UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rafael de Brito Alves Belo

Papercraft: Uma prática para o ensino da geometria no Ensino Médio

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rafael de Brito Alves Belo

Papercraft: Uma prática para o ensino da geometria no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edgar Corrêa de Amorim Filho

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Ana Catarina Macêdo –CRB-4 1781

B452p Belo, Rafael de Brito Alves
Papercraft: Uma prática para o ensino da geometria no Ensino Médio / Rafael de Brito Alves Belo. - Recife, 2024.
92 f.; il.

Orientador(a): Edgar Corrêa de Amorim Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências, anexo(s) e apendece(s).

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Geometria - Estudo e ensino 3. Trabalhos em papel I. Amorim Filho, Edgar Corrêa de, orient. II. Título

CDD 510

RAFAEL DE BRITO ALVES BELO

Papercraft: Uma prática para o ensino da geometria no ensino médio.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/08/2024

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Edgar Correa de Amorim Filho (Orientador) – UFRPE

____

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro– UFPE

____

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva – PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por me dar forças, sabedoria e orientação ao longo desta jornada acadêmica.

Aos meus pais, pelo amor, apoio incondicional e ensinamentos que foram fundamentais para minha formação pessoal e profissional.

A minha namorada, Camila, pelo amor, compreensão e suporte constantes que foram essenciais durante toda a realização deste trabalho.

Ao meu professor orientador, Edgar Corrêa de Amorim Filho pela paciência, dedicação e valiosas orientações que contribuíram imensamente para a realização deste trabalho.

À minha família, pelo constante apoio e compreensão durante todo o período de pesquisa e redação desta dissertação.

Aos meus amigos, que sempre me incentivaram e apoiaram, em especial, a Jaqueline Joviniano, Jhonata Willame, Marcos Castro e Douglas de Souza por sua amizade e apoio inestimável.

À CAPES, pelo suporte financeiro que viabilizou a realização desta pesquisa.

Ao Profmat-UFRPE, pelo programa de excelência e pelas oportunidades de aprendizado proporcionadas.

E, por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

Esse trabalho explora a eficácia do uso de papercraft como ferramenta pedagógica no ensino da geometria para alunos do terceiro ano do ensino médio. O estudo investiga como atividades práticas envolvendo papercraft, mediadas pelo professor, podem melhorar a compreensão dos conceitos geométricos e o desempenho dos alunos. A avaliação inclui o desempenho em teste bimestral, comprometimento, trabalho em grupo, assiduidade e frequência dos alunos. O estudo foi realizado com uma turma do terceiro ano em uma escola pública. O processo iniciou-se com a elaboração de atividades que envolvem a construção de modelos geométricos usando papercraft. As atividades foram projetadas para serem realizadas em grupo, com o professor atuando como mediador, orientando e facilitando a construção dos modelos e mostrando à relação desses modelos com a geometria. Os resultados mostraram um desempenho significativo dos alunos no teste bimestral após a implementação das atividades com papercraft. Além disso, os alunos demonstraram maior comprometimento e interesse nas aulas de geometria. O trabalho em grupo proporcionou um ambiente colaborativo que favoreceu a troca de ideias e o aprendizado em conjunto. A assiduidade e a frequência dos alunos também foram elevadas, indicando um maior interesse e envolvimento nas atividades. A pesquisa concluiu que o uso do papercraft como material didático fpi eficaz no ensino de geometria no terceiro ano do ensino médio. A mediação do professor e a abordagem prática das atividades promoveram um aprendizado mais ativo e significativo. A avaliação abrangente, que considerou múltiplos aspectos do desempenho dos alunos, confirmou a eficácia da metodologia empregada, sugerindo que o papercraft pode ser uma estratégia valiosa para o ensino de geometria.

Palavras-chave: Ensino; geometria; *papercraft*; atividades.

Abstract

This work explores the effectiveness of using papercraft as a pedagogical tool in teaching geometry to third-year high school students. The study investigates how practical activities involving papercraft, mediated by the teacher, can improve students' understanding of geometric concepts and performance. The evaluation includes performance in a bimonthly test, commitment, group work, attendance and attendance of students. The study was carried out with a third year class in a public school. The process began with the development of activities that involve the construction of geometric models using papercraft. The activities were designed to be carried out in groups, with the teacher acting as mediator, guiding and facilitating the construction of the models and showing the relationship between these models and geometry. The results showed significant student performance in the bimonthly test after implementing the papercraft activities. Furthermore, students demonstrated greater commitment and interest in geometry classes. Group work provided a collaborative environment that favored the exchange of ideas and learning together. Student attendance and attendance were also high, indicating greater interest and involvement in activities. The research concludes that the use of papercraft as teaching material is effective in teaching geometry in the third year of high school. The teacher's mediation and practical approach to activities promoted more active and meaningful learning. The comprehensive evaluation, which considered multiple aspects of student performance, confirmed the effectiveness of the methodology used, suggesting that papercraft can be a valuable strategy for teaching geometry.

Keywords: Teaching; geometry; papercraft; activities.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O ensino da geometria tem sido um desafio recorrente no cenário educacional, frequentemente marcado por baixos índices de rendimento escolar. Em um contexto em que a educação tradicional muitas vezes não consegue engajar os estudantes, torna-se essencial explorar metodologias alternativas que promovam um aprendizado mais ativo e participativo.

Uma dessas metodologias é o uso do papercraft como material didático, que se mostra uma ferramenta eficaz para transformar o ensino da geometria.

O papercraft, uma técnica de construção de modelos tridimensionais utilizando papel, oferece uma abordagem prática e interativa que pode revitalizar o ensino de conceitos geométricos. Ao integrar o papercraft em uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem, onde o aluno é o protagonista do processo e o professor atua como mediador, cria-se um ambiente de aprendizado dinâmico e envolvente. Esta abordagem não apenas facilita a compreensão dos conceitos geométricos, mas também estimula a criatividade, a colaboração e o pensamento crítico dos estudantes.

A proposta desta dissertação surge como resposta aos desafios enfrentados no ensino da geometria. Estudos têm demonstrado que a aplicação de metodologias ativas, como o papercraft, pode resultar em melhorias significativas no rendimento escolar, na disciplina, no interesse e na frequência dos alunos. Ao proporcionar uma experiência de aprendizagem prática e lúdica, o papercraft tem o potencial de tornar a geometria mais acessível e atraente para os estudantes, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura dos conteúdos.

O baixo rendimento escolar, a indisciplina, o desinteresse e a baixa frequência são problemas críticos que afetam a qualidade do ensino e a aprendizagem da geometria. Métodos tradicionais de ensino, muitas vezes focados em abordagens teóricas e abstratas, falham em capturar a atenção dos alunos e em estimular seu engajamento. Neste cenário, o uso do papercraft como material didático se destaca como uma estratégia inovadora para enfrentar esses desafios.

A prática do papercraft envolve os alunos em atividades manuais que requerem concentração, precisão e criatividade, características que naturalmente promovem um ambiente de aprendizagem mais disciplinado e focado. Além disso, ao construir modelos geométricos, os alunos visualizam e manipulam conceitos abstratos de forma tangível, o que desperta seu interesse e facilita a compreensão dos conteúdos. Essa abordagem prática e interativa também contribui para aumentar a frequência escolar, uma vez que os alunos se sentem mais motivados a participar das aulas e a se envolver nas atividades propostas.

Esta dissertação tem como principal objetivo investigar o impacto do uso do papercraft como material didático no ensino da geometria, dentro de uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem. Especificamente, busca-se: analisar o efeito do papercraft no rendimento escolar dos alunos em geometria; avaliar a influência do papercraft na disciplina e no comportamento dos alunos durante as aulas; investigar o impacto do papercraft no interesse e na motivação dos alunos para aprender geometria e examinar a relação entre o uso do papercraft e a frequência escolar dos alunos.

A principal intervenção proposta é o ensino da geometria utilizando o papercraft como material didático, aplicada durante quatro atividades específicas. Essas atividades foram cuidadosamente planejadas para abordar diferentes conceitos geométricos, proporcionando aos alunos oportunidades diversas para explorar, construir e refletir sobre a geometria de maneira prática e envolvente. A expectativa é que esta abordagem contribua significativamente para a melhoria dos resultados educacionais e para o desenvolvimento de competências essenciais nos estudantes.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como foco sondar estudos realizados por outros pesquisadores sobre ensino, em especial aqueles que se relacionaram ao desenvolvimento do ensino da Geometria. Para estudo da Geometria, foram utilizados alguns trabalhos e livros específicos em cada seção e subseção para facilitar a busca e a organização dos conhecimentos estudados.

1.1 ENSINO DA GEOMETRIA

Como parte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) da educação básica, a geometria é um componente que requer um tratamento cuidadoso na sala de aula.

De acordo com a BNCC, a geometria clássica é crucial para a formação de cidadãos capazes de compreender e analisar criticamente o mundo ao seu redor. O estudo da geometria incentiva os alunos a examinar, descrever e representar formas, identificar suas características, estabelecer relações espaciais e resolver problemas relacionados ao espaço.

Além disso, a BNCC enfatiza a interdisciplinaridade como uma estratégia de ensino da geometria, conectando-a com outras áreas do conhecimento, como artes e ciências da natureza, para facilitar uma aprendizagem mais aplicada e significativa. Ainda assim, embora a geometria seja considerada importante no currículo, ainda há muitos desafios que impedem sua implementação eficaz. Estes incluem a falta de recursos didáticos adequados, a abstração de conceitos geométricos e a necessidade de formação contínua dos professores para adotar métodos eficazes.

Como resultado, a base curricular visa desenvolver competências específicas em matemática e suas tecnologias para melhorar a interpretação e compreensão das unidades de conhecimento em seu campo. A unidade de Geometria do Ensino Médio descreve essas habilidades, que incluem as seguintes competências:

[EM13MAT201] Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

[EM13MAT307] Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

[EM13MAT105] Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

[EM13MAT308] Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

[EM13MAT309] Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

[EM13MAT504] Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

[EM13MAT505] Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

[EM13MAT506] Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

[EM13MAT509] Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Como este conteúdo é baseado em elementos geométricos, os professores precisam usar uma metodologia que vai além de uma explicação clara e precisa. É necessário descobrir maneiras de representar de forma consistente planos e sólidos geométricos bidimensionais e tridimensionais, bem como desenvolver um trabalho sobre aqueles que abordam de forma equilibrada as representações gráficas e algébricas, enfatizando a importância de cada uma delas.

Como o livro didático e o quadro são instrumentos limitados principalmente no que diz respeito à representação visual, aplicar uma prática que transita fluentemente entre as várias representações da geometria é um grande desafio para o professor. Os livros, embora tenham ilustrações de alta qualidade, são limitados a um plano bidimensional e o aprendizado por eles depende exclusivamente de habilidades visuais do discente. Além disso, há um problema adicional com os livros matemáticos: eles geralmente apresentam conceitos matemáticos de forma pronta e enfatizam o uso de fórmulas. Assim, o professor é induzido a uma prática que prioriza a parte algébrica do conteúdo.

Com isso, percebemos que o uso dos instrumentos básicos da metodologia tradicional é insuficiente para garantir que o ensino da geometria ocorra de forma efetiva. Portanto, faz-se necessária uma busca por metodologias que favoreçam o ensino deste conteúdo no sentido de, não somente apresentar formas geométricas de maneira facilmente compreensível, mas fortalecer o elo entre representação gráfica e algébrica, proporcionando ao aluno uma experiência significativa.

O desenvolvimento cognitivo dos alunos é o principal indicador do processo de ensino e aprendizagem. Para que os professores possam acompanhar adequadamente o desenvolvimento dos alunos, é necessário estudar e pesquisar as teorias do desenvolvimento cognitivo. Uma das principais teorias é a teoria de Jean Piaget, pois tem grande influência no mundo da educação (RIZKY; SRITRESNA, 2021).

Segundo, essa teoria, o desenvolvimento das formas de pensar desde a infância até a idade adulta inclui o período sensório-motor (0-2 anos), as crianças nesta fase vivenciam seu período por meio do movimento, maximizando os sentidos e a invariância dos objetos de aprendizagem; pré-operatório (3-6 anos), a criança inicia com habilidades motoras; na fase das operações concretas (7-12 anos), as crianças iniciam com o pensamento lógico, e nas operações formais (13-17 anos), a existência do raciocínio abstrato (LISNANI; ASMARUDDIN, 2018).

Marinda (2014) relata que, no estágio operacional formal, os jovens pensam de forma mais abstrata, lógica e ideal na resolução de problemas. O raciocínio formal é caracterizado pela capacidade de pensar ideias abstratas, organizar ideias e pensar no que acontecerá a seguir. Os discentes na fase de operações formais do problema podem fazer suposições ou hipóteses (NURFADILAH; AFRIANSYAH, 2022). Porém, foi verificado com base na experiência de pesquisadores e professores que alunos do ensino médio podem apresentam dificuldades no aprendizado da Matemática e, em especial, no conteúdo de geometria e, um dos fatores que está relacionado as dificuldades de aprendizagem dos alunos em matemática se deve às características abstratas da matemática, já que alguns alunos podem não ter alcançado com êxito o estágio operacional formal (AROFAH; NOORDYANA, 2021).

David Paul Ausubel (1918-2008), um psicólogo americano dos campos da educação, das ciências cognitivas e da ciência da aprendizagem educacional, influenciado pela teoria de aprendizagem de Jean Piaget, explicou que "As pessoas adquirem conhecimento principalmente sendo expostas diretamente a ele, e não por meio da descoberta". Segundo à teoria cognitiva de Ausubel, a concepção de aprendizagem significativa é como um processo através do qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Assim, aprender significativamente é quando a nova informação se estabelece em conceitos ou proposições relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel destacou que a recepção também se torna significativa pelo uso apropriado de diferentes técnicas de ensino e o método de descoberta mal administrado também promove a memorização mecânica. Logo, Ausubel afirmou que a apresentação adequada dos materiais e dos conteúdos didáticos é fundamental (ADHIKARI, 2020).

De acordo com esse ponto de vista, para que o processo de ensino e aprendizagem da geometria seja verdadeiramente significativo, os alunos devem ter a capacidade de estabelecer um sistema de relações entre a prática cotidiana e a construção do conhecimento. Novamente, é enfatizado o papel transformador do professor na promoção de um método de ensino que valorize o "fazer matemática", ou seja, fazê-lo com compreensão.

Nesse contexto, Igliori *et. al.* (2018), propuseram um estudo das formas geométricas com o auxílio da plataforma do WordPress. Essa plataforma oferece um ambiente de orientação aberto e permanente, baseado em textos e estudos sobre educação matemática, e fornece conteúdo matemático por meio de vídeos, podcasts, objetos de aprendizagem, micromundos e outros recursos. Um ambiente construído no WordPress pode estabelecer relações entre pesquisadores e professores de matemática no ensino fundamental e médio, além de promover a divulgação de atividades e permitir que os professores usuários usem os recursos em sua prática profissional. Além disso, permite que os pesquisadores colaborem entre si, sugerindo mudanças, atualizações e/ou ampliações usando as ferramentas de feedback disponíveis. Os autores basearam seus estudos na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. O trabalho, também, sugeriu a manipulação dos modelos virtuais de sólidos geométricos com o geogebra, como ferramenta complementar facilitadora da aprendizagem.

Segundo o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, a aprendizagem da geometria se fundamenta em níveis de compreensão do conteúdo estudado, conforme os níveis:

1º Nível - Reconhecimento: Identificação, nomenclatura e comparação de figuras geométricas, com base em seu aspecto global. “Nível visual”;

2º Nível - Análise: Análise de figuras e conceitos geométricos inclui o reconhecimento de suas partes e características, bem como o uso dessas partes e características para resolver problemas. “Nível descritivo”;

3° Nível - Síntese ou Abstração: Definições de argumentos lógicos informais, definições precisas, compreensão de que algumas propriedades podem derivar de outras, conhecimento de classes de figuras. “Geometria de acordo com Euclides”;

4° Nível - Dedução: Domínio da dedução e seus significados, demonstrações, axiomas, postulados e teoremas, afirmação e recíproca. “Estudo das leis da lógica”

5º Nível - Rigor: Estudo e rigor nas demonstrações. Estabelecem-se teoremas formais no plano abstrato, em diferentes sistemas. "Natureza das leis da lógica"

Van Hiele diz que os sujeitos passam por esses níveis, cada um dos quais depende do anterior. Ausubel explicou que a construção dos primeiros "subsunçores" ocorre após os encontros em que os alunos adquirem conhecimento específico. A assimilação é o processo pelo qual um conhecimento é absorvido por outro conhecimento relevante na estrutura cognitiva do aluno (IGLIORI *et al.*, 2018).

Vários estudos foram propostos na literatura com o objetivo de tornar a aprendizagem da geometria significativa, lúdica e atrativa.

Brito et. al. (2021) estudaram o impacto do uso da simulação digital por meio do programa geogebra na aprendizagem e no desempenho escolar de alunos do 9º ano em Geometria Espacial. Foi realizado um estudo prático com grupo controle e grupo experimental, na qual foram propostos pré-teste e pós-teste. A análise de covariância dos resultados do pós-teste pelos resultados do pré-teste revelou uma melhoria significativa no desempenho escolar dos alunos do grupo experimental em relação aos estudos dos sólidos e das fórmulas associadas ao cálculo do volume e área superficial. Além disso, as opiniões positivas dos estudantes sugeriram que a pesquisa promoveu a ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Yang e Yin (2016) investigaram o uso da simulação digital de origami no desenvolvimento do raciocínio geométrico de alunos do 6ºn ano. Foi determinado um grupo controle com aplicação de pré e pós-testes, verificou-se uma melhoria significativa no raciocínio geométrico e no desempenho acadêmico, mostrando que a estratégia é promissora em relação ao processo de ensino e aprendizagem de geometria abordada na pesquisa.

Segundo Herrera *et. al.* (2019), as habilidades de visualização e orientação espacial de figuras tridimensionais dos alunos com o uso de ferramentas 3D; especificamente, com realidade aumentada, ambientes virtuais e impressão 3D foram favorecidas significativamente. Isto permitiu aos pesquisadores apresentar aos alunos uma forma natural de modelar fenômenos do mundo real com linguagem matemática adequada, conseguindo assim um aumento significativo na aprendizagem da matemática. Testes com grupos controle e experimental foram realizados ao longo de quatro anos, e foram analisadas as notas finais dos alunos, as taxas de reprovação e o desenvolvimento das habilidades de visualização. Estudantes e professores de diversos países foram entrevistados e questionados para avaliar a percepção e experiência no uso dessas ferramentas. Foi realizada uma análise de variância com uma amostra de $N = 993$ alunos e nível de significância $= 0{,}01$, constatando que as notas do grupo experimental ficaram sete pontos acima das notas do grupo controle (numa escala de 0 a 100) e a taxa de reprovação caiu 14%. Além disso, no teste de habilidades matemáticas espaciais com uma amostra de $N = 442$ alunos, o grupo experimental obteve 15 pontos a mais que o grupo de controle, e o percentual de alunos que atingiram o nível mínimo de habilidades espaciais necessário para passar no curso aumentou em 36%.

Concluíram-se que os resultados revelaram um impacto positivo no uso dessas ferramentas para desenvolver habilidades matemáticas espaciais.

O trabalho desenvolvido por Gumieri (2018), teve como propósito a investigação dos conceitos geométricos sobre ângulos internos e externos de polígonos regulares e aplicação prática do ladrilhamento dos polígonos regulares no ensino fundamental, bem como a manipulação das peças que formam os ladrilhamentos, de maneira que se permitisse contextualizar o conteúdo teórico, consolidando-o sob o ponto de vista prático através da construção de um ladrilhamento com a finalidade de motivar os alunos a participarem ativamente da aula. Notou-se que os alunos ajudavam uns aos outros no ladrilhamento. Através dessas atividades em que o aluno se sente à vontade, o simples fato de brincar com as peças faz com que ele esteja aprendendo a conviver em grupo de forma a desenvolver o aspecto afetivo, social e cognitivo, motivando e conduzindo a uma aprendizagem autônomo, dinâmica e significativa. Segundo o questionário de opiniões respondido pelos alunos, o autor concluiu que a proposta realizada foi satisfatória e se mostrou um instrumento promissor para o ensino da Geometria.

A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo de forma significativa e que proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, e à construção saber, nos leva a propor a inserção do *papercraft* no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino, espaços lúdicos de aprendizagem.

1.2 GEOMETRIA

O ensino da geometria é essencial para desenvolver a compreensão das formas, medidas e relações espaciais, além de entender conceitos como polígonos e poliedros, promovendo o raciocínio lógico e a visualização plana e espacial das figuras.

Métodos práticos e interativos, como atividades de construção e resolução de problemas, são eficazes para engajar os alunos, tornando o aprendizado da geometria uma experiência dinâmica e aplicável em diversos contextos. Nesta parte, exploraremos as bases da geometria e sua importância no desenvolvimento do pensamento matemático. Neste trabalho, utilizaremos como base os livros da coletânea: Fundamentos de matemáticas elementar, volumes 9 e 10. (DOLCE; POMPEO, 2013a; DOLCE; POMPEO, 2013b)

1.2.1 Noções Básicas de Geometria

A geometria está por toda parte, sendo possível observamos inúmeras formas geométricas regulares e irregulares. Essa área passou por grandes processos de transformação, desde a geometria clássica até a geometria dos dias atuais. A geometria se dedica a questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, dividindo-se em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas. (GUMIERI, 2018)

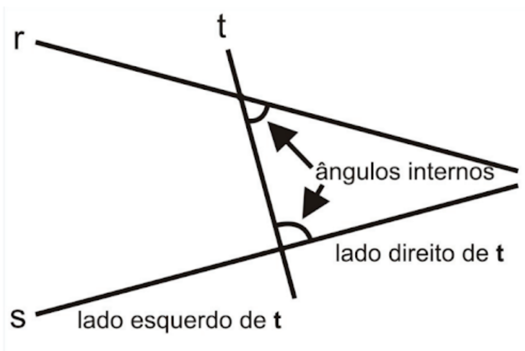
A palavra "geometria" vem do grego *geometrein* (geo, "terra", e metrein, "medida"), etimologicamente significando a ciência de medição da terra (Gorodski, 2009).

A Geometria ajudou a humanidade a entender melhor o mundo que nos cerca, cheio de formas espaciais diferentes. Euclides foi o maior estudioso dessa área. Seu livro mais conhecido, Os Elementos, contém uma lista de axiomas e postulados que serviram de base para a construção da Geometria Euclidiana, que é o foco deste estudo.

Na Grécia antiga, axioma significava, ao que tudo indica, uma verdade geral que se aplica a todos os campos de estudo, enquanto postulado significava uma verdade específica de um campo de estudo específico. Em matemática atual, não é comum distinguir entre esses conceitos. Ao escrever Os Elementos, Euclides assumiu cinco axiomas.

Axiomas: (I) De qualquer ponto pode-se conduzir uma reta a qualquer ponto dado; (II) Qualquer segmento de reta pode ser prolongada indefinidamente em uma linha reta; (III) Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e qualquer raio; (IV) Qualquer ângulo reto é igual; (V) Se uma reta corta duas outras retas e forma ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois retos, as duas retas encontrar-se-ão, se prolongadas até o infinito, na parte em que os ângulos são menores que dois retos.

Figura 1 – Ilustração Gráfica do 5º axioma



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

Na ilustração gráfica, mostrada na Figura 1, podemos verificar que os dois ângulos internos (situados entre as retas r e s) representados, somam menos do que dois ângulos retos do lado direito da reta t, portanto o 5° axioma afirma que, se as retas r e s forem prolongadas, elas irão se encontrar desse lado.

Euclides construiu a geometria plana usando o método axiomático e conseguiu deduzir 465 proposições com apenas 5 axiomas.

A Geometria Euclidiana estabelece regras claras para o estudo das propriedades das figuras planas e sólidas que podem ser observadas nos plano ou no espaço.

De acordo com Barbosa (2012), a Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo, parte-se com certos conjuntos de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, os quais são conhecidos como axiomas.

A Geometria Euclidiana está embasada em cinco axiomas, e através destes axiomas foram construídos todos os teoremas e conceitos geométricos que são utilizados até os dias de hoje. Conceitos geométricos sobre polígonos, ângulos internos e externos de polígonos regulares e a combinação de padrões podem ser abordados quando trabalharmos com o *papercraft*.

1.2.1.1 Ponto, reta e plano

A Geometria Euclidiana tem como elementos básicos: o ponto, a reta e o plano, os quais são denominados "entes primitivos", ou seja, são aceitos sem definição, já que cada um desses entes está fundamentado em conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

Para exemplificar, temos as considerações sobre ponto, reta e plano, segundo Pereira, 2023:

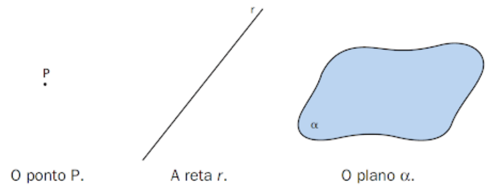
Ponto: O ponto é um objeto sem definição, dimensão ou forma. Como resultado, não é possível identificar qualquer medida, como comprimento, largura, altura, área ou volume, nele. Como toda a Geometria é baseada no ponto, as figuras geométricas são formadas a partir de conjuntos deles. A notação de ponto é normalmente escrita em letras maiúsculas da língua latina.

Reta: Retas são conjuntos de pontos que são considerados linhas infinitas sem curvas. Embora sejam compostos por pontos, não possuem nenhuma definição além dessa característica. Trata-se de um objeto com uma única dimensão. As letras minúsculas latinas são usadas para marcar uma reta.

Plano: Objeto composto de infinitas retas, possuindo duas dimensões. Geralmente, denota-se um plano por letras minúsculas gregas.

Podemos representar, graficamente, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Notações gráficas de ponto, reta e plano



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

O estudo de geometria plana começa com alguns postulados relacionando o ponto, a reta e o plano.

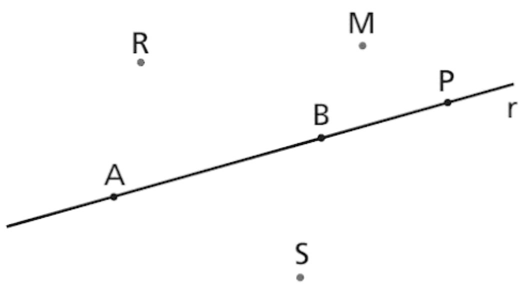
- **Postulado da existência**

  a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;

  b) Num plano há infinitos pontos. É importante frisar que a expressão “infinitos pontos” significa “tantos pontos quanto quisermos.

Uma reta será definida a partir de quaisquer dois de seus pontos, A Figura 3 representa uma reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, sendo que: A, B e P estão em r, ou seja, a reta r passa por A, B e P, e indicamos A $\in$ r, B $\in$ r, P $\in$ r e R, S e M não estão em r, ou seja, r não passa por R, S e M, e indicamos R $\notin$ r, S $\notin$ r, M $\notin$ r.

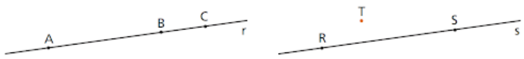
Figura 3 – Representação da reta r e os pontos A, B, P, R, S e M.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

Os pontos são chamados de colineares quando estão sobre uma mesma reta, caso contrário, são chamados de não colineares, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Representação da reta r com pontos A, B e C colineares e da reta s com pontos R, S e T não colineares.

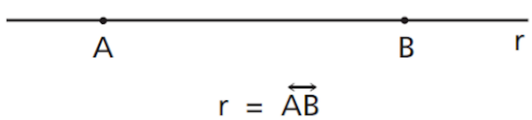


Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

- **Postulado da determinação**

  a) **Da reta**: Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles. Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$, conforme a Figura 5. Sendo, $(A \neq B,\ A \in r,\ B \in r)$ r = $\overleftrightarrow{AB}$.

  Figura 5 – A reta r

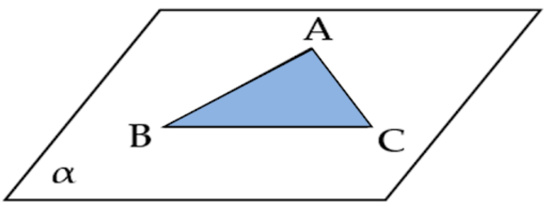
  

  Fonte: Autor, 2024.

  A expressão “duas retas coincidentes” é equivalente a “uma única reta”.

  b) **Do plano**: Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles (Figura 6).

  Figura 6 – O plano α

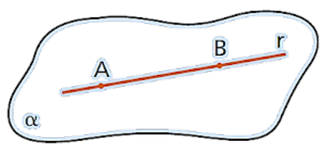
  Fonte: Autor, 2024.

  Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano α que indicamos por (A, B, C). O plano α é o único plano que passa por A, B e C.

- **Postulado da inclusão**

Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano (Figura 7).

Figura 7 – A reta r no plano α.



$$(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$$

Fonte: Autor, 2024.

Dados dois pontos distintos A e B de um plano α, a reta r $= \overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano. Os pontos que pertencem a um mesmo plano são chamados de pontos coplanares. Desse modo, na Figura 7, os pontos A e B são coplanares.

- **Segmento de reta e semirreta**

Segmento de reta: É parte de uma reta cujos extremos são pontos distintos dessa reta. Assim, dados A e B, A $\neq$ B, o segmento de reta AB (indicado por $\overline{AB}$), pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Segmento de reta AB

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre A e B}\}$$

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

Os pontos A e B são as extremidades do segmento $\overline{AB}$ e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento $\overline{AB}$. Se os pontos A e B coincidem (A = B), dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é um segmento nulo.

A medida de um segmento é um número real positivo associado a tal, chamado de comprimento.

Semirreta: é um conjunto de pontos que parte de um ponto dado e se prolonga indefinidamente, ou seja, dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada $\overrightarrow{AB}$). A Figura 9 representa a semirreta que se origina no ponto A e se prolonga indefinidamente no sentido de B.

Figura 9 – Semirreta AB ($\overrightarrow{AB}$)

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid B \text{ está entre A e X}\}$$

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

1.2.1.2 Ângulos

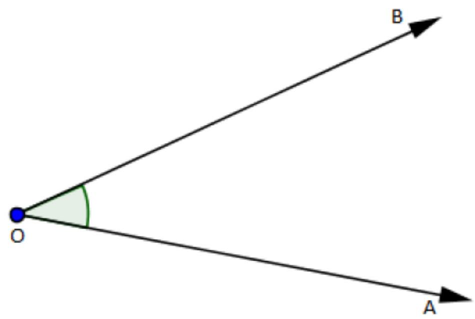
Os ângulos estão sempre presentes em nossa vida, mas quase nunca nos damos conta disso. Existem vários lugares onde podem ser encontrados, como paredes, ladrilhos, cantos de paredes, folhas de papel, portas, lousa e vários brinquedos.

Aplicações do conceito de ângulo estão presentes na Engenharia Civil, nos transportes, em equipamentos tecnológicos, nos projetos espaciais (como em lançamento de foguetes), nas cartas geográficas, entre outros usos. Logo, é de fundamental importância, conhecermos a definição de ângulos e suas classificações, pois muito desse conhecimento está presente na técnica de *papercraft* para obtenção de figuras tridimensionais que iremos trabalhar.

- **Definição de Ângulo:**

Segundo a definição de Barbosa (2012), um ângulo convexo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice. Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas (Figura 10).

Figura 10 – Ângulo AÔB



Fonte: Autor, 2024.

Vale salientar, que existem diferentes unidades de medida de ângulos, porém as mais utilizadas são: grau (°), radiano (rad) e grado (gr). A correspondência entre essas medidas é a seguinte: $180° = \pi$ rad $= 200$ gr. A medida de graus ainda é subdividida em minutos (‘) e segundos (“), na base hexadecimal.

Neste estudo iremos utilizar a medida mais usual, que é o Grau representado pelo símbolo (°).

- **Classificação dos ângulos**

Um ângulo pode ser classificado de acordo com a sua medida, um ângulo pode ser nulo, agudo, reto, obtuso e raso (Figura 11).

a) Ângulo raso: ângulo que mede exatamente 180°, os seus dois lados são semirretas colineares de sentidos opostos. Desse modo, o ângulo raso representa meia volta em torno do vértice.

b) Ângulo reto: é um ângulo cuja medida é exatamente 90°, ou seja, exatamente $\frac{1}{4}$ (um quarto) de uma volta em torno do vértice.

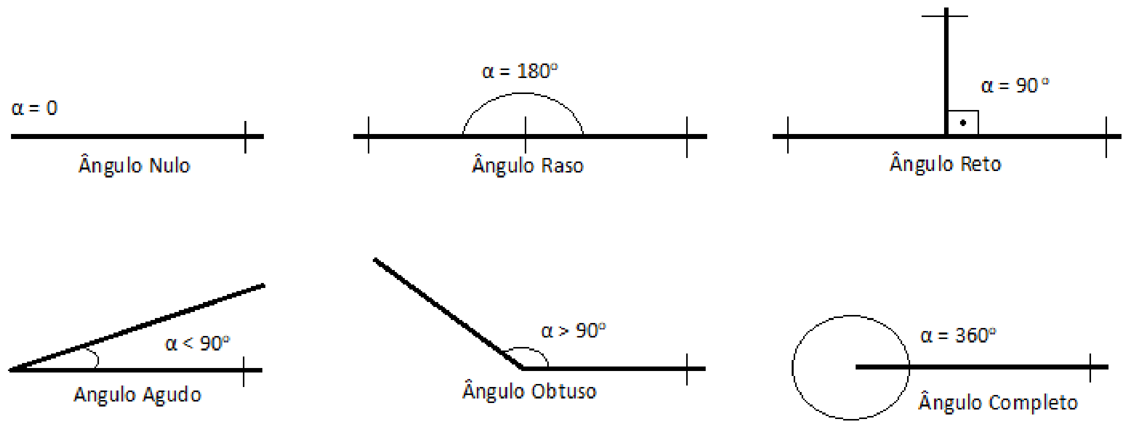
c) Ângulo agudo: ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°. Desse modo, sendo α um ângulo agudo, então $0° < \alpha < 90°$.

d) Ângulo obtuso: um ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180°. Sendo α um ângulo obtuso, então $90° < \alpha < 180°$.

e) Ângulo nulo: ângulo com medida igual a 0°, isto é, o ângulo de 0° é quando os lados coincidem.

f) Ângulo Completo: Tem a medida igual a 360° e também é chamado de ângulo de uma volta.

Figura 11 – Ângulos nulo, raso, reto, agudo e obtuso



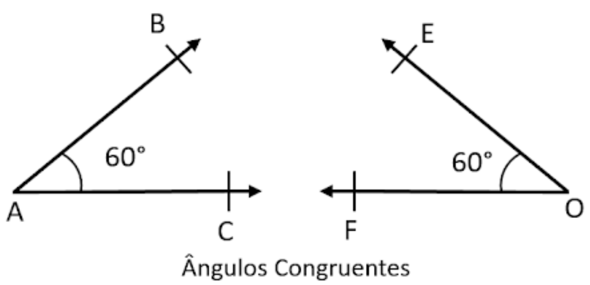
Fonte: Autor, 2024.

- **Ângulos congruentes**

A congruência (símbolo $\equiv$) entre ângulos existe quando suas medidas são idênticas. Vale lembrar que não é geometricamente verdadeiro afirmar que ângulos congruentes são iguais, pois seus lados e vértices não são coincidentes, ou seja, não apresentam posições iguais no plano.

Na Figura 12 temos $B\hat{A}C = 60°$ e $E\hat{O}F = 60°$. Portanto, $B\hat{A}C$ e $E\hat{O}F$ são congruentes, ou seja, $B\hat{A}C \equiv E\hat{O}F$.

Figura 12 – Ângulos congruentes.

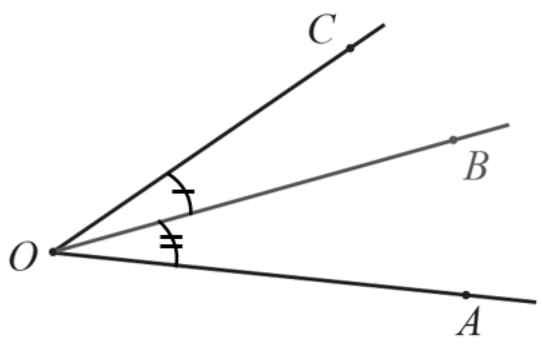


Fonte: Autor, 2024.

- **Ângulos Adjacentes**

Dois ângulos são ditos adjacentes se eles compartilham um lado e não há pontos comuns entre suas regiões, além dos pontos pertencentes a reta suporte do lado comum. (Figura 13)

Figura 13 – Ângulos Adjacentes



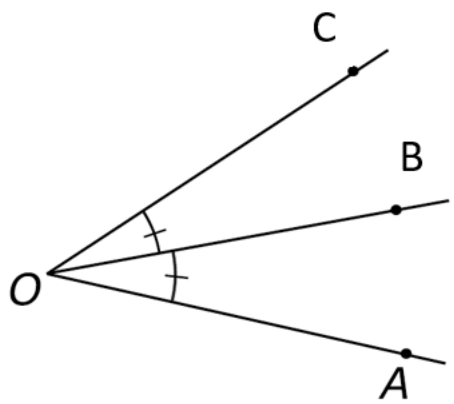
Fonte: Autor, 2024.

Esta definição nos permite "adicionar" ângulos da seguinte maneira: se AÔB e BÔC são ângulos adjacentes, então ∠AÔC é a soma dos dois ângulos. O mais importante da definição de ângulo adjacente é que ela nos leva aos conceitos de suplemento de um ângulo e de ângulo reto.

- **Bissetriz de um ângulo**

Uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ é dita bissetriz interna do ângulo AÔC se, e somente se, AÔB ≡ BÔC. Na Figura 14, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo AÔC.

Figura 14 – Bissetriz de um ângulo



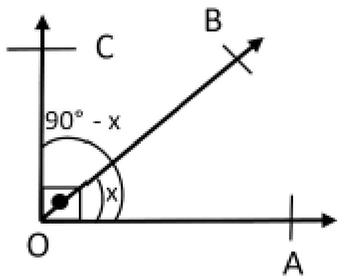
Fonte: Autor, 2024.

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes.

- **Ângulos complementares e ângulos suplementares**

Ângulos adjacentes complementares: Dois ângulos agudos adjacentes são complementares quando os lados não comuns são perpendiculares entre si, ou seja, a soma de suas medidas é 90°. Assim o complemento de um ângulo é o ângulo que falta para que a soma das suas medidas seja 90°. O complemento de um ângulo de medida x ($x < 90°$) é um ângulo de medida 90°– x (Figura 15).

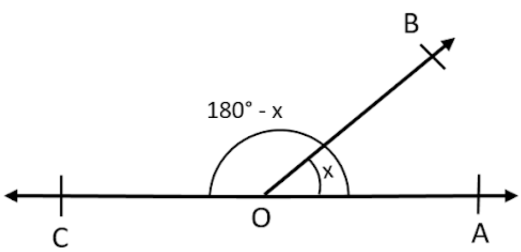
Figura 15 – Ângulos adjacentes complementares



Fonte: Autor, 2024.

Ângulos adjacentes suplementares: dois ângulos convexos são adjacentes suplementares quando os lados não comuns têm a mesma reta suporte, ou seja, são semirretas de sentidos opostos. Logo a soma de suas medidas é igual a 180°. O suplemento de um ângulo de medida x ($x < 180°$) é um ângulo de medida 180°– x (Figura 16).

Figura 16 – Ângulos Adjacentes Suplementares.



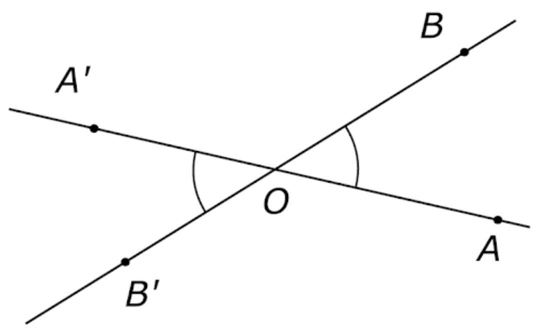
Fonte: Autor, 2024.

Com isso, podemos dizer de forma resumida que dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é 90°, isto é, um deles é o complemento do outro e dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180°, isto é, um deles é o suplemento do outro.

- **Ângulos opostos pelo vértice (O.P.V.)**

Dois ângulos são denominados opostos pelo vértice, se os lados de um são as semirretas opostas dos lados do outro. Na Figura 17, os ângulos AÔB e A'ÔB' são opostos pelo vértice, com isso, pode-se dizer que esses ângulos são congruentes.

Figura 17 – Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: Autor, 2024.

Desse modo, nota-se que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

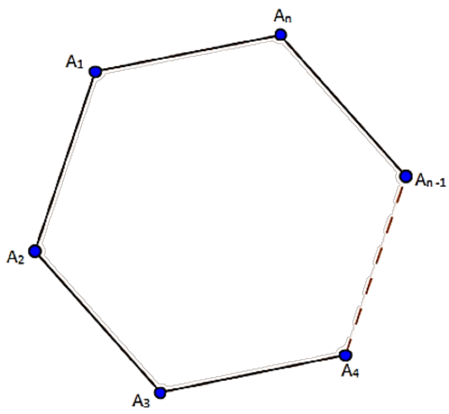
1.2.2 Polígonos

A geometria euclidiana estuda figuras geométricas do plano e do espaço. O polígono é a figura mais simples do plano. Como servem de base para a construção e estudo de outras figuras geométricas mais complexas, do plano e do espaço, essas figuras têm inúmeras propriedades e aplicações.

Veremos, neste tópico, a definição de polígono, seus elementos e suas classificações.

Vamos definir polígonos como uma sequência de pontos de um plano A_1, A_2, ..., A_n, com n $\geq$ 3, todos distintos, sendo que três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_n, A_1 e A_2, assim como A_{n-1}, A_n e A_1, chama-se polígono a reunião dos segmentos formados por um par de pontos consecutivos (Figura 18). Do grego, a palavra polígonos significa, *poly* muitos e *gon* ângulos, ou seja, muitos ângulos.

Figura 18 – Polígono.



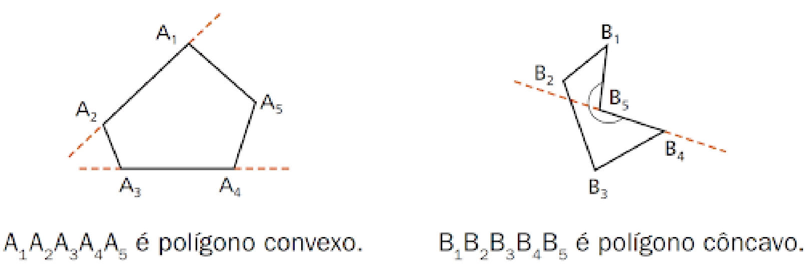
Fonte: Autor, 2024.

Os polígonos são classificados de diferentes maneiras, quanto à sua convexidade, quanto a congruência de seus lados e quanto ao número de lados, o polígono da Figura 18 é chamado de n-ágono em referência a seu número de lados.

- **Polígono convexo e polígono côncavo**

Os polígonos podem ser classificados em convexos ou não convexos (côncavo), conforme mostrados na Figura 19.

Figura 19 – Polígono convexo e polígono côncavo com B5 > 180°.



Fonte: Autor, 2024.

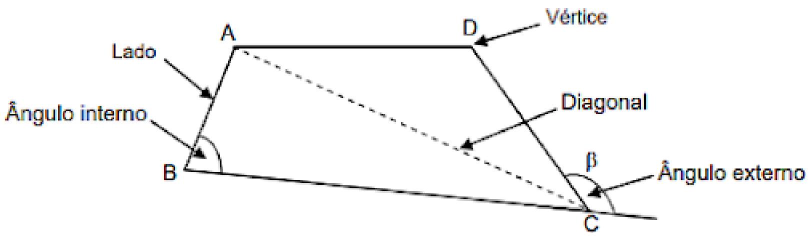
Polígono convexo: Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n-2) vértices em um mesmo semiplano determinado por esta reta, além disso, podemos dizer que um polígono se diz convexo quando todos os seus ângulos internos são menores do que 180°.

Polígono côncavo: Quando um polígono possuir pelo menos um ângulo interno maior do que 180° ele é denominado polígono não convexo (côncavo).

- **Elementos de um polígono convexo**

Os elementos de um polígono são: vértice, aresta, diagonal, ângulo interno e ângulo externo (Figura 20).

Figura 20 – Elementos do polígono.



Fonte: Autor, 2024.

a) **Vértice**: Ponto de interseção entre dois segmentos de retas consecutivos. Na Figura 20 os vértices são A, B, C e D.

b) **Aresta (lado)**: Segmento de reta que une dois vértices consecutivos. Na Figura 20 os lados são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

c) **Diagonal**: Segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Na Figura 20 as diagonais são $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

d) **Ângulo Interno**: Região interna compreendida entre dois lados consecutivos. Na Figura 20 os ângulos internos são $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $A\hat{D}C$,

e) **Ângulo Externo**: Região externa formada por um lado e o prolongamento do lado consecutivo. Na Figura 20, β é um dos ângulos externos.

- **Classificação dos Polígonos Convexos**

Os polígonos convexos recebem nomes especiais de acordo com seu número de lados e a quantidade de ângulos internos. A seguir apresentaremos a Tabela 1 com a classificação dos polígonos com até 20 lados.

Tabela 1 – Classificação dos polígonos convexos

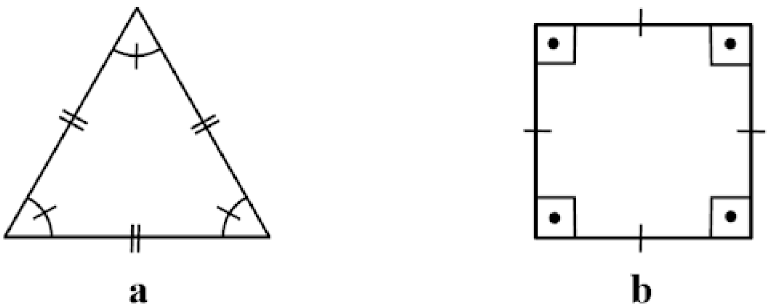
N° de lados	Polígono	N° de Lados	Polígono
n = 3	TRIÂNGULO OU TRILÁTERO	n = 12	DODECÁGONO
n = 4	QUADRILÁTERO	n = 13	TRIDECÁGANO
n = 5	PENTÁGONO	n = 14	TETRADECÁGANO
n = 6	HEXÁGONO	n = 15	PENTADECÁGONO
n = 7	HEPTÁGONO	n = 16	HEXADECÁGANO
n = 8	OCTÓGONO	n = 17	HEPTADECÁGANO
n = 9	ENEÁGONO	n = 18	OCTODECÁGANO
n = 10	DECÁGONO	n = 19	ENEADECÁGONO
n = 11	UNDECÁGONO	n = 20	ICOSÁGONO

Fonte: Autor, 2024.

- **Polígonos convexos regulares ou irregulares**

Os polígonos também podem ser classificados como regulares ou irregulares, os polígonos convexos são regulares quando atendem as seguintes condições: (i) todos os lados são congruentes entre si e (ii) todos os ângulos são congruentes entre si. Caso não atenda essas condições ele é classificado como polígono irregular. Dois exemplos de polígonos regulares são os triângulos equiláteros e os quadrados (Figura 21).

Figura 21 – polígonos regulares: a) triângulo equilátero e b) quadrado.

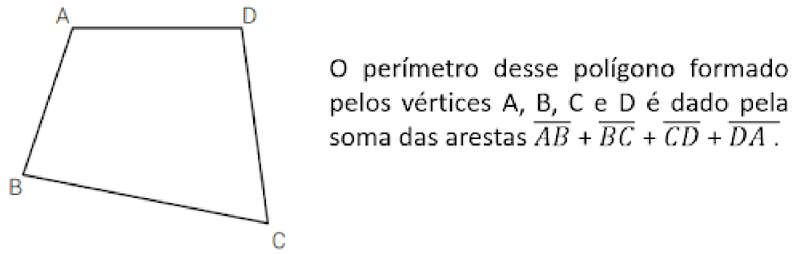


Fonte: Autor, 2024.

- **Perímetro de um polígono**

Perímetro é o comprimento do contorno de um polígono, portanto, para calcular o perímetro basta somar a medida de todos os lados desse polígono, (Figura 22).

Figura 22 – Perímetro de um polígono convexo.



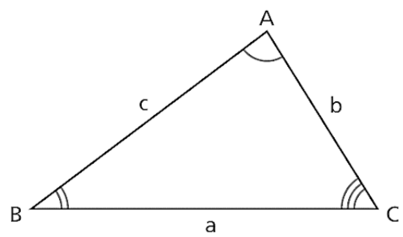
Fonte: Autor, 2024.

Portanto, o perímetro é uma grandeza linear, ou seja, possui uma única dimensão.

1.2.3 Triângulos

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ chama-se triângulo ABC. Indicação: triângulo ABC = ABC. Logo, é um polígono de três lados e três ângulos internos (Figura 23).

Figura 23 – Triângulo ABC.



Fonte: Autor, 2024.

Os elementos do triângulo ABC que podemos destacar são: vértices: os pontos A, B e C são os vértices do ΔABC; arestas: os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a) são os lados do triângulo e ângulos: os ângulos BÂC, A$\hat{B}$C e A$\hat{C}$B são os ângulos do ΔABC (ou ângulos internos do ΔABC).

- **Classificação dos triângulos**

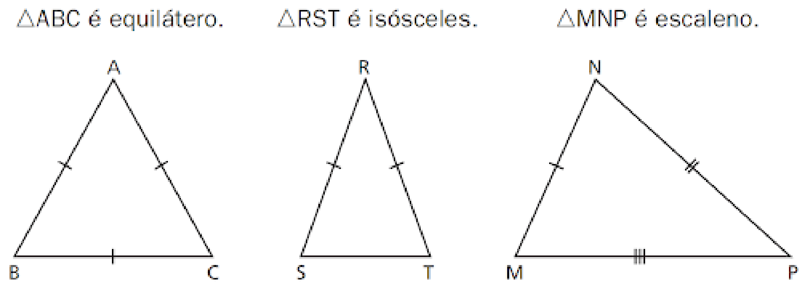
  Quanto às medidas dos seus lados, um triângulo pode se classificar em:

  - Equilátero, quando tem os três lados congruentes;
  - Isósceles, quando tem pelo menos dois lados congruentes;

– Escaleno, quando os três lados têm medidas diferentes.

Podemos observar a representação geométrica da classificação de triângulos quanto aos lados (Figura 24).

Figura 24 – Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus lados.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

Quanto às medidas dos seus ângulos internos, um triângulo pode se classificar em:

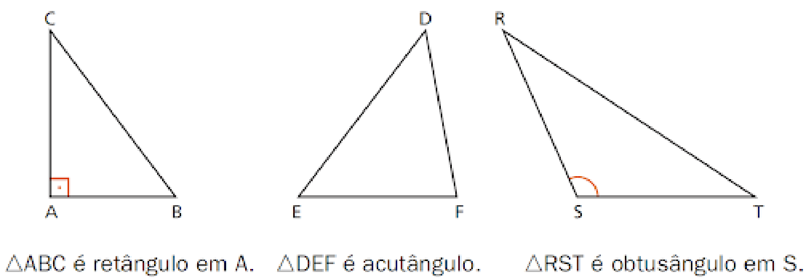
– Retângulo, quando tem exatamente um ângulo interno reto;

– Acutângulo, quando tem os três ângulos internos agudos;

– Obtusângulo, quando tem exatamente um ângulo interno obtuso.

Como podemos verificar na Figura 25.

Figura 25 – Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus lados.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013a.

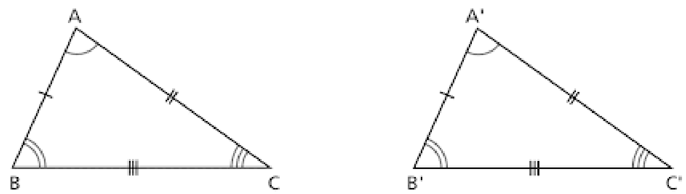
O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua hipotenusa e os outros dois são os catetos do triângulo.

- **Congruência de triângulos**

Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

Figura 26 – Congruência de triângulos



$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \text{e} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{pmatrix}$$

Fonte: Autor, 2024.

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva. Para ilustrar este resultado, veja a Figura 26

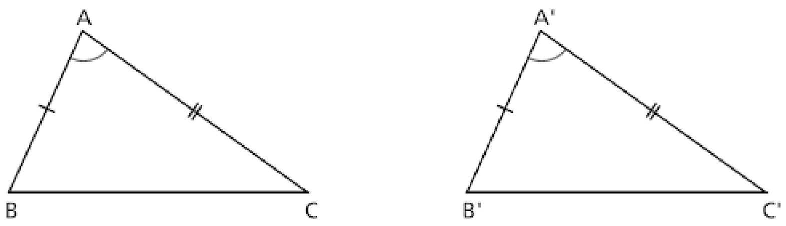
O termo "caso de congruência"refere-se a qualquer conjunto de condições que podem garantir a congruência entre dois triângulos. Os principais casos são codificados como: LAL (Lado – Ângulo – Lado); ALA (Ângulo – Lado – Ângulo) e LLL (Lado – Lado – Lado).

1º caso — LAL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo formado, então eles são congruentes, ou seja, dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo formado por eles respectivamente congruentes.

Esta proposição é um “axioma” e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes (Figura 27).

Figura 27 – Caso de congruência L.A.L.



Fonte: Autor, 2024.

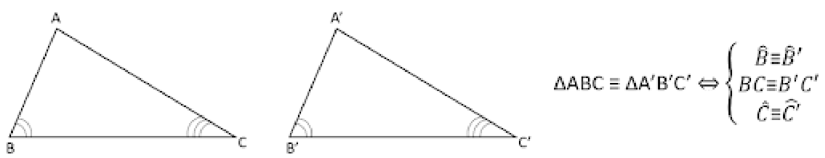
Esquema do 1º caso:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &\equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} &\equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} &\equiv \overline{A'C'} \end{aligned}\right\} \quad \overset{LAL}{\Rightarrow} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

2º caso — ALA

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes, ou seja, dois triângulos são congruentes quando têm um lado e os ângulos adjacentes a ele, respectivamente, congruentes (Figura 28).

Figura 28 – Caso de congruência A.L.A.

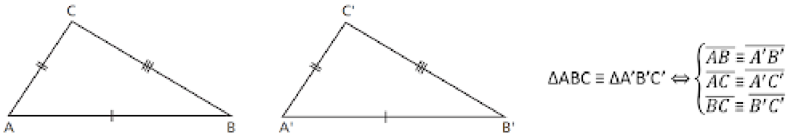


Fonte: Autor, 2024.

3º caso — LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes, ou seja, dois triângulos são congruentes quando têm os três lados, respectivamente, congruentes (Figura 29).

Figura 29 – Caso de congruência L.L.L.



Fonte: Autor, 2024.

1.2.4 Poliedros Convexos

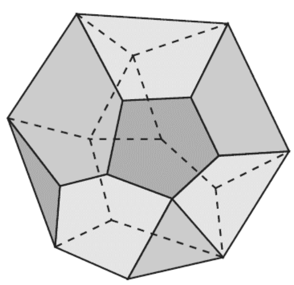
A palavra Poliedro vem do grego *poly*, que significa muitos ou vários e edro, que significa face, ou seja, muitas faces, os poliedros regulares convexos foram objetos de estudo de grandes filósofos da antiguidade e faziam parte das teorias sobre o universo. Os poliedros são objetos facilmente encontrados no cotidiano, em forma de embalagens, na arquitetura, nas artes, computação gráfica e assim por diante.

Para definir poliedro convexo, consideremos um número finito n(n > 4) de polígonos planos convexos tais que:

- dois polígonos não estão num mesmo plano;
- cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Nessas condições, ficam determinados n semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiplanos é chamado poliedro convexo (Figura 30).

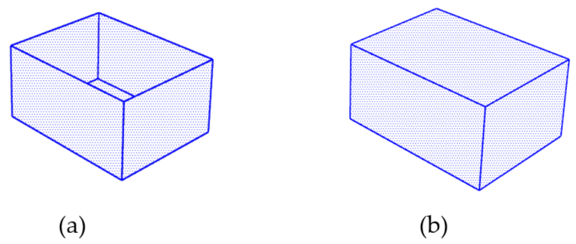
Figura 30 – Poliedro convexo.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013b.

Um poliedro convexo possui: faces, que são os polígonos convexos; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices, que são os vértices dos polígonos. A superfície do poliedro é definida como a reunião das faces desse poliedro. (Figura 31).

Figura 31 – Superfície poliédrica convexa aberta (a) e fechada (b).



Fonte: Autor, 2024.

Em relação a congruência de poliedros convexos, podemos dizer que dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma equivalência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos (ângulo formado pela interseção das faces que se encontram em um vértice do poliedro. Em outras palavras, é o ângulo tridimensional entre os planos das faces que compartilham um vértice.) de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

1.2.4.1 Relação de Euler

A relação de Euler é um resultado matemático bastante conhecido e amplamente utilizado em diversas áreas. Essa relação diz que para todo poliedro convexo equivale à relação $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

1.2.4.2 Poliedros de Platão.

Um poliedro convexo é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as duas seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;

De acordo com essas condições, tem-se a seguinte propriedade: existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Consideremos n o número de arestas em cada face, como estamos tratando de poliedros de platão, então todas as faces devem ter o mesmo número de arestas. Seja A =

número de arestas, F = número de faces e V = número de vértices. Como cada aresta é comum a duas faces, temos que:

$$n.F = 2A \Rightarrow A = \frac{n.F}{2} \tag{1.1}$$

Dado que todos os vértices têm o mesmo número de arestas, então seja m o número de arestas que se encontram em cada vértice e como cada aresta contém dois vértices, temos que:

$$m.V = 2A \Rightarrow A = \frac{m.V}{2} \tag{1.2}$$

Sendo assim, igualamos as expressões (1.1) e (1.2), obtemos a expressão (1.3):

$$V = \frac{n.F}{m} \tag{1.3}$$

Ao substituir A e V da relação de Euler: V − A + F = 2 pelas expressões (1.1) e (1.3), temos que:

$$\frac{n.F}{m} - \frac{n.F}{2} + F = 2 \Rightarrow F.(2.n - n.m + 2m) = 4m \tag{1.4}$$

Como o número de faces deve sempre ser positivo, então temos que:

$$F = \frac{4m}{(2.n - n.m + 2m)} \geq 0 \tag{1.5}$$

Sabemos que m será sempre um número positivo, o denominador da equação (1.5), terá que ser positivo para que o resultado da divisão seja maior que 0. Logo, $2n - n.m + 2m > 0 \Rightarrow 2n - m.(n-2) > 0 \Rightarrow 2n/(n-2) > p$. Além disso, sabe-se que $m \geq 3$, então obtemos:

$$2n/(n-2) > 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow 6 > 3n - 2n \Rightarrow 6 > n$$

Veremos a seguir o que acontece para cada valor possível de n, levando em consideração que $n \geq 3$.

Seja $n = 3$, então temos que $F = 4.m/(6 - m)$. Como $m > 0$ e $F > 0$, então $6 - m > 0 \Rightarrow 6 > m$.

Se $m = 3$, tem-se que $F = 4$. Logo, obtemos um tetraedro regular composto por 4 faces triangulares.

Se $m = 4$, tem-se que $F = 8$. Logo, obtemos um octaedro regular composto por 8 faces triangulares.

Se $m = 5$, tem-se que $F = 20$. Logo, obtemos um icosaedro regular composto por 20 faces triangulares.

Agora seja $n = 4$, então temos que $F = 4.m/(8 - 2.m)$ Como $m > 0$ e $F > 0$, então $8 - 2.m > 0 \Rightarrow 4 > m$. Assim, a única possibilidade é $m = 3$.

Se $m = 3$, tem-se que $F = 6$. Logo, obtemos um hexaedro regular composto por 6 faces quadradas.

Quando $n = 5$, então tem-se que$F = 4.m/(10 - 3.m)$. Como $m > 0$ e $F > 0$, então $10 - 3.m > 0 \Rightarrow 10/3 > m$. Porém, como m tem que ser inteiro e $m \geq 3$, o único caso possível é $m = 3$.

Se $m = 3$, temos que $F = 12$. Logo, obtemos um dodecaedro regular composto por 12 faces pentagonais.

Portanto, podemos mostrar utilizando o Teorema de Euler, que existem apenas cinco classes de poliedros de Platão.

1.2.4.3 Poliedros regulares.

O poliedro convexo é considerado regular quando satisfaz duas propriedades, são elas:

1) suas faces são polígonos regulares e congruentes;

2) seus ângulos poliédricos são congruentes.

Tem-se uma propriedade que diz que existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares.

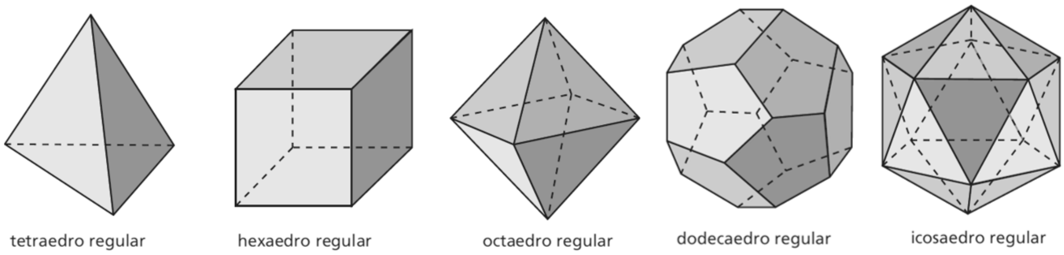
Para determinar se um poliedro é regular, podemos usar as seguintes condições:

1) suas faces são polígonos regulares e congruentes, logo, todas possuem o mesmo número de arestas;

2) seus ângulos poliédricos são congruentes, logo, todos possuem o mesmo número de arestas.

Dessa forma, pode-se concluir que os poliedros regulares são poliedros de Platão e, portanto, existem cinco, e somente cinco, poliedros regulares, conforme podemos ver na Figura 32.

Figura 32 – Poliedros regulares.



Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013b).

1.2.4.4 Planificação da superfície de poliedros.

Um desenho de um sólido geométrico em perspectiva (no quadro ou na folha de papel) é o esboço de um sólido real feito em um plano. As representações de todas as faces deste sólido de forma bidimensional, se traduzem em sua planificação.

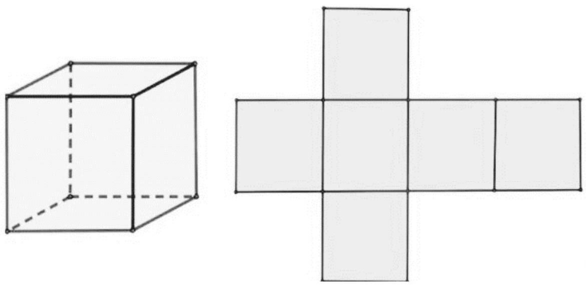
Os poliedros podem ser representados pela planificação de sua superfície. A superfície de um poliedro, que é formada por superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano, de tal modo que cada uma das faces do objeto tenha, pelo menos, um lado em comum com a outra face. Obtém-se, assim, uma figura plana que costuma ser chamada de molde ou planificação da superfície do objeto tridimensional (LEONARDO, 2020).

Vale salientar que, em todos os níveis do ensino básico, a planificação de sólidos geométricos pode ser usada como um instrumento concreto para a intermediação dos conceitos e características dos conteúdos aprendidos com sua representação, bem como para a assimilação do conteúdo com objetos do cotidiano do estudante.

Para ilustrar, podemos ver a planificação de alguns poliedros regulares (LEONARDO, 2020).

O hexaedro regular (cubo) é um sólido platônico que têm todas as suas faces quadrangulares. Em cada vértice do hexaedro convergem três arestas e todas as faces desse poliedro possuem quatro arestas. O hexaedro possui seis faces, oito vértices e doze arestas. A relação de Euler também é válida para esse sólido. Na Figura 33, podemos observar o hexaedro e sua planificação.

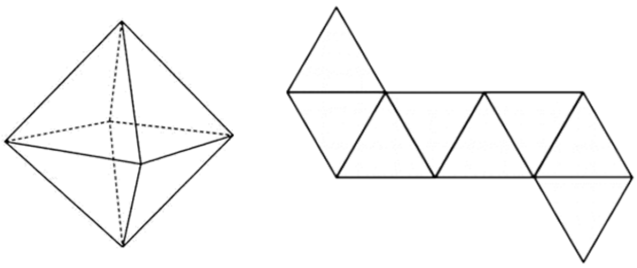
Figura 33 – Hexaedro e sua planificação.



Fonte: Autor, 2024.

O octaedro é um sólido platônico que possui todas suas faces no formato de triângulos equiláteros, conforme podemos observar na Figura 34. Em cada vértice do octaedro convergem quatro arestas e todas as faces desse poliedro possuem três arestas. O octaedro possui oito faces, seis vértices e doze arestas. A relação de Euler também é válida para esse sólido.

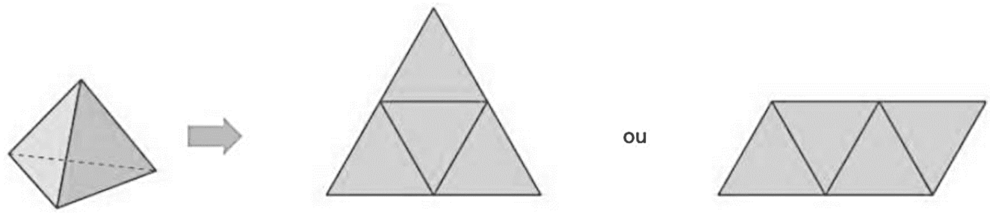
Figura 34 – Octaedro e sua planificação.



Fonte: Autor, 2024.

De modo geral, as faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos diferentes, desde que cada face esteja ligada a outra por, pelo menos, um de seus lados, assim como o exemplo do tetraedro da Figura 35.

Figura 35 – Tetraedro e suas planificações.



Fonte: Autor, 2024.

1.3 PAPERCRAFT

O *papercraft* se caracteriza pela construção de objetos tridimensionais em papel, a partir de uma planificação. Para sua confecção são empregadas técnicas de corte, vinco e colagem.

O grau de complexidade dos modelos em *papercraft* varia entre modelos de baixa e alta complexidade. Com o surgimento de novas tecnologias, a forma como os modelos são elaborados mudou. Atualmente a maioria é projetada em programas de modelagem digital. Porém, o que não mudou ao longo dos anos foi a forma de se montar esses modelos, sendo ainda necessário o emprego de habilidades motoras finas. O *papercraft* é uma atividade lúdica que pode ser encontrada em diversos níveis de complexidade, o que permite que seja realizado por pessoas de diferentes idades (OLIVEIRA, 2018).

O *papercraft* é uma forma de arte que têm sido apreciada por diversas pessoas a muito tempo e está diretamente ligada ao origami. Portanto, para compreender melhor essa técnica e necessário conhecer onde e quando surgiu. Para entender melhor a origem do *papercraft*, usamos como referência o Livro: Paper Cut: An Exploration Into the Contemporary World of *Papercraft* Art and Illustration (GILDERSLEEVE, 2014)

1.3.1 A origem do *papercraft*

Podemos dizer que o papel é uma das invenções mais importantes no desenvolvimento da civilização humana. Ao longo dos séculos, ajudou a humanidade a espalhar informações por todo o mundo através de textos e imagens, permitindo a comunicação entre culturas. Isto foi possível devido à incrível flexibilidade do material.

Tudo começou na China, durante a Dinastia Han Oriental, no primeiro século a.C, quando um eunuco chinês chamado Cai Lun inventou o que hoje consideramos papel. Embora já existissem formas do material, a versão de Lun continha novos materiais essenciais que melhoraram significativamente a sua durabilidade e produção. Este papel foi criado usando um processo no qual fibras de casca de árvore, cânhamo e seda foram suspensas em água. Uma tela semelhante a uma peneira seria então usada para reunir as fibras, e essa polpa secaria formando uma folha fina e emaranhada.

Inicialmente, este papel era exclusivamente da responsabilidade das cortes imperiais, mas com o tempo, a sua produção espalhou-se por toda a população da China. O material era usado predominantemente para escrever cartas e transcrever escrituras, mas também tinha grande potencial como meio criativo para fins recreativos. Foi nessa época que surgiu o corte de papel, quando os chineses usavam papel para criar decorações para festivais e outras celebrações. Um costume popular era cortar o papel em pequenas bandeiras, borboletas e moedas, para colocar nos cabelos das mulheres no início da primavera. A técnica também foi usada para criar cenas e decorações para as casas das pessoas, às vezes apresentando imagens de plantas, flores, pássaros, animais e símbolos de boa sorte.

O corte de papel também apareceu em vários escritos chineses, incluindo um poema do proeminente poeta da Dinastia Tang, Tu Fu, que disse: "Cortei papel para convocar minhas almas".

No século VI, a arte de recortar papel começou a espalhar-se para leste da China, com os monges budistas, chegando ao Vietnã e ao Tibete, e depois ao Japão. Com isso, a forma de arte evoluiu para o kirigami, que é uma mistura de origami e corte de papel. Normalmente, o kirigami começa com uma única folha de papel que é dobrada várias vezes e depois cortada. Esta folha é então aberta e achatada para revelar a arte finalizada. Devido à natureza da forma de arte, essa técnica se presta bem à criação de padrões simétricos, e as obras de arte geralmente apresentam imagens como flocos de neve, pentagramas ou flores de orquídeas. No século VIII, esse tipo de artesanato começou a se espalhar para o oeste ao longo de uma rede de rotas comerciais de 6.400 quilômetros de extensão que se estendia por todo o país. Do oriente médio e até a Europa: a Rota da Seda. Nos anos 1300, o recorte de papel também começou a aparecer em Israel, usado pela comunidade judaica para criar artefatos religiosos complexos, como Mizrachs – pequenas placas ornamentais colocadas em casa para indicar a direção da oração – e decorações para o feriado judaico de Shavuot. No final do século XV, o recorte de papel chegou à Europa, primeiro em países como a Ucrânia e a Polônia, onde as peças foram inicialmente criadas pelas classes altas para selar cartas privadas. Mais tarde, à medida que o papel se tornou mais barato e mais acessível, a forma de arte espalhou-se pelo campo. O corte de papel gradualmente avançou para a Europa, com exemplos aparecendo na Suíça e na Alemanha no século XVI, chamados de *scherenschritte*, que significa "corte de papel". Estes foram tradicionalmente criados com papel preto e branco usando formas simétricas.

Esta forma de arte foi posteriormente trazida para a América colonial por imigrantes do século XVIII que se estabeleceram na Pensilvânia, dando início a uma nova onda de corte de papel na América do Norte que existe até hoje.

A metade do século XIX marcou um grande avanço na produção de papel, com a mecanização do processo. Esta maior velocidade de produção ajudou a acompanhar a crescente procura de papel tanto como material artesanal como de leitura e, por sua vez, permitiu a sua utilização generalizada em todo o mundo. A partir de então, o papel pôde ser adquirido de forma extremamente barata, tornando-o um meio ainda mais desejável para fins artísticos.

Ao longo do século XX, muitos novos praticantes começaram a mergulhar na prática do corte de papel, enquanto as formas tradicionais existentes continuaram a florescer. O artista Henri Matisse dedicou os últimos quatorze anos de sua vida à criação de recortes de papel em grande escala. Inicialmente pintor e escultor, Matisse estava em uma cadeira de rodas após uma cirurgia de câncer. Após a doença, ele encontrou uma nova saída para sua criatividade no recorte de papel, descrevendo esse período como "uma segunda vida". A natureza ousada e expressiva desses recortes de papel levou ao que alguns chamam de período mais influente e admirado de sua carreira.

Ao mesmo tempo em que Matisse criava obras de arte recortadas em papel, como O Caracol, no final da década de 1940, o design gráfico e a ilustração experimentavam uma nova vida. À medida que as pessoas se esforçavam por avançar economicamente no final da 2ª Guerra Mundial, havia uma maior necessidade de publicidade e embalagens, especialmente na América, com a sua economia em expansão. Eventos como o Festival da Grã-Bretanha em 1951 também ajudaram a promover o design, a arquitetura e as artes nestes tempos do pós-guerra, apresentando-os a um público de mais de 10 milhões de visitantes. Durante essas décadas, também houve grandes avanços na computação. Logo essas máquinas eram pequenas o suficiente para que as pessoas as tivessem em casa.

A partir da década de 1990, com novos avanços nas mídias digitais e o nascimento da Internet, o papel tornou-se um tanto redundante como meio de comunicação. Os e-mails substituíram em grande parte as cartas escritas, os jornais impressos começaram a ser substituídos pelas suas versões online e a publicidade tornou-se muito mais focada em soluções digitais. Isto, por sua vez, teve um grande efeito no design e na ilustração, com os artistas afastando-se da criação de imagens artesanais para um estilo mais digital, onde cortes e dobras foram substituídos por pixels e vetores.

Mas, ao contrário do corte de papel do passado, esta nova onda surgiu em conjunto com os meios de comunicação digitais e, por isso, os dois estão fortemente interligados. Com isso, a forma como o *papercraft* (artesanato em papel) é usado hoje depende fortemente de meios digitais.

A fotografia digital também desempenhou um papel fundamental neste ressurgimento. Para que ilustrações e conjuntos feitos à mão possam ser usados em trabalhos criativos, muitas vezes eles precisam ser fotografados para que possam ser aplicados em anúncios ou usados em revistas, jornais ou on-line. Mas os avanços na fotografia digital significaram que os cenários feitos à mão podem ser filmados e editados num único dia, tornando este tipo de ilustração mais viável para trabalhos editoriais e campanhas publicitárias com entregas rápidas.

A internet também desempenhou um papel importante na promoção do *papercraft*. Estilos que antes eram exclusivos de uma cultura específica numa parte do mundo estão agora a ser combinados e desenvolvidos com outras técnicas, criando abordagens novas e únicas ao corte de papel. Além disso, o papel não é mais visto apenas como um material de construção 2D e agora está sendo usado para criar grandes ilustrações, cenários e instalações em 3D (Figura 36). O *papercraft* fez com que alguns artistas adquirissem fama e admiração mundial, como por exemplo: Rob Ryan, Yulia Brodskaya e Jeff Nishinaka.

Figura 36 – Escultura gigante de um dragão e uma fênix em batalha feita por Jeff Nishinaka.

Fonte: GILDERSLEEVE, 2014.

1.3.2 Materiais e Técnica do *Papercraft*

Como todo tipo de arte, o *Papercraft* exige um material básico para a sua montagem.

O primeiro material necessário é o papel. Muitos tipos de papel podem ser usados para criar um modelo de *papercraft*. Para aumentar a firmeza e impedir que a cola o deforme, geralmente é usado papel com gramatura entre 120 e 200 gramas. Existem modelos que contêm várias peças de tamanhos diferentes, que ocasionalmente requerem gramaturas diferentes; portanto, pode-se usar mais de uma gramatura em um único modelo, bem como gramaturas maiores ou menores. A marca e a gramatura exata para cada modelo vão mais da sua vontade e habilidade com o papel (OLIVEIRA, 2018).

Em relação à impressão do material, existem dois tipos de impressão possíveis: a jato de tinta e a impressão a laser. A primeira impressão é mais fácil de obter. No entanto, existem duas desvantagens: as cores nunca saem totalmente corretas e os modelos podem borrar com a cola. A impressão a laser não apresenta essas desvantagens, contudo é menos acessível, pois o custo de uma impressora a laser colorida é maior.

São muitos os instrumentos que podem ser utilizados no *papercraft*, porém, alguns são necessários e básicos (OLIVEIRA, 2018), como:

Tesoura - sem ponta, bem básica.

Estilete - definitivamente o principal instrumento para cortar o papel.

Cola - existem vários tipos. Mas prefira modelos com pouca água, pois os modelos com muita água borram os modelos impressos a jato de tinta muito facilmente.

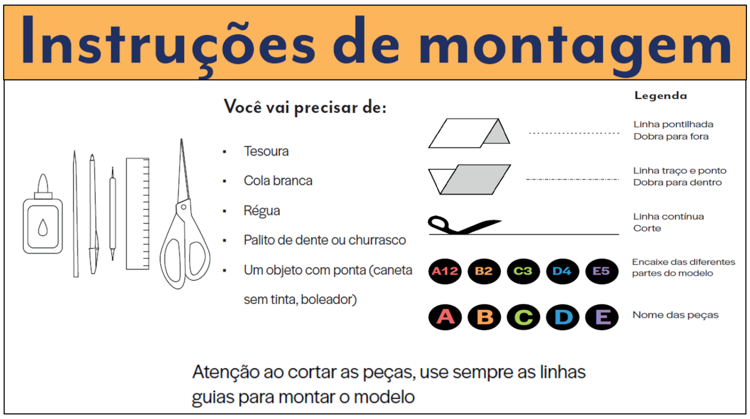
Base de corte - importantíssimo para quem já está usando o estilete. Essa base impede que destrua, risque e arranhe os móveis com o estilete.

Régua de Metal - é muito importante, mais uma vez, no uso do estilete, já que previne cortar torto.

Outros instrumentos – pode-se usar algo para espalhar a cola, como por exemplo, palito de dente ou qualquer coisa do tipo e alguma coisa para vincar o papel. Pode ser uma caneta esferográfica ou até mesmo uma pequena espátula. Todos esses instrumentos são facilmente encontrados em papelarias.

Geralmente, os modelos de *papercraft* acompanham as instruções de montagem, já que o *papercraft* pode variar de nível de complexidade. Na Figura 37, podemos ver um modelo de instruções de montagem.

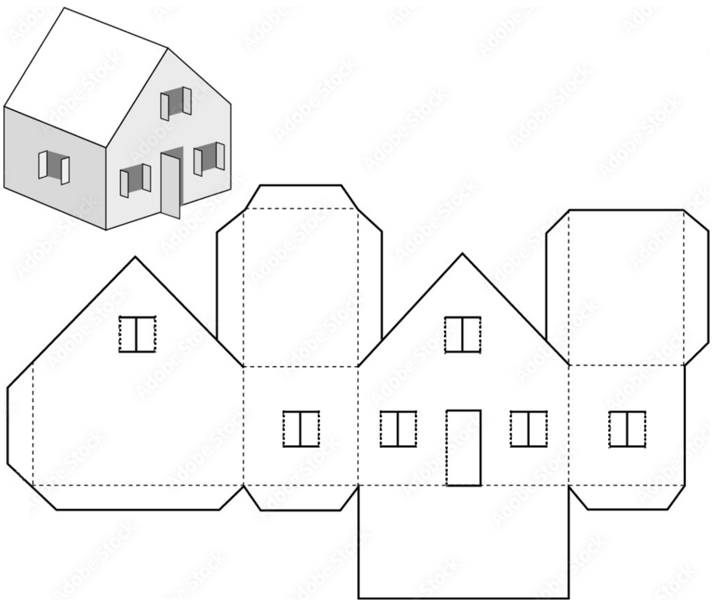
Figura 37 – Modelo de instruções de montagem de um *papercraft*.



Fonte: GILDERSLEEVE, 2014.

Na Figura 38, podemos ver um modelo de baixa complexidade de *papercraft*. Esse modelo é uma casa simples de peça única que pode ser montada seguindo as instruções contida na Figura.

Figura 38 – *Papercraft* de peça única de uma casa.



Fonte: Adobe Stock, 2024.

Apesar de relativamente simples, iniciantes costumam apresentar algumas dificuldades quando começam a fazer *papercraft*. Por esse motivo, é essencial usar materiais de qualidade, manter a organização, ter paciência e não desistir no primeiro sinal de que as coisas não estão indo do jeito que gostaria.

2 METODOLOGIA

Considerando que os livros didáticos não são suficientes para o ensino da geometria, cabe ao professor inovar em suas aulas, proporcionando uma experiência mais agradável e produtiva, colocando o aluno como protagonista no processo de ensino e aprendizagem. Para atingir os objetivos de aprendizagem, é fundamental que o aluno desenvolva autonomia. Nesse sentido, as metodologias ativas têm ganhado destaque, pois oferecem uma experiência na qual o aluno progride no seu próprio ritmo e chega a suas conclusões de forma independente, compartilhando conhecimentos com os colegas para que todos alcancem os mesmos objetivos.

Existem diversas metodologias centradas nos estudantes que tornam as aulas mais interativas, participativas e significativas, conhecidas como metodologias ativas (MÜLLER et al., 2017). Essas abordagens pedagógicas têm como objetivo transformar o aluno no protagonista do seu próprio processo de aprendizagem, incentivando-o a ser ativo na busca pelo conhecimento e a desenvolver habilidades como pensamento crítico, autonomia, criatividade e trabalho em equipe.

Essas metodologias baseiam-se na premissa de que o conhecimento é adquirido de maneira colaborativa, com o aluno desempenhando um papel ativo na construção do próprio saber. Elas incentivam a participação dos alunos através de atividades práticas, debates, trabalhos em grupo, pesquisas e outras atividades que promovem a reflexão e a interação entre alunos e professor.

Para aplicar a metodologia ativa, é essencial que o professor atue como facilitador, incentivando a participação ativa dos alunos e promovendo a colaboração para uma compreensão sólida dos conceitos. Além disso, é fundamental criar um ambiente seguro e respeitoso, onde os estudantes possam expressar suas ideias e opiniões livremente, tanto em grupo quanto individualmente.

Independentemente da metodologia adotada, o professor deve conduzir o processo de ensino e aprendizagem observando o desenvolvimento dos alunos e ajustando as estratégias para atender às particularidades da turma. É responsabilidade do professor garantir uma aprendizagem significativa, criando e modificando estratégias conforme necessário.

2.1 PROPOSTA PEDAGÓGICA

A Geometria tem inúmeras aplicações no cotidiano, e seus conceitos podem ser desenvolvidos a partir de representações encontradas no ambiente ao nosso redor. Na interpretação desses conceitos, muitos educadores procuram expandir seu conhecimento para adotar novas abordagens em suas práticas de ensino, como o uso de materiais concretos.

O papel do professor é crucial no ensino da Matemática, especialmente da Geometria. É essencial buscar estratégias que tornem as aulas mais dinâmicas, desafiando e motivando os alunos, para que a aprendizagem se torne um processo interessante e lúdico, reduzindo assim a aversão à disciplina. Portanto, o professor deve sempre fortalecer a conexão entre teoria e prática.

A proposta de atividades que será apresentada tem como objetivo facilitar o ensino da geometria plana e espacial através do *papercraft*, trabalhando conceitos abstratos com o auxílio de materiais concretos.

As atividades serão realizadas nas aulas de Matemática da turma do 3º ano do ensino médio, composta por 35 alunos em regime integral, em uma escola de referência em ensino médio, localizada no município de Carpina-PE, entretanto as listas de exercícios serão trabalhadas em todas as turmas. A escola possui quatro turmas de 3º ano do ensino médio, mas o 3º ano C foi escolhido para participar do projeto devido ao baixo desempenho em Matemática no ano anterior (2023 - 2º ano C), além de apresentar problemas com indisciplina, baixa assiduidade e falta de compromisso com as atividades propostas.

A proposta pedagógica incluirá quatro atividades, cada uma com a duração de 4 aulas de 50 minutos. Durante as aulas, a turma será dividida em 5 grupos de 7 alunos cada. Como a proposta é baseada em vivências de sala de aula, cabe ao professor regente adaptá-la conforme as necessidades dos estudantes, podendo inclusive alterar o número de aulas previstas. Durante a aplicação, o professor deverá atuar como mediador, incentivando discussões sobre o conteúdo trabalhado, sempre conduzindo o diálogo para ilustrar de forma prática e lúdica os conceitos de geometria. Além disso, o professor deverá explicar de maneira atrativa para os alunos a origem do *papercraft*, os materiais utilizados e as instruções de montagem.

É igualmente importante planejar formas de avaliação que considerem a participação ativa e a aprendizagem cognitiva dos alunos, vinculando-as à construção dos conceitos de geometria estudados durante as aulas. Todavia é essencial identificar o conhecimento e a percepção prévio dos alunos sobre *papercraft* e geometria, por isso, aplicaremos um questionário de autoavaliação com 8 perguntas em relação a essa abordagem.

Neste trabalho, utilizamos o método de avaliação subjetiva, propondo e explorando o *papercraft* com foco no estudo de casos. Esse processo avaliativo deve ser contínuo e verificado por meio das atividades propostas, que abrangem conteúdos como noções básicas de geometria, ângulos, polígonos, perímetros, áreas, volumes, poliedros, teorema de Euler e planificação. A avaliação também levará em conta o comprometimento, a capacidade de trabalho em grupo, a assiduidade e a frequência dos alunos.

Para uma análise quantitativa, compararemos o desempenho cognitivo da turma do 3º ano C e com as demais turmas do 3º ano na disciplina de Matemática, utilizando as médias do 1º bimestre.

2.2 MODELOS DE *PAPERCRAFT* COMO MATERIAL DIDÁTICO

Modelos de *papercraft* têm se mostrado um material eficaz e versátil no contexto educacional. O *papercraft*, que envolve a construção de modelos tridimensionais a partir de papel, pode ser utilizado na disciplina de matemática para enriquecer o processo de aprendizagem. As principais vantagens e aplicações dessa técnica como material didático estão associadas ao engajamento e motivação, ao desenvolvimento da coordenação motora e à compreensão espacial.

Na matemática, os modelos geométricos em *papercraft* podem ser usados para ensinar conceitos como áreas, volumes, ângulos e planificações. A construção de poliedros, por exemplo, permite que os alunos visualizem e compreendam melhor essas formas tridimensionais.

Para implementar o *papercraft* como material didático, é importante considerar alguns aspectos práticos: recursos materiais, guias e instruções e integração curricular. Essa integração é fundamental para planejar como os modelos de *papercraft* podem ser integrados aos objetivos de aprendizagem da geometria, garantindo que eles complementem e reforcem os conteúdos abordados. Logo, ao incorporar *papercraft* no currículo, educadores podem oferecer uma abordagem de ensino mais dinâmica e eficaz, contribuindo para um aprendizado mais profundo e significativo.

Os modelos que serão utilizados neste trabalho foram escolhidos com o objetivo de despertar o interesse dos estudantes. Esses modelos vão desde de figuras tridimensionais simples a figuras complexos.

2.2.1 Recursos materiais para confecção dos *Papercrafts*

Os recursos materiais necessários para o desenvolvimento das atividades são: Kits com folhas de papel sulfite branco A4 180g 210 mm x 297 mm marca Chamequinho; tesouras sem pontas; cola branca líquida multiuso não tóxica lavável 90 g marca Pira; réguas de 30 cm transparente; estiletes com lamina retrátil 9 mm X 155 mm marca Sparta; palitos para churrasco; bases de corte 60 cm x 45 cm marca Patchwork Artesanato Scrapbook, espátulas com ponta redonda de 20 cm; multifuncional marca Epson EcoTank L5590 tecnologia de impressão: jato de tinta e *papercrafts* para impressão com as instruções de montagem.

2.2.2 Modelos e guia de instruções de montagem de *papercraft*

Os *papercrafts* apresentados neste projeto incluirão instruções de montagem específicas para cada modelo, podendo variar de acordo com a complexidade de cada um. É essencial consultar os modelos de *papercraft* e suas instruções de montagem nos sites disponíveis a seguir:

Pokémon e outros: <https://store.dtworkshop.com/>;

Animais e outros: <https://animapapir.com/templates>;

Diversos: <https://www.supercoloring.com/paper-crafts/3d-papercraft>;

Diversos: <https://sneakycatstudio.com/>.

Nos modelos de baixa complexidade, as instruções de montagem propostas na Figura 38, serão suficientes para a montagem do *papercraft*.

2.3 PROPOSTA DE ATIVIDADES EM SALA DE AULA

O planejamento da aula deve priorizar a aprendizagem dos alunos, promovendo o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas aos conteúdos de geometria, a fim de garantir uma compreensão abrangente das diversas concepções matemáticas.

A proposta para o ensino da geometria plana e espacial consiste em quatro atividades educacionais utilizando *papercrafts*: explorando conceitos primitivos da geometria e dos ângulos; estudo dos polígonos e poliedros; estudo do teorema de Euler na construção dos poliedros de Platão e estudo da planificação.

Fica a cargo do professor registrar os eventos durante a aplicação, incluindo dúvidas, questionamentos, erros, comportamento dos alunos, estratégias empregadas, raciocínios utilizados, criatividade demonstrada, organização das atividades, recursos utilizados, trabalho em grupo e até mesmo a sua própria avaliação pessoal.

2.3.1 Primeira Atividade

Explorando conceitos primitivos da geometria e dos ângulos com *papercraft.*

Objetivo: Oferecer uma abordagem dinâmica e interativa para introduzir os conceitos primitivos da geometria e ângulos, proporcionando aos alunos uma experiência prática e significativa através do *papercraft*.

Primeiro momento

1) No início da atividade, fazer uma explanação sobre *papercraft*. Na sequência, abordar os conceitos de ponto, reta e plano, utilizando exemplos na vida cotidiana e ilustrações através de *papercraft* não montados para facilitar a compreensão.

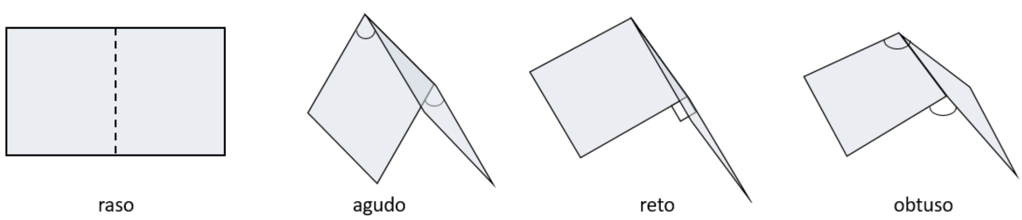
2) Citar o postulado da existência e o postulado da determinação, descrevendo sua relação com as linhas de marcação nos modelos de *papercraft*, já que essas linhas são contínuas, com traços e outras com traços e pontos e conceituar pontos colineares e não colineares através de representações de reta no quadro branco e conforme o *papercraft* presente na Figura 39.

3) Definir segmento de reta, comparando com retas que tem origem num ponto dado e fim em outro ponto distinto do ponto de origem através de representação de *papercraft* no plano. Consequentemente, definir semirreta.

4) Pedir para os alunos formar grupos com 7 componentes no máximo. Distribuir para cada grupo um kit contendo *papercrafts* simples com as instruções de montagem e recursos materiais similares aos mostrados na Figura 37.

5) Após a formação dos grupos, apresentar exemplos visuais de ângulos utilizando materiais simples, como dobraduras de papel, conforme ilustradas na Figura 39. Em seguida, definir e classificar os ângulos, utilizando exemplos e *papercrafts* para facilitar compreensão.

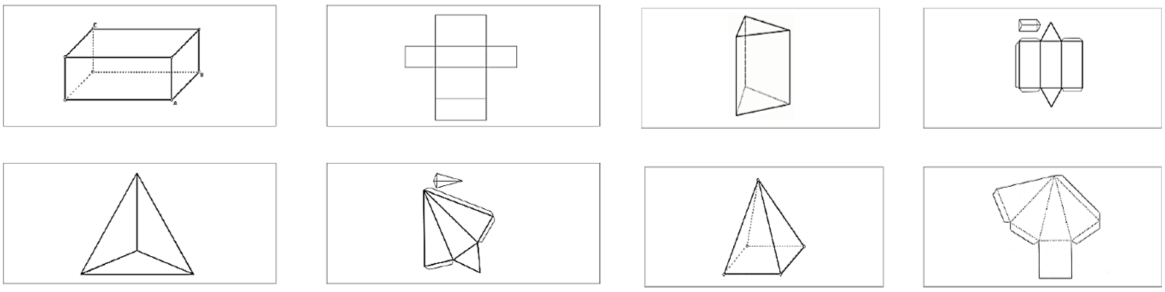
Figura 39 – Classificação dos ângulos representados através de dobraduras de papel.



Fonte: Autor, 2024.

6) Iniciar a montagem dos *papercrafts* propostos, conforme observados na Figura 40, enfatizando a aplicação dos conceitos estudados, em especial, os conceitos de ângulos.

Figura 40 – Modelos de *papercraft*: poliedros.



Fonte: Autor, 2024.

7) Durante a montagem, associar as relações entre os ângulos observados com as definições de ângulos congruentes, adjacentes, complementares e suplementares. Nesse momento, dar uma ênfase em ângulos opostos pelo vértice, fazendo uma relação com o conceito de ângulo congruência.

Segundo momento

8) Continuar a montagem dos modelos de papercraft iniciados no primeiro momento, incentivando à exploração dos conceitos primitivos da geometria e dos ângulos na construção dos modelos.

9) Em quanto os alunos trabalham na construção dos papercrafts, discutir à importância dos conceitos estudados na vida cotidiana.

10) A todo momento revisar e esclarecer dúvidas dos alunos acerca dos conteúdos trabalhados.

11) Após o término do papercraft, pedir aos estudantes que apresentem seus modelos de papercraft, destacando os conceitos aplicados na sua construção.

12) Em seguida, aplicar à lista de exercícios 1 com os conteúdos trabalhados (Apêndice A).

13) Fazer uma reflexão sobre a importância da prática e visualização na compreensão dos conceitos primitivos de geometria e ângulos, incentivo à continuidade do estudo.

Ao final desta atividade o aluno deverá compreender os conceitos primitivos da geometria, além de conhecer as definições de segmento de reta, semirreta, ângulos e sua classificação e outras particularidades sobre ângulos.

2.3.2 Segunda Atividade

Estudo dos polígonos e poliedros na montagem de *papercrafts*.

Objetivo: Desenvolver o conhecimento sobre as propriedades de polígonos e poliedros através da construção de modelos tridimensionais utilizando a técnica de *papercraft*. Esta atividade visa reforçar a compreensão das formas geométricas, suas características e a aplicação prática em modelos concretos.

Primeiro momento

1) Iniciar a atividade, perguntando: o que é polígono e quais são os elementos de um polígono?

2) Em seguida, definir polígono e identificar e conceituar os seus elementos.

3) Dar exemplos de polígonos utilizados no cotidiano dos alunos e associar as figuras planas que formam o *papercraft* com o conceito de polígono estudado.

4) Pedir aos alunos para formar grupos com até 7 integrantes e logo depois, distribuir os kits com os modelos impressos de *papercraft* e as instruções (disponíveis on-line - ver subseção 2.2.2).

5) Após explicar à montagem, iniciar o recorte e a dobra das peças dos modelos seguindo as linhas demarcadas, cuidadosamente e reforçar na prática, os conceitos estudados sobre os elementos que formam os polígonos.

6) Depois, classificar os polígonos como regulares e irregulares e de acordo com o número de lados.

7) Pedir aos alunos que identifiquem os polígonos formados durante o recorte e a dobra das peças dos *papercrafts*, classificando-os de acordo com o número de lados.

8) Fazer uma verificação dos recortes e dobras para garantir que todas as peças foram recortadas corretamente.

9) Posteriormente, definir e calcular perímetro dos polígonos formados após os recortes das peças dos *papercrafts*.

10) Definir triângulos e suas propriedades, além de classificar quanto aos ângulos internos e aos lados.

11) Pedir aos alunos que identifiquem os triângulos formados após os recortes das peças dos *papercrafts*, classificando-os quanto aos ângulos internos e aos lados.

12) Calcular o perímetro e a área dos triângulos formados na prática após os recortes, utilizando uma régua para fazer as medidas necessárias.

13) Definir congruência e semelhança de triângulos e seus casos e pedir para os alunos identificarem os casos com as peças recortadas.

14) Definir e reconhecer os quadriláteros notáveis nas peças recortadas para a montagem do *papercraft*.

15) Calcular o perímetro e a área dos quadriláteros notáveis na prática após os recortes, utilizando uma régua para fazer as medidas necessárias.

16) Pedir aos estudantes que prepararem as peças para a montagem dos *papercrafts*.

Segundo momento

17) Fazer um resumo dos conteúdos estudados no primeiro.

18) Definir poliedro e suas propriedades básicas: arestas, vértices e faces.

19) Iniciar a montagem dos *papercrafts*, onde os alunos começam a colar as abas para formar as figuras tridimensionais.

20) Para garantir que as figuras sejam montadas corretamente, o professor oferece suporte aos estudantes.

21) Após a montagem dos *papercrafts*, pedir aos alunos para identificar as arestas, os vértices e as faces.

22) Após o término do *papercraft*, pedir aos estudantes que apresentem seus modelos de *papercraft*, destacando os conceitos aplicados na sua construção.

23) Em seguida, aplicar à lista de exercícios 2 com os conteúdos trabalhados (Apêndice B).

24) Fazer uma reflexão sobre a importância da prática com os alunos e discutir quais dificuldades encontraram durante a montagem. Questionar os alunos, como a montagem os ajudou na compreensão dos conceitos geométricos?

Ao longo dessa atividade, o aluno terá a oportunidade de aprender sobre polígonos e poliedros de forma prática e interativa. A construção manual dos modelos reforçará o conhecimento teórico e oferecerá uma compreensão visual e tátil das formas geométricas, tornando o aprendizado mais significativo.

2.3.3 Terceira Atividade

Estudo do teorema de Euler na construção dos poliedros de Platão usando *papercraft*.

Objetivo: Explorar e compreender o teorema de Euler aplicando-o na construção dos poliedros de Platão utilizando *papercraft* como material didático, além de identificar e classificar os poliedros de Platão, construir modelos de poliedros de Platão utilizando *papercraft* e verificar a aplicação do teorema de Euler nos modelos construídos.

Primeiro momento

1) Iniciar a atividade, recapitulando os conceitos de polígonos e poliedros.

2) Em seguida, definir e classificar os poliedros de Platão e suas características: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.

3) Promover um debate sobre exemplos de poliedros encontrados na natureza e em objetos do cotidiano.

4) Apresentar o teorema de Euler com exemplos práticos de poliedros simples.

5) Identificar e classificar os poliedros com base no teorema de Euler.

Segundo momento

7) Pedir aos alunos para formar grupos com até 7 integrantes e logo depois, distribuir os kits com os modelos impressos de *papercrafts* (poliedros de Platão) e as instruções (Anexo A).

8) Orientar e acompanhar os alunos na construção dos poliedros de Platão utilizando o *papercraft*.

9) Após explicar à montagem, iniciar o recorte e a dobra das peças dos modelos seguindo as linhas demarcadas, cuidadosamente.

10) Depois, classificar e identificar as características dos polígonos que formarão as faces dos poliedros de Platão formados através de *papercraft*.

11) Aplicar o teorema de Euler nos modelos dos poliedros de Platão construídos usando *papercraft*.

12) Contar vértices, arestas e faces de cada poliedro e verificar se a fórmula V - A + F =

2 é satisfeita.

13) Apresentar e discutir se o teorema de Euler foi atendido para os modelos construídos, em cada grupo.

14) Em seguida, aplicar uma lista de exercícios 3 com os conteúdos trabalhados (Apêndice C).

15) Discutir a importância do teorema de Euler e dos Poliedros de Platão na matemática e em outras áreas do conhecimento.

Esta atividade visa não apenas transmitir conhecimento teórico, mas também proporcionar uma experiência prática e lúdica que facilite a compreensão e aplicação dos conceitos de poliedros de Platão e teorema de Euler.

2.3.4 Quarta Atividade

Estudo da planificação durante a montagem de *papercraft* de personagens de desenho animado.

Objetivo: Explorar a planificação de figuras tridimensionais e compreender suas propriedades através da construção de *papercrafts* de personagens de desenho animado.

Primeiro momento

1) Inicialmente, revisar os conceitos básicos de poliedros.

2) Em seguida, explicar o conceito de planificação de figura tridimensional, mostrando exemplos de planificações de poliedros.

3) Dar exemplos de planificação de objetos tridimensionais no cotidiano dos alunos.

4) Pedir aos alunos para recortar os poliedros de Platão formados na atividade anterior, com o objetivo de obter uma representação da planificação desse poliedro e em seguida, comparar o resultado com os colegas.

5) Logo depois, questionar os alunos se existem outras possibilidades de planificações de um mesmo poliedro.

6) Pedir aos alunos para desenhar no caderno outras possibilidades de planificações do hexaedro e do octaedro.

7) Calcular com os alunos as áreas totais das superfícies planificadas do hexaedro e do octaedro. Além disso, calcular os volumes desses poliedros com os alunos.

Segundo momento

8) Pedir aos alunos para formar grupos com até 7 integrantes e logo depois, distribuir os kits com os modelos impressos de *papercraft* e as instruções (disponíveis on-line - ver subseção 2.2.2).

9) Após explicar à montagem, iniciar o recorte das peças dos modelos seguindo as linhas demarcadas, cuidadosamente e reforçar na prática, os conceitos estudados sobre planificação.

10) Posteriormente, relembrar na prática à classificação dos polígonos e suas propriedades, o cálculo de área dos polígonos já estudados em atividades anteriores

11) Discutir como as diferentes partes da planificação se unem para formar a figura tridimensional.

12) Orientar os alunos a dobrar o papel ao longo das linhas pontilhadas, criando as arestas e vértices da figura.

13) Continuar dobrando e colando as abas para formar a figura tridimensional, assegurando que todos os *papercrafts* sejam montados corretamente.

14) Após o término do *papercraft*, pedir aos estudantes que apresentem seus modelos de *papercraft*, discutindo os conceitos aplicados na sua construção. Além de analisar as propriedades da figura, como o número de faces, vértices e arestas.

15) Em seguida, aplicar uma lista de exercícios 4 com os conteúdos trabalhados (Apêndice D).

16) Fazer uma reflexão sobre a importância da prática com os alunos e discutir quais dificuldades encontraram durante a montagem e como foram superados. Questionar os alunos, como a montagem os ajudou na compreensão dos conceitos geométricos?

Essa atividade permite que os alunos trabalhem de maneira organizada e detalhada, maximizando o tempo de aula e garantindo um aprendizado lúdico e efetivo.

3 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

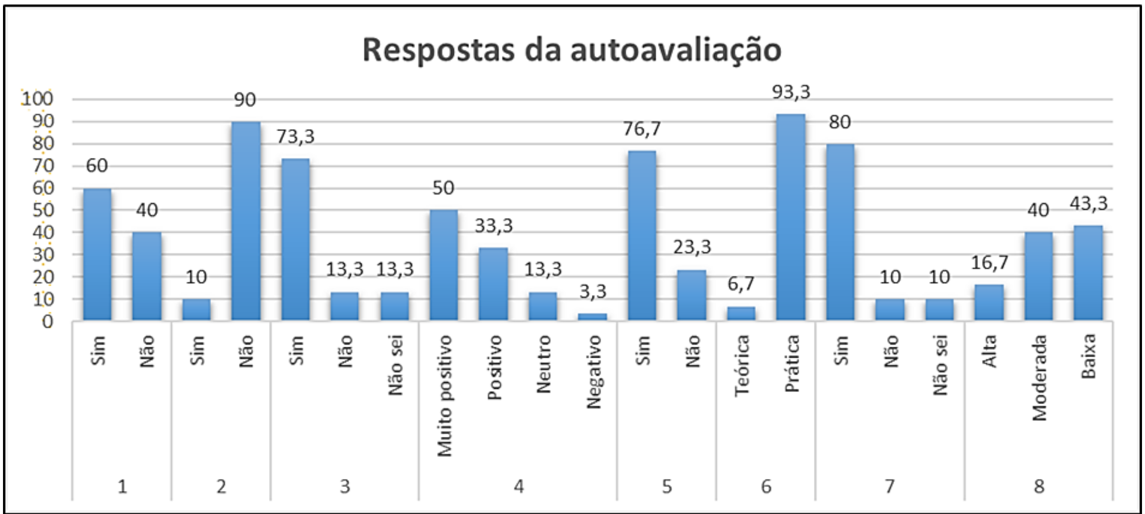
Nesta seção, são apresentados os resultados das aplicações das atividades lúdicas, que utiliza o *papercraft* como material didático através de procedimentos metodológicos alinhados ao ensino da geometria. A seção é composta pela descrição da análise do questionário de autoavaliação, das aplicações das atividades, das listas de exercícios e dos resultados como instrumento significativo para avaliação do trabalho proposto.

Análise do questionário de autoavaliação aplicado antes das intervenções das atividades.

O ensino da geometria no 3º ano do ensino médio pode apresentar desafios significativos para muitos alunos. Verificamos na literatura, que os conceitos abstratos e a necessidade de visualizar formas tridimensionais em um espaço bidimensional podem dificultar a compreensão e o engajamento dos estudantes. Para enfrentar esses desafios, propomos o uso de *papercraft*, como uma ferramenta pedagógica prática e inovadora. A proposta é que, através da manipulação e montagem de figuras geométricas, os alunos possam desenvolver uma compreensão mais concreta e intuitiva dos conceitos geométricos.

Para avaliar a viabilidade e a recepção do uso de *papercraft* como material didático no ensino da geometria, foi aplicado um questionário de autoavaliação aos alunos da turma predeterminada (3º ano C). Vale ressaltar que participaram da avaliação do questionário apenas 30 alunos, pois 5 alunos faltaram a aula. O objetivo do questionário propõe identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre *papercraft*, suas experiências anteriores com a técnica, e suas percepções sobre o uso de materiais manipulativos para o aprendizado de conceitos geométricos. Os dados obtidos através do questionário forneceram informações valiosas sobre a aceitação e as expectativas dos alunos em relação à abordagem pedagógica proposta, conforme podem ser observados no Figura 41.

Figura 41 – Dados obtidos através do questionário.



Questionário de autoavaliação

1. Você já ouviu falar sobre papercraft?
- Sim ( ) - Não ( )

2. Você já fez algum projeto de papercraft antes?
- Sim ( ) - Não ( )

3. Você acha que o papercraft pode ajudar a entender conceitos de geometria?
- Sim ( ) - Não ( ) - Não sei ( )

4. Qual a sua opinião sobre o uso de papercraft para aprender geometria?
- Muito positivo ( ) - Positivo ( ) - Neutro ( ) - Negativo ( )

5. Você sente dificuldade em aprender geometria?
- Sim ( ) - Não ( )

6. Você prefere aulas teóricas ou práticas?
- Teóricas ( ) - Práticas ( )

7. Você acredita que atividades práticas podem melhorar seu desempenho em geometria?
- Sim ( ) - Não ( ) - Não sei ( )

8. Qual sua familiaridade com as ferramentas e técnicas de papercraft (ex: cortes, dobraduras, montagens)?
- Alta ( ) - Moderada ( ) - Baixa ( )

Fonte: Autor, 2024.

Verificou-se que a maioria dos alunos já ouviram falar sobre *papercraft*, visto que essa pratica foi observada em uma eletiva no ano anterior (2023), mas apenas 10% tinham feito algum projeto utilizando essa técnica. A percepção geral sobre a utilidade do *papercraft* para o ensino de geometria foi positiva, com aproximadamente 73% dos alunos, acreditando que pode ajudar a entender os conceitos. Uma grande parte dos alunos (77%, aprox.) sente dificuldade em aprender geometria, indicando que métodos alternativos podem ser benéficos. A preferência por aulas práticas sobre aulas teóricas é clara, com cerca de 93% dos alunos preferindo atividades práticas. Além disso, os resultados mostraram que existe uma confiança significativa de 80%, indicando que atividades práticas podem melhorar o desempenho em geometria. Por fim, foi verificado que a familiaridade *papercraft* varia, mas há uma predominância de alunos com familiaridade moderada a baixa com as técnicas e ferramentas necessárias, indicando que o *papercraft* também pode ser uma ferramenta pedagógica que pode auxiliar no desenvolvimento da coordenação motora fina dos estudantes.

Esses resultados fornecem uma base sólida para a implementação de atividades didáticas utilizando *papercraft*, permitindo ajustar as abordagens conforme necessário para maximizar a eficácia no ensino da geometria.

APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES USANDO PAPERCRAFT

A proposta de atividades aplicada, quando comparada com as exigências curriculares da BNCC, se mostra de grande eficácia, uma vez que essas atividades respeitam e seguem os conteúdos que devem ser contemplados para um melhor aprendizado da geometria por parte dos alunos, sendo este o principal objetivo deste estudo. Esse alinhamento é importante para evitar que os materiais concretos sejam usados de maneira mecânica com pouca ou nenhuma aprendizagem dos conceitos matemáticos por trás dos procedimentos.

Na primeira atividade proposta, a maioria dos alunos mostrou-se altamente engajado durante a construção dos *papercrafts* (Figura 42), relatando que a atividade era divertida e envolvente. Ainda se constatou um aumento significativo na interação entre os alunos, com colaborações e discussão sobre as melhores técnicas para montar os modelos e como os conceitos de geometria abordados podiam ser identificados na prática.

Figura 42 – *Papercrafts*: poliedros montados pelos alunos.

Fonte: Autor, 2024.

Durante a aplicação da lista de exercícios 1, verificou-se que aproximadamente 92%

dos alunos do 3º ano C conseguiram identificar corretamente os conceitos de ponto, reta e plano; diferenciar segmento de reta e semirreta nos modelos e entender claramente a definição, a classificação e as propriedades dos ângulos presentes nas formas geométricas. Nas turmas dos 3º ano A,B e D, verificaram-se que os desempenhos nos conteúdos abordados foram cerca de 72% , 65% e 62% respectivamente.

De modo geral, a primeira atividade utilizando *papercrafts* para o ensino de noções primitivas de geometria e ângulos foi claramente produtiva, uma vez que a maioria dos alunos mostrou um alto nível de engajamento e uma melhoria significativa na compreensão dos conceitos geométricos estudados durante a construção dos objetos manipuláveis.

Na segunda atividade da intervenção, focou-se na construção dos *papercrafts* usando os conceitos de polígonos e poliedros, dando ênfase aos estudos de triângulos e quadriláteros, com o objetivo de reforçar a compreensão das formas geométricas, suas características e a aplicação prática em modelos concretos.

Aqui estão os resultados da montagem dos *papercrafts* mencionados, associados aos conceitos de polígonos e poliedros:

Ratatouille: O *papercraft* de Ratatouille apresentou um nível de dificuldade moderada, necessitando de 2 horas de duração para sua montagem, aproximadamente. Ele é composto por várias faces poligonais, que se unem para formar à figura tridimensional. As peças menores, como o rosto e as mãos, são detalhadas e exigem precisão para que os polígonos se encaixem corretamente (Figura 43).

Figura 43 – *Papercraft* de Ratatouille.

Fonte: Autor, 2024.

Bebê Yoda de Star Wars: O *papercraft* de Bebê Yoda apresentou um nível de dificuldade moderada a difícil segundo à opinião dos alunos, precisando de 2 horas de duração para sua montagem, aproximadamente. Este *papercraft* inclui várias faces poligonais, especialmente nas orelhas e na capa, sendo os triângulos, os polígonos que mais aparecem, nesse *papercraft*. A combinação desses polígonos resulta em um poliedro detalhado que representa o Bebê Yoda (Figura 44).

Figura 44 – *Papercraft* de Bebê Yoda de Star Wars.

Fonte: Autor, 2024.

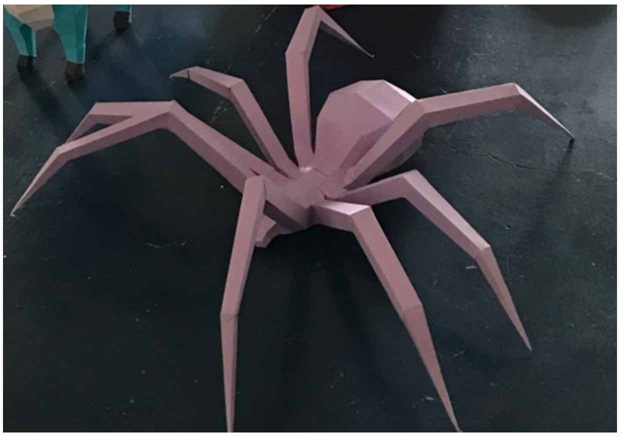
Raposa: O papercraft da raposa apresentou um nível de dificuldade fácil segundo à opinião dos alunos, sendo necessária 1,5 horas de duração para sua montagem, aproximadamente. A raposa é formada predominantemente por polígonos quadriláteros simples que, quando montados, criam um poliedro tridimensional. As partes principais são a cabeça e a cauda, que necessitam de alinhamento preciso dos polígonos (Figura 45).

Figura 45 – *Papercraft* da raposa.

Fonte: Autor, 2024.

Aranha: O papercraft de aranha apresentou um nível de dificuldade difícil segundo à opinião dos alunos, sendo necessária 2,5 horas de duração para sua montagem, aproximadamente. A aranha consiste em várias partes poligonais pequenas e delicadas, como as pernas e o corpo. A montagem dessas partes cria um poliedro complexo, exigindo cuidado para que os polígonos fiquem simétricos e bem alinhados. As pernas desse papercraft incluem faces poligonais formadas por triângulos e quadriláteros e seu corpo é formado em quase sua totalidade por quadriláteros (Figura 46).

Figura 46 – *Papercraft* de aranha.



Fonte: Autor, 2024.

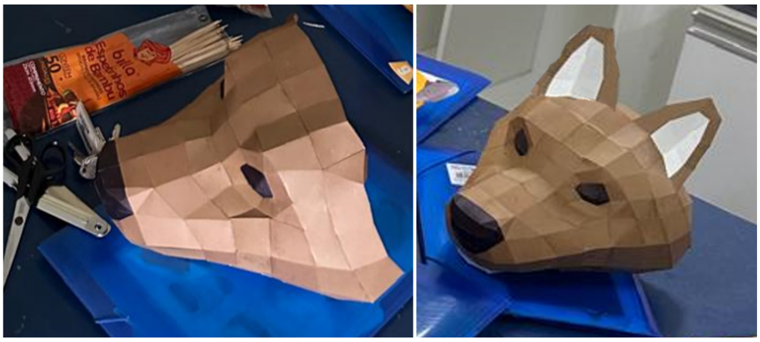
Panda com coração: O *papercraft* de panda apresentou um nível de dificuldade moderada, necessitando de 2 horas de duração para sua montagem, aproximadamente. O panda é composto, predominantemente, por polígonos quadriláteros que formam as diferentes partes do corpo do panda e o coração. A junção desses polígonos cria um poliedro tridimensional com detalhes bem definidos, como podemos observar na Figura 47.

Figura 47 – *Papercraft* de panda segurando um coração.

Fonte: Autor, 2024.

Cabeça de cachorro: O papercraft de cabeça de cachorro apresentou um nível de dificuldade fácil de acordo com a opinião dos alunos, necessitando de apenas 1 hora para montá-la, aproximadamente. Esse papercraft é ideal para iniciantes, pois usa polígonos maiores e menos detalhados. A montagem das partes forma um poliedro simples, representando a figura da cabeça de um cachorro (Figura 48).

Figura 48 – *Papercraft* da cabeça de cachorro.



Fonte: Autor, 2024.

Esses *papercrafts* exemplificam a aplicação prática dos conceitos de polígonos e poliedros, onde as formas bidimensionais (polígonos) são combinadas para criar estruturas tridimensionais (poliedros) detalhadas e complexas.

A atividade foi desenvolvida ao longo de quatro aulas divididas em dois momentos, proporcionando aos alunos uma experiência prática e visual do conteúdo de interesse.

Os alunos demonstraram um entendimento mais profundo das propriedades dos polígonos e poliedros após a construção dos modelos tridimensionais. Ao manusear e montar os *papercrafts*, puderam observar e identificar as faces poligonais, arestas e vértices de cada forma, facilitando a internalização dos conceitos geométricos. A atividade permitiu que eles visualizassem de maneira concreta as diferenças entre polígonos e poliedros, enriquecendo a aprendizagem teórica com uma prática significativa.

A construção dos modelos de *papercraft* também ajudou os alunos a compreender melhor as características específicas de diferentes polígonos e poliedros. Eles puderam explorar a regularidade das formas, a simetria, a classificação e a relação de congruência e semelhança entre polígonos, especialmente, dos triângulos e quadriláteros. Além disso, foi possível trabalhar os cálculos de perímetros e áreas dessas figuras planas. Verificou-se também que os alunos desenvolveram habilidades motoras finas e a capacidade de seguir procedimentos técnicos, pois os modelos foram construídos com perfeição. Essa aplicação prática consolidou o conhecimento teórico, tornando o aprendizado mais dinâmico e significativo.

Além da construção dos modelos, os alunos do 3º ano C realizaram a lista de exercícios 2 que abordava definição, classificação e propriedades de polígonos e poliedros. Os resultados dos exercícios mostraram um avanço significativo no entendimento teórico dos alunos, já que cerca de 91% dos alunos foram capazes de definir corretamente polígonos e poliedros, além de calcular perímetros e áreas corretamente das formas geométricas. Constataram-se que os desempenhos das turmas dos 3º ano A e B foram 73% e 66%, respectivamente. Já a turma do 3º ano D não teve um resultado satisfatório (57% aproximadamente).

De forma geral, os resultados da segunda atividade indicam que a construção de modelos tridimensionais, associando os conceitos de polígonos e poliedros, juntamente com exercícios teóricos, é uma abordagem eficaz para o ensino de geometria. Esta prática não apenas reforça a compreensão teórica dos alunos, mas também proporciona uma aplicação prática que enriquece a experiência de aprendizado. Portanto, recomenda-se a continuidade e ampliação do uso de *papercrafts* como uma ferramenta didática valiosa no ensino de geometria.

Na terceira atividade, os alunos exploraram os poliedros de Platão através da construção de modelos usando *papercraft*. Além disso, foram aplicados exercícios para avaliar a compreensão dos conceitos de poliedros de Platão e do teorema de Euler.

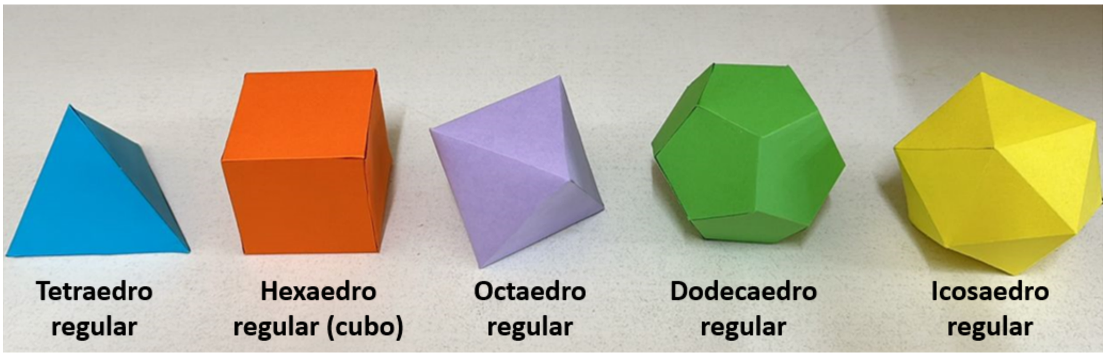
Os alunos construíram modelos dos cinco poliedros de Platão utilizando *papercraft*, observando as características de cada um, como número de faces, vértices e arestas, conforme podemos ver na Figura 49 algumas etapas da montagem dos *papercrafts*. Ainda, foram revisados durante a montagem dos poliedros alguns conceitos estudados nas atividades anteriores como ângulos, classificação e características dos polígonos, congruência e semelhança de polígonos.

Figura 49 – Montagem dos poliedros de Platão.

Fonte: Autor, 2024.

Um poliedro de Platão é definido como um sólido geométrico onde todas as faces são polígonos regulares idênticos, e o mesmo número de faces se encontra em cada vértice. Na Figura 50, podemos observar com mais detalhes os cinco poliedros de Platão montados pelos alunos do 3º ano C.

Figura 50 – Os cinco poliedros de Platão na ordem crescente de número de faces.



Fonte: Autor, 2024.

Após a realização das atividades e a resolução dos exercícios da lista 3, foi feito um levantamento para medir o nível de conhecimento consolidado pelos alunos. O resultado mostrou que cerca de 85% dos alunos do 3º ano C consolidaram o conhecimento dos conteúdos abordados, compreendendo corretamente as definições, características dos poliedros de Platão e a aplicação do teorema de Euler, enquanto as turmas dos 3º ano A,B e D, tiveram respectivamentes 73%, 66% e 65%.

A construção dos poliedros de Platão com *papercraft* proporcionou uma experiência prática e visual que ajudou os alunos a compreenderem as propriedades desses sólidos geométricos. A alta taxa de consolidação do conhecimento reflete a eficácia da metodologia utilizada na atividade.

Na quarta atividade, os alunos construíram *papercrafts* de personagens de Pokémon e Naruto a partir de peças planificadas. O objetivo foi aplicar conceitos de planificação e habilidades manuais para montar modelos tridimensionais de Pokémons e de kurama (raposa de Naruto), utilizando várias partes planificadas do modelo de *papercraft* escolhido. Nessa atividade, os alunos também estudaram a planificação dos poliedros de Platão montados na terceira atividade. Nesse momento, os estudantes observaram na prática outras possibilidades de planificação de um mesmo poliedro. Pediu-se também aos alunos para calcular a área das superfícies e o volume dos hexaedros e octaedros. Além disso, foram aplicados exercícios para avaliar a compreensão dos conceitos relacionados à planificação e construção de *papercrafts*.

Os alunos receberam peças planificadas de diferentes personagens de desenho animado e durante a montagem, os alunos observaram as particularidades de cada um, como características dos polígonos que as formavam e número de faces presentes, conforme ilustradas na Figura 51 as peças dos *papercrafts* dos pokémons: Pikachu (superior) e Charmander (inferior).

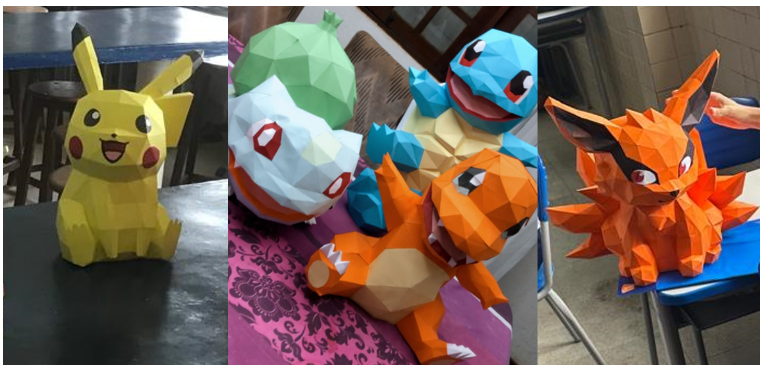
Figura 51 – Montagem dos *papercrafts* dos pokémons: Pikachu e Charmander.

Fonte: Autor, 2024.

Os *papercrafts* de personagens de desenho animado apresentaram nível de dificuldade de moderada a difícil segundo à opinião dos alunos, sendo necessária em média 2 horas para montar cada um, trabalhando em grupo de 6-7 componentes. Estes *papercrafts* incluem várias faces poligonais, sendo triângulos e quadriláteros as formas de polígonos que mais presentes. Eles são compostos por diversas peças planificadas que formam polígonos complexos, representando as várias partes do corpo. A montagem dessas peças cria um poliedro detalhado e imponente, capturando a essência dos personagens.

Na Figura 52, estão os resultados da montagem dos *papercrafts* trabalhados durante as aulas da quarta atividade.

Figura 52 – *Papercrafts* de personagens de desenhos animados montados pelos alunos.



Fonte: Autor, 2024.

Após a realização das atividades e a resolução dos exercícios da lista 4, verificou-se que por volta de 79% dos alunos da turma do 3º ano C obtiveram um nível de aprendizagem desejável em relação aos conteúdos abordados, enquanto as turmas dos 3º ano A,B e D, tiveram cerca de 68%, 63% e 61%, respectivamente. Além disso, observou-se que os alunos do 3º ano C compreenderam corretamente o processo de montagem de *papercrafts* a partir de peças planificadas, demonstrando habilidades manuais adequadas para a tarefa.

A integração da construção de modelos de *papercraft* com a aprendizagem teórica facilitou a compreensão prática dos conceitos, resultando em modelos tridimensionais precisos e esteticamente agradáveis. Esses resultados refletem a eficácia da metodologia utilizada, mostrando que a maioria dos alunos foi capaz de aplicar com sucesso os conceitos aprendidos na montagem dos *papercrafts*.

Após as intervenções das atividades utilizando *papercraft* como ferramenta pedagógica para o ensino de geometria na turma do 3º ano C, os desempenhos acadêmicos das turmas dos 3º anos foram avaliados através da 1ª avaliação bimestral, igual para todos. Os resultados obtidos através dessa avaliação indicaram que a turma do 3º ano C, obteve um desempenho superior em comparação às outras três turmas do 3º ano que tiveram apenas aulas expositivas, como podemos ver na Tabela 1.

Tabela 1 – Médias bimestrais das turmas.

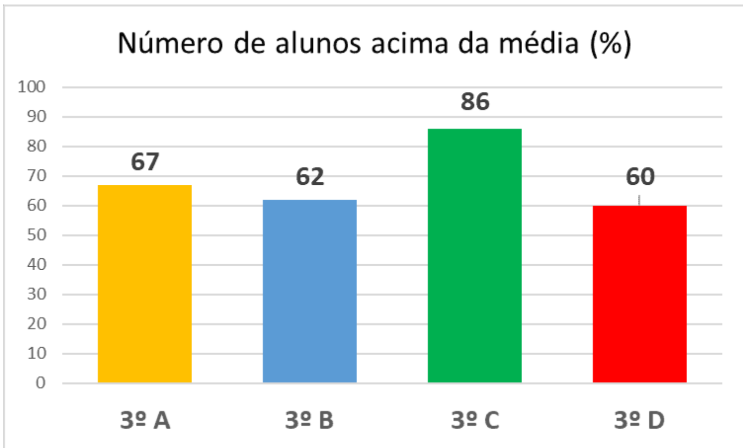
Turmas	Médias*
3º A	6,67 ± 1,61
3º B	6,09 ± 1,31
3º C	7,52 ± 1,23
3º D	5,48 ± 1,05

Fonte: Autor, 2024.

*Médias calculadas com desvio padrão no Excel.

A turma do 3º ano C apresentou uma média significativamente mais alta em relação às outras turmas. A média de acertos nas questões de geometria foi superior em 13%, 23% e 37% quando comparada com a média das turmas dos 3º anos A, B e D, respectivamente. Além disso, os desvios padrões das médias indicaram que as turmas dos 3º anos C e D, obtiveram o grau de variação ou dispersão menor em relação às turmas dos 3º anos A e B, indicando que as notas das turmas C e D tendem a estar próximas de suas médias. Com isso, podemos verificar que os alunos do 3º ano C, além de obterem os melhores resultados, obtiveram notas homogêneas, porém os alunos da turma do 3º ano D, obtiveram notas homogêneas e baixas. Para ressaltar esse resultado, podemos ver na Figura 53 o número de alunos acima da média, sabendo que a média adotada na escola é 6.

Figura 53 – Números de alunos acima da média.



Fonte: Autor, 2024.

Como podemos ver no gráfico da Figura 54, certa de 86% dos alunos do 3º ano C alcançaram a média, em contrapartida, as demais turmas não chegaram há 70%.

Esses resultados sugerem que a inclusão de ferramentas pedagógicas como o *papercraft* no ensino de geometria pode contribuir significativamente para a melhoria do aprendizado e do desempenho dos alunos, promovendo uma compreensão mais profunda e engajada dos conceitos geométricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em concordância com os resultados apresentados, a proposta mostra-se útil sob ponto de vista da geometria plana e espacial, já que estimula o estudante a interagir com os objetos em questão, decifrando e manipulando-os com a mediação do professor, estabelecendo um novo embasamento para a construção do conhecimento geométrico tanto plano como espacial e despertando o empenho do aluno na área da geometria.

Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos muitas vezes se mostraram surpresos por se tratar de uma metodologia que se distanciava do padrão de aula expositiva com o qual eles estavam acostumados, e que pelo fato de ter sido feita alusão a personagens de desenhos animados do seu cotidiano, os alunos se sentiram motivados a participar e estudar o conteúdo proposto, melhorando, significativamente, a assiduidade, a frequência, o comportamento, as habilidades motoras, a interação entre os alunos e o desempenho acadêmico.

Outro fator que segundo os próprios alunos teria sido de grande importância para despertar sua atenção, seria o uso da interdisciplinaridade, considerando que por promover o diálogo com a artes, mesmo os alunos que normalmente não se identificam com a geometria, observaram os elementos artísticos e em decorrência disso, também se propuseram a participar da atividade que lhes foi proposta. A atividade foi tão bem aceita por parte dos alunos, que houve muitos casos nos quais os mesmos solicitaram que se sobrassem mais figuras, que lhes fossem dadas para que eles pudessem confeccionar com o intuito de colecionar, o que denota o quanto as atividades teriam sido agradáveis para eles.

Portanto, é valido destacar a importância da utilização do *papercraft* como ferramenta de ensino e aprendizagem da geometria, considerando que os resultados obtidos durante todo o trabalho reforçam a eficácia da intervenção.

Referências

ADHIKARI, Khagendra. Ausubel's learning Theory: Implications on Mathematics Teaching. 2020.

ADOBE STOCK. Simple house paper model easy template vector illustration. 2024. Disponível em: <https://stock.adobe.com/br/images/simple-house-paper-model-easy-template\protect\leavevmode@ifvmode\kern+.2777em\relaxvector-illustration/355806198>. Acesso em: 10 abr. 2024.

AROFAH, M. N.; NOORDYANA, M. A. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Ditinjau dari Kemandirian Belajar Siswa pada Materi Lingkaran di Kelurahan Muarasanding. *Plusminus: Jurnal Pendidikan Matematika*, v. 1, n. 3, p. 421-434, 2021.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo padrões em mosaicos*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 19 nov. 2023.

BRITO, L. P.; ALMEIDA, L. S.; OSÓRIO, A. J. Seeing in believing: impact of digital simulation pedagogical use in spatial geometry classes. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, v. 17, n. 2, p. 109-123, 2021.

DIAS, Cláudio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira. *Desafio geométrico: módulo I*. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana*, v. 9, 9. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013a.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial*, v. 10, 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013a.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar - Geometria espacial, posição e métrica*, v. 10, 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013b.

GILDERSLEEVE, Owen. Paper Cut: *An Exploration Into the Contemporary World of Papercraft Art and Illustration*. EBSCO e-book academic collection. Rockport Publishers, 2014. 191 p.

GORODSKI, Claudio. Um breve panorama histórico da geometria. *Revista Matemática Universitária*, n. 44, p. 14-29, 2009. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/

uploads/sites/27/2018/03/n44_Artigo02.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2023.

GUMIERI, Antonio Cláudio. Aplicação da técnica de ladrilhamento com polígonos regulares nos anos finais do ensino fundamental. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

HERRERA, M. L.; PÉREZ, C. J.; ORDÓÑEZ, J. S. Developing spatial mathematical skills through 3D tools: augmented reality, virtual environments and 3D printing. *International Journal of Interactive Design and Manufacturing*, v. 13, p. 1385-1399, 2019.

IGLIORI, S.; ALMEIDA, M.; COSTA, F. Desenvolvimento de atividades matemáticas para o ensino de quadriláteros e geometria espacial. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, v. 1, p. 3-17, 2018.

LEONARDO, F. M. *Conexões: matemática e suas tecnologias*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, v. 5, p. 236, 2020.

LISNANI, L.; ASMARUDDIN, S. N. Desain Buku Ajar Matematika Bilingual Materi Bangun Datar Menggunakan Pendekatan PMRI Berkonteks Kebudayaan Lokal. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, v. 7, p. 345-356, 2018.

MARINDA, L. Piaget Dan Problematikanya Pada Pendahuluan. p. 116–152, 2014.

MÜLLER, M. G.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.; SCHELL, J. Uma revisão da literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino Peer Instruction (1991 a 2015). *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 39, p. 3403-3423, 2017.

NURFADILAH, P.; AFRIANSYAH, E. A. Analisis Gesture Matematis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Open-Ended. *Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME)*, v. 4, n. 1, p. 14-29, 2022.

OLIVEIRA, W. I. *O Museu Nacional em Papercraft*. Rio de Janeiro, 2021. 232 p.

PEREIRA, Claudio Cesar Barbosa. Proposta de sequências didáticas para o ensino de Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio. 2023. 143 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, 2023.

RIZKY, E. N. F.; SRITRESNA, T. Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis dan Disposisi Matematis Siswa Antara Guided Inquiry e Problem Posing. *PLUSMINUS: Jurnal Pendidikan Matematika*, v. 1, n. 1, p. 33-46, 2021.

YANG, HH.; YIN, SK. Study of Elementary School Students' Geometric Reasoning using Digital Origami Simulation Tool. *The International Journal of E-Learning and Educational Technologies in the Digital Media*, v. 2, n. 1, p. 01-08, 2016

Apêndices

Apêndice A - Lista de exercícios 1

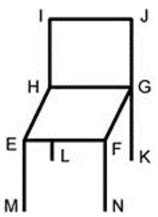
1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Por um ponto passam infinitas retas.
b) Por dois pontos distintos passa uma reta.
c) Uma reta contém dois pontos distintos.
d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Três pontos distintos são sempre colineares.
b) Três pontos distintos são sempre coplanares.
c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.

3. Na aula introdutória de Geometria, a professora conceituou ponto, reta e plano e exemplificou através do seguinte desenho:



Analisando a imagem, alguns alunos fizeram as seguintes afirmações:

I) J, G e K são pontos colineares.

II) EFGH representa um plano.

III) JK e IJ são segmentos de retas paralelos.

Está correto o que se afirma em:

a) I apenas
b) II apenas.
c) I e II.
d) II e III.
e) I, II e III.

4. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
b) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
c) Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

5. Em um sistema ferroviário, algumas linhas de trem nunca se cruzam. Que termo geométrico descreve essa situação?

a) Retas perpendiculares.
b) Retas secantes.
c) Retas paralelas.
d) Retas concorrentes.
e) Retas coincidentes.

6. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
b) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
c) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
d) Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
e) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.
f) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

7. Em projetos de iluminação, os raios de luz são frequentemente representados como linhas que partem de uma fonte. Como esses raios são descritos geometricamente?

a) Retas.

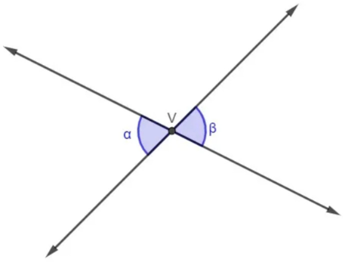
b) Segmentos de reta.

c) Semirretas.

d) Vetores.

e) Planos.

8. Analisando a imagem a seguir, podemos afirmar que os ângulos α e β são:



a) congruentes

b) suplementares

c) complementares

d) replementares

e) adjacentes

9. Uma escada rolante em um shopping forma um ângulo de 30° com o chão. Que tipo de ângulo é esse?

a) Ângulo reto.

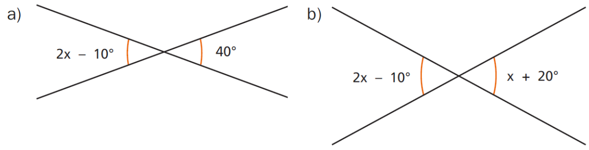
b) Ângulo obtuso.

c) Ângulo agudo.

d) Ângulo raso.

e) Ângulo completo.

10. Determine o valor de x nos casos:



11. Ao cruzar duas varas de madeira em forma de "X", formam-se ângulos opostos pelo vértice. Qual é uma característica desses ângulos? Justifique sua resposta.

a) Eles são sempre obtusos.

b) Eles são sempre diferentes.

c) Eles são sempre congruentes.

d) Eles são sempre retos.

e) Eles são sempre suplementares.

12. Ao desenhar um triângulo em um pedaço de papel, qual é a soma dos ângulos internos?

a) 90 graus.

b) 180 graus.

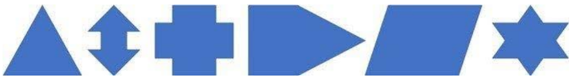
c) 270 graus.

d) 360 graus.

e) 540 graus.

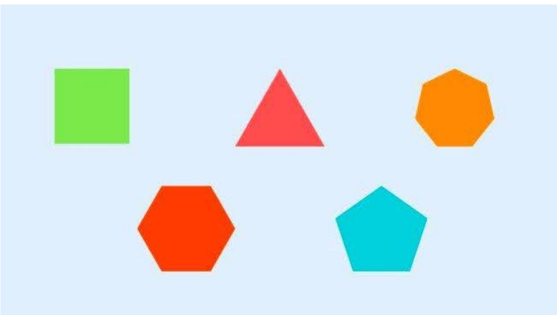
Apêndice B - Lista de exercícios 2

1. Classifique os seguintes polígonos em convexos e não convexos, pela ordem da esquerda para a direita.



a) convexo, convexo, não convexo, convexo, não convexo, não convexo.
b) convexo, não convexo, não convexo, convexo, não convexo, convexo.
c) convexo, não convexo, não convexo, convexo, convexo, convexo.
d) não convexo, não convexo, convexo, convexo, convexo, não convexo.
e) convexo, não convexo, não convexo, convexo, convexo, não convexo.

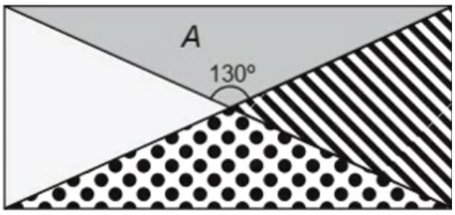
2. Uma construtora foi contratada para realizar as obras de um salão de festas e eventos. Para o piso, o arquiteto projetou um mosaico feito com um arranjo de peças de revestimento na forma de algum polígono regular. O nome desta técnica é ladrilhamento. O dono do futuro salão disse que está pensando nos seguintes 5 polígonos como opções para ladrilhar o piso:



No entanto, o arquiteto lhe disse ao observar as formas, que ele possui três opções apenas, uma vez que com duas delas será impossível realizar o serviço, pois, estas opções não se encaixam perfeitamente, havendo sobreposição das peças. Marque as opções que foram descartadas pelo arquiteto.

a) triângulo e hexágono
b) quadrado e pentágono
c) heptágono e triângulo
d) heptágono e pentágono
e) quadrado e triângulo

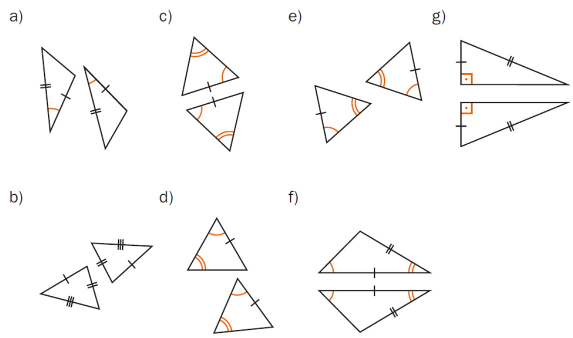
3. Uma colcha de retalhos, com formato retangular, é feita com quatro recortes triangulares de tecidos, conforme a figura.



Considere que as costuras nos sentidos das diagonais dessa colcha são perfeitamente retilíneas. O retalho A da colcha, que tem o formato de um triângulo, pode ser classificado quanto a seus ângulos internos e lados, respectivamente, como

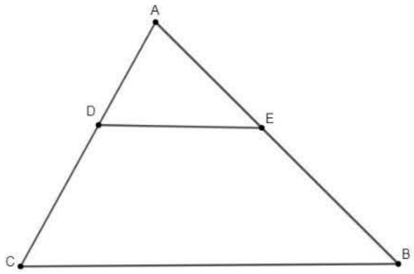
a) acutângulo e isósceles.
b) obtusângulo e escaleno.
c) obtusângulo e isósceles.
d) retângulo e escaleno.
e) acutângulo e equilátero.

4. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique o caso de congruência.

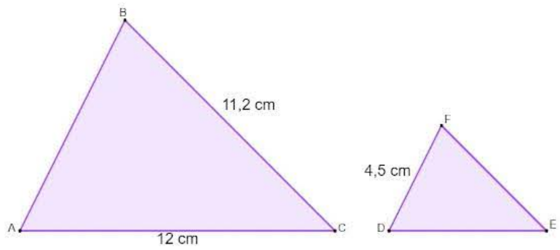


5. Dado o triângulo a seguir e sabendo que o segmento $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{CB}$ e que $\overline{AC}$

mede 10 cm, $\overline{AD}$ mede 4 cm e $\overline{AE}$ é igual a 5 cm, então podemos afirmar que o segmento $\overline{BE}$ mede:

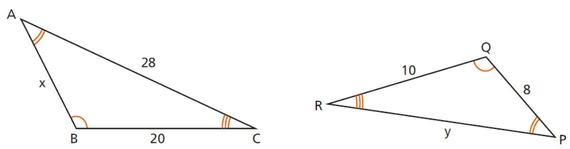


6. Os triângulos ABC e DFE são triângulos semelhantes. Sabendo que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e DFE é 2, então a soma do perímetro desses triângulos é igual a:

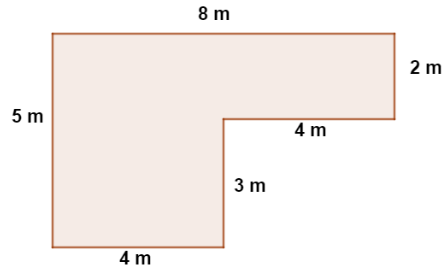


a) 16, 1 cm
b) 32, 2 cm
c) 36,4 cm
d) 48,3 cm
e) 52,9 cm

7. Os triângulos ABC e PQR são semelhantes. Determine x e y.

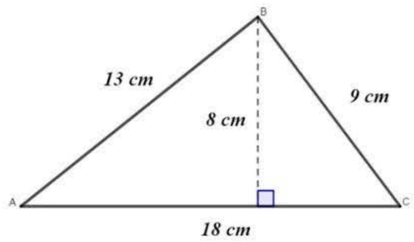


8. A seguir está uma representação do terreno de Jorge, com as medidas de cada um dos lados.



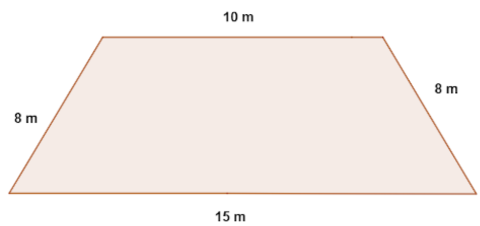
Analisando esse terreno, podemos afirmar que o seu perímetro e sua área total são?

9. Analise o polígono a seguir:



Calcule o perímetro e a área desse triângulo. *Observação: Ao analisar as medidas dadas no problema obeserva-se que o polígono nao existe.*

10. Para cercar o terreno a seguir, Matias optou por colocar uma cerca que tem um custo de R$ 3,00 o metro:



O valor gasto para cercar todo o terreno de Matias é:

a) R$ 46,00
b) R$ 110,00
c) R$ 125,00
d) R$ 138,00
e) R$ 161,00

Apêndice C - Lista de exercícios 3

1. Os sólidos de Platão são conhecidos como os únicos poliedros regulares, ou seja, todas as faces são iguais. Dos poliedros a seguir, são considerados sólidos de Platão, exceto:

a) cubo.
b) dodecaedro.
c) tetraedro.
d) paralelepípedo.
e) icosaedro.

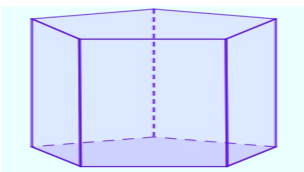
2. Um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas desse poliedro é:

a) 20. b) 24. c) 28. d) 30. e) 32.

3. O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que essa pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas.
b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas.
d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

4. Analise o sólido geométrico a seguir:



Podemos afirmar que:
(I) esse sólido geométrico possui o total de 10 arestas.
(II) esse sólido geométrico é composto por 5 retângulos e 2 pentágonos.
(III) esse sólido geométrico é um poliedro.
Marque a alternativa correta.

a) Somente I é falsa
b) Somente II é falsa
c) Somente III é falsa
d) Somente I e II são falsas
e) Somente I e III são falsas

5. Um poliedro possui 16 faces e 18 vértices. Qual é o número de arestas desse poliedro?

a) 34
b) 32
c) 30
d) 28
e) 2

6. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices desse cristal é igual a:

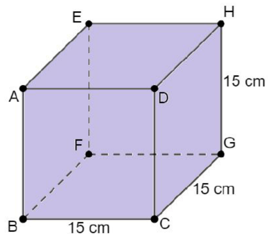
a) 35.
b) 34.
c) 33.
d) 32.
e) 31.

7. Sobre as sentenças:

I. Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.
II. Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.
III. Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.
É correto afirmar que apenas:

a) I é verdadeira.
b) II é verdadeira.
c) III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

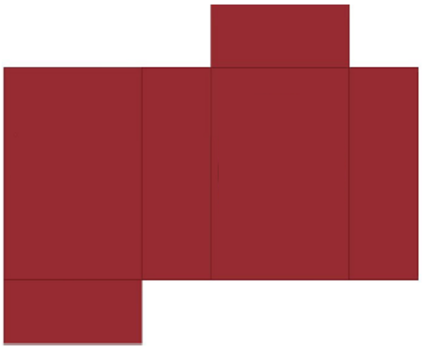
8. Considere o cubo representado a seguir.



Calcule o volume desse cubo.

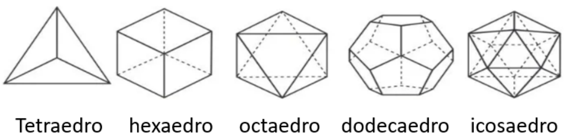
Apêndice D - Lista de exercícios 4.

1. A figura a seguir representa o molde de uma certa embalagem:

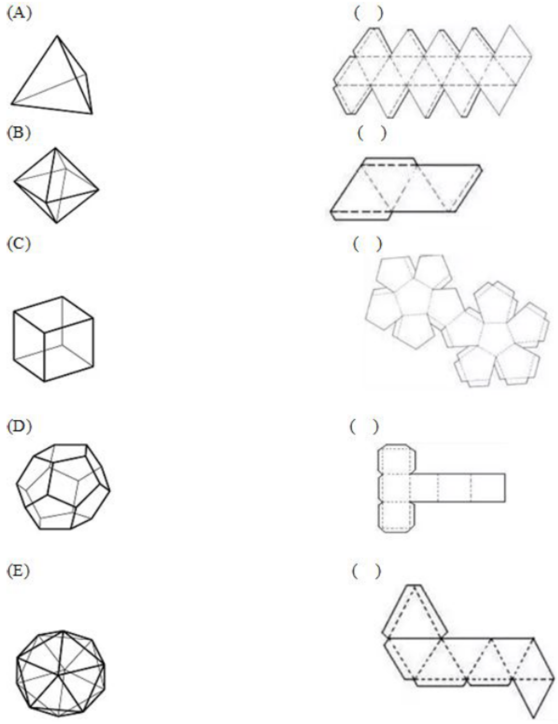


a) Essa embalagem, ao ser fechada, terá a forma de qual sólido geométrico?
b) Quantas faces planas tem essa embalagem?
c) Quais polígonos foram as faces dessa embalagem?

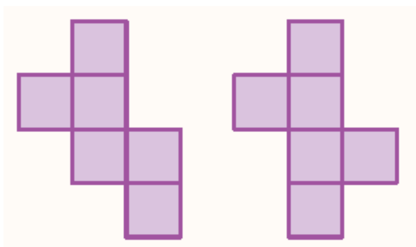
2. Os sólidos ou poliedros de Platão são a forma como são conhecidos os cinco sólidos estudados a fundo por ele. São eles:



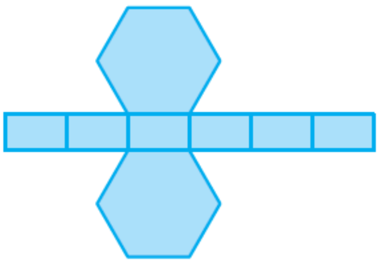
Associe cada um dos poliedros de Platão a sua respectiva planificação:



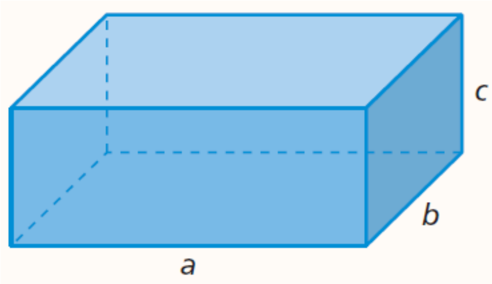
3. Existem 11 diferentes planificações para o cubo. Duas delas estão representadas abaixo; desenhar as outras 9 planificações.



4. Determine o número de arestas e de vértices do poliedro cuja planificação está indicada ao lado.



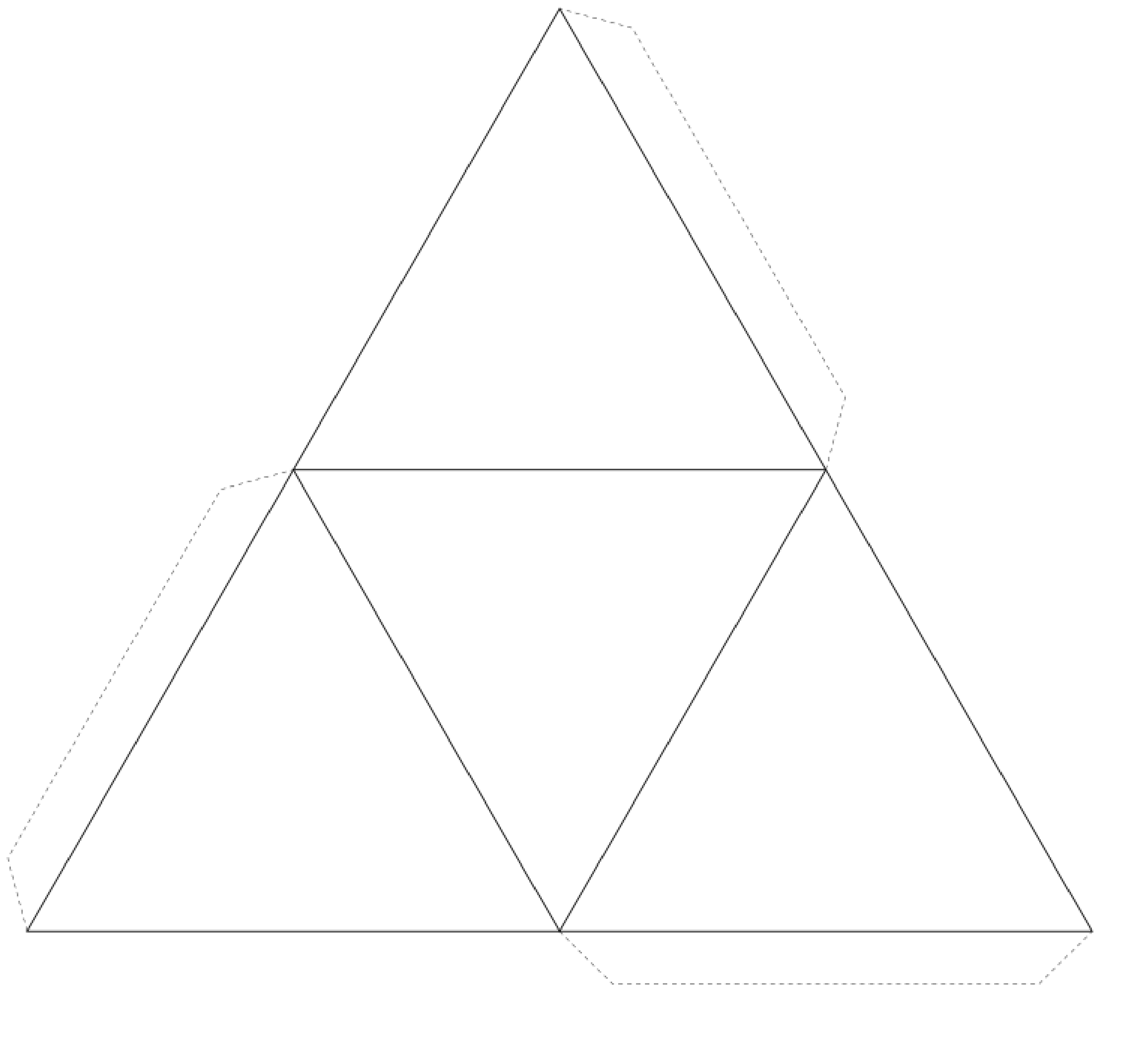
5. Calcular a área total da superfície e o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a = 6 cm, b = 4 cm e c = 2 cm.


c
b
a

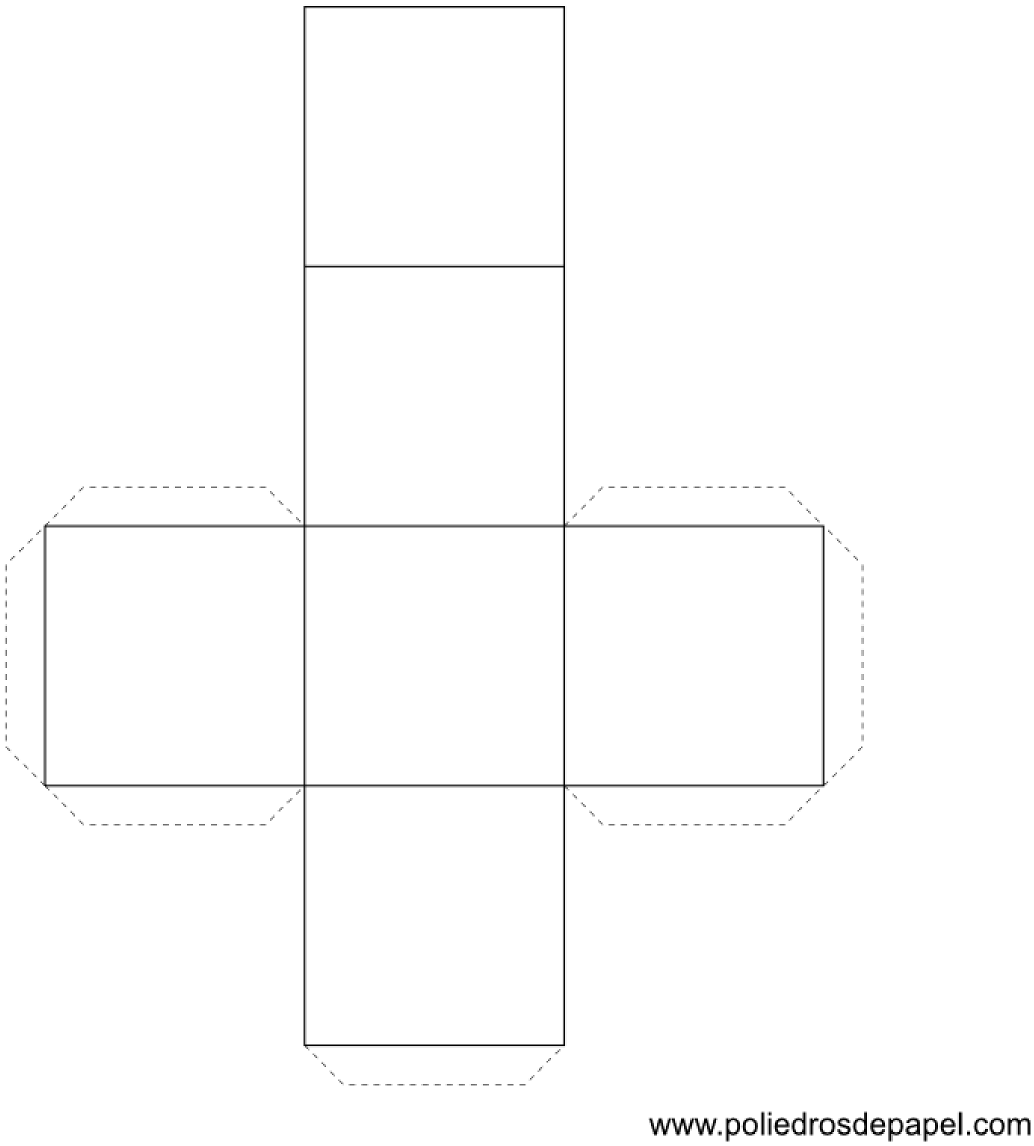
Anexos

ANEXO A – Poliedros de Platão

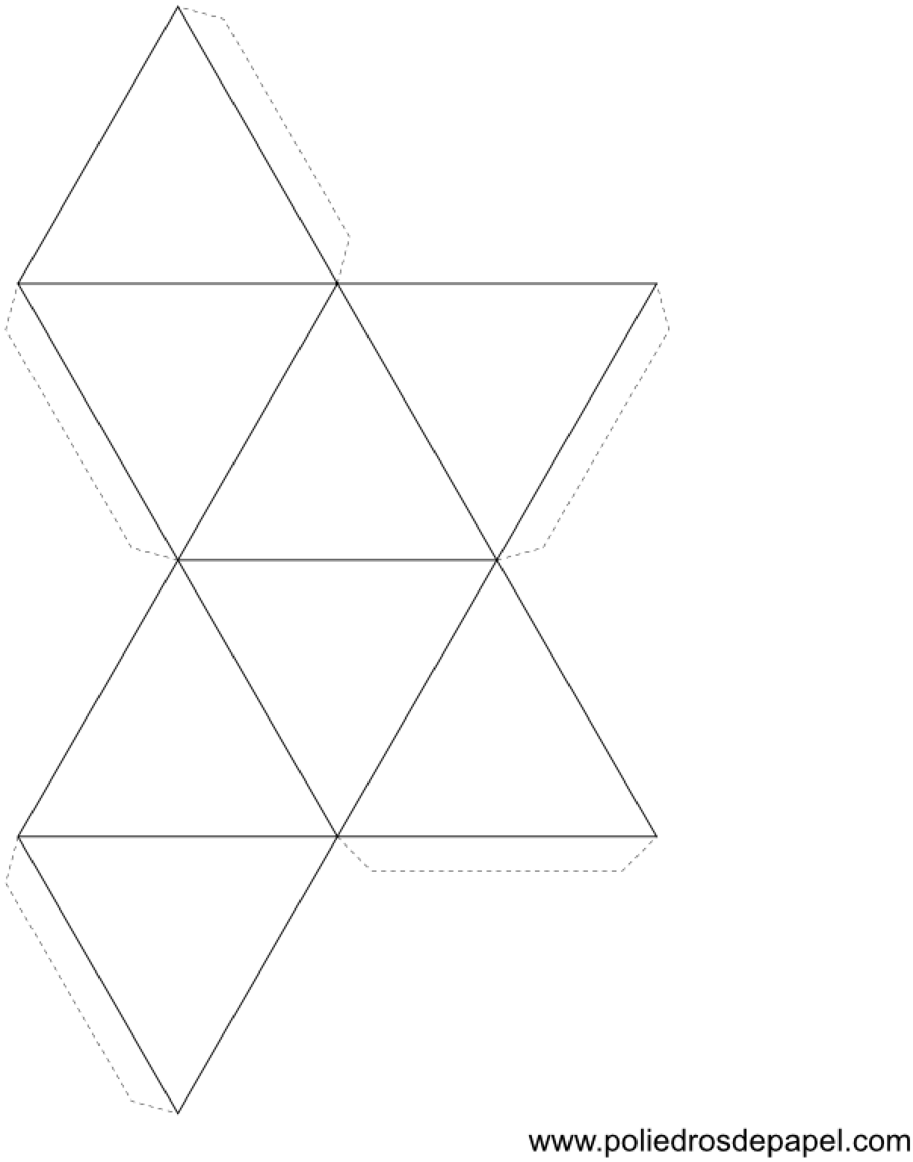
Papercraft - Tetraedro planificado para montar.



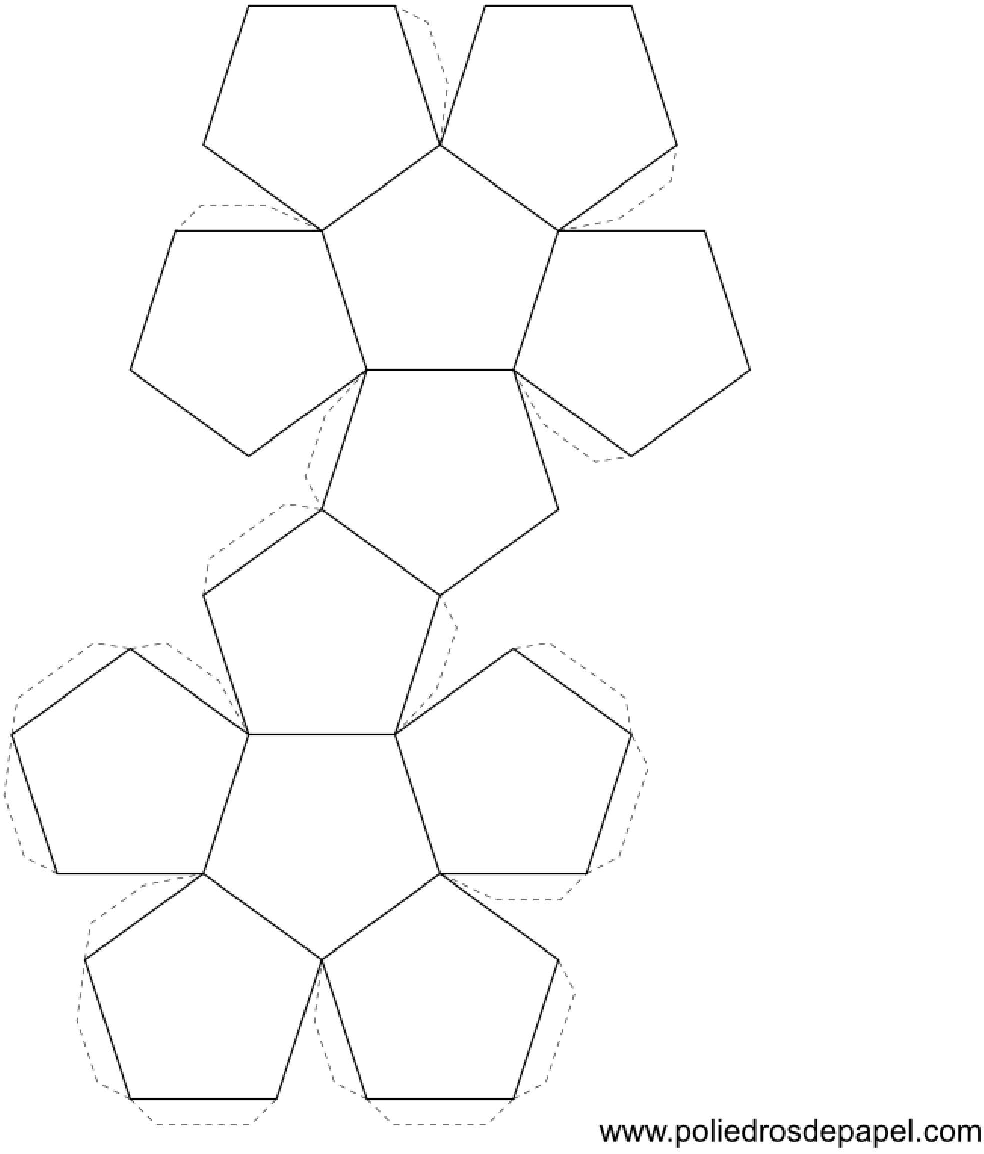
Papercraft - Hexaedro planificado para montar.



Papercraft - Octaedro planificado para montar.



Papercraft - dodecaedro planificado para montar.



Papercraft - Icosaedro planificado para montar.