



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
POLO DE ABAETETUBA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL
PROFMAT**



JOSÉ VICENTE THIAGO BARREIRA

**USO DAS PEÇAS DE DOMINÓ EM JOGO ENVOLVENDO
TRIÂNGULO DE PASCAL**

ABAETETUBA

2024

JOSÉ VICENTE THIAGO BARREIRA

**USO DAS PEÇAS DE DOMINÓ EM JOGO ENVOLVENDO
TRIÂNGULO DE PASCAL**

Dissertação para conclusão de curso de
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL (PROFMAT) Universidade
Federal do Pará (UFPA), Polo Abaetetuba.
Orientador: Dr. Júlio Roberto Soares da Silva

ABAETETUBA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T422u Thiago Barreira, José Vicente.
USO DAS PEÇAS DE DOMINÓ EM JOGO ENVOLVENDO
TRIÂNGULO DE PASCAL / José Vicente
Thiago Barreira, José Vicente Thiago Barreira. — 2024.
79 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2024.

1. Jogo. 2. Triângulo de Pascal. 3. Números
Binomiais. 4. Teorema da Linha. 5. Completando o
Triângulo de Pascal. I. Título.

CDD 511.6

JOSÉ VICENTE THIAGO BARREIRA

**USO DAS PEÇAS DE DOMINÓ EM JOGO ENVOLVENDO
TRIÂNGULO DE PASCAL**

Dissertação apresentada ao Programa de
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT) Universidade Federal do Pará
(UFPA), Polo Abaetetuba, para obtenção
do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva

Aprovado em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva – Orientador
Campus Universitário do Tocantins Cametá – UFPA

Prof. Dr. Denivaldo Pantoja da Silva – Membro externo
Campus Universitário do Tocantins Cametá – UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro - Membro interno
Campus Universitário de Abaetetuba – UFPA

Abaetetuba/PA, agosto de 2024

Dedico a todos os que queiram usufruir

Em memória de meu pai desaparecido!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação e participação no Programa de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT), dentre os quais destaco: a minha família pela compreensão; minha mãe por ensinar-me e motivar-me desde criança; minha professora da 1ª série do ensino fundamental que nunca esqueci; os professores desse curso de mestrado pela dedicação e competência; o orientador professor Dr. Júlio Roberto Soares da Silva de dedicação e paciência; a Prefeitura Municipal de Canaã dos Carajás que concedeu licença para estudo. Por fim, todos aqueles que direto ou indiretamente contribuíram com meu trabalho.

RESUMO

Esta dissertação tem por finalidade apresentar o uso do Jogo Completando o Triângulo de Pascal como um recurso didático a ser usado no segundo ano do ensino médio para contribuir no processo de ensino aprendizagem nas aulas de matemática referentes aos objetos do conhecimento: triângulo de Pascal, números binomiais e as propriedades envolvidas.

Para tanto, apresenta-se o contexto histórico do triângulo de Pascal, uso de jogos no cotidiano, no ensino, as estratégias em jogos e alguns exemplos que são trabalhados na teoria dos Jogos. Também aborda conteúdos de análise combinatória em que no ensino médio estão relacionados ao triângulo de Pascal.

Por fim, mostra a confecção do jogo Completando o Triângulo de Pascal, suas definições, regras e aplicação em sala de aula. Também sugere adaptação às regras do jogo de acordo com as necessidades e objetivos da turma.

PALAVRAS-CHAVE: Jogo completando o Triângulo de Pascal, triângulo de Pascal, número binomial.

ABSTRACT

This dissertation aims to present the use of the Game Completing Pascal's Triangle as a teaching resource to be used in the second year of high school to contribute to the teaching-learning process in mathematics classes regarding the objects of knowledge: Pascal's triangle, numbers binomials and the properties involved.

To this end, the historical context of Pascal's triangle is presented, the use of games in everyday life, in teaching, strategies in games and some examples that are worked on in Game theory. It also covers combinatorial analysis content which in high school is related to Pascal's triangle.

Finally, it shows the making of the game Completing Pascal's Triangle, its definitions, rules and application in the classroom. It also suggests adapting the rules of the game according to the needs and objectives of the class.

KEYWORDS: Game completing Pascal's Triangle, Pascal's triangle, binomial number.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

FIGURA 1 - TRIÂNGULO DE PASCAL	14
FIGURA 2 - BLAISE PASCAL	15
FIGURA 3 - MÁQUINA DE CALCULAR INVENTADA POR PASCAL	16
FIGURA 4 - TRIÂNGULO DE PASCAL NA OBRA DE PETRUS APIANUS EM 1527.	17
FIGURA 5 - O TRIÂNGULO DE PASCAL (REPRODUZIDO DE J. NEEDHAM, 1959, V. 3, P. 135.)	18
FIGURA 6: TRIÂNGULO DE PASCAL E O TEOREMA DAS COLUNAS.....	19
FIGURA 7 - TRIÂNGULO DE PASCAL COM DESTAQUE NO RESULTADO LOCALIZADO NA LINHA 9 E COLUNA 3.....	35
FIGURA 8 - TRIÂNGULO DE PASCAL FORMADO POR NÚMEROS BINOMIAIS.	40
FIGURA 9 - TRIÂNGULO DE PASCAL COM DESTAQUE A RELAÇÃO DE STIFEL.	41
FIGURA 10 - TEOREMA DAS LINHAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL	42
FIGURA 11 - TRIÂNGULO DE PASCAL COM DESTAQUE AO RESULTADO DA LINHA 5 E COLUNA 2.....	45
FIGURA 12 - AS 28 PEÇAS DE DOMINÓ PREENCHEM ATÉ A LINHA 6 DO TRIÂNGULO DE PASCAL.....	48
FIGURA 13 - DOMINÓ ADQUIRIDO	48
FIGURA 14 - IMAGEM DO TABULEIRO DO JOGO	49
FIGURA 15 - MEDIDA DA ALTURA DO TABULEIRO	50
FIGURA 16 - MEDIDA DA LARGURA DO TABULEIRO.....	50
FIGURA 17 - DIMENSÕES DOS RETÂNGULOS PARA COLOCAR AS PEÇAS DO DOMINÓ ..	51
FIGURA 18 - PEÇA DE DOMINÓ REPRESENTA 64.....	52
FIGURA 19 - PEÇA DE DOMINÓ QUE REPRESENTA 50	52
FIGURA 20 - EXEMPLO EM QUE HÁ SEIS POSSIBILIDADES PARA CONTINUAR O JOGO ..	54
FIGURA 21 - EXEMPLO EM QUE HÁ QUATRO POSSIBILIDADES PARA CONTINUAR O JOGO	55
FIGURA 22 - EXEMPLO EM QUE HÁ DUAS POSSIBILIDADES PARA CONTINUAR AO JOGO	55
FIGURA 23 - APLICAÇÃO DO JOGO NAS TURMAS DE EJA PELO PROFESSOR BETO, ANO 2023	58
FIGURA 24 - APLICAÇÃO DO JOGO NAS TURMAS DE 2º ANO DO ENSINO MÉDIO REGULAR PELO PROFESSOR JOSÉ VICENTE THIAGO BARREIRA, ANO DE 2023.....	60
FIGURA 25 - MATERIAIS DISPONÍVEIS PARA O JOGO COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL.....	61
FIGURA 26- RECORTE DE UMA DAS AVALIAÇÕES DIAGNÓSTICAS QUE FORAM APLICADAS.....	62
FIGURA 27 - OS ALUNOS NÃO HAVIAM COMPREENDIDO O CONCEITO DE PEÇA ADJACENTE	63
FIGURA 28 - ALUNOS JOGANDO, 2024	64
FIGURA 29 - FOTOS DOS JOGOS COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL, 2024.....	65
FIGURA 30 - JOGO COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL, 2024	66
FIGURA 31 - CÍRCULO DIVIDIDO EM QUATRO SETORES.	77
TABELA 1 - RESULTADOS DE PAYOFFS DO DILEMA DO PRISIONEIRO	72
TABELA 2 - PAYOFFS DA GUERRA DOS SEXOS	73

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EF01MA04 – Ensino Fundamental, 1º ano, Matemática, Habilidade 04 (BNCC)

EJA – Educação de Jovens e Adultos

EM13MAT203 – Ensino Médio, 1º ao 3º ano, Matemática, Habilidade 03 (BNCC)

PFC – Princípio Fundamental da Contagem

UFPA – Universidade Federal do Pará

\emptyset - Conjunto Vazio

$\sum_{i=p}^k x_i$ – Somatório dos termos x_i com i variando de p a k .

$\prod_{i=p}^k s_i$ – Produtório dos termos s_i com i variando de p a k .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 1: CONTEXTO HISTÓRICO DO TRIÂNGULO DE PASCAL	14
1.1 TRIÂNGULO DE PASCAL	14
1.2 BLAISE PASCAL E SUA GENIALIDADE	15
CAPÍTULO 2 – JOGOS	20
2.1 JOGOS NO ENSINO	20
2.2 TEORIA DOS JOGOS	23
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE COMBINATÓRIA	26
3.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM	27
3.2 FATORIAL	29
3.3 PERMUTAÇÕES SEM REPETIÇÃO	31
3.4 PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIÇÃO	32
3.5 COMBINAÇÃO SIMPLES	33
3.6 NÚMEROS BINOMIAIS	36
3.7 TRIÂNGULO DE PASCAL	40
3.8 BINÔMIO DE NEWTON	43
CAPÍTULO 4 – O DESENVOLVIMENTO DO JOGO	46
4.1 DESENVOLVIMENTO, MATERIAIS E MÉTODOS	47
4.1.1 Confecção do jogo Completando o Triângulo de Pascal.....	47
4.1.2 Materiais e confecção do Jogo	48
4.1.3 Definições e regras do Jogo.	51
4.1.4 Uso do Jogo	53
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO JOGO COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL	57
5.1 APLICAÇÃO DO JOGO EM 2023	58
5.1.1 Aplicação do Jogo Completando o Triângulo de Pascal pelo professor José Vicente T. Barreira, em 2023	59
5.2 APLICAÇÃO DO JOGO COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL PELO PROFESSOR JOSÉ VICENTE T. BARREIRA EM 2024	61
CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
REFERÊNCIAS	69
ANEXO I – TEORIA DOS JOGOS: O DILEMA DO PRISIONEIRO	71
ANEXO II – TEORIA DOS JOGOS: A BATALHA DOS SEXOS	73
ANEXO III - APLICAÇÕES DO PFC	75

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar um novo jogo utilizando as peças do dominó como números binomiais e o triângulo de Pascal como tabuleiro sendo este um recurso didático para ser utilizada em sala de aula no que se refere aos objetos de conhecimento Triângulo de Pascal, Números Binomiais bem como algumas relações e propriedades envolvidas contribuindo ao processo de ensino aprendizagem.

Iniciamos em 2023 estudos de diversas literaturas científicas em busca de jogos e outros recursos que pudessem enriquecer as aulas nos objetos de conhecimento de contagem, mas particularidades da Análise Combinatória. Desde estudos destacou-se a dissertação de Paz (2016) onde ele usava as peças de domino como números binomiais. E daí, a inspiração para criação de um novo jogo com novas regras, além de usar as pedras do dominó como números binomiais usa o triângulo de Pascal como tabuleiro.

Como a experiência realizada na aplicação do jogo mostrou-se satisfatória para complementar o processo de ensino no que se refere a formação do triângulo de Pascal de maneira lúdica e descontraída foi decido a escolha do jogo para ser apresentado nessa dissertação e assim contribuir para que a experiência do jogo seja replicada e assim proporcionar a produção de mais conhecimento.

No capítulo 1, apresenta-se o contexto histórico do triângulo Pascal seus modelos apresentados no passado até mesmo antes de Blaise Pascal. Fala sobre a vida de Blaise Pascal de acordo com Eves e Boyer.

No capítulo 2, aborda-se como os jogos são concebidos e tratados no processo de ensino, além de se estender a alguns conceitos básicos da Teoria dos Jogos, visto que os jogos em que usam de estratégias para obtenção de estratégias podem ser associadas a Teoria dos Jogos.

No capítulo 3, apresenta o tema jogos no ensino, alguns conceitos de teoria dos jogos, além dos objetos de conhecimento que norteiam o triângulo de Pascal no ensino médio, no caso, tópicos relacionados à análise combinatória como princípio fundamental da contagem que se relaciona com permutações, combinações, números binomiais entre outros, inclusive Triângulo de Pascal.

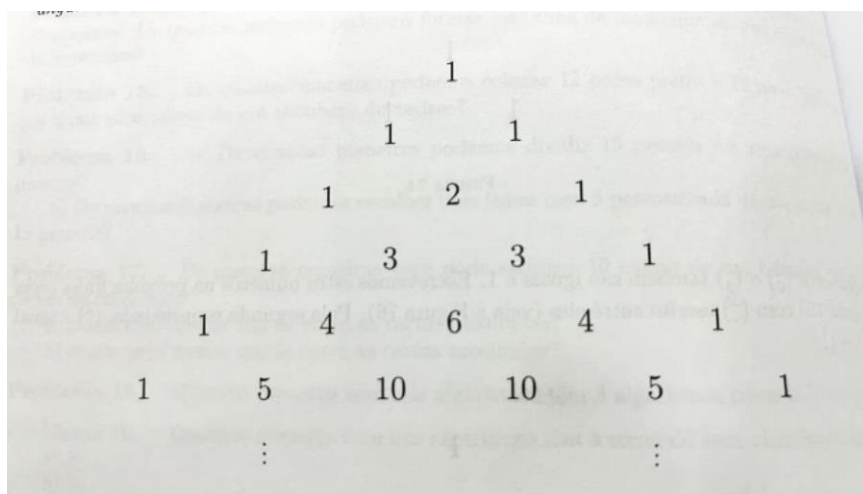
No capítulo 4, apresenta-se como foi feita a confecção do jogo, os materiais usados, definições e regras, bem como todas as medidas para todos aqueles que queiram confeccionar e usar o jogo como material didático em suas salas de aula. Também mostramos uma variação do jogo para o uso do teorema das linhas.

No capítulo 5, apresenta-se registros de evidências das aplicações do jogo em turmas de ensino médio sendo: 2ª série regular e EJA em 2023 e 2ª série regular em 2024, em instituição de ensino médio na cidade de Canaã dos Carajás, Pará.

CAPÍTULO 1: CONTEXTO HISTÓRICO DO TRIÂNGULO DE PASCAL

1.1 Triângulo de Pascal

Figura 1: Triângulo de Pascal



Fonte: Fomin et al. p. 122

Para começar os estudos sobre o Triângulo de Pascal podemos levantar algumas indagações: De onde veio? Quem o criou? Para que serve? Quais são as suas propriedades e relações com outros conteúdos? Pelo menos duas dessas perguntas não têm resposta: o criador e de onde veio.

O Triângulo de Pascal carrega consigo várias propriedades e relações com diversos problemas relacionados a conjuntos e contagens, entre outros temas. Portanto, não se fecha em si mesmo, há relações com diversas situações servindo, às vezes, de base ou de síntese para organizar outros objetos do conhecimento de dentro da matemática. Podemos citar alguns exemplos: a soma dos elementos de uma linha n do triângulo de Pascal é igual ao número de elementos do conjunto das partes de um conjunto com n elementos; o número de formas de iluminar um lugar com n lâmpadas corresponde à soma dos elementos da linha n ; os números de uma linha no triângulo de Pascal correspondem aos coeficientes no desenvolvimento de um binômio $(x + y)^n$, onde x e y são partes literárias.

Não se sabe quem criou o triângulo de Pascal, apesar de seu nome sugerir Blaise Pascal, às vezes, até mal interpretado nesse sentido. Então, é natural a indagação: “Por que Triângulo de Pascal?”. É fato que esse agrupamento na forma de triângulo, aqui tratado, aparece com outros nomes. Para falar sobre o percurso histórico, pelo menos um pouco do que se sabe dos motivos que possivelmente levaram a usar o sobrenome Pascal, iremos ao tópico seguinte.

1.2 Blaise Pascal e sua genialidade

A expressão “Triângulo de Pascal” se deve ao Matemático francês Blaise Pascal. Segue foto de Blaise Pascal representado na figura 2.

Figura 2 - Blaise Pascal



Blaise Pascal
(Irmãos Brown)

Fonte: Eves (2011, p. 363)

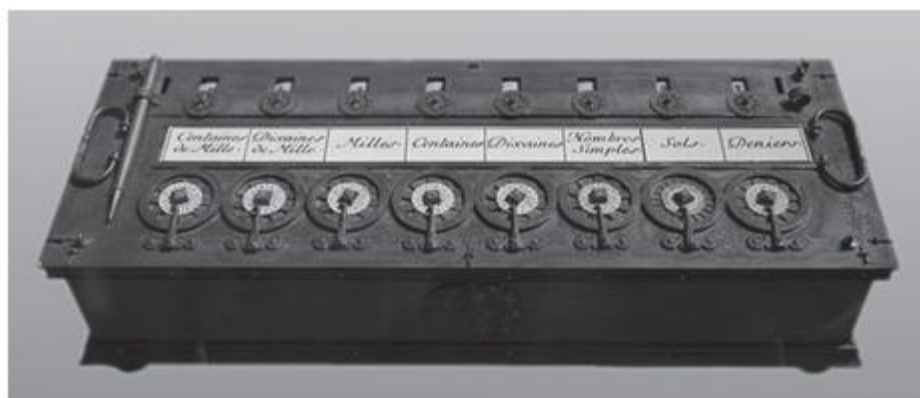
De acordo com Eves (2011), Blaise Pascal nasceu na província de Auvergne na França em 1623. Ele possuía a saúde frágil a ponto de seu pai lhe privar de diversas atividades para que não exercesse esforço físico, inclusive sair de casa para estudar. Então, de acordo, com a vontade do seu progenitor Etienne Pascal (1588-1651), Blaise Pascal deveria estudar em casa e dedicar-se apenas aos estudos das línguas. Mas, pelo que parece, a proibição trouxe mais curiosidade sobre o tema, pois tirava seu tempo vago para estudar matemática sem que seu pai soubesse.

Conforme estudos de Eves (2011, p. 361), um dia Pascal perguntou a seu pai o que era geometria? O qual respondeu: “era o estudo das figuras exatas e das propriedades de suas diferentes partes”. Baseado naquelas palavras, Pascal fez muitas descobertas por conta própria, demonstrando assim sua genialidade.

Estudos de Eves (2011) revelam que quando o pai viu as produções matemáticas criadas pelo filho ficou impressionado. Então deu de presente ao menino um exemplar dos Elementos de Euclides. Blaise Pascal em pouco tempo estudou-o por completo. A partir disso Pascal “descobriu por conta própria muitas das propriedades das figuras geométricas, em particular a de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso” (Eves, 2011, p. 261).

Devido ao brilhantismo precoce, “aos 14 anos de idade, Pascal já participava de uma reunião semanal de um grupo de matemáticos franceses [...] Aos 16 anos escreveu um trabalho sobre secções cônicas” (Eves, 2011, p. 262). Além de ser um matemático brilhante, ele estudou filosofia, teologia, entre outras áreas. Também, foi inventor, pois, ainda muito jovem entre 18 e 19 anos, ele criou a primeira máquina de calcular. A figura 3 mostra a primeira máquina de calcular inventada por Pascal.

Figura 3 - Máquina de calcular inventada por Pascal.



A máquina de calcular de Pascal (da coleção da IBM)

Fonte: Boyer (2012, p. 226)

Conforme vimos, os trabalhos de Pascal vão muito além do chamado Triângulo de Pascal. Outro exemplo foi o desenvolvimento de trabalhos na área das cônicas, onde se destaca o teorema do hexagrama místico: “Se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente” (Eves, 2011, p. 363).

Blaise Pascal foi um gênio com destaque na área da Matemática, disso não resta dúvida. Contudo, não foi o primeiro a apresentar o Triângulo de Pascal. Apesar de ser comum esse arranjo numérico com seu nome, aparecem registros desse triângulo em trabalhos antes dele. Segundo Boyer (2012), um exemplo disso é a obra *Frontispício da Aritmética de Petrus Apianus, Ingolstadt (1527)*, conforme figura 4, com registro de quase um século antes de Pascal ter nascido. Não se sabe a autoria do Triângulo de Pascal. Contudo, pelo fato de Pascal ter apresentado diversas propriedades desse arranjo numérico, isso fez com que o arranjo ficasse mais conhecido como Triângulo de Pascal, conforme citação a seguir:

Como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas das propriedades do triângulo, este se tornou conhecido como Triângulo de Pascal (Eves, 2011, p. 365).

Figura 4 - Triângulo de Pascal na obra de Petrus Apianus em 1527.

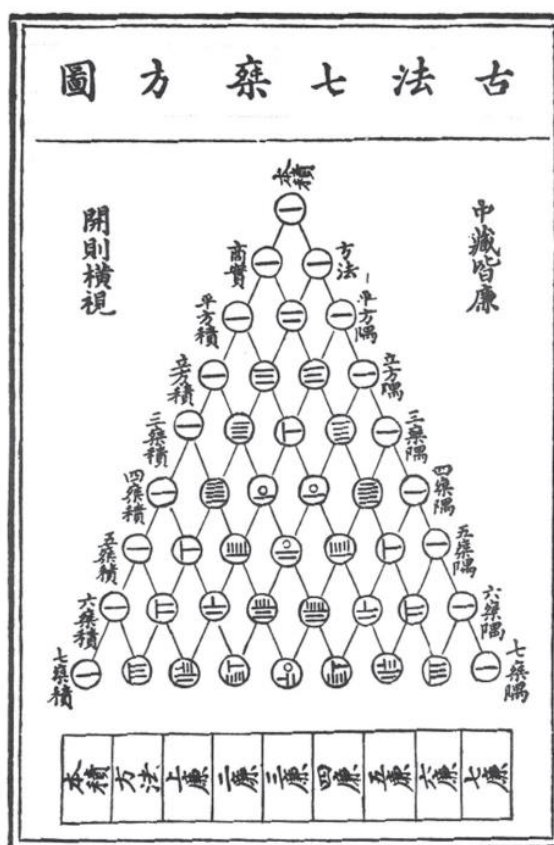


Fonte: Boyer (2012)

Conforme registro dos estudos de Silveira (2001), esse triângulo também outros recebe nomes: Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartágría, Triângulo de Tartaglia-Pascal, Triângulo Combinatório, Triângulo de Yang Hui¹, *Triangulum Arithmeticum Pascalianum*,

Além disso, aparece registro do triângulo de Pascal na capa do trabalho *Espelho Precioso*, de Zhu Shijie, do ano de 1303, cujo nome dado foi “O diagrama do velho método dos sete quadrados multiplicativos”, conforme a figura 5 a seguir.

Figura 5 - O triângulo de Pascal (Reproduzido de J. Needham, 1959, v. 3, p. 135.)



Fonte: Boyer (2012)

Em conformidade com os estudos de Eves (2011), destacamos que devido à saúde frágil que teve Pascal, aos 39 anos findou a carreira de descobertas desse brilhante matemático. Contudo, ele deixou para desfrute da humanidade diversas propriedades matemáticas, dentre as quais se destaca o estudo da geometria projetiva, talvez influenciado por Desargues. Além disso, outros trabalhos sobre

¹ Matemática Chinês do século XIII (Boyer, 212)

hidrostática, influenciado por Torriceli, propriedades nas áreas de geometria plana, contagem, triângulo aritmético, probabilidade, entre outros.

Segundo Boyer o triângulo aritmético tinha mais de 600 anos, mas Pascal descobriu novas propriedades onde destacou “Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo, inclusive” (Boyer, 2012, p. 254). Para exemplificar segue figura 6 (recorte de Eves).

Figura 6: Triângulo de Pascal e o Teorema das Colunas.

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...

Fonte: Eves, 2011, p. 364

Segundo Eves (2011, 264) Pascal usava o triângulo de Pascal para determinação dos coeficientes binomiais, além disso usava as noções de combinações de n objetos escolhidos r de cada vez, além de afirmar que o resultado era

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Para ressaltar a importância de Blaise Pascal em relação ao Triângulo de Pascal podemos considerar também a publicação “O Traité du Triangle Arithmétique” (O Tratado do Triângulo Aritmético) em 1665, onde ele construía seu triângulo conforme figura 6 (Eves, 2011).

CAPÍTULO 2 – JOGOS

2.1 Jogos no ensino

O processo de ensino-aprendizagem pode se beneficiar do uso de jogos trazendo mais interação, envolvimento entre os alunos nos objetos do conhecimento e para além destes, melhorando o desenvolvimento de habilidades de ensino, de planejamento e resolução de problemas no coletivo.

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular, 2017, p. 265).

Os jogos são ferramentas que podem auxiliar no ensino da educação básica, e de acordo com PAZ (2016) e é perceptível que o ensino médio faz pouco uso dos jogos, uma ferramenta importante nesse contexto.

Contudo, é necessário que haja uma mudança nesse sentido, que é aumentar a aplicação nas outras séries da educação básica. Para isso, é necessário o engajamento e comprometimento dos professores bem como apoio do corpo pedagógico e gestores da escola.

Com o uso de jogos nas aulas, tornaria o ensino mais prazeroso, as aulas mais dinâmicas e interativas, mexendo de forma positiva, onde os alunos podem exercitar e interagir com os outros alunos e objetos do conhecimento ajudando na assimilação de conceitos relacionados, além de habilidades sociais importantes.

Todas as séries, quando possível, devem contar com os benefícios que os jogos podem proporcionar. Entretanto, é necessário que os jogos sejam bem planejados e ajustados às necessidades de ensino para que os benefícios sejam realmente satisfatórios e os objetivos de ensino alcançados.

Segundo Alves:

[...] os jogos como método de ensino tem sido alvo de inúmeras pesquisas, no entanto, a maioria dessas pesquisas giram em torno das séries iniciais do ensino fundamental, enquanto nas demais séries do ensino fundamental e médio são pouquíssimas. (Alves, 2001, *apud* Figueira *et. al.*, 2022, p. 4).

Além disso, a educadora apresenta aspectos históricos, abordando que na antiguidade o ato de brincar era uma atividade tanto de crianças quanto de adultos. Ela ainda cita Platão, dizendo que o aprender brincando tinha maior valor e deveria ser ressaltado no lugar da opressão e da violência. Enfatizava que todas as crianças deveriam estudar a matemática de maneira atrativa e dava como sugestão o jogo.

Mas Aves (2007), através de pesquisas históricas, destaca que os jogos foram suprimidos por um tempo por ser considerado como profano, porém com os jesuítas os jogos retornam como um contribuinte e se tornam os primeiros a reintroduzir os jogos à prática pedagógica, recomendando o seu uso e colocando tão importante quanto os estudos, como meios educativos. Logo, temos um grande caminho a percorrer no sentido de ampliar os jogos para todas as séries do ensino básico.

De acordo com BNCC (2017, p. 272-526), a Base Nacional Comum Curricular determina que os alunos precisam de aulas que não se restrinjam ao ensino de algoritmos. Como a matemática deve ser compreendida num contexto de significados e aplicação, sugere-se o uso de diversos materiais didáticos entre eles os jogos, sendo que esses recursos exercerão papel fundamental na aprendizagem da matemática.

São poucas as indicações e referências ao uso de jogos nos documentos oficiais ligados ao ensino no Brasil. Fizemos um levantamento para ver onde aparecem. De acordo com o documento oficial, a habilidade EF01MA04 reforça o uso do lúdico, incluindo os jogos, como ferramenta de ensino. Há destaque do uso de jogos nos anos finais do ensino fundamental. Quanto ao ensino médio sugere-se na habilidade EM13MAT203: “criação e utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não)” (BRASIL, 2017, p. 526). Porém, vê-se ainda pouco empenho no uso de jogos no ensino. Então, cabe aos professores tomarem a iniciativa de usar em suas salas de aulas jogos criados ou adaptados às necessidades de aprendizagem.

Segundo Brasil (2013, p. 116) nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação: “A escola tem encontrado dificuldade para tornar os conteúdos escolares interessantes pelo seu significado intrínseco. É necessário que o currículo seja planejado e desenvolvido de modo que os alunos possam sentir prazer”. Também, tem que o ensino à distância no ensino técnico e médio deve haver “características

que favoreçam o processo de mediação pedagógica” (BRASIL, 2013, p. 251), onde se menciona o uso de vários mecanismos entre eles os jogos didáticos.

Ainda em conformidade com Brasil (2013), Diretrizes Nacionais da Educação Básica, encontramos na parte referente ao ensino fundamental das escolas indígenas: “A ludicidade como estratégia pedagógica, [...] não deve restringir-se ao universo da educação infantil, podendo perpassar vários momentos do processo de ensino aprendizagem” (BRASIL, 2013, p. 387); onde se nota que jogos tradicionais é uma oportunidade para tornar aprendizado mais prazeroso. O documento ainda acrescenta que currículo é um “conjunto de valores e práticas que proporcionam a produção e a socialização de significados no espaço social e que contribuem, intensamente, para a construção de identidades sociais e culturais dos estudantes” (BRASIL, 2013, p. 394).

Tal como descreve Brasil (2013), corroboramos que o currículo não abrange apenas conteúdos, mas também as mais variadas atividades culturais, entre elas os jogos. Assim, o ensino necessita de ferramentas variadas, onde os jogos poderão contribuir nesse processo, se estiverem estruturados de forma adequada aos objetos do conhecimento e às necessidades de formação do cidadão.

Os alunos podem se beneficiar com o uso de jogos, mas para isso é necessário planejamento, associar os objetos do conhecimento pretendidos com a dinâmica que os jogos oferecem, adequados às dificuldades dos alunos jogadores.

De acordo com Kishimoto (2019) a aprendizagem estava ligada ao que o ensino oferecia e que dependia dos alunos criarem os próprios conceitos matemáticos e nesse sentido os jogos oferecem possibilidades da interação com os objetos do conhecimento além de tornar as aulas mais atrativas. Assim, o jogo se mostra uma ferramenta essencial no processo de aprendizagem (Kishimoto, 2019, *apud* Figueira *et al.*, 2022)

Segundo a Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget, o aluno aprende construindo seus próprios conceitos, ou seja, não se transfere conhecimento ao aluno, mas abrem-se possibilidades ou meios para que o próprio indivíduo os aprenda (PSICOLOGIA-ONLINE)². Nesse sentido os jogos apresentam-se como um recurso importante devido às próprias características de interação.

² <https://br.psicologia-online.com/a-teoria-do-desenvolvimento-cognitivo-de-piaget-426.html>, 2024

2.2 Teoria dos Jogos

Os jogos no cotidiano parecem ser apenas algo para a diversão humana ou um momento de lazer e entretenimento. Contudo, não se deve esquecer-se daquilo que ocorre nos bastidores, nas ações dos seus personagens ativos (os jogadores), nas estratégias tomadas, nas reações que os outros participantes vão tomar dada as ações já tomadas. Então, o que um jogador faz vai interferir nas estratégias e ações que os outros jogadores tomarão, bem como no resultado para ambos.

Os jogos se tornaram objetos de estudo no campo acadêmico, em quais se verificam as relações dos conjuntos de estratégias e de resultados buscando maximizar os resultados positivos para si ou para o grupo. Esses estudos são recentes, mas se mostram relevantes no contexto social e geopolítico atual, dado aos avanços tecnológicos e modelos matemáticos desenvolvidos, os quais podem se beneficiar os envolvidos em diversas situações, visto que, estes conceitos podem e são modelados e aplicados em diversas áreas como a economia, a política, a guerra, entre outras. Portanto, nesse aspecto, os jogos não se restringem ao entretenimento. A ciência que estuda essas interações modelando-as de acordo com a situação é conhecida como Teoria dos Jogos.

Portanto, verifica-se que no contexto escolar e/ou acadêmico duas abordagens distintas para os jogos: a primeira, a prática do jogo, a qual é mais usada para tornar as aulas mais dinâmicas, associar a alguma habilidade pretendida, ou apenas para prática esportiva, entretenimento; a segunda é a que busca a teoria para modelar situações de conflitos entre pessoas ou grupos, podendo ser situações reais ou simulada e assim entender num contexto genérico o conjunto de estratégias, bem como os resultados, seria a Teoria dos Jogos.

Acreditamos que o estudo sobre as particularidades e modelos desenvolvidos pela Teoria dos Jogos pode despertar interesse em estudos futuros, visto que se trata de uma ciência considerada recente, desconhecida de muitos, com oportunidade para crescimento.

Segundo Cerda, Pérez e Jimeno (2004, p. 3), no mundo acadêmico essa teoria apareceu em 1944 na publicação de *Game Theory and Economic Behaviour* de Von Neumann e Morgenstern, mas já existiam publicações de matemáticos: “Zermelo (1913), Borel (1921) e o próprio Von Neumann (1928), em que antecipavam parte das

bases da Teoria de Jogos. Também se destacam trabalhos pioneiros de economistas como Cournot (1838) e Edgeworth (1881)”.

De acordo com as proposições de Sartini *et al.* (2004), a teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito.

A teoria dos jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo (Sartini *et al.*, 2004, p. 1).

Podemos perceber que a Teoria dos jogos, apesar de ser uma ciência nova apresenta grande importância e robustez. Sendo assim, nos deteremos, a seguir, em alguns conceitos básicos e exemplos. Quanto à questão de aprofundamento nos conceitos teóricos, lançamos aos possíveis leitores interessados o desafio pela busca por mais aprofundamento na temática em questão, pois dessa forma é provável que somem na expansão e na produção de mais conhecimentos na área e na modelação e usos. Dito isso, passemos aos conceitos e exemplos.

Na teoria dos jogos há um conjunto finito de pelo menos dois jogadores $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$, cada jogador possui um conjunto de estratégia denominado estratégias puras do jogador g_i $S = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \dots, s_{im}\}$ e um vetor $s = (s_{1j1}, s_{2j2}, s_{3j3}, \dots, s_{njn})$ onde s_{iji} é uma estratégia pura do jogador de $g_i \in G$. E o conjunto de todas as estratégias é o produto cartesiano denominado espaço de estratégias pura do jogo (Sartini *et al.*, 2004).

$$S = \prod_{i=1}^n s_i = S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n$$

Para um jogador g_i existe uma função utilidade $u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ onde $s \mapsto u_i(s)$.

Na teoria dos Jogos existe o que se chama de estratégia dominante que é a melhor estratégia para um jogador independente das estratégias escolhidas pelos demais (Mankiw, 2013, p. 336).

Pode-se observar uma relação da Teoria dos Jogos com os jogos que conhecemos, como por exemplo, em ambos existe uma relação de conflito em que

todos buscam os mesmos objetivos, mais de um envolvido (jogador) quer ser o melhor, o vitorioso, o melhor lucro, a maior empresa, o bonus maior etc. Então, os jogos assim como a teoria dos jogos estão relacionados a competição. Uma relação de conflito como afirma Sartini *et al* (2004).

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE COMBINATÓRIA

Pelo que se observa a Análise Combinatória se apresenta como um conjunto de métodos relacionados a contagem e raciocínio combinatório que foi sendo formado no decorrer do tempo, então não se atribui sua autoria ou início a um matemático específico. A contagem, talvez tenha sido o que foi desenvolvido desde os primórdios da Matemática, mas a Análise Combinatória como é conhecida hoje foi formada milênios depois com desenvolvimento de métodos mais sofisticados e necessários a contagem em situações que a simples descrição não seria prático.

Contudo, pode-se apontar o século XVII com relevância ao tema Análise Combinatória, pois segundo Vazquez e Noguti (2004):

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718) (Vazquez e Noguti, 2004, p. 3)

Análise combinatória é a parte da matemática que estuda o número de maneiras de um dado evento ocorrer sem necessariamente descrever todos os casos. Considerando que existe uma infinidade de problemas de contagem em que descrever todos os casos é inviável ou pouco eficaz. Por exemplo, o número de maneiras de fazer um jogo de seis números na Mega-Sena. Por isso, é necessário conhecer métodos de contagem que favoreçam descobrir esses resultados.

Podemos ainda destacar que os conteúdos de contagens podem aparecer em outros temas como probabilidade, pois na maioria dos casos é necessário saber o número de elementos do espaço amostral e de outros subconjuntos envolvidos. Assim, destaca-se a importância desse conteúdo. Vejamos outros exemplos:

Exemplo 1 – Em um país, quando vão escolher quais as características das placas dos veículos como quantidade de letras e/ou algarismos é necessário saber o número máximo de carros que podem ser emplacados no sistema que está sendo escolhido. Isto é, quantas placas poderão ser confeccionadas para que não precisem

adicionar ou alterar caracteres no decorrer do tempo para satisfazer às necessidades e ao mesmo tempo não colocar caracteres demais e dificultar de forma desnecessária a sua leitura.

Exemplo 2 – Considere um jogo em que o participante deve acertar os seis primeiros cavalos, inclusive a ordem de classificação, sendo que são treze cavalos ao todo. Quantos são os resultados possíveis de classificação? Jogo similar um que era apresentado em um canal de TV no Brasil.

Portanto, a análise combinatória busca meios e métodos para resolver problemas diversos de contagem assim como esses.

3.1 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem também conhecido como princípio multiplicativo é uma ferramenta importante em análise combinatória dada a relevância nas resoluções de grande parte desses problemas, além de servir como base para definições e conceitos em subtemas de contagem como arranjos, permutações, combinações entre outros. Nesta dissertação representaremos tal princípio por PFC.

Definição:

Segundo Lima, *et al.* (2010, p. 89) o PFC “diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1 , há y modos de tomar uma decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy ”.

Demonstração do PFC por Hazzan:

Hazzan (1985, p. 2-E a 2-4E) usa os Lemas 1 e 2 auxiliares para demonstração do PFC:

Lema 1: Considerando os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$, podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração:

Fixando o primeiro elemento e fazendo variar o segundo, temos:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \Rightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \Rightarrow n \text{ pares} \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n) \Rightarrow n \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número de pares ordenados corresponde a $m \cdot n$.

Lema 2: O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i \in A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, $a_j \in B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é $m \cdot (m - 1)$.

Demonstração:

Fixando o primeiro elemento de cada par ordenado e fazendo variar o segundo, temos:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_m) \Rightarrow m-1 \text{ pares} \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \dots, (a_2, a_m) \Rightarrow m-1 \text{ pares} \\ \vdots \\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), \dots, (a_m, a_{m-1}) \Rightarrow m-1 \text{ pares} \end{array} \right.$$

Temos m elementos, m linhas, cada elemento associando a $m - 1$ elementos obtendo $m \cdot (m - 1)$ pares de resultados.

Assim, pelo Lemas 1 e 2 enunciaremos o PFC:

Sejam os r conjuntos:

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n1}\}$ com x_1 elementos.

$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n2}\}$ com x_2 elementos.

$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n3}\}$ com x_3 elementos.

\vdots

$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{nr}\}$ com x_r elementos.

Então, o número de r -uplas ordenadas do tipo (a_i, b_j, \dots, z_r) onde $a_i \in A, b_j \in B, \dots, z_p \in Z$ é

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r.$$

Outra forma de provar PFC é pelo Princípio da Indução Finita:

Se $r = 2$ é imediato que caímos no lema 1 já visto. Suponho que vale para $r - 1$ e disso decorre que é válido para o inteiro r .

Para $(r - 1)$ termos as sequências (a_i, b_j, \dots, w_k) por hipótese de indução existem $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{r-1}$ sequências e x_r elementos pertencentes ao conjunto Z .

Cada sequência $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ é formada por uma sequência (a_i, b_j, \dots, w_k) e um elemento z_p .

Logo, de acordo com o lema 1, o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ é $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{r-1}) \cdot x_r$.

Daí, o PFC é válido qualquer que seja r pertencente e $r \geq 2$.

Veja aplicação do princípio fundamental da contagem no anexo III.

3.2 Fatorial

Muitas foram as notações para fatorial, segundo Vazquez e Noguti (2004) a notação usada atualmente, a que apresentaremos aqui, é atribuída a Cristian Kramp e a Arbogast a denominação fatorial.

Fatorial é uma ferramenta no trabalho matemático em diversos momentos, com destaque nos conteúdos que envolvem problemas de contagem. Fatorial de n , representado por $n!$, também pode ser lido por n fatorial, onde $n \in \mathbb{N}$. Para n natural maior que 1, tem-se:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1, \text{ para } n = 0 \text{ e } n = 1 \text{ usando a definição}$$

$$(n - 1)! = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n - 1)!$$

então

$$2! = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1! = 1$$

$$\text{como } 1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1$$

Exemplo 3.2.1: A expressão $(k + 4)!$ representa o produto

$$(k + 4) \cdot (k + 3) \cdot (k + 2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Exemplo 3.2.2: Simplificar cada expressão $(k + 2) \cdot (k + 1) \cdot k \cdot \dots \cdot 1$ para k natural onde $k \geq -1$.

Solução:

Percebe-se que se trata do produto dos números naturais de 1 a $k + 2$. Dessa forma pode-se usar a definição de fatorial:

$$(k + 2) \cdot (k + 1) \cdot k \cdot \dots \cdot 1 = (k + 2)!$$

Exemplo 3.2.3: Simplificar o quociente $\frac{(x+3)!}{(x+1)!}$

Solução:

Procura-se os fatores comuns para efetuar a divisão:

$$\frac{(x + 3)!}{(x + 1)!} = \frac{(x + 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)!}{(x + 1)!} = (x + 3) \cdot (x + 2)$$

Exemplo 3.2.4: Determinar o valor de x que satisfaz a equação $\frac{x!}{(x-2)!} = 90$.

Solução:

Busca-se o fator comum para efetuar a divisão:

$$\frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)!}{(x - 2)!} = 90$$

$$x \cdot (x - 1) = 90$$

A partir daqui podemos ter diferentes modos para obter a solução onde destacaremos dois:

1° modo: A equação $x \cdot (x - 1) = 90 \Rightarrow x^2 - x - 90 = 0 \Rightarrow x = -9$ ou $x = 10$, como x deve ser um número natural maior ou igual a 2, resta que seu valor é único e igual a 10.

2° modo: Na equação $x \cdot (x - 1) = 90$, veja que $x - 1$ é antecessor de x e seu produto é 90, logo x e $x - 1$ são respectivamente iguais a 10 e 9 ou -9 e -10 , mas como x é um número natural maior ou igual a 2, $x = -9$ não satisfaz e seu valor só pode ser 10.

3.3 Permutações sem repetição

As permutações de n elementos P_n são o número de agrupamentos obtidos pelas permutas dos n elementos. Logo, só faz sentido situações em que os agrupamentos que diferem pela ordem de seus elementos.

Compreender o conceito:

- 1 elemento: seja o elemento a .

$$\text{Apenas uma forma: } a \Rightarrow P_1 = 1$$

- 2 elementos: sejam os elementos a e b .

Seguindo do resultado anterior, há duas formas de introduzir b . Uma vez antes de a e uma vez depois de a : ab e $ba \Rightarrow P_2 = 1 \cdot 2$

- 3 elementos: sejam os elementos a , b e c .

Usando o que já temos, com dois elementos, e inserindo mais um elemento c , as opções são, em cada caso, já existentes para dois elementos, c antes (à esquerda), ou no meio ou depois (à direita), assim três casos. Para cada caso já existente, que são $cba, bca, bac, cab, acb, abc \Rightarrow P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

Percebe-se que, sabendo P_{n-1} elementos é possível descobrir as permutações de n elementos, pois há n modos de inseri-lo em cada agrupamento já existente, assim:

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

$$P_3 = P_2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 3!$$

$$P_4 = P_3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 4!$$

...

$$P_n = (n - 1)! \cdot n \Rightarrow P_n = n!$$

Exemplo 3.3.1: Seja uma fila com k pessoas, se adicionar uma pessoa a essa fila aumenta em 600 o número de permutações dessa fila. Qual é o valor de k ?

Solução:

$$\text{Seja } k = n - 1 \Rightarrow P_n - P_{n-1} = n! - (n - 1)! = 600.$$

Adicionando $(n - 1)!$ a um dos membros, este, por sua vez, fica maior:

$$n! - (n - 1)! + (n - 1)! > 600$$

$$n! > 600 \Rightarrow n \geq 6.$$

Se $n = 6$, então $n! - (n - 1)! = 600$ (é verdadeiro)

$$\therefore k = n - 1 = 5$$

Segue questões de permutação simples no anexo

3.4 Permutação com elementos repetição

Exemplo 3.4.1: Quantos números podem ser obtidos permutando os algarismos de número 1014?

Deve-se observar que existe repetição de algarismos e que número não se deve começar pelo algarismo zero.

Temos permutações de 4 elementos ($4!$), mas com a permuta de algarismos iguais (1 e 1) não se obtém um novo número, o resultado deverá ser ajustado pelo divisão por $2!$, assim:

$$P_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

Calcular quantas começaram com zero e, portanto, não configuram número, fixando o zero, permutando os 3 elementos (1, 1 e 4), e dividindo por 2!, causa dos permutas dos algarismos repetidos (1 e 1), temos:

$$P_3^2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

Logo, podem ser formados 9 números.

Exemplo 3.4.2: Nove carros de mesmo modelo serão expostos em um showroom. Sabendo que diferem apenas pela cor, sendo três verdes, dois pratas, quatro brancos, de quantos modos eles podem ser ordenados lado a lado?

Temos permutações de 9 (9!), mas trocar carro verde com verde (3!), prata com prata (2!) ou branco com branco (4!) não criam disposições, logo o resultado será obtido por:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260$$

Podemos agora, estabelecer a fórmula para permutação de n elementos e $\alpha, \beta, \dots, \omega$ repetição de elementos por:

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots, \omega)} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \dots \cdot \omega!}$$

3.5 Combinação Simples

Seja um conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ com n elementos, o número de subconjuntos de p elementos desse conjunto é chamado de combinação simples de n elementos, tomados p a p e pode ser representado pelas notações $C_{n,p}$ ou C_n^p e é dado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Demonstração:

Seja $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, \dots, x_n\}$ de quantos modos podemos formar subconjuntos com p elementos? Para escolher 1 elemento temos n modos, como devemos escolher modos distintos pelo Lema 2, temos $n - 1$ modos para escolher o segundo elemento, $n - 2$ para escolher o terceiro, $n - 3$ para escolher o quarto, assim por diante, até $n - p + 1$ para escolher o p -ésimo elemento. Vale lembrar que se tratando de elementos de conjunto, a mudança na ordem dos elementos não obtém um novo resultado. Então todos os agrupamentos de p elementos se repetiram $p!$ vezes, daí a combinação simples de n elementos tomados p a p será dado por:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)}{p!}$$

Multiplicamos o numerador de denominador por $(n - p)!$

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Veja que de n a $(n - p + 1)$ são p elementos e que $(n - p) + p$ elementos é igual a n elementos, portanto:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)! = n!$$

Daí,

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Vejamos algumas aplicações:

Exemplo 3.5.1: Em uma sala há 10 pessoas, das quais 4 devem ser escolhidas para participar de uma comissão, entre elas Ana com certeza irá fazer parte. Quantas são as possibilidades para formar a comissão?³

³ É um tipo trivial de problema no objeto do conhecimento “combinação simples” mas o objetivo é mostrar que sua solução está no triângulo de Pascal.

Solução:

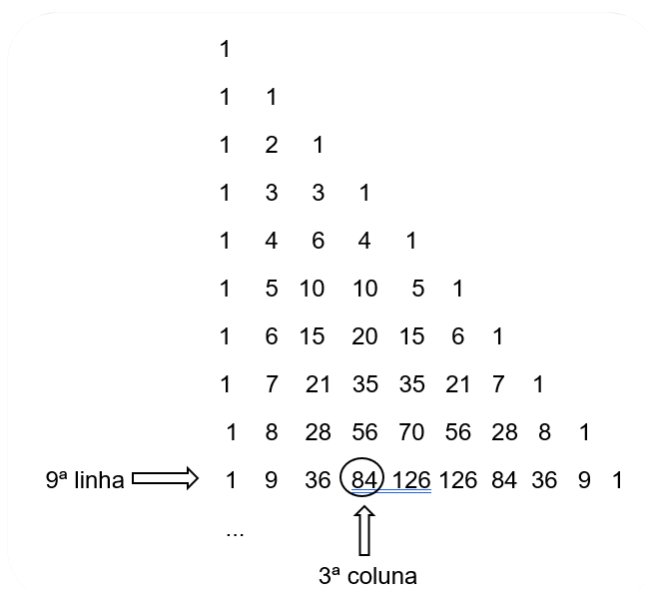
Como já está definido que Ana participará da comissão resta escolher 3 entre os 9 que sobraram assim temos:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

São 84 possibilidades.

Vejamos uma curiosidade, os resultados das combinações estão no triângulo de Pascal. No caso do exemplo 3.5.1, onde o resultado foi encontrado pela combinação de 9 agrupados 3 a 3. Ele está na nona linha e terceira coluna do Triângulo de Pascal, conforme figura 7. As contagens de linha e colunas do triângulo devem começar do zero.

Figura 7 - Triângulo de Pascal com destaque no resultado localizado na linha 9 e coluna 3.



Exemplo 3.5.2: Serão escolhidas p pessoas de um conjunto com k pessoas. Entre elas uma pessoa J participa ou não participa do grupo de p pessoas que serão escolhidas.

A) Quantas as possibilidades em que a pessoa J participa?

Solução: Como J participa será necessário escolhe $p - 1$ pessoas entre $n - 1$ pessoas restantes.

$$C_{k-1}^{p-1} = \frac{(k-1)!}{(k-p)! \cdot (p-1)!}$$

B) Quantas as possibilidades em que a pessoas J não participa?

Solução: Ainda precisa escolher p pessoas em um grupo de $k - 1$ pessoas:

$$C_{k-1}^p = \frac{(k-1)!}{p! \cdot (k-p-1)!}$$

C) Quantas são as possibilidades de formar a comissão em que j participa ou não participa?

São C_{n-1}^{p-1} em que j participa mais C_{n-1}^p em que j não participa:

$$\frac{(k-1)!}{(p-1)! \cdot (k-p)!} + \frac{(k-1)!}{p! \cdot (k-p-1)!} = \frac{k!}{p! \cdot (k-p)!}$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{p-1} + C_{k-1}^p = C_k^p$$

Veja que essa solução (“C” do exemplo 3.5.2) pode ser associada a Relação de Stifel (4º resultado) que o leitor poderá verificar no tópico 3.6 Número Binomiais e no exemplo 3.6.4.

3.6 Números Binomiais

As notações para números binomiais usadas atualmente, utilizando parênteses, foram introduzidas pelo matemático e físico Barão Adreas Von Ettinghaysen (Córes, 2014).

Definição:

Seja um conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ o número de maneiras de escolher p elementos entre os n elementos de A pode ser representado pelo número binomial de n sobre p cuja forma é $\binom{n}{p}$. Como combinação simples calcula esse mesmo resultado temos que

$$\binom{n}{p} = C_n^p \quad \therefore \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Destacamos alguns **resultados importantes**, os quais serão comprovados pela definição do número binomial:

1º) Toda vez em que o denominador for igual a 0, o resultado é 1:

$$\binom{n}{0} = 1$$

Pela definição:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$$

Exemplo 3.6.1: $\binom{9}{0} = 1$ corresponde ao número de maneiras de escolher zero elementos de um conjunto de 9 elementos.

2º) Toda vez em que o denominador de um número binomial for zero, o seu resultado é igual ao valor de seu numerador:

$$\binom{n}{1} = n$$

Pela definição:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exemplo 3.6.2: $\binom{8}{1} = 8$ corresponde ao número de maneiras de escolher 1 elemento de um conjunto de 8 elementos.

3º) Toda vez em que o numerador e denominador de um número binomial forem iguais, o seu resultado será igual a 1:

$$\binom{n}{n} = 1$$

Pela definição:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (0)!} = 1$$

Exemplo 3.6.3: $\binom{7}{7} = 1$ corresponde ao número de maneiras de escolher 7 elementos de um conjunto de 7 elementos.

4º) Relação de Stifel: A soma de dois números binomiais consecutivos no triângulo de Pascal é igual ao número binomial da próxima linha e mesma coluna do segundo número binomial.

$$\binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p} = \binom{k}{p}$$

Pela definição:

Usaremos a forma algébrica para demonstrar, usando a definição algébrica de número binomial:

$$\begin{aligned} \binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p} &= \frac{(k-1)!}{(p-1)! \cdot (k-p)!} + \frac{(k-1)!}{p! \cdot (k-p-1)!} \\ &= \frac{(k-1)! \cdot k}{p! \cdot (k-p)!} \\ &= \frac{k!}{p! \cdot (k-p)!} = \binom{k}{p} \end{aligned}$$

$$\binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p} = \binom{k}{p}$$

Existem outras maneiras de comprovar a relação de Stifel, uma delas pode ser observada a solução de “C” do exemplo 3.5.2, com o uso de Combinações Simples de $k - 1$ elementos agrupados $p - 1$ elementos somados com a combinação simples de $k - 1$ elementos agrupados em p elementos é igual a combinação de k elementos agrupados em p elementos, obtendo o mesmo resultado, utilizando de interpretações e desenvolvimento combinatórios.

Exemplo 3.6.4: Pelo Teorema de Stifel temos

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}.$$

5º) Números binomiais complementares:

$$\binom{k}{p} = \binom{k}{k-p}$$

Usando a definição:

$$\begin{aligned} \binom{k}{p} &= \frac{k!}{p! \cdot (k-p)!} \\ \binom{k}{k-p} &= \frac{k!}{(k-p)! \cdot p!} \\ \Rightarrow \binom{k}{p} &= \binom{k}{k-p} \end{aligned}$$

Exemplo 3.6.5: Podemos confirmar a igualdade seguinte como verdadeira, pois são complementares.

$$\binom{18}{5} = \binom{18}{13}$$

3.7 Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal, como já apresentado, é um arranjo numérico que aparece de várias formas: uma delas é através dos números binomiais, conforme figura 8:

Figura 8 - Triângulo de Pascal formado por números binomiais.

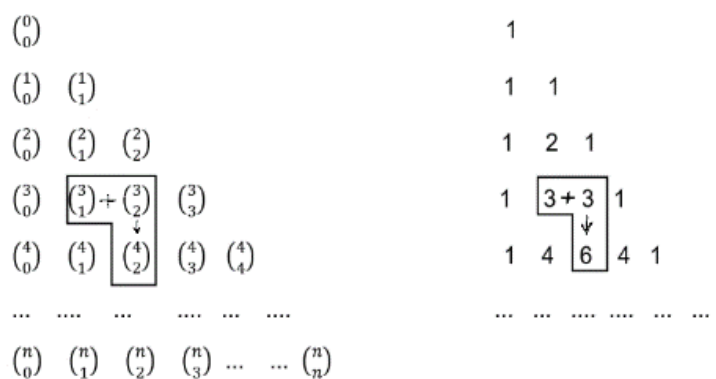
$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

Veja que nesse triângulo é conveniente e são usadas as numerações de linhas cima para baixo desde zero e das colunas da esquerda para a direita. Sendo a primeira a linha 0, a próxima é a linha 1, depois a linha 2, e assim por diante. O mesmo ocorre com as colunas (coluna 0, coluna 1, coluna 2, ...). A grande vantagem desse tipo de numeração no triângulo de Pascal é que um número binomial qualquer $\binom{k}{p}$ está na linha k e coluna p , ou seja, o numerador e denominador de um número binomial diz, respectivamente, às linhas e colunas, que se localizam no triângulo.

Montando o triângulo de Pascal com os resultados dos números binomiais, usando as propriedades e resultados de 1º a 5º, temos: que todos da coluna 0 e os últimos de todas as linhas são iguais a 1, conforme os resultados 1º e 3º os mesmos ainda podem ser confirmados pelo 5º. Temos pelo resultado 2º (binomiais complementares) que $\binom{k}{1} = k$ e pelo resultado 5º $\binom{k}{k-1} = k$. Pela relação de Stifel (5º resultado) $\binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p} = \binom{k}{p}$ de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento da próxima linha e mesma coluna do segundo da soma, assim $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} =$

$\binom{4}{2}$). Segue em destaque a Relação de Stifel o exemplo dado dessa relação na figura 9.

Figura 9 - Triângulo de Pascal com destaque a relação de Stifel.



Vale ressaltar que nem sempre o triângulo tem a disposição apresentada, pois pode aparecer semelhante a um triângulo isósceles e, nesse caso, seria incômodo, visualmente a percepção das colunas.

Vamos na busca de mais um resultado, a soma dos números de uma linha.

6º) **Teorema das Linhas:** Seja uma linha n qualquer:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (1)$$

Demonstração:

Vamos usar indução finita. Veja que a propriedade é verdadeira para $n=1$:

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$$

Supondo que a propriedade vale para n , vamos provar que vale para $n + 1$.

Para isso, faremos $(1)+(1)$:

Usando relação de Stifel dois a dois

$$\binom{n}{0} + \overbrace{\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \right)} + \binom{n}{n} = 2^n + 2^n. \quad (2)$$

3.8 Binômio de Newton

O termo “binômio de Newton” se refere a fórmula do desenvolvimento de $(x + a)^n$, onde n é um número natural.

Para obtê-lo multiplicamos

$$(x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a) \cdot \cdots \cdot (x + a)$$

Como usando apenas a propriedade distributiva em muitos casos pode ser nada prático há a necessidade de buscar formas mais práticas. O binômio de Newton é uma fórmula que ajuda nesse sentido e iremos em busca de redescobri-la, ou pelo menos compreendê-la.

Considerando os n fatores $(x + a)$, onde x é a primeira parcela e a é a segunda de cada fator, e pela propriedade distributiva serão obtidos os termos do desenvolvimento dos agrupamentos formados por n fatores, uma parcela de cada fator do binômio, daí temos os resultados (termos do desenvolvimento):

- a) Formados apenas pelas primeiras parcelas do binômio:

$$T_1 = x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x = x^n.$$

- b) Formados por $(n - 1)$ primeiras parcelas e 1 pela segunda:

$$x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \cdot a = x^{n-1} \cdot a$$

Considerando que existem $\binom{n}{1}$ formas de obter $x^{n-1} \cdot a$, daí:

$$T_2 = \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a$$

- c) Formados por $(n - 2)$ primeiras parcelas e 2 pela segunda $x^{n-2} \cdot a^2$.

Considerando que temos $\binom{n}{2}$ formas de obter: $x^{n-2} \cdot a^2$, daí:

$$T_3 = \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2$$

...

- d) Até o termo formado apenas pelas segundas parcelas do binômio:

$$T_n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$$

Por fim, através da $T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$ obtemos a fórmula:

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \cdots + a^n$$

Mas, por uma questão de generalização, a fórmula do Binômio de Newton será da forma seguinte:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^0 a^n$$

Temos:

I) Representação do Binômio de Newton por meio de somatório:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p$$

II) Representação do termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p$$

Exemplo 3.8.1: Desenvolver o binômio $(x + y)^5$.

Temos:

$$\begin{aligned} (x + y)^5 &= \binom{5}{0} \cdot x^{5-0} \cdot y^0 + \binom{5}{1} \cdot x^{5-1} \cdot y^1 + \binom{5}{2} \cdot x^{5-2} \cdot y^2 + \dots + \binom{5}{5} \cdot x^{5-5} \cdot y^5 \\ &= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot y + 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 10 \cdot x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot x \cdot y^4 + y^5 \end{aligned}$$

Também pode ser representado por:

$$(x + y)^5 = \sum_{p=0}^5 \binom{5}{p} \cdot x^{5-p} \cdot y^p$$

Exemplo 3.8.2: Encontrar o 3º termo do desenvolvimento de $(x + 2)^6$.

Procuramos T_3 .

Como $T_3 = T_{p+1}$ implica que $p = 2$:

$$T_3 = \binom{6}{2} \cdot x^{6-2} \cdot 2^2 = 60 \cdot x^4$$

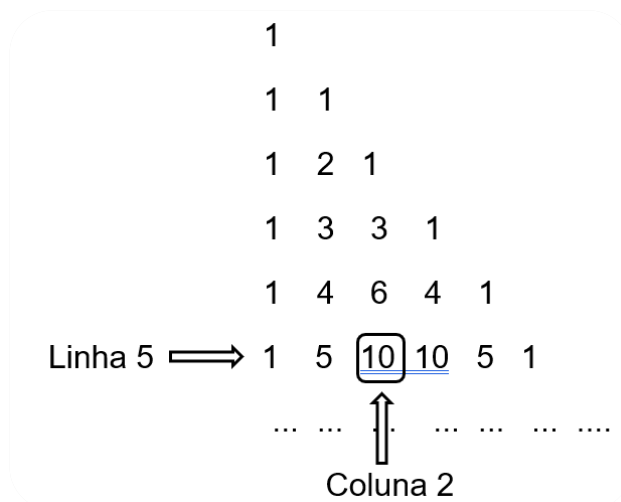
Exemplo 3.8.3: Pelas várias multiplicações da propriedade distributiva da expressão $(a + 4)(a + 4)(a + 4)(a + 4)(a + 4)$, usando uma parcela de cada fator, quantas são as formas de obter $a^3 \cdot 4^2$?

Temos: Consiste em escolher 3 fatores a entre 5, que é complementar de escolher 2 entre 5:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Sobre o resultado do exemplo 2.8.3, ele corresponde ao coeficiente do termo $a^3 \cdot 4^2$ no desenvolvimento de $(a + 4)^5$ e o mesmo pode ser encontrado no triângulo de Pascal linha 5, coluna 2 conforme indicado na figura 11.

Figura 11 - Triângulo de Pascal com destaque ao resultado da linha 5 e coluna 2.



Percebe-se que todos os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ estão na linha n do triângulo de Pascal.

Exemplo 3.8.3: Desenvolver $(x + a)^4$.

Observando a linha 4:

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Temos

$$1 \cdot x^4 \cdot a^0 + 4 \cdot x^3 \cdot a^1 + 6 \cdot x^2 \cdot a^2 + 4 \cdot x^1 \cdot a^3 + 1 \cdot x^0 \cdot a^4$$

CAPÍTULO 4 – O DESENVOLVIMENTO DO JOGO

No ano de 2023, José Vicente Thiago Barreira, desenvolveu um jogo que foi usado em turmas de 2º ano do ensino médio, ensino regular e EJA (Educação de Jovens e Adultos). E para ampliação do uso desse jogo como recurso didático em apoio ao ensino do triângulo de Pascal, números binômias entre outros objetos dos conhecimentos que possam ser relacionados houve colaboração de um outro professor da escola que também aplicou o jogo em sala de aula, turmas de EJA, onde será usado o codinome “professor Beto”.

Em busca de jogos e experimentos que pudessem contribuir com as aulas foram realizados buscas e estudos de literaturas científicas, onde destacou-se a dissertação de Paz (2006), intitulada “A utilização do dominó no auxílio do ensino do triângulo aritmético”. Nela era usada as peças de dominó como números binomiais na aplicação de um jogo associada a algumas propriedades. Daí, visto que as peças de dominó tradicional de 28 peças preencheriam perfeitamente, sem falta e excesso, até a sexta linha, surgiu ideia de formular um jogo novo onde ocorreria o preenchimento do Triângulo de Pascal, sendo este um tabuleiro.

Nesse novo Jogo, destaca-se o objetivo de reforçar o aprendizado dos conteúdos envolvidos, com destaque para as particularidades do Triângulo de Pascal. Além disso, buscava-se proporcionar um ensino com significados práticos, que, por intermédio de experiências lúdicas e divertidas, sendo o jogo um recurso didático que contribui no processo de ensino e aprendizagem.

Para tanto, foram estabelecidas as definições e regras do jogo. E posteriormente aplicados em sala de aula. Primeiramente, no ano de 2023, em duas turmas de 2º ano do Ensino Médio regular pelo professor José Vicente Thiago Barreira e em duas turmas na Educação de Jovens e Adultos pelo Professor Beto. Depois, no ano de 2024, em mais duas turmas de 2º ano do Ensino Médio regular pelo professor José Vicente Thiago Barreira. Em todos os casos eram turmas do período noturno.

Nesse sentido, é importante destacar que os jogos se apresentam como uma ferramenta, um recurso didático, eficaz e lúdica para o ensino e aprendizagem da matemática, conforme observado no desenvolvimento das turmas e nos resultados obtidos. Pode-se considerar que o uso de jogos no ensino, como este, contribui para a aprendizagem, pois os alunos precisam trabalhar com estratégias para fazer as

melhores jogadas, usando escolhas não aleatórias de forma a aumentar suas chances de vencer o jogo.

Portanto, os benefícios vão além dos objetos do conhecimento ministrados. Pois, pode-se destacar a integração social entre os envolvidos, o jogo proporciona o desenvolvimento de habilidades de convivência social, como lidar com conflitos, tomar decisões e enfrentar suas consequências.

Portanto, o jogo é uma ferramenta que pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem, já que atua como um recurso pedagógico que diversifica a aula, facilitará a compreensão dos objetos dos conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades importantes essenciais para a formação de um cidadão, de comunicação, de interação entre outras.

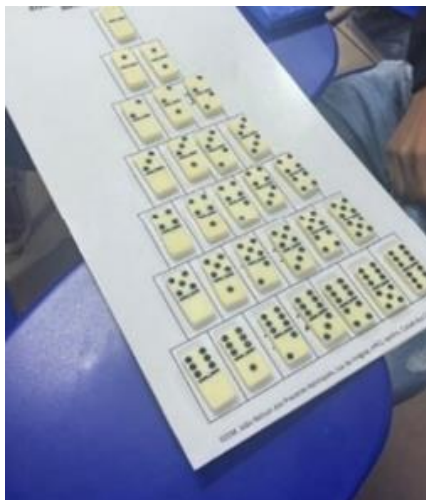
4.1 Desenvolvimento, Materiais e Métodos

A seguir, será apresentado o percurso de desenvolvimento do jogo Completando o Triângulo de Pascal, incluindo sua confecção, definições e regras. Discutiremos e evidenciaremos os resultados positivos que essas práticas pedagógicas possibilitam no contexto escolar, a fim de que outros educadores interessados possam replicar e usar, realizar as adaptações necessárias à sua realidade.

4.1.1 Confecção do jogo Completando o Triângulo de Pascal

Como as peças de dominó preenchem perfeitamente o tabuleiro sem falta ou excesso, foi confeccionado o tabuleiro conforme figura 12.

Figura 12 - As 28 peças de dominó preenchem até a linha 6 do Triângulo de Pascal



Fonte: Registro do autor

4.1.2 Materiais e confecção do Jogo

A escola adquiriu quatro conjuntos de dominós, cada um com 28 peças (conforme ilustrado na figura 13). Dessa forma, o jogo poderia ser aplicado para até 16 alunos simultaneamente. Em 2024, foram adquiridos mais dois conjuntos pelo próprio professor (autor), ampliando para até 24 participantes simultâneos.

Figura 13 - Dominó adquirido

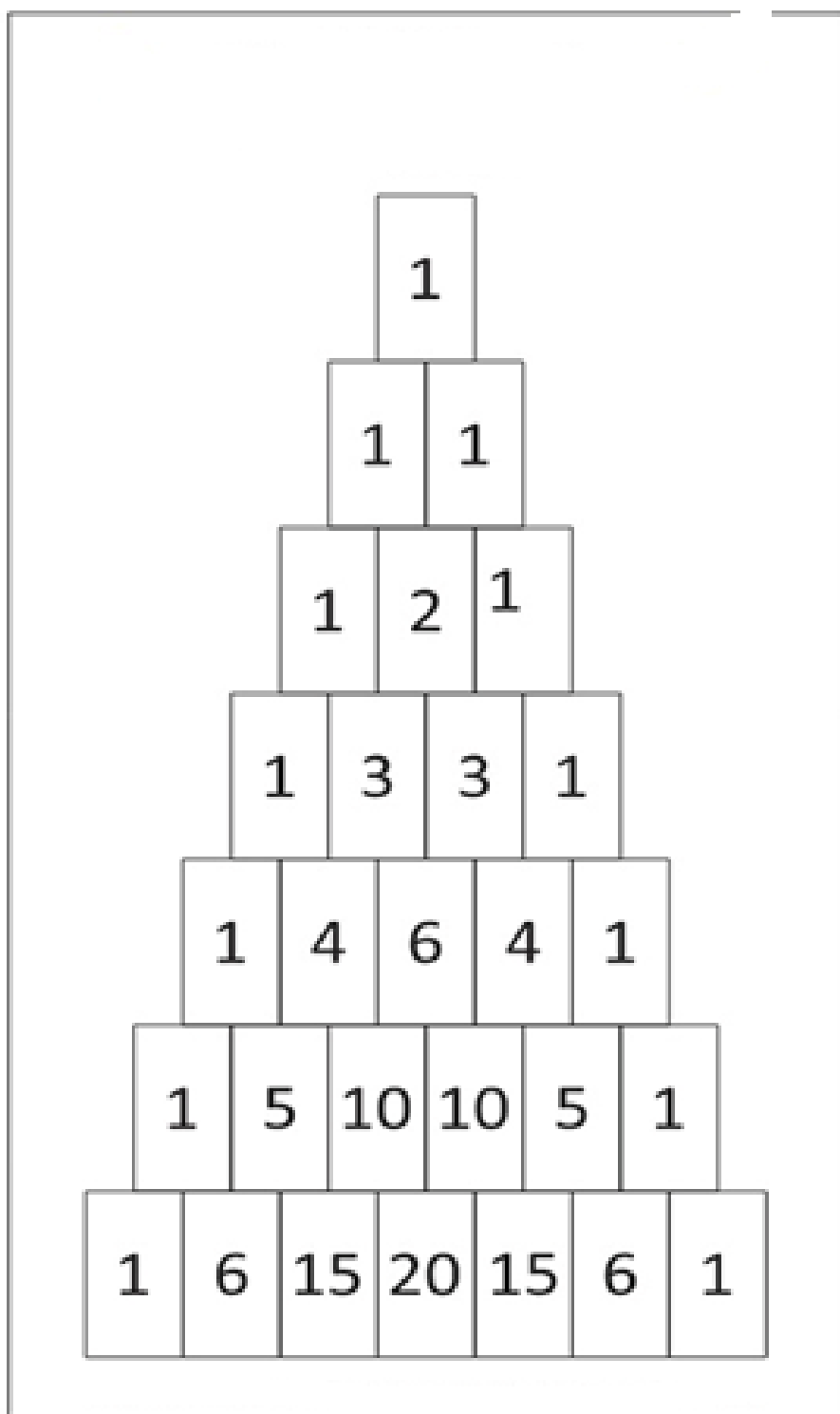


Fonte: Registro do autor

Além de comprar, existem alternativas para a obtenção dos materiais do Jogo. Estes podem ser confeccionados em outros materiais, como o E.V.A. (Etileno Acetato de Vinila), uma borracha sintética que pode ser manuseada com facilidade e utilizada em diversas atividades, inclusive na produção de materiais didáticos. Para a

confeção do tabuleiro, conforme ilustrado na figura 14, desenvolveu-se um modelo digital, que geralmente é chamado de arte. Em seguida, essa arte foi enviada a uma gráfica, com as devidas informações, para a impressão em acrílico.

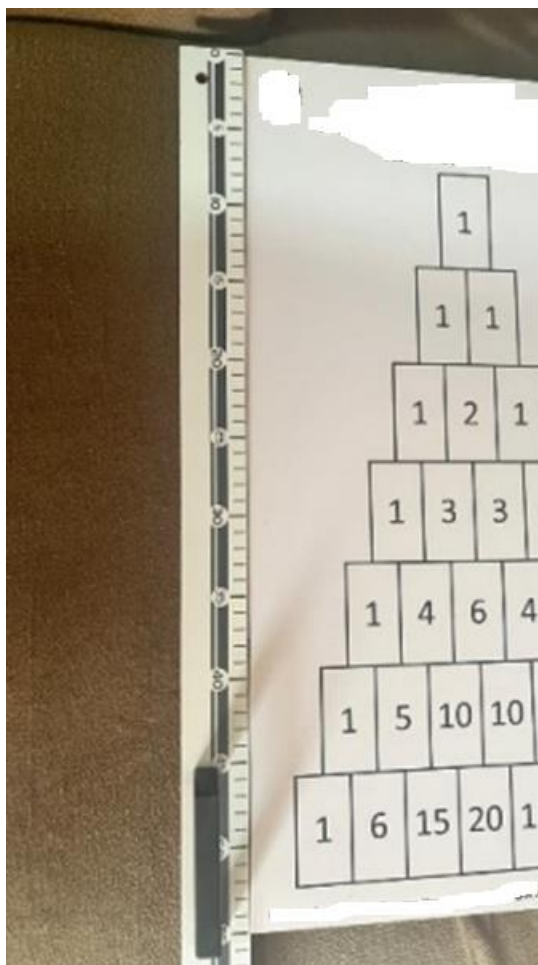
Figura 14 - Imagem do Tabuleiro do Jogo



Fonte: Registro do autor

As dimensões do tabuleiro, em centímetros, foram de 30 de largura por 55 de altura, conforme ilustrado nas figuras 15 e 16.

Figura 15 - Medida da altura do tabuleiro



Fonte: Registro do autor

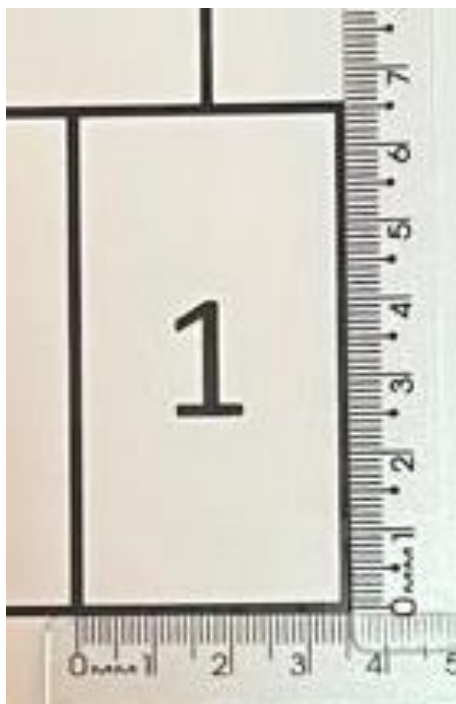
Figura 16 - Medida da largura do tabuleiro



Fonte: Registro do autor

As dimensões dos retângulos impressos no tabuleiro, em centímetros, foram 3,5 de largura por 6,5 de altura conforme figura 17.

Figura 17 - Dimensões dos retângulos para colocar as peças do dominó



Fonte: Registro do autor

Vale lembrar que os retângulos no tabuleiro devem ser maiores que as peças de dominó. Portanto, antes da confecção do tabuleiro, é essencial verificar o tamanho das peças de dominó que serão utilizadas.

4.1.3 Definições e regras do Jogo.

Definições:

1. Peças de dominó representam números binomiais.

A peça da figura 18 representa o número binomial $\binom{6}{4}$.

Figura 18 - Peça de dominó representa $\binom{6}{4}$



Fonte: registro do autor

Quando um dos lados for limpo este representará o zero. Veja a representação do número binomial $\binom{5}{0}$ na figura 19.

Figura 19 - Peça de dominó que representa $\binom{5}{0}$



Fonte: Registro do autor

Veja que, devido a própria definição de número binomial, o número maior da peça do dominó representará o numerador do número binomial, portanto este deverá ser posicionado na parte superior da peça.

2. As peças de dominó podem ser chamadas simplesmente de peças ou por sua representação do número binomial.
3. No tabuleiro temos um conjunto de números, cada um em um retângulo, representando os números do Triângulo de Pascal.
4. Peças adjacentes são as situadas em retângulos do tabuleiro com pelo menos metade de um lado do retângulo em comum.
5. Sobra é o resto de peças que ocorre quando são menos de 4 jogadores.

Regras:

1. Número de jogadores: 2, 3 ou 4 (cada um por si);
2. Cada jogador pega 7 peças.
3. Deve ser escolhido um jogador para começar o jogo. O método de escolha fica a critério do professor. Nós usamos par ou ímpar quando são dois jogadores, ou o método conhecido por “dois ou um” quando são três ou quatro jogadores.
4. O primeiro jogador deve escolher uma peça qualquer das que possua e jogar no lugar correspondente do tabuleiro, isto é, o número binomial representado deve coincidir com a posição correta do triângulo.
5. Depois de um jogador realizar sua jogada, segue para o próximo jogador no sentido anti-horário, que deverá escolher uma de suas peças, desde que possa ser colocada adjacente a uma peça já jogada. Caso o jogador da vez não possua peça adjacente a alguma peça já jogada deverá pegar das peças que sobraram até encontrar uma que possa ser jogada, caso não haja peças disponíveis na sobra⁴, passa a vez ao próximo jogador.
6. Vence a partida quem ficar sem peças primeiro.

4.1.4 Uso do Jogo

Os alunos podem jogar diversas partidas, conforme a disponibilidade de tempo e a organização do professor. É cômodo que joguem um número de partidas igual ou múltiplo ao número de jogadores, para que todos tenham a mesma oportunidade de começar o jogo. Sugerimos que as equipes sejam compostas por quatro jogadores e que os jogos sejam organizados em grupos de quatro partidas.

Esse jogo não trava por falta de peça, pois existem peças para todas as posições do tabuleiro. Consequentemente, todas as peças possuem peças adjacentes, e estas estarão com algum jogador ou na sobra.

Afinal, onde jogar a peça? O jogador que vai começar tem maior chance, não corre o risco passar, pelo menos nesse momento, pode jogar qualquer uma de suas

⁴ Só ocorre sobra de peças quando são menos de 4 jogadores na partida.

peças, e isso pode ser feita a escolha visando reduzir as chances dos adversários. Mas demora algumas partidas para acontecer, uns alunos mais outros menos.

Por tanto, é natural que o jogador comece, na medida do possível escolher onde os outros terão menores chances. Uma das estratégias mais básicas e óbvias é contar quantas peças adjacentes existem da peça jogada. Nesse ponto de vista, para jogador que irá começar a partida, se escolher jogar uma peça que não é das laterais nem dos cantos, esta possivelmente dará maior chance do próximo jogador, pois conforme figura 20, existem 6 peças possíveis para prosseguir; se começar com uma peça da lateral, que não seja dos cantos, ou seja, uma peça do início da linha ou do final, mas não sendo da linha zero nem do início ou fim linha seis, nesse caso existem 4 peças adjacentes conforme figura 21, diminuiu a chance do próximo jogar. Mas as posições que os adversários terão menor chance são as peças dos cantos conforme exemplo da figura 22, pois só há duas peças, em cada caso, que poderá ser jogada.

Figura 20 - Exemplo em que há seis possibilidades para continuar o jogo



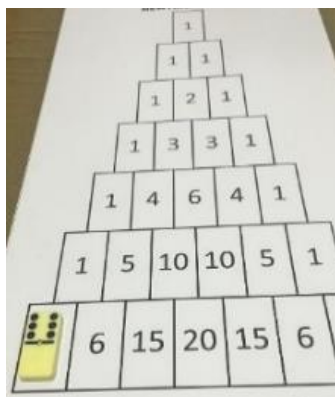
Fonte: Registro do autor

Figura 21 - Exemplo em que há quatro possibilidades para continuar o jogo



Fonte: Registro do autor

Figura 22 - Exemplo em que há duas possibilidades para continuar ao jogo



Fonte: Registro do autor

ATENÇÃO: sugerimos que não se mostre aos alunos quais são as melhores posições para jogar, pois eles descobrirão rapidamente através da própria experiência do jogo, e isso trará mais emoção ao aluno pela sua descoberta. Pois, revelar as melhores jogadas retiraria o entusiasmo da descoberta. É importante ressaltar que jogar em determinadas posições pode aumentar a chance de ganhar, mas não garante a vitória.

Então, por que mostramos essas possibilidades? Foi apenas para destacar que este jogo não se baseia apenas na sorte, o que o torna interessante. Ele apresenta um diferencial onde o aluno ser habilidoso contará a seu favor.

Ressaltamos que este jogo é um jogo de estratégia que envolve escolhas, assim como conceituados na Teoria dos Jogos. Ideal para alunos que gostam de desafios. Não foi apenas sorte!

Além disso, percebe-se uma nova possibilidade: caso o professor ache viável e conveniente, poderá abordar novamente este jogo durante o estudo de probabilidade, que geralmente, no ensino médio, ocorre logo após a análise combinatória, visto a ligação probabilística de cada um dos jogadores possuir determinadas peças.

4.1.4.1 Sugestão de ajuste do Jogo para trabalhar o Teorema das Linhas

Este jogo oferece diversas opções em que o professor pode alterar as regras para adaptá-las aos objetivos educacionais. Por exemplo, quando o objetivo é que o jogo contribua ao aprendizado dos alunos do Teorema das Linhas, o professor pode combinar uma regra em que a pontuação do jogador será igual à soma das linhas onde ele finaliza, isto é, se um jogador jogar a última peça da linha 5, ele receberá a pontuação equivalente à soma dos números na linha 5.

Em pouco tempo, os alunos passarão a utilizar as melhores escolas no sentido de dar preferência para jogar primeiro as peças de linhas menores, e assim, ser o último a jogar as peças de linhas de maior soma. Nesse caso, mantem às regras de jogar a peça adjacente, mas o jogo só termina quando o tabuleiro estiver completo.

Sugerimos que, inicialmente, o professor não forneça a fórmula do Teorema das Linhas. Durante o jogo, os alunos anotarão de quem é a soma de cada linha. Após preencher o tabuleiro, eles farão as somas para ver a pontuação de cada um. Logo, os alunos perceberão que as somas dobram de uma linha n para uma linha $n+1$. Depois, professor pode ajudá-los a redescobrir a fórmula, reforçando que se trata de uma potência de 2, em que o número de fatores é igual ao número da linha.

CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO JOGO COMPLETANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL

O Jogo “Completando o Triângulo de Pascal” foi aplicado em sala de aula, onde se mostrou ser uma ferramenta eficaz e complementar como recurso didático no processo de ensino aprendizagem. Colocou o aluno mais próximo dos objetos do conhecimento envolvendo-os de forma mais interativa, além de favorecer o desenvolvimento de habilidades sociais como de comunicação, civilidade, enfrentamento, e de trabalho em grupo (interação).

A experiência nos mostrou uma aula descontraída e divertida na qual, conforme relatos dos alunos, “a participação deixou de ser uma aula chata”. Por isso, afirmamos que jogos dinâmicos podem contribuir para a inclusão dos alunos em um ambiente mais acolhedor, colocando-os mais próximos dos objetos do conhecimento, ao contrário do ambiente mais rigoroso como os da educação tradicional onde as atividades frequentemente são vistas simplesmente como tarefas obrigatórias a serem cumpridas onde é imperativo a transmissão de conteúdo, mas não se mostra eficiente em uma era tecnológico em que passa ser exigido meios mais eficientes de ensino.

Visto que o uso do Jogo Completando o Triângulo de Pascal foi produtivo, ele está sendo apresentado neste trabalho como uma ferramenta, um recurso didático de apoio e inovação. Consideramos que este jogo aborda os objetos do conhecimento relacionados aos números binomiais, Triângulo de Pascal e algumas propriedades relacionadas. E que, além disso, proporciona o desenvolvimento de habilidades para as melhores escolhas para si, no que se refere o jogo, além das relacionadas a interação social.

A seguir, apresentaremos as abordagens e evidências das aplicações do jogo Completando o Triângulo de Pascal que ocorreram em turmas do ensino médio, 2ª série regular e EJA, no ano de 2023 e 2ª série regular do ensino médio, no ano de 2024.

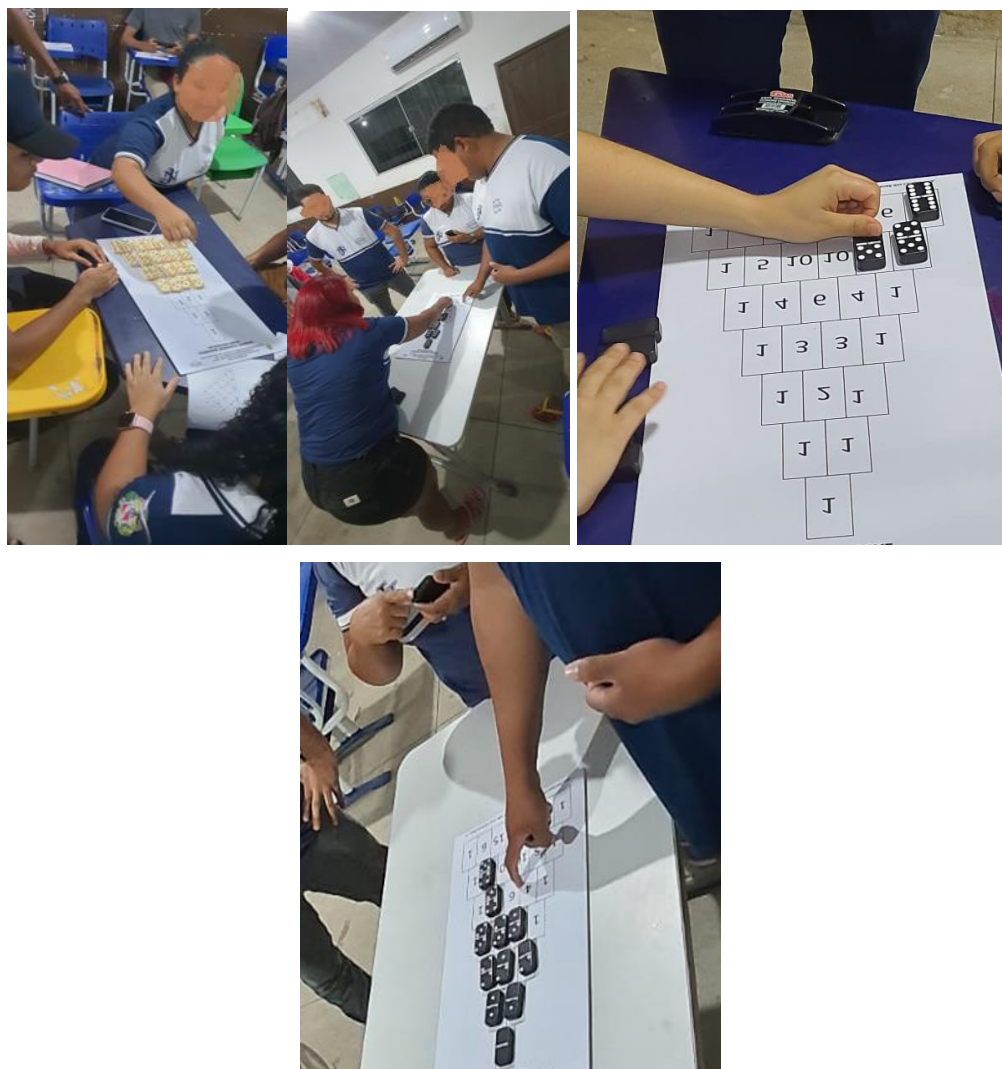
5.1 Aplicação do jogo em 2023.

O jogo Completando o triângulo de Pascal, depois de confeccionados tabuleiro e peças, definida as regras, ter introduzido os objetos do conhecimento no que se refere conceitos básicos de números binomiais (coeficiente binomial), Triângulo de Pascal entre outros pertinentes, o jogo pôde ser aplicado.

Inicialmente os jogos foram experienciados pelas turmas de 2ª série de ensino médio regular pelo professor José Vicente Thiago Barreira e nas turmas de 2ª série EJA pelo professor Beto em 2023.

A seguir registros fotográficos cedidos pelo professor Beto representados na figura 23.

Figura 23 - Aplicação do Jogo nas turmas de EJA pelo professor Beto, ano 2023



Fonte: Arquivo pessoal do professor Beto

5.1.1 Aplicação do Jogo Completando o Triângulo de Pascal pelo professor José Vicente T. Barreira, em 2023

Nas primeiras partidas dos jogos realizadas em sala de aula, em 2023, os alunos ainda sem compreender quais seriam as melhores escolhas aumentar a probabilidade para vencer, as jogadas ocorriam de forma aleatória, resultando em vencedores pelo acaso. Nesse momento, foram necessárias intervenções por cerca de uma partida em relação aos erros na colocação das peças, o que representou um período desafiador. Por esse motivo, sugere-se que o professor apresente as regras de maneira clara e acompanhe a primeira partida, que pode servir como uma demonstração inicial sem valer o resultado.

Rapidamente, os alunos compreenderam as regras, e não foi mais necessário acompanhar todas as jogadas. Foi possível permitir que 16 alunos jogassem ao mesmo tempo. As emoções dos alunos, a animação e a disputa começam a surgir na sala de aula. A participação começou a ser natural e as aulas acabavam sem que os alunos percebessem o tempo passar. Nesse sentido, corroboramos com Macedo (1995)

[...] a competição não é boa nem má. Ela caracteriza uma situação onde duas pessoas desejam a mesma coisa ou dela necessitam ao mesmo tempo. Esses fatos também ocorrem na vida. O ponto principal é a forma de agir durante esse método de ensino, mostrando ao educando a possibilidade de aprendizagem através do seu erro ou até mesmo a aprendizagem pelo acerto do colega no qual foi seu competidor (Macedo 1995, *et al.*, *apud* Figueira *et al.*, 2022 p. 3)

Em sala de aula, o jogo foi bem recebido pelos alunos, um momento descontraído no qual a vontade de que “acabe logo” não ocorreu. “O tempo voa” seria um ditado popular mais adequado demonstrado por alguns alunos. Muitos deles gostariam que o jogo continuasse, mas devido outras atividades deveríamos encerrar no tempo preestabelecido. Uma coisa que se pode dizer é de “dever cumprido” e uma sensação de satisfação que prevaleceu entre os envolvidos. Segue registros fotográficos na figura 24.

Figura 24 - Aplicação do Jogo nas turmas de 2º ano do ensino médio regular pelo professor José Vicente Thiago Barreira, ano de 2023



Fonte: Elaborado pelo autor

Um dos benefícios observados do jogo é que os alunos apresentaram maior facilidade para aprendizagem dos resultados do 1º ao 6º localizados nos tópicos 3.6 (Números Binomiais) e 3.7 (Triângulo de Pascal) com a aplicação dos jogos, intervenções e atividades.

Comparado às aulas expositivas, onde mesmo quando aberto para participação dos alunos, como ir ao quadro, fazer perguntas ou expor pontos de vista sobre os objetos do conhecimento, os resultados de participação não eram satisfatórios. Nas aulas do período noturno, geralmente, muitos alunos já estão cansados do trabalho, alguns chegam atrasados, outros se distraem mexendo no celular, saem com frequência para ir ao banheiro, beber água, ou até mesmo “matam aula” jogando bola na quadra ou conversando pelos corredores.

Nas aulas em que foi utilizado o jogo “Completando o Triângulo de Pascal”, observou-se maior envolvimento dos alunos e uma aprendizagem mais significativa, menos estressante tanto para o professor quanto para os alunos. Pois, os alunos já não se ausentavam tanto da sala aula, conceitos diretamente relacionados ao jogo foram compreendidos com maior facilidade. Além disso, como notado na prática, o jogo proporciona, junto ao aprendizado, um momento de lazer para àqueles alunos já cansados com os afazeres do dia a dia, desenvolve estratégias que são colocadas em prática para maximizar os resultados positivos do jogo na busca da vencer.

Mesmo que um aluno perca uma ou mais partidas, há vários benefícios: aprendizado de conteúdos de maneira descontraída e natural, lidar com sentimento de derrota, já que nem sempre se é vitorioso, e interação social com outras pessoas.

5.2 Aplicação do jogo Completando o Triângulo de Pascal pelo professor José Vicente T. Barreira em 2024

Na figura a seguir, apresentamos os materiais disponíveis, sendo material didático da própria escola para a aplicação dos jogos.

Figura 25 - Materiais disponíveis para o Jogo Completando o Triângulo de Pascal



Fonte: Registro do autor

Em 2024, foi mais uma oportunidade para utilizar o jogo e enriquecer os registros e estudo sobre o Jogo Completando o Triângulo de Pascal. Portanto, antes da utilização do jogo, os alunos tiveram aulas expositivas sobre números binomiais,

uma pequena introdução sobre o Triângulo de Pascal (Triângulo Aritmético), os resultados importantes correspondentes aos resultados 1º a 3º do tópico 3.6 (números binomiais), e resolução de alguns exemplos na lousa.

Para confirmar, o quanto haviam aprendido com apenas duas aulas expositivas, na semana seguinte foi aplicada uma avaliação diagnóstica com questões envolvendo conceitos que haviam sido ministrados, conforme figura 26. E como se tratava de resultados evidentes por propriedades, os alunos foram orientados a não fazerem cálculos, ou seja, não deveriam usar a fórmula de combinações simples. Percebeu-se, que pouco haviam aprendido, pois de 28 alunos que responderam ao exercício e confirmaram que haviam assistido à aula sobre números binomiais e Triângulo de Pascal, apenas 8 acertaram $\binom{k}{0}$, 5 acertaram $\binom{k}{1}$, 6 acertaram $\binom{k}{k}$, 3 acertaram $\binom{k}{k-1}$, 3 conseguiram fazer o Triângulo de Pascal (não usaram números binomiais), e nenhum deles conseguiram relacionar a soma dois números binomiais consecutivos a seu resultado na forma de número binomial (relação de Stifel).

Figura 26- Recorte de uma das avaliações diagnósticas que foram aplicadas

1ª) Você já assistiu aula sobre números binomiais?
 Sim

2ª) Você sabe calcular os valores dos números binomiais?
 Sim

3ª) Sem usar fórmulas responda o valor de cada número binomial.

a) $\binom{k}{0}$. 1

b) $\binom{k}{1}$. k

c) $\binom{k}{k}$. 1

d) $\binom{k}{k-1}$. k

4ª) A soma $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$ é igual a

a) $\binom{10}{7}$.

b) $\binom{5}{7}$.

c) $\binom{5}{3}$.

d) $\binom{5}{4}$.

e) $\binom{10}{4}$.

5ª) Represente o triângulo de Pascal.

```

  1
  1 1
  1 2 1
  1 3 3 1
  1 4 6 4 1
  1 5 10 10 5 1
  1 6 15 20 15 6 1
  
```

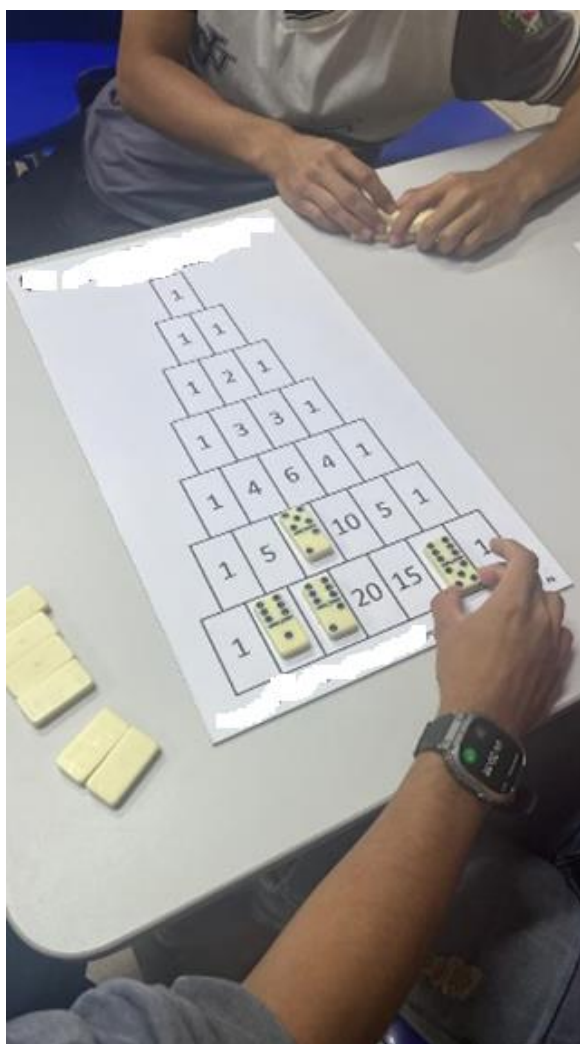
Fonte: Registro do autor

Na semana seguinte, foram revisados os conceitos sobre a formação triângulo de Pascal em dois modelos: um formado por números binomiais e outro pelos resultados. Deu-se destaque na numeração das linhas e colunas desde zero.

Em seguida, foi apresentado o jogo “Completando o Triângulo de Pascal”, as regras e aplicados em duas turmas, uma por vez.

Na primeira turma as regras foram passadas pela linguagem oral. Usaram o método do “dois ou um” para escolher quem começaria a partida. Percebeu-se que houve uma demora na compreensão das regras do jogo. Nas primeiras partidas, os alunos apresentaram dificuldade para identificar as peças que podiam jogar, e o local correspondente de cada uma delas, conforme ilustrado na figura 27. No entanto, a partir da segunda partida, a maioria dos alunos já havia compreendido as regras.

Figura 27 - Os alunos não haviam compreendido o conceito de peça adjacente



Fonte: Registro do autor

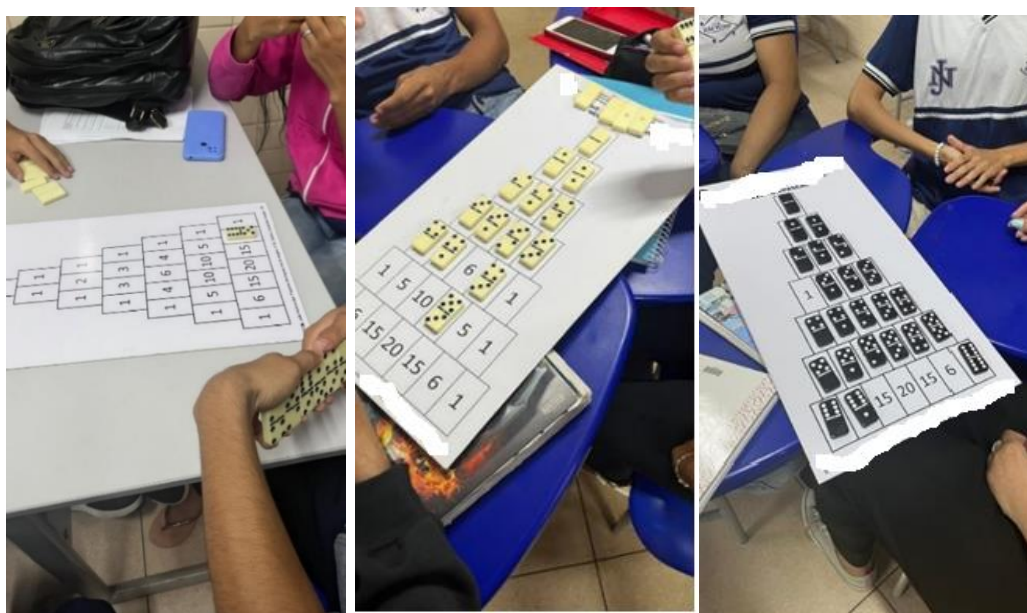
Na segunda turma, devido à dificuldade apresentada na turma anterior, foi escrito as regras na lousa. Percebeu-se uma melhor fluidez, desde a primeira partida.

Nas duas turmas, houve uma boa recepção ao jogo, pois, frequentemente, os alunos anseiam por novidades e aulas diferentes das tradicionais, que geralmente consistem em explicações expositivas do professor e resolução de exercícios baseados nos exemplos dados para uma transmissão dos objetos de conhecimento, como já dito, não tem se mostrado eficiente.

Contudo, houve dois alunos que não participaram do jogo, um em cada turma, mas não foi encontrado aluno “matando aula”, algo comum nas aulas do turno noturno das turmas em que o jogo foi aplicado.

Grupos de quatro alunos (jogadores) jogaram por um período aproximado de três aulas. Observou-se que o jogo proporcionou uma aproximação com os objetos de conhecimento, permitindo-lhes vivenciar que os números binomiais que iniciam e terminam uma linha são iguais a 1, que existe a relação entre os numeradores com as linhas, e dos denominadores com as colunas, reconhecer rapidamente os pares que são complementares e a localização de cada um no triângulo, além de resultados evidentes. Conquistado o interesse dos alunos, tornou-se mais fácil introduzir outras propriedades mais complexas, como o Teorema da Linha e a Relação de Stifel.

Figura 28 - Alunos jogando, 2024



Fonte: Elaborado pelo autor

Observou-se que, nas primeiras partidas, os alunos não se preocupavam em esconder as representações de suas peças, mas com o decorrer das partidas começaram a compreender quais seriam as melhores jogadas de acordo com as peças que possuíam em comparação com as que os colegas, competidores no jogo, possivelmente poderiam possuir. Então, surgiram a competição e as articulações, estratégias para melhorar as chances de vencer. Quanto à competição, segundo a Teoria de Piaget, citada por Figueira (2022, p. 3) “a competição nos jogos é parte de um desenvolvimento maior, que vai do egocentrismo a uma habilidade cada vez maior em descentralizar e coordenar pontos de vista”. Segue registros fotográficos do uso do jogo em 2024 agrupadas nas figuras 29 e 30.

Figura 29 - Fotos dos Jogos Completando o Triângulo de Pascal, 2024



Fonte: Registro do auto

Figura 30 - Jogo Completando o Triângulo de Pascal, 2024



Fonte: Registro do autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como recursos didáticos, com destaque para jogos relacionados aos objetos de conhecimento trabalhados nas escolas são escassos, mais ainda quando se fala em ensino médio, surge a necessidade do professor ser criativo, estudar continuamente em busca de inovações e meios que contribuam no processo de ensino e aprendizagem. O Jogo Completando o Triângulo de Pascal apresenta-se como um recurso didático importante. No entanto, para usar o jogo, é necessário que o aluno possua conhecimentos básicos e prévios sobre o Triângulo Pascal e Números Binomiais. Portanto, o jogo não substitui todas as aulas sobre esses assuntos que o professor lecionaria sem o jogo, mas passa a complementá-las.

Nesse sentido, o jogo não é uma ‘chave milagrosa’ que resolverá todos os problemas de aprendizagem relacionados a esses objetos de conhecimento entre outros relacionados, mas pode ser utilizado de forma adequada em momentos oportunos para complementar o aprendizado. O professor deve ajustar as regras de acordo com as necessidades da turma e fazer as intervenções adequadas quando necessário para obter os melhores resultados. Cabe ao professor a maior responsabilidade: a de decidir se vai usar o jogo, quando usá-lo, incluí-lo no planejamento, adaptá-lo (ou não) de acordo com as necessidades e objetivos.

Mas, pela nossa experiência, o uso do jogo pode proporcionar ganhos em diversos aspectos. Por exemplo: Pode tornar as aulas mais atraentes do que aulas as aulas tradicionais baseadas apenas em exposições teóricas e resolução de exercícios; proporcionar a participação ativa do aluno na construção do conhecimento obtendo um aprendizado de maior qualidade comparado ao tradicional que é baseado na mera transmissão de conhecimento através da memorização.

Portanto, espera-se que essa experiência seja socializada com outros professores e que possam replicá-las a seu próprio modo, ajustá-las se necessário, e aplicá-las em suas aulas, de acordo com as necessidades de suas turmas. Isso pode resultar em aulas mais dinâmicas e prazerosas, onde os alunos gostem de participar, aprendam de forma mais descontraída, e não apenas por obrigação.

A educação é um caminho onde cada um coloca tijolinhos, que podem ser da mesma altura dos já colocados e manter o que já conhecemos para as novas gerações, ou podem ser colocados tijolinhos camadas à cima, instigando a busca pelo

novo e pela descoberta. Exemplifica-se: as aulas podem ser apenas uma reprodução do que já existe, algo que não atrai muito os alunos, pois já são inundados de informações todos os dias, ou podem ser mais do que apenas transmissão de informações, com algo que os toquem, que os integre ao meio e que os façam ser ativos (participantes) na construção do seu próprio conhecimento; ninguém quer ser só espectador a vida toda, querem também colocar a mão na massa, o jogo é um recurso importante nesse sentido. Aí, aparece um problema ao professor, o de ajustar aos objetivos já consolidados nos currículos de ensino, daí a responsabilidade e expertise do professor de não se acomodar e conseguir inovar com novos recursos as suas aulas.

O jogo tem esse poder de integração. O grande desafio do uso de jogos é que, a escola, por oferece um ensino sistematizado, que deve levar em consideração o currículo, flexível, mas não é livre. Portanto, o jogo deve ser escolhido, desenvolvido ou ajustado de forma que atenda esse sistema.

Ir à escola não é necessariamente divertido. Por isso, é necessário que os professores busquem meios que possam tornar a jornada do aluno mais prazerosa e integradora.

Por fim, desejo a todos, sucesso na empreitada da inovação, que possam enriquecer suas aulas, que sejam dinâmicas e integrativas, que os alunos gostem e aprendam de forma prazerosa e não por obrigação.

REFERÊNCIAS

ALVES, Eva Maria Siqueira. **A ludicidade e o ensino da matemática: Uma prática possível** / Eva Maria Siqueira Alves – Campinas, SP: Papyrus, 2001. – (Colegial Papyrus Educação)

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacional da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 19 mar. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. [S. l.], 2017. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal.pdf. Acessado em: 19 mar. 2024.

BOYER, B. Carl. **História da matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

CERDÁ, E; Péres, J e Jimeno, J. L. **TEORÍA DE JUEGOS PEARSON EDUCACIÓN**, S.A., Madrid, 2004.

CÓRES, Fernando Cunha. **Argumentos Combinatórios para identidade envolvendo números binomiais, de Fibonacci e de Lucas**. 2014. 80 f., il. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIRA, Wellyngton Rocha; SANTOS, Carla Cristina Rodrigues; SANTOS, Bruna Pinheiro dos; LIMA, Maria de Fátima dos Santos Moraes; QUEIROZ, Gisele Agostinho da Silva; LOPES, Terezinha de Jesus Rosa. Teoria e prática: A metodologia dos jogos para o ensino de Matemática. **Research, Society and Development**, v. 11, n. 13, e393111335480, 2022; (CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i13.35480>.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **CÍRCULOS MATEMÁTICOS: A experiência Russa**. Direitos cedidos ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA para essa edição. Primeira Edição. Rio de Janeiro, RJ, 2015.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: V. 5. (Combinatória e Probabilidade), 5ª ed. São Paulo, SP. Atual Editora, 1985.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. Coleção Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, RJ: 7ª Ed. SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas. Coleção do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro. SBM. 2010.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro, RJ. 3ª Ed. SBM. 2022.

PAZ, Vinicyus Alves da Silva. **A utilização do dominó no auxílio do ensino do triângulo aritmético.** 2016/ Vinicyus Alves da Silva Paz. (Dissertação de Mestrado submetida ao colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz). Ilhéus-BA: UESC, 2016. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=2876&id2=150110159. Acesso em: 19 mar. 2024.

PSICOLOGIA-ONLINE (C/ Jordi de Sant Jordi, 11, Bajos, 08027 Barcelona, Espanha). Psicologia-Online (ed.). Psicologia Cognitiva: A teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget. *In*: PSICOLOGIA-ONLINE (C/ Jordi de Sant Jordi, 11, Bajos, 08027 Barcelona, Espanha). Psicologia-Online (ed.). **Psicologia Cognitiva: A teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget.** [S. l.]: Equipe Editorial, 21 maio 2020. Disponível em: <https://br.psicologia-online.com/a-teoria-do-desenvolvimento-cognitivo-de-piaget-426.html>. Acesso em: 4 jun. 2024.

SARTINI, Brígida Alexandre; GARBUGIO, Gilmar; BORTOLOSSI, Humberto José; SANTOS, Polyane Alves e BARRETO, Larissa Santana. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos.** II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004.

SILVEIRA, J. F. Porto da. **O triângulo de Pascal é de Pascal?** Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>. Acesso em: 03 mar. 2024.

Site: <https://brainly.com.br/tarefa/19490867>. Acesso em: 02 abr. 2024.

____: <https://matematicaeg.blogspot.com/p/julho.html>. Acesso em: 02 abr. 2024.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. **ANÁLISE COMBINATÓRIA: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA.** VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SBEM. Universidade Federal de Pernambuco, 15 a 18 de julho de 2004. Disponível em: <https://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acessado em 01 de agosto de 2024.

ANEXO I – Teoria dos Jogos: O DILEMA DO PRISIONEIRO

O Dilema do Prisioneiro foi apresentado, inicialmente, “por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário de psicologia na Universidade de Stanford, para ilustrar a dificuldade de se analisar certos jogos” (Sartini *et al.*, 2004, p. 6).

A situação é a seguinte: Dois criminosos, Al e Bob, são presos, mas não havia provas suficientes para mantê-los presos por mais de um ano, por isso deveriam confessar os crimes. Então, foram colocados em celas separadas. O delegado fez as propostas aos dois em separado: Se não confessassem ficariam presos por um ano; se um cooperar, confessando e o outro não, o que colaborou com a justiça, seria libertado e o que não confessou seria condenado a 10 anos na prisão; se ambos confessassem, a delação não teria tanto valor, e os dois teriam uma pena de 5 anos.

Vamos ver a estratégia dominante, cada prisioneiro deve avaliar o cenário: se não confessar ficará preso por um ano ou dez anos, se confessar poderá sair livre ou pegará cinco anos de cadeia. Veja que a estratégia dominante é confessar, mas os dois confessando não traz o melhor resultado, pois ambos ficarão presos por 5 anos, o melhor resultado a ambos seria não confessarem, pois nesse caso, cada um pegaria apenas um ano de cadeia. Não foi à toa que essa situação se chama dilema do prisioneiro.

Nem sempre a estratégia dominante proporciona o melhor resultado. Lembrando que, nesse caso se trata de um jogo onde os jogadores não conhece a decisão do outro. Existe o risco de não confessar e o outro confessar e ter que ficar dez anos na cadeia. Segue a visão de Bob, de acordo com Sartini:

Duas coisas podem acontecer: Bob pode confessar ou Bob pode negar. Se Bob confessar, então é melhor para mim confessar também. Se Bob não confessar, então eu fico livre se eu confessar. Em qualquer um dos casos, é melhor para mim confessar. Então, eu confessarei. (Sartini *et al.*, 2004, p. 8).

A situação mostra que a estratégia dominante de Bob é confessar, a mesma visão pode ser aplicada a Al. Como não existe motivação para mudarem a decisão, o resultado $(-5, -5)$ isso é chamado de equilíbrio de Nash.

Na Teoria dos Jogos podemos representar o Dilema do Prisioneiro do seguinte modo:

- Conjunto de jogadores:
 $G = \{\text{Bob, Al}\}$
- Conjunto S de estratégias dos jogadores:
- $S_{\text{Al}} = \{\text{confessar, negar}\}$ e $S_{\text{Bob}} = \{\text{confessar, negar}\}$
- Produto cartesiano das estratégias:
 $S = \{(\text{confessar, confessar}), (\text{confessar, negar}),$
 $(\text{negar, confessar}), (\text{negar, negar})\}$
- Duas funções utilidades: $u_{\text{Al}}: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_{\text{Bob}}: S \rightarrow \mathbb{R}$ e onde
 $u_{\text{Al}}(\text{confessar, confessar}) = -5$, $u_{\text{Al}}(\text{confessar, negar}) = 0$,
 $u_{\text{Al}}(\text{negar, confessar}) = -10$ e $u_{\text{Al}}(\text{negar, negar}) = -1$.
 $u_{\text{Bob}}(\text{confessar, confessar}) = -5$, $u_{\text{Bob}}(\text{confessar, negar}) = 0$,
 $u_{\text{Bob}}(\text{negar, confessar}) = -10$ e $u_{\text{Bob}}(\text{negar, negar}) = -1$.

Esses resultados foram descritos na tabela 1 de *payoffs*:

Tabela 1 - Resultados de *payoffs* do Dilema do Prisioneiro

		Bob	
		Confessa	Não confessa
Al	Confessa	(-5, -5)	(0, -10)
	Não confessa	(-10, 0)	(-1, -1)

Fonte: Sartini *et al.* (2004)

ANEXO II – Teoria dos Jogos: A BATALHA DOS SEXOS

A história resume a um homem e uma mulher onde o homem quer ir ao futebol, mas a mulher quer ir ao cinema; logo, se os dois forem ao futebol o homem ficará mais satisfeito que a mulher, mas se os dois forem ao cinema a mulher ficará mais satisfeita que o homem. Também poderiam tomar decisões diferentes, o homem ir ao futebol e a mulher ir ao cinema, mas não ficariam tão satisfeitos, pois não teriam a companhia um do outro. Nessa situação considerando homem h , mulher m , futebol f e cinema c , temos:

- Os jogadores: $G = \{g_h, g_m\}$
- Cada jogador possui um conjunto de estratégias: $S_h = \{s_{hf}, s_{hc}\}$ e $S_m = \{s_{mf}, s_{mc}\}$.
- Conjunto de resultados: $S = \{(s_{hf}, s_{mf}), (s_{hf}, s_{mc}), (s_{hc}, s_{mf}), (s_{hc}, s_{mc})\}$
- Funções utilidades:

Função utilidade do homem $u_h: S \rightarrow \mathbb{R}$ e função utilidade da mulher $u_m: S \rightarrow \mathbb{R}$ elas são descritas pela tabela de *payoffs* conforme tabela 2.

Tabela 2 - *Payoffs* da Guerra dos Sexos

		Mulher	
		Futebol	Cinema
Homem	Futebol	(10, 5)	(0, 0)
	Cinema	(0, 0)	(5, 10)

Fonte: Adaptado de SARTINI *et al.* (2004).

Os *payoffs* são os prêmios que os jogadores recebem, na teoria dos jogos são quantificados de acordo com a situação. Veja que a função utilidade tem como contradomínio um número real, então *payoffs* são números. Esses números são decididos de forma conveniente ou por julgamento das pessoas que estudam os casos. Por conveniência, podemos citar o Dilema do Prisioneiro, pois os números negativos representam algo ruim aos prisioneiros, o número de anos de reclusão, logo esses números podem representar tanto um ganho quanto uma perda, sem a necessidade de mudar a unidade. Já na batalha dos sexos, os números, *payoffs*,

foram escolhidos por alguém que estuda o jogo usando um julgamento de valor que, às vezes, é bem subjetivo, como foi o caso de valorizar a satisfação de cada um.

Conforme Sartini *et al.* (2004), os dois exemplos mostrados (Tabela 1 e Tabela 2) são de jogos do tipo normal, pois são estáticos e as ações ocorrem de forma simultânea ou os jogadores não sabem quais seriam as escolhas dos demais antes de fazer a própria jogada. Contudo, existem situações mais complexas, em que as decisões são tomadas de acordo com as decisões já tomadas, é como se fosse uma extensão dos casos estáticos. Ou seja, se depois de tomadas as decisões essas fossem conhecidas pelos demais jogadores, antes do jogo ter acabado, além disso as jogadas podem não ser simultâneas, é o caso do xadrez e jogo de cartas. Nesses casos é usada forma extensa de representação, mas não trataremos dela nessa dissertação.

Anexo III - Aplicações do PFC

Exemplo 1: “Quantos divisores inteiros positivos possui o número 720? Quantos divisores são pares? Quantos são ímpares? Quantos e quais são quadrados perfeitos?” (Morgado; Carvalho, 2022, p. 121 - adaptado).

Solução:

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ onde todas as associações dos fatores $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ são divisores de 720 em que $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$, $\gamma \in \{0, 1\}$.

Usando o PFC:

Há $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ maneiras de escolher os expoentes α , β e γ , portanto 30 divisores de 720.

Para que um número inteiro positivo seja par, basta que possua pelo menos um fat igual a 2, ou seja, nesse caso $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$, logo $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ são pares.

Para que os números sejam ímpares, não podem possuir fator par, isto é α só pode ser zero. Logo, o número de divisores ímpares é $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.

Os números são quadrados perfeitos quando podem ser escritos na forma a^{2k} com a natural, pois $a^{2k} = (a^k)^2$, isso implica que $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma = a^2$, para tanto, $\alpha \in \{0, 2, 4\}$, $\beta \in \{0, 2\}$ e $\gamma \in \{0\}$ devem ser pares, daí temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Os 6 quadrados perfeitos são:

$$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1;$$

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9;$$

$$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4;$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 36;$$

$$2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 16;$$

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 144.$$

Exemplo 2: “Quantos subconjuntos tem um conjunto de n elementos?” (Morgado; Carvalho, 2022, p. 121).

Segue que o conjunto vazio será representado por \emptyset .

i) Considerando um conjunto unitário $\{a_1\}$ existem dois subconjuntos:

$$\emptyset \text{ e } \{a_1\};$$

ii) Pensando em incluir mais um elemento a_2 e analisando as suas possibilidades em separado do conjunto $\{a_2\}$ tem-se os subconjuntos:

$$\emptyset \text{ e } \{a_2\};$$

Associando os resultados de (i) e (ii) temos:

$$\emptyset \text{ e } \emptyset \text{ obtemos } \emptyset$$

$$\emptyset \text{ e } \{a_2\} \text{ obtemos } \{a_2\}$$

$$\{a_1\} \text{ e } \emptyset \text{ obtemos } \{a_1\}$$

$$\{a_1\} \text{ e } \{a_2\} \text{ obtemos } \{a_1, a_2\}$$

Veja que os subconjuntos de $\{a_1, a_2\}$ são \emptyset , $\{a_2\}$, $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$ cardinalidade igual a 4, o que poderia ter sido obtido pelo PFC, pois são duas opções para o primeiro conjunto e duas para o segundo: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$.

Seguindo a mesma ideia, considerando que um conjunto de n elementos, pode ser entendido como a união de n conjuntos unitários disjuntos. Para cada um desses dois subconjuntos, pelo PFC o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$.

Exemplo 3: Considere uma bandeira composta por 5 faixas paralelas. Quantas são as possibilidades para pintar a bandeira, sabendo que se dispõe de quatro cores. Cada faixa deve ser pintada com uma única cor e as faixas adjacentes devem ser pintadas com cores distintas?

Solução:

Usando PFC, tomando as faixas como etapas na ordem da esquerda à direita, temos:

1ª faixa: 4 opções de cores, pois poderá ser usada qualquer uma das cores disponíveis.

2ª faixa: 3 opções de cores, visto que não pode ser da cor da 1ª faixa.

3ª faixa: 3 opções de cores, visto que não pode ser da cor da 2ª faixa.

4ª faixa: 3 opções de cores, visto que não pode ser da cor da 3ª faixa.

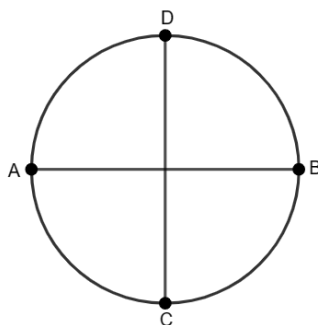
5ª faixa: 3 opções de cores, visto que não pode ser da cor da 4ª faixa.

Daí, o número de maneiras para pintar a bandeira é o produto

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324.$$

Exemplo 4: Seja um círculo dividido em quatro quadrantes, conforme figura 7.

Figura 31 - Círculo dividido em quatro setores.



Fonte: elaborado pelo autor

Dispondo de 5 cores distintas, quantas são as possibilidades para pintar os quatro quadrantes do círculo, cada um com uma única cor, em que os quadrantes que têm uma linha de limite, não podem ser pintados da mesma cor?

Solução:

Pelo PFC:

Escolhendo um quadrante qualquer e estabelecendo como 1º quadrante, sendo o 2º adjacente ao 1º e 3º, o 3º adjacente ao 2º e 4º, e por fim o 4º adjacente ao 3º e

ao 1°. A priori, parece simples, mas não se engane. Pois, para o 1° quadrante há 5 opções, 2° quadrante há 4 opções, 3° quadrante há 4 opções e para 4° quadrante temos um problema, pois entre os $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ modos para pintar até o 3° quadrante. Há uma parte em que 1° e 3° quadrantes possuem a mesma cor e o 4° quadrante teria 4 opções. Mas há também uma parte dos 80 modos, em que as cores são distintas e o 4° quadrante não podendo utilizar nenhuma dessas duas cores, restando 3 opções. Por isso, nesse problema melhor dividir em duas partes, sendo:

1ª parte: Os modos em que o 1° quadrante seria da mesma cor do 3° quadrante:

1° quadrante: 5 opções;

2° quadrante: 4 opções;

3° quadrante: 1 opção, pois terá que ser da mesma cor do 1°;

4° quadrante: 4 opções, pois seus adjacentes (1° e 3° quadrantes) foram pintados com a mesma cor e ainda restam 4 cores para a escolha.

Temos: $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 80$ modos em que 1° e 3° têm a mesma cor.

2ª parte: Os modos em que o 1° quadrante e o 3° quadrante teriam cores distintas:

1° quadrante: 5 opções;

2° quadrante: 4 opções;

3° quadrante: 3 opções, pois não será da cor do 2° por ser adjacente e nem da cor do 1°, pois estes já foram contados na 1ª parte.

4° quadrante: 3 opções, pois não pode ser das cores do 1° e nem do 3° e como estes foram pintados com cores distintas restam apenas três.

Temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ modos em que as cores dos 1° e 3° quadrantes são distintas.

Assim, todas as formas de pintar os quatro quadrantes do círculo são $80+180=260$ modos.

Exemplo 5: Dispondo de 26 letras do alfabeto, quantos crachás distintos podem ser confeccionados?

a) com duas letras?

Solução:

Usando o PFC temos 26 modos para escolher a primeira letra e 26 modos para escolher a segunda letra.

$$26 \cdot 26 = 26^2 = 676$$

Daí, podem ser confeccionados 676 crachás.

b) com duas letras distintas?

Solução:

Pelo PFC temos 26 escolhas para a primeira letra e 25 escolhas para a segunda letra:

$$26 \cdot 25 = 650$$

Com letras distintas são 650 crachás.

Também pode ser usado o Lema 2: Dois conjuntos de letras para formar subconjuntos de duas letras, mas com elementos distintos. Tem-se o produto de m elementos por $m-1$ elementos, no caso em questão: $26 \cdot 25 = 650$.

Considerações sobre o resultado:

Apenas por curiosidade e servindo para comprovar o resultado, veja que, esse resultado poderá ser confirmado usando o resultado do “item a”, pois como 676 são todos os casos, inclusive com letras repetidas, e se retirarmos esses casos (AA, BB, CC, ..., ZZ) obviamente 26 casos, obteremos $676 - 26 = 650$ o mesmo resultado.