



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT



NILDA PANTOJA GONÇALVES

**A GEOMETRIA PLANA E A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE TÓPICOS DA
GEOMETRIA ANALÍTICA**

ABAETETUBA—PA

2024

NILDA PANTOJA GONÇALVES

**A GEOMETRIA PLANA E A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE TÓPICOS DA
GEOMETRIA ANALÍTICA**

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira
Cordeiro

ABAETETUBA-PA

2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

G635g Gonçalves, Nilda Pantoja.
 A geometria plana e a álgebra na construção de tópicos da
 geometria analítica / Nilda Pantoja Gonçalves. — 2024.
 136 f. : il. color.

 Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
 Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação
 em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2024.

 1. Geometria analítica . 2. Geometria plana . 3. Álgebra . I.
 Título.

CDD 372.7

NILDA PANTOJA GONÇALVES

**A GEOMETRIA PLANA E A ÁLGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE TÓPICOS DA
GEOMETRIA ANALÍTICA**

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional e Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Data de aprovação: _____/_____/_____

Conceito:

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO-Orientador
PROFMAT/UFPA
Presidente

Prof. Dr. JOSÉ FRANCISCO DA SILVA COSTA
PROFMAT/UFPA
Membro Interno

Profa. Dr. JOÃO CLAUDIO BRANDENBERG QUARESMA
UFPA
Membro Externo

Profa. Dr. JÚLIO ROBERTO SOARES DA SILVA
PROFMAT/UFPA
Membro Interno

Profa. Dr. WILSON RODRIGUES OLIVEIRA
UFPA
Membro Externo

À Deus toda glória.

AGRADECIMENTOS

À Deus, o criador, por acima de todos me ensinar todos os dias.

À minha família, pelo imenso apoio, paciência e parceria.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal do Pará Campus Abaetetuba, pela parceria, paciência e amizade e pelo conhecimento compartilhado.

A sociedade brasileira de Matemática – SBM pelo oferecimento do curso em rede nacional.

Aos colegas da turma de mestrado profissional de 2022 pelas vivências e experiências compartilhadas.

RESUMO

A geometria analítica é um ramo da matemática que envolve harmoniosamente a geometria e a álgebra. Diante disto, buscou-se utilizar desses dois ramos da matemática para a constituição de uma abordagem da geometria analítica por meio da geometria plana e da álgebra. Inicialmente, estudou-se do ponto de vista histórico o desenvolvimento da geometria analítica até sua consolidação. Em seguida, alguns resultados importantes da geometria plana e da álgebra foram apresentados a fim de embasar a transposição desses conhecimentos em direção a geometria analítica. Posteriormente, temas fundamentais da geometria analítica foram abordados com base nos postulados e teoremas da geometria plana e da algébrica. Por fim, para consolidar esses resultados, algumas questões envolvendo a utilização da geometria analítica como ferramenta poderosa na resolução de problemas essencialmente matemáticos e do cotidiano foram apresentadas. As questões apresentadas buscaram ressaltar a aplicabilidade da geometria analítica restringindo-se aos tópicos desenvolvidos. Nesse sentido, o estudo indicou uma tendência promissora de utilização da linguagem geométrica, munida das ferramentas algébricas, na consolidação de resultados analíticos, fortalecendo propositalmente as estratégias de diálogo entre esses ramos da matemática. Diante desse modelo, pode-se concluir que está é uma estratégia diferente para apresentar a geometria como um sólido fundamento da matemática, a álgebra como uma ferramenta potencialmente facilitadora e, principalmente a geometria analítica como o resultado da convergência desses conhecimentos.

Palavras-chave: geometria analítica; geometria plana; álgebra.

ABSTRACT

Analytic geometry is a branch of mathematics that harmoniously involves geometry and algebra. In view of this, it was sought to use these two branches of mathematics to constitute an approach to analytic geometry through plane geometry and algebra. Initially, the development of analytic geometry until its consolidation was studied from a historical point of view. Then, some important results of plane geometry and algebra were presented in order to support the transposition of this knowledge towards analytic geometry. Subsequently, fundamental themes of analytic geometry were addressed based on the postulates and theorems of plane geometry and algebra. Finally, to consolidate these results, some issues involving the use of analytic geometry as a powerful tool in solving essentially mathematical and everyday problems were presented. The questions presented sought to highlight the applicability of analytic geometry by restricting themselves to the topics developed. In this sense, the study indicated a promising trend of using geometric language, equipped with algebraic tools, in the consolidation of analytical results, purposely strengthening the dialogue strategies between these branches of mathematics. In view of this model, it can be concluded that this is a different strategy to present geometry as a solid foundation of mathematics, algebra as a potentially facilitating tool and, especially, analytic geometry as the result of the convergence of these knowledges.

Keywords: analytic geometry; plane geometry; algebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retas concorrentes r e s	38
Figura 2 – Representação geométrica de um ângulo	40
Figura 3 – Caso de congruência LAL	41
Figura 4 – Caso de congruência ALA	41
Figura 5 – Caso de congruência LLL	41
Figura 6 – Caso de congruência LAA_0	42
Figura 7 – Caso de congruência em triângulo retângulo	42
Figura 8 – Mediana de um triângulo	42
Figura 9 – Ângulo externo ao triângulo ABC	43
Figura 10 – Ângulos internos e colaterais internos	43
Figura 11 – Ortocentro de um triângulo	45
Figura 12 – Distância entre um ponto e uma reta	45
Figura 13 – Distância entre duas retas paralelas	46
Figura 14 – Propriedades do triângulo isósceles	46
Figura 15 – Reta tangente a circunferência	47
Figura 16 – Circunferência interna	47
Figura 17 – Circunferências tangentes internamente	47
Figura 18 – Circunferências tangentes externamente	48
Figura 19 – Teorema de Tales	49
Figura 20 – Caso de congruência LLL	50
Figura 21 – Caso de semelhança LAL	50
Figura 22 – Caso de semelhança AA	51
Figura 23 – Relações métricas no triângulo retângulo	51
Figura 24 – Triângulo retângulo	51
Figura 25 – Representação do seno relativo ao ângulo α	52
Figura 26 – Representação do cosseno relativo ao ângulo α	52
Figura 27 – Representação do tangente relativa ao ângulo α	52
Figura 28 – Pontos A, B e O sobre a reta \overleftrightarrow{AB}	64
Figura 29 – Semirreta \overrightarrow{OB} (a) e \overrightarrow{OA} (b)	64
Figura 30 – Distância do ponto X a origem O no sentido da semirreta \overrightarrow{AO} (a) e \overrightarrow{OB} (b)	65
Figura 31 – Ponto X à direita (a) e à esquerda (b) de X' em \overleftrightarrow{AB}	65

Figura 32 – Semirretas opostas \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} sobre a reta r	66
Figura 33 – Distância do ponto Y a origem O no sentido da semirreta \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} , respectivamente	66
Figura 34 – Sistema de eixos ortogonais OXY	67
Figura 35 – Relação biunívoca entre pontos no plano e par ordenado de números reais	68
Figura 36 – Distância entre pontos no plano	69
Figura 37 – Círculo C de centro A e raio r	70
Figura 38 – Pontos A, B e C sobre a reta f	71
Figura 39 – Relação entre as retas paralelas r, s e t	72
Figura 40 – Triângulos semelhantes ACB e ADP	75
Figura 41 – Reta r e ponto externo P determinando a reta $s \perp r$	77
Figura 42 – Reta r determinada pelos pontos A e B	80
Figura 43 – Reta s determinada pelos pontos D e F	81
Figura 44 – Distância entre uma reta r e um ponto P no plano	84
Figura 45 – Triângulo ABC	85
Figura 46 – Ângulo entre as retas r e s	87
Figura 47 – Reflexão do ponto P em relação ao ponto P_0	89
Figura 48 – Rotação do ponto P em torno da origem	92
Figura 49 – Pontos notáveis da elipse	93
Figura 50 – relação entre os raios das circunferências para $B_1 < P < B_2$	94
Figura 51 – relação entre os raios das circunferências para $B_2 < P < B_2$	95
Figura 52 – relação entre os raios das circunferências para $B_1 = P$ ou $P = B_2$	95
Figura 53 – Elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2	96
Figura 54 – Relação notável da hipérbole	100
Figura 55 – Relação entre os raios r_1 e r_2 dos círculos C_1 e C_2	101
Figura 56 – Eixo inferior da hipérbole determinado para P abaixo do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$	101
Figura 57 – Eixo superior da hipérbole determinado para P abaixo do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$	102
Figura 58 – hipérbole φ de centro em F_1 e F_2	103
Figura 59 – Circunferência com centro em P e raio igual a $\overline{DP} = \overline{PF} = r$	106
Figura 60 – Circunferência com centro em P e raio igual a $\overline{DP} = \overline{PF} = r$	107
Figura 61 – Parábola δ de foco F e vértice V e diretriz d	108
Figura 62 – Ângulo θ entre as trajetórias a e b dos aviões	110
Figura 63 – Triângulo isósceles ABC	112

Figura 65 – Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BOC	115
Figura 66 – triângulo retângulo ABC	116
Figura 67 – Ilustração do problema	117
Figura 68 – Ortocentro do triângulo ABC	118
Figura 69 – Um par de retas concorrentes obtidos de um caso de hipérbole degenerada ...	122
Figura 70 – Representação gráfica do par de retas paralelas	123
Figura 71 – Representação gráfica de uma elipse degenerada representando um ponto	124
Figura 72 – Reta paralela ao eixo OY	124
Figura 73 – Circunferência	125
Figura 74 – Aplicação óptica da elipse	128
Figura 75 – Hipérbole de focos A e B	129
Figura 76 – Parábola de foco F	131

LISTA DE SÍMBOLOS

\perp	Perpendicular
\parallel	Paralelo a
\notin	Não pertence
\hat{A}	Ângulo
\overline{AB}	Segmento
\overrightarrow{CB}	Semirreta
\overleftrightarrow{AC}	Reta
\equiv	Congruente
\in	Pertence
\cap	Interseção
$ z $	Valor absoluto
\sim	Semelhante a
\times	Concorrente
\leq	Menor que
\geq	Maior que
\approx	Aproximadamente
\forall	Para todo
δ	Delta
\rightarrow	Implicação
\leftrightarrow	Equivalência
α	Delta
β	Beta
γ	Gamma
θ	Theta
μ	Mu
π	Pi
ω	Omega
\subset	Está contido
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$d_{a,b}$	Distancia euclidiana

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	A HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA	19
2.1	O método da geometria analítica e a proposta cronológica de Malta	19
2.2	As principais contribuições da antiguidade	20
2.3	O aprimoramento do pensamento matemático da civilização helênica	22
2.4	Investigações da idade heroica da civilização helênica	23
2.5	O aparecimento das cônicas	26
2.6	A álgebra e a idade de prata da matemática grega	27
2.7	Contribuições da idade média	29
2.8	Contribuições do preludio da era moderna	31
2.9	Investigações da era moderna	34
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	37
3.1	Geometria plana	37
3.1.1	Noções primitivas	37
3.1.2	Proposições primitivas	37
3.1.2.1	Axiomas da existência	37
3.1.2.2	Posições de dois pontos e de ponto e reta.....	37
3.1.2.3	Postulado da determinação da reta e do plano.....	37
3.1.2.4	Retas concorrentes.....	37
3.1.3	Segmento de reta	38
3.1.3.1	Semirreta.....	38
3.1.3.2	Relações entre segmentos.....	38
3.1.3.3	Distância entre dois pontos.....	39
3.1.4	Ângulos	39
3.1.4.1	Ângulos reto, agudo, obtuso	39
3.1.4.2	Ângulos complementares e ângulos suplementares	40
3.1.5	Triângulos	40
3.1.5.1	Congruências de triângulos.....	40
3.1.5.2	Mediana de um triângulo	40

3.1.5.3	Teorema do ângulo externo	42
3.1.5.4	Soma dos ângulos de um triângulo.....	42
3.1.5.5	Ângulos colaterais internos e alternos internos	43
3.1.6	Paralelismo	43
3.1.7	Perpendicularidade	44
3.1.7.1	Altura e mediatriz de um triângulo	44
3.1.7.2	Ortocentro e alturas	44
3.1.7.3	Distância entre um ponto e uma reta	44
3.1.7.4	Distância entre duas retas paralelas	45
3.1.7.5	Propriedade do triângulo isósceles	45
3.1.8	Circunferência	46
3.1.8.1	Posições relativas de reta e circunferência	46
3.1.8.1.1	Tangente.....	46
3.1.9.1.2	Posições relativas de duas circunferências	46
3.1.9	Teorema de Tales	47
3.1.10	Semelhança de triângulos	48
3.1.11	Relações métricas em triângulos retângulos.....	49
3.1.11.1	Teorema de Pitágoras.....	51
3.1.11.1.1	Seno, cosseno e tangente	51
3.1.12	Áreas de polígonos	52
3.1.12.1	Paralelogramo.....	53
3.1.12.2	Expressões da área do triângulo	53
3.1.13	Lugar geométrico.....	53
3.2	Tópicos de álgebra	53
3.2.1	Polinômio	53
3.2.1.1	Polinômio nulo	54
3.2.1.2	Polinômios idênticos	54
3.2.2	Equação Polinomiais	54
3.2.2.1	Raiz de equação polinomial.....	55
3.2.2.2	Conjunto solução	55
3.2.2.3	Resolução de uma equação.....	55
3.2.2.4	Equações equivalentes.....	55
3.2.3	Noção de Matriz	55
3.2.3.1	Matriz quadrada	56

3.2.4	Determinantes.....	56
3.2.4.1	Definição de determinantes ($n \leq 3$)	56
3.2.4.2	Menor complementar e complemento algébrico	58
3.2.4.3	Teorema fundamental de Laplace	58
3.2.5	Sistemas lineares.....	58
3.2.5.1	Equações lineares	58
3.2.5.2	Sistema linear	59
3.2.5.2	Teorema de Cramer.....	59
3.2.6	Produtos notáveis	60
3.2.6.1	Quadrado da soma	60
3.2.6.2	Quadrado da diferença	60
3.2.6.3	Produto da soma pela diferença	60
3.2.7	Módulo.....	60
3.2.8	Transformações trigonométricas	61
3.2.8.1	Funções pares e funções ímpares.....	61
3.2.8.2	Cosseno da soma e da diferença.....	61
3.2.8.3	Seno da soma e da diferença.....	61
3.2.8.4	Tangente da soma e da diferença.....	62
3.2.8.5	Cotangentes da soma e da diferença.....	62
4	TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA.....	63
4.1	Coordenadas e distância na reta e no plano.....	63
4.2	Distância entre pontos do plano	68
4.3	Caracterização algébrica do círculo.....	69
4.4	Condição para alinhamento de três pontos	71
4.5	Equações da reta no plano	73
4.5.1	Equação paramétrica da reta.....	76
4.5.2	Equação geral, reduzida e segmentária da reta.....	79
4.5.3	Feixe de retas paralelas.....	82
4.6	Distância de um ponto a uma reta.....	84
4.7	Área do triângulo	86
4.7.1	Área do paralelogramo	87
4.8	Ângulo entre retas.....	88
4.9	Transformações geométricas Planas	88

4.10	Cônicas.....	90
4.10.1	Equação da Elipse	92
4.10.2	Equação da Hipérbole	99
4.10.3	Equação da Parábola	105
5	APLICABILIDADE DA GEOMETRIA ANALÍTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMETRICOS	110
6	CONCLUSÃO	132
	REFERÊNCIAS.....	133

1 INTRODUÇÃO

Devido a importância do ensino da geometria e da álgebra na educação básica, suas abordagens são amplamente contempladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desde os anos iniciais da escolarização até sua consolidação no ensino médio (Brasil, 2018). Entre as competências gerais da educação básica está a valorização e a utilização dos conhecimentos historicamente construídos (Brasil, 2018, p. 9), o que permite a utilização de conhecimentos diversos para a construção de novos conhecimentos. Pode-se destacar ainda o “exercitar a curiosidade intelectual e recorrer a abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas” (Brasil, 2018, p. 9), permitindo uma articulação entre diferentes tipos de conhecimento. Aliado a isso, considera importante o uso de ferramentas tecnológicas para a produção do conhecimento, para o que propõe “compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p. 9).

Na etapa do ensino médio a BNCC propõem a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental. Entre as competências específicas de matemática e suas tecnologias destaca-se “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (Brasil, 2018, p. 531). Com base nessa intenção, a associação de equações algébricas e representações geométricos por meio do plano cartesiano, podem ser observados segundo as habilidades propostas, nos três anos do ensino médio.

A interpretação, análise, investigação, conversão, associação e utilização dos conteúdos matemáticos propostas no ensino médio requer habilidades estratégicas que permitam o tratamento crítico e criativo no ensino e aprendizagem da matemática.

Diante desse cenário, traçar currículos que atendam a essas especificidades torna-se um grande desafio ainda maior, no que diz respeito a harmonização dos campos da matemática. Nesse sentido, a Base Nacional fornece possibilidades de se trabalhar os conteúdos matemáticos nos diferentes contextos, possibilitando diversos caminhos investigativos.

Nesse sentido, no que diz respeito a trabalhar a matemática sob o ponto de vista geométrico e algébrico, separadamente, causa certa limitação as possibilidades de alcance da matemática. Nota-se que, entre os principais geômetras clássicos havia preocupação em oferecer interpretações geométricas às questões matemáticas, utilizando para isso ferramentas de construção geométrica precisas e robustas. Enquanto, por seu lado, os algebristas procuravam embasar seus métodos em investigações com uso de técnicas simbólicas. Entre esses passos aparecem os nomes de grandes matemáticos que se ocupavam em grande medida de uma ou outra matéria, porém aos nomes de René Descartes e Pierre de Fermat é meritada a formal ocupação ao mesmo tempo da álgebra e da geometria que serviu de base ao descobrimento da geometria analítica e, com isso a harmonização esperada desses campos da matemática (Boyer; Merzbach, 2012). Essas duas vertentes dentro de um único campo de estudo forneceu a geometria analítica o posto de uma potente ferramenta matemática capaz de transferir uma investigação geométrica para uma investigação algébrica e vice-versa (Eves, 2004, p. 383).

Nesse sentido, um estudo harmonioso da álgebra e da geometria plana historicamente é de grande valor para a matemática, e permite um tratamento recíproco capaz de fomentar o pensamento abstrato ampliando o entendimento dos termos, símbolos, equações e formas. A fim de solidificar esse tratamento, o estudo da geometria analítica será realizado em três frentes, inicialmente por meio de uma base histórica, em seguida por meio da geometria plana e álgebra e por fim através da aplicação da resolução de problemas matemáticos.

Com base ao que foi exposto anteriormente, o objetivo deste trabalho será utilizar os conhecimentos obtidos no ensino fundamental em álgebra e geometria plana, a fim de direcioná-los à geometria analítica, promovendo um avanço em abstração do pensamento matemático nesse processo de transposição. E ainda utilizar desse conhecimento para promover aplicações em diversos contextos que os envolvam.

Essa dissertação está estruturada em cinco capítulos. No primeiro é feita uma introdução com indicativos gerais a respeito do tema, expondo objetivos e as tendências gerais da utilização da linguagem geométrica e algébrica no ensino da geometria analítica.

No segundo capítulo, faz-se um apanhado geral histórico da geometria analítica, e todo seu processo de desenvolvimento. Aqui os fatos são apresentados em ordem cronológica e por períodos de tempo específicos, desde as contribuições de sociedades mais antigas até a sua formalização munida de suas especificidades. E cada período são apresentados os nomes dos principais matemáticos e as descobertas que vieram a contribuir para seu desenvolvimento.

Para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica baseada nas produções de Malta (2015), que analisou cronologicamente os fatos que propiciaram a descoberta da geometria analítica até sua descoberta no século XVII, por René Descartes e Pierre de Fermat. Além deste, as produções de Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011), que apresentam um panorama geral da história da matemática em suas perspectivas singulares. A ordenação cronológica do desenvolvimento da geometria analítica propiciou a assimilação do processo e dos elementos essenciais nos quais se constituem essa matéria.

Calixto (2022) em sua explanação, com base na proposta de Carson e Rowlands (2007), defende que “a narrativa de episódios históricos específicos é empregada como uma poderosa ferramenta pedagógica para despertar a consciência dos alunos a respeito do caráter abstrato dos objetos, dos procedimentos e do pensamento matemático” (Calixto 2022, p. 83). Segundo os autores, o registro histórico revela um padrão gradual de desenvolvimento, que permite uma reconfiguração crescente do entendimento de determinado assunto. Essas novas formas de compreensão contribuem para o aprimoramento da habilidade de abstração, assim como para a aprendizagem do próprio assunto através de sua evolução (Calixto 2022, p. 83-84). Inicialmente, partem do argumento de que “essas transformações podem ser observadas pelo processo histórico, e por meio dele é possível “[...]compreender as inovações ou descobertas históricas que transformaram o sujeito” (Calixto 2022, p. 84, *apud* Carson; Rowlands 2007, p. 922). Defendem que definindo propósitos ao uso da história da matemática é possível utilizá-la a fim de compreender o produto das descobertas e as motivações que as promoveram.

Em sua explanação, os autores defendem que “a utilização da perspectiva histórica pode contribuir significativamente na fase de construção do currículo para o ensino de matemática” (Calixto 2022, p. 84). Num primeiro nível ressaltam que a utilização desta perspectiva leva a insights sobre como foram introduzidas as descobertas do conhecimento matemático, suas fontes, razões e momentos históricos que o circundaram, além de ajudar a compreender a evolução do conhecimento através de uma série de numerosos e pequenos desenvolvimentos e seus impactos na construção da consciência humana (Calixto 2022, p. 84).

A capacidade do contexto histórico de aproximar realidades confere ao estudante a oportunidade de perceber os eventos através da ótica daquele que os originaram em seus tempos, o que por sua vez confere sentido e significado ao conhecimento, além de introduzir percepções diferenciadas nos estudantes que não apresentam interesse na disciplina. (Calixto 2022, p. 110-111). Por outro lado, o autor apresenta uma ressalva quanto ao uso de uma narrativa que não propicie um vínculo eficiente entre os estudantes e os personagens.

Chaquiam (2017) considera o crescente interesse pela história das ciências, em especial a história da matemática, como um importante impacto na melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, pois permite observar os desdobramentos que resultaram nas teorias hoje estruturadas, sua evolução e, ainda perceber os esforços que de que se originaram (Chaquiam 2017, p. 13). Dessa forma, entendem que “a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano” (Chaquiam 2017,p. 14), e assim amparar o ensino dos infortúnios pelo desconhecimento de seus porquês.

Diante desse cenário, Chaquiam (2017) aponta considerações, trazidas pela literatura, que vão a favor do uso da história da matemática no ensino de matemática. Em resumo, defendem sua contribuição para: (1) satisfazer o desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram; (2) o ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo; (3) entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências; (4) o encontro entre o especialista em matemática e profissionais de outras áreas científicas; (5) oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente; e (6) ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática. O autor ainda ressalta a presença e importância da matemática no delineamento e construção do saber ao longo da evolução histórica da humanidade.

No terceiro capítulo será feita uma abordagem dos principais tópicos da geometria plana e da álgebra que servirão de base e fundamentação teórica para o desenvolvimento da geometria analítica. Nesse tópico, utiliza-se como referência primordialmente as obras da coleção *Fundamentos de matemática Elementar* (2013) e na coleção Profmat, além de consulta a livros didáticos e artigos.

No quarto capítulo apresenta-se de fato as demonstrações de resultados fundamentais da geometria analítica por meio de argumentos da geometria plana munidos da ferramenta algébrica, com o auxílio do software geogebra na determinação dos passos das construções em torno das demonstrações. Tendo como referência o plano cartesiano, e a ideia de coordenadas e distância na reta e no plano, serão realizadas demonstrações para áreas, equações da reta no plano, paralelismo, perpendicularismo, alinhamento de pontos, distâncias, circunferência, transformação geométricas planas e cônicas. Nesse sentido, os princípios fundamentais da geometria analítica no plano, ou seus principais resultados, foram utilizados tendo como

referência Iezzi (2013*b*), que apresenta uma abordagem mais direcionada para o ensino médio, e Delgado, Frensel e Crissaff (2017), que apresenta uma linguagem mais aprofundada.

No quinto capítulo, aplica-se a geometria analítica em alguns problemas da geometria plana e em outros problemas matemáticos, determinando assim suas soluções e apresentado seus respectivos registros geométricos com o auxílio do software matemático *geômetra*, que entrega um panorama geral essencialmente analítico dos passos e resultados encontrados.

Por fim, conclui-se a aplicabilidade da geometria analítica e a reciprocidade de investigações entre os ramos da geometria, proporcionando ao aluno uma visão abrangente da matemática e ao professor uma possibilidade de relacionar apresentando uma estratégia rica em possibilidades e que deixa margem para aprimoramentos e possibilidade de desenvolvimentos considerando espaços de dimensão superior.

2 A HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Nesse capítulo, apresenta-se o percurso histórico da geometria analítica proposto por Malta (2015), que foca nos fatos que propiciaram a descoberta da geometria analítica no século XVII, e no qual apresenta questões relativas a contribuição dos particulares inventores da mesma. Na proposta do autor, a narrativa dos episódios históricos específicos é exposta em períodos, nos quais busca-se especificar em cada subdivisão de épocas os fatos mais proeminentes ao despertar do caráter excêntrico da geometria analítica. Tal sequência é constituída de oito períodos, cuja ordem reflete, em grande medida, a evolução do próprio pensamento matemático. Nesse sentido, a fim de traçar a rota da geometria analítica até o século XVII far-se-á um panorama histórico cronológico dos principais nomes envolvidos, suas contribuições e legado que culminariam nessa descoberta. Sobretudo, tomando como base os aspectos recíprocos da geometria analítica até sua harmoniosa relação dentro da geometria analítica.

2.1 O método da geometria analítica e a proposta cronológica de malta

A geometria analítica é um método da geometria que combina dois aspectos recíprocos fundamentais: álgebra e geometria (Eves, 2004, p. 382). A ideia central desse ramo da matemática consiste em estabelecer uma correspondência recíproca entre lugares geométricos e equações algébricas (Boyer; Merzbach, 2012, p. 242). A descoberta da geometria analítica é creditada aos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, que separadamente lançaram as bases desse poderoso método de encarar problemas geométricos e algébricos (Boyer; Merzbach, 2012). Considerando, nesse sentido, as contribuições deixadas ao longo da história por ilustres matemáticos que culminaram ao seu surgimento (Malta, 2015).

Malta (2015) propõe, em seu trabalho (intitulado o surgimento da geometria analítica no século XVII: debate histórico sobre questões referentes a sua descoberta) um panorama histórico das ideias que culminaram ao surgimento da geometria analítica, composto de uma sequência temática cujo principal objetivo é fazer com se tenha uma percepção gradual e cronológica dos fatos que desempenharam importância nesse percurso, ao passo em estes são apresentados dentro de uma linha temporal específica. Conforme Boyer e Merzbach (2012), a subdivisão dos acontecimentos em períodos é conveniente para a história tanto quanto o uso de um sistema de coordenadas é útil na geometria.

O autor parte do argumento de que pouquíssimos trabalhos com enfoque historiográfico

sobre a geometria analítica são encontrados em âmbito nacional (Malta, 2015, p. 1). Dessa forma, entende que contextualização histórica desse ramo da matemática acrescenta ao próprio entendimento da mesma ao delinear os trâmites de sua descoberta solidariamente às condições favoráveis e as casualidades advindas dos tempos passados (Malta, 2015, p. 6). Na análise histórica Malta (2015, p. 6) aponta para um recorte histórico mais “elástico mostrando que a descoberta da geometria analítica foi fruto não só das condições favoráveis do primeiro terço do século XVII, mas também de casualidades advindas de tempos passados”. Com isso, apresenta uma história geral da geometria analítica relatada de forma diacrônica “na qual o conhecimento evolui de forma dinâmica com marcas estilísticas próprias” (p. 6).

Malta (2015) faz um levantamento dos principais estilos de pensamento que interferem nas relações históricas, sociológicas e culturais que interferiam no desenvolvimento da geometria analítica em cada período mencionado. Tendo em vista que “o desenvolvimento ocorre de forma gradual e continuada, mediante mutações sucessivas nos estilos de pensamento, mas sem rupturas drásticas na transição de um estilo para outro” (p. 10). Nesse sentido, cada período é apresentado trazendo os estilos de pensamento vigente, principais nomes e suas influencias, e o viés de conhecimento matemático que se delineou a fim de forjar a geometria analítica. Além de identificar as fontes as razões e momentos em que tais mudanças de pensamento foram introduzidas por meio de Malta (2015), a perspectiva histórica traz as manifestações dos eventos acompanhadas das percepções originárias das obras de Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2004), além de outras obras que tratam de história da matemática.

Em meio as oito divisões temporais do estudo proposto por Malta (2015), encontram-se levantamentos oriundos de civilizações da antiguidade dos primórdios dos registros mais antigos da matemática até as contribuições dos séculos XVII efetuadas pelos matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat, organizando-se seguindo o percurso histórico do desenvolvimento do pensamento matemático em torno da álgebra e da geometria, a saber: (1) as principais contribuições da antiguidade; (2) Civilização helênica; (3) Idade Heroica da civilização helênica; (4) Estudo das cônicas; (5) Idade de Prata da Matemática Grega; (6) Contribuições da Idade Média; (7) Contribuições do Preludio da Era Moderna; (8) Contribuições da era moderna.

2.2 As principais contribuições da antiguidade

Segundo Eves (2004), a aritmética e a mensuração prática são tidas como a “ênfase original da matemática” (p. 57), cujas concepções possuem estreita relação com os aspectos

cotidianos e práticos. Boyer e Merzbach (2012) atribuem as noções de número, grandeza e forma à capacidade humana de perceber contrastes e a capacidade de perceber analogias à massa de experiências caóticas. E, desse modo remonta a um longo processo de desenvolvimento até tomar propriedades de conhecimento científico a partir da incorporação de tendências ao tratamento abstrato dessas ciências praticas (Eves, 2004, p. 57).

Eves (2004) destaca o conceito de número e o processo de contar como anteriores aos primeiros registros históricos, conjectura tal acontecimento como resultado de um senso numérico comum à espécie humana capaz de “reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena” (Eves, 2004, p. 25). A capacidade de realizar analogias tornou possível a associação de registros simples de correspondência biunívoca, em que “[...] para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal [...]” (Eves, 2004, p.26), para mais tarde tal representação assumir sons designativos, por meio da linguagem falada, a fim de efetuar registros verbais dos números de objetos de um dado grupo pequeno, e por fim, através do aprimoramento da escrita surgirem arranjos de símbolos para representar os números.

Boyer e Merzbach (2012) assinala a capacidade humana de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita como um caminho aberto para a geometria e a álgebra. Assim, revolve ao desenvolvimento de tendências no sentido da abstração como o caminho do estudo da ciência por si mesma e, dessa forma, um caminho aberto a evolução da aritmética à álgebra e da mensuração à geometria (Eves, 2004, p. 57).

Eves (2004) destaca a familiaridade dos egípcios e babilônicos com práticas de mensuração de figuras geométricas e a assina-la como marca de suas sociedades. Vale ressaltar, que dado o propósito prático do uso da matemática por esses povos o elemento principal nas questões eram cálculos direcionados a casos concretos e específicos, o que mantinha a relação entre a aritmética e a geometria pouco teórica (Boyer; Merzbach, 2012, p. 38). Nesse sentido, “mesmo que essas civilizações tenham evoluído razoavelmente em aritmética e geometria, a falta de uma preocupação com os processos gerais e dedutivos dificultava a associação desses campos num sistema formal que caracterizaria a geometria analítica futura” (Malta, 2015, p. 12).

Conforme Boyer e Merzbach (2012), não se pode afirmar categoricamente que a matemática egípcia e babilônica não se preocupava com questões de natureza demonstrativa, porém há ausência de enunciados explícitos que indiquem esse tipo de tratamento da matemática por esses povos, de modo que se pode afirmar “que muito da matemática pré-

helênica era prática, mas certamente não toda” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 50-51).

Diante disso, a transposição do uso prático da matemática para um tratamento mais teórico se daria apenas tempos mais tarde com a civilização grega. Não obstante, tais desenvolvimentos nas artes práticas contribuíram aos desenvolvimentos futuros da geometria analítica.

2.3 O aprimoramento do pensamento matemático da civilização helênica

O aprimoramento do pensamento matemático sofreu importantes transformações com o deslocamento do centro do desenvolvimento matemático da mesopotâmia para o mundo grego e provocou mudanças de pensamentos na matemática (Malta 2015, p. 12). Em suas atividades intelectuais os gregos eram mais inclinados a questões filosóficas do que com as exigências da vida prática, o que possibilitou uma harmoniosa busca por promover e aprofundar os conhecimentos relativos à natureza (Boyer; Merzbach, 2012, p. 56). Com isto, deve-se a chamada Era Helênica inspirada pelos povos gregos a concretização do pensamento formal no tratamento da matemática.

A crescente atmosfera do racionalismo grego abriu caminho para Tales de Mileto criar um modelo de pensamento que buscava comprovar hipóteses a partir da composição de outras já consolidadas, chamado de método dedutivo. Esse modelo traçava uma linha de argumentos lógicos, fundamentando-se na comprovação de resultados mediante investigações sistemáticas, essa nova forma de pensar tornou-se o alicerce para a sistematização de conceitos tanto da aritmética quanto da geometria (Malta 2015, p 13).

Os pitagóricos deram prosseguimento a essa linha de pensamento lançada por Tales de Mileto, e passaram a agregar argumentos lógicos para a conceituação dos objetos do conhecimento (Malta 2015, p. 14). Eles, se aplicavam em estudar as leis matemáticas e chegaram à conclusão de que toda a natureza deve ser uma expressão de leis e relações matemáticas (Carson; Rowland 2012 *apud* Calixto, 2022, p. 96). Nesse sentido, a concepção das estruturas numéricas e geométricas passaram a ser explicadas a partir de argumentos científicos, os números passaram de um resultado com finalidade de uso prático, como tratado pelos babilônicos e egípcios, para um conceito carregado de propriedades capazes de explicar quaisquer fenômenos da realidade, o que os levava a “uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética” (Eves, 2004, p. 97)., enquanto naturalmente através do método dedutivo “acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica” (Boyer;

Merzbach, 2012, p. 55).

Encorajados pelas ideias de que todas as coisas que podem ser conhecidas têm número a busca pela quantificação do mundo físico com base na linguagem dos números, concebida pelas relações entre números inteiros, avançou levando ao aprimoramento dos conceitos como os de razão e proporção que passaram a embasar toda a matemática grega (Malta, 2015, p. 13). O nome de razão empregado pelos gregos dizia-se da “relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 59). Essa relação “focaliza a atenção sobre a conexão entre pares de números, tende a pôr em relevo os aspectos teóricos do conceito de número e a reduzir a ênfase no papel do número como instrumento de cálculo ou aproximação de medidas” (Boyer; Merzbach 2012, p. 60). O estudo das proporções dizia-se da igualdade de razões que “presumidamente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos números pitagórica. Mais tarde, as quantidades que entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 61). Nesse sentido, as relações entre segmentos de linha de uma para o outro (e similarmente para áreas e volumes) passaram a ser expressáveis através de razões de inteiros.

No entanto, Malta (2015) destaca a mentalidade da civilização helênica restrita aos números e as curvas conhecidos, destas familiarizados apenas com a reta e o círculo e, enquanto daqueles consideravam apenas os inteiros positivos, não possuindo uma maturação na harmonização das relações entre esses dois campos. Em contrapartida, o autor apresenta a sistematização do pensamento nesse período como essencial ao desenvolvimento posterior das cônicas realizado por Apolônio, na linha de desenvolvimento da geometria analítica.

2.4 Investigações da idade heroica da civilização helênica

Seguindo a era pitagórica, a chamada idade heroica da civilização helênica caracterizou-se por pelo considerável número de investigações levantadas em oposição ao estilo de pensamento vigente, que viriam a ser impactantes para os desdobramentos que seguiriam o curso do pensamento matemático (Malta, 2012, p. 14). Nesse cenário, grande parte das críticas propostas estavam relacionadas às ideias dos pitagóricos e diziam respeito as suas concepções centrais: os números. Boyer e Merzbach (2012) destacam que “era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de *arithmos* ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões” (p. 70). Porém, a descoberta de que os números inteiros positivos e

suas razões eram insuficientes para descrever propriedades básicas e simples da geometria abalou os alicerces da matemática grega. Não bastavam, por exemplo, “para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis não importa quão pequena se escolha a unidade de medida” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 70). Contrapondo a ideia pitagórica de que o espaço e o tempo podem ser pensados como constituídos de pontos e instantes, em que um ponto é considerado como uma unidade tendo posição no espaço, Zeno de Eléia propôs seus paradoxos que abriram caminho para uma propriedade numérica conhecida como continuidade, ao mesmo tempo em que contribuiu para abalar o sistema a de ideias do coletivo de pensamento com relação a aritmética adotada (Boyer; Merzbach, 2012, p. 72).

Essa tomada de consciência levou a um rompimento na matemática, em que a aritmética perdeu grande parte de seu prestígio e, com isso os números pitagóricos já não davam conta das relações da geometria associadas à teoria das proporções, passando a serem estudados à parte da geometria, ocasionando um desligamento total entre esses dois campos da matemática (Boyer; Merzbach, 2012, p. 73). Boyer e Merzbsch (2012) destacam que, enquanto o reino dos números continuava a ser discreto, o mundo das grandezas passou a ser contínuo e, a fim de tratá-las passou-se a utilizar a geometria e, esta tornou-se uma importante ferramenta para representação, mensuração e resolução de problemas na matemática, o que resultou “em uma geometrização radical do pensamento matemático” (Malta, 2015, p. 49).

O novo caráter assumido pela geometria originou-se dessas argumentações, e rompeu-se a ideia de que a geometria poderia ser completamente aritmetizada. Com isto, as convicções como a de que “tudo é número” (inteiro) ou que “relações entre segmentos de linha de um para outro (...) são sempre expressáveis através das razões de inteiros” já não se encaixavam. Malta (2015) ressalta ainda que dada a insuficiência dos números, os problemas clássicos da matemática passaram a exigir soluções com base na construção de linhas ao invés do cálculo no tratamento das grandezas, assim “comprimento, área, e volume não eram números ligados a uma configuração dada; eles eram conceitos geométricos indefinidos” (p. 17, *Apud* Boyer, 2004). Dessa forma, conforme destaca Malta (2015) “uma nova configuração estilística para a atividade matemática pautada exclusivamente em ideias geométricas” (p. 49) passou a configurar-se no cenário da matemática grega. A partir desse período, a matemática se guiou por construções geométricas em que as propriedades algébricas de somas, diferenças, produtos e quocientes passaram a ser deduzidas entre argumentos geométricos como segmento, áreas e volumes (Boyer; Merzbach, 2012, p. 73-74).

Essa ênfase excessiva sobre a geometria minou o desenvolvimento da álgebra naquela época e, os principais problemas matemáticos passaram a ter suas soluções exploradas pela geometria o que resultou no desenvolvimento da própria geometria com a introdução de novas curvas e aprimoramento de métodos mecânicos e esteriométricos de construções geométricas. Para Bayer e Merzbach (2012) “o principal legado matemático da Idade Heroica pode ser condensado em seis problemas: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais” (pç. 76), dos quais os três primeiros se destacaram por proporcionarem incontáveis resultados relevantes na matemática, através de suas investigações (Malta, 2015, p. 17).

A duplicação do cubo ou problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado, a trissecção do ângulo ou problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais e a quadratura do círculo ou problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado geraram inúmeras tentativas de soluções levando ao descobrimento de outras relações e grandes avanços para a geometria (Eves, 2004, P. 134). Tal “refinamento gradual dos problemas clássicos ampliou o número de lugares conhecidos em relação à reta e o círculo”, porém, revelaram a necessidade de se abandonarem os métodos tradicionais a fim de obterem novos resultados (Malta, 2012, p. 19). Quanto a “idade heroica da matemática”, conforme destaca Boyer e Merzbach (2012) foi assim chamada “pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas matemáticos de significado tão fundamental” (p. 54).

Seguindo os passos de uma matemática formal “que se tornou a marca cultural da Grécia clássica” (Calixto, 2022, p. 89) surge no cenário grego a formalização do método analítico defendido por Platão, o qual por meio de passos sucessivos de análise e síntese propunha comprovar hipóteses. A aplicabilidade desse método na matemática partia de verdades já demonstradas, de maneira tal que se a ordem dos passos pudesse ser invertida o teorema proposto era demonstrado, esse processo inverso denominado síntese consiste-se em a partir de uma verdade conhecida deduzir a verdade que se quer demonstrar (Malta, 2015, p. 20). As contribuições de Platão ao desenvolvimento da matemática foram em grande parte de caráter inspirador levando-o a ser conhecido como “forjador de matemáticos” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 77) tendo em vista sua convicção “de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito” (Eves, 2004, p. 132).

Suas ideias acerca da aritmética a destacavam como possuindo “um efeito muito grande

de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato”, porém tendo em vista sua forte influência pitagórica preservou muito de suas ideias dificultando um aprimoramento mais abrangente sobre números (Boyer; Merzbach, 2012, p. 78). Enquanto em sua geometria de glorificação das formas, como possuindo um caráter transcendente, realizou estudos sobre sólidos regulares e suas propriedades, além de lançar mão dos grandes problemas matemática, que trouxeram novos resultados para a matemática. No entanto sua visão da geometria acabou restringindo as construções geométricas efetuadas com régua e compasso (Boyer; Merzbach, 2012, p. 78). A restrição imposta pelo método platônico foi aos poucos superada possibilitando a introdução de novas curvas no cenário geométrico grego, como a quadratriz de Hípias, amadurecendo paulatinamente a ideia de lugar no imaginário coletivo (Malta, 2015, p. 18).

2.5 O aparecimento das cônicas

As secções cônicas depois conhecidas como hipérbole, parábola e elipse constituem umas das contribuições mais importantes do período para o desenvolvimento da geometria analítica (Malta, 2012, p. 22). Entre os mais notáveis gregos que se debruçaram ao estudo dos lugares geométricos e suas propriedades encontra-se Apolônio, um de seus trabalhos mais influentes é o tratado sobre *Cônicas* no qual traz proposições gerais sobre curvas e suas propriedades, suas descrições acrescentaram grandes contribuições a geometria.

Boyer e Merzbach (2012) afirmam que antes de Apolônio haviam sido escritas exposições gerais sobre *Cônicas* por Aristeu e por Euclides, até então essas curvas eram obtidas a partir de três tipos de cone circular reto e um plano de secção, em que conforme o ângulo do vértice fosse agudo, obtuso ou reto e o plano cortasse perpendicularmente as suas geratrizes as curvas tomavam formas distintas. Isto é, as curvas eram obtidas a partir da natureza do ângulo do vértice desses três cones (Malta, 2015, p. 22). Em contrapartida, Apolônio mostrou que de um único cone pode-se obter os três tipos de cônicas apenas alterando a inclinação do plano que corta o cone, o que “fez com que ele considerasse as cônicas como uma família de curvas e não mais como tríades” (Malta, 2015, p. 22). Boyer e Merzbach (2012) destacam que “esse foi um passo importante para ligar os três tipos de curvas” (p. 113) e, ainda se devem a Apolônio outras generalizações como a demonstração de que as curvas poderiam ser obtidas com as mesmas propriedades seja o cone circular tomado reto ou oblíquo ou escaleno (p. 113).

Apolônio no estudo das cônicas foi ainda foi mais além ao fazer uma substituição do cone de uma folha, ou cone de sorvete, pelo cone duplo, aquele tomado de dois cones de sorvete

colocados em sentidos opostos, de modo que seus vértices coincidam e seus eixos estejam sobre uma mesma reta (Boyer; Merzbach, 2012, p. 114). Tal proposta foi definida por ele conforme destaca Boyer e Merzbach (2012) “se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo, que não está em um mesmo plano com o ponto, de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo” (p. 114). Os autores ainda destacam que essa mudança propiciou o entendimento da duplicidade da hipérbole como uma curva de dois ramos.

Vale ainda ressaltar que “Apolônio, como seus predecessores, obtinha as cônicas a partir de um cone no espaço tridimensional, mas dispensou o cone logo que possível” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 115). Boyer e Merzbach (2012) destacam que a partir do cone Apolônio deduziu propriedades fundamentais para cada curva utilizando-se de um sistema de coordenadas com linhas de referência combinadas harmonicamente denominadas “diâmetros conjugados”, em que “os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro” (p. 116), essa relação fornecia um quadro de referência semelhante ao par de retas perpendiculares referidos como eixos utilizados hoje.

O sistema de retas tangentes associadas desenvolvido por Apolônio consistia no entendimento de que “[...] se for traçada uma reta por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole, paralela ao diâmetro conjugado, a reta “tocará” a cônica e nenhuma outra reta pode cair entre ela e a cônica — isto é, a reta será tangente à cônica” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 116). Dessa forma “Ele utilizou um diâmetro conjugado com a cônica que equivalia a uma abscissa – este era medido a partir do ponto de interseção da cônica – e um diâmetro tangente a cônica que representava uma ordenada – este era representado mediante segmentos paralelos á linha tangente [...]” (Malta, 2015, p. 24). Conforme destaca Malta (2015) essa ideia de coordenadas que auxiliou a determinação de propriedades geométricas das seções cônicas de Apolônio é considerada uma das grandes proezas dos gregos tendo consequências históricas para a geometria analítica.

2.6 A álgebra e a idade de prata da matemática grega

A chamada idade de prata da matemática grega foi palco de grandes contribuições para a matemática especialmente no campo da álgebra (Malta, 2015, p. 27). Este período caracteriza-

se pelo resgate ao estudo da álgebra e nele encontra-se o maior algebrista grego o matemático Diofanto (Boyer; Merzbach, 2012, p. 134), cujas obras marcam um importante avanço na notação algébrica, que passaria a um novo estágio denominado álgebra sincopada, isto é, a adoção de abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente, o que se constitui em uma de suas mais notáveis contribuições a matemática (Eves, 2004, p. 206).

Até então a álgebra era concebida de maneira retórica, sendo caracterizada por descrições em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos, dos argumentos de um problema (Eves, 2004, p. 206). Entre as obras mais importantes de Diofanto está *Arithmetica*, caracterizada por uma abordagem diferenciada desvinculada dos métodos geométricos, na qual apresenta o uso de símbolos mesclados com expressões verbais, sendo o responsável pelos primeiros vultos de representações simbólicas que causaram sensíveis mutações no estilo de pensamento da época, entre os quais destaca-se o uso dos símbolos para representar números desconhecidos, o quadrado, o cubo, a quarta, quinta e sexta potências, e para relações e operações; além do que, em suas representações simbólicas Diofanto faz uso de símbolos desvinculados de associação geométrica para representar números (Boyer; Merzbach, 2012, p. 134). Boyer e Merzbach (2012) destacam que “a *Arithmetica* não é um texto de álgebra, mas uma coleção de problemas de aplicação de álgebra” (p. 135), sendo a busca por soluções desses problemas precursoras de descobertas posteriores na matemática (Boyer; Merzbach, 2012).

Malta (2015) ressalta o amadurecimento do simbolismo algébrico desenvolvido por Diofanto como importante contribuição desse período em direção a linguagem algébrica essencialmente simbólica da geometria analítica posterior, haja visto que a “deficiência principal da matemática grega, foi a falta de uma álgebra simbólica independente, e o trabalho de Diofanto é um elo na corrente algébrica dos babilônios até Descartes” (Malta, 2015 *apud* Boyer, 2004: 36). Em contrapartida, nessa época “a geometria clássica não tinha prerrogativa nos pressupostos epistemológicos do coletivo de pensamento” (Malta, 2015, p. 28).

Ainda há que se ressaltar a última fase da matemática da antiguidade em que uma nova configuração estilística passou a ser configurada no coletivo de pensamento, em que as investigações, demonstrações de teoremas e a resolução de problemas da geometria voltaram a ser ressaltados, trazendo a geometria novamente a ser a base do pensamento matemático (Malta, 2015, p. 29). Nesse cenário destaca-se o geômetra Pappus que propunha coletar todo o conhecimento matemático dos antigos, atendo-se a organização e comentário das principais obras clássicas. Entre as principais contribuições dos estudos de Pappus para a geometria

analítica está o problema chamado de o” lugar de três ou quatro retas” originário provavelmente dos dias de Euclides, ao qual Pappus levou adiante considerando uma síntese para o problema para até seis retas (Boyer; Merzbach, 2012 p. 139). Os resultados encontrados por Pappus na solução desses problemas mostraram que em todos os casos possíveis o lugar geométrico é sempre uma cônica, sendo para o caso de seis linhas constatado que essa curva poderia ser determinada pela razão de dois sólidos (Malta, 2015).

Malta (2015) ressalta que o problema das linhas constitui a observação mais geral sobre lugares geométricos em toda a geometria antiga, apesar de o problema não ter sido ampliado para todos os casos possíveis foi o responsável pelo avanço posterior da geometria analítica.

2.7 Contribuições da idade média

A álgebra como conhecemos hoje baseada quase que exclusivamente em formas simbólicas de enunciados difere da linguagem escrita com que a matemática grega e anterior a ela se expressava (Boyer; Merzbach, 2012). Boyer e Merzbach (2012) destacam três estágios de desenvolvimento histórico da álgebra: o primeiro denominado retórico, em que os enunciados eram completamente escritos em palavras; o segundo chamado sincopado, em que havia uma mescla de símbolos e palavra; e o terceiro intitulado simbólico, que é o atual. Nesse cenário a Arithmetica de Diofanto aparece no segundo estágio, a partir do qual um crescente desenvolvimento da álgebra ocasionou o aprimoramento da linguagem simbólica como a conhecemos hoje.

No período medieval, entre os séculos V e XII, a herança da atividade matemática havia sido herdada pelas civilizações do oriente cujas contribuições acrescentaram importantes modificações no tratamento da matemática e impulsionaram as transformações da linguagem matemática na forma como a conhecemos hoje (Boyer; Merzbach, 2012)

Os hindus “foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra” (Eves, 2004, p. 255). Eles praticavam uma matemática voltada a orientação prática e se concentravam na resolução de problemas de aritmética e álgebra, ainda a geometria era estudada, porém sem grande enfoque lógico e generalizante (Malta, 2015, p. 31). Entre as contribuições hindus estacam-se o aprimoramento da representação simbólica dos números caracterizada por um sistema de posição, no qual “o significado de um símbolo está ligado à sua posição no número” (Aires, 2010, p. 24), sendo as primeiras nove unidades tomadas afim de representar as demais, o que tornaria supérfluos todos os símbolos além dos nove primeiros

(Boyer e Merzbach, 2012). Nesse sistema, a introdução do decimo elemento ainda não havia ocorrido, Aires (2010) ressalta que “nenhum símbolo específico foi necessário enquanto o zero significava apenas a ausência de objetos contáveis. Tornou-se incontornável quando surgiram os sistemas numéricos posicionais” (p. 31). Com a introdução do conceito de zero como número e sua respectiva notação hindu o sistema de numeração para os inteiros estava completo, esse novo sistema de numeração combinava três princípios básicos: (1) uma base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais, essa ligação entre os três aspectos acabou por formar o moderno sistema de numeração (Boyer; Merzbach, 2012).

Os hindus sincoparam sua álgebra, assim como o fez Diofanto, a adição era feita por justaposição, a subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se abba depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se ka antes da quantidade, a incógnita por yã, ainda aceitavam os números negativos e irracionais (Eves, 2004, p. 256). Os hindus ainda se empenhavam por descobrir métodos gerais que fornecessem todas as soluções inteiras possíveis, ao contrário dos gregos que se detinham a busca de soluções particulares (Boyer; Merzbach, 2012 p 160).

Conforme descreve Eves (2004) na geometria os hindus não obtiveram grande aproveitamento. Sendo pouco demonstrativa e “largamente empírica e em geral se ligava à mensuração” (Boyer; Merzbach, 2004, p. 257).

Os sucessores diretos da cultura hindu, os árabes, através de conexões com outros povos, especialmente os gregos do império bizantino, tiveram acesso a outros estilos de pensamento da matemática e, conseqüentemente, influencias mútuas que possibilitaram um novo estágio de conhecimento da matemática (malta, 2015, p. 32). A apropriação feita pelos árabes do saber grego e hindu e o intercâmbios de ideias traçaram um perfil heterogêneo de pensamento nos árabes o que reunia da aritmética dos hindus símbolos numéricos juntamente com sua ideia de notação posicional, da geometria bizantina métodos lógicos de investigação, mas o destaque da contribuição dos árabes deu-se no campo da álgebra (Eves, 2004).

A aritmética e álgebra árabes baseava na adoção de um simbolismo abreviado, e em outros momentos a exclusão da álgebra hindu, fato este, provavelmente, influenciado por influência dos métodos gregos, desse modo, o afastamento dos ensinamentos hindus provocaram um retrocesso a álgebra retorica grega, sendo novamente os números escritos em palavras (Eves, 2004, p. 262). Na álgebra árabe “precisava ser desenvolvida uma notação simbólica para substituir a forma retórica. Esse passo os árabes nunca deram, exceto quanto a

substituir as palavras para número por sinais para número (Boyer; Merzbach, 2012, p. 169).

Os trabalhos em geometria efetuados pelos árabes tinham caráter mais de preservação do que de descoberta (Eves, 2004, p. 264). Seus esforços de traduzir os clássicos gregos são objeto de grande reconhecimento para que as obras que se tem hoje chegassem ao conhecimento (Boyer; Merzbach, 2012, p. 169).

Entre os matemáticos notáveis destaca-se os trabalhos do matemático Al-Khowarizmi, que utilizava em suas soluções uma álgebra retórica e recursos geométricos, além dele Omar Khayyam cujos trabalhos em torno de resoluções de equações lineares colocava as construções geométricas como um elemento complementar de suas resoluções. Fato este que veio a ser um meio importante para a ampliação da visão da geometria analítica posterior (Malta, 2015, p. 33).

Dessa forma, Malta (2015) aponta que as principais contribuições dos árabes para a geometria analítica ocorreram no campo da álgebra. Os “métodos gregos de resolução de cúbicas foram aprofundados e as resoluções das quadráticas eram realizadas algebricamente e validadas geometricamente, uma idéia que foi utilizada em grande parte da Geometria de Descartes” (Malta, 2015, p. 50). Além do uso dos numerais hindu-arábicos que contribuíram para a álgebra de Viète (p. 50).

Boyer e Merzbach (2012) assinalam que “foi realmente uma sorte que, quando a cultura árabe começou a declinar, a ciência na Europa estivesse em ascensão e preparada para aceitar a herança intelectual legada por eras anteriores” (p. 176). As ideias dos árabes acabaram por expandir-se e divulgar-se pelo ocidente latino, através de inúmeras traduções para o latim, o que ocasionou o despertar do interesse para com o tratamento da matemática dada por esses povos, especialmente quanto ao seu sistema de numeração posicional (Malta, 2015, p. 34).

2.8 Contribuições do prelúdio da era moderna

Boyer e Merzbach (2012) destacam que “no começo do século doze, nenhum europeu poderia pretender ser um matemático ou astrônomo verdadeiro, sem um bom conhecimento da língua árabe” (p. 179). Uma série de traduções do árabe para as diferentes línguas ocidentais como o latim e o espanhol assinalam uma transição no pensamento matemático ocidental. Conforme Boyer e Merzbach (2012) a importância dada as obras orientais verifica-se nas obras do primeiro grande matemático latino Fibonacci que em sua obra *O Liber Abaci* reflete uma característica da forma de pensar medieval de que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente, e enfatiza que “todas as propriedades aritméticas só poderiam ser

demonstradas geometricamente” (Malta, 2015 p. 34). No entanto, em sua obra Fibonacci segue uma linha de pensamento mais inclinada ao tratamento da álgebra e faz recomendações do sistema de numeração indo-arábico, o que se tornou importante na disseminação desse sistema de numeração (Boyer; Merzbach, 2012, p. 181).

Grande parte da matemática do século XV concentrou-se em torno da aritmética e da álgebra, seguindo graduais reformulações a linguagem matemática ia se consolidando essencialmente até tornar-se simbólica (Eves, 2004, p. 296). Não obstante, como afirma Malta (2015) o interesse não girava em torno apenas da álgebra, mas também para os problemas tradicionais da geometria. Enquanto mantinha-se um respeito excessivo pelos cânones tradicionais da geometria, na álgebra novas propostas eram lançadas, especialmente com relação as operações, notações e conceitos o que impulsionou “maior confiança na álgebra e em suas operações, independentemente de qualquer significado geométrico” (Malta, 2015, p. 39). O aperfeiçoamento da álgebra árabe e o seu domínio ocidental no uso parcial de simbolismos e de resoluções de cúbicas e quárticas abriu caminho para mais uma transição marcada pelas obras do matemático Francês François Viète (Boyer; Merzbach, 2012, p. 211).

Essa transição dá-se especialmente no campo da álgebra no qual Viète destaca-se como um algebrista quase moderno (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212). Apesar das representações simbólicas desenvolvidas, era latente a ausência de um simbolismo que tratasse os problemas de maneira geral invalidando os exemplos numéricos e as regras de procedimento verbais da tradição algébrica italiana, não permitindo maiores progressos nas teorias algébricas (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212). A ausência de um esquema para escrever uma equação que pudesse representar uma qualquer dentre uma classe toda de equações impedia um algebrista de representar por meio de uma só expressão toda uma classe de equações, como faz um geômetra que “por meio de um diagrama, poderia fazer ABC representar todos os triângulos” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 212).

Aqui Viète introduziu uma convenção que permitia analisar todas as equações particulares mediante uma única equação representativa “devido à designação das espécies por letras tais como as consoantes que representavam os coeficientes e as vogais que representavam as incógnitas que juntas formavam os termos de uma equação geral” (Malta, 2015, p. 40). A distinção entre o uso das vogais para representar quantidades desconhecidas, ou incógnitas, e as consoantes para designar quantidades conhecidas, ou parâmetro, determinou uma distinção clara entre estes dois conceitos, e “possibilitou o desvendamento de uma teoria geral de equações que tornava possível, de agora em diante, encontrar as fórmulas ou soluções gerais

das equações algébricas que expressavam vogais em função das consoantes, ou melhor, as incógnitas em função dos parâmetros” (Malta, 2015, p. 41). Além do conceito algébrico de parâmetro e incógnita Viète ainda adotou os símbolos + e –, para a adição e a subtração respectivamente, porém não foi muito além disto, pois a sua linguagem ainda não era completamente simbólica.

Malta (2015) destaca três contribuições de Viète para a geometria analítica. A primeira diz respeito aos termos parâmetro e variável, em que o uso da convenção vogal-consoante fosse mais tarde amadurecida nas representações de Descartes e Fermat; a segunda se refere a aplicação sistemática da álgebra sincopada aos problemas geométricos, no tocante ao tratamento dos problemas de construção geométrica mediante equações; e, em terceiro sua avaliação crítica do imaginário coletivo da época quanto ao método de análise usado pelos gregos para resolver problemas geométricos.

Boyer e merzbach (2012) destacam que “o pensamento de Viète se mantinha próximo da geometria” (p. 215), o que levou a uma tendência de associar a nova álgebra com a antiga geometria. Nesse sentido, as investigações a respeito dos métodos usados pelos antigos para resolver problemas concorreu para o desenvolvimento de uma perspectiva algébrica para o estudo da geometria euclidiana, a partir ponto de vista analítico aplicado pelos gregos, em que os passos não eram expressos formalmente, Viète buscou ferramentas matemáticas na álgebra simbólica capazes de nortear os “passos” apropriados para os tais caminhos em geometria (Malta, 2015). Essa transposição da análise dos antigos para a análise algébrica foi gradativamente ganhando espaço no imaginário coletivo de modo que a análise passou a ser vista “como sinônimo do uso de técnicas simbólicas, ou até mesmo da própria álgebra” (Malta, 2015, p. 44; *apud* Boyer, 2004). Desse modo, consolidou-se uma análise algébrica empregada na geometria por meio da álgebra simbólica, cujo desenvolvimento levou de forma inexorável ao surgimento da geometria analítica mais do que propriamente o fez a geometria (Malta, 2015, p. 51)

Em virtude de “Não é dado a um só homem fazer toda uma dada transformação; ela deve vir em passos” (Boyer e Merzbach, 2012, p. 212), um dos passos além da obra de Viète foram dados por outros matemáticos que se destacaram nesse período proporcionando bom andamento a álgebra simbólica, padronização dos numerais indu-arábicos, e a adoção das frações decimais, progressão da teoria de equações e aceitação dos números negativos, deixando o caminho aberto para novas descobertas na matemática (Eves, 2004, p. 312).

2.9 Investigações da era moderna

A investigação algébrica iniciada nos séculos anteriores abriu caminho para a concretização de uma intervenção de métodos algébricos na geometria, afim de torna-se um modelo de solução algébrica e geométrica (Malta, 2015, p 52). Esse novo modelo insurgiu uma transformação no estilo de pensamento da matemática a partir da metade do século XVII através dos trabalhos de Descartes e Fermat, dois matemáticos que separadamente concretizaram o potencial da matemática de articular as equações indeterminadas com as linhas geométricas. Apesar dos problemas de que trataram esses matemáticos já serem amplamente conhecidos, não eram bem recebidos em virtude de serem questões que demandavam investigações mais abrangentes ao estilo de pensamento da época, em virtude do que as obras de Descartes e Fermat “vão acarretar não apenas na descoberta do método das coordenadas – próprio da nova geometria – mas também, com o decorrer do tempo, em mudanças gradativas do estilo de pensamento vigente” (Malta, 2015, p. 52). Este novo momento para a matemática concretizou-se a partir da publicação das obras *La géométrie* de Descartes e a *Introdução a lugares geométricos* de Fermat, abrindo caminho a implantação do estilo de pensamento analítico em substituição ao estilo de pensamento sintético” (Malta, 2015 p. 53).

Por volta de 1637 Pierre de Fermat anuncia em um de seus manuscritos intitulado *Introdução aos lugares Planos e Sólidos* uma teoria sobre lugares geométricos, no qual comprovava que “todas as cônicas estudadas por Menaecmo e Apolônio na antiguidade, poderiam ser descritas de uma forma mais simplificada que envolveria equações indeterminadas estudadas em sua gênese por Diofanto” (Malta, 2015, p. 56). Por volta do mesmo período, Descartes organiza seu Discurso do Método, no qual um apêndice denominado *La géométrie* tratava problemas geométricos com um viés semelhante ao de Fermat. Em ambos os tratados, *Introdução* e *La géométrie*, eles apresentaram o princípio fundamental da geometria analítica, que se constitui na construção de uma relação mutua entre equações indeterminadas e curvas, e com isso passaram a ser considerados os inventores da geometria analítica (Malta, 2015, p. 56).

O tratamento sobre lugares planos e sólidos já havia sido realizado pelos antigos, porém sua investigação não resultava em largo desenvolvimento, tendo em vista os métodos de investigação não estabelecerem uma generalização dos problemas. Sendo perdidas grande parte das técnicas de análise dos antigos, era de interesse de Descartes e Fermat as redescobrirem e para tal utilizaram dos estudos de Viète, que eram considerados chave para a compreensão das

técnicas dos antigos (Malta, 2015). Em razão disso, utilizaram da “arte analítica de Viète na recriação da via inventiva da análise geométrica dos gregos, propiciando a descoberta da geometria analítica mediante a consequente resolução dos problemas geométricos por meio da síntese algébrica” (Malta, 2015, p. 58).

Segundo Malta (2015), deduz-se que os dois pensadores se basearam nas obras de Viète e a estas deram continuidade, no entanto o fizeram por caminhos razoavelmente distintos. Enquanto Fermat engrenou pelas ideias viêtianas em direção ao emprego da linguagem sincopada em conexão com o estudo dos lugares geométricos, Descartes fez uso da Arte analítica, isto é, a construção geométrica das raízes das equações algébricas, a fim de dar prosseguimento ao mesmo intento, porém o fazendo através do simbolismo algébrico mais moderno. Malta (2015) ressalta que os avanços em álgebra criaram condições favoráveis para a intervenção do pensamento analítico na geometria e, aos poucos o método analítico foi ganhando espaço sobre as construções geométricas a medida que a eficiência do método era comprovada para a resolução dos problemas clássicos da geometria.

No início do século XVII a matemática estava muito ligada a um “estilo sintético de exposição que submetia os problemas a um verdadeiro esboço excessivo de figuras” (Malta, 2015, p. 56). Em seu *Discurso* Descartes atesta o descontentamento dos pensadores com esse tratamento das soluções dos problemas ao admitir que este “estava tão ligado à consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação” (Malta 2015, p. 56; *apud* Descartes, 2000, p. 49). Quanto a álgebra vigente acusava-a de ser “uma arte confusa e obscura que embaraça a mente” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Nesse sentido, propôs que seu objetivo em sua obra era duplo sendo “(primeiro) por processos algébricos, libertar a geometria de diagramas e, (segundo) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Seu método parte então da premissa de que as ciências matemáticas partem dos mesmos princípios básicos, e decidiu utilizar o melhor desses dois ramos da matemática em *La géométrie*.

Desse modo, em seu método Descartes partia de um problema geométrico a fim de traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolve-la algebricamente (Boyer; Merzbach, 2012, p. 240). Nesse sentido, seu tratamento da matemática apresentava-se disruptivo ao mesmo tempo em que preservava tradições anteriores (Boyer; Merzbach, 2012 p. 237), ao passo que sua álgebra rompia com o princípio da homogeneidade o que propiciou a sua abordagem de problemas de ordem superior, sendo *La géométrie* “o texto matemático mais antigo que um estudante da álgebra de hoje pode

seguir, sem encontrar dificuldades com a notação” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 238). Além de com o amparo da sua álgebra simbólica trazer “simplificação, generalidade e flexibilidade as ideias matemáticas, vimos que Descartes ambicionou a matematização de todos os problemas das ciências” (Malta, 2015, p. 145-146).

No mesmo período Fermat dedica sua matemática ao tratamento dos tratados clássicos conservados, dedicando-se a reconstrução de obras de Apolônio com base nas Coleção matemática de Pappus e a consequente aplicação da análise de Viète ao estudo desses lugares geométricos, o que lhe propiciou chegar ao descobrimento do princípio fundamental da geometria analítica (Boyer; Merzbach, 2012, p. 245). Porém, “deixou a desejar na Introdução em razão da sua afinidade com a geometria dos antigos (...) (visto que sua obra) consistiu em simplesmente reinterpretar algebricamente o método analítico dos geômetras antigos” (Malta, 2015, p. 145-146). Quanto a linguagem simbólica, Malta (2015) ressalta que para Fermat o uso da notação algébrica era puramente convencional, tendo sua notação em grande medida baseada nas notações de Viète seu simbolismo não se comparava ao de Descartes, sendo por muitos considerado arcaico nesse sentido (Eves, 2004, p. 389).

Conforme destaca Malta (2015) a linguagem puramente simbólica tem uma profunda repercussão conceitual trazendo clareza aos conceitos, que pode ser observada na linguagem simbólica de Descartes. Por outro lado, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes. Além disso, sua geometria analítica era um tanto mais próxima da nossa, no fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas (Boyer; Merzbach 2012, p. 246).

De qualquer modo, o método analítico proposto por Descartes e Fermat possibilitou um novo caminho a geometria, porém não rompeu completamente com os pressupostos já estabelecidos. Em contrapartida à geometria euclidiana que privilegiava o uso do método sintético, baseado nas construções geométricas, o método analítico baseava-se no uso de relações envolvendo grandezas algébricas e o uso de uma linguagem puramente simbólica que proporcionava simplificação, generalidade e flexibilidade ao encadeamento das ideias (Malta, 2015, p. 60). Portanto, tanto a Introdução de Fermat como a Geometria de Descartes tiveram as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática e das demais ciências (Malta, 2015, p. 146).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentamos neste capítulo alguns dos conceitos e resultados mais importantes da geometria e da álgebra para as demonstrações posteriores da geometria analítica. Para tal, será utilizado como referência da coleção Fundamentos de Matemática Elementar os livros vol. 1 de Iezzi e Murakami (2013), vol. 3 de Iezzi (2013a), vol. 4 de Iezzi e Hazzan (2013), Vol. 6 de Iezzi (2013b) e vol. 9 de Dolce e Pompeo (2013). Da coleção Profmat geometria de Muniz Neto (2013), ainda o livro didático Matemática ensino fundamental de Dante (2015) entre outros artigos.

3.1 Geometria plana

3.1.1 Noções primitivas

As noções primitivas são adotadas sem definição, das quais se têm conhecimento intuitivo decorrentes da experiência e da observação. Esses entes matemáticos são denominados: ponto, reta e plano. Suas notações são dadas por letras, na seguinte forma:

Ponto – letras latinas maiúsculas: A, B, C, \dots

Reta – letras latinas minúsculas: a, b, c, \dots

Plano – letras gregas minúsculas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

3.1.2 Proposições primitivas

As proposições primitivas (postulados ou axiomas) são aceitos sem demonstração. Alguns postulados relacionando o ponto, a reta e o plano são denominados:

3.1.2.1 Axiomas da existência

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;

b) Num plano há infinitos pontos;

Dada uma reta r e os pontos A, B e C dizemos que:

c) A, B estão em r , ou ainda, a reta r passa por A, B , e indicamos por $A, B \in r$;

d) C não está em r , ou ainda, a reta r não passa por C , e indicamos por $C \notin r$;

3.1.2.2 Posições de dois pontos e de ponto e reta

a) Dados dois pontos A e B existem duas possibilidades: ou são coincidentes ou são distintos;

b) Dados um ponto P e uma reta r existem duas possibilidades: ou $P \in r$ ou $P \notin r$;

c) São denominados pontos colineares os pontos que pertencem a uma mesma reta;

3.1.2.3 Postulado da determinação da reta

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles. Isto é:

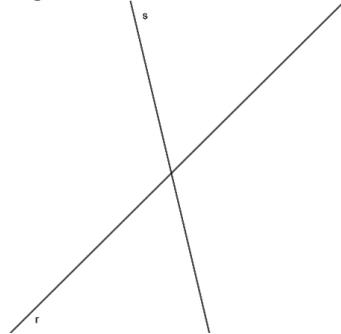
$$A \neq B, A \in r, B \in r \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}.$$

3.1.2.4 Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

$$r \cap s = \{P\}$$

Figura 1 – retas concorrentes r e s .



Fonte: autoria própria.

3.1.3 Segmento de reta

Entre as noções primitivas a noção “estar entre” obedece aos postulados seguintes:

- Se P está entre A e B , então A, B e P são colineares;
- Se P está entre A e B , então A, B e P são distintos dois a dois;
- Se P está entre A e B , então A não está entre P e B nem B está entre A e P ; e ainda;
- Quaisquer que sejam os pontos A e B , se A é distinto de B , então existe um ponto P que está entre A e B .

Definição: Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um **segmento de reta**.

Assim, dados os pontos A e B o segmento de reta AB é indicado por \overline{AB} , tal que:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Sendo que A e B são denominados pontos internos do segmento \overline{AB} e os pontos que estão entre A e B são denominados pontos internos. Para o caso em que A e B sejam coincidentes diz-se que \overline{AB} é um segmento nulo.

3.1.3.1 Semirreta

Definição: Dados dois pontos distintos A e B , a reunião do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta \overline{AB} (indicada por \overrightarrow{AB}).

O ponto A é tomado como a origem da semirreta \overrightarrow{AB} , tal que:

$$\overrightarrow{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

3.1.3.2 Relações entre segmentos

a) Dois segmentos de reta são **consecutivos** se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro;

b) Dois segmentos de reta são **colineares** se, e somente se, estão numa mesma reta;

c) Dois segmentos consecutivos e colineares são **adjacentes** se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade;

d) Sejam os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} , a **congruência** de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

– reflexiva, isto é, todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$;

– simétrica, isto é, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$;

– transitiva, isto é, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$;

e) postulado do transporte de segmentos: dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta de origem A' , existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a \overline{AB} .

f) adição de segmentos; dados dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , tomando-se numa semirreta qualquer de origem R os segmentos adjacentes \overline{RP} e \overline{PT} tais que

$$\overline{RP} \equiv \overline{AB} \text{ e } \overline{PT} \equiv \overline{CD}$$

Dizemos que o segmento \overline{RT} é a soma de \overline{AB} com \overline{CD} .

g) ponto médio de um segmento;

Definição: Um ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

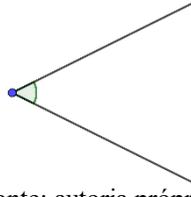
3.1.3.3 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos A e B , a distância entre eles é o segmento \overline{AB} ou qualquer segmento congruente a ele. Metricamente, a distância entre A e B é a medida do segmento \overline{AB} . A distância \overline{AB} é indicada por $d_{A,B}$.

3.1.4 Ângulos

Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Figura 2 – representação geométrica de um ângulo.



Fonte: autoria própria.

3.1.4.1 ângulo reto, agudo, obtuso

a) **ângulo reto** é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente;

b) **ângulo agudo** é um ângulo menor que um ângulo reto;

c) **ângulo obtuso** é um ângulo maior que um ângulo reto;

3.1.4.2 Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 90° . Um deles é o complemento do outro.

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180° . Um deles é o suplemento do outro.

3.1.5 Triângulos

Dados três pontos, A, B e C , não colineares, a reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} chama-se **triângulo** ABC . Elementos:

vértices: os pontos A, B e C são os vértices do ΔABC .

Lados: os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os lados do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou \hat{A} , $A\hat{B}C$ ou \hat{B} e $A\hat{C}B$ ou \hat{C} são os **ângulos** do ΔABC .

Um triângulo ABC é denominado:

a) **equilátero**, se, e somente se, têm os três lados congruentes $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$;

b) **isósceles** se, e somente se, ao menos dois dentre \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} forem iguais;

c) **escaleno**, se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$;

3.1.5.1 Congruências de triângulos

Um triângulo é congruente (\equiv) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que :

Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;

Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

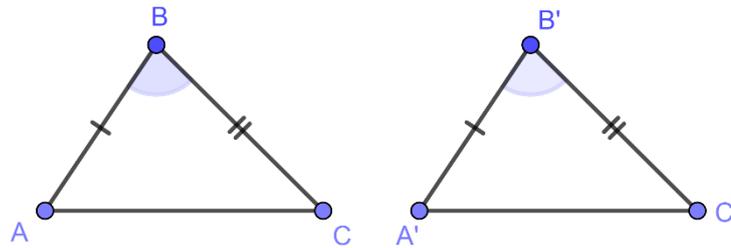
Casos de congruência:

a) Caso LAL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido,

então eles são congruentes.

Figura 3 – caso de congruência LAL

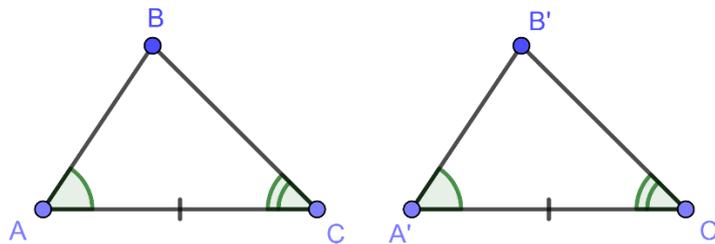


Fonte: autoria própria.

b) Caso ALA

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

Figura 4 – caso de congruência ALA

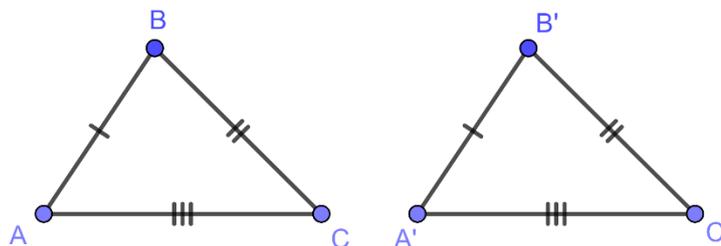


Fonte: autoria própria.

c) Caso LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Figura 5 – caso de congruência LLL.

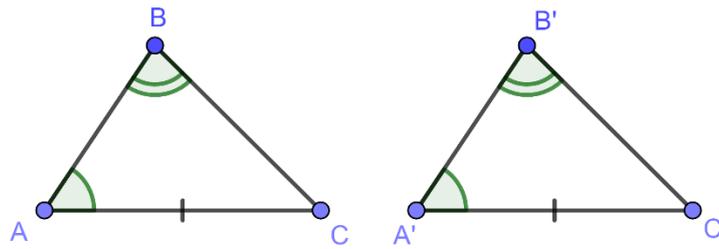


Fonte: autoria própria.

d) Caso LAA_o

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Figura 6 – caso de congruência LAA_o

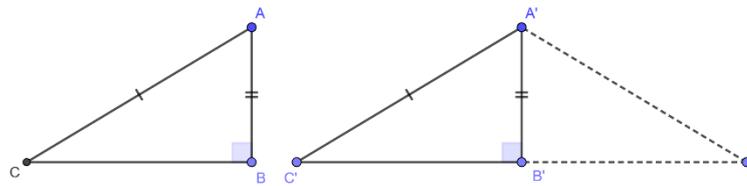


Fonte: autoria própria.

e) Congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Figura 7 – caso de congruência em triângulo retângulo.

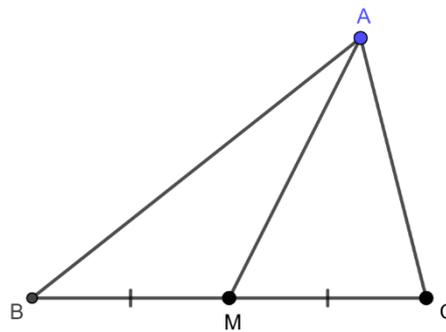


Fonte: autoria própria.

3.1.5.2 Mediana de um triângulo

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto. Tal que M é o ponto médio do lado \overline{BC} , \overline{AM} é a mediana relativa ao lado \overline{BC} , \overline{AM} é a mediana relativa ao vértice A .

Figura 8 – mediana de um triângulo.



Fonte: autoria própria.

3.1.5.3 Teorema do ângulo externo

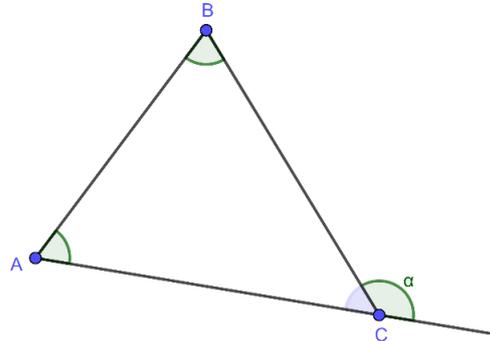
Dado $\triangle ABC$ e sendo \overrightarrow{CX} uma semirreta oposta à semirreta \overrightarrow{CB} , o ângulo

$$\alpha = \widehat{ACX}$$

é o ângulo externo do triângulo adjacente a \widehat{C} e não adjacente aos ângulos \widehat{A} e \widehat{B} . O ângulo é o suplementar adjacente de \widehat{C} .

Teorema: Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Figura 9 – ângulo externo ao triângulo ABC.



Fonte: autoria própria.

Propriedade: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

3.1.5.4 Soma dos ângulos de um triângulo

A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos. Que representamos por:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

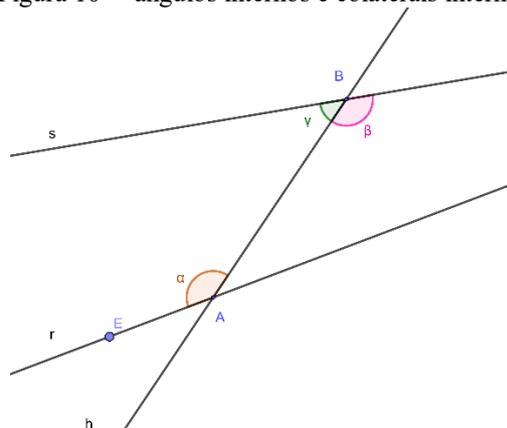
d) Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares;

e) Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60° ;

3.1.5.5 Ângulos colaterais internos e alternos internos

Sejam r e s duas retas no plano π e h uma transversal interceptando s e r nos pontos B e A respectivamente. Os ângulos α e β são ditos alternos internos, ao passo que os ângulos α e γ são chamados colaterais internos.

Figura 10 – ângulos internos e colaterais internos



Fonte: autoria própria.

3.1.6 Paralelismo

Duas retas são **paralelas** (\parallel) se, e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum:

$$(a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = \emptyset) \Rightarrow a \parallel b$$

a) Existência da paralela: Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou Ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

b) **Teorema** (Unicidade da paralela): por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

O recíproco desse teorema é: Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) são congruentes.

c) uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com a transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes congruentes).

Temos o corolário

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$$

3.1.7 Perpendicularidade

Duas retas são **perpendiculares** (\perp) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes. Duas semirretas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e tem m ponto comum.

Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e tem um ponto comum.

Definição 1 (existência): Num plano, por um ponto P de uma reta r existe uma única reta s perpendicular a r .

Definição 2 (unicidade): Por um ponto P fora de uma reta r passa uma única reta s perpendicular a r .

3.1.7.1 Altura e mediatriz de um triângulo

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular á reta suporte de lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

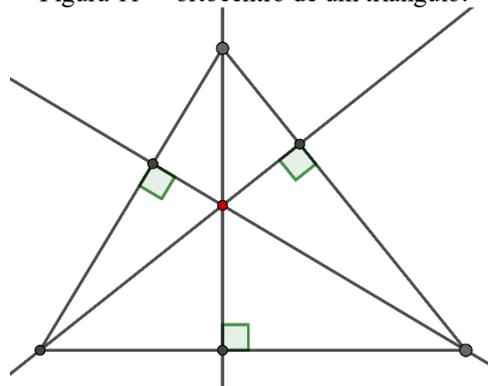
A **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo ponto médio.

3.1.7.2 Ortocentro e alturas

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

Definição: o ponto de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo é o **ortocentro** do triângulo.

Figura 11 – ortocentro de um triângulo.



Fonte: autoria própria.

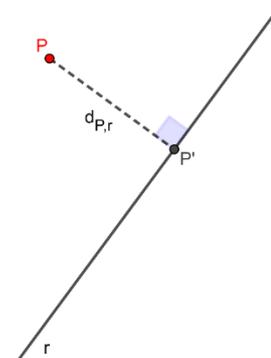
3.1.7.3 Distância entre um ponto e uma reta

Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta ao ponto de interseção da reta com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto.

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta. Seja P' a projeção do ponto P sobre a reta r , logo:

$$d_{P,r} = d_{P,P'}$$

Figura 12 – distância entre um ponto e uma reta.



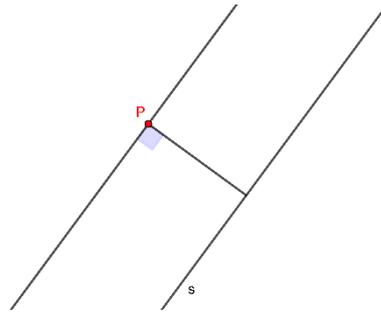
Fonte: autoria própria.

3.1.7.4 Distância entre duas retas paralelas

A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta. Sejam r e s retas paralelas e um ponto P de r .

Propriedade: Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma delas estão a igual distância da outra.

Figura 13 – distância entre duas retas paralelas.



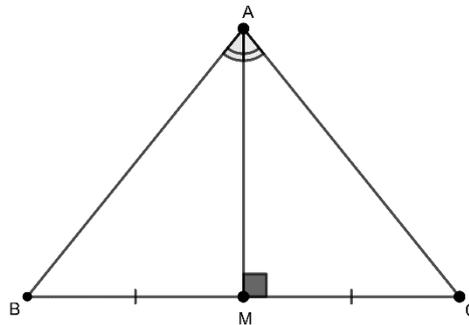
Fonte: autoria própria.

3.1.7.5 Propriedade do triângulo isósceles

Seja ABC um triângulo isósceles de base \overline{BC} e M um ponto da base, então:

- Se \overline{AM} é mediana, então \overline{AM} é bissetriz e altura;
- Se \overline{AM} é bissetriz, então \overline{AM} é mediana e altura;
- Se \overline{AM} é altura, então \overline{AM} é bissetriz e mediana;

Figura 14 – Propriedades do triângulo isósceles



Fonte: autoria própria.

3.1.8 Circunferência

Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual uma distância (não nula) dada. O ponto dado denomina-se centro, e a distância dada é o raio da circunferência

Assim, dados um plano α , um ponto O de α e uma distância r , tem-se:

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} = r\}$$

onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r . Logo, dado um ponto X e uma circunferência $\lambda(O, r)$,

3.1.8.1 Posições relativas de reta e circunferência

3.1.8.1.1 Tangente

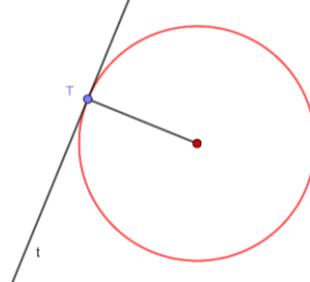
Definição: Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto. O ponto comum é o ponto de tangência e os demais pontos da reta são externos à circunferência.

$$t \cap \lambda = \{T\}$$

Propriedades da tangente:

- a) Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente á circunferência;
- b) Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangencia.

Figura 15 – Reta tangente a circunferência.

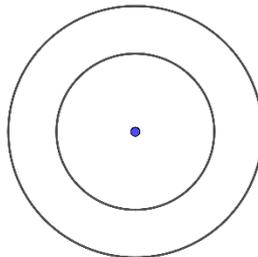


Fonte: autoria própria.

3.1.8.1.2 Posições relativas de duas circunferências

Uma **circunferência** é **interna** a outra se todo os seus pontos são internos da outra.

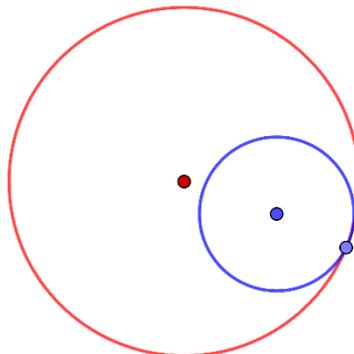
Figura 16 – Circunferência interna



Fonte: autoria própria.

Uma circunferência é **tangente interna** a outra se tem um único ponto comum, e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.

Figura 17 – circunferências tangentes internamente

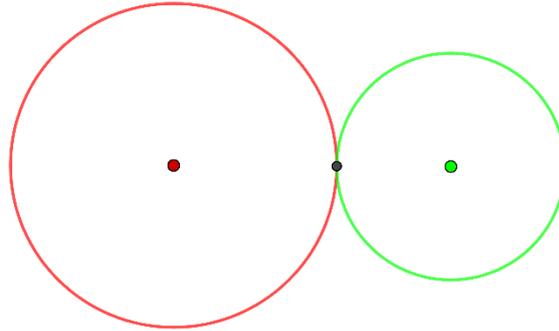


Fonte: autoria própria.

Duas circunferências são **tangentes externas** se tem um único ponto comum, e os

demais pontos de uma são externos à outra.

Figura 18 – circunferências tangentes externamente.



Fonte: autoria própria.

Considerando duas circunferências $\lambda_1(O_1, r_1)$ e $\lambda_2(O_2, r_2)$ com $r_1 > r_2$ e sendo d a distância entre os centros, então:

- a) se $d < r_1 - r_2$, então λ_2 é interna a λ_1 ;
- b) se $d = r_1 - r_2$, então λ_2 é tangente interna a λ_1 ;
- c) Se $d < r_1 + r_2$, então λ_2 é tangente interna a λ_1 ;
- d) Se $d > r_1 + r_2$, então λ_2 é externa a λ_1 .

3.1.9 Teorema de Tales

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.

Pontos correspondentes de suas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.

Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

Propriedade: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:

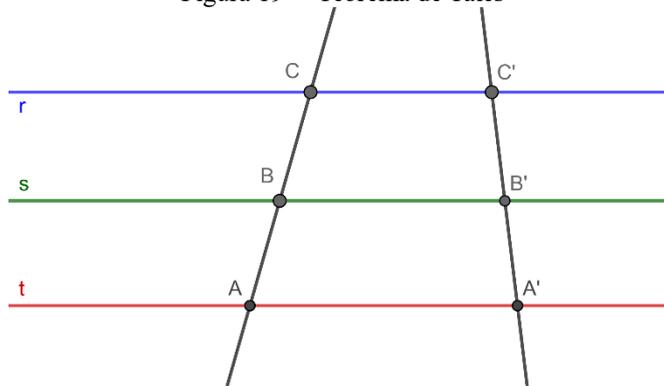
- a) também é dividido em p partes;
- b) e essas partes também são congruentes entre si.

Teorema de tales

Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Figura 19 – Teorema de Tales



Fonte: autoria própria.

3.1.10 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Em que a, b, c, a', b' e c' são os lados dos triângulos, respectivamente.

A razão de semelhança entre os lados homólogos é um número real $k > 0$, tal que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Teorema fundamental: se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

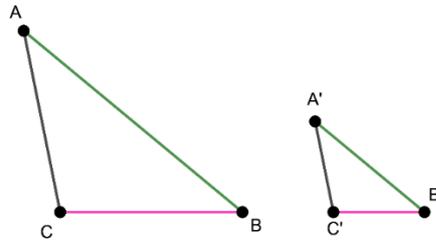
a) Caso de semelhança LLL

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \Leftrightarrow A', B \Leftrightarrow B', C \Leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Figura 20 – Caso de congruência LLL



Fonte: autoria própria.

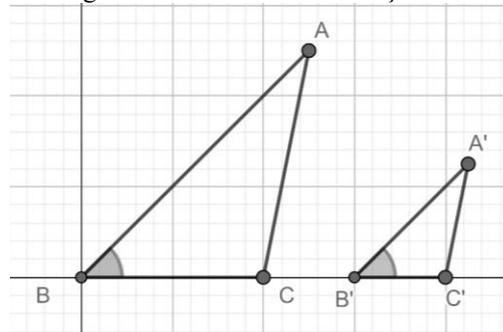
b) Caso de semelhança LAL

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{B'}$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \Leftrightarrow A', B \Leftrightarrow B', C \Leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

Figura 21 – caso de semelhança LAL



Fonte: autoria própria.

c) Caso de semelhança AA

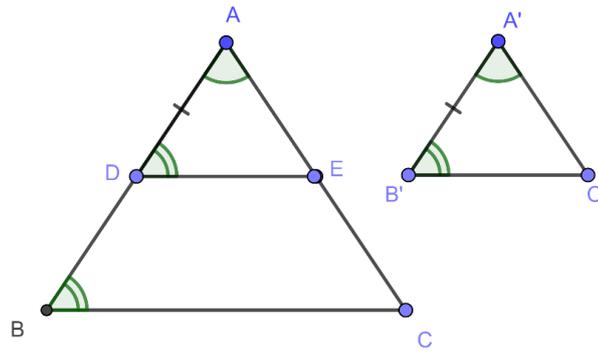
Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'} \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{B'}$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \Leftrightarrow A', B \Leftrightarrow B', C \Leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Figura 22 – caso de semelhança AA.



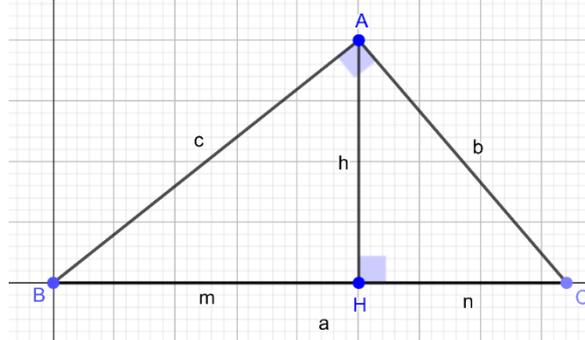
Fonte: autoria própria.

3.1.11 Relações métricas em triângulos retângulos

Seja ABC um triângulo retângulo em A , com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. sendo H o pé da altura relativa á hipotenusa, $\overline{CH} = n$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{AH} = h$, temos:

- (1) $ah = bc$
- (2) $an = b^2$ e $am = c^2$
- (3) $a^2 = b^2 + c^2$
- (4) $nm = h^2$

Figura 23 – Relações métricas no triângulo retângulo



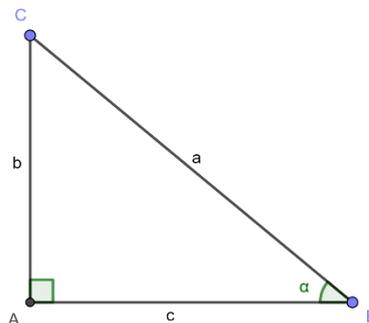
Fonte: autoria própria.

3.1.11.1 Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Figura 24 – Triângulo retângulo.



Fonte: autoria própria.

Recíproco do teorema de Pitágoras:

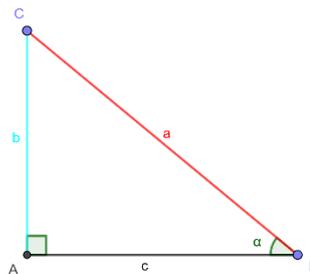
Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

3.1.11.1.1 Seno, cosseno e tangente

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, pondo-se:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \text{sen} \alpha = \frac{b}{a}$$

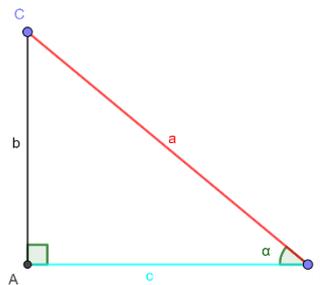
Figura 25 – Representação do seno relativo ao ângulo α



fonte: autoria própria.

$$\text{cosseno de } \alpha = \text{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}, \text{cos} \alpha = \frac{c}{a}$$

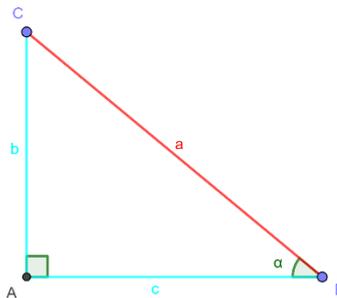
Figura 26 – Representação do cosseno relativo ao ângulo α



fonte: autoria própria.

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}, \text{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

Figura 27 – Representação do tangente relativo ao ângulo α



fonte: autoria própria.

3.1.12 Áreas de polígonos

Define-se área de uma superfície limitada como sendo um número real positivo associado a superfície. Entre áreas de polígonos destacamos:

3.1.12.1 Paralelogramo

Dado o paralelogramo $P(b, h)$ ele é equivalente a um retângulo cuja base mede b e altura h . Sua área será representada simplesmente por:

$$A_P = b \cdot h \quad (1)$$

em que b é a medida da base e h a medida da altura do paralelogramo.

3.1.12.2 expressões da área do triângulo

(1) Área do triângulo em função da base e da altura

Dado o triângulo $T(b, h)$ ele é equivalente a um paralelogramo de base com medida b e altura de medida $h/2$. Sua área será representada por

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \quad (2)$$

em que b é a medida da base e $\frac{h}{2}$ a medida da altura do triângulo.

(2) Área do triângulo em função dos lados

A área do triângulo também pode ser dada em função dos lados. Dados a, b, c e com $p = (a + b + c)/2$, temos sua área dada por:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \quad (3)$$

3.1.13 Lugar geométrico

A expressão lugar geométrico refere-se a um conjunto de pontos, logo deve-se enunciar uma propriedade que esses pontos devem possuir. Se essa propriedade é p , o conjunto dos pontos que possuem p é o lugar geométrico da propriedade p (WAGNER, 2015, p. 16). Assim:

Dada uma propriedade p relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade p é o o subconjunto l do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- a) Todo ponto de l possui a propriedade p ;
- b) Todo ponto do plano que possui a propriedade p pertence a l .

logo, l é o lugar geométrico da propriedade p se l for constituído exatamente pelos pontos do plano que tem a propriedade p .

Por exemplo: Dados, um real positivo r e um ponto O do plano, o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é o círculo de centro O e raio r :

$$\overline{AO} = r \Leftrightarrow A \in c(O, R)$$

3.2 Tópicos de álgebra

3.2.1 Polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, consideremos a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4)$$

A função é denominada função polinomial ou polinômio associado a sequência dada.

Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ são chamados termos de polinômio.

Quanto ao valor numérico de um polinômio segue que, dados o número complexo a e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, chama-se valor numérico de f em a a imagem de a pela função f , isto é:

$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_nxa^n$$

Em particular, se a é um número complexo e f é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz ou um zero de f .

3.2.1.1 Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio f é nulo quando f assume o valor numérico zero para todo x complexo. Simbolicamente indica-se por:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Uma condição necessária e suficiente para que um polinômio f seja nulo é a de que todos os coeficientes de f sejam nulos. Simbolicamente, sendo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, tem-se:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

3.2.1.2 Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios f e g são iguais quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{C}$$

Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais, isto é, simbolicamente, dados:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

temos:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (6)$$

3.2.2 Equação Polinomial

Dadas duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $f(x) = g(x)$.

3.2.2.1 Raiz de equação polinomial

Dada uma equação polinomial $f(x) = g(x)$, chama-se **raiz** da equação todo número que, substituído em lugar de x , torna a sequência verdadeira. Isto é, r é raiz de $f(x) = g(x)$ se, e só se, $f(r) = g(r)$ é sentença verdadeira.

3.2.2.2 Conjunto solução

O **conjunto solução** ou **conjunto verdade** da equação $f(x) = g(x)$ em \mathbb{C} o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas da equação.

3.2.2.3 Resolução de uma equação

Assim, resolver uma equação polinomial é obter o seu conjunto solução. Logo, duas equações polinomiais que apresentam o mesmo conjunto solução são ditas equivalentes.

3.2.2.4 Equações equivalentes

Dadas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução, isto é, toda raiz de uma equação é também raiz da outra e reciprocamente.

Há duas transformações que não alteram o conjunto solução de uma equação polinomial, isto é, há duas maneiras de transformar uma equação polinomial em outra, equivalente á primeira:

- (1) Somar aos dois membros a mesma função polinomial.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = g(x) + f(x)$$

- (2) Multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo $k (k \neq 0)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = g(x) + f(x)$$

Essas operações possibilitam transformar qualquer equação $f(x) = g(x)$ numa equação equivalente $P(x) = f(x) - g(x) = 0$, isto é toda equação polinomial é redutível á forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (7)$$

Para uma equação dessa forma podem ocorrer dois casos:

- (1) $P(x)$ é identicamente nula, isto é:

$$0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \dots + 0x + 0 = 0$$

a sentença é verdadeira para todo número complexo que seja colocado no lugar de x ; nesse caso, o conjunto solução é \mathbb{C} .

(2) $P(x)$ é constante e não nula, isto é:

$$0x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \dots + 0x + k = 0$$

Que é uma sentença falsa para todo número complexo que seja colocado no lugar de x ; nesse caso, o conjunto solução é vazio \emptyset .

3.2.3 Noção de Matriz

Dados dois números, m e n , naturais e não nulos, chama-se **matriz m por n** (indica-se $m \times n$) toda tabelas M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas. Em uma matriz qualquer M , cada elemento é indicado por a_{ij} . O índice i indica a linha e o índice j a coluna as quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.2.3.1 Matriz quadrada

Uma **matriz quadrada de ordem n** é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem igual número de linhas e colunas:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais, isto é,

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

Chama-se **diagonal secundaria** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem soma dos índices igual a $n + 1$, isto é

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}$$

3.2.4 Determinantes

Os determinantes são utilizados, por exemplo para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas.

3.2.4.1 Definição de determinantes ($n \leq 3$)

Consideremos o conjunto das **matrizes quadradas** de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos **determinantes da matriz M** (e indicamos por $\det M$) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

(1) Se M é de ordem $n = 1$, então $\det M$ é o único elemento de M ;

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$$

(2) Se M é de ordem $n = 2$, então $\det M$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária;

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3) Se M é de ordem $n = 3$, isto é,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ definimos}$$

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

(8)

Essa definição pode ser expressa da seguinte forma:

- repete-se, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas;
- os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}; a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}; a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

- os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}; -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}; -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Isto é:

$$\begin{array}{cccccc} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & a_{11} & a_{12} & & & \\ & a_{21} & a_{22} & & & \\ & a_{31} & a_{32} & & & \end{array} \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & & & & \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} - & - & - & & + & + & + \end{array} \end{array}$$

Está é conhecida como **regra de Sarrus** para o cálculo de determinantes de ordem 3.

- Repetimos, ao lado da matriz as duas primeiras colunas.
- os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:
- os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se os elementos

segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária.

3.2.4.2 Menor complementar e complemento algébrico

Considerando-se uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de M . definimos **menor complementar do elemento a_{ij}** , e indicamos por D_{ij} , como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M . Enquanto, o **complemento algébrico do elemento a_{ij}** (ou cofator de a_{ij}) e indicamos por A_{ij} , o número $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

3.2.4.3 Teorema fundamental de Laplace

O determinante de uma matriz M , de ordem $n \geq 2$, é a soma dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

a) Caso seja escolhida a coluna j da matriz M

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Temos

$$\det M = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad (9)$$

b) Caso seja escolhida a coluna i da matriz M

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então tem-se

$$\det M = a_{ij} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (10)$$

Dessa forma, a escolha dos cofatores não fica restrita a primeira coluna, podendo ser qualquer outra linha ou coluna.

3.2.5 Sistemas lineares

3.2.5.1 Equações linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$. Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, todas reais, são chamados **coeficientes** e $b \in \mathbb{R}$ é o **termo independente** da equação. Diz-se que a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b \quad (11)$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

$D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D} \quad (12)$$

Para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Em que D_i o determinante da matriz obtida de A , substituindo-se a i -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

3.2.6 Produtos notáveis

3.2.6.1 Quadrado da soma

Com base nas propriedades distributiva e comutativa da multiplicação temos que:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2 \quad (13)$$

Assim, o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo mais o dobro do produto do 1º termo pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3.2.6.2 Quadrado da diferença

Analogamente,

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2 \quad (14)$$

Assim, o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o dobro do produto do 1º termo pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3.2.6.3 Produto da soma pela diferença

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - b^2 \quad (15)$$

Desse modo, o produto da soma pela diferença dos mesmos termos é igual ao quadrado do 1º termos menos o quadrado do 2º termo.

3.2.7 Módulo

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se módulo ou valor absoluto de x , que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Donde segue:

- a) O módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- b) O modulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Propriedades:

- (1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- (3) $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 (4) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
 (5) $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
 (6) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 (7) $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 (8) $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
 (9) $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
 (10) $|x| \geq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

3.2.8 Transformações trigonométricas

Considerando um triângulo retângulo, fixando um ângulo \hat{B} , temos as relações a seguir:

- a) **Sen**o de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa;
 b) **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa;
 c) **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo;
 d) **Cotangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo;

3.2.8.1 Funções pares e funções ímpares

Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada **função par** se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A$$

Isto é, dando valores simétricos á variável, obtemos o mesmo valor para a função.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada **função ímpar** se, e somente se:

$$f(x) = -f(-x), \forall x \in A$$

Isto é, dando valores simétricos á variável, obtemos valores simétricos para a função.

Diretamente dessas definições decorrem as relações a seguir.

3.2.8.2 Cosseno da soma e da diferença

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \quad (17)$$

A partir da formula anterior obtém-se o cosseno da diferença

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad (18)$$

3.2.8.3 Seno da soma e da diferença

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \quad (19)$$

A partir da fórmula anterior obtém-se o cosseno da diferença

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad (20)$$

3.2.8.4 Tangente da soma e da diferença

A tangente da soma pode ser obtida com seno e cosseno da soma:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad (21)$$

Da fórmula anterior tem-se:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \quad (22)$$

3.2.8.5 Cotangentes da soma e da diferença

A tangente da soma pode ser obtida com seno e cosseno da soma:

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b} \quad (23)$$

Da fórmula anterior tem-se:

$$\cot(a - b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a} \quad (24)$$

4 TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Eves (2011) afirma que há aqueles que defendam a descoberta da geometria analítica pelos gregos mediante os trabalhos de Apolonio e Menaecmo, ou ainda por Nicolas Oresme pelo fato de terem desenvolvido um sistema de coordenadas e possuírem métodos para descrever as propriedades das curvas (p. 382). Com base no arcabouço teórico desenvolvido por esses ilustres matemáticos, Malta (2015) categoricamente afirma que nenhum destes “podem ser considerados inventores legítimos da geometria analítica” (p. 1). Nesse sentido, Malta (2015) evidencia que tanto os gregos quanto Oresme desenvolveram métodos limitados como o sintético, no qual a descrição das propriedades das curvas era feita de forma retórica, que limitava muito uma compreensão real da relação mútua entre curvas e equações, pela falta de uma álgebra simbólica, e faziam um uso de sistema de coordenadas sem uma percepção real de sua relação com as variáveis de uma função e as propriedades das curvas (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 244).

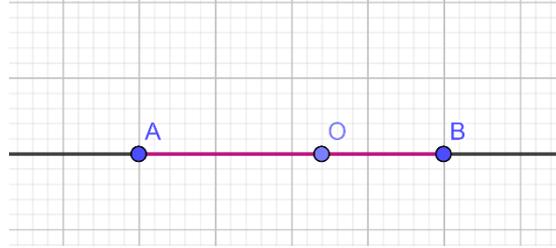
Em linhas gerais, conforme destaca Malta (2015) a estruturação lógica da matemática e a possibilidade de transformar resultados em teoremas universais ocorreu a partir de uma preocupação consciente com os processos gerais e dedutivos oriundos de uma associação formal entre a geometria e a álgebra. A identificação entre esses dois ramos da matemática perpassa pelo aparecimento da geometria algébrica, que levou fatalmente às geometrias analíticas de Descartes e Fermat (MALTA, 2015, p. 39). Em seus tratados, *La géométrie* de René Descartes e a *Introdução* de Pierre de Fermat os dois matemáticos chegaram ao princípio fundamental da geometria: a constatação de uma relação mútua entre equações indeterminadas e curvas (MALTA, 2015, p. 56).

Neste capítulo, tomando como base no sistema de coordenadas e as obras de Delgado e Frensel Crissaf (2013) e Iezzi (2013c), utiliza-se de uma associação entre a geometria e a álgebra a fim de demonstrar diferentes resultados fundamentais da geometria analítica.

4.1 Coordenadas e distância na reta e no plano

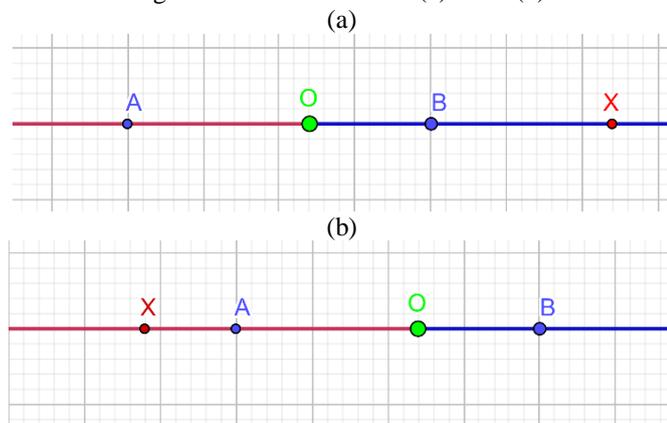
A representação de pontos por meio de números reais através do conceito de coordenadas possibilita, bem como facilita, a resolução algébrica de problemas geométricos.

Considere um plano π e dois pontos distintos A e B sobre este, de modo que estes determinam a reta \overleftrightarrow{AB} (ver 3.1.2.3). Dessa forma, considera-se o segmento \overline{AB} sobre \overleftrightarrow{AB} , como A e B são distintos deve existir um ponto O que está entre A e B (3.1.3).

Figura 28 – pontos A, B e O sobre a reta \overleftrightarrow{AB} 

Fonte: autoria própria.

Em seguida, considera-se a reunião do segmento e reta \overleftrightarrow{OB} e o conjunto dos pontos X tais que B esta entre O e X como sendo a semirreta \overrightarrow{OB} (ver 3.1.3.1). Analogamente, consideramos a reunião do segmento \overleftrightarrow{AO} e o conjunto dos pontos X tais que A esteja entre O e X , a que denominamos semirreta \overrightarrow{AO} . Em ambos os casos o ponto O é considerado como a origem das semirretas opostas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{AO} .

Figura 29 – semirreta \overrightarrow{OB} (a) e \overrightarrow{OA} (b).

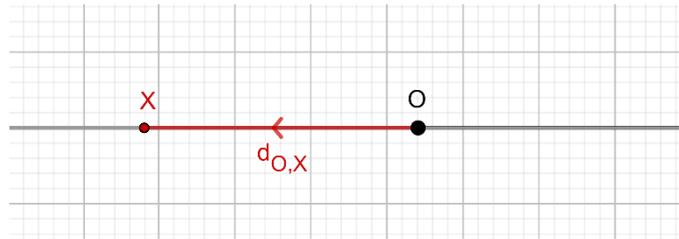
Fonte: autoria própria.

Em todo caso, tem-se o conjunto dos pontos X que estão à direita do ponto O , e o conjunto dos pontos X que estão à esquerda do ponto O . Fazendo corresponder a cada ponto distinto de \overrightarrow{OB} uma distância $d(O, X) = x$ em relação a origem O obtém-se uma associação de cada ponto da semirreta \overrightarrow{OB} com um número real x correspondente. Analogamente, considerando a semirreta \overrightarrow{AO} , a cada ponto X faz-se corresponder a distância $d(O, Y) = x$, que é o número real x associado. Por fim, à origem O faz-se corresponder o número 0.

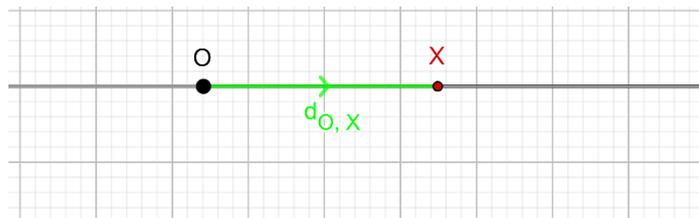
A fim de distinguir as distâncias dos pontos que estão a direita e a esquerda de O , isto é o número real associado a estas, faz-se corresponder número positivo a cada ponto da semirreta \overrightarrow{OB} , isto é $d(O, X) = x$, e um número negativo a cada ponto da semirreta \overrightarrow{AO} , ou seja $-d(O, X) = x$. Determinando dessa forma dois sentidos de orientação sobre a reta de \overleftrightarrow{AB} .

Figura 30 – Distância do ponto X a origem O no sentido da semirreta \overrightarrow{AO} (a) e \overrightarrow{OB} (b)

(a)



(b)



Fonte: autoria própria.

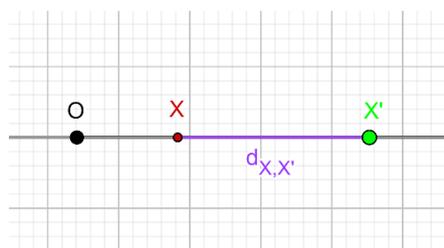
Assim, faz-se uma correspondência biunívoca entre a semirreta e o conjunto números reais \mathbb{R} . Seguem algumas definições importantes:

d) O número real x que corresponde ao ponto X segundo a correspondência acima estabelecida é denominada a **coordenada** do ponto X .

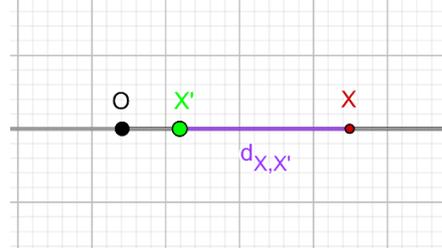
e) Sejam X e X' pontos da reta \overrightarrow{AB} com coordenadas x e x' , respectivamente. Dizemos que o ponto X' está **à direita** do ponto X (ou que o ponto X está **à esquerda** do ponto X') se, e somente se, $x < x'$ ($x > x'$).

Figura 31 – Ponto X à direita (a) e à esquerda (b) de X' em \overrightarrow{AB}

(a)



(b)



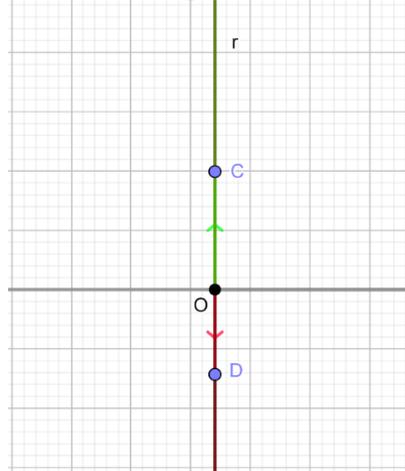
Fonte: autoria própria

Proposição: Se x e x' são as coordenadas dos pontos X e X' sobre o eixo \overrightarrow{AB} , respectivamente, então $d(X, X') = |x - x'|$.

Por conseguinte, Considera-se r uma reta perpendicular a \overrightarrow{AB} que a intercepta perpendicularmente no ponto O (ver 3.1.7). Analogamente, consideram-se os pontos C e D sobre r , de modo que C esteja acima e D abaixo de O , respectivamente. Seja a reunião do segmento \overline{OC} e o conjunto dos pontos $Y \in r$, tais que C esteja entre O e Y , denominada de

semirreta \overrightarrow{OC} , e a reunião do segmento \overline{OD} e o conjunto dos pontos $Y \in r$, tais que C esteja entre O e Y , denominada de semirreta \overrightarrow{OD} .

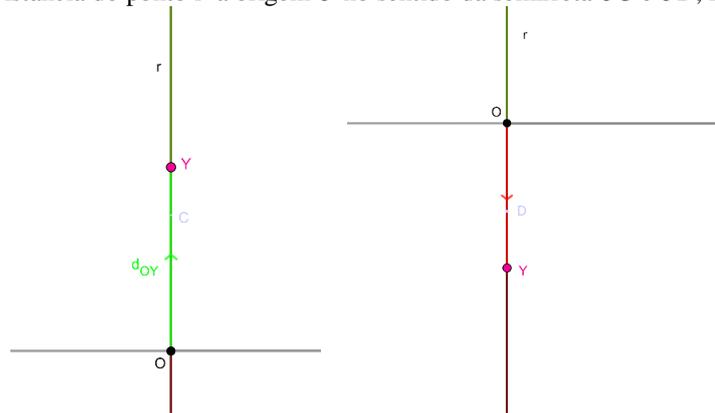
Figura 32 – Semirretas opostas \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} sobre a reta r



Fonte: autoria própria.

A reunião das semirretas opostas \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} sobre r determinam dois sentidos em r . E, analogamente, faz-se uma associação entre os pontos $Y \in r$ e o conjunto dos números reais $y \in \mathbb{R}$, de modo que $d(O, Y) = y$ está associado aos pontos de $r \in \overrightarrow{OC}$ (ou que estão acima de O), e $-d(O, Y) = y$ está associado aos pontos de $r \in \overrightarrow{OD}$ (ou que estão abaixo de O).

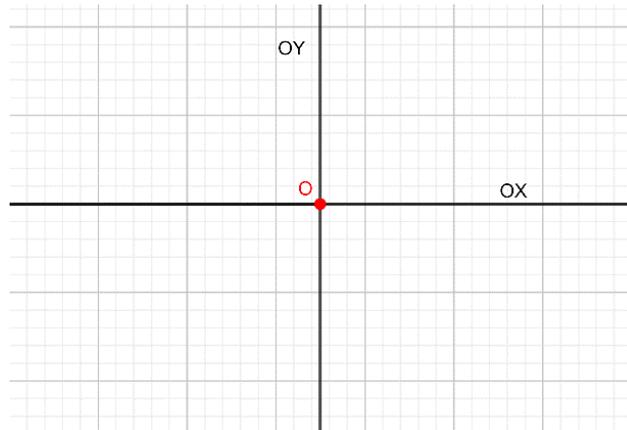
Figura 33 – Distância do ponto Y a origem O no sentido da semirreta \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} , respectivamente.



Fonte: autoria própria.

Nesse sentido, denominamos de eixo- \mathbf{OX} à reta \overleftrightarrow{AB} orientada em dois sentidos a partir de O , e de eixo- \mathbf{OY} à reta r orientada em dois sentidos a partir de O . Considerando unidade de medida de comprimento igual, convencionamos que aos valores reais $x \in \mathbf{OX}$ denominamos de **primeira coordenada** ou **abscissa**, enquanto aos valores reais $y \in \mathbf{OY}$, denominamos de **segunda coordenada** ou **ordenada**.

Figura 34 – Sistema de eixos ortogonais OXY



Fonte: autoria própria.

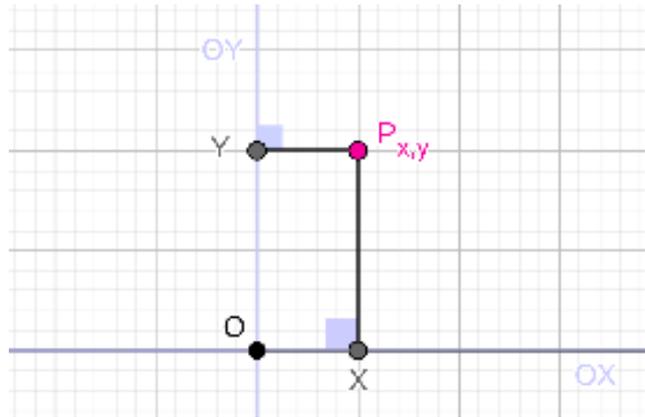
A relação entre os eixos ortogonais eixo-***OX*** e eixo-***OY*** denomina-se de sistema de eixos ortogonais ***OXY***. Uma vez estabelecida essa configuração, os sentidos determinados pelas semirretas determinam quatro partes denominados de **quadrantes**.

De posse desse sistema, considera-se P um ponto genérico de π . A fim de localizar este ponto, determina-se duas condições necessárias: uma relacionada ao eixo-***OX*** e outra ao eixo-***OY***. Essa relação é construída por meio de duas retas que saem de P cada uma em direção perpendicular a um dos eixos. De forma que, o ponto em que essas retas tocam em cada eixo determina um número real associado a ele, obtendo um par de números reais. Por meio desse sistema pode-se determinar uma relação biunívoca entre pontos do plano e pares de números reais $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$.

Se P não está sobre os eixos, x é a abscissa de pé da perpendicular ao eixo OX por P e y é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo OY por P . Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P , x é a abscissa de P e y é a ordenada de P .

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano π dado pela intersecção da perpendicular ao eixo- OX que passa pelo ponto de abscissa x , com a perpendicular ao eixo- OY que passa pelo ponto de ordenada y .

Figura 35 – Relação biunívoca entre pontos no plano e par ordenado de números reais



Fonte: autoria própria.

Assim, entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Ponto no plano $\pi \leftrightarrow$ par ordenado de \mathbb{R}^2

Notação: Se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$.

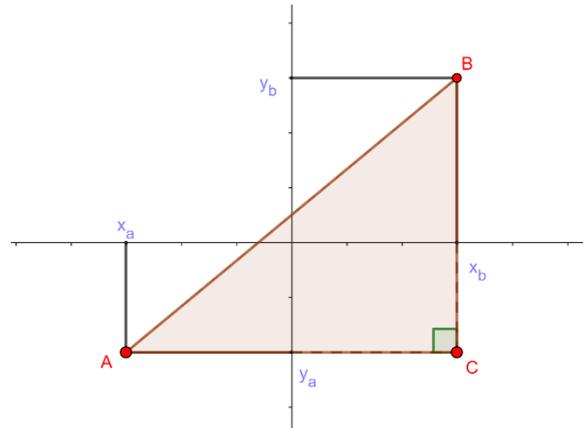
4.2 Distância entre pontos do plano

A distância de $A = (a, b)$ a $B = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Demonstração:

Sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pontos no plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado. Note que, x_a é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo OX do ponto A , e y_b é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo OY do ponto B . Prolonga-se essas perpendiculares até se intersectarem no ponto C cujas coordenadas são $C = (x_b, y_a)$, formando o triângulo ΔABC , de lados AC , CB e AB , retângulo em C . Logo, temos que $d(A, B)$ é a medida da hipotenusa AB do triângulo e AC e CB os catetos. Assim, vem que $|AC| = |x_a - x_b|$ e $|CB| = |y_a - y_b|$.

Figura 36 – Distância entre pontos no plano



Fonte: autoria própria.

Pelo que aplicamos o teorema de Pitágoras (ver 3.1.12.1):

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Donde segue que a distância entre A e B é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}. \quad (25)$$

4.3 Caracterização algébrica do círculo

O círculo C de centro no ponto $A \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto que consiste dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A , ou seja:

$$C = \{P \in \pi \mid d(P, A) = r\}$$

Caracterizada algebricamente por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Demonstração:

Considere uma circunferência C de centro no ponto A e raio $r > 0$ (ver 3.1.9 e 3.1.14).

Tomando $A = (x_a, y_a)$ num sistema de eixos ortogonais OXY no plano π , e $P(x_p, y_p)$ um ponto genérico sobre C , $P(x_p, y_p) \in C$, temos que $\overline{AP} = r$.

Considere P' o ponto de interseção da perpendicular que desce de P ao eixo OX (tal que x_p é o pé dessa perpendicular) com a circunferência C , como $P' \in C$ decorre $\overline{AP'} = r$.

Agora, considere o triângulo isósceles $P'AP$, de lados iguais $\overline{AP} = \overline{AP'} = r$. A partir do vértice A tracemos a altura \overline{AD} , sendo D o pé da altura relativa ao lado $\overline{PP'}$. Logo (ver 3.1.7.4) temos que a altura e a mediana de $\Delta P'AP$ coincidem em , donde segue que:

i) D é ponto médio relativo ao lado $\overline{PP'}$. Logo, $\overline{DP} = \overline{DP'}$

ii) D é o pé da altura relativa ao lado $\overline{PP'}$. Logo $\overline{AD} \parallel \text{eixo} - OX$ (ver 3.1.6).

Assim, vem que:

De (i) obtém-se $\overline{DP} = |y_p - y_a| \Rightarrow \overline{PP'} = 2|y_p - y_a|$. Por outro lado, de (ii) decorre $\overline{AD} = |x_p - x_a|$.

Com base nessas informações, considere a área do triângulo dada pelas expressões da Eq. 2 e Eq. 3, respectivamente. Logo, em perda de generalidade podemos considerar:

$$\frac{b \cdot h}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Fazendo $\overline{PP'} = b = 2|y_p - y_a|$, $\overline{AD} = h = |x_p - x_a|$ e $p = \frac{\overline{PP'} + 2r}{2} = \frac{2|y_p - y_a| + 2r}{2} = |y_p - y_a| + r$, $a = \overline{PP'}$, $b = \overline{AP}$ e $c = \overline{AP'}$ e substituindo na equação 28, obtém-se:

$$\frac{2|y_p - y_a| \cdot |x_p - x_a|}{2} = \sqrt{(|y_p - y_a| + r)(|y_p - y_a| + r - 2|y_p - y_a|)(|y_p - y_a| + r - r)(|y_p - y_a| + r - r)}$$

$$\Leftrightarrow |y_p - y_a| \cdot |x_p - x_a| = \sqrt{(|y_p - y_a| + r)(r - |y_p - y_a|)(|y_p - y_a|)^2}$$

$$\Leftrightarrow |y_p - y_a| \cdot |x_p - x_a| = |y_p - y_a| \sqrt{(|y_p - y_a| + r)(r - |y_p - y_a|)}$$

$$\Leftrightarrow |x_p - x_a| = \sqrt{(|y_p - y_a| + r)(r - |y_p - y_a|)},$$

(elevando ambos os lados ao quadrado)

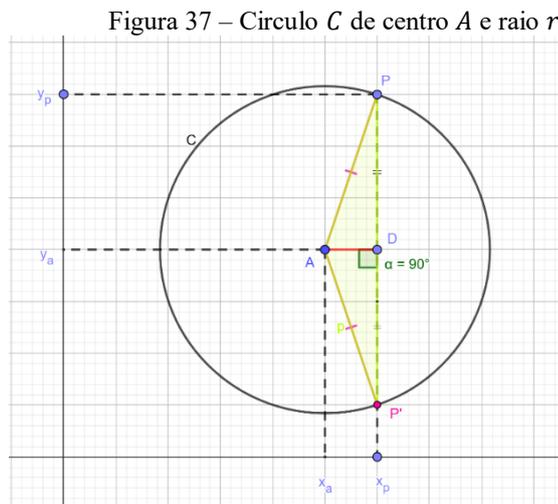
$$\Leftrightarrow |x_p - x_a|^2 = r^2 - (y_p - y_a)^2$$

$$\Leftrightarrow |x_p - x_a|^2 = r^2 - (y_p - y_a)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_p - x_a)^2 = r^2 - (y_p - y_a)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2 = r^2.$$

Geometricamente,



Fonte: autoria própria.

Assim, associamos o círculo C a equação

$$(x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2 = r^2 \quad (26)$$

que relaciona a abcissa e a ordenada de cada um de seus pontos $P(x_p, y_p)$ com as coordenadas do centro $A = (x_a, y_a)$.

4.4 Condição para alinhamento de três pontos

Três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) = (x_c - x_b)(y_b - y_a) \quad (27)$$

Demonstração:

Considerando um sistema de coordenadas XOY . Inicialmente, supomos A, B e C pontos colineares pertencentes a reta f , donde obtemos os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} . Relacionando as perpendiculares desses pontos em relação aos eixos OY e OX obtém-se os pontos Q e P , formando os triângulos retângulos BQC e APB , donde decorrem as relações:

$$\overline{AB} = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}$$

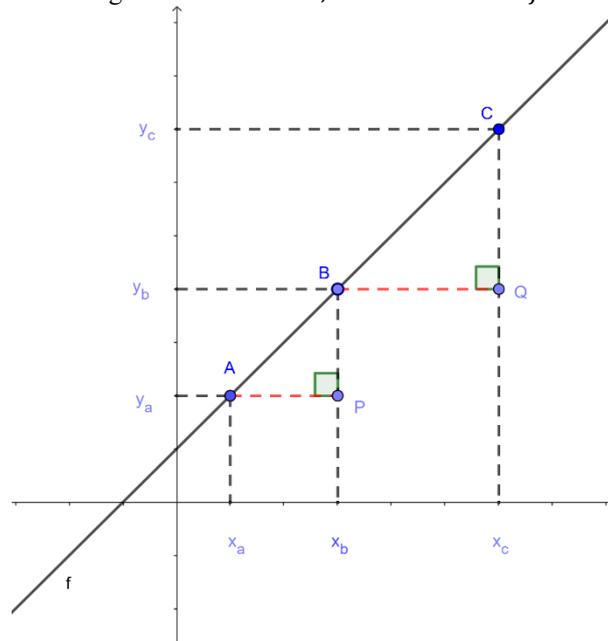
e

$$\overline{BC} = \sqrt{(y_c - y_b)^2 + (x_c - x_b)^2}$$

Que são as medidas dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} .

Geometricamente,

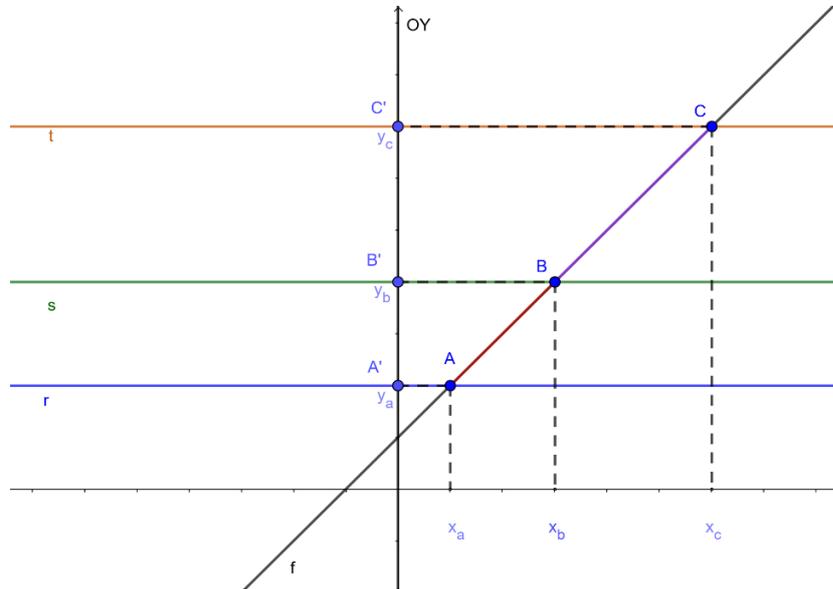
Figura 38 – Pontos A, B e C sobre a reta f



Fonte: autoria própria.

Por outro lado, sem perda de generalidade, consideram-se os pontos A', B' e C' sobre o eixo OY , em que estes coincidem com os pés das perpendiculares de A, B e C , respectivamente, sobre OY . Logo, relacionando-os ao sistema de eixos, suas coordenadas são $A' = (0, y_a)$, $B' = (0, y_b)$ e $C' = (0, y_c)$. Agora, tracemos as retas paralelas r, s e t , tais que $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ (ver os itens 3.1.2.3), perpendiculares o eixo OY . Geometricamente,

Figura 39 – Relação entre as retas paralelas r, s e t



Fonte: autoria própria.

Diante de tais condições, aplicamos o teorema de Tales (ver 3.1.10) considerando a reta f e o eixo OY transversais as paralelas r, s e t . Donde segue a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Donde segue que $\overline{A'B'} = |y_b - y_a|$ e $\overline{B'C'} = |y_c - y_b|$, e as medidas dos segmentos relacionados, isto é

$$\frac{\sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}}{\sqrt{(y_c - y_b)^2 + (x_c - x_b)^2}} = \frac{|y_b - y_a|}{|y_c - y_b|}$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados da igualdade e obtem-se:

$$\frac{((y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2)}{((y_c - y_b)^2 + (x_c - x_b)^2)} = \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}$$

$$\Leftrightarrow ((y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2) = ((y_c - y_b)^2 + (x_c - x_b)^2) \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2 = (y_c - y_b)^2 \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2} + (x_c - x_b)^2 \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2 = (y_b - y_a)^2 + (x_c - x_b)^2 \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_b - x_a)^2 = (x_c - x_b)^2 \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}$$

(Aplicando a raiz quadrada em ambos os lados)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_b - x_a)^2} = \sqrt{(x_c - x_b)^2 \cdot \frac{(y_b - y_a)^2}{(y_c - y_b)^2}}$$

$$\Leftrightarrow (x_b - x_a) = (x_c - x_b) \cdot \frac{(y_b - y_a)}{(y_c - y_b)}$$

$$\Leftrightarrow (x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b) = (x_c - x_b) \cdot (y_b - y_a)$$

que é a relação esperada (ver eq. 30).

Desenvolvendo o termo, obtém-se:

$$x_b y_c - x_b y_b - x_a y_c + x_a y_b = x_c y_b - x_c y_a - x_b y_b + x_b y_a$$

$$\Leftrightarrow (y_b - y_c)x_a - (x_b - x_c)y_a + x_b y_c - x_c y_b = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_b - x_a)(y_c - y_b) = (x_c - x_b)(y_b - y_a)$$

Por outro lado, essa relação pode ser obtida por meio do determinante da matriz $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$

pela regra de Laplace, considerando cofatores,

$$Det = x_a \begin{vmatrix} y_b & 1 \\ y_c & 1 \end{vmatrix} - y_a \begin{vmatrix} x_b & 1 \\ x_c & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = 0$$

Assim, a expressão

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) = (x_c - x_b)(y_b - y_a)$$

pode ser rescrita na forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.5 Equações da reta no plano

Um dos objetivos da geometria analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a geometria e a álgebra.

4.5.1 Equação paramétrica da reta

Se $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $P = (x_p, y_p)$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então:

$$P = (x_p, y_p) \in r \Leftrightarrow (x_p, y_p) = (x_a, y_a) + t(x_b - x_a, y_b - y_a) \text{ para algum } t \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_p = x_a + t(x_b - x_a) \\ y_p = y_b + t(y_b - y_a) \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

São as equações paramétricas da reta.

Demonstração:

Neste tipo de equação as coordenadas dos pontos pertencentes a uma reta são dadas por expressões do primeiro grau em função de um parâmetro real. Ao variar o valor do parâmetro, encontramos distintos pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta está associado um único parâmetro.

Sejam A e B dois pontos distintos tem-se uma única reta é determinada por eles (ver 3.1.2.3). Assim, seja a reta s tal que $A \in s$ e $B \in s$, tendo em vista a infinidade de pontos que a compõe, toma-se P um ponto genérico sobre s .

Considerando um sistema de eixos ortogonais OXY , se $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $P = (x_p, y_p)$ são as coordenadas dos pontos no sistema de coordenadas temos:

Prolongando-se os pés das perpendiculares, de A e B , a partir de y_a e x_b , paralelas aos eixos OX e OY , respectivamente, até se intersectarem no ponto $C = (x_b, y_a)$, formando o triângulo retângulo ACB , de catetos \overline{AC} e \overline{BC} e hipotenusa \overline{AB} , retângulo em \hat{C} .

Em seguida, toma-se $P = (x_p, y_p) \in s$, novamente prolongando-se o pé da perpendicular de P a partir de x_p , paralelamente ao eixo OY , até encontrar-se com \overline{AC} (ou seu prolongamento) no ponto $D = (x_p, y_a)$, formando o triângulo retângulo ADP , com catetos \overline{AD} e \overline{PD} e hipotenusa \overline{AP} , retângulo em \hat{D} .

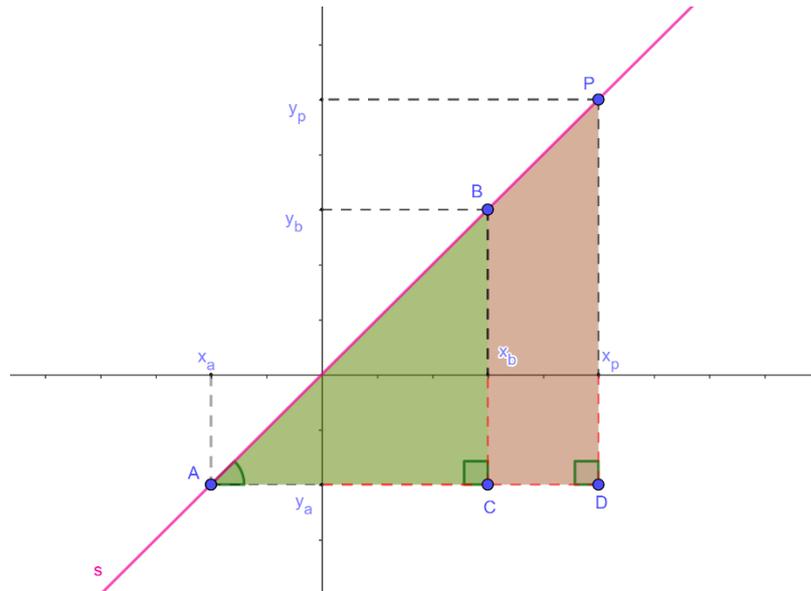
Neste caso, temos que $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$, logo vem que $\Delta ACB \sim \Delta ADP$ (ver 3.1.11.2), em particular temos o caso de AA, com $D\hat{A}P = C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B = A\hat{D}P = 90^\circ$. Donde decorre

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = k$$

Tal que $k \in \mathbb{R}, k > 0$ é a razão da semelhança.

Geometricamente,

Figura 40 – Triângulos semelhantes ACB e ADP



Fonte; própria. Software geogebra.

Segue que $\overline{BC} = |y_b - y_a|$, $\overline{AC} = |x_b - x_a|$, $\overline{PD} = |y_p - y_a|$ e $\overline{AD} = |x_p - x_a|$.
considerando separadamente as razões

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} = \frac{|y_b - y_a|}{|y_p - y_a|} = k$$

e

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{|x_b - x_a|}{|x_p - x_a|} = k$$

Da primeira decorre:

$$\begin{aligned} \frac{|y_b - y_a|}{|y_p - y_a|} &= k \\ \Leftrightarrow |y_b - y_a| &= k|y_p - y_a| \\ \Leftrightarrow \frac{|y_b - y_a|}{k} &= |y_p - y_a| \geq |y_p| - |y_a| \\ \Leftrightarrow \frac{|y_b - y_a|}{k} &\geq |y_p| - |y_a| \\ \Leftrightarrow \frac{|y_b - y_a|}{k} + |y_a| &\geq |y_p| \end{aligned}$$

fazendo $t = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, vem que

$$|y_b - y_a| \cdot t + |y_a| \geq |y_p|$$

Ou ainda,

$$|y_p| \leq |y_a| + t|y_b - y_a|$$

Considerando o caso para o qual apenas a igualdade é admitida, obtém-se:

$$|y_p| = |y_a| + t|y_b - y_a|$$

Generalizando para quaisquer valores em \mathbb{R} , obtemos:

$$y_p = y_a + t(y_b - y_a)$$

Analogamente, para o segundo caso decorre

$$x_p = x_a + t(x_b - x_a), t = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}.$$

Assim, obtemos as equações

$$s : \begin{cases} x_p = x_a + t(x_b - x_a) \\ y_p = y_a + t(y_b - y_a) \end{cases}; t \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

que são reconhecidas como **equações paramétricas** da reta s .

4.5.2 Equação geral, reduzida e segmentária da reta

Proposição: a toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r . Decorre que todo ponto $P \in r$ deve verificar a equação

$$ax + by + c = 0 \quad (29)$$

chamada equação geral de r .

Demonstração:

A fim de demonstrarmos esse resultado consideremos uma reta r e P um ponto fora de r decorre a reta s , tal que $P \in s$ e $s \perp r$, denota-se E o ponto de intersecção (ver 3.1.7). Construimos por P uma reta t que intercepte r no ponto A , pelo semiplano oposto ao de P , em relação a r , obtemos o ponto B sobre s por meio do transporte do segmento \overline{AE} , obtendo o segmento \overline{EB} , tal que $\overline{AE} = \overline{EB}$. Donde segue que $\triangle PEA$ e $\triangle BEP$ são congruentes pelo caso *LAL* (ver 3.1.5.1), logo, temos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 1 \quad (30)$$

Por meio do sistema de coordenadas OXY os pontos A, B e P são dados pelas coordenadas $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$. Considerando a relações entres as perpendiculares desses pontos e os eixos coordenados, obtemos as medidas dos lados \overline{AP} e \overline{BP} de $\triangle PEA$ e $\triangle BEP$, respectivamente, por meio do teorema de Pitágoras, donde segue que

$$\overline{AP} = \sqrt{(x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2}$$

e

$$\overline{BP} = \sqrt{(x_p - x_b)^2 + (y_p - y_b)^2}$$

A forma reduzida é obtida considerando a expressão (eq. 33) isto é:

$$ax_p + by_p + c = 0$$

$$ax_p + by_p = -c \rightarrow \frac{a}{-c}x_p + \frac{b}{-c}y_p = 1$$

Ou

$$\frac{x_p}{\frac{-c}{a}} + \frac{y_p}{\frac{-c}{b}} = 1$$

Se $x_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{-c}{a}$ e, se $y_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{-c}{b}$.

Nesse caso, a forma segmentaria é importante para saber em que pontos da abcissa e da ordenada a reta intercepta os eixos coordenados.

Fazendo,

$$\frac{-c}{a} = p \text{ e } \frac{-c}{b} = q$$

Vem que:

$$\frac{x_p}{p} + \frac{y_p}{q} = 1. \quad (32)$$

Que é a forma segmentaria da equação cartesiana da reta.

Exemplo:

Questão adaptada de Iezzi (2013): qual é a posição relativa da reta $r: \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$ no

plano cartesiano?

Solução:

A fim de se determinar a posição da reta deve-se primeiramente considerar os pontos em que a reta corta os eixos coordenados. Para isso, considerando um sistema de coordenadas OYX , tendo o ponto O como a origem desse sistema, vem que:

1. fazendo $x = 0$ tem-se $y = -2$. Desse resultado decorre que a reta r corta o eixo OY no ponto -2 .

2. fazendo $y = 0$ tem-se $x = \frac{3}{2}$. Desse resultado decorre que a reta r corta o eixo Ox no ponto $\frac{3}{2}$.

Assim, basta marcar esses pontos nos respectivos eixos e em seguida traçar a reta.

Por outro lado, considerando a forma geral (eq. 33) da reta, tal que:

$$y_p = -\frac{a}{b}x_p - \frac{c}{b}$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, obtemos a equação afim ou reduzida da reta:

$$s : y_p = mx_p + n. \quad (33)$$

Em que m é o coeficiente angular e n o coeficiente linear.

4.5.3 Feixe de retas paralelas

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares, todas paralelas a uma reta dada. Um feixe está determinado quando se conhece uma de suas retas. Considere o feixe de retas paralelas determinado pela reta r de equação geral $r : ax + by + c = 0$. A equação

$$ax + by + c' = 0 \quad (34)$$

descreve o feixe de retas paralelas a r para cada valor atribuído a c' .

Demonstração:

Dados os pontos distintos A e B determina-se uma reta r , pertencente ao plano α no sistema de coordenadas XOY , concorrente aos eixos OX , e $P \in r$ um ponto distinto considerado.

Suponha $P \in \overline{AB}$, e A', B' e P' os pés das perpendiculares de A, B e P em relação ao eixo OX . De modo que, $A, A' \in \overleftrightarrow{AA'}$, $B, B' \in \overleftrightarrow{BB'}$ e $P, P' \in \overleftrightarrow{PP'}$ sejam dois ternos de pontos colineares. Então do teorema de Tales (3.1.10), tem-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{P'B'}}$$

Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $P = (x_P, y_P)$, $A' = (x_A, 0)$, $B' = (x_B, 0)$ e $P' = (x_P, 0)$ são as coordenadas dos pontos, tem-se $\overline{A'P'} = |x_A - x_P|$ e $\overline{P'B'} = |x_P - x_B| = |x_P|$, e pelo teorema de Pitágoras, considerando ΔPDA e ΔPEB , tem-se

$$\overline{AP}^2 = (x_A - x_P)^2 + (y_P - y_A)^2$$

$$\overline{PB}^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

Aplicando em na relação de Tales, podemos determinar r :

Fazendo,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{P'B'}} \rightarrow \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} \right)^2 = \left(\frac{\overline{PB}}{\overline{P'B'}} \right)^2$$

$$\frac{(x_A - x_P)^2 + (y_P - y_A)^2}{(x_A - x_P)^2} = \frac{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}{(x_P - x_B)^2}$$

$$\Rightarrow [(x_A - x_P)^2 + (y_P - y_A)^2] \cdot (x_P - x_B)^2 = (x_A - x_P)^2 \cdot [(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2]$$

$$\Rightarrow (x_A - x_P)^2 \cdot (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_A)^2 \cdot (x_P - x_B)^2 = (x_A - x_P)^2 \cdot (x_P - x_B)^2 + (x_A - x_P)^2 \cdot (y_P - y_B)^2$$

$$\Rightarrow (y_P - y_A)^2 \cdot (x_P - x_B)^2 = (x_A - x_P)^2 \cdot (y_P - y_B)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y_P - y_A)^2 \cdot (x_P - x_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 \cdot (y_P - y_B)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (y_P - y_A) \cdot x_P &= (x_A - x_P) \cdot (y_B - y_P) \\ \Rightarrow y_P x_P - y_A x_P &= x_A y_B - x_A y_P - x_P y_B + x_P y_P \\ \Rightarrow -y_A x_P &= x_A y_B - x_A y_P - x_P y_B \\ \Rightarrow -y_A x_P + x_P y_B + x_A y_P - x_A y_B &= 0 \\ \Rightarrow (y_B - y_A) x_P + x_A y_P - x_A y_B &= 0 \end{aligned}$$

Isto é:

$$r : (y_B - y_A)x_P + x_A y_P - x_A y_B = 0.$$

Ou na forma reduzida,

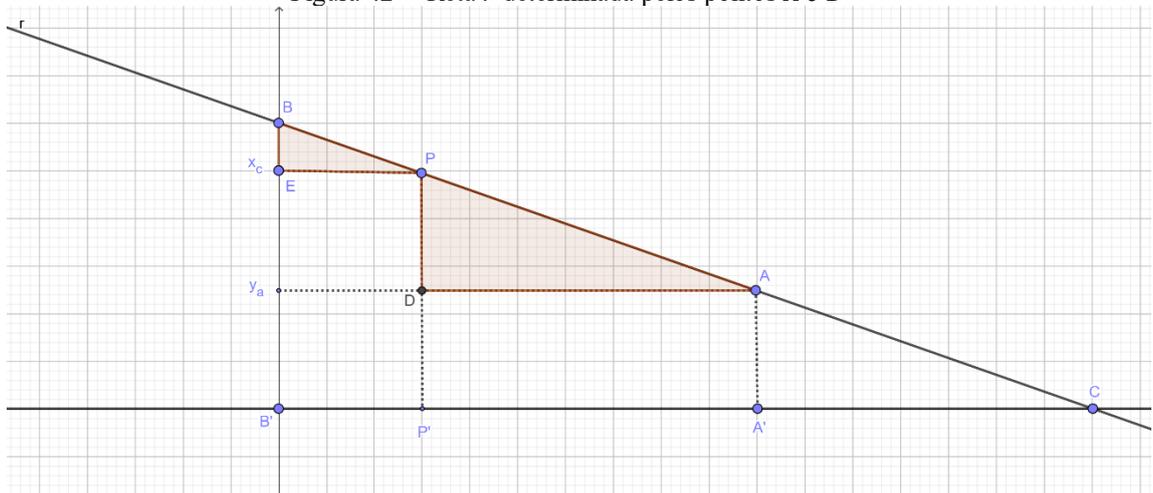
$$y_P = \frac{(y_A - y_B)}{x_A} x_P + y_B$$

Em que $\frac{(y_A - y_B)}{x_A}$ é o coeficiente angular de r .

Note que, tendo sido considerados A e B distintos tem-se $\frac{(y_A - y_B)}{x_A} \neq 0$.

Geometricamente,

Figura 42 – Reta r determinada pelos pontos A e B



Fonte: autoria própria.

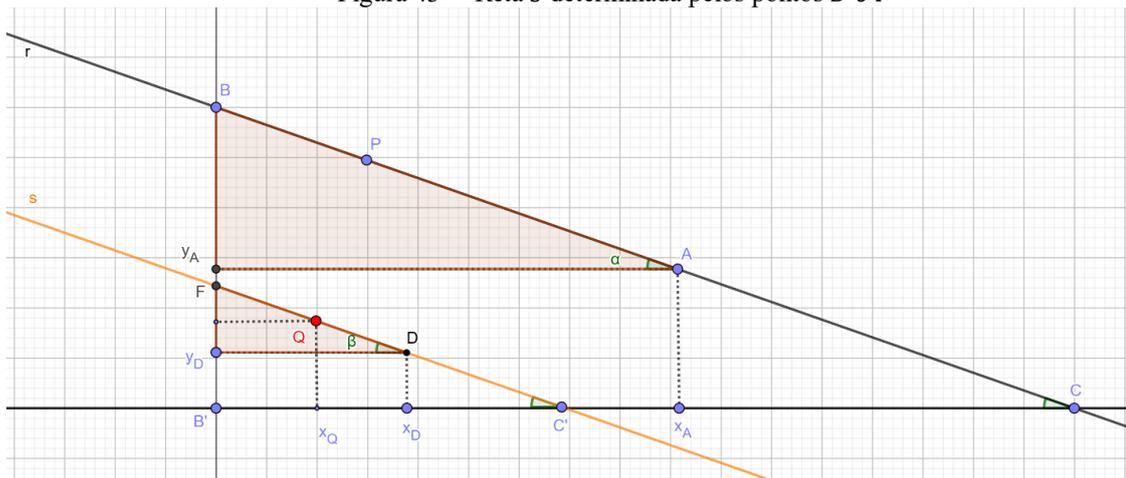
Agora, por um ponto Q qualquer fora de r passa a reta s paralela a r . Analogamente ao caso anterior, dados os pontos $D, F \in s$, pode-se determinar s em função das coordenadas desses pontos. Se $D = (x_D, y_D)$ e $F = (x_F, y_F)$ s pode ser expressa na forma geral por:

$$s : (y_F - y_D)x_P + x_D y_P - x_D y_F = 0$$

Ou na forma reduzida

$$s : y_Q = \frac{(y_D - y_F)}{x_D} x_Q + y_F$$

Em que $\frac{(y_D - y_F)}{x_D}$ é o coeficiente angular de s .

Figura 43 – Reta s determinada pelos pontos D e F 

Fonte: autoria própria.

Tendo em vista que $s \parallel r$, os ângulos α e β são alternos internos, logo $\alpha \equiv \beta$.

Considerando os triângulos retângulo destacados a tangente de α e β é dada por:

$$\tan \alpha = \frac{|x_B - y_A|}{|x_A|} \text{ e } \tan \beta = \frac{|x_F - y_D|}{|x_A|}$$

Como $\alpha \equiv \beta$, tem-se:

$$\tan \beta = \tan \alpha = \frac{|y_B - y_A|}{|x_A|} = \frac{|y_F - y_D|}{|x_A|}$$

Donde segue que,

$$\frac{(y_A - y_B)}{x_A} = \frac{(y_D - y_F)}{x_D}$$

Assim, s pode ser dada por

$$s : y_Q = \frac{(y_A - y_B)}{x_A} x_Q + y_F$$

Ou, na forma geral

$$s : (y_A - y_B)x_Q - x_A y_Q + x_A y_F = 0.$$

Dessa forma, a equação geral de s difere da equação geral de r pelo termo independente. Assim, a partir de r pode-se determinar retas paralelas a ela para cada uma um valor é atribuído ao termo independente.

Fazendo $a = y_A - y_B$, $x_A = b$, $c = -x_A y_B$ e $c' = -x_A y_F$, tem-se:

$$r : ax_P + by_P + c = 0$$

$$s : ax_P + by_P + c' = 0$$

Portanto, um feixe de retas paralelas está determinado quando conhecemos uma de suas retas.

4.6 Distância de um ponto a uma reta

Define-se a distância de um ponto P a uma reta r

$$d(P, r) = \min\{d(P, P') \mid P' \in r\}$$

Diz-se que $P^* \in r$ realizada a distância de P a reta r , se

$$d(P, P^*) \leq d(P, P'), \text{ para todo } P' \in r$$

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Então a distância de P a r é dada por

$$D(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (35)$$

Demonstração:

Sejam o ponto P e uma reta r no plano, tal que $P \notin r$, e A o ponto de interseção entre a reta s perpendicular à reta r conduzida por $P \in s$. A distância entre P e r é a distância entre P e A , que é o segmento $\overline{PA} \perp r$ (ver 3.1.7.2). Por P traça-se a reta t paralela ao eixo OX que intercepta s em B , tal que $\overline{PB} \in t$, formando o triângulo retângulo PAB , de catetos $\overline{PA} \in s$ e $\overline{AB} \in r$ e hipotenusa $\overline{PB} \in t$.

Considerando o sistema de coordenadas OXY , se $P = (x_p, y_p)$, $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ são as coordenadas dos vértices de ΔPAB , com $y_p = y_b$. Pelas relações entre as perpendiculares dos pontos em relação aos eixos obtemos as expressões para os lados do triângulo PAB através do teorema de Pitágoras:

$$\overline{PB} = |x_b - x_p|$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2}$$

$$\overline{AI} = |y_a - y_i|$$

em que $I = (x_i, y_i)$ é o pé da altura $\overline{AI} = h$ de ΔPAB em relação a hipotenusa \overline{PB} e $\overline{PA} = H$ é a distância entre o ponto P e a reta r .

Seja S a área do triângulo PAB , com base na relação (ver 3.1.13.2), vem que:

$$S = \frac{\overline{PB} \cdot h}{2} = \frac{|x_b - x_p| \cdot |y_a - y_i|}{2}$$

Por outro lado, por meio das relações métricas em PBA no triângulo retângulo (ver 3.1.12), toma-se S por meio dos catetos \overline{PA} e \overline{AB} , tal que:

$$S = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{H \cdot \overline{AB}}{2}$$

Assim, das duas relações para a área S de ΔPAB decorre:

$$\frac{\overline{PB} \cdot h}{2} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{AB}}{2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{|x_b - x_p| \cdot |y_a - y_i|}{2} &= \frac{H \cdot \sqrt{(x_b - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{|x_b - x_p| \cdot |y_a - y_i|}{\sqrt{(x_b - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|(x_b - x_p) \cdot (y_a - y_i)|}{\sqrt{(x_b - x_i)^2 + (y_a - y_i)^2}} &= H \end{aligned}$$

Note que, $y_i = y_p = y_b$ e $x_i = x_a$, pelo que

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{|(x_b - x_p) \cdot (y_a - y_p)|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|x_b y_a - x_b y_p - x_p y_a + x_p y_p|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|x_b y_a - x_b y_p - x_p y_a + x_p y_p + x_a y_p - x_a y_p|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|-x_p(y_a - y_p) - y_p(x_b - x_a) + x_b y_a - x_a y_p|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \end{aligned}$$

Fazendo $y_p = y_b$ no primeiro e no ultimo termo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{|-x_p(y_a - y_b) - y_p(x_b - x_a) + x_b y_a - x_a y_b|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|x_p(y_a - y_b) + y_p(x_b - x_a) - x_b y_a + x_a y_b|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}} &= H \\ \Leftrightarrow \frac{|x_p a + y_p b - c|}{\sqrt{b^2 + a^2}} &= H. \end{aligned}$$

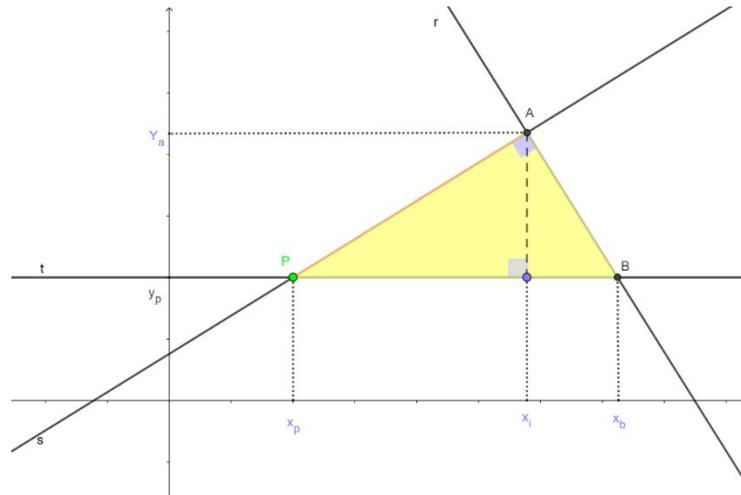
Para a, b e $c \in \mathbb{R}$, tais que $a = y_a - y_b$, $b = x_b - x_a$ e $c = x_b y_a - x_a y_b$. Portanto, a distancia $d(P, r)$ é dada por

$$d(P, r) = \frac{|x_p a + y_p b - c|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Em que $r : x_p a + y_p b - c$ é a equação da reta r e (x_p, y_p) são as coordenadas do ponto $P \in s \perp r$.

Geometricamente,

Figura 44 – Distância entre uma reta r e um ponto P no plano



Fonte: autoria própria.

4.7 Área do triângulo

Seja o triângulo ABC um triângulo qualquer de vértices A , B e C , devemos mostrar que sua área S é dada pelo determinante das coordenadas de seus vértices:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \quad (36)$$

onde $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ são as coordenadas de seus vértices.

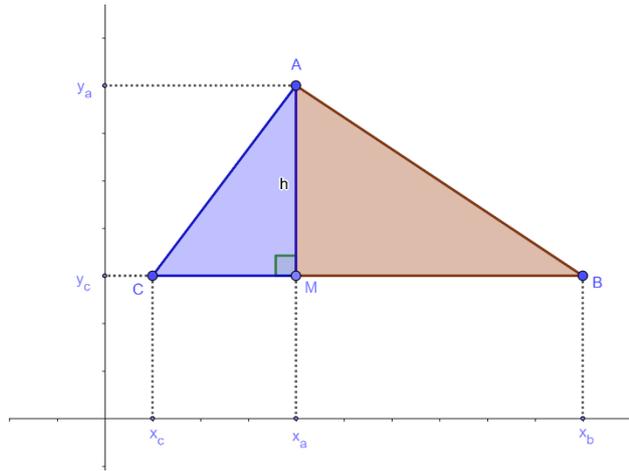
Demonstração:

Seja dado o ΔABC considerando o sistema de coordenadas XOY , tem-se pela geometria plana a área S do triângulo expressa pela relação entre a base e a altura (eq. 2). Nesse sentido, toma-se $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ as coordenadas dos vértices e lados \overline{AB} , \overline{AC} e $\overline{BC} \parallel OX$.

Se tomarmos M o pé da altura $\overline{AM} = h$ relativa a base \overline{BC} , então obtém-se os triângulos ΔAMC e ΔAMB retângulos em M e $\overline{AM} \parallel OY$.

Geometricamente,

Figura 45 – Triângulo ABC



Fonte: autoria própria.

Desse modo, a área S de ΔABC pode ser expressa pela soma das áreas S_1 e S_2 de ΔAMC e ΔAMB , respectivamente.

a) a área S_1 de ΔAMC será dada pelo produto dos catetos \overline{CM} e \overline{AM} , isto é:

$$S_1 = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{AM}}{2}$$

$$\overline{CM} = (x_M - x_C) \text{ e } \overline{AM} = h = (y_A - y_M) \rightarrow S_1 = \frac{1}{2}(x_M - x_C) \cdot (y_A - y_M)$$

Como $x_M = x_A$ e $y_M = y_B$, tem-se:

$$S_1 = \frac{1}{2}(x_A - x_C) \cdot (y_A - y_B)$$

b) Analogamente, considerando o triângulo ΔAMB , sua área S_2 é tomada pelo produto dos catetos \overline{MB} e \overline{AM} , isto é:

$$S_2 = \frac{\overline{MB} \cdot \overline{AM}}{2}$$

$$\text{Fazendo } \overline{MB} = (x_B - x_A) \text{ e } \overline{AM} = h = (y_A - y_M) \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \cdot (y_A - y_M) \text{ e}$$

$y_M = y_B$, tem-se:

$$S_2 = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B)$$

Somando as duas expressões, obtém-se S :

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{1}{2}(x_A - x_C) \cdot (y_A - y_B) + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}[(x_A - x_C) \cdot (y_A - y_B) + (x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B)]$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}[x_A y_A - x_A y_B - x_C y_A + x_C y_B + x_B y_A - x_B y_C - x_A y_A + x_A y_C]$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}[-x_A y_B - x_C y_A + x_C y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_A y_C]$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}[x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)] = \det = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, considere o determinante de coordenadas $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Isto é:

$$\det = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Usando cofatores, temos que:

$$\begin{aligned} \det &= \frac{1}{2} \left(x_A \begin{vmatrix} y_B & 1 \\ y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_C & 1 \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_B & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \det = \frac{1}{2} |(x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A))| \\ &= \det = \frac{1}{2} |x_A y_C - x_A y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_C y_B - x_C y_A| \end{aligned}$$

Dessa forma, verifica-se que a área S do triângulo ABC pode ser dada por:

$$\det = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

4. 7. 1 Área do paralelogramo

Por meio da geometria plana a área do paralelogramo (Eq. 1) pode ser dada diretamente da área do triângulo (Eq. 1). Nesse sentido, considerando um paralelogramo $ACBD$ sua área A pode ser expressa diretamente do desenvolvimento anterior, isto é

$$A = 2 \cdot S = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Isto é,

$$A = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Ou ainda, considerando o ponto $D = (x_D, y_D)$, tem-se:

$$A = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Nesse sentido, a área do paralelogramo pode ser expressa em função das coordenadas correspondentes a lados adjacentes.

4.8 Ângulo entre retas

Dadas r e s , se as duas têm coeficiente angular, a tangente do ângulo agudo $\hat{r}\hat{s}$ é o modulo da diferença dos declives dividida por 1 somando ao produto dos declives.

$$\tan \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \quad (38)$$

Demonstração:

Dadas duas retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, considere

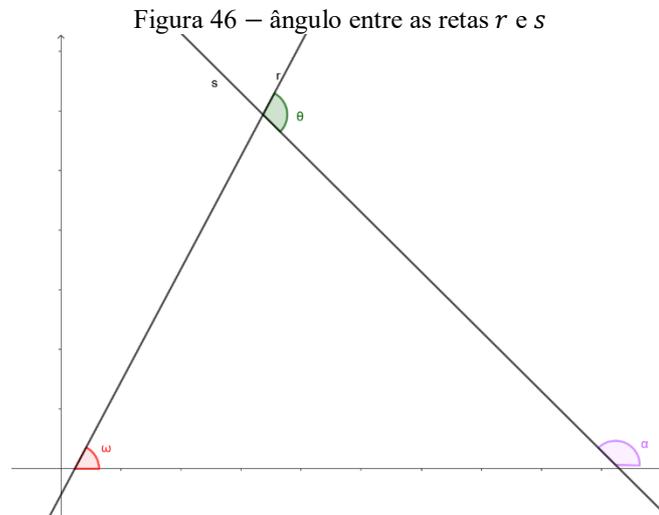
$$y_r = m_r x + n_r = 0$$

onde $m_r = \tan \omega$. E,

$$y_s = m_s x + n_s = 0$$

Em que $m_s = \tan \alpha$.

Geometricamente,



Fonte: autoria própria.

Pelo teorema do ângulo externo (ver 3.1.6.1) tem-se:

$$\alpha = \omega + 180^\circ - \theta \Rightarrow \theta = \omega + 180^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan[\omega + (180^\circ - \alpha)]$$

$$\Rightarrow \tan[\omega + (180^\circ - \alpha)] = \frac{\tan \omega + \tan(180^\circ - \alpha)}{1 - \tan \omega \cdot \tan(180^\circ - \alpha)}$$

Fazendo,

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\tan 180^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan \alpha} = -\tan \alpha$$

Logo,

$$\tan \theta = \frac{\tan \omega - \tan \alpha}{1 + \tan \omega \cdot \tan \alpha}$$

Como $m_r = \tan \omega$ e $m_s = \tan \alpha$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|.$$

Que representa o ângulo entre as retas r e s em função de seus coeficientes angulares m_r e m_s , respectivamente, conforme Eq. 40.

4.9 Transformações geométricas Planas

4.9.1 Reflexão em relação ao ponto P_o

Dado um ponto P_o do plano, a transformação \mathcal{R}_{P_o} que a cada ponto P do plano associa o ponto $P' = \mathcal{R}_{P_o}(P)$, pertencente à reta que passa por P_o e P . Se $P_o = (x_o, y_o)$ e $P = (x, y)$ é um ponto do plano, então $P' = \mathcal{R}_{P_o}(P) = (x', y')$ é o ponto tal que

$$\mathcal{R}_{P_o}(P) = (2x_o - x, 2y_o - y) \quad (39)$$

Demonstração:

Dado um ponto P_o do plano, situamo-nos por meio do sistema de coordenadas OXY com origem n ponto $O = (0,0)$, tal que $P_o = (x_o, y_o)$ seja distinto da origem O e não esteja sobre os eixos.

Em seguida, toma-se um outro ponto $P = (x, y)$ distinto de P_o pertencente à reta r que passa por P e P_o . Nesse sentido, a reflexão de P em relação ao ponto P_o é um ponto $P' = (x', y')$ do plano que está sobre r , e é tal que o segmentos $\overline{PP_o}$ e $\overline{P_oP'}$ são congruentes.

Fazendo as perpendiculares que saem desses pontos em direção aos eixos relacionarem-se por meio dos triângulos retângulos gerados pelas intersecções entre estas, pode-se determinar uma relação de semelhança de triângulos.

Inicialmente, toma-se o triângulo retângulo $PP'Q$, retângulo em Q , que é gerado pelas intersecções da perpendicular que sai de P' em direção ao eixo das abcissas, e pelo prolongamento da perpendicular de P ao eixo das ordenadas.

Em seguida, considera-se o triângulo retângulo PP_oQ' , retângulo em Q' , gerado pela intersecção da perpendicular que sai de P_o em relação ao eixo- OX , e do prolongamento da perpendicular de P em relação ao eixo- OY .

Por meio do teorema de Pitágoras vem que a hipotenusa $\overline{PP_o}$ de $\Delta PP_oQ'$ é dada por:

$$\overline{PP_o} = \sqrt{(y_o - y)^2 + (x_o - x)^2}$$

Como $\overline{PP_o} = \overline{P_oP'}$, segue que a hipotenusa $\overline{PP'}$ de $\Delta PP'Q$ é :

$$\overline{PP'} = 2\sqrt{(y_o - y)^2 + (x_o - x)^2}$$

Por outro lado, pelo critério de semelhança AA , onde $Q\hat{P}P' \equiv Q'\hat{P}P_0$ e $P'\hat{Q}P \equiv P_0\hat{Q}'P = 90^\circ$, $\Delta PP_0Q' \sim \Delta PP'Q$. Dessa forma, segue que:

$$\frac{\overline{P'Q}}{\overline{P_0Q'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PP_0}}$$

E

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PP_0}}$$

Fazendo $\overline{P'Q} = y' - y$, $\overline{P_0Q'} = y_0 - y$, $\overline{PQ} = x' - x$ e $\overline{PQ'} = x_0 - x$, e substituindo nas expressões segue:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{P'Q}}{\overline{P_0Q'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PP_0}} &\Rightarrow \frac{y' - y}{y_0 - y} = \frac{2\sqrt{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2}}{\sqrt{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2}} \Rightarrow \frac{y' - y}{y_0 - y} = 2 \\ &\Rightarrow y' - y = 2(y_0 - y) \Rightarrow y' = 2y_0 - y \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PP_0}} &\Rightarrow \frac{x' - x}{x_0 - x} = \frac{2\sqrt{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2}}{\sqrt{(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2}} \Rightarrow \frac{x' - x}{x_0 - x} = 2 \\ &\Rightarrow x' - x = 2(x_0 - x) \Rightarrow x' = 2x_0 - x. \end{aligned}$$

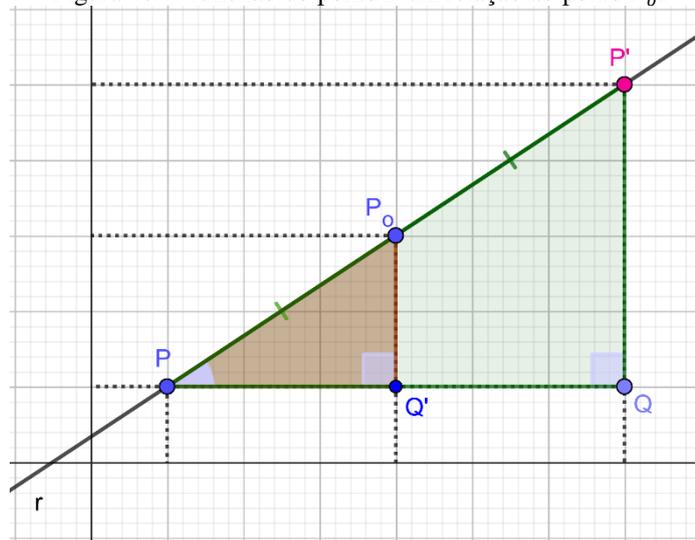
Desse modo, as expressões fornecem, respectivamente, a ordenada e a abcissa de P' , em função das coordenadas de P e de P_0 .

$$P' = (x', y') = (2x_0 - x, 2y_0 - y).$$

que é a reflexão do ponto P em relação ao ponto P_0 .

Geometricamente,

Figura 47 – reflexão do ponto P em relação ao ponto P_0 .



Fonte autoria própria.

4.9.2 Reflexão em relação ao ponto O

A **rotação de ângulo θ em torno do ponto O** é a transformação $\mathcal{R}_{\theta,O} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto P do plano associa o ponto P' obtido pela rotação de ângulo α , no sentido positivo, do ponto P em torno do ponto O .

A rotação $\mathcal{R}_{\theta,O} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em torno da origem. Sejam $P = (x, y)$ um ponto e $(x', y') = \mathcal{R}_{\theta,O} (x, y)$ sua imagem. Logo,

$$\mathcal{R}_{\theta,O} (x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta) \quad (40)$$

Demonstração:

Seja π um plano sobre o qual toma-se o ponto P . Por meio de um sistema de eixos ortogonais com origem $O = (0,0)$, se $P = (x, y)$ são as coordenadas desse ponto, de modo que este não esteja sobre nenhum dos eixos coordenados e seja distinto da origem, então toma-se o ponto $Q = (x, 0)$ como sendo o pé da perpendicular de P sobre o eixo- OX , de modo a formar um triângulo retângulo de vértices O, P e Q .

Em ΔOPQ seja \overline{OP} a hipotenusa com \overline{OQ} e \overline{PQ} catetos. Considerando o ângulo $\widehat{PQO} = \theta$, toma-se o seno e o cosseno de θ , dados por:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$$

E

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

fazendo $\overline{OQ} = x$, $\overline{PQ} = y$ e $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, e substituindo nas expressões acima, tem-se:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

E

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por outro lado, seja $P' = (x', y')$ a imagem de P obtida por meio da rotação de P em torno de O , sendo α o ângulo de rotação no sentido positivo.

Novamente, considera-se Q' o pé da perpendicular de P' sobre o eixo- \mathbf{OX} , de modo que um novo triângulo retângulo $OP'Q'$ seja formado de hipotenusa $\overline{OP'}$ e catetos $\overline{OQ'}$ e $\overline{P'Q'}$. Considera-se o ângulo $P'\hat{O}Q' = \alpha + \theta$, de modo que as relações $\text{sen}(\alpha + \theta)$ e $\text{cos}(\alpha + \theta)$ sejam verificadas.

Fazendo $\overline{OP'} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $\overline{P'Q'} = y'$ e $\overline{OQ'} = x'$, segue que:

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

E

$$\text{cos}(\alpha + \theta) = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Donde segue que (ver 3.2.9.2 e 3.2.9.3):

$$\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \theta + \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

E

$$\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \theta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \theta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Substituindo os valores de $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$ nas suas relações obtém-se:

$$\text{sen } \alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \text{cos } \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

E

$$\text{cos } \alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \text{sen } \alpha \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Note que, a transformação mantém $\overline{OP'} = \overline{OP}$, logo $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dessa forma:

$$\text{sen } \alpha \cdot x + y \cdot \text{cos } \alpha = y'$$

E

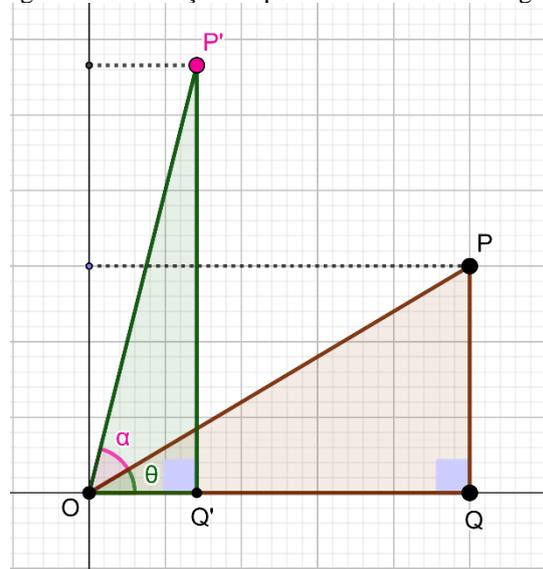
$$\text{cos } \alpha \cdot x - \text{sen } \alpha \cdot y = x'$$

Que são as coordenadas do ponto P' , imagem de P por meio da reflexão em torno da origem O . Assim,

$$\mathcal{R}_{\theta, O}(x, y) = (x', y') = (\cos \alpha \cdot x - \operatorname{sen} \alpha \cdot y, \operatorname{sen} \alpha \cdot x + y \cdot \cos \alpha)$$

Geometricamente,

Figura 48 – Rotação do ponto P em torno da origem



Fonte: autoria própria.

4.10 Cônicas

Uma figura é um lugar geométrico de pontos quando todos os seus pontos, e apenas eles, têm uma certa propriedade comum. Em geometria analítica, obter um lugar geométrico significa obter a equação que o representa e interpretar a equação é dizer qual curva é a curva por ela representada.

A combinação entre a aplicação da álgebra e a natureza dos lugares geométricos revelaram a Pierre de Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis. Ao estudar as *Cônicas* Fermat obteve suas equações por meio das propriedades que a definem, como formas irredutíveis partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (41)$$

Segundos os valores de seus coeficientes estudaremos essa equação para os casos em que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. Mais precisamente, definiremos uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, que são os principais lugares geométricos obtidos dessa equação.

4.8.1 Equação da Elipse

Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , o lugar geométrico dos

pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a esses pontos F_1 e F_2 seja a constante é a elipse de focos F_1 e F_2 .

Algebricamente, sua equação em relação ao sistema cartesiano é dada de acordo com a posição de seu eixo maior. Se uma elipse tem centro no ponto O , eixo maior paralelo ao eixo OY (ou OX) sua equação é, respectivamente:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (42)$$

ou

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (43)$$

Demonstração:

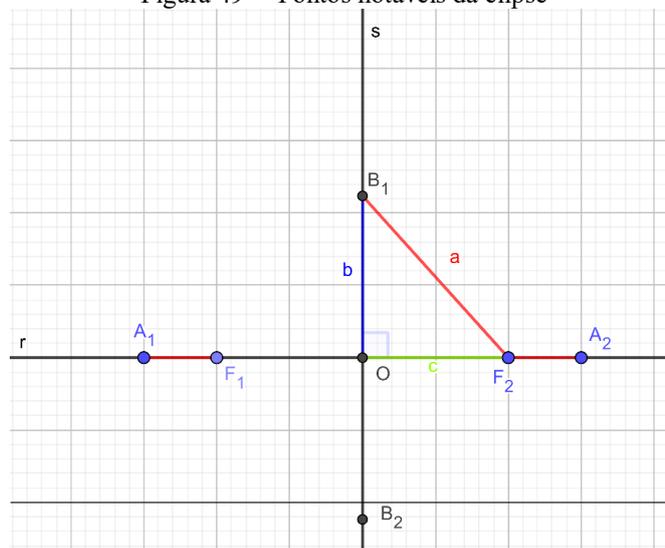
Considere dois pontos distintos A_1 e A_2 que determinam uma reta $\overline{A_1A_2} = r$, $r \parallel OX$, em seguida marcam-se dois segmento de medida x , interiores a $\overline{A_1A_2}$, tais que A_1 e A_2 são uma das extremidades de cada um e F_1 e F_2 a outra extremidade, respectivamente. Em seguida, determina-se $O \in r$ o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ pelo qual passa a reta s perpendicular a r (ver 3.1.7).

Tomando as medidas $\overline{A_1O} = \overline{OA_2} = a$ e $\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = c$, tais que estas sejam os lados de um triângulo retângulo em O e um dos vértices F_1 (ou F_2). Fazendo a a hipotenusa desse triângulo e c um dos catetos, pelo teorema de Pitágoras o outro cateto b é obtido, conforme a relação

$$a^2 = c^2 + b^2$$

A medida do segmento b é marcada sobre s a partir do vértice O , tanto para cima quanto para baixo, marcando os pontos B_1 e B_2 , respectivamente.

Figura 49 – Pontos notáveis da elipse



Fonte: autoria própria.

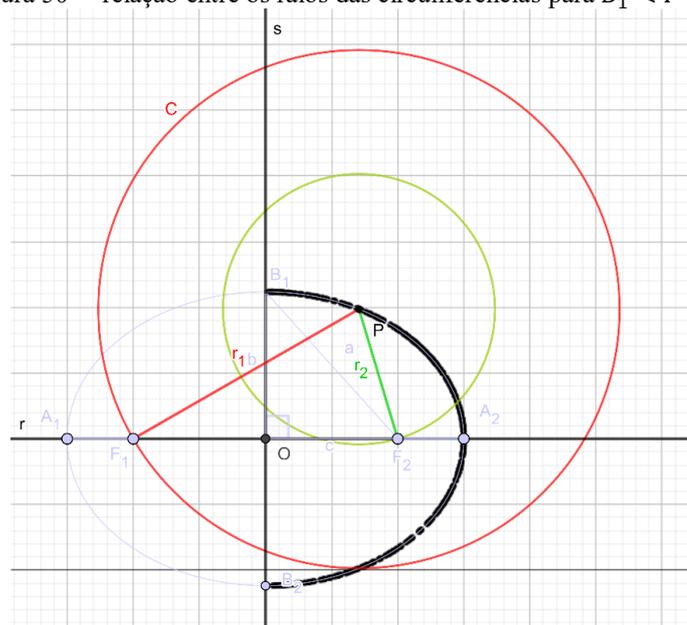
Assim, tem-se que $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{F_1F_2} = 2c$ e $\overline{B_1B_2} = 2b$. Dessa forma, considera-se l o conjunto dos pontos P de α , tais que as distâncias de $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ sejam r_1 e r_2 , respectivamente, tais que a soma $r_1 + r_2 = 2a$

Para tal, consideram-se duas circunferências C e C' concêntricas com centro em $P = A_1$ (ou A_2), uma passando por F_1 e raio r_1 e outra pelo ponto F_2 e raio r_2 , respectivamente.

Agora, fazendo P variar a partir de A_1 no sentido anti-horário em direção a B_1 e no sentido horário em direção a B_2 , tem-se:

- C' interior a C se $B_1 < P < B_2$, logo $r_1 > r_2 \Rightarrow r_1 = 2a - r_2$

Figura 50 – relação entre os raios das circunferências para $B_1 < P < B_2$



Fonte: autoria própria.

Em seguida, fazendo P variar a partir de B_1 no sentido anti-horário em direção a B_2 , tem-se:

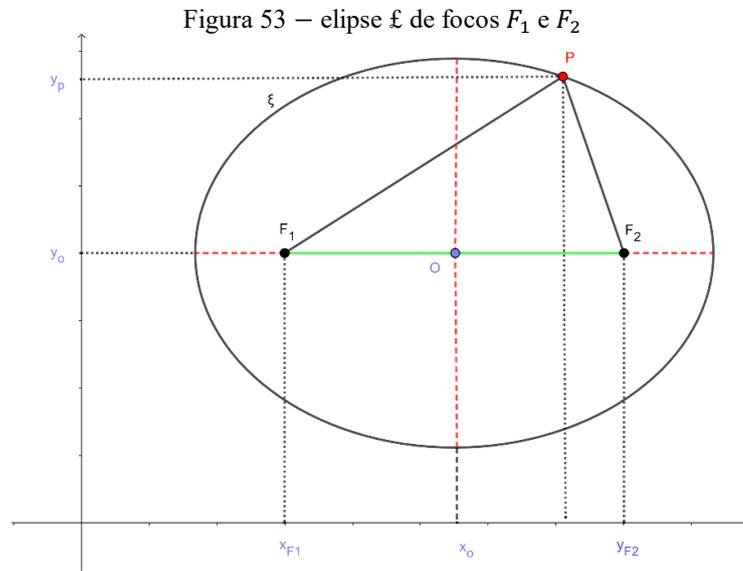
- C interior a C' se $B_2 < P < B_2$, logo $r_2 > r_1 \Rightarrow r_2 = 2a - r_1$

Figura 51 – relação entre os raios das circunferências para $B_2 < P < B_2$

(x_0, y_0) são as coordenadas dos pontos focais e do centro e $P = (x_p, y_p)$ um ponto da elipse ξ , segue as relações:

1. $x_{F_1} = x_0 - c$ e $x_{F_2} = x_0 + c$
2. $y_{F_1} = y_{F_2} = y_0$

Geometricamente,



Fonte: autoria própria..

Sejam $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ as respectivas distâncias do ponto P aos focos, isto é:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Pelas relações entre as perpendiculares do ponto P e dos focos em relação aos eixos as distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são dadas em relação as coordenadas dos pontos:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_p - x_{F_1})^2 + (y_p - y_{F_1})^2} = \sqrt{(x_p - (x_0 - c))^2 + (y_p - y_0)^2}$$

e,

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_p - x_{F_2})^2 + (y_p - y_{F_2})^2} = \sqrt{(x_p - (x_0 + c))^2 + (y_p - y_0)^2}$$

Assim,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_p - (x_0 - c))^2 + (y_p - y_0)^2} + \sqrt{(x_p - (x_0 + c))^2 + (y_p - y_0)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_p - (x_0 - c))^2 + (y_p - y_0)^2} = 2a - \sqrt{(x_p - (x_0 + c))^2 + (y_p - y_0)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_p - (x_0 - c))^2 + (y_p - y_0)^2 = \left(2a - \sqrt{(x_p - (x_0 + c))^2 + (y_p - y_0)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_p - (x_o - c))^2 + (y_p - y_o)^2 \\
&\quad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} + (x_p - (x_o + c))^2 \\
&\quad \quad + (y_p - y_o)^2 \\
&\Leftrightarrow (x_p - (x_o - c))^2 \\
&\quad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} + (x_p - (x_o + c))^2 \\
&\Leftrightarrow (x_p - (x_o - c))^2 - (x_p - (x_o + c))^2 \\
&\quad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} \\
&\Leftrightarrow x_p^2 - 2x_p(x_o - c) + (x_o - c)^2 - x_p^2 + 2x_p(x_o + c) - (x_o + c)^2 \\
&\quad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} \\
&\Leftrightarrow -2x_p(x_o - c) + (x_o - c)^2 + 2x_p(x_o + c) - (x_o + c)^2 \\
&\quad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} \\
&\Leftrightarrow 4x_p c - 4x_o c = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2} \\
&\Leftrightarrow (c(x_p - x_o) - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow (c(x_p - x_o) - a^2)^2 = a^2 \left((x_p - (x_o + c))^2 + (y_p - y_o)^2 \right) \\
&\Leftrightarrow (c(x_p - x_o) - a^2)^2 = a^2 \left((x_p - x_o) - c \right)^2 + a^2 (y_p - y_o)^2 \\
&\Leftrightarrow c^2(x_p - x_o)^2 - 2ca^2(x_p - x_o) + a^4 \\
&\quad = a^2(x_p - x_o)^2 - 2ca^2(x_p - x_o) + a^2c^2 + a^2(y_p - y_o)^2 \\
&\Leftrightarrow a^4 - a^2c^2 = (x_p - x_o)^2(a^2 - c^2) + a^2(y_p - y_o)^2 \\
&\Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = (x_p - x_o)^2(a^2 - c^2) + a^2(y_p - y_o)^2 \\
&\Leftrightarrow 1 = \frac{(x_p - x_o)^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2(y_p - y_o)^2}{a^2(a^2 - c^2)} \\
&\Leftrightarrow 1 = \frac{(x_p - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y_p - y_o)^2}{(a^2 - c^2)}
\end{aligned}$$

Observando a relação notável toma-se $a^2 - c^2 = b^2$, segue:

$$\frac{(x_p - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_p - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (44)$$

Que é a equação reduzida da elipse \mathcal{E} de centro $O = (x_0, y_0)$, que $P(x, y)$ verifica.

Desenvolvendo essa equação, obtém-se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

que é da forma da equação 41.

Com $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

$$r^2 = \frac{E^2 + D^2 - 4AF}{4A^2}$$

Dividindo a equação (41) por AC e completando os quadrados obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{R}{4A^2C^3} \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{R}{4A^2C^3}. \end{aligned} \quad (45)$$

Relacionando as equações 44 e 45 (ver 3.2.1.2), decorre que:

a) O ponto central da elipse \mathcal{E} tem suas coordenadas dadas em função dos coeficientes da equação 41, isto é $O = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$;

b) Estudo de R

Substituindo os valores dos coeficientes em R , obtém-se:

$$\begin{aligned} R &= a^4(-2b^2x_0)^2 + b^2a^2(-2a^2y_0)^2 - 4b^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2)a^4 \\ \Rightarrow R &= 4a^4b^4x_0^2 + 4b^2a^6y_0^2 - 4a^4b^4x_0^2 - 4b^2a^6y_0^2 + 4b^4a^6 = 4b^4a^6 \\ &\Rightarrow R = 4b^4a^6 \end{aligned}$$

i) Se $R = 0$, então $b = a = 0$, isto é, as medidas dos eixos $\overline{A_1A_2} = 2a$ (eixo maior) e $\overline{B_1B_2} = 2b$ (eixo menor) da elipse são nulas. Assim, a equação 45 representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, que é o centro da elipse.

ii) Se $R \neq 0$, então podemos escrever a equação (45) na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{R}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{R}{4AC^3}} = 1$$

Como $AC > 0$, a equação (45) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $R > 0$.

iii) Se $R < 0$, então $R \notin \mathbb{R}$, logo a equação (45) representa um conjunto vazio, pois,

neste caso ter-se-ia:

$$\frac{R}{4A^2C^2} < 0 \text{ e } \frac{R}{4ACC^2} < 0$$

iv) Para os casos em que $A = C \neq 0$ a equação 45 representa uma circunferência.

Por meio do desenvolvimento da equação 11, obtém-se:

$$x_p^2 + y_p^2 - 2x_a x_p - 2y_a y_p + (y_a^2 + x_a^2 - r^2) = 0$$

que é uma equação do segundo grau da forma 41. Nesse sentido, segue que como o raio r deve ser um número real positivo então $r^2 > 0$, logo,

$$r^2 = y_a^2 + x_a^2 - F = \left(\frac{E}{-2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{-2A}\right)^2 - F$$

$$r^2 = \frac{E^2 + D^2 - 4AF}{4A^2} \quad (46)$$

Assim, $E^2 + D^2 - 4AF > 0$ deve ser a condição necessária para a existência da circunferência.

Assim, têm-se que para $B = 0$ e A e C possuindo o mesmo sinal que a equação 45 representa um dos seguintes conjuntos:

- **Uma elipse** com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- **Um ponto;**
- **O conjunto vazio;**
- **Uma circunferência.**

Os casos em que a equação do segundo grau (Eq. 41), com $AC > 0$, representa um ponto, um conjunto vazio ou uma circunferência são denominados **casos degenerados da elipse**.

4.10.2 Equação da Hipérbole

Dados, dois pontos fixos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a esses pontos F_1 e F_2 seja a constante é a hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Algebricamente, sua equação em relação ao sistema cartesiano é dada de acordo com a posição de seu eixo real. Se uma hipérbole tem centro no ponto O , eixo real paralelo ao eixo OY (ou OX) sua equação é, respectivamente:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (47)$$

ou

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (48)$$

Demonstração:

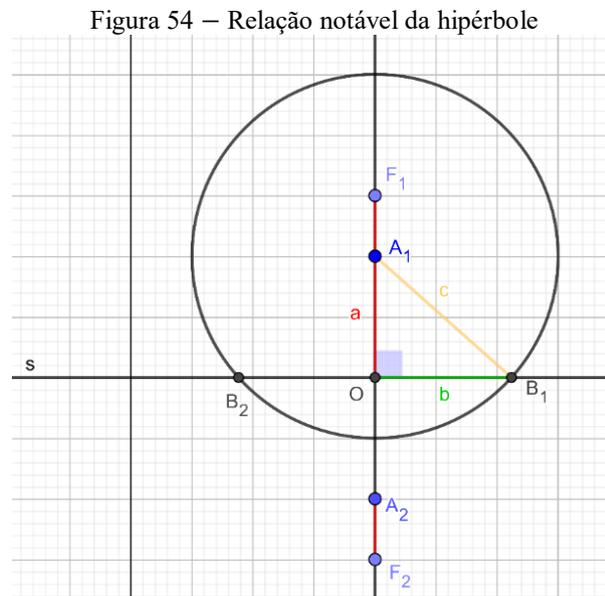
Consideram-se F_1 e F_2 dois pontos no plano que determinam a reta $\overline{F_1F_2}$ paralela ao eixo OY , em seguida marca-se o ponto O , que é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, pelo qual passa a reta r perpendicular a $\overline{F_1F_2}$.

Marcam-se dois segmentos de tamanho y pelas extremidades de $\overline{F_1F_2}$, com F_1 na extremidade de um e F_2 na extremidade do outro segmento, determinado os pontos A_1 e A_2 , de modo que o segmento $\overline{A_1A_2}$ esteja no interior de $\overline{F_1F_2}$ equidistante de suas extremidades e O o ponto médios de ambos os segmentos.

Tomam-se as medidas $\overline{F_1O} = c$, $\overline{A_1O} = a$ tais estas estejam relacionadas por meio de um triângulo retângulo, em que c seja a hipotenusa a um dos catetos e b o outro cateto obtido pela relação entre os lados dada pelo teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Por meio de uma circunferência com centro em A_1 e raio c pode-se determinar esse triângulo, pois o ponto em que esta toca s determina a medida dos segmentos $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = b$



Fonte: autoria própria.

Desse modo, tem-se os eixos $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{F_1F_2} = 2c$ e $\overline{B_1B_2} = 2b$ por meio dos quais serão estabelecidas as relações posteriores.

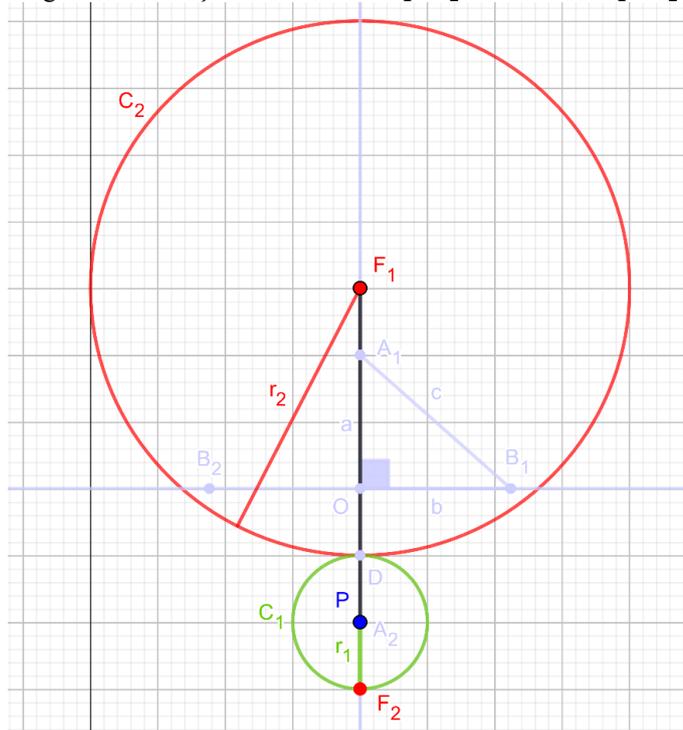
Se K é o conjunto dos pontos P do plano tais que a diferença entre as distâncias $\overline{PF_2}$ e $\overline{PF_1}$ seja constante igual a $2a$, então toma-se essa mediada por meio dos raios r_1 e r_2 de duas circunferências C_1 e C_2 , respectivamente.

Supondo $P = A_2$, traça-se uma circunferência C_1 e raio $r_1 = \overline{PF_2} = y$ centrada em A_2 tangente no ponto D a uma outra circunferência C_2 de centro em F_1 e raio $r_2 = \overline{F_1D} = 2a$. De

modo que

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = (r_2 + r_1) - r_1 = 2a$$

Figura 55 – relação entre os raios r_1 e r_2 dos círculos C_1 e C_2



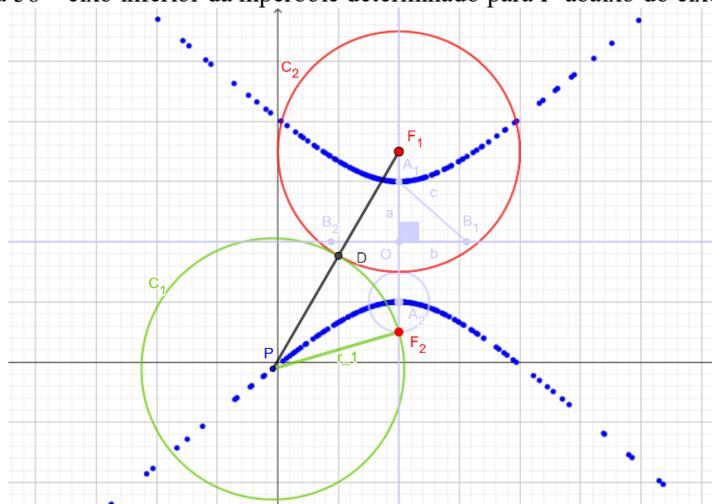
Fonte: autoria própria.

Fazendo P percorrer no plano, o raio r_1 de C_1 varia de acordo com a posição de P mantendo se a relação

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = (r_2 + r_1) - r_1 = 2a$$

- Se P está abaixo do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, tem-se C_1 e C_2 tangentes exteriores em D e determinam o eixo inferior da hipérbole φ de focos F_1 e F_2 e centro em O .

Figura 56 – eixo inferior da hipérbole determinado para P abaixo do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$



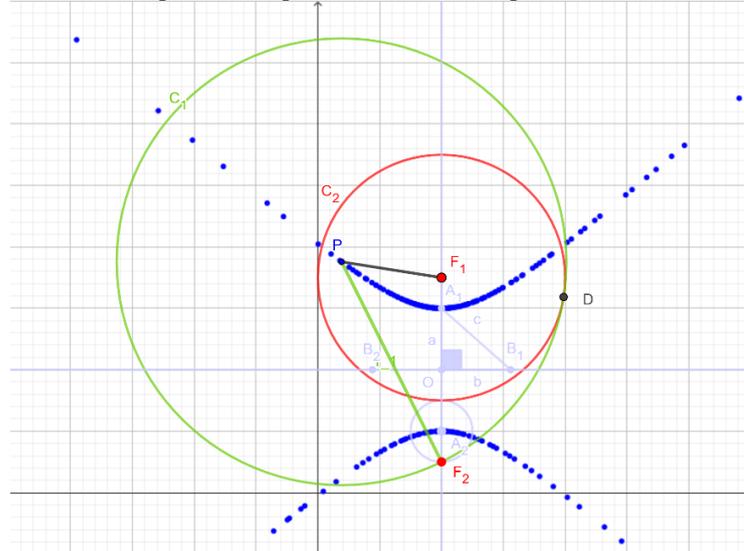
Fonte: autoria própria.

Nesse caso, sendo D o ponto de tangencia, tem-se $\overline{PF_1} = r_2 + r_1$ e $\overline{PF_2} = r_1$, logo a diferença entre as distancias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ é dada por:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = (r_2 + r_1) - r_1 = 2a$$

- Se P está acima do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, tem-se C_1 e C_2 tangentes interiores em D , e determinam o eixo superior da hipérbole φ de focos F_1 e F_2 e centro em O .

Figura 57 – eixo superior da hipérbole determinado para P abaixo do eixo $\overleftrightarrow{B_1B_2}$



Fonte: autoria própria.

Nesse caso, considerando o ponto de tangencia D tem-se $\overline{PF_2} = \overline{PF_1} + r_2$, isto é:

$$\begin{aligned} \overline{PF_2} &= \overline{PF_1} + r_2 = \overline{PF_1} + 2a \Rightarrow \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a \\ &\Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = -2a \end{aligned}$$

Em todo caso, tem-se que o modulo da diferença entre a distancias de um ponto P de uma hipérbole aos focos é constante igual a $2a$. Ou,

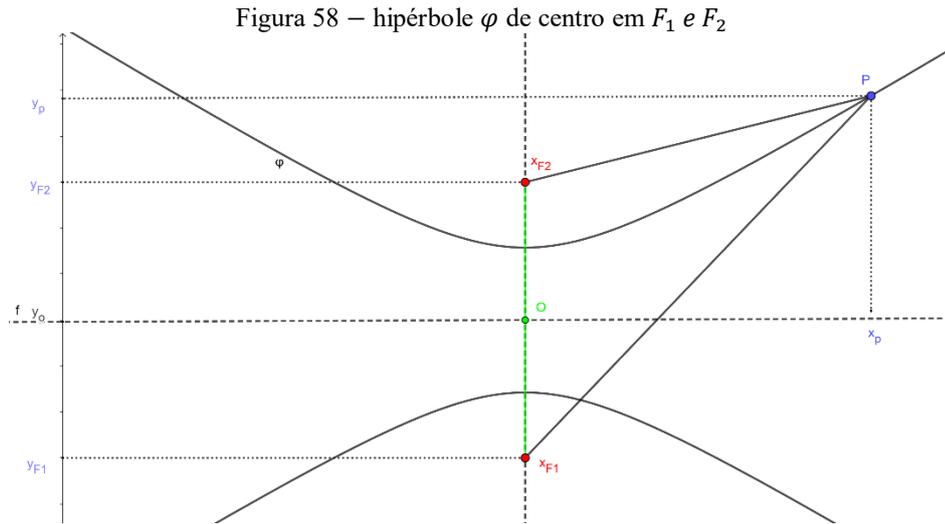
$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

Dessa forma, $\overline{A_1A_2} = 2a$ determina o eixo real, $\overline{F_1F_2} = 2c$ a distância focal e $\overline{B_1B_2} = 2b$ o eixo imaginário de uma hipérbole φ de centro em O , $a^2 + b^2 = c^2$ a relação notável excentricidade $\frac{c}{a}$.

Tomando sistema de eixos ortogonais OYX , se $F_1 = (x_{F_1}, y_{F_1})$, $F_2 = (x_{F_2}, y_{F_2})$, $O = (x_0, y_0)$ são as coordenadas dos pontos focais e do centro e $P = (x_p, y_p)$ um ponto de φ , segue as relações:

3. $y_{F_1} = y_0 - c$ e $y_{F_2} = y_0 + c$
4. $x_{F_1} = x_{F_2} = x_0$

Geometricamente,



Fonte: autoria própria.

Pelas relações entre as perpendiculares do ponto P e dos focos em relação aos eixos as distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são dadas em relação as coordenadas dos pontos:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_p - x_{F_1})^2 + (y_p - y_{F_1})^2} = \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o - c))^2}$$

e,

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_p - x_{F_2})^2 + (y_p - y_{F_2})^2} = \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} - \overline{PF_2} &= \pm 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o - c))^2} - \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} &= \pm 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o - c))^2} &= \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \pm 2a \\ \Leftrightarrow (x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o - c))^2 &= \left(\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \pm 2a \right)^2 \\ \Leftrightarrow (x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o - c))^2 &= \\ &= (x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2 \\ &\quad \pm 4a \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} + 4a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (y_p - (y_o - c))^2 \\
&\quad = (y_p - (y_o + c))^2 \pm 4a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} + 4a^2 \\
&\Leftrightarrow (y_p - (y_o - c))^2 + (y_p - (y_o + c))^2 \\
&\quad = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \\
&\Leftrightarrow y_p^2 - 2y_p(y_o - c) + (y_o - c)^2 - y_p^2 + 2y_p(y_o + c) - (y_o + c)^2 \\
&\quad = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \\
&\Leftrightarrow -2y_p(y_o - c) + (y_o - c)^2 + 2y_p(y_o + c) - (y_o + c)^2 \\
&\quad = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \\
&\Leftrightarrow 4y_p c - 4y_o c = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \\
&\Leftrightarrow (c(y_p - y_o) - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2} \right)^2 \\
&\Leftrightarrow (c(y_p - y_o) - a^2)^2 = a^2 \left((x_p - x_o)^2 + (y_p - (y_o + c))^2 \right) \\
&\Leftrightarrow (c(y_p - y_o) - a^2)^2 = a^2(x_p - x_o)^2 + a^2((y_p - y_o) - c)^2 \\
&\Leftrightarrow c^2(y_p - y_o)^2 - 2ca^2(y_p - y_o) + a^4 \\
&\quad = a^2(x_p - x_o)^2 + a^2(y_p - y_o)^2 - 2ca^2(y_p - y_o) + a^2c^2 \\
&\Leftrightarrow a^4 - a^2c^2 = a^2(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2(a^2 - c^2) \\
&\Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = a^2(x_p - x_o)^2 + (x_p - y_o)^2(a^2 - c^2) \\
&\Leftrightarrow 1 = \frac{a^2(x_p - x_o)^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{(a^2 - c^2)(y_p - y_o)^2}{a^2(a^2 - c^2)} \\
&\Leftrightarrow 1 = \frac{(x_p - x_o)^2}{(a^2 - c^2)} + \frac{(y_p - y_o)^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Observando a relação notável toma-se $a^2 - c^2 = -b^2$, segue:

$$\frac{(y_p - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x_p - x_o)^2}{b^2} = 1 \quad (49)$$

Que é a equação reduzida da hipérbole φ de centro em $O = (x_o, y_o)$, que $P(x, y)$ verifica.

Desenvolvendo a equação, obtém-se:

$$b^2x_p^2 - a^2y_p^2 - 2x_0b^2x_p + 2y_0a^2y_p + x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Que é da forma eq. (41), com $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2x_0b^2$, $E = 2y_0a^2$ e $F = x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$ (ver 3.2.1.2).

Note que, $B = 0$ e A e C têm sinais opostos. Dividindo a equação (41) por $AC < 0$, supondo $A > 0$ e $C < 0$, e completando os quadrados obtém-se a expressão

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - C^2D^2 - AE^2}{4A^2C^2} = \frac{\Delta}{4A^2C^2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{\Delta}{4A^2C^2}. \quad (50)$$

Relacionando as equações 48 e 49, decorre que:

c) O ponto central da hipérbole \mathcal{H} tem suas coordenadas dadas em função dos coeficientes da equação 41, isto é $O = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$;

d) Estudo de Δ

Substituindo os valores dos coeficientes em Δ , obtém-se:

$$\Delta = -4b^2a^2(x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2) + a^4(-2b^2x_0)^2 - b^2(2y_0a^2)^2$$

$$\Rightarrow \Delta = -4a^2x_0^2b^4 + 4b^2a^4y_0^2 + 4a^4b^4 + 4a^2b^4x_0^2 - 4b^2y_0^2a^4$$

$$\Rightarrow \Delta = 4a^4b^4$$

i) Se $\Delta = 0$, então $b = a = 0$, isto é, as medidas dos eixos $\overline{A_1A_2} = 2a$ (eixo real) e $\overline{B_1B_2} = 2b$ (eixo imaginário) da elipse são nulas. Assim, a equação 49 representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{-A}{C} \left(x + \frac{D}{2A}\right)}$$

ii) Se $\Delta \neq 0$, então a equação (49) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos ordenados.

Assim, a equação 49 representa um dos seguintes conjuntos:

- **Uma hipérbole** de eixos paralelos aos eixos coordenados se $\Delta \neq 0$;
- **Um par de retas concorrentes** se $\Delta = 0$.

O caso em que a equação do segundo grau (Eq. 44) com $AC < 0$, representa um par de retas concorrentes é chamado **caso degenerado da hipérbole**.

4.10.3 Equação da Parábola

Dados um ponto fixo F e uma reta d , a distância p entre si, pertencentes a um plano α ,

com $F \notin d$ o lugar geométrico dos pontos P do plano equidistantes de d e de F é a parábola de foco F e diretriz d .

Algebricamente, sua equação em relação ao sistema cartesiano é dada de acordo com a posição de seu eixo de simetria e de seu foco. Se uma parábola tem vértice no ponto V , eixo de simetria paralelo ao eixo OX (ou OY) sua equação é, respectivamente:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad (51)$$

e,

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0) \quad (52)$$

Demonstração:

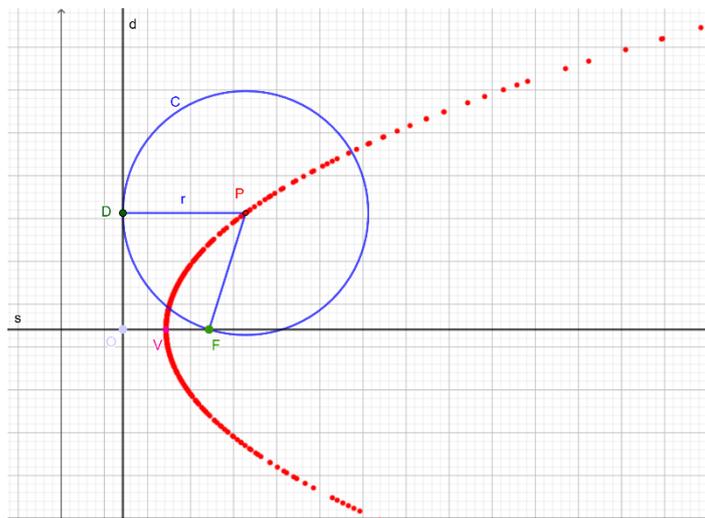
Dados dois pontos F e O no plano tais que $\overline{FO} = p$ de modo que determinam uma reta s paralela ao eixo OX , toma-se V o ponto médio de \overline{FO} , tal que $\overline{OV} = \overline{VF} = \frac{p}{2}$, e em seguida traça-se por O a reta d perpendicular a s .

Seja Q o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão a mesma distância de F e de um ponto de $P \in d$, para tal considera-se uma circunferência C de centro em P e raio $r = \overline{PF} = \overline{PD}$ tangente a d em D e com $F \in C$.

Inicialmente, tomando $V = P$, e desse ponto fazendo P percorrer no plano tem-se:

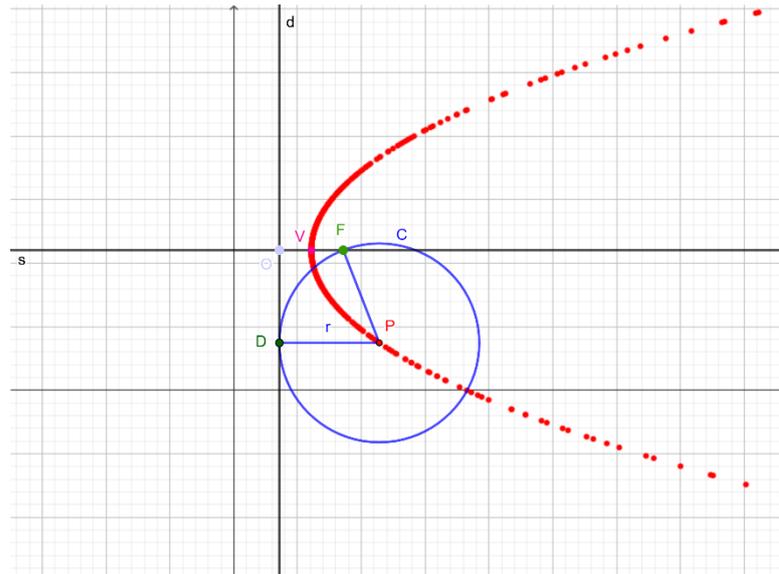
- Se P está acima do eixo \overleftrightarrow{VF} o raio r de C cresce indeterminadamente.

Figura 59 – circunferência com centro em P e raio igual a $\overline{DP} = \overline{PF} = r$



- Se P está abaixo do eixo \overleftrightarrow{VF} o raio r de C cresce indeterminadamente.

Figura 60 – circunferência com centro em P e raio igual a $\overline{DP} = \overline{PF} = r$



Fonte: autoria própria.

Assim, \overline{VF} determinam o eixo de simetria de uma parábola δ com foco em F , vértice no ponto V , diretriz d de parâmetro p e relação notável $\overline{VF} = \frac{p}{2}$

Tomando sistema de eixos ortogonais OYX , se $F = (x_F, y_F)$, $V = (x_V, y_V)$ são as coordenadas do ponto focal e do vértice e $P = (x_p, y_p)$ um ponto de δ e $Q = (x_Q, y_Q)$ um ponto de d , segue as relações:

$$5. \quad x_F = x_V + \frac{p}{2} \text{ e } x_Q = x_V - \frac{p}{2}$$

$$6. \quad y_F = y_V \text{ e } y_P = y_Q$$

Sejam \overline{PF} e \overline{QP} as distâncias do ponto $P \in \delta$ ao foco e do ponto $Q \in d$ ao ponto $P \in \delta$, respectivamente, tais que:

$$\overline{PF} = \overline{QP}$$

Geometricamente,

Figura 61 – Parábola δ de foco F e vértice V e diretriz d

Analogamente, se o eixo de simetria é paralelo ao eixo OX sua equação relativa ao sistema XOY é:

$$(x_p - x_v)^2 = \pm 2p(y_p - y_v) \quad (54)$$

Dessa forma, considerando os casos em que F fica abaixo ou acima, em relação a diretriz, tomando-a paralela ao eixo OY ou OX .

Desenvolvendo a equação 52, obtém-se uma equação do segundo com duas variáveis, equação (41), com $A = B = 0$ e $C = 1$, $D = \pm 2p$, $E = -2y_v$ e $F = y_v^2 \pm 2px_v$ (ver 3.2.1.2):

$$y_p^2 - 2y_v y_p \pm 2px_p + y_v^2 \pm 2px_v = 0 \quad (55)$$

Dessa forma, para $C \neq 0$ e $D \neq 0$, a equação 53 representa:

- **Uma parábola** cuja reta focal é paralela ao eixo OY

$$V = \left(-\frac{E}{2C}, -\frac{E^2 + 4CF}{4C} \right)$$

O ponto de vértice da parábola considerando $d \parallel OY$.

Para $C \neq 0$ e $D = 0$, a equação 53 representa:

- **Um par de retas paralelas** ao eixo OX , se $E^2 - 4CF > 0$

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} = y_v + \sqrt{2px_v} \text{ e } y' = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} = y_v - \sqrt{2px_v} \quad (56)$$

Isto é, as retas são dadas em função das coordenadas do ponto de vértice e do parâmetro p .

- **Uma reta** paralela ao eixo OX , se $E^2 - 4CF = 0$

$$y = \frac{-E}{2C} = y_v \quad (57)$$

Isto é, a reta passa pela ordenada do ponto de vértice.

- **O conjunto vazio**, se $E^2 - 4CF < 0$

O mesmo vale para o caso em a reta focal esteja paralela ao eixo OX (equação 53). Nesse caso, Com $A = 1, B = 0$ e $C = 0$, $D = -2x_v$, $E = \pm 2p$ e $F = x_v^2 \pm 2py_v$.

Em todo caso tem-se $B = 0$ e $AC = 0$. Os casos em que a equação do segundo grau (Eq. 41) com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

5 APLICABILIDADE DA GEOMETRIA ANALÍTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMETRICOS.

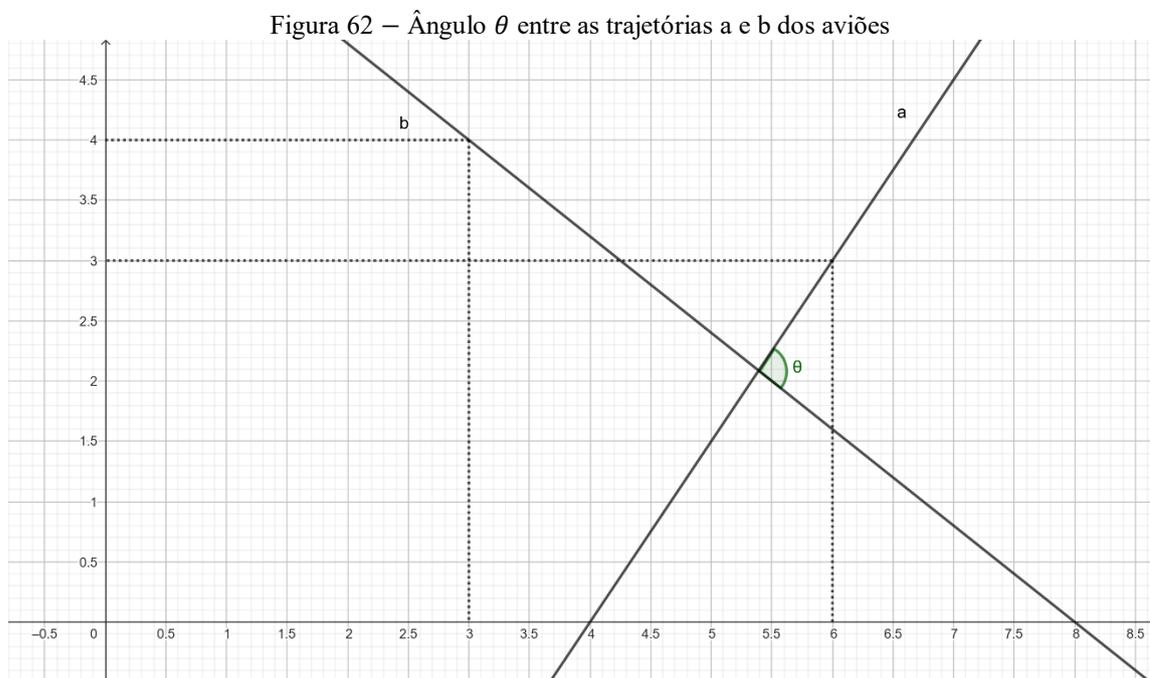
Neste capítulo, aplica-se os tópicos abordados da geometria analítica na resolução de problemas geométricos, considerando inicialmente uma representação geométrica do problema, em seguida um sistema cartesiano em posição conveniente, onde devidamente serão fixadas as coordenadas dos pontos correspondentes para em seguida obter a solução.

Aplicações:

1º) Dois aviões A e B partem das posições indicadas no plano cartesiano e após um tempo t , ocupam as posições indicadas. Qual o ângulo entre os aviões considerando que possuem trajetórias retilíneas entre os percursos dados?

Resolução:

Inicialmente percebe-se que o problema pode ser resolvido considerando ângulos entre retas. Diante disso, faz-se uma representação geométrica do problema. Assim, tem-se:



Fonte: autoria própria.

Considerando o plano cartesiano, observa-se que o avião B parte do ponto $O = (8, 0)$ e passa pelo ponto $P = (3, 4)$. Enquanto que o avião A parte do ponto $O' = (4, 0)$ e passa pelo ponto $P' = (6, 3)$. Assim, para obter os ângulos entre os voos, temos que obter a equação das rotas dos aviões A e B . Sendo as trajetórias retilíneas, estas podem ser descritas por retas cujas equações podem ser obtidas por meio de determinantes.

Rota do Avião A :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 32 + 3y - 4x - 8y = 0 \Rightarrow -5y - 4x + 32 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + 6,4$$

Logo, $m_A = -\frac{4}{5}$

Rota do Avião B :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12 + 6y - 3x - 4y = 0 \Rightarrow 2y - 3x + 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 6$$

Logo, $m_B = \frac{3}{2}$.

Assim, o avião A viaja com inclinação obtusa em relação ao eixo da abcissa enquanto que o avião B viaja sob um ângulo agudo em relação ao mesmo eixo. Para determinar o ângulo entre os aviões A e B , deve-se usar a expressão:

$$\tan \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

$$\rightarrow \tan \theta = \left| \frac{-\frac{4}{5} - \frac{3}{2}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}} \right| = \frac{17}{6} \Rightarrow \tan \theta = \frac{17}{6} \Rightarrow \arctg\left(\frac{17}{6}\right) = \theta \Rightarrow \theta \approx 70^\circ$$

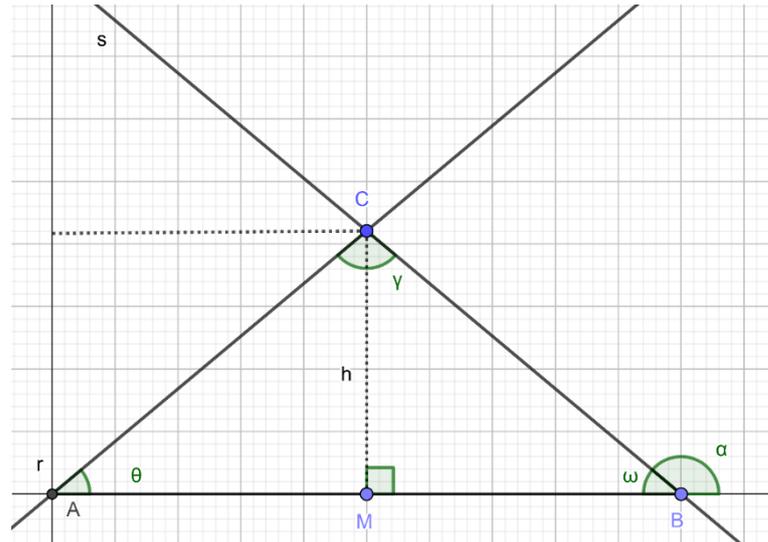
2º) Mostre que em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais. Em seguida, calcule o ângulo entre r e s .

Resolução:

Inicialmente representa-se um triângulo isósceles por meio do sistema de coordenadas XOY , com vértices nos pontos de coordenadas $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ e $C = \left(\frac{a}{2}, h\right)$ e ângulos da base $\angle C\hat{A}B = \alpha$ e $\angle C\hat{B}A = \beta$, com $\angle A\hat{C}B = \gamma$.

Para estudarmos os ângulos, deve-se primeiramente obter as equações das retas r e s relativas aos lados congruentes \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente.

Figura 63 – Triângulo isósceles ABC



Fonte; autoria própria.

Seja r a reta contém os pontos $A = (0,0)$ e $C = \left(\frac{a}{2}, h\right)$ logo, usando a colinearidade, vem que:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & h & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r : \frac{a}{2}y - hx = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{a}h \cdot x$$

h representa a altura do triângulo, logo: $m_r = \frac{2}{a}h$.

A inclinação da reta r com o eixo da abcissa é determinada pelo ângulo θ . Logo:

$$m_r = \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{2}{a}h$$

ou,

$$\theta = \arctg\left(\frac{2}{a}h\right)$$

Por outro lado, a reta s passa pelos pontos $B = (a,0)$ e $C = \left(\frac{a}{2}, h\right)$. Logo,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & h & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s : xh + \frac{a}{2}y - ah = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}y = -hx + ah \Rightarrow m_s = -\frac{2}{a}h$$

Como $m_s = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2}{a}h$. No entanto, $\alpha + \omega = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \omega$

$$\Rightarrow \tan(180^\circ - \omega) = -\frac{2}{a}h$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{a}h = \frac{\tan 180^\circ - \tan \omega}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan \omega}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{a}h = -\tan \omega \rightarrow \frac{2}{a}h = \tan \omega$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}h\right) = \omega$$

Comparando as expressões para θ e ω , tem-se que:

$$\theta = \omega$$

Ou seja, em todo triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.

Calcule o ângulo entre r e s .

Sendo $m_r = \frac{2}{a}h$ e $m_s = -\frac{2}{a}h$, tem-se:

$$\begin{aligned}\tan \gamma &= \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} = \frac{-\frac{2}{a}h - \frac{2}{a}h}{1 - \frac{4h^2}{a^2}} = \frac{-\frac{4}{a}h}{\frac{a^2 - 4h^2}{a^2}} \\ \Rightarrow \tan \gamma &= -\frac{4}{a}h \cdot \frac{a^2}{a^2 - 4h^2} = -\frac{4ha}{a^2 - 4h^2}\end{aligned}$$

O fato de $m_s = -\frac{2}{a}h$ o sinal de menos indica que área s possui um ângulo obtuso. O ângulo entre r e s é dado por

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4ha}{a^2 - 4h^2}\right)$$

para o ângulo obtuso.

3º) Com base no resultado anterior mostre que os ângulos internos do triângulo possuem soma de 180° graus.

$$\theta + \gamma + \omega = 180^\circ$$

Resolução:

Antes de mostrar que a soma dos ângulos internos do triângulo possui soma de 180° , temos de mostrar a seguinte relação trigonométrica que leva a condição

$$\theta + \gamma + \omega = 180^\circ$$

Fazendo:

$$\tan(\theta + \gamma + \omega) = \tan 180^\circ = 0 \Rightarrow \tan(\theta + \gamma + \omega) = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tan[\theta + (\gamma + \omega)] &= \frac{\tan \theta + \tan(\gamma + \omega)}{1 - \tan \theta \cdot \tan(\gamma + \omega)} = 0 \\ \Rightarrow \tan \theta + \tan(\gamma + \omega) &= 0 \Rightarrow \tan \theta + \frac{\tan \gamma + \tan \omega}{1 - \tan \gamma \cdot \tan \omega} = 0 \\ \Rightarrow \tan \theta + \tan(\gamma + \omega) &= 0 \Rightarrow \tan \theta + \frac{\tan \gamma + \tan \omega}{1 - \tan \gamma \cdot \tan \omega} = 0 \\ \Rightarrow \tan \theta (1 - \tan \gamma \cdot \tan \omega) &+ \tan \gamma + \tan \omega = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \tan \gamma + \tan \omega = \tan \theta \cdot \tan \gamma \cdot \tan \omega$$

A relação dada pela soma dos ângulos das tangentes dos ângulos θ , γ e ω , pelo respectivo produto das tangentes dos mesmos ângulos, são iguais. Essa condição é necessária para assegurar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

$$\text{Vimos que, } \tan \gamma = -\frac{4ha}{a^2-4h^2} \text{ e } \tan \theta = \frac{2h}{a} = \tan \omega$$

$$\text{Seja } z_1 = \tan \theta + \tan \gamma + \tan \omega \rightarrow z_1 = \frac{4h}{a} - \frac{4ha}{a^2-4h^2}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{4h(a^2 - 4h^2) - 4ha^2}{a(a^2 - 4h^2)} = -\frac{16h^3}{a(a^2 - 4h^2)}$$

$$\text{Seja } z_2 = \tan \theta \cdot \tan \gamma \cdot \tan \omega \rightarrow z_2 = \left(-\frac{4ha}{a^2-4h^2}\right) \cdot \frac{2h}{a} \cdot \frac{2h}{a} = -\frac{16h^3}{a(a^2-4h^2)}$$

$$z_2 = -\frac{16h^3}{a(a^2 - 4h^2)}$$

Logo, temos que:

$$z_1 = z_2$$

Portanto, todo triângulo tem como soma dos ângulos internos um valor de 180° .

4º) Mostre que os ângulos de um triângulo equilátero tem tangente igual a $\sqrt{3}$.

Resolução:

Com base no resultado anterior, imediatamente tem-se:

Seja a condição $\tan \theta + \tan \gamma + \tan \omega = \tan \theta \cdot \tan \gamma \cdot \tan \omega$. Logo,

$$\theta = \gamma = \omega \rightarrow \tan \theta + \tan \theta + \tan \theta = \tan \theta \cdot \tan \theta \cdot \tan \theta$$

$$\Rightarrow 3 \tan \theta = \tan^3 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = 3 \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3}$$

Ou $\theta = 60^\circ$.

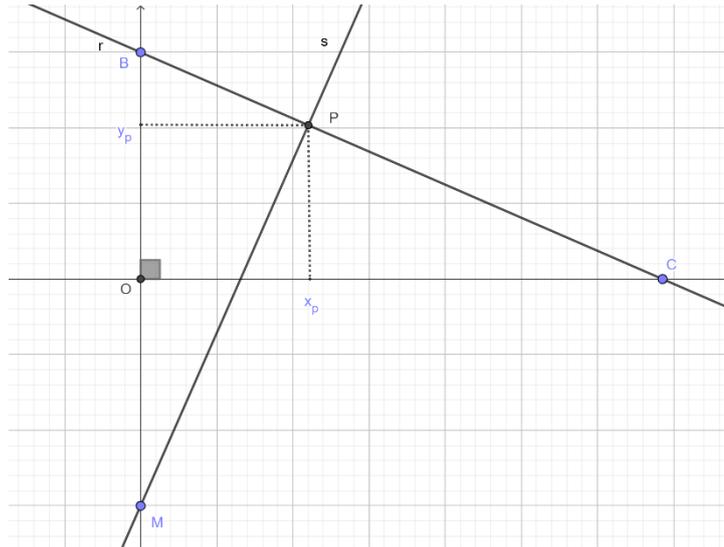
5º) Uma reta $r: ax + by + c = 0$ possui as seguintes coordenadas $B(0, b)$ e $C(c, 0)$. Uma segunda reta s que contém o ponto $M(0, -b)$ intercepta r perpendicularmente. Usando a distância de um ponto a reta, mostre que é válido teorema de Pitágoras. Isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Resolução:

Geometricamente, por meio do sistema de coordenadas faz-se uma projeção do problema, destacando os pontos conforme suas coordenadas.

Figura 65 – Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BOC



Fonte: autoria própria.

Dessa forma, determina-se um triângulo retângulo BOC . Nesse caso, devemos mostrar que $\overline{BP} + \overline{PC} = a^2 + b^2$. Isto é $d_{B,C} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

a) determinação da equação de r

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r : xb + cy - cb = 0 \Rightarrow r : y = -\frac{b}{c}x + b$$

Logo, r possui o seguinte coeficiente angular

$$m_r = -\frac{b}{c}$$

b) equação de s

Vamos usar o feixe $y - y_m = m_s \cdot (x - x_m)$ onde $x_m = 0$ e $y_m = -b$.

Como $s \perp r \rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow -\frac{b}{c} \cdot m_s = -1 \rightarrow m_s = \frac{c}{b}$. Assim,

$$y - y_m = m_s \cdot (x - x_m) \rightarrow s : y + b = \frac{c}{b} \cdot (x - 0) \rightarrow s : y = \frac{c}{b}x - b$$

Ou

$$s : y - \frac{c}{b}x + b = 0$$

Para calcular a distância $d_{B,P}$, utiliza-se a distância da reta s ao ponto B , isto é:

$$d_{B,P} = d_{B,s} = \frac{\left| y - \frac{c}{b}x + b \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{c}{b}\right)^2}} = \frac{\left| y - \frac{c}{b}x + b \right| \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Como $B(0, b)$ implica em

$$d_{B,P} = \frac{\left|y - \frac{c}{b} \cdot 0 + b\right| \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Assim,

$$d_{B,P} = \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Para o cálculo da distância de $d_{P,C}$ usa-se a distância da reta s ao ponto C , isto é:

$$d_{P,C} = d_{C,s} = \frac{\left|y - \frac{c}{b}x + b\right| \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Para $C(c, 0)$ vem que:

$$d_{P,C} = \frac{\left|0 - \frac{c}{b} \cdot c + b\right| \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Se $c > b$, tem-se:

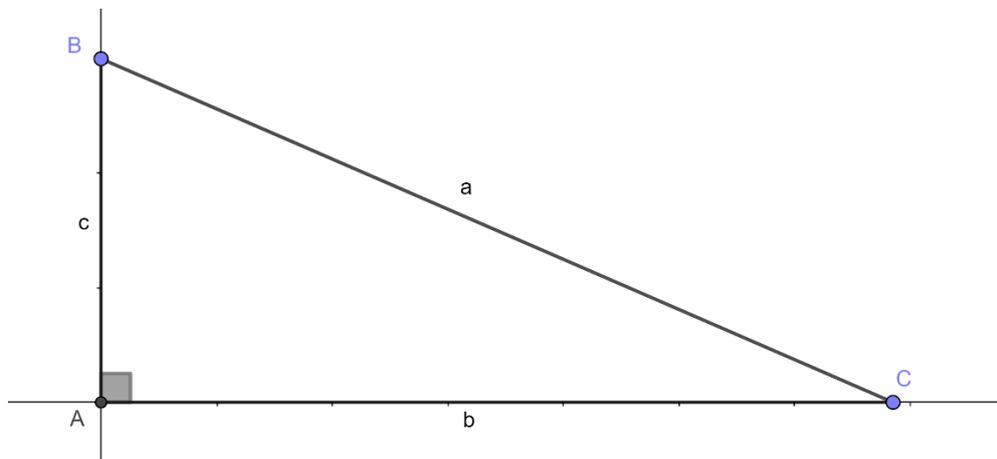
$$\rightarrow d_{P,C} = -\frac{(b^2 - c^2)}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Somando as duas distancias $d_{B,P} + d_{P,C}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} d_{B,C} &= d_{B,P} + d_{P,C} \\ \rightarrow d_{B,C} &= \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c^2 + b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ \rightarrow d_{B,C} &= \frac{c^2 + b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{(c^2 + b^2) \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2} \\ \rightarrow d_{B,C} &= \sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Assim, em todo triângulo retângulo em A , é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

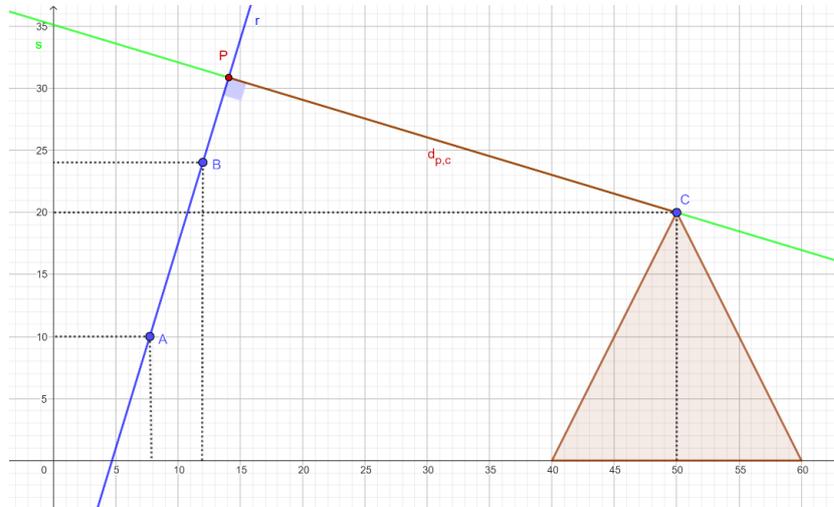
Figura 66 – triângulo retângulo ABC



Fonte: autoria própria.

6º) Um atirador está deitado no topo de uma montanha que está a $20m$ do solo e a $50m$ da horizontal em relação a um eixo de referência XOY . Um pássaro sai do topo de uma árvore de $10m$ de altura e a $8m$ do eixo XOY , conforme a ilustração (ver figura 31).

Figura 67 – Ilustração do problema



Fonte; autoria própria.

O pássaro inicia o movimento do ponto $A = (8, 10)$ fazendo uma trajetória retilínea passando pelo ponto $B = (12, 14)$, enquanto o atirador localiza-se no ponto C . O atirador aponta a arma e atinge o pássaro na menor distância do segmento \overline{PC} . Assim, sendo determine a distância \overline{PC} onde P foi o ponto que o atirador acertou o pássaro. Localize a posição em que a bala atinge o pássaro.

Resolução:

Desse modo, pode-se determinar os movimentos do pássaro e do projétil por meio das retas r e s , respectivamente:

Inicialmente, deve-se obter a equação de r por meio das coordenadas dos pontos A e B .

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 10 & 1 \\ 12 & 20 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r : 10x - 20y + 12y - 8y + 160 - 120 = 0$$

$$\Rightarrow -10x + 4y + 40 = 0 \Rightarrow -5x + 2y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow r : y = \frac{5}{2}x - 10$$

Ou na forma geral

$$r : y - \frac{5}{2}x + 10 = 0$$

Para que o atirador atinja o pássaro na menor distância dele em relação a reta r , as retas r e s onde s contém os pontos C e P , devem ser perpendiculares. Logo,

$$m_s \cdot m_r = -1$$

Como $m_r = -\frac{5}{2} \rightarrow m_s = \frac{2}{5}$.

Nesse caso, a distância de um ponto C a reta r é dada por:

$$d_{P,C} = d_{C,r} = \frac{\left|y - \frac{5}{2}x + 10\right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{\left|y - \frac{5}{2}x + 10\right| \cdot 2}{\sqrt{29}}$$

Como $C(50, 20)$, vem que

$$\begin{aligned} d_{P,C} &= \left|20 - \frac{5}{2} \cdot 50 + 10\right| \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29} = |30 - 125| \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \Rightarrow d_{P,C} &= \frac{2\sqrt{29} \cdot |-95|}{29} = \frac{190\sqrt{29}}{29} \rightarrow \\ d_{P,C} &= 6,53\sqrt{29}m \end{aligned}$$

Dessa forma, o atirador atinge o pássaro a uma distância de $6,53\sqrt{29}m$.

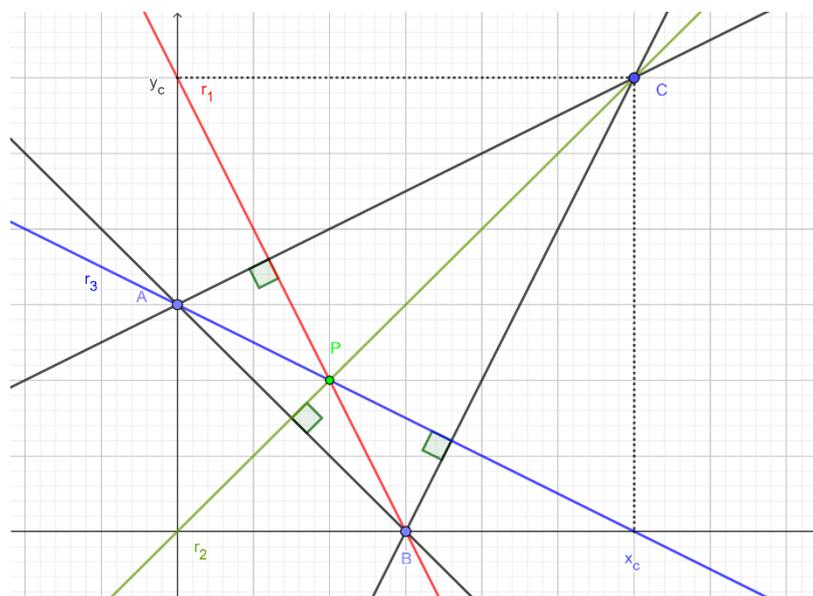
7º) Prove que as três alturas de um triângulo tem um ponto comum.

Demonstração:

De acordo com a definição da geometria plana (ver 3.1.8.4) devemos provar que dado um triângulo ABC o ortocentro desse triângulo é o único ponto de intersecção entre as retas suportes das alturas respectivas a cada lado \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} .

Considerando um sistema de coordenadas XOY , sejam $A = (0, c)$, $B = (c, 0)$ e $C = (2c, 2c)$ as coordenadas dos pontos de vértice de ΔABC e r_1, r_2 e r_3 as retas suportes das alturas relativas aos lados \overline{AC} , \overline{AB} e \overline{BC} respectivamente.

Figura 68 – Ortocentro do triângulo ABC



Fonte: autoria própria.

Inicialmente, deve-se obter as equações das retas que contêm os lados desse triângulo.

Sejam \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AC} as retas determinadas pelos pontos vértices, usando determinantes obtém-se suas respectivas equações:

a) Equação de \overleftrightarrow{AC} passando por $A = (0, c)$ e $C = (2c, 2c)$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{AC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & c & 1 \\ 2c & 2c & 1 \end{vmatrix} &= (c - 2c)x - (0 - 2c)y + 2c^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -cx + 2cy + 2c^2 &= 0 \div c \Rightarrow -x + 2y + 2c = 0 \\ \rightarrow \overleftrightarrow{AC}: -x + 2y + 2c &= 0\end{aligned}$$

na forma reduzida,

$$y = \frac{x}{2} - c$$

b) Equação de \overleftrightarrow{BC} passando por $B = (c, 0)$ e $C = (2c, 2c)$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & 0 & 1 \\ 2c & 2c & 1 \end{vmatrix} &= (0 - 2c)x - (c - 2c)y + (2c^2 - 0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2cx + cy + 2c^2 &= 0 \div c \Rightarrow -2x + y + 2c = 0 \\ \Rightarrow \overleftrightarrow{BC}: -2x + y + 2c &= 0\end{aligned}$$

na forma reduzida,

$$y = 2x - 2c$$

c) Equação de \overleftrightarrow{AB} passando por $A = (0, c)$ e $B = (c, 0)$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & c & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} &= (c - 0)x - (0 - c)y + (0 - c^2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow cx + cy - c^2 &= 0 \div c \rightarrow x + y - c = 0 \\ \rightarrow \\ \overleftrightarrow{AB}: x + y - c &= 0\end{aligned}$$

na forma reduzida,

$$y = -x + c$$

Agora, considere $r_1 : y = mx + n$, $r_2 : y = m'x + n'$ e $r_3 : y = m''x + n''$ as equações reduzidas das retas suportes das alturas. Em cada caso tem-se:

i) $r_1 \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $B = (c, 0) \in r_1$

Como $r_1 : y = mx + n$ e $\overleftrightarrow{AC} : y = \frac{x}{2} - c$ são perpendiculares, do produto entre seus coeficientes angulares vem que:

$$m \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow m = -2$$

Como r_1 passa pelo ponto $B = (c, 0)$ decorre

$$0 = mc + n \rightarrow n = -mc$$

Sendo $m = -2 \rightarrow n = 2c$. Donde vem

$$r_1 : y = -2x + 2c$$

ii) $r_2 \perp \overline{BC}$ e $A = (0, c) \in r_2$

Analogamente, considerando $r_2 : y = m'x + n'$ e $\overline{BC} : y = 2x - 2c$ com r_2 passando por A , vem que

$$m' \cdot 2 = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{2}$$

e, $n' = c$. Donde segue

$$r_2 : y = \frac{-1}{2}x + c$$

iii) $r_3 \perp \overline{AB}$ e $C = (2c, 2c) \in r_3$

Por fim, considerando $r_3 : y = m''x + n''$ passando por C e $\overline{AB} : y = -x + c$. Vem que

$$m'' \cdot (-1) = -1 \Rightarrow m'' = 1$$

e, $n'' = 0$. Donde segue

$$r_3 : y = x$$

Tomando as retas r_1 , r_2 e r_3 em suas formas gerais, verifica-se o número de interseções entre elas por meio da solução do sistema linear

$$\begin{cases} -2x - y + 2c = 0 \\ -x - 2y + 2c = 0 \\ x - y + 0 = 0 \end{cases}$$

Escrevendo em forma matricial pelo teorema de Cramer (ver 3.2.7.2 c), vem que

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Logo, o sistema tem solução única. Isto é, as retas r_1 , r_2 e r_3 se intersectam em um único ponto P que o ortocentro do triângulo ABC .

Determinemos essa solução:

$$\begin{cases} -x - 2y = -2c \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = -2c \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y = x = \frac{2}{3}c$$

De fato, como $P \in r_1$, então deve satisfazer a equação $r_1 : -2x - y + 2c = 0$

$$r_1 : -2x - y + 2c = 0 \Rightarrow -2\left(\frac{2}{3}c\right) - \left(\frac{2}{3}c\right) + 2c = -\frac{4}{3}c - \frac{2}{3}c + 2c = -2c + 2c = 0$$

Portanto, $P = \left(\frac{2}{3}c, \frac{2}{3}c\right)$ é o ortocentro de ΔABC .

8º) Determinando retas concorrentes por meio de uma equação do segundo grau.

Questão apresentada por Iezzi (2013b, p. 210): provar que a equação $x^2 - y^2 + x + y = 0$ representa duas retas concorrentes.

Resolução:

Conforme o item 4.8.2 um par de retas concorrentes é obtido tomando-se os coeficientes da eq. (44) da seguinte forma:

$$4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$$

Em que A e C têm sinais opostos e $B = 0$. Isto é, por meio de um caso degenerado da hipérbole.

Como da equação dada é do segundo grau em duas variáveis (eq. 44) e seus coeficientes são tais que $A = 1, B = 0, C = -1, D = 1$ e $E = 1$ e $F = 0$, para que sejam concorrentes a relação $4ACF - CD^2 - AE^2$ deve ser nula. De fato,

$$4 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1^2 - 1 \cdot 1^2 = 0$$

Agora, determinam-se essas retas:

$$x^2 - y^2 + x + y = 0$$

Completando o quadrado, obtém-se;

$$x^2 - xy + yx - y^2 + x + y = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - y) + x + y = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - y + 1) = 0$$

Onde $r : x + y = 0$ e $s : x - y + 1 = 0$ representam o par de retas concorrentes.

Da geometria plana vem que r e s devem ter um único ponto em comum. (ver 3.1.2.6).

Essa verificação pode ser feita por meio do sistema:

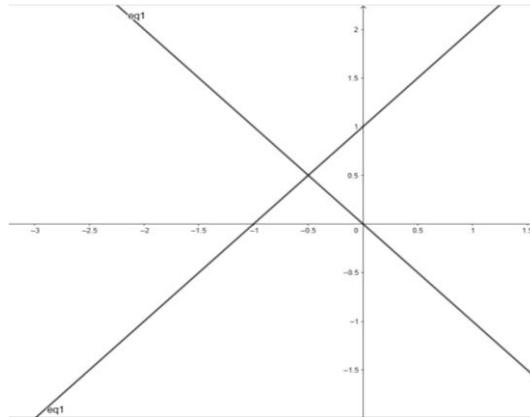
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Cuja solução, pelo teorema de Cramer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

determina que o sistema tem solução única (ver 3.2.6.2). Portanto, a equação dada representa duas retas concorrentes.

Figura 69 – Um par de retas concorrentes obtidos de um caso de hipérbole degenerada



Fonte; autoria própria.

9º) Determinando um par de retas paralelas ao eixo OX

Questão adaptada de Delgado, Frensel e Crissaf (2013, unidade. 7, p. 13): verifique se a equação $3y^2 + 7y - 6 = 0$ representa um par de retas paralelas.

Resolução:

Conforme o item 4.8.3, vemos que a equação dada é da forma da equação (44), com $A = B = D = 0, C = 3, E = 7$ e $F = -6$. Isto é, o par de retas pode ser obtido como um caso degenerado da parábola.

Para isso, temos que a relação $E^2 - 4CF > 0$ entre seus coeficientes deve ser positiva. De fato,

$$E^2 - 4CF = (7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 121 > 0$$

Donde segue que, a equação dada representa o par de retas

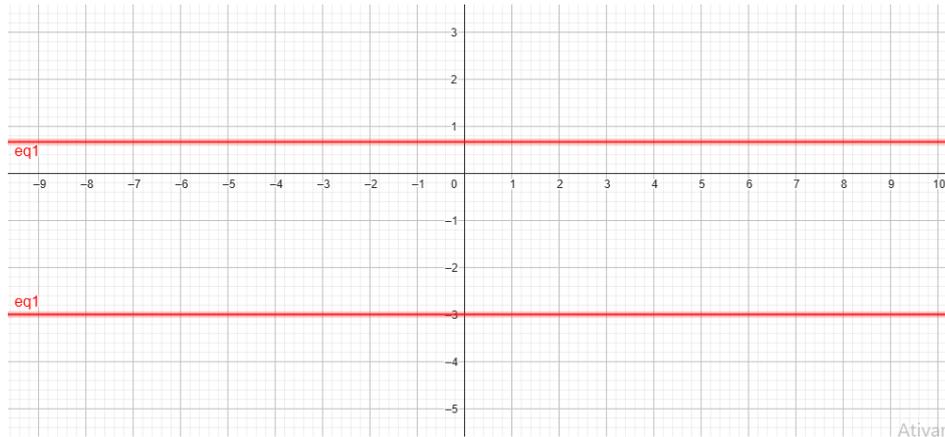
$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

Isto é,

$$y_1 = -3 \text{ e } y_2 = \frac{2}{3}$$

Que são paralelas ao eixo OX . Note que, a intersecção entre as retas é vazia ($y_1 \cap y_2 = \emptyset$) conforme a determina a geometria plana (ver 3.1.6).

Figura 70 – Representação gráfica do par de retas paralelas



Fonte: autoria Propriá

Ativar

Para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$ obtemos um par de retas paralelas ao eixo OY .

10º) Determinando um ponto por meio de uma equação do 2º grau.

Questão apresentada por Delgado, Frensel e Crissaf (2013, p. 16, und. 5); verifique se a equação $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$ representa um ponto.

Resolução:

A noção de ponto é aceita sem definição (ver 3.1.1). Por meio da geometria analítica pode-se obter um ponto como um caso de elipse degenerada em que a equação (44) tem coeficientes A e C com o mesmo sinal e $R = 0$ na equação (45).

Nesses termos, a equação dada tem coeficientes $A = 36, B = 0, C = 9, D = -108, E = 6$ e $F = 82$. Logo,

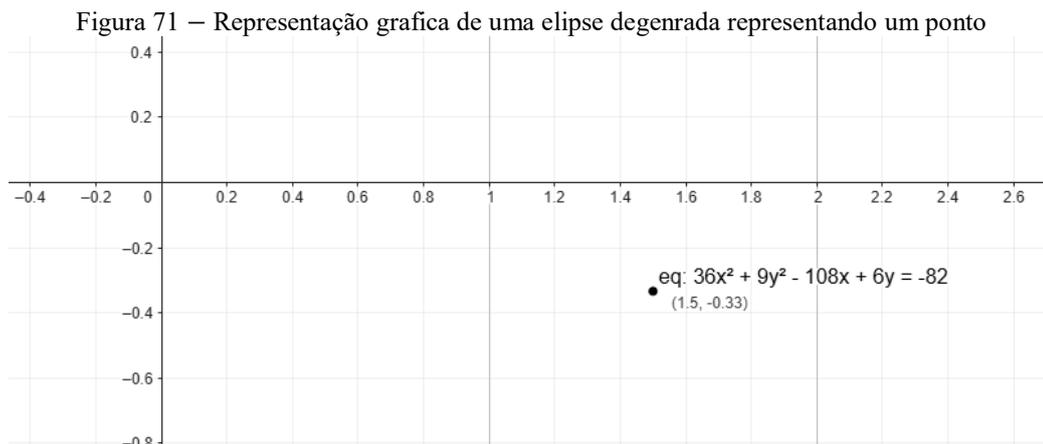
$$R = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2 = 9^2 \cdot (-108)^2 + 36 \cdot 9 \cdot 6^2 - 4 \cdot 36 \cdot 82 \cdot 9^2 = 0$$

Assim, a equação dada representa um ponto, como um caso degenerado da elipse. Sendo esse ponto o centro da elipse.

Essa solução pode ser obtido completando os quadrados na equação dada, isto é

$$\begin{aligned} 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) &= -82 \\ \Leftrightarrow 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) &= -82 + 36 \cdot \frac{9}{4} + 9 \cdot \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 &= -82 + 81 + 1 \\ \Leftrightarrow 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{3^2} + 9\frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{6^2} &= 0 \end{aligned}$$

Logo, a equação dada representa o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, Graficamente tem-se:



Fonte: autoria própria.

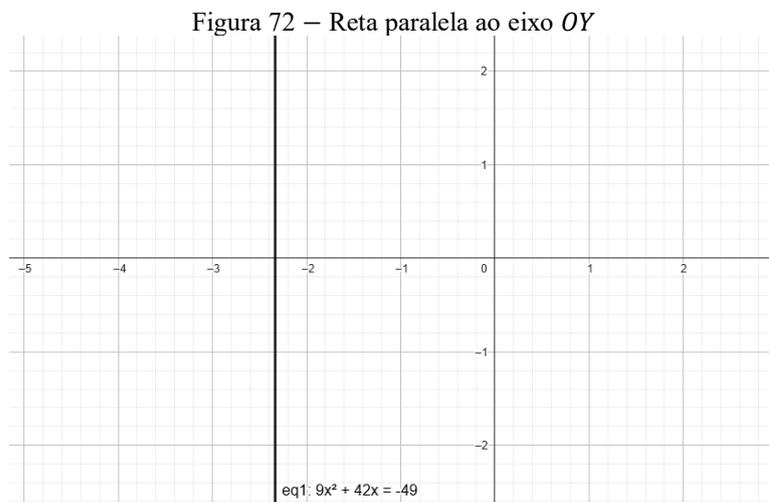
11º) Determinando uma reta por meio de uma função do 2º grau

Questão adaptada de Delgado, Frensel e Crissaf (2013, p. 13, und. 7): verifique que a equação $9x^2 + 42x + 49 = 0$ representa uma reta.

Resolução:

A noção de reta da geometria plana é um princípio aceito sem definição (ver 3.1.1). porém, podemos representa-la por meio equação geral (Eq. 44), com $B = 0$ e $AC = 0$ e paralela ao eixo OX , mediante as condições de $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$, ou para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$ obtemos uma reta paralela ao eixo OY .

Observando a equação dada, decorre que $B = C = E = 0$ com discriminante $D^2 - 4AF = 42^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49 = 1764 - 1764 = 0$, donde segue pela equação (53) que $x = -\frac{42}{18} = -\frac{7}{3}$, isto é $x = -\frac{7}{3}$ é paralela ao eixo OY .



Fonte: autoria própria.

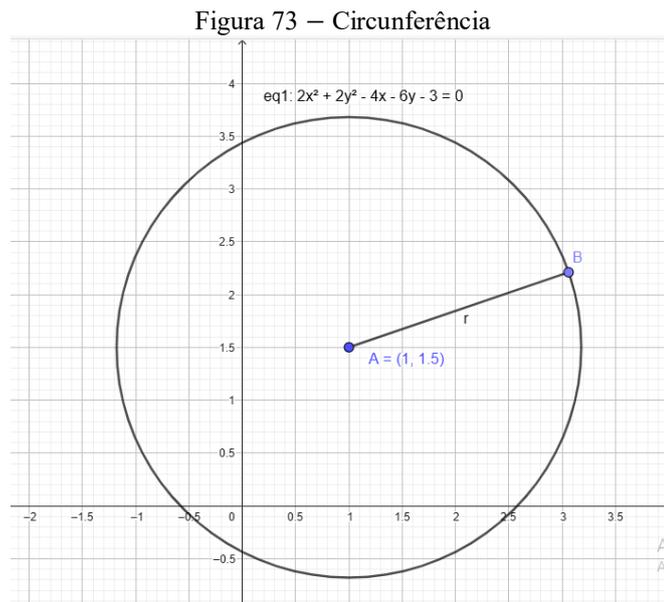
12º) Determinando uma circunferência.

Questão adaptada de Iezzi (2013c, p. 122): verifique que a equação $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ representa uma circunferência.

Resolução:

Conforme o item 4.3 temos que a equação do segundo grau (Eq. 44) representa uma circunferência se forem tomados $A = C \neq 0, B = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Note que, $A = C = 2, B = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF = (-4)^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 72 > 0$. Logo, o raio $r = \frac{\sqrt{76}}{16}$ (ver eq. 29) e centro em $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (ver 4.3).



Fonte: autoria própria..

13º) Questão retirada de Iezzi (2013c, p. 285): A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

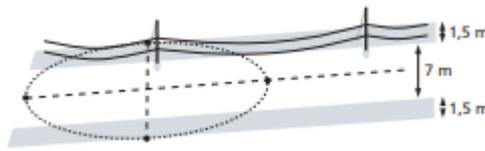
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dados: $0,943^2 \approx 0,889$ e $\sqrt{0,111} \approx 0,333$.



Resolução:

Considerando um sistema de coordenadas XOY , tal que o eixo OX seja representado pelo meio da rua e o eixo OY seja a linha perpendicular a calçada. Nesse caso tomamos a origem do sistema de coordenadas como sendo o ponto central da elipse.

Assim, sendo L a largura total da rua o eixo menor da elipse mede $10m$, logo a distância b do centro à extremidade superior do eixo menor é igual a $5m$.

Sendo a distância entre os dois postes a medida do eixo maior da elipse. Por meio da relação notável da elipse pode-se chegar nesse resultado.

Dada sua excentricidade, tem-se que:

$$\frac{c}{a} = 0,943 \Rightarrow c = 0,943a$$

da relação notável $a^2 = c^2 + b^2$ vem que:

$$\begin{aligned} a^2 &= (0,943a)^2 + 5^2 \\ \Rightarrow a^2 &= 0,889a^2 + 25 \\ \Rightarrow a^2 - 0,889a^2 &= 25 \\ \Rightarrow a^2(1 - 0,889) &= 25 \\ \Rightarrow a^2(0,111) &= 25 \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{25}{0,111} \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\frac{25}{0,111}} = \frac{5}{0,333} \Rightarrow a \approx 15 \end{aligned}$$

Como queremos encontrar a medida do eixo maior vem que este mede $2a$, isto é aproximadamente $30m$.

14º) Propriedade refletora da elipse.

Considere um espelho com forma de um arco de elipse de excentricidade $0,5$ e uma lâmpada que se coloca no foco mais próximo. Se desejamos iluminar um ponto a $10cm$ de distância da lâmpada, qual a distância, em centímetros, dos eixos da elipse que forma o espelho?

Resolução:

Pela propriedade refletora da elipse¹, o ponto que se deseja iluminar é o outro foco da elipse.

Considerando um sistema de eixos cartesianos e tomando o centro da hipérbole como a origem do sistema, tem-se:

1. Distância focal igual a 10cm e excentricidade $0,5$.

Dessas medidas decorre que a distância c da lâmpada até o centro da elipse é de 5cm , isto é:

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

e,

$$\frac{c}{a} = 0,5 \Rightarrow a = 10$$

Logo, a medida de seu eixo maior é $2a = 20\text{cm}$. Pela relação notável $a^2 = c^2 + b^2$ vem que:

$$10^2 - 5^2 = b^2 \Rightarrow \sqrt{75} = b \Rightarrow b \approx 9$$

Como b mede a metade do eixo menor da elipse esse eixo mede aproximadamente 18cm .

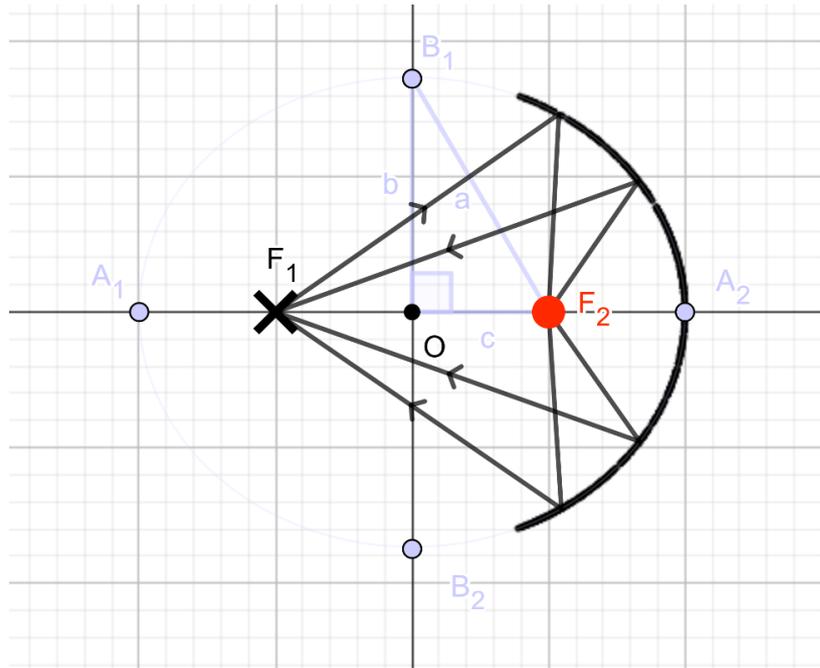
Geometricamente, seja $O = (0,0)$ o centro da elipse e F_1 e F_2 os focos, logo o eixo focal está sobre o OX , localizados pelas coordenadas $F_1 = (5,0)$ e $F_2 = (-5,0)$, com F_2 a posição da lâmpada e F_1 a região a ser iluminada.

Assim, o eixo maior é determinado pelos pontos A_1 e A_2 de coordenadas $A_1 = (10,0)$ e $A_2 = (-10,0)$. E, o eixo menor é determinado pelos pontos B_1 e B_2 de coordenadas $B_1 = (0,9)$ e $B_2 = (0,-9)$.

Dessa forma pode-se determinar o arco de elipse que da forma ao espelho.

Figura 74 – Aplicação óptica da elipse

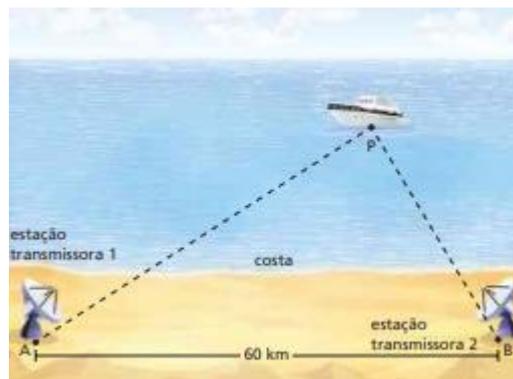
¹ A propriedade de reflexão da elipse é a seguinte: a partir de um dos focos traçamos um segmento de reta qualquer. Este segmento encontra a elipse num ponto, e se a partir deste traçamos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco (Queiró, disponível em [aplicacoes \(uc.pt\)](http://aplicacoes.uc.pt))



Fonte: autoria própria.

15º) Questão retira de Iezzi (2013, p. 286): Em certo sistema marítimo de navegação, duas estações de rádio, localizadas na costa, nos pontos A e B , transmitem simultaneamente sinais de rádio para qualquer ponto onde está localizada uma embarcação que recebe esses sinais, o computador de bordo da embarcação calcula a diferença, $\overline{PA} - \overline{PB}$, das distâncias da embarcação a cada uma das estações. Um navio que estava ancorado no mar recebeu o sinal da estação localizada em B e, 120 microssegundos (μs) depois, recebeu o sinal da estação localizada em A , conforme a figura a seguir. Considere as estações de rádio e o ponto P onde esse navio estava ancorado como pontos de um plano cartesiano, onde a unidade de comprimento é o quilômetro e $A(-30, 0)$ e $B(30, 0)$. Nesse contexto, é correto afirmar que a hipérbole com focos nos pontos A e B e que contém o ponto P tem como equação a expressão:

Dados: $1s = 10^6 \mu s$. A velocidade do sinal de rádio é de 300000 km/s .



Resolução:

Seja x a distância em quilometro de \overline{PB} , no instante $t = 0$ um sinal foi transmitido de cada estação, simultaneamente, até o navio ancorado no ponto P . No entanto, o sinal da estação A demorou-se 120 microssegundos a mais para chegar do que o sinal da estação B . Essa diferença equivale a 36 km. Logo, se $\overline{PB} = x$, então $\overline{PA} = x + 36$, donde segue que a

$$\overline{PA} - \overline{PB} = x + 36 - x = 36$$

Assim, determina-se que o eixo real da hipérbole mede 36 km. Desse modo, tem-se a distância c do centro ao focal de 30km, e a distância a do centro a extremidade o eixo real de 18km. Logo, por meio da relação notável da hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$ tem-se:

$$\begin{aligned} 30^2 &= 18^2 + b^2 \Rightarrow 30^2 - 18^2 = b^2 \\ \Rightarrow 576 &= b^2 \Rightarrow b = 24 \end{aligned}$$

Que é a distância b do centro a extremidade do eixo imaginário.

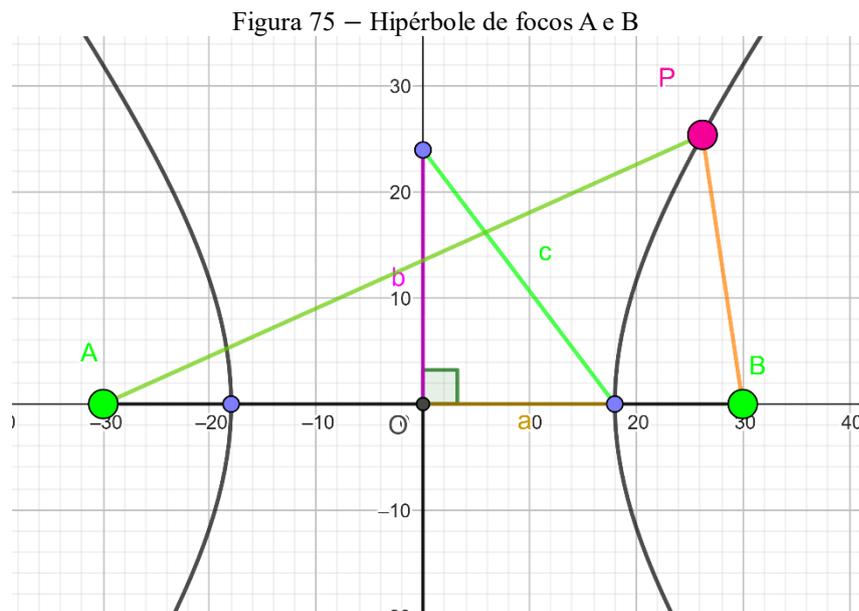
Como o eixo focal está localizado sobre o eixo OX a equação que determina essa hipérbole é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substituindo os termos, obtém-se:

$$\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{24^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{576} = 1$$

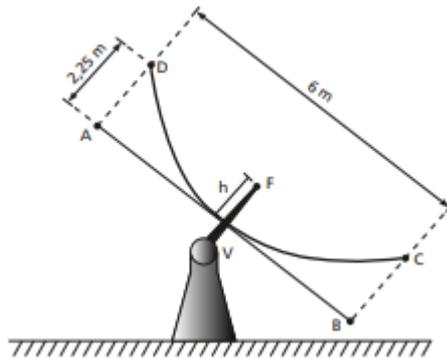
Esquema,



Como a distância do navio a estação A é maior, logo o navio está localizado no eixo à direita do centro.

16º) questão retirada de Iezzi (2013 c, p. 295): Uma parábola, ao ser girada em torno de seu

eixo de simetria, gera uma superfície parabólica (parabolóide de revolução). Expondo-se uma superfície parabólica espelhada aos raios solares, esses raios são refletidos e convergem para o foco. Essa propriedade está na base do funcionamento dos chamados concentradores solares, cuja finalidade é captar a energia solar incidente numa superfície parabólica, relativamente grande, e concentrá-la numa área menor (foco), de modo que a temperatura desse foco aumente substancialmente. A figura, a seguir, representa uma seção transversal de um concentrador solar que está sendo projetado por um técnico.



Nessa figura, os pontos V e F representam o vértice e o foco da parábola (seção transversal do concentrador solar). Sabendo-se que $AB = 6$ m e $AD = BC = 2,25$ m, conclui-se que a distância h do vértice V ao foco F será de:

Resolução:

Considerando um sistema de coordenadas XOY , seja \overrightarrow{AB} tomado como o eixo OX , e \overrightarrow{VF} como o eixo OY , assim o ponto V está na origem do sistema. Dessa forma, os pontos A e B estão equidistantes de V , e são tais que $\overline{VB} = \overline{VA} = 3$. Em coordenadas tem-se $A = (-3, 0)$ e $B = (3, 0)$.

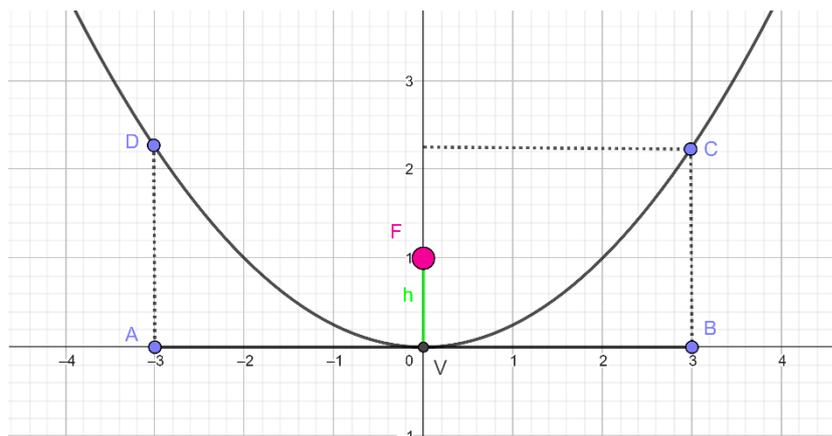
Donde segue que $AD \parallel BC \parallel \overrightarrow{VF}$ sendo os pontos C e D dados pelas coordenadas $C = (-3; 2,25)$ e $D = (3; 2,25)$. Como C e D pertencem a parábola e o centro $O = (0,0)$, tem-se para $D = (3; 2,25)$ a equação da parábola dada por:

$$x_D^2 = 2py_D \Rightarrow 3^2 = 2p(2,25) \Rightarrow p = 2$$

Que o parâmetro da parábola, como $\overline{VF} = \frac{p}{2} = 1$.

Geometricamente,

Figura 76 – Parábola de foco F



Fonte: autoria própria.

Portanto, a distância h do vértice ao foco deve ser de $1m$. Logo o receptor deve estar a uma altura de $1m$ do vértice da parábola.

6 CONCLUSÃO

A geometria analítica como ferramenta poderosa de resolução de problemas foi estudada neste trabalho segundo três frentes: (1) historicamente; (2) por meio da geometria plana e da álgebra e (3) por meio da aplicação de resultados na resolução de problemas matemáticos. Tendo em vista sua descoberta por René Descartes e Pierre de Fermat, foi possível estabelecer claramente os conceitos que a fundamentam por meio da narrativa histórica; por meio da fundamentação no sistema de coordenadas e do conhecimento da geometria plana e da álgebra pode-se associar as equações algébricas a curvas e por fim aplica-la na resolução de problemas.

O contexto histórico através do qual introduziu-se o estudo da geometria analítica neste trabalho possibilitou uma contextualização do assunto em torno das nuances de seu desenvolvimento através do tempo e dos principais fatos que influenciaram direta ou indiretamente o seu desenvolvimento. Entre os grandes matemáticos determinantes nesse percurso destacam-se René Descartes e Pierre de Fermat como os descobridores da geometria analítica ao comporem harmoniosamente a relação entre as curvas e equações algébricas.

De posse de uma visão estruturada dos pormenores em torno desse campo da matemática, trabalhou-se em torno do estudo de resultados fundamentais da geometria analítica tomando como base os postulados e teoremas da geometria plana e da álgebra. Nesse sentido, oferecendo uma perspectiva diferenciada ao estudo da geometria analítica na educação básica, mais especificamente no ensino médio.

Observou-se que este trabalho pode ser aplicado harmoniosamente com o estudo da geometria plana e vice-versa, na resolução de problemas geométricos e outros afins. Desse modo, buscou-se ampliar o pensamento matemático em torno do estudo harmonioso entre essas áreas, afim de possibilitar novas perspectivas, interpretação, análise, investigação, conversão, associação e utilização dos conteúdos matemáticos.

Acreditando dessa forma que, ao ser ampliado sua visão acerca da matemática haja despertamento de curiosidade e interesse e vislumbre do conhecimento matemático como uma ciência pratica e ao mesmo tempo capaz de promover a si mesma. Pode-se ampliar esta mesma metodologia no estudo de outros ramos da geometria, como por exemplo, no espaço. Por outro lado, pode-se utilizar as equações analíticas a fim de solucionar problemas diversos na matemática.

Espera-se que este trabalho contribua como fonte de pesquisa e estudo para estudantes, professores e pesquisadores que estejam interessados em inserir a história da geometria e da álgebra associadas ao estudo da geometria analítica.

REFERÊNCIAS

- AIRES, Luz M. **Uma história da matemática: dos primeiros agricultores a Alan Turing, dos números ao computador.** 1ª ed. Lisboa: Sílabo, 2010.
- BOYER, Carl B; MERZABCH, Uta C. **História da matemática**, 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula.** Belém: SBEM/SBEM-Pa, 2017.
- CALIXTO, Vinicius Barbosa. **Uma proposta de intervenção pedagógica para o ensino de geometria baseada na questão da abstração segundo Platão.** Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de São Paulo: São Carlos-SP, 2022.
- DANTE, LUIZ ROBERTO. **Projeto Teláreis: matemática 8º ano.** 2ª ed. São Paulo: Ática, 2015.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana.** Vol. 9. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013.
- DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**, SBM, 2013 (Coleção PROFMAT)
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria.** Vol. 3. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013a.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações.** Vol. 6. 6ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013c.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: geometria analítica.** Vol. 7. 8ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013b.
- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar: números e funções.** Vo. 1. 9ª ed. São Paulo: Atual, SBM, 2013.
- GEOGEBRA, Classic. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.
- MALTA, Alexandre de Deus. **O surgimento da geometria analítica no século XVII: debate histórico sobre questões referentes à sua descoberta.** Dissertação (Mestrado em História) – Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade federal de Minas Gerais. 2015.
- NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria.** 1ª Ed. SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)
- QUEIRÓ, João Filipe. **A Elipse, A parábola e a hipérbole: propriedades e aplicações.** Disponível em: [aplicacoes \(uc.pt\)](https://aplicacoes.uc.pt). Acesso em: 25 de julho de 2024).

WAGNER. Eduardo. **Uma introdução as construções geométricas**. Rio de janeiro, IMPA, 2015.