado em consideração e que a função que modela o problema, nem sequer é mencionada na maioria das respostas. Pior ainda: a função permanece camuflada nos mecanismos algébricos (onde a regra de três é um deles) que utilizam para resolver a questão.

Atividade 1 – Fonte: (Botelho, 2005. p.46) – A tabela abaixo mostra a variação de posição de um trem em movimento uniforme que passava no quilômetro 40 de uma ferrovia quando o movimento começou a ser observado (t = 0). Depois de quanto tempo após o início da viagem, o trem passou pelo quilômetro 120 da ferrovia?

Tempo (horas)	0	1	2	3	4
Espaço (km)	40	70	100	130	160

Atividade 2 – Fonte: (Botelho, 2005. p.49) – Um estudante anotou a posição de um móvel em movimento uniformemente variável ao longo do tempo e obteve a seguinte tabela:

Tempo (s)	0	10	20	30	40	50
Posição (cm)	17	45	81	125	177	237

Calcular a posição do móvel nos instantes 5s e 35s.

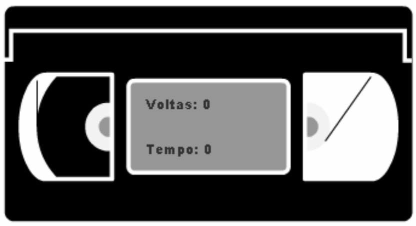
Atividade 3 – Fonte: (Lima et al, 2001, p.103) – Uma escala N de temperatura foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

°C	**°N**
18°	0°
43°	100°

Em que temperatura ferve a água na escala N ?

Atividade 4 – Fonte: (Lima et al, 2001, p.150) – Uma pessoa possui um gravador de vídeo dotado de um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita, de 6 horas de duração, está parcialmente gravada. O contador indica 1750 ao final do trecho gravado e 1900 ao final da fita. Medindo o tempo de gravação correspondente às primeiras 100, 200, 300 e 400 voltas, foram encontrados os dados abaixo:

Volta	**Tempo (s)**
100	555
200	1176
300	1863
400	2616



Quanto tempo resta de gravação na fita?

Na mesma linha e no caso específico de polinômios, Lauteschlager e Ribeiro (2017) relatam o resultado de uma pesquisa realizada com professores para investigar o conhecimento matemático para o ensino de polinômios na Educação Básica. Participaram 10 professores licenciados em Matemática que atuam ou atuaram no Ensino Fundamental ou Médio. Três tinham mestrado e outros 4 tinham feito uma pós-graduação Lato Sensu.

A metodologia desta pesquisa qualitativa foi a seguinte

- No primeiro encontro solicitaram que os professores elaborassem uma sequência didática para o ensino de polinômios na Educação Básica seguindo um roteiro previamente disponibilizado. Tal roteiro foi concebido usando os domínios de Ball et als (2008).
- A segunda etapa consistiu em 8 encontros onde foram discutidos assuntos ligados ao conteúdo matemático (ensino dos números inteiros, o anel de polinômios, etc). Também foram abordadas as dificuldades dos alunos no estudo de Álgebra assim como tendências em Educação Matemática.
- Na terceira etapa, nono encontro, solicitaram que os professores elaborassem novamente a sequência didática.

Ao analisar as sequências didáticas propostas inicialmente, os pesquisadores constataram que

- Os professores têm dificuldades em estabelecer conexões entre os conteúdos da Álgebra abordada no final do Fundamental II e o Ensino Médio. Apesar dos professores estarem cientes que os conceitos estudados na sequência didática poderão ser estudados posteriormente em outros níveis, não souberam especificar de que maneira.
- Relacionam sempre o tema polinômios ao cálculo de perímetros e áreas nas aulas elaboradas.
- Uso exagerado de técnicas ou procedimentos nas soluções dos problemas propostos.
- A maioria optou por começar definindo monômios.

- Os conceitos de raiz do polinômio, fatoração ou polinômios irredutíveis, não foram abordados em nenhum plano de aula.

Citando os autores da pesquisa, destacamos que

> "A abordagem do conceito de polinômio sob diferentes perspectivas, como seu uso em atividades para modelar diferentes situações intra e extra matemática (por exemplo, no mercado de ações, para descrever a trajetória de um projétil, entre outras) poderia possibilitar uma compreensão, por parte dos estudantes, que rompesse com a simples manipulação de métodos e técnicas. No entanto, nenhum dos professores proporcionou atividades desse tipo, seja individualmente, seja em grupos, propiciando ao educando ser protagonista na realização de uma tarefa de investigação" (Lauteschlager; Ribeiro , 2017).

A formação continuada que se seguiu depois dessa primeira etapa, quatro, dos dez professores participantes, mantiveram os planos de aula iniciais. Os que mudaram incluíram algum recurso didático. Quatro usaram o jogo "Jogando com Álgebra" e outro acrescentou atividades manipulavas para o cálculo de áreas usando figuras em cartolina.

Os autores concluem que

> "Observamos que os professores possuem um conhecimento matemático para o ensino de polinômios intimamente relacionado a aspectos procedimentais e, muitas vezes, desprovido de significados [...] Com relação às sequências didáticas, percebemos ali a concepção de aprendizagem como um processo que envolve meramente a atenção, a memorização, a fixação de conteúdos e o treino procedimental por meio de exercícios mecânicos e repetitivos. Há necessidade de mudar essa visão para uma aprendizagem que possibilite o desenvolvimento do conhecimento procedural e também o conceitual. Indicamos o trabalho com outras áreas do conhecimento e a modelagem matemática como uma alternativa para o ensino dos polinômios" (Lauteschlager; Ribeiro, 2017).

O fato que mais chamou nossa atenção no artigo, além do uso modesto ou por vezes inexistente de outros recursos pedagógicos (a maioria citou como recursos a serem utilizados giz, louça e livro didático) e de que as aplicações propostas estarem sempre voltadas para o cálculo de perímetro e área, foi o seguinte comentário que pode passar desapercebido no texto: "Causou-nos certa estranheza que oito dos dez professores investigados na pesquisa não foram capazes de identificar, em uma lista de expressões matemáticas, quais delas eram ou não polinômios. Entendemos que uma condição necessária para o ensino dos polinômios é que o professor consiga identificar o que é um polinômio. Afinal, como se pode ensinar algo que se desconhece?” (Lauteschlager; Ribeiro, 2017)

Fazemos nossas as palavras finais: como se pode ensinar algo que se desconhece?

Como a própria pesquisa mostrou, os professores tendem a organizar suas aulas tendo como base o livro didático adotado. Esse fato foi confirmado com os dados do Censo Escolar 2017: mais de **80%** dos professores da rede pública ainda utilizam esse recurso em sala pelo menos uma vez por semana. Num país como o nosso, onde o acesso a outros recursos por parte dos professores é tão desigual, o livro didático é imprescindível, sendo, muitas vezes, a única referência bibliográfica que à qual os docentes e os discentes têm acesso.

O livro didático serve não só como apoio, possibilitando uma organização e sistematização na abordagem dos conteúdos, mas também é uma garantia mínima de que as habilidades exigidas em cada nível de ensino serão atingidas.

O próprio PCN destaca a importância do livro didático, mas também recomenda que o professor use outros recursos:

"O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento” (PCN)

Reconhecemos a importância do livro em sala de aula. A nossa crítica é a de que ele não pode ser transformado em uma muleta. Pegando emprestada a crítica de Silva

“Costumo ainda mostrar que esse apego cego ou inocente a livros didáticos pode significar uma perda crescente de autonomia por parte dos professores” e ainda complementa dizendo: "Resulta desse lamentável fenômeno uma inversão ou confusão de papéis nos processos de ensino-aprendizagem, isto é, ao invés de interagir com o professor, tendo como horizonte a (re)produção do conhecimento, os alunos, por imposição de circunstâncias, processam redundantemente as lições inscritas no livro didático adotado” (Silva, 1996).

Um bom livro didático precisa de um docente qualificado que saiba como utilizá-lo adequadamente em sala de aula, o professor tem um papel central no processo de ensino-aprendizagem: ”Um professor atuante, pensante e reflexivo é capaz de desenvolver um bom trabalho, independente dos recursos que tem à disposição, já que sua capacidade de análise crítica leva-o a suprir deficiências que porventura o livro possa apresentar” (Castro Barreto; Góes Monteiro 2008).

A utilização de recursos complementares ao livro didático é essencial para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e atender às diversas necessidades dos alunos. Enquanto o livro didático oferece, como vimos anteriormente, uma base estruturada e sequencial de conteúdos, outros recursos pedagógicos têm o potencial de ampliar as formas de compreensão e engajamento dos estudantes.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos uma análise dos polinômios sob uma perspectiva estritamente matemática. No segundo capítulo descrevemos brevemente outros recursos que podem ser utilizados pelo professor em sala de aula para abordar o conteúdo de maneira inovadora, fugindo do formato tradicional e, assim, despertando o interesse dos alunos. Concluímos o trabalho com algumas considerações finais. No Apêndice, sugerimos atividades que podem ser implementadas em sala de aula usando o Algeplan.

1. O ANEL DE POLINÔMIOS

Neste capítulo, examinaremos o estudo dos polinômios sob uma perspectiva estritamente matemática. A seleção dos tópicos abordados foi fruto de uma escolha deliberada e pessoal.

Para os leitores que tiverem interesse em se aventurar mais no universo dos polinômios, recomendamos consultar o livro de Hefez e Villela (2012).

O que é um polinômio? Podemos pensar um polinômio com coeficientes em A desde um ponto de vista mais analítico, como uma função $f : A \to A$ ou como uma certa expressão algébrica. Aqui vamos adotar um ponto de vista algébrico.

Antes de definir formalmente o que é um polinômio, precisamos introduzir o conceito de anel. Seja A é um conjunto não-vazio munido de duas operações (binárias) que chamaremos de adição ou soma (denotada pelo símbolo +) e de multiplicação ou produto (denotada pelo símbolo ·)

Do ponto de vista formal temos que

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (a, b) &\rightsquigarrow a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ (a, b) &\rightsquigarrow a \cdot b \end{aligned}$$

Dizemos que $A = (A, +, \cdot)$ é um anel se as operações de adição e multiplicação satisfazem as seis propriedades:

- Propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a \;\; \forall a, b \in A$.
- Propriedade associativa da adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in A$.

- Existência do elemento neutro aditivo: Existe (um único) elemento $0 \in A$ tal que $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in A$.
- Existência do simétrico: Dado $a \in A$, existe (um único) $b \in A$, tal que $a + b = b + a = 0$, nesse caso denotaremos o simétrico por $-a$
- Propriedade associativa da multiplicação: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $\forall a, b, c \in A$.
- Propriedade distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in A$

As operações do anel A podem satisfazer a outras propriedades, como por exemplo:

- Propriedade comutativa da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in A$, nesse caso o anel A é dito ser um anel comutativo.
- Existência do elemento neutro multiplicativo: Existe (um único) elemento $1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in A$, o anel será dito com unidade.

Na Educação Básica o anel A considerado será ou o anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$, ou anel dos números racionais $\mathbb{Q}$, ou o anel dos números reais $\mathbb{R}$. Todos esses anéis satisfazem as seis propriedades e também as duas propriedades adicionais, ou seja $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ são anéis comutativos com unidade. Mais ainda, a multiplicação de números racionais, ou reais satisfaz uma condição extra:

- Existência do inverso multiplicativo: Dado $a \in A$, não nulo, existe $b \in A$ tal que tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. O elemento b é chamado de inverso de a e será denotado por a^{-1}.

Um anel comutativo com unidade tal que todo elemento não-nulo tem inverso é dito um corpo. Assim $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são corpos.

Para definirmos formalmente o que é um polinômio, alem do anel A, precisamos de um símbolo x que não pertence a A e será chamado de indeterminada sobre A. Um polinômio f(x) é uma expressão com coeficientes em A, é uma expressão formal do tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_j \in A$ para $0 \leq j \leq n$.

Para $0 \leq j \leq n$, os elementos a_j são chamados de coeficientes do polinômio, as parcelas $a_j x^j$ de termos (ou monômio de grau j se $a_j \neq 0$). O coeficiente a_0 é chamado de coeficiente constante.

O polinômio nulo é o polinômio em que todos os coeficientes são iguais a zero. Se $f(x)$ é um polinômio não-nulo, definimos o grau do polinômio como

$$gr(f(x)) = max\{j; a_j \neq 0\} .$$

O coeficiente líder de um polinômio não-nulo é o coeficiente que acompanha o termo de maior grau. O polinômio é mônico quando o coeficiente líder for igual a 1.

O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em A será denotado por $A[x]$.

Exemplos:

- $f(x) = 3x^5 - 12x^3 + 2x^2 - 5$ é um polinômio de grau 5 definido sobre (com coeficiente em) $\mathbb{Z}$.
- $f(x) = 5 + 10x^3 + \sqrt{3}x^8 + 4x^4 + x^2 - \pi x$ é um polinômio de grau 8 definido sobre (com coeficiente em) $\mathbb{R}$.

As operações adição e multiplicação de A, nos permitem definir operações de adição e multiplicação em A[x].

- Adição de polinômios:

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ em A[x]. Definimos a adição desses polinômios como

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j) x^j = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

onde $c_j = a_j + b_j$ para $0 \leq j \leq n$.

O polinômio $f(x) + g(x)$ é chamado polinômio soma.

- Multiplicação de polinômios

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ em A[x].

Definimos a multiplicação desse polinômios como o polinômio

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j \text{ onde}$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\
c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\
c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\
&\vdots \\
c_k &= a_k \cdot b_0 + a_{k-1} \cdot b_1 + a_{k-2} \cdot b_2 + \cdots + a_1 \cdot b_{k-1} + a_0 \cdot b_k \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_n \cdot b_m
\end{aligned}$$

O polinômio $f(x) \cdot g(x)$ é chamado polinômio produto.

Exemplos:

- Considere $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ dados por

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6,$$

então o polinômio soma será

$$f(x) + g(x) = (\sqrt{2} + 1)x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{11}{2}$$

- Considere $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dados por

$f(a) = -2x^3 + 4x - 7 \quad$ e $\quad g(x) = 5x^2 + 3x - 1$, o polinômio produto será

$$f(x) \cdot g(x) = -10x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 23x^2 - 25x + 7$$

Como consequência das definições apresentadas e do fato de que as operações em satisfazem as propriedades mencionadas no início do capítulo, conclui-se que as operações de adição e multiplicação de polinômios também obedecem a essas mesmas propriedades, o que confere ao conjunto A[x] uma estrutura de anel. Mais precisamente, temos que:

- Propriedade comutativa da adição: temos que $f(x) + g(x) = f(x) + g(x)$, $\forall f(x), g(x) \in A[x]$.
- Propriedade associativa da adição: $f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big) = h(x)$ $\forall f(x), g(x), h(x) \in A[x]$.
- Existência do elemento neutro aditivo: Existe (um único) elemento $0 \in A[x]$ tal que $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x) \quad \forall f(x) \in A[x]$. Neste caso o elemento neutro da adição será o polinômio nulo.

- Existência do simétrico: Dado $f(x) \in A[x]$, existe (um único) $g(x) \in A[x]$, tal que $f(x) + g(x) = f(x) + g(x) = 0$, nesse caso denotaremos o simétrico por $-f(x)$.
- Propriedade associativa da multiplicação:

$f(x) \cdot \left(g(x) \cdot h(x)\right) = \left(f(x) \cdot g(x)\right) \cdot h(x)\ \forall f(x), g(x), h(x) \in A[x]$

- Propriedade distributiva: $f(x) \cdot \left(g(x) + h(x)\right) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$ $\forall f(x), g(x), h(x) \in A[x]$.

Se o A for um anel comutativo, teremos que A[x] também será comutativo. Se A for um anel com unidade, então o polinômio constante igual a 1, será o elemento neutro del produto de A[x], ou seja, A[x] será também um anel com unidade.

Sabemos que no anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$, é possível dividir um número por outro número desde que o divisor não seja zero, admitindo a existência de um resto. Em outras palavras, dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = b \cdot q + r$ com $0 \leq r < |b|$. Dizemos que q é o quociente e r é o resto da divisão de a por b. Observe que a unicidade é uma consequência de pedir que o resto seja "pequeno".

É natural questionar se esse conceito pode ser estendido ao contexto do anel de polinômios A[x]. Antes de tratar diretamente o problema, é fundamental introduzir alguns conceitos preliminares como o conceito de múltiplo e divisor no anel de polinômios.

Sejam $f(x), g(x) \in A[x]$, dizemos que $f(x)$ é múltiplo de $g(x)$ quando existe $h(x) \in A[x]$ tal que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Quando $g(x) \neq 0$, dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$. Se o anel A é um domínio (ou seja se $\forall a, b \in A$ com $a, b = \neq 0$ então $a \cdot b \neq 0$) temos que $gr(f(x) = gr(g(x)) + gr(h(x)) \geq gr(g(x))$. Observe que, como os anéis e corpos estudados na Educação Básica $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ são domínios, sempre teremos que, se $g(x)$ divide $f(x)$ então, $gr(g(x)) \leq gr(f(x))$.

Agora já podemos definir a divisão euclidiana em A[x].

Sejam $f(x), g(x) \in A[x]$, com $g(x) \neq 0$ e coeficiente líder invertível em A. Então existem $q(x), r(x) \in A[x]$ tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou

$gr(r(x)) < gr(g(x))$. Mais ainda, os polinômios $q(x), r(x)$ são unicamente determinados.

A demonstração é feita por indução no grau de $f(x)$ se $f(x) \neq 0$. O caso em que $f(x) = 0$ é trivial já que nesse caso basta tomar $q(x) = r(x) = 0$.

Seguindo as notações do caso dos números inteiros, chamamos

- $f(x)$ de dividendo
- $g(x)$ de divisor
- $q(x)$ de quociente
- $r(x)$ de resto

Para determinar o quociente e o resto o processo é do tipo "armar e efetuar" onde pode-se observar que a determinação do monômio de maior grau do quociente depende unicamente dos monômios de maior grau do dividendo e do divisor. O procedimento ficará mais claro no seguinte exemplo.

Vamos realizar a divisão de $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3$ por $g(x) = x^2 + 3x + 1$ em $\mathbb{Z}[x]$.

(1) O monômio de maior grau de $f(x)$ é $3x^4$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $3x^4$ por x^2 é $q_1(x) = 3x^2$.

(2) Fazemos o cálculo:

$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3) - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 = -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & \; x^2 + 3x + 1 \\ \cline{11-11}
- & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & \; 3x^2 \\ \cline{1-10}
 & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 &
\end{array}
$$

(3) Como $3 = \mathrm{grau}(r_1(x)) > \mathrm{grau}(g(x)) = 2$ devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

(4) O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $-4x^3$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $-4x^3$ por x^2 é $q_2(x) = -4x$.

(5) Fazemos o cálculo:

$r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = (-4x^3 - 2x^2 + 2x - 3) + 4x^3 + 12x^2 + 4x = 10x^2 + 6x - 3.$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrrr}
 & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & x^2 & + & 3x & + & 1 \\ \cline{11-15}
- & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & 3x^2 & - & 4x & & \\ \cline{1-10}
 & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 & & & & & \\
 & & & 4x^3 & + & 12x^2 & + & 4x & & & & & & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & 10x^2 & + & 6x & - & 3 & & & & &
\end{array}
$$

(6) Como $2 = \text{grau}(r_2(x)) = \text{grau}(g(x)) = 2$, podemos continuar, calculando a divisão de $r_2(x)$ por $g(x)$, pois $r_2(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

(7) O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é $10x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $10x^2$ por x^2 é $q_3(x) = 10$.

(8) Fazemos o cálculo:

$r_3(x) = r_2(x) - q_3(x)g(x) = (10x^2 + 6x - 3) - 10x^2 - 30x - 10 = -24x - 13.$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrrr}
 & 3x^4 & + & 5x^3 & + & x^2 & + & 2x & - & 3 & x^2 & + & 3x & + & 1 \\ \cline{11-15}
- & 3x^4 & - & 9x^3 & - & 3x^2 & & & & & 3x^2 & - & 4x & + & 10 \\ \cline{1-10}
 & & - & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & - & 3 & & & & & \\
 & & & 4x^3 & + & 12x^2 & + & 4x & & & & & & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & 10x^2 & + & 6x & - & 3 & & & & & \\
 & & & & - & 10x^2 & - & 30x & - & 10 & & & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & - & 24x & - & 13 & & & & &
\end{array}
$$

(9) Como $1 = \text{grau}(r_3(x)) < \text{grau}(g(x)) = 2$, terminamos o algoritmo, pois $r_3(x)$ é o resto da divisão euclidiana.

(10) Obtemos

$q(x) = 3x^2 - 4x + 10 = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$ e $r(x) = r_3(x) = -24x - 13$.

No caso em que $gr(g(x)) = 1$, os coeficientes de $q(x)$ e de $r(x)$ podem ser calculados pelo algoritmo de Briot-Ruffini.

Suponhamos que $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e $g(x) = x - \beta$. O algoritmo consiste na elaboração de uma tabela, onde os coeficientes procurados são calculados recursivamente. A tabela tem duas linhas e é montada como segue:

β	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	$a_n = q_{n-1}$	q_{n-2}	$\cdots$	q_1	q_0	r

Onde $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1x + q_0$ e $r(x) = r$. Os coeficientes são calculados recursivamente:

$$\begin{cases} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} = a_{n-1} + \beta q_{n-1} \\ q_{n-3} = a_{n-2} + \beta q_{n-2} \\ \vdots \\ q_1 = a_2 + \beta q_2 \\ q_0 = a_1 + \beta q_1 \\ r = a_0 + \beta q_0 \end{cases}$$

Vamos ilustrar o procedimento no exemplo: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ e $g(x) = x + 3$.

-3	**1**	**-2**	**0**	**3**
	1	$-2 + (-3) \cdot 1 = -5$	$0 + (-5)(-3) = 15$	$3 + (-3) \cdot 15 = -42$

Temos então que $q(x) = 1x^2 - 5x + 15$ e $r(x) = -42$.

Dado $f(x) \in A[x], f(x) \neq 0$, dizemos que $\beta \in A$ é uma raiz de $f(x)$ se $f(\beta) = 0$, mais precisamente se:

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, então

$$f(\beta) = a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 = 0.$$

Observe que se β é raiz de $f(x)$ então $x-\beta$ divide $f(x)$. Como consequência temos que um polinômio de grau $n \geq 1$ tem no máximo n raízes em A.

Dado um polinômio não-constante com coeficientes no anel A, o problema de determinar se tem raízes e quantas raízes em A não é simples.

Se $A = \mathbb{C}$, o corpo dos números complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra afirma que o polinômio terá n raízes complexas. No caso em que $A = \mathbb{R}$, temos que se o grau de $f(x)$ for ímpar, então o polinômio terá pelo menos uma raiz real. Já para $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ é possível construir polinômios de grau arbitrário sem raízes no anel A.

Fórmulas para o cálculo de raízes são raras. Se $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio de grau 2, a fórmula de Bhaskara determina as raízes de $f(x)$. Se o grau de $f(x)$ for 3 ou 4, ainda existem fórmulas que envolvem radicais que nos permitem calcular as raízes. É possível mostrar que não existe uma fórmula envolvendo radicais que determine as raízes de um polinômio qualquer de grau maior ou igual a 5.

Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as raízes do polinômio, então existem podemos estabelecer relações entre os coeficientes e as raízes. Observe que, neste caso, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ &= a_n\Big(x^n - s_1(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + (-1)^{n-1}s_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) + \\ &\quad +(-1)^n s_n(x_1,\ldots,x_n)\Big) \end{aligned}$$

onde s_i está definido por

$$s_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + \cdots + x_n$$
$$s_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1<j_2} x_{j_1}x_{j_2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$
$$\vdots$$
$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 \cdots x_n$$

Após estender as definições de divisor e múltiplo para o anel de polinômios A[x], é possível definir mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc) de polinômios de forma análoga ao que ocorre em $\mathbb{Z}$.

Também podemos estender o conceito de número primo e definir o seu equivalente em A[x], os polinômios irredutíveis.

Como no caso do anel dos inteiros, onde um número natural diferente $n \geq 2$ pode ser fatorado de maneira única como um produto de números primos, para polinômios com coeficientes num corpo K temos que se $f(x) \in K[x]$ é um polinômio não-constante, então existem polinômios mônicos irredutíveis distintos $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in K[x]$, $a \in K \setminus \{0\}$ e números naturais $n_1, \ldots, n_s$ tais que

$$f(x) = ap_1(x)^{n_1} \cdots p_s(x)^{n_s}$$

a fatoração é única a menos da ordem dos fatores.

Vemos que os polinômios irredutíveis tem um papel fundamental no anel de polinômios K[x]. No caso em que $K = \mathbb{R}$, pode-se mostrar que existem dois tipos de polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$

- Polinômios de grau 1
- Polinômios de grau 2 sem raízes reais.

No caso em que $K = \mathbb{Q}$, é possível mostrar que existem polinômios irredutíveis de qualquer grau. Determinar quando um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ de grau maior ou igual a 2, sem raízes, é irredutível é um problema interessante.

2. RECURSOS EDUCACIONAIS PARA ALÉM DO LIVRO DIDÁTICO

As dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem da Matemática são conhecidas por todos, o que leva o professor a repensar sua aula buscando alcançar um resultado mais satisfatório. Fiorentini e Miorim (1993) apontam a participação crescente de professores nos encontros da área de Educação Matemática, sempre à procura por algum material didático que possa trazer uma solução para o problema que enfrentam.

"São nestes eventos que percebemos o grande interesse dos professores pelos materiais didáticos e pelos jogos. As atividades programadas que discutem questões relativas a esse tema são as mais procuradas. As salas ficam repletas e os professores ficam maravilhados diante de um novo material ou de um jogo desconhecido. Parecem encontrar nos materiais a solução - a fórmula mágica- para os problemas que enfrentam no dia-a-dia da sala de aula.” (Fiorentini; Miorim, 1993).

Observam que nem sempre este mesmo professor tem clareza do porquê esses materiais são importantes nem sabem o momento em que devem ser usados.

"Geralmente costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo caráter "motivador" ou pelo fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática” (Fiorentini; Miorim, 1993).

Atualmente, há uma ampla variedade de materiais concretos à disposição dos professores, cada um fundamentado por uma proposta pedagógica específica. Esse avanço só foi possível graças ao desenvolvimento da psicologia educacional e às discussões aprofundadas sobre o papel da educação no processo de aprendizagem. Esses recursos, aliados às teorias pedagógicas, visam proporcionar experiências de ensino mais eficazes e centradas nas necessidades dos alunos.

Antes do século XVII, a criança era considerada um adulto em miniatura e se considerava que sua capacidade de assimilação era equiparável com a do adulto. O ensino na época era feito através da transmissão de conhecimentos e a aprendizagem era passiva. Limitava-se a memorização de fórmulas e procedimentos. Seria bem próximo ao que hoje chamamos de ensino tradicional.

Já no século XVIII, Rousseau defende que a Educação é um processo natural do desenvolvimento da criança valorizando os jogos e as atividades manuais. Às vezes, priorizando o interesse, a criatividade e o processo de aprendizagem em detrimento dos conteúdos. Nessa mesma linha, podemos citar o trabalho de Pestalozzi e Froebel, considerados os pioneiros da “escola ativa”.

Posteriormente, já no final do século XIX, Montessori inspirada no trabalho de Pestalozzi, desenvolveu vários materiais manipulativos destinados a aprendizagem de Matemática. Até hoje usamos nas salas de aulas alguns materiais criados por ela, com por exemplo o "Material Dourado”.

No século XX, a aprendizagem matemática foi amplamente influenciada por várias teorias pedagógicas que buscavam compreender como os alunos desenvolvem suas habilidades matemáticas e como o ensino dessa disciplina poderia ser mais eficaz. Essas teorias incorporaram ideias de psicologia, educação e, em alguns casos, até de filosofia, para abordar o desenvolvimento do pensamento matemático. Muitos foram os responsáveis por esse câmbio na forma de pensar o ensino, desta vez centrado no aluno. Entre eles podemos mencionar Piaget e a Teoria do Desenvolvimento Cognitivo, Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal, Ausbel e a Teoria da Aprendizagem Significativa, Vergnaud e a Teoria dos Campos Conceituais, entre outros.

O modelo de escola tradicional, cujo foco era a transmissão de conhecimentos do professor para o aluno de forma hierárquica e centralizada, sendo que o professor era o detentor do conhecimento e e o aluno um mero receptor passivo deste conhecimento, foi perdendo espaço. Hoje os próprios documentos oficiais reconhecem a importância de que o processo de aprendizagem seja centrado no aluno:

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos. (PCN).

Considerando a relevância do uso de recursos didáticos diversificados no ensino de matemática, elaboramos este capítulo como um guia introdutório que apresenta alguns recursos aplicáveis ao ensino de polinômios. Nosso objetivo não é explorar detalhadamente cada um deles, mas sim fornecer uma lista de possibilidades que podem ser incorporadas à prática pedagógica. Vale destacar que a seleção dos recursos aqui mencionados reflete escolhas pessoais e não pretende constituir uma lista exaustiva. A intenção é oferecer sugestões que possam complementar o ensino tradicional, contribuindo para uma abordagem mais dinâmica e eficaz na aprendizagem de polinômios.

2.1. Algeplan

Como mencionamos anteriormente, a linguagem simbólica da Álgebra cria uma barreira para o entendimento da mesma. Essa dificuldade se manifesta, por exemplo, quando o aluno deve fazer operações com polinômios.

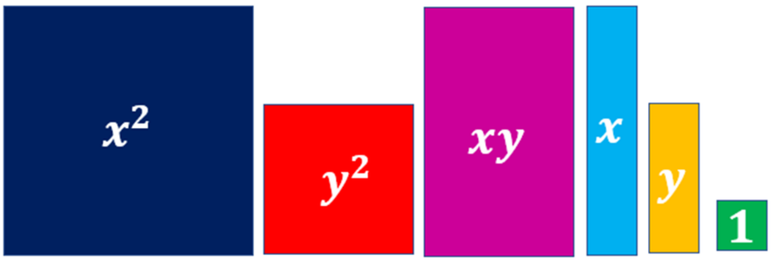
O Algeplan é um material didático manipulável que pode ser usado para trabalhar adição, multiplicação de polinômios e até produtos notáveis. Combinando peças físicas com atividades práticas, o Algeplan tem desempenhado um papel significativo na educação matemática, facilitando a compreensão de conceitos abstratos de forma concreta e visual.

O desenvolvimento do Algeplan está inserido em um contexto educacional que valoriza o uso de materiais concretos como facilitadores da aprendizagem. Inspirado em abordagens pedagógicas que enfatizam a aprendizagem ativa e a construção do conhecimento por meio da manipulação de objetos, o Algeplan segue a linha de outros materiais manipulativos, como blocos lógicos e ábacos, mas focado especificamente na Álgebra.

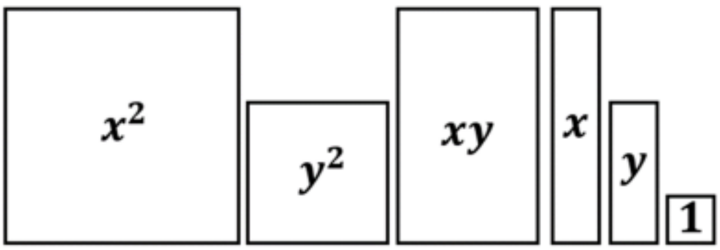
Os alunos podem montar e desmontar equações, manipulando as peças para simplificar expressões ou resolver problemas algébricos. Por exemplo, para resolver uma equação como $3x+2$ os alunos podem utilizar as peças para "montar" a equação em um tabuleiro, e depois realizar operações que correspondam à subtração e divisão necessárias para encontrar o valor de *x.* Esse processo torna visível o que, em outros métodos, seria tratado de forma puramente simbólica.

O Algeplan foi apresentado pela primeira vez em 1994, em um encontro de Psicologia de Educação Matemática, em Lisboa. É composto por quarenta peças – figuras geométricas planas sendo elas:

- Quatro quadrados de lados com medida x (com $x > 0$), representado pelo termo algébrico que corresponde a sua área: x^2;
- Quatro quadrados de lados com medida y (com $0 < y < x$) representado pelo termo algébrico: y^2;
- Doze quadrados de lados 1;
- Quatro retângulos de lados x e y, representando pelo termo algébrico xy;
- Oito retângulos de lados x e 1, representado pelo termo algébrico x;
- Oito retângulos de lados y e 1, representado pelo termo algébrico y.



Normalmente as mesmas figuras na cor branca (ou preta), representam $-x^2, -y^2, -xy -x, -y, -1$ respectivamente.



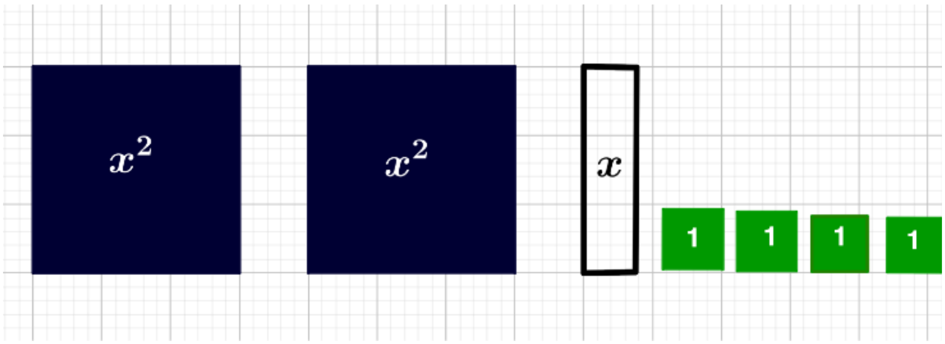
O material utilizado para sua construção é muito simples, podendo ser construído em cartolina colorida ou em EVA. Existe também a possibilidade de trabalhar com uma versão virtual do Algeplan virtual, implementado no GeoGebra por exemplo.

Espera-se que, ao dar um significado geométrico às expressões algébricas, os alunos consigam manipulá-las com mais facilidade. "A compreensão geométrica de expressões como x^2, como a área de um quadrado de lado x e x^3 como o volume de um cubo de aresta x, poderia contribuir para que o aluno não cometesse um erro muito comum de fazer, $2x^3 + x^2 = 3x^5$ por exemplo" (MENDES, 1999).

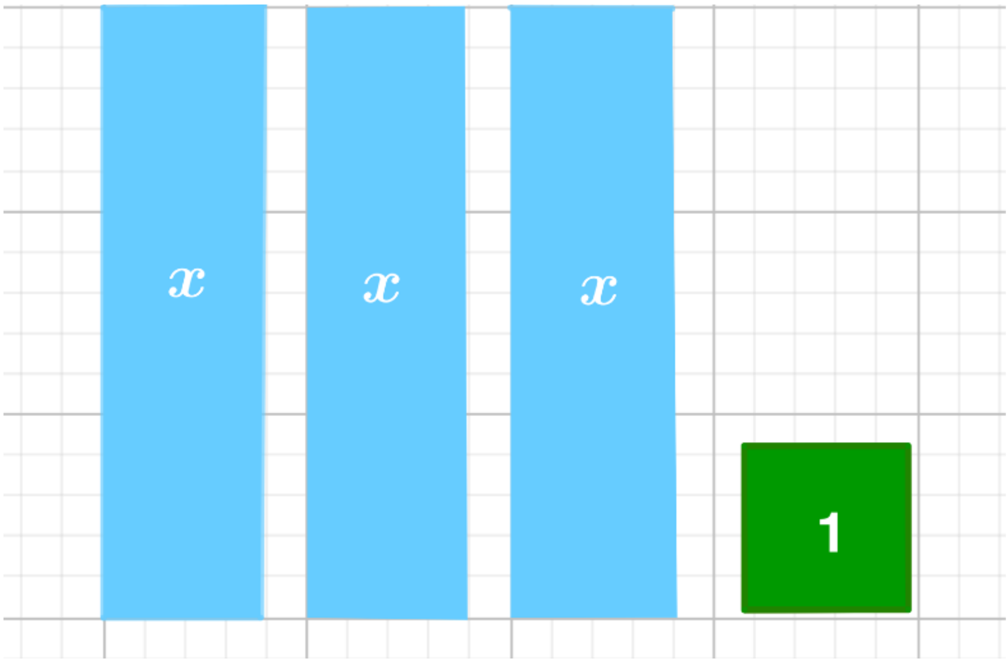
Vamos exemplificar alguns conceitos que podem ser trabalhados com o Algeplan.

- Representação de polinômios de grau no máximo 2: Polinômios de grau menor ou igual a dois podem ser representados usando o Algeplan, como mostra o exemplo a seguir:

$p(x) = 2x^2 - x + 4$ e $q(x) = 3x + 1$

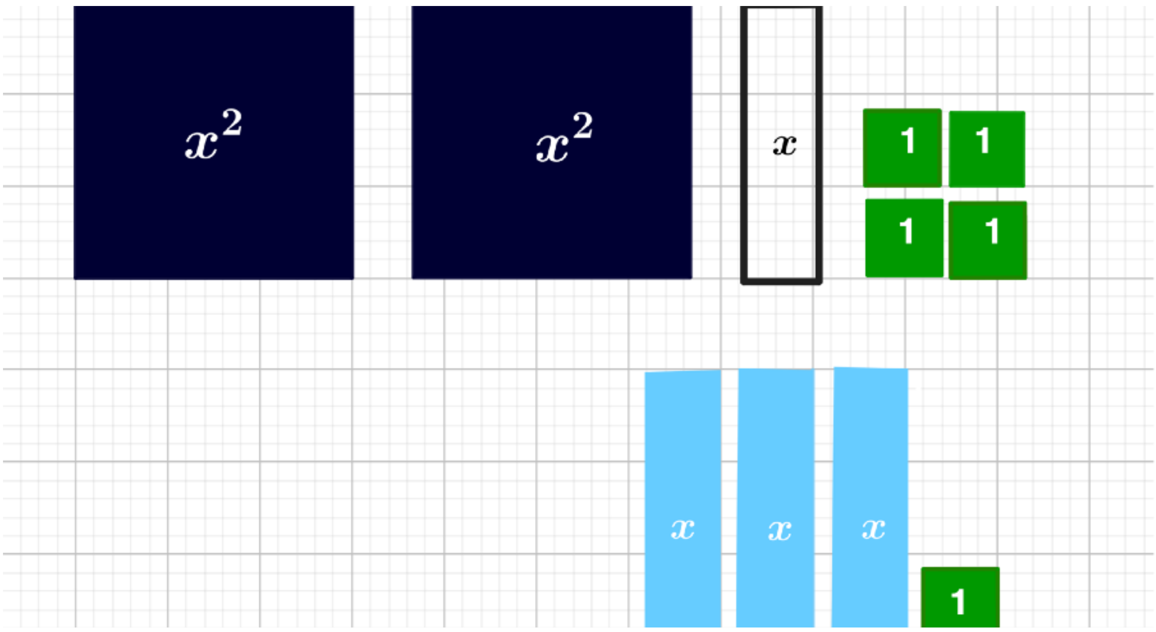


p(x)



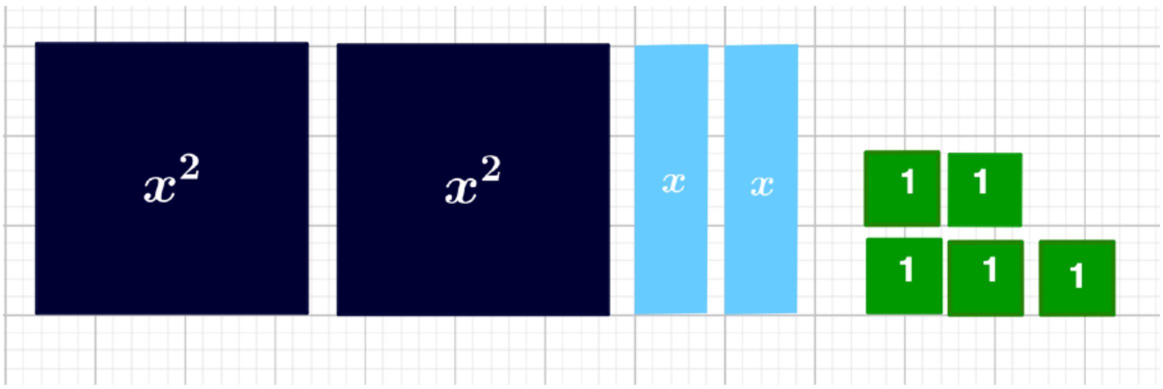
q(x)

Adição de polinômios de graus no máximo 2: Adicionar polinômios no Algeplan é simples, devemos ver quantas peças temos de cada um dos tipos, lembrando que as peças brancas são negativas. Vamos calcular a soma dos polinômios do exemplo anterior $p(x) + q(x)$. Num primeiro momento devemos simplesmente juntar todas as peças



Depois, somamos as peças de cada tamanho, lembrando que as peças coloridas são positivas e as brancas, negativas

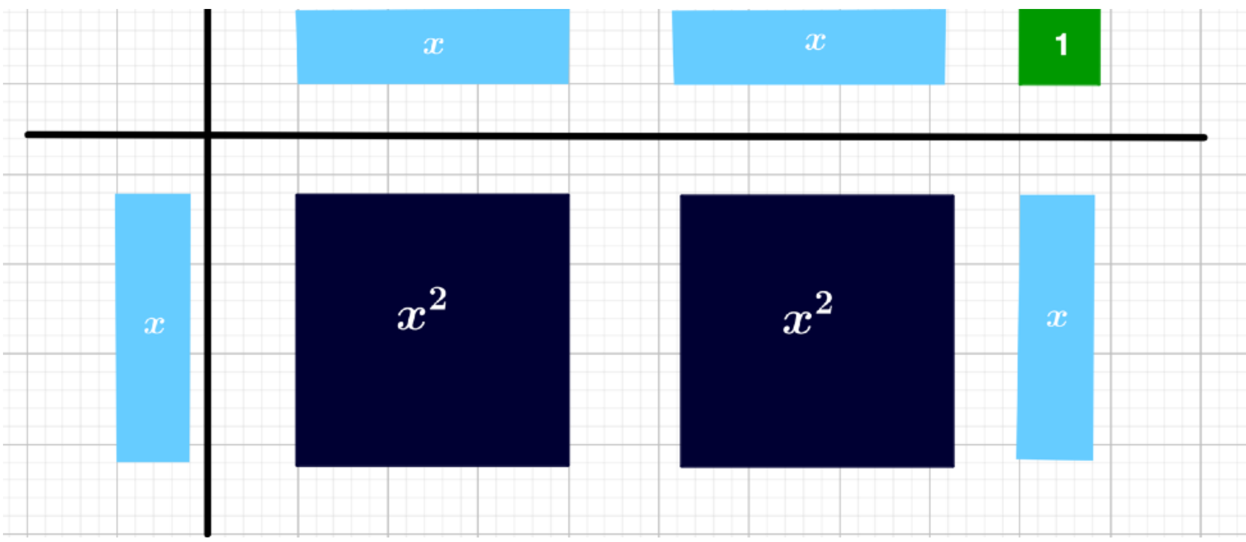
$$p(x) + q(x) = \left(2x^2 - x + 4\right) = \left(3x + 1\right) = 2x^2 + 2x + 5$$



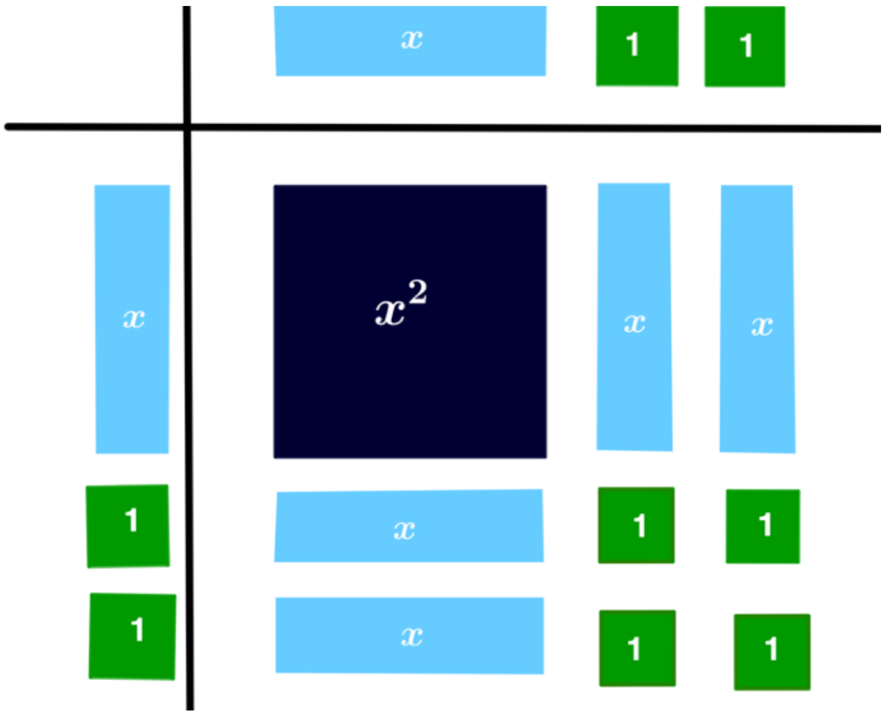
- Multiplicação de polinômios de grau no máximo 1:

$p(x) = x \quad q(x) = 2x + 1$

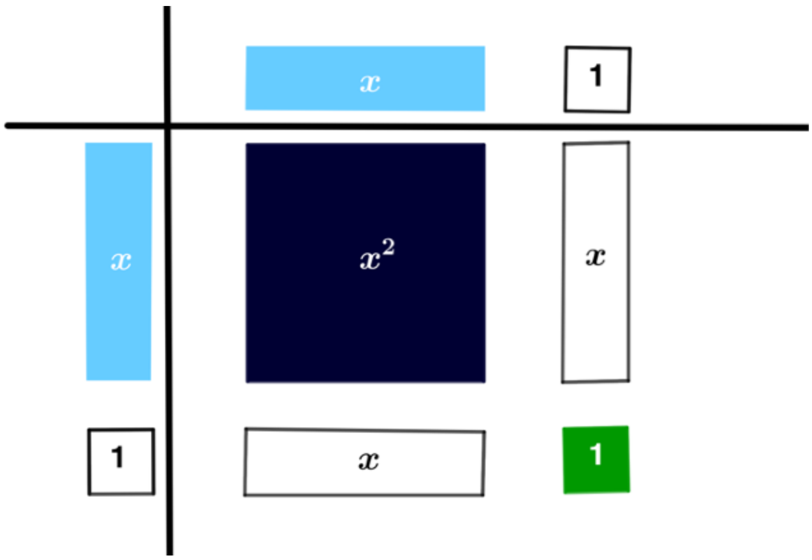
$$p(x) \cdot q(x) = x(2x + 1) = x^2 + x$$



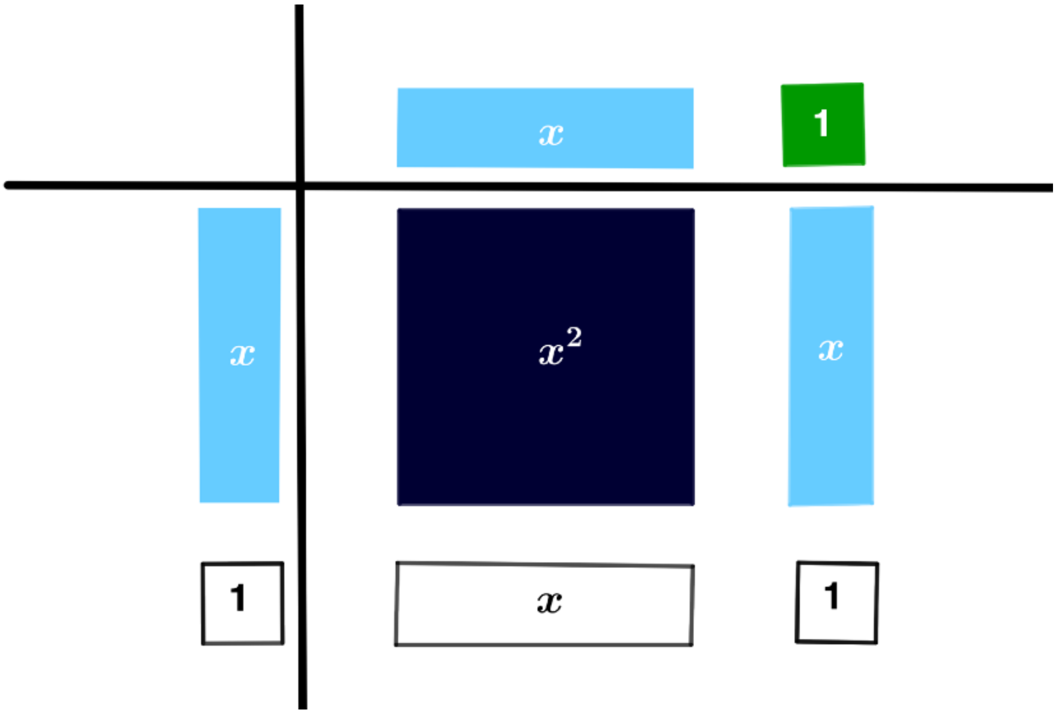
- Produtos notáveis: quadrado da soma $(x+2)^2$



- Produtos notáveis: quadrado da diferença $(x-1)^2$



- **Produto da soma pela diferença (x+1)(x-1)**



É fundamental orientar os alunos, ao somar dois polinômios, que o primeiro passo consiste em agrupar as peças de acordo com seus tamanhos. Em seguida, devem contar o número de peças correspondentes a cada categoria, considerando que, em cada agrupamento, o número de peças brancas (representando valores negativos) deve ser subtraído do número de peças coloridas (representando valores positivos). Esse processo garante que os termos semelhantes sejam corretamente somados, facilitando a compreensão visual da operação algébrica.

Quanto à multiplicação de polinômios, é importante que os alunos se lembrem de que o produto de duas peças coloridas (ou brancas) resulta em uma peça colorida, o que corresponde à regra algébrica de que o "produto de números positivos é positivo" (ou "produto de dois números negativos é positivo"). Por outro lado, ao multiplicar uma peça colorida por uma peça branca, o resultado será uma peça branca, representando a regra de que "produto de um número positivo por um negativo é negativo". Essas relações visuais e conceituais entre as peças e os sinais algébricos ajudam a solidificar a compreensão das operações de adição e multiplicação de polinômios usando o Algeplan.

O Algeplan utiliza figuras planas, como quadrados e retângulos, possibilitando o trabalho com polinômios de até segundo grau no caso da adição, e com a multiplicação de polinômios de até primeiro grau. Essa abordagem visual e manipulativa facilita a compreensão de operações algébricas, ao representar geometricamente termos quadráticos e lineares, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão concreta dos conceitos abstratos envolvidos nas operações com polinômios.

Há uma versão tridimensional conhecida como Algespace, desenvolvida inicialmente para apoiar o aprendizado de operações com polinômios por estudantes com deficiência visual ou baixa visão (ver Da Costa et als, 2020).

As peças do Algespace são baseadas nas peças do Algeplan, adaptadas para uma versão tridimensional. Mais especificamente, elas mantêm a correspondência algébrica original. Assim temos vários tipos de peças:

- Cubos: com arestas medindo $x, y, 1$, representando $x^3, y^3, 1$, respectivamente.
- Paralelepípedos de Base Quadrada: com base um quadrado de aresta x e altura 1 corresponde ao termo quadrático x^2, ou de altura yo que corresponde ao termo x^2y. Também há os de base quadrada com aresta y e altura x ou 1, que correspondem aos términos quadráticos xy^2 ou y^2 respectivamente.
- Os termos lineares x ou y são representados por paralelepípedos com base quadrada de aresta 1 e altura$x$ ou y, respectivamente.

A metodologia de uso do Algespace é bastante semelhante à empregada com o Algeplan, mantendo princípios pedagógicos similares na exploração de conceitos algébricos por meio de manipulação de peças. No artigo de Da Costa et al. (2020), os autores apresentam um relato de experiência sobre a aplicação do Algespace em sala de aula com alunos com deficiência visual, destacando sua eficácia na compreensão de operações com polinômios e no desenvolvimento do pensamento matemático de forma inclusiva e acessível.

Observe que tanto o Algeplan quanto o Algespace, podem ser implementados no GeoGebra.

No Apêndice deste trabalho, são apresentadas diversas atividades voltadas para o ensino de polinômios, utilizando o recurso didático Algeplan, que podem ser implementadas em sala de aula. Essas atividades foram elaboradas com o intuito de promover uma aprendizagem mais concreta e interativa, facilitando a compreensão.

2.2. Origami

O origami é a arte japonesa de dobrar papel. O termo "origami" é derivado das palavras japonesas "oru" (dobrar) e "kami" (papel). A prática remonta ao século XVII, mas suas raízes podem ser encontradas em cerimônias religiosas e rituais, onde figuras de papel eram usadas como oferendas simbólicas.

No contexto da Educação, o origami tem se mostrado uma ferramenta eficaz para o ensino de várias disciplinas, particularmente a Matemática. Ao manipular o papel e explorar as diferentes formas que surgem, os alunos se engajam ativamente no processo de aprendizagem.

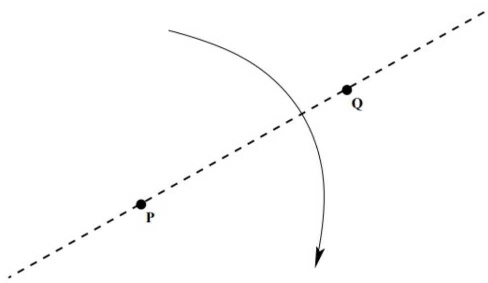
Certamente, quando pensamos em Origami e Matemática, pensamos em Geometria. A cada dobra, o papel é transformado em formas geométricas, como triângulos, quadrados e polígonos. Por exemplo, ao dobrar um quadrado de papel ao meio, no sentido da diagonal, os alunos podem observar a criação de dois triângulos congruentes, ilustrando o conceito de simetria reflexiva. A repetição dessas dobras pode resultar em formas mais complexas, que introduzem conceitos como ângulos, e congruência, entre outros. O estudo das simetrias também pode ser introduzido usando dobras em papel, como também o de proporção. As frações também podem ser exploradas usando origami, o papel é dobrado sucessivamente, ele pode ser dividido em metades, terços, quartos e outras frações, permitindo aos alunos visualizar essas divisões de forma concreta. Ao dobrar o papel em segmentos iguais, os estudantes aprendem sobre a ideia de frações equivalentes e proporções de maneira intuitiva. Mencionamos alguns exemplos de aplicações em sala de aula. O origami possibilita uma representação tangível e visual de algumas ideias, que podem parecer abstratas a princípio para o aluno, facilitando assim a sua compreensão .

Queremos explorar aqui a aplicação de origami na resolução de equações algébricas quadráticas e cúbicas.

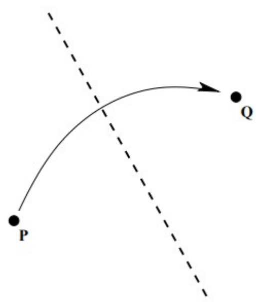
A teoria matemática do origami foi desenvolvida no século XX e tem como base 7 axiomas, conhecidos como Axiomas de Huzita – Hatori.

Os axiomas são:

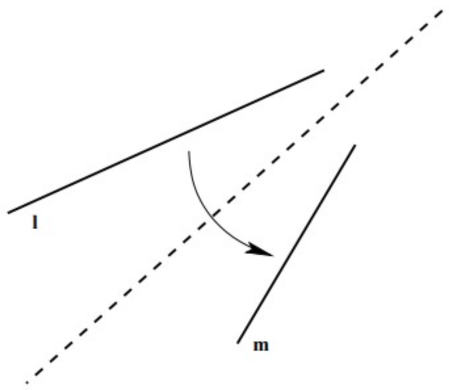
Axioma 1: Dados dois pontos P, Q há uma dobragem que passa pelos dois pontos.



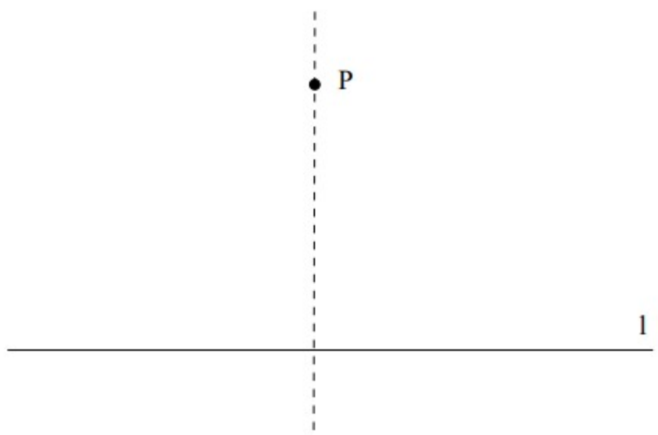
Axioma 2: Dados dois pontos P, Q, há uma dobragem que os torna coincidentes.



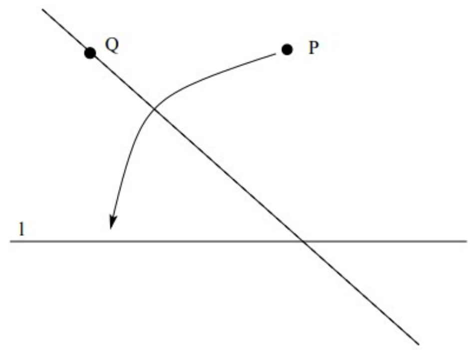
Axioma 3: Dadas duas retas, l, m, há uma dobragem que as torna coincidentes.



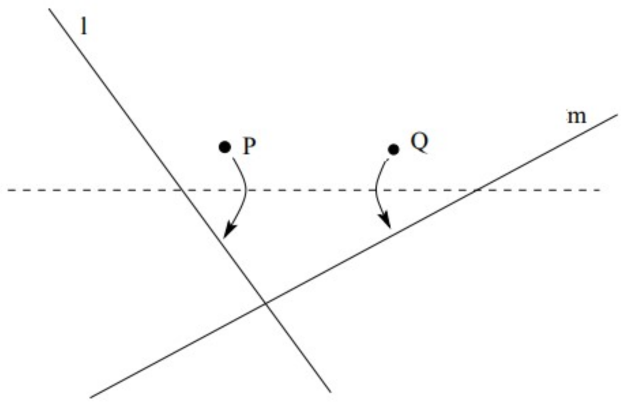
Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta l, há uma dobragem perpendicular a l, que passa por P.



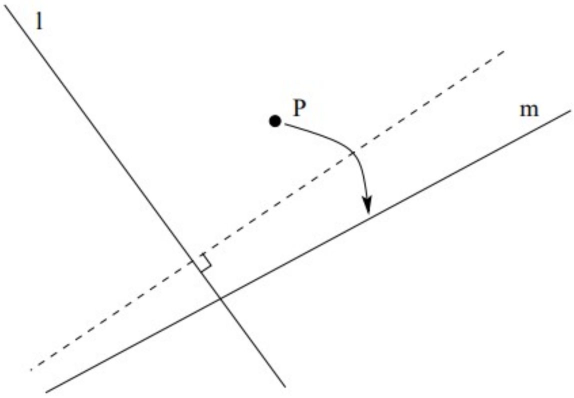
Axioma 5: Dados dois pontos P, Q e uma reta l, se a distância de P a Q for igual ou superior à distância de Q a l, há uma dobragem que faz incidir P em l e que passa por Q.



Axioma 6: Dados dois pontos P, Q, e duas retas l, m se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz incidir P em l e Q em m.



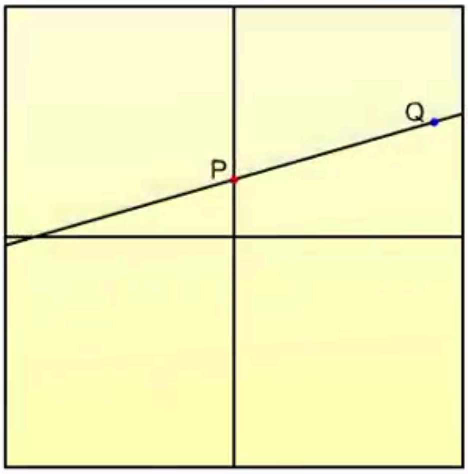
Axioma 7: Dado um ponto, P e duas retas l, m, se as rectas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em m e é perpendicular a l.

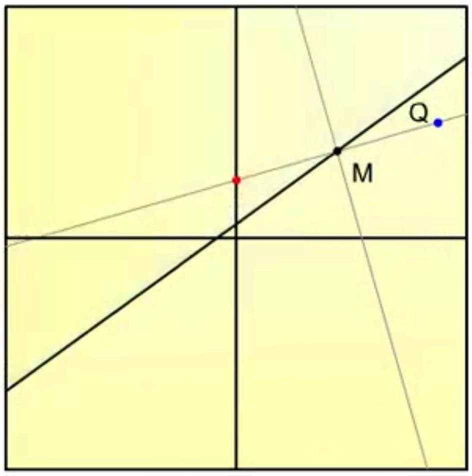


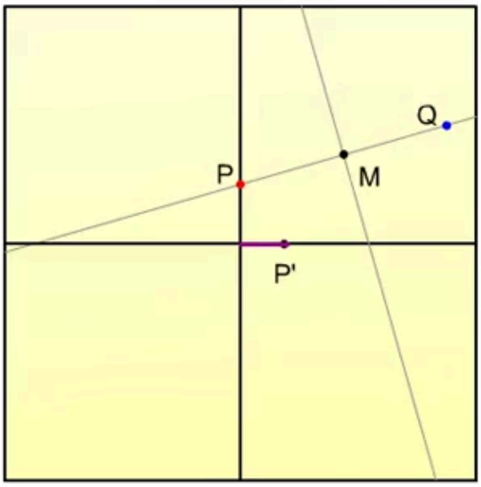
Vamos exemplificar o uso do origami para determinar as soluções de uma equação de segundo grau.

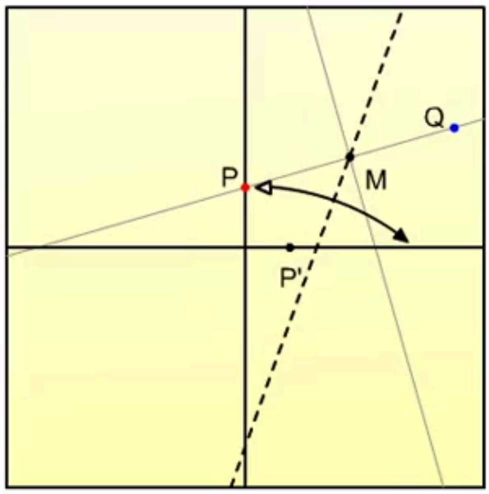
Considere a equação $x^2 + ax + b = 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos supor que $a^2 \geq 4b$ já que, caso contrário, a equação não admite soluções reais.

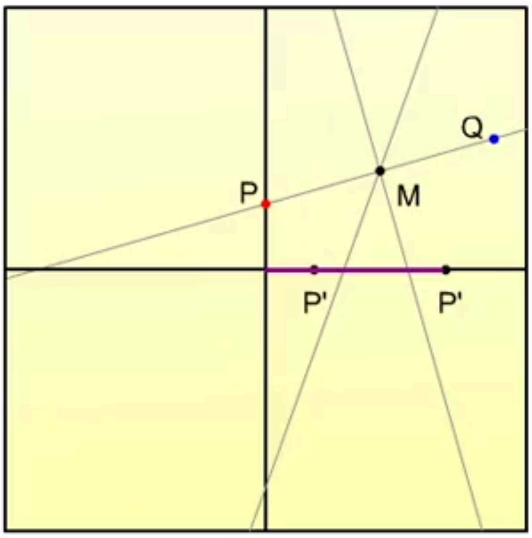
- Passo 1: Numa folha quadrada de papel marque o ponto $P = (0,1)$.
- Passo 2: Marque o ponto $Q = (-a, b)$.
- Passo 3: Faça uma dobra passando pelos pontos P, Q.
- Passo 4: Faça uma dobra de tal forma de bissectar o segmento $\overline{PQ}$ (basta levar o ponto Q sobre o ponto P) determinando assim o ponto M
- Passo 5: Faça uma dobra passando por M de tal forma que o ponto P fique sobre o eixo x, vamos chamar esse ponto de P'. A coordenada x de P' será uma solução da equação.
- Passo 6: Caso exista outra dobra passando por M de tal forma que o ponto P fique sobre o eixo x, digamos sobre o ponto de P''. A coordenada x deste ponto nos dará a outra solução da equação.


Q
P


Q
M


Q
P
M
P'


Q
P
M
P'

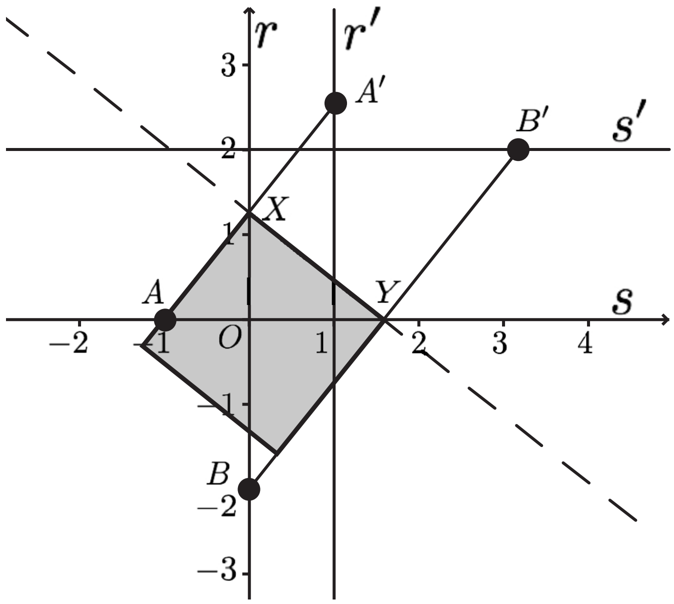

Q
P
M
P'
P'

Outra aplicação é a de construir raízes cúbicas, por exemplo $\sqrt[3]{2}$, o que permitiria, usando origami, responder de maneira afirmativa ao problema grego de construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume original, mas conhecido como duplicação do cubo. Sabemos ser impossível a construção da aresta do novo cubo usando uma régua não-graduada e um compasso.

Os passos para construir $\sqrt[3]{2}$ são

- Passo 1: Marque as retas r que será o eixo y e a reta s que será o eixo x .
- Passo 2: Marque os pontos $A = (-1{,}0)$ e $B = (0, -2)$.
- Passo 3: Trace as retas r' dada por $x = 1$ e a reta s' dada por $y = 2$.
- Passo 4: Dobre o papel de modo a levar o ponto A sobre a reta r' e o ponto B sobre a reta s' . Observe que esta dobra determina uma reta que intersecta a reta r num ponto X e a reta s num ponto Y .

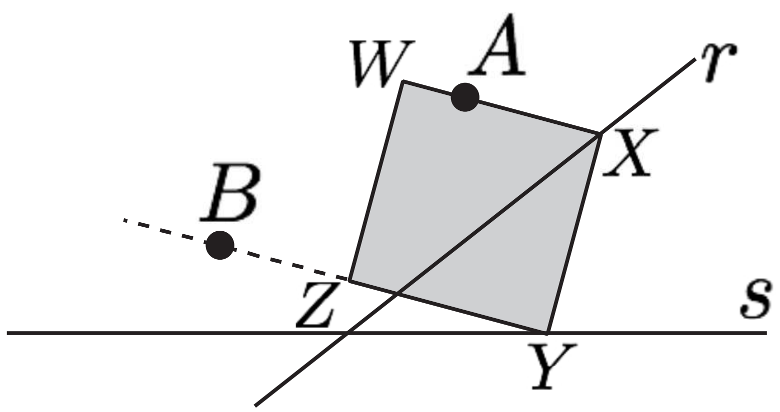
Usando semelhança de triângulos é possível mostrar que $X = \left(0, \sqrt[3]{2}\right)$.



O procedimento pode ser generalizado para calcular $\sqrt[3]{k}$ tomando $B = (0, -k)$.

O origami também permite encontrar as raízes reais de uma equação cúbica. Os ingredientes principais da construção são o quadrado de Beloch e o procedimento de Lill. O quadrado de Beloch é um problema que foi proposto, e resolvido, por Margharita Beloch em 1936. O problema é o seguinte:

Quadrado de Beloch: Dados dois pontos A, B e dos retas r, s no plano, construir um quadrado $WXYZ$ com dois vértices adjacentes Xe Y sobre as retas r e s respectivamente e os lados WX e YZ, ou suas extensões, passando pelos pontos A e B respectivamente.



O procedimento de Lill, ideado pelo engenheiro Eduard Lill, permite localizar uma raiz real de um polinômio de grau 3, mas pode ser estendido para outros graus. É um procedimento geométrico que usa os coeficientes do polinômio para construir um caminho plano. O artigo de Hull (2011) contém uma breve descrição do método de Beloch para localizar raízes de uma equação cúbica usando dobras.

O origami oferece uma abordagem inovadora para a resolução de equações e pode ser utilizado em várias áreas.

A seguir listamos alguns materiais úteis para quem esteja interessado em usar origami em sala de aula:

https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm

https://orimath.wordpress.com/2021/08/21/lills-method-origami-and-solving-cubics/

https://ilc.upd.edu.ph/wp-content/uploads/articulate_uploads/Understanding-Math-Using-Origami-Solving-Quadratic-Equations3/story.html

https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/origami

2.3. Jogos e gamificação

É possível aprender Matemática através de brincadeiras e jogos? Muniz (2010), no seu livro “Brincar e jogar”, transcreve o diálogo que manteve com Carolina, uma menina de 8 anos, que estava brincando Tazo com um grupo de crianças no recreio em uma escola primária francesa. O diálogo é bem ilustrativo da visão que muitos alunos, e até adultos, têm de que Matemática é uma coisa trabalhosa e difícil, vamos transcrevê-lo aqui:

> Pesquisador: Podemos jogar Tazo em sala de aula?
> Carolina: Não, somente no recreio!
> Pesquisador: Para que serve o recreio?

Carolina: Para brincar.
Pesquisador: E a aula, serve à que?
Carolina: Para trabalhar.
Pesquisador: Quando brincamos, podemos aprender alguma coisa?
Carolina: Sim.
Pesquisador: O quê?
Carolina: A pintar, desenhar, ler ou escrever, se houver letras e palavras no jogo!
Pesquisador: E matemática? Podemos aprender Matemática quando brincamos?
Carolina: Eu acho que não.
Pesquisador: O que devemos fazer para aprender Matemática?
Carolina: Trabalhar, nós devemos trabalhar!
Pesquisador: E brincando, isso é possível?
Carolina: Ah, não! Muniz (2010).

O que mais surpreende ao autor não é essa dicotomia de que a Matemática está ligada ao trabalho e não tem lugar para ela no jogo. O que mais o surpreende é que no jogo em questão há muitos elementos matemáticos, já que cada peça tem um valor que é levado em conta no momento de jogar.

O valor do jogo começa a ganhar espaço na sala de aula graças aos construtivistas. Segundo Vygotski o jogo potencializa a zona de desenvolvimento proximal. "A Zona de Desenvolvimento Proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão, presentemente, em estado embrionário" Vygotsky (1994). Também o jogo possibilita a participação efetiva do sujeito na construção do seu conhecimento, como é defendido por outros construtivistas.

O jogo, num contexto de sala de aula, é visto geralmente como uma fonte de criação e resolução de problemas. Além de ter como como ingredientes principais a resolução de um problema e a construção de uma teoria, uma atividade para ser considerada um jogo, deve também 3 pontos, segundo Criton (1997), a saber:

1) Deve ser acessível ao maior número de pessoas.
2) Seu enunciado deve intrigar, surpreender e colocar um desafio àquele que o lê.

3) Sua resolução possa divertir, distrair, surpreender aquele que se dispõe a compreendê-lo.

O que diferencia um problema matemático de um jogo-problema é o caráter lúdico, já que um jogo-problema deve, ainda segundo Criton (1997).

1) Na sua aparência: a redação do enunciado pode ser divertido, humorístico, pode ser colocado na forma de enigma ou utilizar jogo de palavras;
2) Na sua característica curiosa: inabitual, estranho e surpreso;
3) No “desafio” que ele pode ter.

Um exemplo de jogos-problemas por excelência são os propostos por Malba Tahan (1997), onde as situações aparecem na forma de histórias que intrigam ao leitor e o motivam a resolver o problema proposto.

Observe que, como destaca Muniz (2010), nos jogos-problemas o adversário é a própria situação matemática proposta, que deve ser resolvida seguindo as regras do método matemático.

Embora a utilização de jogos na Matemática não seja um fenômeno recente, no século XX, educadores como Maria Montessori e Jean Piaget já defenderam o uso de materiais manipulativos e atividades lúdicas para facilitar a compreensão de conceitos abstratos, incluindo a matemática. A Aprendizagem baseada em jogos (Game-Based Learning GBL) ganhou um novo fôlego a partir dos anos 1960 com a valorização das metodologias de aprendizagem ativa. A partir dos anos 2000, com os avanços da tecnologia e a possibilidade de usar plataformas digitais nas aulas, a estratégia de usar jogos se consolidou ainda mais como estratégia pedagógica. Os jogos incentivavam os alunos a resolver problemas e tomar decisões estratégicas, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico.

Outra estratégia nessa linha é a gamificação, que é a incorporação de elementos de jogos em contextos não-lúdicos. Hoje temos plataformas onde é possível implementar estratégias de gamificação como "Kahoot!" e “Prodigy”. Essas plataformas permitem que os professores criem jogos para serem usados em sala de aula, fornecendo feedback em tempo real e adaptando o nível de dificuldade às necessidades dos alunos.

A ideia central é aproveitar o apelo dos jogos para criar um ambiente de aprendizado que seja mais estimulante. Em Matemática, isso pode significar transformar exercícios tradicionais em desafios ou missões que os alunos devem completar, oferecendo recompensas ao longo do caminho.

Não existe uma definição formal do termo gamificação, mas as várias definições têm alguns pontos em comum: uma atividade para ser considerada gamificada precisa metas, regras e ter feedback.

Podemos dizer que a principal diferença entre a aprendizagem baseada em jogos e e as atividades gamificadas utilizadas em sala de aula é que o jogo tem como principal foco a aprendizagem do conteúdo enquanto o foco das atividades ramificadas está em incentivar a participação e o engajamento, a aprendizagem se torna uma consequência.

Os pesquisadores Rezende, Carrasco e Silva-Salse (2022), fizeram uma ampla revisão das publicações acadêmicas, buscando identificar se existia uma relação causal entre a Aprendizagem baseada em jogos e a gamificação com o pensamento matemático crítico. No artigo eles entendem o pensamento matemático crítico segundo a definição de Skovsmose, na qual o indivíduo deve ter a capacidade de analisar, buscar alternativas para solucionar conflictos.

Em sua concepção, o autor (Skovsmose) enfatiza que o ensino de Matemática deve fornecer aos estudantes instrumentos que os auxiliem, não apenas na análise de uma situação crítica, mas também na busca por alternativas para resolver desta situação. Nesse sentido, deve-se não somente ensinar aos estudantes a usar os mais variados modelos matemáticos, mas antes levá-los a questionar todos os parâmetros que balizam sua utilização (Porquê? Como? Para quê? Quando utilizá-los?) Rezende et al, (2022).

Os autores concluem que tanto os jogos quanto as atividades gamificadas tendem a suavizar o processo de aprendizagem da Matemática e favorecem o desenvolvimento do pensamento crítico.

Cabe ao professor, analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos. Na nossa opinião, a estratégia de gamificação pode ser melhor aproveitada como instrumento de revisão de conteúdos.

Sobre o conteúdo de polinômios e jogos podemos mencionar a dissertação de Mestrado "POLIDAMAS: Uma junção do Jogo de Damas com o Ensino de Polinômios" Melk (2023) onde a autora se inspira no tradicional jogo de tabuleiro de Damas para trabalhar os conceitos de monômios e polinômios.

Já o jogo Polinoquiz possui por modelo os jogos de quizzes tradicionais, ou seja, jogos de perguntas e respostas. Seu objetivo principal é revisar o conteúdo de polinômios em específico, são abordados desde as ideias iniciais (modelagem de polinômios), como suas operações (soma, subtração, multiplicação, divisão, incluindo produtos notáveis e fatoração) (ver Callou et al (2022)). Esse jogo utiliza também o Algeplan.

Sobre a gamificação, podemos citar dois exemplos:

1) O trabalho de Conclusão de Curso O "USO DA GAMIFICAÇÃO PARA O ENSINO DE POLINÔMIOS NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL" Melo da Silva (2022), onde atividades ramificadas são introduzidas para trabalhar os conceitos de adição e multiplicação de polinômios e também produtos notáveis.

2) "A Gamificação no Processo de Ensino e Aprendizagem da Equação Polinomial de Segundo Grau" de Alves et al (2022) onde se analisa como o uso da gamificação pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem da equação polinomial de 2º grau em uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

A seguir listamos alguns materiais úteis sobre jogos e gamificação:

- Na sua tese de doutorado “Uma abordagem para transparência pedagógica usando aprendizagem baseada em jogos" Elizabeth Suescun Monsalve, resume os principais pontos da aprendizagem baseada em jogos e gamificação. A tese está disponível no link

https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=24505@1

- No site da da Educação Pública vinculada à Fundação Cecierj, estão disponíveis várias publicações sobre o uso de jogos e da gamificação em sala de aula.

https://educacaopublica.cecierj.edu.br/

- No Youtube há vários videos sobre Jogos e Gamificação como recursos pedagógicos, recomendamos entre outros

1) "Gamificação no Ensino da Matemática: um caminho possível, live do curso "Jogos para aprender Matemática”, palestrante Profa. Dra. Daniela Mendes (UERJ), disponível em https://www.youtube.com/live/U5a_FeTcvhA?feature=shared

2) "Os MELHORES SITES para desenvolver a GAMIFICAÇÃO na EDUCAÇÃO”, Marco Antônio Silva, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=osIrS1d3uOs

Nesse canal é possível também encontrar tutorias que ensinam como usar cada uma das plataformas mencionadas.

2.4. Modelagem e Resolução de Problemas

A metodologia de resolução de problemas tem se destacado como uma abordagem pedagógica eficaz no ensino de matemática. Ela promove uma aprendizagem ativa e significativa, ao estimular os alunos a explorarem, analisarem e solucionarem situações que exigem a aplicação de conceitos matemáticos. Ao contrário da simples memorização de fórmulas e procedimentos, essa metodologia incentiva o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da autonomia, permitindo que os estudantes compreendam a matemática de forma mais profunda e contextualizada. A própria BNCC recomenda que a resolução de problemas seja o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula.

Além disso, a resolução de problemas favorece a construção de conexões entre diferentes áreas do conhecimento matemático e outras disciplinas, promovendo uma visão mais integrada e prática da aprendizagem. Como recurso didático, essa metodologia não apenas enriquece a experiência de ensino, mas também torna o aprendizado mais envolvente e motivador para os alunos, capacitando-os para enfrentar desafios reais de maneira estruturada e eficaz.

"Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta, Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas científicos, quebra-cabeças, toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os". Polya (1944).

Essa metodologia começou a ganhar importância na sala de aula a partir de 1980 alavancada pelos teorias de aprendizagem como o Construtivismo. No livro Resolução de Problemas de Onuchic et al. (2014), as autoras mencionam três formas de trabalhar com problemas em sala de aula: o ensino sobre resolução de problemas, o ensino para a resolução de problemas e o ensino através da resolução de problemas, cada uma tem suas características implicações pedagógicas. Elas consideram que a terceira opção, por ser uma abordagem mais atual, é a mais adequada à realidade contemporânea das escolas.

As autoras sugerem que as atividades sejam organizadas em dez etapas:

1) Proposição do problema
2) Leitura individual
3) Leitura em conjunto
4) Resolução do problema
5) Observar e incentivar
6) Registro das resoluções na lousa
7) Plenária

8) Busca de consenso
9) Formalização do conteúdo
10) Proposição e resolução de novos problemas

Observe que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes da apresentação formal do conteúdo.

A metodologia de modelagem matemática é uma abordagem pedagógica que visa integrar o ensino de matemática a situações reais, permitindo que os alunos utilizem conceitos matemáticos para representar, analisar e resolver problemas do mundo cotidiano. Ao modelar fenômenos ou processos, os estudantes são incentivados a traduzir situações concretas em representações matemáticas, como equações, gráficos ou funções, promovendo uma compreensão mais profunda e contextualizada dos conteúdos.

Essa metodologia não só aproxima a matemática da realidade, tornando-a mais relevante e significativa, mas também desenvolve habilidades importantes, como o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de abstração. A modelagem na sala de aula de matemática transforma o aprendizado em um processo ativo e investigativo, no qual os alunos não apenas aprendem conceitos, mas também compreendem sua aplicabilidade e relevância no contexto do mundo real.

A metodologia de resolução de problemas e a modelagem matemática estão intimamente relacionadas, pois ambas promovem o desenvolvimento do pensamento crítico e a aplicação de conceitos matemáticos a situações reais. Como vimos, a metodologia de resolução de problemas foca em apresentar questões desafiadoras e abertas, estimulando os alunos a explorar estratégias diversas para encontrar soluções. Já a modelagem matemática busca traduzir fenômenos do mundo real em estruturas matemáticas, permitindo uma análise mais profunda dessas situações.

No livro Modelagem em Educação Matemática (Meyer et al. (2011)), os autores alertam quanto à importância de que, nas aulas de Matemática, os problemas com respostas definidas sejam substituídos por situações sem “perguntas matemáticas” e sugerem o uso da modelagem para fazer a ponte entre o mundo real e o universo abstrato da Matemática. Eles destacam 5 momentos no processo de modelagem matemática:

1) Determinar a situação.
2) Simplificar as hipóteses.
3) Resolver o problema matemático.
4) Validar as soluções.
5) Definir a tomada de decisão de acordo com os resultados.

É evidente que as duas metodologias se complementam ao integrar a aplicação prática da matemática ao desenvolvimento de habilidades analíticas e de interpretação, proporcionando aos alunos uma experiência rica e contextualizada de aprendizado. Ambas as abordagens permitem que os alunos compreendam a matemática de forma mais significativa, promovendo um entendimento mais profundo e crítico do mundo ao seu redor.

A seguir listamos alguns trabalhos acadêmicos que usam as metodologias mencionadas para o ensino de polinômios:

1) Modelagem por polinômios no Ensino Médio, Daniel (2016). Foram modelados dois problemas: A construção de um foguete (aeromodelo), seu lançamento e a modelagem de sua trajetória através de uma função polinomial de segundo grau e a modelagem no computador de uma superfície de revolução através do estudo de polinômios e matrizes de rotação.

2) A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado, Morais (2011). No artigo são discutidos 6 problemas, todos eles relacionados com a construção de caixas de papelão. Os alunos dispunham do material necessário para a construção das caixas. No primeiro deles, os alunos deveriam construir aleatoriamente uma caixa. No segundo problema os alunos deveriam desenhar

um retângulo com dimensões dadas e construir uma caixa sem tampa com altura dada. No terceiro, usando o mesmo retângulo anterior a altura podia ser escolhida livremente pelos alunos. Outro problema pedia o cálculo da área do papel gasto na construção dessa caixa.

3) O uso da resolução de problemas como metodologia: no ensino de equações polinomiais do primeiro grau, Vieira (2021). A autora aplicou as atividades em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental II. Todos os problemas foram do tipo de partilha.

4) Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau : possibilidades e dificuldades, Silvino (2022). O diferencial neste trabalho é o uso de um jogo educativo interativo, chamado “corrida das equações”.

2.5. GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica amplamente utilizado no ensino e na aprendizagem de matemática. Ele integra diferentes áreas da matemática, como geometria, álgebra, cálculo e estatística, em uma plataforma interativa e acessível. O GeoGebra permite a criação de construções geométricas, gráficos de funções, representações algébricas, simulações e cálculos, tudo em tempo real.

Foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter. A ideia inicial de Hohenwarter era desenvolver uma ferramenta que integrasse diferentes áreas da matemática em uma única interface interativa, com o objetivo de tornar o ensino e a aprendizagem mais dinâmicos e acessíveis. Atualmente, segundo consta no site do Instituto GeoGebra se São Paulo (https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html), o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de **300000** downloads mensais, além de 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

Desde sua criação, o GeoGebra evoluiu significativamente, passando de uma ferramenta acadêmica para um software educacional amplamente utilizado em todo o mundo. Com o tempo, ganhou novas funcionalidades e a capacidade de ser usado em múltiplas plataformas, como computadores, tablets e dispositivos móveis. O GeoGebra se destacou por seu caráter gratuito e de código aberto, o que permitiu sua ampla disseminação em ambientes educacionais, além de uma forte comunidade de usuários e desenvolvedores que continuam a aprimorar o software.

Sua interface amigável e suas funcionalidades interativas tornam o GeoGebra uma ferramenta poderosa para professores e alunos, permitindo que conceitos abstratos sejam visualizados e manipulados de maneira prática.

O GeoGebra é uma ótima ferramenta que pode ser usado para a investigação matemática, segundo Vaz (2012), essa metodologia consta de quatro etapas fundamentais: experimentação, conjectura, formalização e generalização.

"Experimentar aqui significa que podemos usar o software, juntamente com o aluno para que ele mesmo faça suas experiências, movimente os objetos matemáticos, perceba as relações entre eles, compare álgebra e geometria, enfim, interaja com o objeto do saber. Conjecturar significa que depois de perceber as relações oriundas da experimentação é possível vislumbrar propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da Matemática. Uma vez feita a conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado que pode ser verdadeiro ou falso. Formalizar seria então a demonstração propriamente dita, ou evidenciar uma contra-proposição da conjectura levantada com um argumento pedagógico compatível à série que se está trabalhando. Generalizar é o importante nível, pois, após realizar os três níveis de construção de conhecimento é a hora de generalizar o resultado, ou seja, investigar outras situações e podendo até achar algumas situações particulares e por fim explorar o resultado obtido.” De Freitas Vaz et al. (2014).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), também referenciam quatro movimentos:

"O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado" (Ponte, Brocardo e Oliveira (2003)).

Existe uma rede global de centros dedicados ao desenvolvimento, pesquisa e promoção do uso do software no ensino de Matemática, conhecida como Instituto GeoGebra que é composta por diversas universidades e instituições ao redor do mundo. Tem como objetivo principal apoiar professores e alunos no uso da plataforma GeoGebra, promovendo a sua integração no ambiente educacional. Entre suas funções estão a formação de professores (para isso ministram regularmente cursos e treinamentos com objetivo de capacitá-los no uso do GeoGebra em suas aulas), a pesquisa e o desenvolvimento de matérias didáticos.

Como foi mencionado anteriormente, a maioria dos recursos analisados neste trabalho (origami, algeplan e outros) pode ser implementada no GeoGebra. No ensino de polinômios, o GeoGebra também pode ser usado para:

- Adição e produto de polinômios
- Plotagem de Gráficos, permitindo que o aluno visualize o gráfico inserindo diretamente a expressão do polinômio na barra de entrada. A partir dessa entrada, o GeoGebra gera automaticamente o gráfico correspondente, o que pode ajudar os alunos a compreenderem o comportamento dos polinômios. Os alunos podem, por exemplo, variar os coeficientes de um polinômio de segundo grau para observar como o gráfico, representado por uma parábola, se modifica.
- Identificação dos pontos de interseção com os eixos coordenados: O software também permite que os alunos investiguem as raízes do polinômio (os pontos em que o gráfico cruza o eixo x). Também permite que os alunos associem o ponto de interseção $(0, a_o)$ do gráfico com o eixo y com o termo constante do polinômio a_0.
- Resolução de um sistema de duas equações lineares, o que corresponde a calcular o ponto de interseção de duas retas. Pode ser generalizado para polinômios de maior grau.

O professor pode utilizar o GeoGebra para criar atividades interativas que envolvem a manipulação dinâmica de polinômios. Como mencionamos, ao ajustar os parâmetros dos polinômios em tempo real, os alunos têm a oportunidade de explorar e visualizar as mudanças no gráfico correspondente. Por exemplo, ao modificar os coeficientes, os estudantes podem observar como o número de raízes do polinômio, a posição do vértice da parábola e o comportamento assintótico da função se alteram. Essas atividades permitem que os alunos investiguem de maneira prática e visual como diferentes parâmetros influenciam o comportamento dos polinômios.

Existem vários applets já criados e disponibilizadas de forma on-line que o professor pode usar sem a necessidade de saber como implementar certas rotinas no software. A seguir mencionamos alguns trabalhos interessantes que usam o GeoGebra no ensino de polinômios.

1) Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do Ensino Médio, Reis (2011). O autor se propõe, nas suas palavras, responder à seguinte questão: “como o uso reconstrutivo do erro pode auxiliar na elaboração de uma sequência de ensino sobre função afim entre estudantes do Ensino Médio, a partir de uma estratégia pedagógica com uso do software GeoGebra?”. Assim o trabalho está dividido em duas etapas. Na primeira, uma sequência diagnóstica é aplicada à turma. Essa sequência consta de 4 atividades que foram feitas de forma tradicional, com papel e lápis. Na segunda etapa, a partir dos erros cometidos pelos alunos na primeira etapa, é proposta uma sequência com 5 atividades com o uso do GeoGebra. As sequências didáticas apresentadas neste trabalho. São interessantes e podem ser replicadas com facilidade.

Outro exemplo de sua aplicação no ensino de funções afins pode ser encontrado na dissertação de Scano (2024).

2) GeoGebra para o ensino de função polinomial na perspectiva da ação mediada, de Luca et al. (2021). As atividades propostas foram aplicadas em calouros da licenciatura em Matemática e tinha como foco a análise do nível de domínio e de apropriação dos conceitos de funções polinomiais de uma variável real. Os autores relatam que "as atividades desenvolvidas com o software de geometria dinâmica e as reflexões solicitadas na sequência didática contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas aos conteúdos destas funções de uma variável real.”

Vemos aqui um exemplo onde o uso do software permitiu a investigação matemática que mencionamos anteriormente.

3) O ensino de polinômios e gráficos na Educação Básica, Sato (2019). Nesse trabalho são propostas 4 atividades sobre funções quadráticas. As três primeiras visam

auxiliar os alunos a enxergarem algumas propriedades gráficas destas funções quando os coeficientes variam. Na quarta atividade, os alunos recebem uma lista de problemas e, ao final, devem relatar as descobertas obtidas por meio da manipulação dos gráficos, além de apresentar o raciocínio utilizado na resolução de cada questão.

4) Ensino de polinômios: caderno de atividades com o GeoGebra, Correia (2021). Dois tipos de atividades foram aplicadas numa turma de 3º Ano do Ensino Médio. O primeiro consistia em exercícios retirados da própria lista de exercícios usados pelo professor da turma, que deviam ser trabalhados individualmente. O segundo estava formado por problemas polinomiais retirados da internet. O trabalho foi realizado em duplas, com orientação para discussão, interpretação, representação e solução a partir de estratégias próprias. Todas as atividades foram resolvidas com o auxilio do GeoGebra. As atividades estavam focadas principalmente nas aplicações do cálculo de área e perímetro de figuras poligonais, o que permitia explorar as representações algébrica e geométrica de forma contextualizada. Os autores concluem dizendo que "A dinamicidade e a visualização algébrica e geométrica da mesma expressão e ao mesmo tempo, desafia a capacidade de investigação do aluno, assim como desafia o professor a criar aulas mais produtivas."

5) Produto Educacional: Atividades para o Ensino de Polinômios com o Uso do Geogebra, Alves (2020). Neste Produto Educacional encontramos uma sequência de 12 atividades formuladas para trabalhar assuntos como coeficientes, adição, multiplicação e divisão de polinômios.

> "Logo após as duas primeiras atividades apresentadas aos alunos percebemos um aumento na autonomia e nas interações de um modo geral […] Essas interações foram tão significativas que em alguns momentos viraram uma disputa sadia no modo “quem responde mais ou quem responde primeiro”, de modo a ter algum tipo de premiação entre eles durante o andamento do processo […] Foi notório também o aumento da autonomia desses alunos, a qual ocasionou um melhor desempenho nas resoluções das atividades e nas descobertas de suas regras práticas, ambos em um ambiente colaborativo e participativo.” Alves (2020).

6) Utilização do software GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem de funções do primeiro grau em turma do 9° ano do Ensino Fundamental, Schunck (2023). O autor, depois de apresentar o software aos alunos de uma turma do 9° ano, propôs que eles aplicassem o software em uma tarefa específica, explorando como os coeficientes

afetam o comportamento gráfico das funções. A pesquisa teve como objetivo compreender como o uso do software GeoGebra pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

> "A ênfase na compreensão das alterações nos gráficos demonstra um esforço para promover uma aprendizagem mais profunda e conectada ao cotidiano dos estudantes, uma vez que, no contexto atual, os adolescentes demonstram uma afinidade “natural” com a tecnologia, tornando, assim, essa abordagem ainda mais relevante. A escolha do GeoGebra como ferramenta mediadora mostrou-se eficaz, permitindo uma abordagem dinâmica e visual no ensino de funções polinomiais. A correção colaborativa, onde os erros são encarados como oportunidades de aprendizagem, destaca a importância do diálogo e da reflexão crítica, como preconizado por Freire.” Schunk (2023).

Na opinião do autor, o uso do GeoGebra foi positivo e conclui que "pode ser fundamental para promover uma aprendizagem mais efetiva e envolvente."

Estes são apenas alguns exemplos de como o GeoGebra pode ser utilizado em sala de aula. Nos sites dos Institutos GeoGebra brasileiros, é possível encontrar uma série de artigos acadêmicos, tutoriais e outros materiais didáticos que auxiliam na implementação do software no ensino de Matemática. Além disso, há diversas oficinas e cursos disponíveis em plataformas como o YouTube, que fornecem suporte tanto para professores quanto para estudantes, contribuindo para uma aplicação mais eficiente e dinâmica dessa ferramenta no âmbito escolar.

O portal eduCAPES (https://educapes.capes.gov.br/) disponibiliza uma ampla coleção de Produtos Educacionais derivados de dissertações de Mestrado Profissional, com propostas de atividades prontas para serem implementadas em sala de aula, oferecendo aos professores recursos valiosos para enriquecer o processo de ensino.

Em resumo, o GeoGebra é uma ferramenta que se destaca por proporcionar um alto nível de interatividade no ensino de Matemática. Ao permitir que os alunos manipulem elementos geométricos, gráficos e equações em tempo real, o software facilita a visualização e compreensão de conceitos abstratos de forma dinâmica. Essa interatividade transforma o aluno em parte ativa no processo de aprendizagem, promovendo um aprendizado experimental e exploratório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao se pensar pontualmente na construção de uma Educação Matemática Crítica dentro de uma perspectiva significativa, D'Ambrósio (2001) afirma que a análise das práticas educacionais em Matemática deve ser elaborada sob um olhar alinhado aos diversos contextos culturais, ou seja, considerando a realidade do estudante em questão. Ainda segundo D'Ambrósio (1993):

"O futuro da Educação Matemática não depende de revisões de conteúdo, mas da dinamização da própria Matemática, procurando levar nossa prática à geração de conhecimento. Tampouco depende de uma metodologia "mágica". Depende essencialmente de o professor assumir sua nova posição, reconhecer que ele é um companheiro de seus estudantes na busca de conhecimento, e que a Matemática é parte integrante desse conhecimento. Um conhecimento que dia-a-dia se renova e se enriquece pela experiência vivida por todos os indivíduos deste planeta".

Geralmente costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo caráter "motivador" ou pelo fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática. Entretanto, será que podemos afirmar que o material concreto ou jogos pedagógicos são realmente indispensáveis para que ocorra uma efetiva aprendizagem da matemática? Segundo Fiorentini e Miorim (1992) a simples introdução desses recursos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina.

O avanço das discussões sobre o papel e a natureza da educação e o desenvolvimento da psicologia, ocorrida no seio das transformações sociais e políticas contribuíram historicamente para as teorias pedagógicas que justificam o uso na sala de aula de materiais "concretos" .

De acordo com Azevedo (1979), nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração". Ou seja, o aluno não deve ter um "aprender" mecânico (de repetição, fórmulas e algoritmos somente), em que ele mesmo se pergunta por que deve estudar aquele conteúdo, mas um aprender significativo, em que ele constrói, raciocina e compreende.

Segundo Fiorentini & Miorim (1993), em outros momentos, o mais importante não será o material, mas sim a discussão e resolução de uma situação-problema ligada ao contexto do aluno, ou ainda, a discussão e utilização de um raciocínio mais abstrato. Afinal de contas, os professores devem utilizar o concreto para que os alunos tenham uma maior compreensão e visualização do conteúdo, nesse caso específico a álgebra. Posteriormente, e com uma maior maturidade matemática eles podem assimilar os assuntos matemáticos abstratos envolvidos nas aulas de matemática.

Entendemos que a importância dos recursos didáticos na sala de aula de matemática vai além de sua função tradicional como ferramentas auxiliares de ensino. Em um cenário educacional cada vez mais diversificado, o uso de diferentes recursos é essencial para promover uma aprendizagem significativa e eficaz.

Esses recursos permitem que conceitos abstratos ganhem formas concretas, facilitando a compreensão e retenção de conteúdos por parte dos alunos. Além disso, eles oferecem oportunidades de engajamento ativo, motivação e desenvolvimento de habilidades críticas, como resolução de problemas e pensamento lógico.

Em um contexto em que a matemática é muitas vezes percebida como uma disciplina desafiadora, o uso de recursos didáticos adequados pode transformar a experiência de aprendizagem, tornando-a mais acessível, inclusiva e atrativa. Ao integrar esses recursos ao ensino, o professor amplia as possibilidades de alcançar diferentes perfis de alunos e de atender às necessidades específicas de cada um, contribuindo para um ambiente educacional mais equitativo e eficiente.

Nosso objetivo ao elaborar este trabalho foi oferecer uma visão ampla das diversas possibilidades e recursos que os professores podem adotar em sala de aula, com o intuito de diversificar suas práticas pedagógicas e enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Acreditamos que os exemplos apresentados, embora sucintos, possam servir como inspiração para que outros educadores percebam que há alternativas além do uso exclusivo do livro didático. Muitas vezes, o livro didático é visto como uma ferramenta indispensável, e, de fato, ele pode ser um recurso valioso; no entanto, limitar-se a ele pode restringir o potencial de inovação nas aulas.

Nossa intenção é demonstrar que a incorporação de outros recursos didáticos, como tecnologias digitais, materiais manipulativos e estratégias pedagógicas diferenciadas, não precisa ser algo complexo ou inatingível. Pelo contrário, essas ferramentas podem ser facilmente adaptadas à realidade de cada escola e aluno, promovendo um ensino mais dinâmico, interativo e alinhado às necessidades contemporâneas. Além disso, ao diversificar os recursos utilizados, os professores conseguem atender de maneira mais eficaz às diferentes formas de aprendizagem dos estudantes, tornando o conhecimento mais acessível e engajador.

Em suma, esperamos que este trabalho contribua para que mais professores se sintam motivados a explorar novas abordagens em suas práticas educativas. A busca por metodologias inovadoras e a inclusão de recursos variados podem resultar em aulas mais envolventes, que estimulem o pensamento crítico e a autonomia dos alunos, promovendo, assim, uma experiência de aprendizado mais rica e transformadora.

REFERÊNCIAS

ALVES, C. A. et al.. A gamificação no processo de ensino e aprendizagem da equação polinomial de segundo grau. In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais. Brasília(DF) On-line, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/xivenem2022/480868-A-GAMIFICACAO-NO-PROCESSO-DE-ENSINO-E-APRENDIZAGEM-DA-EQUACAO-POLINOMIAL-DE-SEGUNDO-GRAU.

ALVES, T. M. Produto Educacional: Atividades para o Ensino de Polinômios com o Uso do Geogebra. Capes.gov.br, 2020. Disponível em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/569925.

AZEVEDO, E. D. M. Apresentação do trabalho Montessoriano. In: Ver. de Educação & Matemática nº 3 pp. 26 - 27, 1979

BALL, D. L. What mathematical knowledge is needed for teaching Mathematics? Mathematics teaching and learning to teach project. School of Education, University of Michigan, 2003. pp. 1-9.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 1998.

BEN-ARI, M.. The Axioms of Origami. In: Mathematical Surprises. Springer, (2022)

CALLOU, T. G. C; PEREIRA, L. B. D. Jogo Polinoquiz Para a Revisão de Polinômios no Ensino Médio. A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática v. 7 n. 1 (2022) Disponível em https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1949.

CASTRO BARRETO, B; GOÉS MONTEIRO, M. C. G. Professor, livro didático e contemporaneidade. PUC-Rio (2008)
Disponível em https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/11983/11983.PDF

CORREIA, D. A. O ensino de polinômios com o software GeoGebra. Orientador: Wallysonn Alves de Souza. 2021. Dissertação (PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA) - Instituto Federal do Tocantins, Palmas, 2021. Disponível em: https://portal.ifto.edu.br/profept/dissertacoes/dissertacao-divanez-alves-correia.pdf/view. Acesso em: 12 set. 2024.

CORREIA, D. A., de Souza, W. A. Ensino de polinômios: caderno de atividades com o GeoGebra.
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/643090/2/Produto_Pronto_Divanez.pdf (2021)

COSTA, C. B. J.O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função.
Dissertação (mestrado) em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro (2008).

CRITON, M. Les jeux mathématiques. Paris: PUF 1997. CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, Coleção Tendências em Educação Matemática, 2007.

CYRINO, M. C. de C. T. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. A formação do professor que ensina Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 77-88.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática: uma visão do Estado da Arte. Pro-posições, v. 4, n. 1, p. 7-17, 1993.

DA COSTA, J. T. A.; GOMES, C. R.; DA SILVA, P. V. Algespace: objeto inclusivo para o ensino de Álgebra. Revista Cocar,, v. 14, n. 30, 2020. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/3314.

DANIEL, D. Modelagem por polinômios. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/296885872.pdf>.

De FREITAS VAZ, D. A.; CRUVINEL DE JESUS, P. C. Uma Sequência Didática para o Ensino da Matemática com o Software Geogebra. **R**evista Estudos - Revista de Ciências Ambientais e Saúde (EVS), Goiânia, Brasil, v. 41, n. 1, p. 59–75, 2014. DOI: 10.18224/est.v41i1.3365. Disponível em: https://seer.pucgoias.edu.br/index.php/estudos/article/view/3365.

De LUCAS, Rodrigo Dantas *et al*. GeoGebra para o ensino de função polinomial na perspectiva da ação mediada. Revista Instituto GeoGebra Internacional do Rio Grande do Norte, [*s. l.*], ano 2021, v. 2, ed. 1, p. 17-36, 22 jul. 2021. DOI https://doi.org/10.21708/ISSN24478318.v2.n1.id10561.2021. Disponível em: https://periodicos.ufersa.edu.br/rigirn/article/view/10561/10723.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching: the case of functions. Studies in Mathematics. v.21, p. 521-544 (1990).

EVEN, R. Factors Involved in linking representations of functions. The Journal of Mathematical Behavior. v.17, n. 1, p.105-121 (1998).

FAGUNDES, A. G. de F. Software geogebra: investigação, exploração e experimentação no ensino e aprendizado de matemática para alunos do ensino fundamental. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, *[S. l.]*, v. 8, n. 1, p. 03–15, 2019. DOI: 10.23925/2237-9657.2019.v8i1p003-015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/38595.

FERREIRA, M. C. C. Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor. 2014. 184f. Tese

(Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014

FIORENTINI, D. MIORIM, M. Â. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. Zetetiké - n°1, UNICAMP, Campinas, SP, 1993.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... A Educação Algébrica Elementar. Revista Quadrimestral Pro-Posições, Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79 – 91, mar. 1993.

GARCIA, R.; SILVA, K. Equações do terceiro grau e dobraduras de Beloch. Revista da Olimpíada - IME - UFG, no - 14, novembro de 2019. 21-60 (2019).

GAVILÁN, P. B. Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? Investigación en la escuela, pp 95-108 (2011) http://dx.doi.org/10.12795/IE.2011.i73.07

HEFEZ, A., VILLELA, M. L. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção Profmat, SBM (2012).

HITT, F. Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. Journal of Mathematical Behavior. v.17, n.1, p.123-134 (1998).

HULL, T. C. Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill, The American Mathematical Monthly 118(4):307-315 (2011)

KÜCHEMANN, D. E.. Algebra. En K. M. Hart (Ed.). Children´s Understading of Mathematics: 11-16. Londres: John Murray (1981).

LAUTESCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.19, n.2 237-263 (2017).

LUCERO, J. C. Existence of a Solution for Beloch’s Fold. *Mathematics Magazine*, *92*(1), 24–31 (2019).

MATTOS, F. R. P.; YOKOYAMA, L. A. Construçoes geometricas por dobraduras origami. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, SBEM (2004)
Disponível em https://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/MC82151601749.pdf

MELK. R. S. De O., Polidamas: Uma junção do Jogo de Damas com o Ensino de Polinômios. Dissertação Mestrado Profmat, CEFET Minas Gerais
(2023).
Disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7267&id2=171056291

MENDES, J. R. Algumas considerações sobre o ensino de Álgebra com base nos estudos da História da Matemática. Revista educação e Ensino. Bragança Paulista:

Núcleo de Publicação e Divulgação Cientifica da PROPEP/EDUSF, v. 4, n. 2 pp 49-57 (1999)

MEYER, J. F. C . A; CALDEIRA, A. D.; Malheiros, A. P S. Modelagem em Educação Matemática. Editora Autêntica, 2011.

MONSALVE, E. S, Uma abordagem pedagógica usando aprendizagem baseada em jogos (2015). Disponível em https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.phpstrSecao=resultado&nrSeq=24505@1

MONTEIRO, L. C. N., Origami: História de uma Geometria Axiomática. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

MORAIS, R.; SANTOS. A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2008. Disponível em https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/2442.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MUNIZ, C. A. Brincar e jogar; enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Editora Autêntica (2010).

ONUCHIC, L. DE LA R. et al. Resolução de Problemas Teoria e Prática. Jundiaí, SP; Paco e Littera, 2014.

PIRES, C. M. C. Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática. Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 7, n. 8, p.10-15, jun. 2000.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: interciência, 1995.

PONTE, J. P. BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. Investigação Matemática em Sala de Aula.
Segunda Edição. Autêntica Editora: Belo Horizonte, 2009.

REIS, A. M. Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do Ensino Médio. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 13, n. 2, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/6316. Acesso em: 12 set. 2024. Texto completo em https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10866

REZENDE, A. A. de, CARRASCO, E., SILVA-SALS, A. (2022). Aprendizagem baseada em jogos e gaMificação como instrumentos para o desenvolvimento do pensamento crítico na Matemática: uma revisão teórica. Revista De Estudos Em Educação E Diversidade - REED, 3(8), 1-18. https://doi.org/10.22481/reed.v3i8.10654.

REZENDE, W. M. O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais.
XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
Disponível em https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/823/428

ROSSIN, R. Saberes Docentes sobre o tema Função: uma Investigação das Praxeologias. Tese (doutorado) em Educação Matemática. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. PUC-SP. São Paulo (2006).

SCANO, F. C. Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o geogebra. Pucsp.br, 2024. Disponível em https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11403

SATO, H. D. T. O ensino de polinômios e gráficos na Educação Básica. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12709.

SCHUNCK, L. M. Utilização do software GeoGebra no processo de ensinoaprendizagem de funções polinomiais do primeiro grau em turma do 9o ano do ensino fundamental. Ifes.edu.br, 2023. Disponível em https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/3998.

SHULMAN, L. S. (1986) Those who understand: knowledge Growth. Teaching Educational Research, v.15, n.2, p.4-14.

SILVA, A. F. S. M. Da. O uso da gamificação de polinômios no 8º ano do ensino fundamental, Trabalho de Conclusão de Curso, UFAL (2022). Disponível em http://www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/123456789/10494

SILVA, E. T. Livro Didático: do ritual de passagem à ultrapassagem.
Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. (1996).

SILVINO, D. Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau : possibilidades e dificuldades, Trabalho de Conclusão de Curso, UFPB, 2023. Disponível em https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/27669.

SKOVSMOSE, O. Desafios da Educação Matemática Crítica. Campinas: Papirus, 2008.

SPIEZA, M. Números construtíveis com origami (2018).
Disponível em http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/2018-1/Artigo_Mateus.pdf

TAHAN, M. O homem que calculava. Editora Record (1997).

THEES, A. V. Um estudo de caso do conhecimento do professor de matemática da educação básica sobre o comportamento variacional das funções afim e quadrática. Monografia (especialização) em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática. UFF. Niterói (2009).

VASCONCELOS, Lívia de Oliveira. O conceito de função nas pesquisas dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (1987-2013). 2015. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7392.

VASCONCELOS, Lívia de Oliveira. Obstáculos de ensino e aprendizagem para o conceito de função nas pesquisas do ENEM (1987-2013). Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando:
articulando investigação matemática com o GeoGebra. Revista Educativa. Goiânia, v. 15,
n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

VIEIRA, S. M. O uso da resolução de problemas como metodologia: no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. Ufpe.br, 9 set. 2021. Disponível em https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/41139.

VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes (1994).

APÊNDICE

ATIVIDADES PARA O ENSINO DE POLINÔMIOS

Orientações Iniciais para o Professor

1. Antes de começar as atividades com o Algeplan, é fundamental preparar o ambiente para uma experiência prática e interativa. Explique aos alunos que o Algeplan permite visualizar conceitos algébricos de forma concreta, o que facilitará a compreensão de polinômios e suas operações.

2. Incentive a formação de grupos pequenos (idealmente de até 4 alunos) para promover a colaboração. Os alunos poderão discutir suas representações, trocar ideias e ajudar uns aos outros, enriquecendo o processo de aprendizagem.

3. Prepare previamente os blocos do Algeplan, garantindo que haja quantidade suficiente para representar diferentes termos algébricos. Caso os blocos não estejam disponíveis, disponibilize as peças feitas em cartolina colorida.

4. Durante a atividade, faça perguntas que incentivem a participação ativa dos alunos.

5. Estimule os alunos a explicarem o que estão fazendo enquanto manipulam os blocos. Isso reforça o entendimento conceitual, pois a verbalização ajuda a consolidar o raciocínio e torna o processo mais consciente.

6. Circule pela sala enquanto os alunos trabalham, observando como utilizam o Algeplan. Faça perguntas que verifiquem a compreensão dos conceitos e ofereça feedback imediato, destacando pontos que podem ser melhorados ou corrigidos.

7. Ao final de cada atividade, promova uma discussão em grupo para que os alunos compartilhem suas descobertas e reflexões. Isso não apenas reforça o aprendizado, mas também incentiva a troca de experiências, permitindo que os alunos aprendam uns com os outros.

Atividade 1: Conhecendo o Algeplan

Objetivo:Familiarizar os alunos com as diferentes peças que compõem o Algeplan.

Materiais: Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.

Instruções:

1. Depois de separar os alunos em pequenos grupos, entregue um kit com as peças que correspondem a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.
2. Peça para que separem as peças do mesmo tamanho, colocando em pilhas.
3. Se algum aluno questionar se deve separar por cores, responda que não devem levar a conta a cor, só o tamanho.
4. Explique no quadro o que cada peça representa e faça a distinção de que as peças coloridas serão consideradas positivas e que as brancas, negativas.
5. Peça para separar as pilhas anteriores também pela cor, os alunos devem obter 6 pilhas que corresponderam a $x^2, x, 1$ (coloridas) e as negativas $-x^2, -x, -1$ em branco.

Atividade 2: Brincando com as peças do Algeplan

Objetivos:

Montar polinômios a partir das peças.

Representar algebricamente os polinômios montados.

Materiais: Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.

Instruções:

1. Oriente os alunos para selecionarem peças do Algeplan, seguindo a seguinte regra:

a) Podem escolher ou não peças de todos os tamanhos.

b) Dentro de cada tamanho escolhido, todas as peças devem ter a mesma cor.

c) Podem escolher quantas peças quiserem seguindo as duas regras anteriores.

2. Uma vez que cada grupo tenha feito sua seleção de peças, oriente que façam o registro no caderno, escrevendo uma lista contendo a quantidade e o tipo de cada peça escolhida.
3. Escreva no quadro as listas dos grupos
4. Escreva a expressão algébrica que representa a seleção de peças de cada grupo
5. Verifique que todos os alunos entenderam como expressar algebricamente as montagens.
6. Peça para que cada grupo faça uma nova seleção e registre a expressão algébrica.

7. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.

Atividade 3: Representar polinômios usando o Algeplan

Objetivo:
Representar polinômios usando as peças Algeplan
Traduzir a expressão algebrica para a representação no Algeplan.
Materiais: Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.
Cartões contendo polinômios de grau 0, 1 ou 2.
Instruções:

1. Reparta um cartão por grupo.
2. Solicite que os alunos representem usando as peças do Algeplan os polinômios figuram no cartão.
3. Oriente para que registrem no caderno os polinômios e desenhem sua resposta usando as peça do Algeplan.
4. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.

Atividade 4: Revisão e Consolidação dos Conceitos Atividades

<u>Objetivo</u>: Avaliar a capacidade dos alunos de alternar entre as duas representações estudadas nas Atividades 2 e 3, aplicando e integrando os conceitos aprendidos.
<u>Materiais</u>:
Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.
Cartões contendo alguns polinômios de grau 0, 1 ou 2 e também representações usando peças do Algeplan de alguns polinômios.
<u>Instruções</u>:

1. Entregue um cartão por grupo.
2. Oriente para que os polinômios expressados algebricamente sejam representados usando as peça do Algeplan e para que os polinômios representados pelas peças do Algeplan sejam expressos de forma algébrica.
3. Oriente para que registrem no caderno os polinômios e desenhem sua resposta usando as peça do Algeplan.
4. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.

Esta atividade pode ser conduzida como um jogo, onde cada resposta correta vale um ponto. Em caso de empate entre os grupos, o professor pode escrever no quadro um exemplo adicional de cada tipo. O grupo que resolver corretamente os novos exemplos primeiro será declarado o vencedor.

Atividade 5: Adição de polinômios usando Algeplan.
<u>Objetivo</u>: Trabalhar o conceito de adição de polinômios usando o Algeplan
<u>Materiais</u>:
Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.
Cartões contendo polinômios dois de grau 0, 1 ou 2.

Instruções:

1. Peça para representarem cada polinômio usando as peças do Algeplan.
2. Oriente para registrarem no caderno os polinômios e suas representações.
3. Peça para juntar todas as peças usadas nas representações anteriores.
4. Explique que se tiverem peças do mesmo tamanho de duas cores diferentes (coloridas e brancas) devem descontar as peças que estão em número menor das peças que estão em maior número, ficando só com as que sobraram depois disso.
5. Oriente para registrarem no caderno as peças que sobraram e o polinômio associado.
6. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.
7. Explique que operação realizada é a adição de dois polinômios.
8. Distribua novos cartões e peça para repetirem os passos 2 a 5.
9. Revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.

Atividade 6: Adição de polinômios sem usar o Algeplan.

Objetivo: Trabalhar o conceito de adição de polinômios de maneira puramente algébrica
Materiais: Lista de exercícios com somas de polinômios de graus até 2.
Instruções:

1. Transcreva no quadro o primeiro exercício de adição de dois polinômios
2. Peça para os alunos resolverem no caderno, sem usar o Algeplan.
3. Resolva a questão no quadro explicando o passo a passo e pergunte se há dúvidas.
4. Peça para verificarem o resultado no Algeplan.
5. Proceda da mesma maneira com o seguinte exercício da lista.
6. Explique que o procedimento pode ser estendido para polinômios de graus maiores.
7. Escreva no quadro a adição de dois polinômios de grau 3.
8. Peça para resolverem e depois resolva no quadro.

O professor pode entregar ao final desta atividade uma lista de exercícios contendo somas de polinômios de graus arbitrários.

Atividade 7: Multiplicação de Polinômios

Objetivo: Usar o Algeplan para representar o produto de dois polinômios de grau até 1

Materiais:

Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.

Cartões contendo polinômios dois de grau 0, 1 ou 2.

Instruções:

1. Peça para representar com o Algeplan os dois polinômios contidos no cartão.
2. No quadro, explique que um dos polinômios deve ficar na horizontal e o outro na vertical, formado um L (opcional).
3. Lembre aos alunos que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo e que o produto de um número positivo por um número negativo tem como resultado um número negativo. Ou seja aqui se um lado dos que formam a peça for branco e o outro colorido, será representada por um retângulo branco. Já se os lados tiverem a mesma cor, a peça resultante terá a mesma cor, se os dois forem brancos, a peça resultante será colorida (não branco).

4. Oriente para que, usando as peças disponíveis formem um retângulo cujo base tenho as mesmas peças que um dos polinômios (o que ficou na horizontal caso tenha optado por seguir o padrão em L) e cuja altura tenha as mesmas peças do outro polinômio (o que ficou na vertical).
5. Oriente para registrarem as peças e as quantidades utilizadas.
6. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.

É muito provável que os alunos sintam dificuldade nessa atividade, nesse caso o professor pode optar por fazer um exemplo antes no quadro.

Atividade 8: Quadrado do Binômios

Objetivo: Deduzir a fórmula do quadrado do binômio

Materiais:

Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.

Cartões contendo uma expressão do tipo $(x + a)^2$, escolher um valor para $a > 0$ em cada cartão.

Instruções:

1. Peça para representar com o Algeplan o polinômio contido no cartão.
2. Oriente para que, usando as peças disponíveis formem um quadro cuja aresta tenha as mesmas peças foram utilizadas para representar que o polinômio.
3. Oriente para registrarem no caderno as peças e as quantidades utilizadas
4. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.
5. Questione se os alunos conseguem perceber certo padrão no número de peças utilizadas para montar o quadrado.
6. Escreva um exemplo no quadro e peça para, sem utilizar o Algeplan, tentem descobrir o tamanho e o número necessários para montar um quadrado que tenha essa medida como lado.
7. Peça para verificarem a resposta no Algeplan.

Espera-se que os alunos tenham entendido como realizar o produto na Atividade anterior, caso os alunos tenham dificuldades, fazer uma revisão da atividade anterior com exemplos concretos.

Atividade 9: Quadrado do Binômios

<u>Objetivo</u>: Deduzir a fórmula do quadrado do binômio

<u>Materiais</u>:

Um Algeplan por grupo somente com as peças correspondentes a $x^2, x, 1$ tanto coloridas quanto brancas.

Cartões contendo uma expressão do tipo $(x - a)^2$, escolher um valor para $a > 0$ em cada cartão.

<u>Instruções</u>:

1. Peça para representar com o Algeplan o polinômio contido no cartão.
2. Lembre aos alunos que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo e que o produto de um número positivo por um número negativo tem como resultado um número negativo. Ou seja aqui se um lado dos que formam a peça for branco e o outro colorido, será representada por um retângulo branco. Já se os lados tiverem a mesma cor, a peça resultante terá a mesma cor, se os dois forem brancos, a peça resultante será colorida (não branco).
3. Oriente para que, usando as peças disponíveis formem um quadro cuja aresta tenha as mesmas peças foram utilizadas para representar que o polinômio.
4. Oriente para registrarem no caderno as peças e as quantidades utilizadas
5. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.
6. Questione se os alunos conseguem perceber certo padrão no número de peças utilizadas para montar o quadrado.
7. Escreva um exemplo no quadro e peça para, sem utilizar o Algeplan, tentem descobrir o tamanho e o número necessários para montar um quadrado que tenha essa medida como lado.
8. Peça para verificarem a resposta no Algeplan.

Aqui os alunos podem apresentar uma dificuldade extra por que precisaram usar as peças brancas. Se for necessário faça um exemplo no quadro.

Atividade 10: Generalização do quadrado do binômio

Objetivo: Deduzir a fórmula de $(x + y)^2$

Materiais: Um Algeplan com todas as peças por grupo.

Instruções:

1. Questione seus alunos sobre as novas peças y, y^2 brancas e coloridas que agora fazem parte do kit que receberam.
2. Explique que as novas peças devem seguir as mesmas regras das antigas no que se refere à adição e multiplicação.
3. Peça para representarem no Algeplan a expressão $x + y$.
4. Questione os alunos sobre quais peças devem aparecer na representação de $(x + y)^2$.
5. Peça para representar no Algeplan um quadrado de lado $x + y$.
6. Transcreva as soluções no quadro, discuta-as com os alunos e pergunte se há dúvidas. Após isso, revise as respostas cuidadosamente e faça as correções necessárias.