Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Moisés dos Santos de Sales

Uma proposta pedagógica para o ensino de determinantes: uma aplicação do jogo da velha no cilindro

Teresina - 2024

PROFMAT

Moisés dos Santos de Sales

Dissertação de Mestrado:

Uma proposta pedagógica para o ensino de determinantes: uma aplicação do jogo da velha no cilindro

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador: Antonio Kelson Vieira Da Silva

Teresina - 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S163p Sales, Moisés dos Santos de.
Uma proposta pedagógica para o ensino de determinantes: uma aplicação do jogo da velha no cilindro / Moisés dos Santos de Sales. -- 2024.
72 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Kelson Vieira da Silva."

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ferramenta pedagógica. 3. Recurso didático. 4. Matrizes. 5. Oficina pedagógica. I. Silva, Kelson Vieira da Silva. II. Titulo.

CDD 512.5

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***"Uma proposta pedagógica para o ensino de determinantes: uma aplicação do jogo da velha no cilindro",*** defendida pelo mestrando Moisés dos Santos de Sales, em 15 de agosto de 2024 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente
gov.br ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA
Data: 30/09/2024 21:43:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Antônio Kelson Vieira da Silva Presidente da Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br CARLOS HUMBERTO SOARES JUNIOR
Data: 02/10/2024 09:56:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Carlos Humberto Soares Júnior

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIA DOLORES DOS SANTOS VIEIRA
Data: 09/10/2024 15:03:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Maria Dolores dos Santos Vieira Examinador Externo

Documento assinado digitalmente
gov.br EDVALTER DA SILVA SENA FILHO
Data: 01/10/2024 16:18:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Edvalter da Silva Sena Filho
Examinador Externo

Dedico esta dissertação, em especial, aos meus pais, Marcione Alves de Sales e Leidiane Mesquita dos Santos, que sempre me apoiaram em tudo que me propus a fazer e sempre deram um jeito de estarem presentes e me ajudar sempre que precisei de apoio. Amo vocês.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que foi minha fonte de força e de esperança, meu refúgio nos dias em que mais duvidei da minha capacidade.

Agradeço à minha família: meus pais Marcione e Leidiane, meu irmão Lucas e aos meus avós Maria Da Luz, José Pereira e Teresa. Esses são a minha maior inspiração, me dão um apoio incondicional, vibram por cada passo dado em minha, até aqui, curta carreira profissional. Se fazem presente sempre que podem, as vezes andam os 60 km apenas para me ver sair antes do trabalho, são várias pequenas coisas que fazem toda a diferença na minha vida. Nada do que eu falar aqui vai demonstrar 1% do amor que sinto por vocês.

Um agradecimento especial à minha namorada Kérsia Abreu, que foi muito importante nessa reta final, entendeu a minha distância, a falta de tempo e mesmo assim sempre esteve ao meu lado. Obrigado por tudo, meu amor.

Agradeço também aos meus amigos. Um imenso agradecimento a Adrielle, Hilcard e Lukas, que estão presente em absolutamente todos os dias da minha vida, o "inevitável"é nossa fonte diária de alegrias, brincadeiras, fofocas e muitos conselhos, uma verdadeira família pra mim. Agradecer aos meus amigos Isamara e Matheus Luan, dividir com vocês o fardo do mestrado foi essencial para eu chegar até aqui, criamos boas memórias e histórias para contar. Agradecer aos meus amigos Darwiny, Douglas, Luan e Matheus, pelos memes e também fazerem questão de nos vermos quando ia pra Monsenhor Gil.

Por fim, agradecer ao meu querido orientador, o professor Kelson, na qual foi crucial para escolha do tema e desenvolvimento da pesquisa, obrigado por esse presente, professor.

“*A verdadeira qualidade de um shinobi não está no número de jutsus ou na quantidade de talento que ele possui, o importante é a determinação de nunca desistir.*".

Jiraya.

Resumo

Este trabalho é resultado do estudo sobre jogos como ferramenta pedagógica para melhorar o aprendizado de conceitos matemáticos, trazendo como produto uma oficina sobre o ensino de determinantes. Apresenta-se o jogo da velha tradicional e em seguida introduzimos versões do jogo da velha sobre superfícies, como o toro ou cilindro. A partir da experiência do jogo, este é utilizado como um recurso pedagógico para facilitar a compreensão da definição e do cálculo de determinantes em matrizes quadradas de ordem 3, trazendo uma alternativa pedagógica mais geométrica. Como consequência é proposto uma oficina como estratégia pedagógica para o ensino de determinantes a partir do Jogo da Velha no Cilindro.

Palavras-chave: Ensino de matemática; Jogo da velha; Matrizes; Determinantes; Oficina Pedagógica.

Abstract

This work is the result of a study on games as a pedagogical tool to enhance the learning of mathematical concepts, presenting a workshop on teaching determinants. The traditional tic-tac-toe game is introduced first, followed by versions of tic-tac-toe on surfaces such as the torus or cylinder. From the experience of playing the game, it is used as a pedagogical resource to facilitate the understanding of the definition and calculation of determinants in square matrices of order 3, offering a more geometric pedagogical alternative. As a consequence, a workshop is proposed as a pedagogical strategy for teaching determinants using Tic-Tac-Toe on the Cylinder.

Keywords: Mathematics Education; Tic-Tac-Toe; Matrices; Determinants; Pedagogical Workshop.

Sumário

Referências biliográficas **60**

Capítulo 1

Introdução

O aprendizado de matemática no Brasil, sempre esteve presente em todas as discussões sobre a educação brasileira. Dentre outros motivos, os relatos dos estudantes sobre a dificuldade de aprender a matéria se destaca, e isso pode ser observado através dos índices apresentados por instrumentos especializados na avaliação da educação, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), na qual o Brasil aparece nas últimas posições dos níveis de proficiência. O PISA é uma avaliação que ocorre a cada três anos e visa avaliar o desempenho de alunos em três áreas específicas: Leitura, Matemática e Ciências.

> A maioria dos estudantes brasileiros que participaram do Pisa 2018 se encontra no Nível 1 ou abaixo dele (68,1%). Todos os países e economias participantes do Pisa têm estudantes que se encontram nesses níveis, mas as maiores proporções de estudantes nessa situação são encontradas nos países com menor desempenho. (PISA, 2018, p. 114)

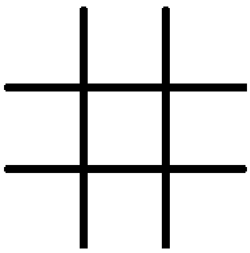
Avaliações como o Pisa, exigem dos alunos participantes muito mais do que a sua capacidade de decorar e aplicar fórmulas, demandam um bom nível de leitura, interpretação e raciocínio lógico para resolver os problemas apresentados. E esse resultado demonstra que a maioria dos estudantes possuem somente o nível básico, considerado o mínimo para o pleno exercício da cidadania.

É notório que a educação do Brasil precisa passar por mudanças que visem uma aprendizagem mais significativa. Em especial na matemática, metodologias de ensino que instiguem a curiosidade dos alunos se faz cada vez mais necessário, e os jogos se apresentam como uma importante ferramenta nesse processo de aprendizagem significativa.

De acordo com o Stamberg e Stochero (2016, p. 157), “por seu caráter lúdico, acabam por despertar o interesse dos discentes e, consequentemente, possibilitam o aumento de suas habilidades lógicas facilitando, assim, a produção de conhecimentos”. Seguindo a mesma linha de raciocínio, Oliveira, Brim e Pinheiro (2019, p. 558) afirmam que “os jogos desenvolvem a capacidade de elaborar estratégias, solucionar problemas e promovem momentos de interações sociais”, ou seja, os jogos são uma importante ferramenta para o desenvolvimento cognitivo e social dos indivíduos, proporcionando um aprendizado dinâmico e significativo. Essa proposta rica e diversificada de conhecimentos que os jogos proporcionam aos alunos, vai de acordo com as propostas das avaliações especializadas, como o Pisa, citado anteriormente.

Diante disso, o presente trabalho buscou investigar a relação entre o jogo da velha no toro e o cálculo de determinantes. O jogo da velha no toro consiste em uma adaptação do jogo da velha tradicional que conhecemos. O tabuleiro original é formado por uma grade com 9 lacunas vazias em uma grade 3x3 (figura 1), dois jogadores marcam as casas alternadamente com símbolos diferentes, com o objetivo de formar três símbolos iguais em sequência horizontal, vertical ou diagonal, caso todas as lacunas sejam preenchidas sem que um dos jogadores consiga formar uma sequência, então o jogo termina empatado. O tabuleiro pode ser construído com uma simples folha de papel, basta desenhar duas linhas horizontais paralelas e cortá-las com outras duas retas verticais também paralelas entre si.

Figura 1: Tabuleito tradicional



Fonte: Próprio autor (2024)

No jogo da velha no toro seus lados se conectam continuamente, ou seja, não há direita ou esquerda. Nesse tabuleiro adaptado, os possíveis caminhos para se ganhar uma partida se confundem com o método prático da regra de Sarrus, método esse visto, por exemplo, no livro de Iezzi e Hazzan, autores do livro Fundamentos de Matemática

Elementar Volume 4.

Afim de que os alunos aprendam essa relação e usem os jogos a seu favor, para um aprendizagem mais significativa do cálculo de determinantes, foi proposto uma oficina pedagógica matemática que pode ser realizada no ambiente da sala de aula com alunos de 2ª ou 3ª série do ensino médio ou até no 1º semestre do curso de matemática no ensino superior. Júnior (2023) ver essa prática como enriquecedora, ao afirmar que "a prática relacionada a construção e aplicação de oficinas evidencia a importância da apresentação de novas possibilidades aos alunos, bem como, oportuniza aos professores outras metodologias para a construção do conhecimento matemático em sala de aula"(Júnor, 2023, p. 49). Nesta oficina, a construção do conhecimento se deu através da prática dos alunos com os jogos e as atividades a serem realizadas, o papel do professor será de organizar cada etapa, para que a sequência seja respeitada conforme será proposto.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos:

- Capítulo 1: Este capítulo fala sobre a relação entre jogos e o ensino de matemática, oferencendo uma visão ampla sobre as vantagens do uso de recursos lúdicos no ensino da matemática visando uma aprendizagem mais significativa de seus conceitos.
- Capítulo 2: Após a apresentação sobre a importância dos jogos, este capítulo traz a história, regras, formação e estratégias vencedoras sobre o jogo da velha. É neste capítulo que é abordado a construção do jogo da velha no toro, mostrando uma visão geral do que é o toro e como adaptar o jogo da velha tradicional à essa estrutura tão difícil de ser visualizada, além de apresentar as regras, como se joga e os caminhos para se vencer uma partida.
- Capítulo 3: Este capítulo aborda de forma bem objetiva o assunto de matrizes e determinantes, mostrando suas definições, propriedades e exemplos.
- Capítulo 4: É neste momento que será apresentado a proposta de oficina para se ensinar o cálculo de determinantes atrvés do jogo citado anteriormente. Está detalhado todo o passo a passo para se ter sucesso na aplicação da oficina.
- Capítulo 5: Será abordado as considerações futuras a respeito do trabalho, os planos de aplicação e o que se deseja colher após as aplicações.

Portanto, esse estudo não apenas aprofunda sobre os conceitos de determinantes, mas também propõe uma atividade lúdica para o ensino desse conteúdo, utilizando um jogo bastante conhecido por todos. Espera-se que as conclusões desta pesquisa ofereçam novas perspectivas sobre o ensino de deteminantes, com contribuições significativas para o ensino de determinantes.

Capítulo 2

Jogos e Matemática

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) é uma avaliação que ocorre a cada três anos e visa avaliar o desempenho de alunos em três áreas específicas: Leitura, Matemática e Ciências. Os resultados do Pisa realizado em 2018 apontam que 68,1% dos estudantes brasileiros estão no Nível 1 ou abaixo dele, o que é considerado o mínimo para o pleno exercício da cidadania.

No âmbito nacional, esses números não são diferentes, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) foi desenvolvido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) para avaliar o ensino brasileiro. A avaliação é realizada pelos estudantes da última serie de cada etapa, no Saeb 2021 houve uma queda de rendimento dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental quando comparado ao Saeb de 2019. Em uma escala de 0 a 9, "os níveis 3 e 4 da escala de proficiência concentram um maior porcentual de alunos (18,2% e 17,5%, respectivamente), seguidos do nível 2 (16,6%) e do nível 0 (14,7%)". (Saeb 2021, p. 177)

> Verifica-se que, em 2021, a concentração de estudantes nos quatro primeiros níveis da escala (0, 1, 2 e 3) é de 62,6%, sendo que, em 2019, esses mesmos níveis concentravam 57,8% dos alunos, revelando que houve uma queda de desempenho dos estudantes brasileiros, com mais estudantes concentrados nos níveis mais baixos de proficiência. Esse dado revela que não há, por parte desses estudantes, o domínio das habilidades mais básicas a serem alcançadas ao final do ensino fundamental. Pode-se dizer que esse conjunto de estudantes, provavelmente, tem dificuldade em habilidades presentes no nível 4 de proficiência e resolver itens nos quais ele tenha que, por exemplo, interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. (Saeb 2021, p. 177)

É possível perceber que o ensino de matemática deve ser discutido entre a comunidade docente visando um aproveitamento maior da aprendizagem por parte dos alunos. O maior desafio dos professores é despertar o interesse dos alunos em aprender matemática, fazer com que eles sintam vontade de estudar os conteúdos, e esse desinteresse pode estar associado a diversos motivos, um deles é maneira como os assuntos são trabalhados em sala, muitas vezes trabalhados sem contextualização e longe da realidade dos estudantes, fazendo com que os alunos criem uma aversão em relação a matemática. D'ambrosio (1989, p. 1) diz que

> primeiro, alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. (D'ambrosio 1989, p. 1)

Esse pensamento está diretamente relacionado as metodologias tradicionais utilizadas em sala, que, em muitas situações, é a única saída encontrada pelos professores. Nesse sentido, Pontes (2021, p. 83) afirma que

> na contemporaneidade, as dificuldades deparadas por educadores e educandos no ato de ensinar e aprender matemática, respectivamente, são inúmeras e bastante conhecidas. O professor, mediador do conhecimento, busca a todo o momento encontrar estratégias que possam minimizar as consternações de seus aprendizes. Por outra direção, esse próprio aluno, não alcança assimilar e compreender os modelos matemáticos propostos por seu professor. Em resumo, o processo de ensino e aprendizagem de matemática fica limitado à utilização de práticas metodológicas, quase sempre tradicionais, e efetivamente perde-se a construção do pensamento matemático tão demandado entre pesquisadores nos diversos congressos de Educação Matemática. (Pontes, 2021, p. 83)

Portanto, o ensino de matemática deve explorar a construção do pensamento matemático, mostrar aos alunos como esses pensamentos estão presentes no dia a dia dos estudantes e como eles podem ser utilizados. Para tanto, o ensino tradicional tem dividido espaço com metologias mais ativas, como é o caso da utilização de jogos em sala para ensino de conteúdos matemáticos, com o objetivo de tornar as aulas mais atrativas e interessante para os alunos. Queiroz (2023) afirma que "os jogos vêm despontando como uma das alternativas promissoras para diversificar a prática docente, pois, são capazes de provocar os alunos, despertando o interesse em aprender de forma divertida e prazerosa"(Queiroz, 2023). Os jogos ainda se apresentam como uma forma de aproximar o ensino da matemática à realidade dos discentes, já que "os estudantes estão inseridos em uma realidade em que o uso de jogos e redes sociais é frequente, enquanto as as aulas de matemática ainda apresentam um teor conteudista e os conteúdos são repassados de maneira tradicional"(Damasceno, 2023, p. 21)

Pode-se perceber que os jogos são uma alternativa interesssante para os professores sobre ao menos dois pontos de vista em relação ao ensino de matemática: de uma matemática longe da realidade dos alunos; de ser uma matéria chata e muito complexa. Além disso, o aspecto social também deve ser levado em consideração, uma vez que promove a interação entre as pessoas envolvidas, tanto os estudantes como também o professor, seguindo esse raciocínio, Oliveira, Brim e Pinheiro (2019, p. 570) afirmam que "os jogos desenvolvem a capacidade de elaborar estratégias, solucionar problemas e promovem momentos de interações sociais", ou seja, muito mais do que uma alternativa de ensino, podem também desenvolver habilidades importantes na formação pessoal e social dos indivíduos.

Os jogos trazem consigo uma ideia de competição saudável entre os concorrentes, diferente das competições que são estabelecidas no meio socioeconômico. Inserir os jogos no processo de ensino-aprenizagem, estabelece uma relação de cooperação entre os estudantes, uma vez que os conteúdos ali presentes estarão sendo debatidos e analisados pelas partes, e essa discussão faz com que os estudantes criem linhas de raciocínio para o debate, internalizando mais ainda o conhecimento adquirido. Sobre a competição saudável em sala, Grando (1995, p. 19) afirma que

> Desta forma, faz-se necessário que nas realações sociais estabelecidas no ambiente de sala de aula de Matemática, entre os alunos e entre o professor de os alunos, esteam formas competitivas de interação, na medida em que a competição implica na utilização, pelo aluno, de toda a sua capacidade no confronto com o outro, possibilitanto a ele um autoconhecimento, ou seja, o conhecimente sobre suas "competências". Nesse sentido, quando o aluno não necessita expor suas habilidades e sua competência, pois as situações escolares não favorecem ambientes para isso, é possível que nem ele mesmo tome consciência do que seja capaz de fazer, ou em que é "melhor"que os outros e onde necessita aperfeiçoar. (Grando, 1995, p. 19

Seguindo a mesma linha de raciocínio sobre a importância dos jogos no processo de socialização dos estudantes, Queiroz (2023, p. 18) diz que

> A aplicação de jogos no ensino de matemática é importante, para que os alunos possam se socializar-se, buscando trabalhar em equipe e em cooperação mútua para chegarem ao objetivo proposto pelo professor na aula. Quando se trabalha o ensino de matemática de maneira divertida, os alunos experimentam o novo, elaborando conceitos concretos, dessa forma, facilitando a aprendizagem. (Queiroz 2023, p. 18)

A possibilidade de autoconhecimento por parte dos estudantes permite a eles evidenciar seus limites, competências adquiridas e percepção dos aspectos aos quais precisa melhorar. Todo esse conhecimento é fundamental para a formação global dos alunos, fazendo com que eles tenham capacidade de planejar os melhores caminhos a serem traçados para a resolução de problemas. A falta desse de autoconhecimento pode implicar em situações adversas, além disso, sair dessas situações pode ser ainda mais desafiador pelo fato de não conhecer seus limites, e estabeler relações com estratégias vencedoras ficará quase impossível.

A inserção dos jogos na parte pedagógica do ensino de matemática já é um tema discutido a bastante tempo no meio acadêmico, muitas são as pesquisas que apontam os jogos como uma ferramenta de ensino. No texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirma que "os jogos podem ser muito úteis para explorar e desenvolver noções de proporção, medidas, conceitos físicos, relações geométricas, diferentes possibilidades e relações."(PCN, 1998, p. 152). E nas discussões mais recentes sobre educação no Brasil não é diferente, o documento que rege a educação básica atualmente, a Base Nacional Cumum Currícular (BNCC) afirma que

> [...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BNCC 2018, p. 276)

Essa discussão rendeu bons frutos à educação como um todo, ter jogos inseridos como elementos fundamentais no processo de ensino-aprendizagem enriquece não somente aos estudantes, mas também possibilita os professores um leque de novas estratégias metodológicas para o ensino de Matemática. Ao mesmo tempo em que a BNCC insere os jogos como um elemento imprescindível no ensino da matemática, alerta também que a utilização desse recurso didático deve estar inseridos em um contexto significativo para os alunos, levando o aluno a refletir e sistmatizar estratégias para a utilização do jogo. Para atingir esse objetivo, os jogos não precisam ser aplicados por completos, modificações e adaptações podem ser realizadas a fim de que o objetivo de uma prendizagem significativa seja atingida pelos alunos, Damasceno (2023, p. 26) diz que os professores não são obrigados a usar um jogo por completo, que podemos selecionar os elementos do jogo sejam pertinentes e que contribuam para atingir o objetivo da aplicação.

Ao realizar a ação de participar dos jogos propostos pelo professor, o aluno irá se deparar com diversas situações como: regras preestabelecidas; tomada de decisão para realizar cada movimento; ao final de cada jogada, traçar a melhor estratégia vencedora; entre outras. Essas situações descritas se relacionam intimamente com a matemática, uma vez que a matemática tem definições e regras definidas de operação, para resolver um problema, antes de tudo, se deve pensar em uma estratégia para resolvê-lo, e para resolver os problemas é necessário seguir os passos definidos anteriormente. Grando (1995, p. 102) afirma que

> Neste sentido, o dinamismo e as relações estabelecidas pela estrutura do jogo se a assemelham às determinadas pela construção matemática. Desta forma, quando o aluno vivencia, através do jogo, tal estrutura, compreende com mais facilidade a estrutura matemática. (Grando, 1995, p. 102)

A perspectiva da resolução de problemas matemáticos, se confunde facilmente com a estrutura lógica dos jogos, nesse momento, cabe ao professor definir os conteúdos a serem trabalhados e pesquisar a melhor opção de jogo para abordá-los. Essa tarefa não é fácil, o professor deve conhecer bem a turma para que entenda qual atenderá melhor seus objetivos, aos quais devem estar alinhados às propostas dos documentos regentes da educação brasileira. Esse é o processo mais complexo para a utilização dos jogos em sala de aula e Queiroz (2023, p. 24) corrobora esse pensamento ao dizer que

> Não é uma tarefa fácil a escolha de jogos para serem utilizados na aulas de matemática, um único jogo poderá ter múltiplas interpretações e sentidos para seus jogadores e para o ensino da Matemática. Outro fator importante é que essa escolha tem que levar em consideração o nível de conhecimento e a idade dos alunos. [...] a escolha do jogo pelo professor deverá no mínimo atender os requisitos básicos para que o aprendizado da turma se torne significativo e que faça jus ao tempo dedicado à atividade lúdica. (Queiroz, 2023, p. 24)

Vale ressaltar que falar sobre a inserção dos jogos no processo de ensino-aprendizagem de matemática não objetiva abolir o ensino tradicional, mas enriquecer a prática pedagógica do professor, visando sempre uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos propostos. Queiroz (2023) destaca que

> A pesquisa não tem o intuito de abolir o ensino tradicional, mas de contribuir com outras metodologias que podem auxiliar na aprendizagem dos alunos. A resolução de exercícios pelos alunos tem o seu valor, mas o professor deve diversificar em sala de aula, utilizando diferentes métodos na abordagem dos conteúdos, assim os conceitos matemáticos podem ser trabalhados com os alunos através de uma articulação entre a metodologia tradicional e as alternativas. (Queiroz 2023, p. 16)

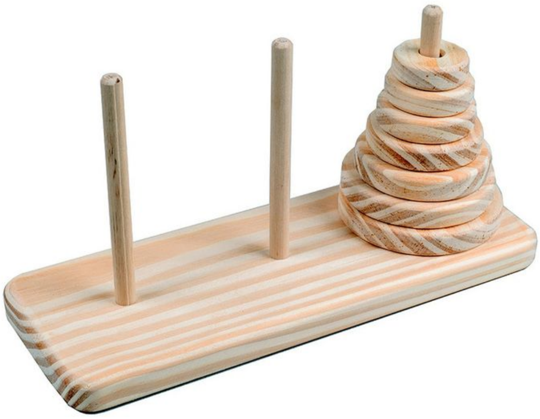
2.1 Tipos de jogos

O uso de jogos nas aulas de matemática tem um papel pedagógico importante, além da contribuição para o ensino do conteúdo proposto, tem um papel social também, visto que as interações entre professores e alunos, também entre alunos e alunos, são mais constantes e intensos. Grando (1995, p.86) diz que

> Quando se propõe a utilização de jogos no contexto educacional de ensino-aprendizagem ,muitas são as finalidades que se quer atingir. Entre elas, destacam-se: a fixação de conceitos, a motivação, a construção de conceitos, aprender a trabalhar em grupo propiciando a solidariedade entre os alunos, estimular a raciocinar, desenvolver o senso crítico, a disposição para aprender e descobrir coisas novas, além d desenvolvimento da cidadania. (Grando, 1995, p.86)

Os jogos podem ser classificados de diversas maneiras: pelo seu formato, número de participantes, duração dos jogos etc. O presente trabalho vai dividir os jogos, inicialmente, em duas categorias: jogos solo, jogos coletivos. Os jogos solo consiste naquele em que o jogador é seu próprio adversário, não compete com outras pessoas, apenas com o tempo de conclusão do jogo ou até mesmo o número de movimentos. O jogo Torre de Hanói é um ótimo exemplo de jogo solo, composto por uma base com três pinos onde em um desses pinos são colocados discos em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo, observe a figura 2.

Figura 2: Torre de hanói.



Fonte: Pinterest

O objetivo do jogo é tranferir os discos de um pino para um dos outros pinos, obedecendo apenas duas regras: só pode ser movido um disco de cada vez; um disco não pode ser posto sobre outro disco de diâmetro menor. Há uma regra matemática para estabelecer o número mínimo de movimentos para vencer o jogo, e o objetivo do jogador é conseguir cumprir o desafio utilizando o número mínimo de movimentos estabelecidos. Caso o jogador não consiga mudar os discos utilizando o número mínimo de movimentos, ele perde. Observe que o jogador só compete contra o número e movimentos e não tem outros adversários.

Nos jogos coletivos, há a presença de dois ou mais jogadores competindo entre si, e é nessa categoria que o trabalho focou. Desde o início, na fala dos pesquisadores aqui citados, ficou nítido a importância que a competição entre os colegas traz para o desenvolvimento social, visando uma educação global dos estudantes. "O adversário, no jogo, é sobretudo um companheiro, um referencial para o próprio aperfeiçoamento do indivíduo"(Grando, 1995, p. 68). Exemplos de jogos coletivos: xadrez, dama, dominó etc.

Além da classificação em solo e coletivos, os jogos podem assumir outras classificações de acordo com a necessidade do pesquisador. Grando (1995, p. 52), por exemplo, leva em conta a função que o jogo pode assumir num contexto social e didático-metodológico, classificando os jogos como: Jogos de azar; Jogos quebra-cabea; Jogos de estratégia; Jogos de fixação de conceitos; Jogos computacionais. Mas, ela ressalta que "esta classificação não é excludente, na medida em que um tipo de jogo pode ser classificado também como outro tipo."(Grando, 1995).

Capítulo 3

Jogo da velha

Neste capítulo iremos abordar a história, definição, regras e composição do "Jogo da Velha". O jogo já bastante conhecido por todos os públicos, fácil de ser jogado, construído e vencido. Há diversas estratégias vencedoras para o jogo da velha tradicional, trataremos todas nas subsessões desse capítulo. Além disso, será trabalhado uma nova maneira de se jogar, se trata de uma adaptação imaginando o tabuleiro sobre um cilindro, na qual chamaremos de Jogo da Velha no Cilindro. Essa adaptação trouxe algumas nuances nas regras, uma nova estrutura e novas estratégias vencedoras.

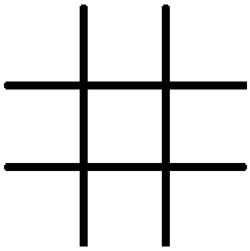
3.1 Jogo da velha

Um jogo conhecido mundialmente, tem diversos nomes, que pode variar de acordo com a sua localização, tais como: Jogo do galo; Tic-Tac-Toe; Iukisutk-i, entre outros. No Brasil, o jogo ficou conhecido como Jogo da Velha, uma tradução literal da sua origem inglesa, como afirma Guaraldo (2013).

> O jogo se popularizou na Inglaterra do século 19, quando mulheres se reuniam nos finais de tarde para conversar e bordar. Porém, as mais idosas, por não conseguirem mais bordar em razão de suas vistas fracas, se entretiam com o jogo. que passou a ser chamado de Noughts and Crosses (nós e cruzes, em português. Uma referência ao bordado). E como era jogado por mulheres inglesas idosas, quando o jogo veio para o Brasil, ficou conhecido como Jogo da Velha. (Guaraldo, 2013)

Consiste em um jogo de regras simples e que requer pouca estrutura para ser praticado. Formado por quatro semirretas, paralelas duas a duas, duas postas na vertical e duas na horizontal, se encontrando em quatro pontos, como mostra a figura 3.

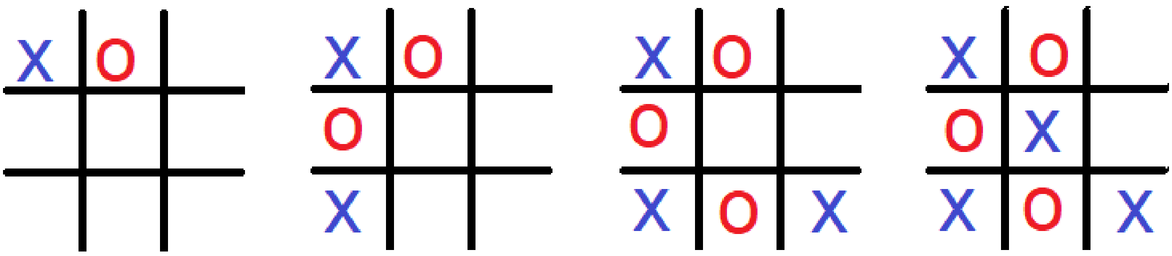
Figura 3



Fonte: Próprio autor (2024)

Essas semirretas determinam nove lacunas, a serem preenchidas por dois competidores de maneira alternada, geralmente são usados os símbolos "O "e "X ", saindo vencedor o jogador que conseguir formar três símbolos seguidos, seja na vertical, horizontal ou diagonal. Observe na Figura 4 um exemplo de jogada em que o competidor iniciante vence a partida formando uma trinca de símbolos iguais antes de seu adversário.

Figura 4



Fonte: Próprio autor (2024)

Por sua simplicidade, o jogo pode ser realizado em diversas situações do dia a dia, pode ser construído com um pedaço de papel e uma caneta, ou até mesmo riscando com um graveto em um chão de areia, a capacidade de adaptação permite que os competidores criem o ambiente de disputa com os recursos presentes em mãos. Além disso, a escolha pelo jogo da velha se deu também pela popularidade do jogo. Souza e Moreira (2015) corroboram essa ideia ao enfatizar que

> A metodologia utilizada para facilitar a aprendizagem do conteúdo de algoritmos foi explorar jogos que incluem o exercício de lógica matemática como o Jogo da Velha, sob a justificativa de que todos os estudantes o conheciam e sabiam jogá-lo, com a vantagem de que, sendo um jogo simples, favorece o raciocínio e a velocidade de atenção. (Souza e Moreira, 2015)

Diversos autores já utilizaram o jogo da velha para o ensino de diversos conteúdos matemáticos. Souza (2017) diz que

> Ao utilizarem o jogo da velha matemático, os alunos se sentiram desafiados e envolveram-se na busca por alternativas que os fizessem participar ativamente do jogo. Esta situação provocou estímulo e o desafio para acionarem estruturas cognitivas diferenciadas, principalmente, para solucionar situações que não sabiam resolver. (Souza, 2017, p. 24)

A utilização de jogos no ensino da matemática costuma ter resultados positivos, ainda mais quando esses jogos são adaptados afim de conseguir alcançar os objetivos do autor. Nesse viés, Silva e Teles (2018) criaram o jogo da velha com figuras geométricas, uma estratégia para uma aprendizagem mais significativa de geometria por parte de seus alunos, afirmando que "assim o processo de ensino ficou mais organizado, estruturado e mais significativo, uma vez que contribuiu para o fortalecimento de sua prática."(Silva e Teles, 2018, p. 106).

Para o ensino de lógica matemática, Souza e Moreira (2015) utilizaram a construção do jogo da velha utiizando conceitos de programação, além disso, os participante da pesquisa tiveram que construir ambientes para possibilitar o realização do jogo, com estratégias de ataque e defesa. Os autores colheram bons resultados com essa pesquisa ao afirmar que

> [...] eles sinalizaram avanços significativos no quesito aprendizagem. No geral, os percentuais de aprovação apontaram uma melhoria de 29%, quando considerados todos os estudantes matriculados por turma (aprovados e reprovados), 25,7% quando descartados os que nunca apareceram e 60,3% quando referenciados apenas os aprovados e reprovados por nota. Esse desempenho sugere que o conhecimento sobre os Jogo da Velha e Tabelas Mágicas pode ter colaborado para esse resultado positivo, que também pode explicar a redução no total de estudantes que nunca apareceram para assistir as aulas, motivados talvez pela repercussão da estratégia adotada na disciplina. (Souza e Moreira, 2015, s.n.)

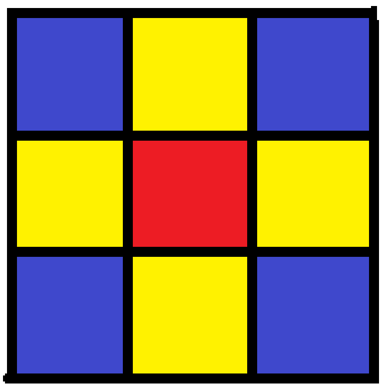
É possível perceber que o uso do Jogo da Velha contribui para uma melhor aprendizagem de diversos conteúdos da matemática, isso devido a flexibilidade e a simplicidade da sua estrutura, oferecendo um leque de oportunidades para os professores.

3.1.1 Estratégias vencedoras

Em uma competição entre dois jogadores, temos dois resultados possíveis: um dos dois saírem vencedores ou acontecer um empate entre ambos. No jogo da velha não é diferente, são esses os resultados possíveis de acontecer. No entanto, há um resultado que pode acontecer sempre: o primeiro jogador (jogador que inicia o jogo) sempre vencer.

O jogador que começa a partida sempre terá uma estratégia para vencer, dependendo do local que ele iniciar a partida, ou seja, a posição do tabuleiro que ele colocar o primeiro símbolo, e também em relação onde seu adversário posicionará sua primeira jogada. O tabuleiro é dividido em três áreas especificas, conforme mostra a Figura 5: Regiões do Tabuleiro.

Figura 5: Regiões do Tabuleiro

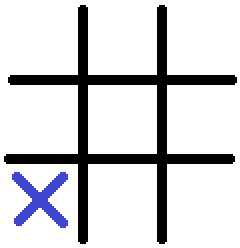


Fonte: Próprio autor (2024)

Para fins de identificação, chamaremos de "região A"a região em azul, correspondente aos cantos do tabuleiro. Nomearemos a região em amarelo de "região B", que faz parte da chamada "cruz"do jogo da velha. Por fim, a região central será nomeada como "região C". Para realizar as jogadas, os jogadores necessitam de um símbolo para representá-los, adotaremos "X"como o símbolo do primeiro jogador e "O"como o sîmbolo do segundo jogador.

Para que o primeiro jogador tente garantir a vitória na partida, é necessário que seu primeiro símbolo X seja colocado em um dos cantos do tabuleiro, na região A, conforme mostra a figura 6: Primeira jogada X.

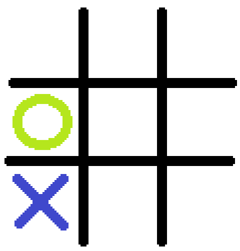
Figura 6: Primeira jogada X



Fonte: Próprio autor (2024)

Colocar o primeiro X nos cantos aumenta a possibilidade de erro do adversário. Depois de posicionar o primeiro X, para garantir a vitória, é necessário que o segundo jogador posicione seu primeiro símbolo "O"em um dos outros cantos da região A ou na região B, caso o segundo jogador posicione no meio (região C), precisará contar com outras estratégias e que seu adversário cometa alguns erros. Focaremos apenas na parte em que a vitória é garantida. Vamos supor que o adversário comece pela região B, conforme mostra a Figura 7: Primeira jogada O.

Figura 7: Primeira jogada O

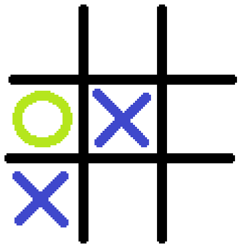


Fonte: Próprio autor (2024)

Após isso, basta que o primeiro jogador coloque seu segundo símbolo X no meio ou no canto ao lado de modo que não tenha símbolo O entre os dois Xs. Vamos separar em dois casos, para analisar cada jogada separadamente:

Caso 1: segunda jogada X no centro.

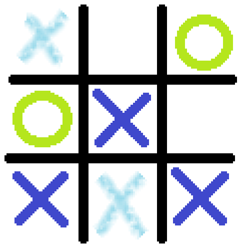
Figura 8: Segunda jogada X no centro



Fonte: Próprio autor (2024)

Após colocar o segundo X no centro, o adversário será pressionado a colocar no canto oposto ao primeiro X, para que a partida continue, do contrário, o primeiro jogador ganha completando a diagonal com três Xs. Após o segundo jogador fechar a diagonal, o primeiro jogador deve escolher o outro canto para a terceira jogada, de modo que tenha uma casa vazia entre o primeiro e o terceiro X.

Figura 9: Terceira jogada X no canto

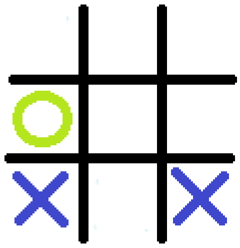


Fonte: Próprio autor (2024)

Os Xs em tom mais claro, representa onde o primeiro jogador poderá vencer a partida após colocar sua terceira jogada no canto. Observe que, ao fazer esse movimento na terceira jogada, ele garante dois caminhos possíveis para a vitória, assim, o segundo jogador será pressionado à fechar um caminho mas sempre restará outro caminho para a vitória, independentemente de onde escolher colocar o terceiro O.

Caso 2: segunda jogada X no canto.

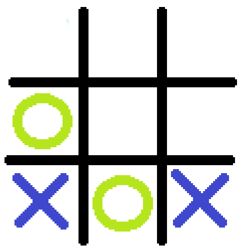
Figura 10: Segunda jogada X no canto



Fonte: Próprio autor (2024)

Sendo a segunda jogada X no canto, não resta outra opção para o segundo jogador além de colocar o segundo O entre os dois Xs, caso contrário, o primeiro jogador venceria completando a fileira.

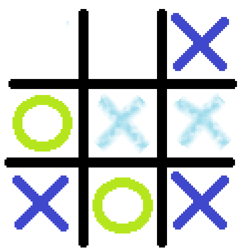
Figura 11: Segunda jogada O



Fonte: Próprio autor (2024)

A próxima jogada do primeiro jogador é bem simples, basta colocar o terceiro símbolo no canto oposto ao primeiro X. Assim, cria-se duas possibilidades para a vitória, como só é um possível colocar apenas um símbolo por vez, o segundo jogador ficará limitado a fechar apenas um dos caminhos, deixando o outro para garantir a vitória do primeiro jogador.

Figura 12: Terceira jogada X



Fonte: Próprio autor (2024)

Os símbolos mais claros representam os possíveis caminhos para a vitória do primeiro jogador.

Portanto, no jogo da velha tradicional, é possível traçar estratégias vencedoras para o primeiro jogador. O segundo jogador terá possibilidades de empatar a partida, para isso, basta iniciar colocando o seu primeiro símbolo no centro, isso fará o primeiro jogador procurar outras estratégias, mas todas possíveis de serem bloqueadas.

3.2 Jogo da velha no Toro

Afim de atender as expectativas do projeto, foi necessário fazer adaptações no jogo da velha tradicional. As mudanças serão trabalhadas nessa subseção, explicando como e o porquê de tais alterações.

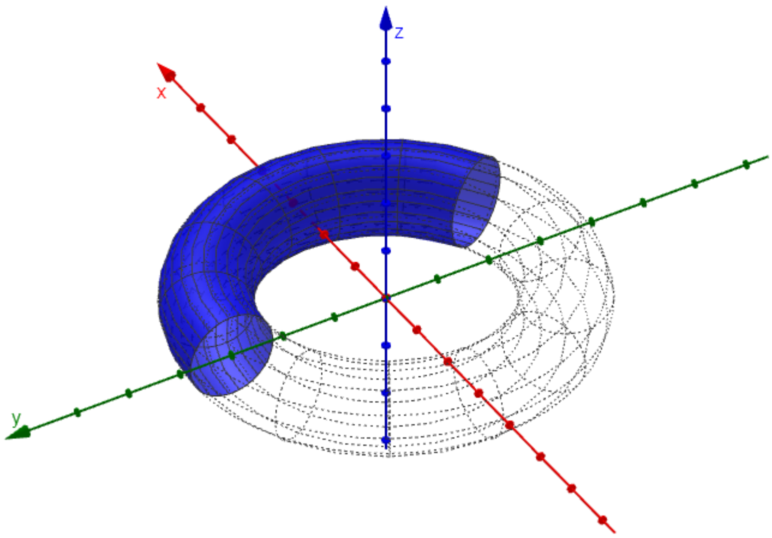
A proposta do trabalho é oferecer um jogo que permita os jogadores saírem da zona de conforto e que se desafiem com as novas regras. Para isso, foi proposto um jogo da velha em que não há bordas, formando assim um Jogo da velha Toro. Mas o que é um Toro?

O Toro ou Toroide pode ser definido como o lugar geométrico tridimensional formado pela rotação de uma superfície circular plana de raio r, em torno de uma circunferência de raio R, sua forma se assemelha à uma câmara de ar. Ele é frequentemente utilizado em contextos matemáticos para ilustrar conceitos abstratos e explorar ideias complexas. Além disso, aparece em diversas áreas da ciência e da engenharia. Na física, é utilizado para modelar campos magnéticos em torno de condutores elétricos curvos, como transformadores e bobinas. Em resumo, o toroide é muito mais do que apenas um simples objeto geométrico, é uma figura versátil e intrigante que desempenha um papel importante em várias disciplinas, desde a matemática pura até as aplicações práticas do mundo real.

Para uma melhor visualização da estrutura geométrica, utilizou-se o programa de geometria dinâmica Geogebra, programa esse que associa geometria e álgebra no mesmo ambiente. As figuras que serão mostradas são formadas pelo aplicativo supracitado.

Observe na Figura 13 como o Toroide será formado: um círculo de raio menor r, e o caminho a ser percorrido por esse círculo, ao redor de uma circunferência de raio maior R.

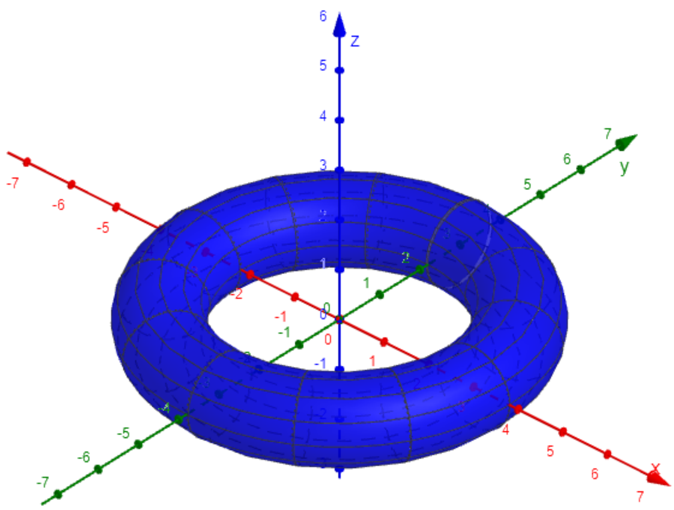
Figura 13: Formação do Toro



Fonte: Próprio autor (2024)

Ao fazer o giro completo de 360º ao redor da circunferência de raio R, obtém-se a figura completa, um Toroide. Observe a Figura 14: Toroide completo.

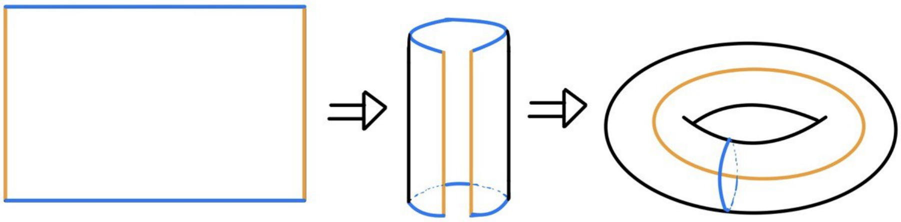
Figura 14: Toroide completo



Fonte: Próprio autor (2024)

O jogo da velha no toro é uma variação do jogo clássico jogado em um tabuleiro bidimensional que foi transformado em um tabuleiro tridimensional, em que o tabuleiro é a própria estrutura do toroide. Para criar o tabuleiro de jogo, você inicia com um tabuleiro de jogo da velha padrão, com dimensões tradicionais de 9 quadrados dispostos em três linhas e três colunas. Primeiramente, você realiza uma transformação dobrando o tabuleiro em forma de cilindro, conectando as bordas esquerda e direita de maneira contínua. Em seguida, é feita uma segunda transformação, dobrando o cilindro em formato de toroide, unindo as bordas superior e inferior do tabuleiro de jogo, conforme mostra a figura abaixo.

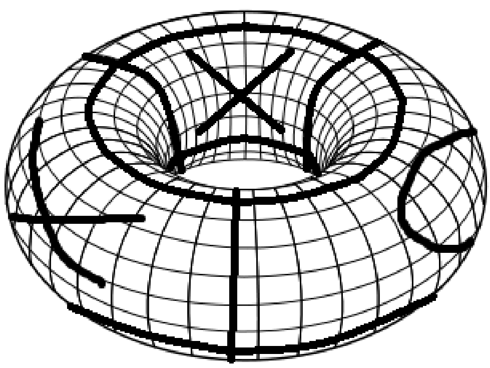
Figura 15: Construindo tabuleiro



Fonte: Próprio autor (2024)

As regras básicas do jogo da velha são mantidas: dois jogadores, representados por X e O, alternam-se para colocar suas marcas em espaços vazios do tabuleiro. O objetivo é formar uma linha de três marcas consecutivas na horizontal, vertical ou diagonal. No entanto, devido à topologia do toroide, algumas nuances adicionais são introduzidas. Abaixo, apresentamos uma visualização simplificada deste tabuleiro de jogo após algumas jogadas.

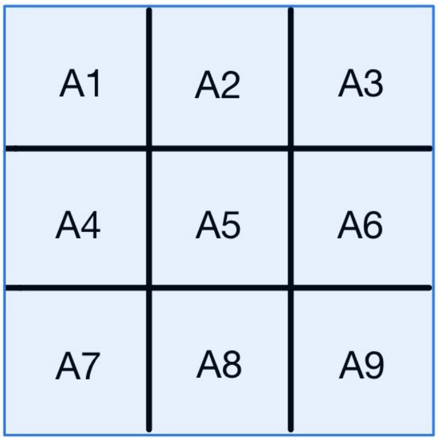
Figura 16: Jogo da velha no toro



Fonte: https://codegolf.stackexchange.com

Mas a pergunta que vocês devem estar se fazendo agora é: "Mas como fazer isso usando uma folha de verdade? Como dobrá-la dessa meneira?". Visualizar o tabuleiro dessa maneira pode parecer impossível, para isso, existem algumas estratégias para fazer com que as laterais se conectem de maneira contínua. Para isso, iremos nomear as casas de um tabueiro de jogo da velha como na figura 17.

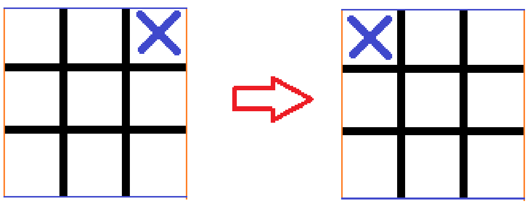
Figura 17: Tabuleiro numerado



Fonte: Próprio autor (2024)

No toroide o jogo ganha algumas características específicas, a principal delas é que suas bordas passam a ser infinitas, tanto para as laterais como para cima ou para baixo. Ou seja, caso um jogador coloque o símbolo na casa A3 e o tabueiro ande uma casa para a direita, ele aparecerá no lado contrário, mais precisamente na casa A1, como mostra a figura 18.

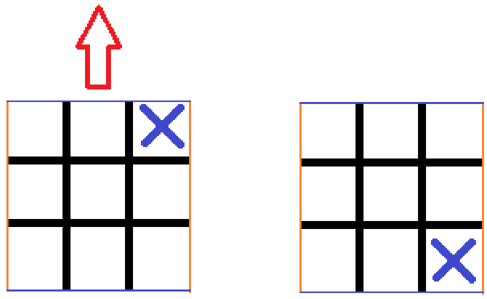
Figura 18: Tabueleiro anda uma casa para a direita



Fonte: Próprio autor (2024)

Caso o tabueiro seja movido uma casa para cima, o símbolo aparecerá no lado contrário, ou seja, embaixo, na casa A9, observe a figura 19.

Figura 19: Tabuleiro anda uma casa para cima



Fonte: Próprio autor (2024)

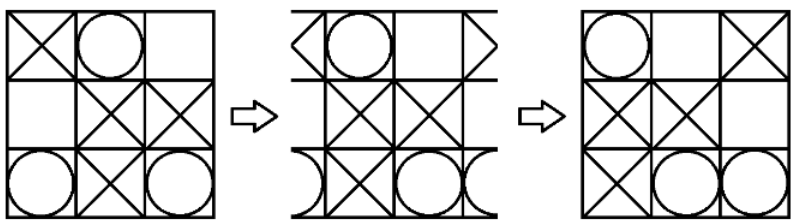
Alex Ellis (2008) compara esse tabuleiro a um jogo de Pacman, onde o personagem poderia entrar em um lado da tela e aparecer no lado oposto, criando algumas vantagens e estratérias ao personagem principal do jogo.

> Agora imagine jogar em um tabuleiro que se comporta como um jogo Pacman – ou seja, a borda direita (respectivamente, superior) do tabuleiro é identificada com a borda esquerda (respectivamente, inferior). Isto é, obviamente, equivalente a pegar um tabuleiro quadrado do jogo da velha e moldá-lo em um toro (bidimensional). (ALEX ELLIS, P.1, 2008).

Outra maneira de visualizar o tabuleiro é expandir suas lateais e diagonais, algumas pesquisas já iniciaram caminhos semelhantes, Jakube (2015) faz uma demonstração de uma jogada com essa percepção do tabuleiro:

> Como um toro é bastante difícil de visualizar, simplesmente projetamos o quadro de volta no papel. Agora podemos jogar como Tic Tac Toe normal. A única diferença é que você também pode ganhar com 3 símbolos iguais em uma diagonal quebrada. Por exemplo, o Jogador 1 (X) ganha o tabuleiro seguinte. Você pode ver isso facilmente alterando um pouco a visualização do toro. (Jakube, 2015)

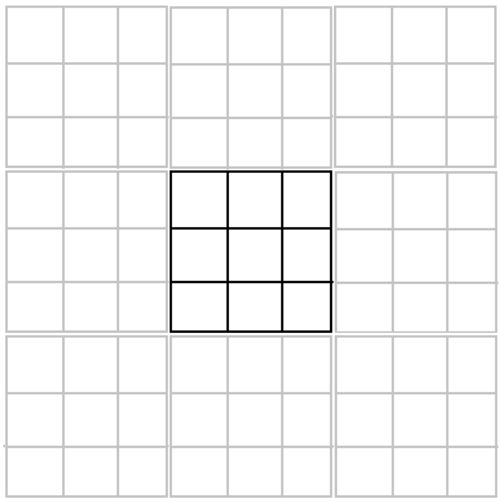
Figura 20: Jogada no Toro com possibilidade de vitória



Fonte: https://codegolf.stackexchange.com

Essa movimentação pode ser melhor esclarecida com um expansão do tabuleiro, basta imaginar essa movimentação acima três vezes para cado lado, direita e esquerda, e para cima e para baixo. Fazendo três movimentações obtém-se o próprio tabuleiro, ou seja, para uma melhor vizualização da infinidade das laterais, basta considerar 9 tabuleiros em que o central é o principal e os demais é a projeção do central. As jogadas são feitas todas no tabuleiro principal, mas a projeção das jogadas nos demais tabuleiros poderão ser usados para determinar o vencedor, observe na Figura 9.

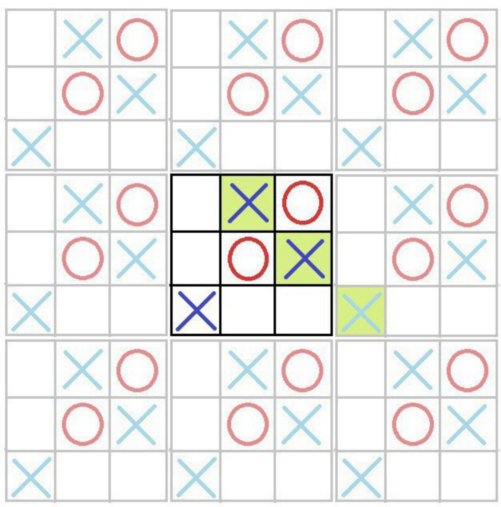
Figura 21: Tabuleiro expandido



Fonte: Próprio autor (2024)

Os jogadores irão focar apenas no tabuleiro central, e os demais serão preenchidos automaticamente, veja a figura 22 com um exemplo de uma jogada vencedora.

Figura 22: Jogada vencedora

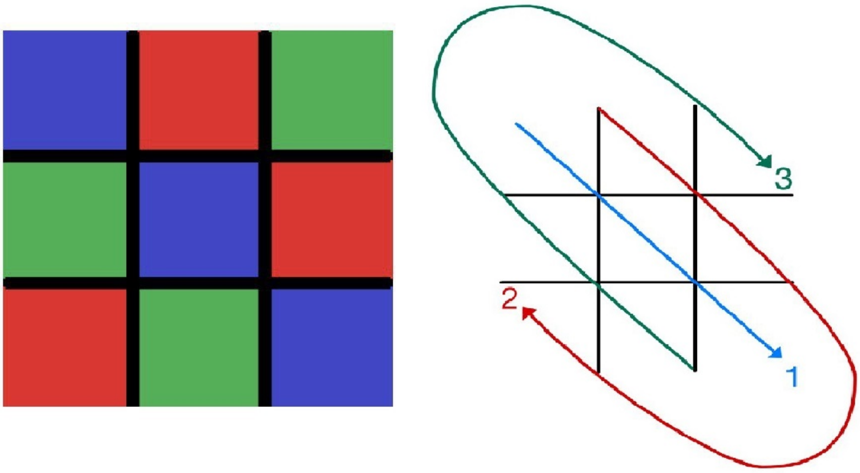


Fonte: Próprio autor (2024)

Observe que, após cinco rodadas, o jogador X não venceria a partida levando em consideração apenas o tabuleiro central. Porém, como estamos falando do jogo da velha no toro, as projeções do tabuleiro facilita a visualização que o jogador X saiu vencedor da partida, isso devido a projeção do X contido na posição A9, ter se movido uma casa para a direita, dando a volta no tabuleiro e formando a trinca de símbolos para garantir o primeiro jogador como vencedor da partida.

Afim de facilitar o jogo e competição entre os jogadores, existe uma maneira de simplificar a visualização desse tabuleiro expandido e já definir as casas específicas que permitem um jogador se sair vencedor da disputa. Observe na figura a seguir os caminhos para se sair vencedor da partida.

Figura 23: Jogada vencedora



Fonte: Próprio autor (2024)

Este capítulo pode ser resumido pela figura 23, a construção de um jogo da velha no toro tem como finalidade proporcionar um jogo novo, com novas estratégias vencedoras, nuances nas regras, mas com objetivos claros de manter os jogadores mais atentos, pensativos e permitir aprender os caminhos para vitória através da prática. Se trata de um jogo rápido, ficar projetando o tabueiro ao redor do tabuleiro principal, afim de melhor visualizar as jogadas, não é o ideal, e poderia atrapalhar o andamento e entendimento do jogo. A figura acima facilita tudo isso, os caminhos da vitória são únicos, com a sistematização de cores ficou mais fácil de decorar.

Colocando três símbolos iguais aos longos das setas 1, 2 ou 3, a vitória é garantida, não importa a ordem de jogada. a seta de número 1 é a mais difícil de ser completada, pois se trata da diagonal principal. As outras duas setas indicam que sempre os jogadores devem procurar as extremidades, aumentando assim suas chances de vitória. A rotação do tabuleiro vai garantir as outras possibilidades de vitória, basta girar todo o tabuleiro 90º no sentido horário ou anti-horário. Esses caminhos se assemelham ao cálculo de determinantes de matrizes quadrada, na qual será abordado no próximo capítulo.

Capítulo 4

Matrizes e Determinantes

Nesse capítulo iniciaremos nossa discussão sobre a definição, propriedades, operações e curiosidade sobre matrizes, assim como definição e propriedades dos determinantes de matrizes. Para isso, usaremos como base de referêncial o livro de Iezzi e Hazzan (2013).

4.1 História das Matrizes e dos Determinantes

O conceito de matrizes e determinantes tem raízes históricas profundas, emergindo da necessidade de resolver sistemas de equações lineares. Os primeiros indícios do uso de matrizes, ainda que de forma rudimentar, podem ser encontrados na China antiga, por volta de 200 a.C., na obra "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática"de Liu Hui. De acordo com Lima (2018), neste texto, os chineses já utilizavam técnicas que lembram os métodos modernos para resolver equações lineares, o que pode ser considerado um precursor das matrizes e da resolução de sistemas lineares simultâneas.

Foi no século XIX que as matrizes começaram a ser formalmente estudadas na Europa. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês, foi o primeiro a introduzir o termo "determinante"no contexto matemático em 1812. Cauchy desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da teoria dos determinantes, estabelecendo a relação entre determinantes e sistemas lineares, o que abriu caminho para a formalização das matrizes.

As matrizes, como conhecemos hoje, foram introduzidas por Arthur Cayley, em 1858, através de seu trabalho sobre transformações lineares. Cayley foi o primeiro a usar o termo "matriz"para descrever um arranjo retangular de números e a demonstrar operações fundamentais com matrizes, como a multiplicação de matrizes, que hoje é uma ferramenta essencial na álgebra linear. Em seu livro, Iezzi e Hazzan (2013), dizem que

> o início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo *matriz* já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Syvester. Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matrizes preceda a de determinantes, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados a muito tempo na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear. (Iezzi e Hazzan, 2013, p. 77)

James Joseph Sylvester, foi um contemporâneo e amigo de Cayley, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria das matrizes. Foi Sylvester quem primeiro utilizou o termo "matriz"em 1850, e ele viu as matrizes como componentes dos determinantes.

Esses desenvolvimentos marcaram uma revolução na matemática, estabelecendo as bases para o uso das matrizes e dos determinantes em diversas áreas, incluindo a física, a biologia e a economia. A influência de Cayley e Sylvester na matemática moderna é inegável, e seus trabalhos continuam a ser uma referência essencial na álgebra linear.

4.2 Definição de matrizes

Definição: Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se **matriz** m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela A formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Exemplos:

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ \sqrt{7} & -1 & 0 \end{pmatrix}$, É matriz 2×3.

$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ É matriz 1×4.

As matrizes são representadas por letras maiúsculas. Em uma matriz qualquer A, cada elemento dessa matriz pode ser representado por a_{ij}, onde o índices i e j representam, respectivamente, a linha e a coluna na qual o elemento pertence na matriz A.

Convencionou-se que as linhas são contadas de cima para baixo e que as colunas são contadas da esquerda para a direita, tal que $i \in \{ 1, 2, 3, 4, ..., \mathrm{m}\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4, ..., \mathrm{n}\}$. Então, uma matriz A pode ser indicada como A $=\{a_{ij}\}_{m \times n}$, em que "$m \times n$ representa a ordem da matriz, vejamos alguns exemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad . \quad \text{ou A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$\text{ou A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}_{m \times n}$$

Todas representam a matriz A de ordem $m \times n$.

4.2.1 Matrizes especiais

Existem alguns tipos de matrizes que recebem um nome específico por apresentarem uma característica especial.

1. *Matriz linha*: uma matriz que tem apenas uma linha $(m = 1)$, ou seja, é toda matriz do tipo $1 \times n$.
   Exemplo: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha do tipo 1×3.

2. *Matriz coluna*: uma matriz que tem apenas uma coluna $(n = 1)$, ou seja, é toda matriz do tipo m $\times$ 1.
   Exemplo: $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \\ -13 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 3×1.

3. *Matriz nula*: uma matriz em que todos os elementos são zeros.

Exemplo: C = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3 × 4.

4. *Matriz quadrada*: Uma matriz é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas (m = n).

   Exemplo: D = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ Na matriz quadrada, temos um componente esepcial que é a *diagonal principal*, que determina o conjunto de elementos que têm os dois índices iguais (i = j), ou seja:

   $\{ a_{ij} \mid i = j\} = \{ a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}\}$

5. *Matriz diagonal*: uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são zeros.

   Exemplo: E = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 4.

6. *Matriz identidade*: É uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Pode ser indicada ainda por I_n, em que n representa a ordem da matriz.

   Exemplo: F = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 4.

4.2.2 Operações com matrizes

Igualdade: Duas matrizes A = $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ e B =$\{b_{ij}\}_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in$ {1, 2, 3, 4, ..., m } e todo $j \in$ {1, 2, 3, 4, ..., n }.
Exemplo: Considere as matrizes A e B:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 13 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$$

já que $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 13 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 13 & -7 \end{bmatrix}$$

já que $a_{12} \neq b_{12}$ e $a_{22} \neq b_{22}$. Adição Matrizes: Dadas duas matrizes A e B de ordem $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

A soma $C = A + B$ é uma matriz $m \times n$ onde cada elemento c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Considere as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A soma $C = A + B$ é calculada como:

$$C = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Soma de Matrizes

- Comutatividade.

Isto significa que, para quaisquer duas matrizes A e B de mesma ordem, temos:

$$A + B = B + A$$

Exemplo:

Considere as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculando $A + B$ e $B + A$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 5+1 & 6+2 \\ 7+3 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A + B = B + A$.

- Associatividade

Para quaisquer três matrizes A, B e C de mesma ordem, temos:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Exemplo:

Considere as matrizes A, B e C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculando $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}6+9 & 8+10\\ 10+11 & 12+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

$$B+C=\begin{pmatrix}5+9 & 6+10\\ 7+11 & 8+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 18 & 20\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1+14 & 2+16\\ 3+18 & 4+20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 18\\ 21 & 24\end{pmatrix}$$

Observamos que $(A+B)+C=A+(B+C)$.

- Elemento Neutro

A matriz zero, denotada por 0, é o elemento neutro da soma de matrizes. Para qualquer matriz A de ordem $m\times n$, temos:

$$A+0=0+A=A$$

onde 0 é a matriz $m\times n$ cujos elementos são todos zeros.

Exemplo:

Considere a matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

A matriz zero de mesma ordem é:

$$0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calculando $A + 0$:

$$A + 0 = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 3+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A + 0 = A$.

- Elemento Oposto

Para cada matriz A de ordem $m \times n$, existe uma matriz oposta $-A$ tal que:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

onde $-A$ é a matriz $m \times n$ cujos elementos são os opostos dos elementos de A.

Exemplo:

Considere a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A matriz oposta $-A$ é:

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculando $A + (-A)$:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) \\ 3+(-3) & 4+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A + (-A) = 0$.

Multiplicação de matrizes por um número: A multiplicação de uma matriz A por um número k é uma operação que multiplica cada elemento de A pelo número k. Se A é uma matriz $m \times n$ e k é um número, então kA é uma matriz $m \times n$ onde cada elemento

$(kA)_{ij}$ é dado por:

$$(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Exemplo: Considere a matriz A e o número $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A multiplicação de A por k é:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes: A multiplicação de matrizes é uma operação que combina duas matrizes A e B para formar uma nova matriz C. Para a multiplicação AB seja definida, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

Dadas A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$, o produto $C = AB$ é uma matriz $m \times p$ onde cada elemento c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Exemplo:

Considere as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

O produto $C = AB$ é calculado como:

$$C = \begin{pmatrix} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3) \\ (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) & (3 \cdot 0 + 4 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

- Associatividade: $A(BC) = (AB)C$.

- Distributividade: $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$.
- Multiplicação por Escalar: Se k é um escalar, então $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

Transposição de Matrizes: A transposta de uma matriz A, denotada por A^T, é obtida trocando-se as linhas de A por suas colunas, ou seja, se A é uma matriz $m \times n$, então A^T é uma matriz $n \times m$ onde cada elemento $(A^T)_{ij}$ é dado por:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo: Considere a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A transposta A^T é:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Transposição:

- Transposição de uma Transposta: $(A^T)^T = A$.
- Transposição de um Produto: $(AB)^T = B^T A^T$.
- Transposição de uma Soma: $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- Transposição de um Escalar: $(kA)^T = kA^T$.

4.2.3 Determinantes

O determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um número, que pode ser interpretado geometricamente como o fator de escala de volumes ou áreas quando a matriz é usada para transformar um espaço. O conceito de determinante é fundamental em várias áreas da matemática, incluindo álgebra linear, geometria e cálculo.

Para uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$, o determinante é um valor escalar denotado por $\det(A)$ ou $|A|$. O cálculo do determinante varia conforme a ordem de sua matriz.

Determinante de uma Matriz 1×1: Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$, o determinante é simplesmente o próprio elemento:

$$\det(A) = a$$

Determinante de uma Matriz 2×2: Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, o determinante é calculado como:

$$\det(A) = ad - bc$$

Claro! Vamos calcular o determinante de uma matriz 2×2 usando um exemplo detalhado.

Exemplo: Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3 \cdot 2) - (5 \cdot 7)$$

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 5 \cdot 7 = 35$$

$$\det(A) = 6 - 35$$

$$\det(A) = -29$$

Portanto, o determinante da matriz A é -29.

Determinante de uma Matriz 3×3: Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, o determinante é calculado usando a regra de Sarrus:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

- Passo a Passo da Regra de Sarrus

1º) Escreva a matriz A e repita as duas primeiras colunas à direita da matriz:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

2º) Some os produtos das diagonais principais:

$$aei + bfg + cdh$$

3º) Subtraia os produtos das diagonais secundárias:

$$ceg + bdi + afh$$

Exemplo: Considere a matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Escreva a matriz B e repita as duas primeiras colunas:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right.$$

Passo 2: Some os produtos das diagonais principais:

$$(2 \cdot 5 \cdot 9) + (3 \cdot 6 \cdot 7) + (1 \cdot 4 \cdot 8) = (2 \cdot 45) + (3 \cdot 42) + (1 \cdot 32) = 90 + 126 + 32 = 248$$

Passo 3: Subtraia os produtos das diagonais secundárias:

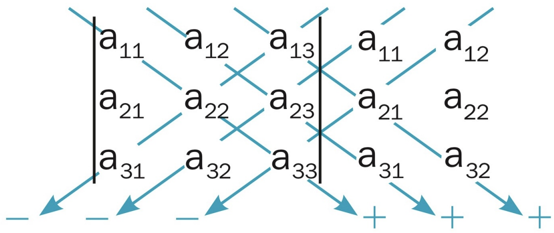
$$(1 \cdot 5 \cdot 7) + (3 \cdot 4 \cdot 9) + (2 \cdot 6 \cdot 8) = (1 \cdot 35) + (3 \cdot 36) + (2 \cdot 48) = 35 + 108 + 96 = 239$$

Passo 4: Calcule o determinante:

$$\det(B) = 248 - 239 = 9$$

Em seu livro Fundamentos de Matemática Elementar Volume 4, Iezzi e Hazzan (2015) trazem um método prático para decorar o processo de cálculo dos determinantes de matrizes de ordem 3. Inicialmente, as diagonais principais são representadas pelo sinal de "+"(mais) e as diagonias secundárias com o sina de -"(menos), já que, para o cálculo do determinante é necessário subtrair a soma dos produtos das diagonais secundárias da soma dos produtos das diagonais principais. Observe a figura 24.

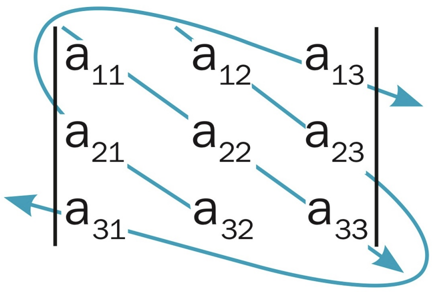
Figura 24: Diagonais



Fonte: Iezzi e Hazzan (2015)

A partir disso, os termos precedidos pelo sinal "+"são obtidos mutiplicando-se os elementos segundo as trajetórias indicadas na figura 25.

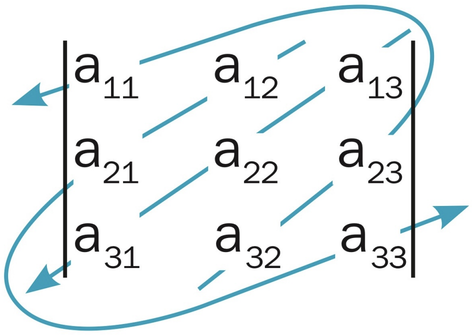
Figura 25: Diagonais principais.



Fonte:Iezzi e Hazzan(2015)

E os termos precedidos pelo sinal -"são obtidos mutiplicando-se os elementos segundo as trajetórias indicadas na figura 26.

Figura 26: Diagonais secundárias.



Fonte:Iezzi e Hazzan(2015)

Essas imagens tem como objetivo mostrar como pode ser feito o cálculo dos determinantes sem a necessidade de duplicar as duas primeiras filas no final. Uma maneira mais prática e fácil de ser aplicada.

Propriedades dos Determinantes: Os determinantes possuem várias propriedades úteis que simplificam os cálculos e ajudam a entender o comportamento das matrizes.

- Multiplicatividade:

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Determinante da transposta

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

- Determinante da matriz identidade

O determinante da matriz identidade I de ordem n é 1:

$$\det(I) = 1$$

- Linha ou coluna de zeros

Se uma matriz A tem uma linha ou coluna composta inteiramente de zeros, então:

$$\det(A) = 0$$

- Troca de linhas

Ao trocar duas linhas (ou colunas) de uma matriz, o determinante da matriz resultante será o oposto do determinante original.

Se A' é a matriz obtida pela troca de duas linhas (ou colunas) da matriz A, então:

$$\det(A') = -\det(A)$$

- Multiplicação de uma linha por um escalar

Se uma linha (ou coluna) de uma matriz A é multiplicada por um escalar k, o determinante da nova matriz B é o produto de k com o determinante da matriz original A:

$$\det(B) = k \cdot \det(A)$$

- Adição de linhas

Se a linha i de uma matriz A for substituída por ela mesma mais uma combinação linear das outras linhas, o determinante de A permanece inalterado:

$$\det(A') = \det(A)$$

Essa propriedade é fundamental no processo de simplificação de matrizes por meio da adição de linhas (ou colunas) para criar zeros em posições estratégicas. Ela permite a manipulação das entradas da matriz sem afetar o cálculo do determinante, facilitando a obtenção do determinante desejado.

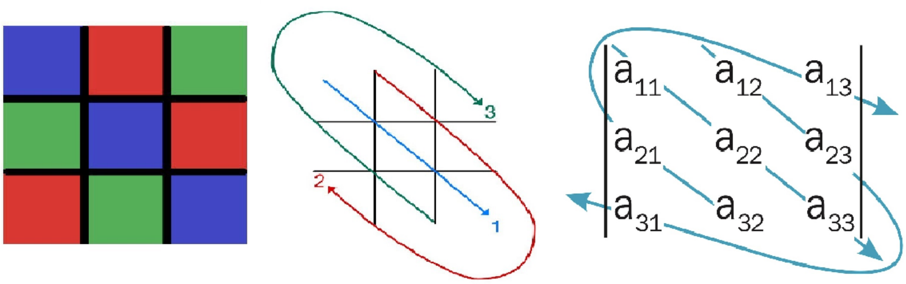
Este capítulo forneceu uma visão simplista sobre matrizes e determinantes de matrizes quadradas, explorando desde definições até propriedades e métodos de cálculo. O entendimento dos determinantes é essencial para o presseguimento dessa pesquisa.

Capítulo 5

Oficina para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3

A associação entre o jogo da velha no toro e o cálculo de determinantes se dar através dos métodos práticos de cada um deles, no método para decorar o cálculo dos determinantes e na sintetização dos caminhos para se vencer no jogo da velha no toro. Nos deteminantes, seu método prático ajuda em tornar mais prático seu cálculo, sem a necessidade de duplicar as colunas e em seguida calcular o determinante. Já no jogo da velha no toro, o método prático surge para facilitar a vizualização dos caminhos para vencer no jogo da velha sobre um toro, o que pode parecer impossível realizar com uma folha de papel. Essa semelhança pode ser observada com as figuras 23 e 25, como mostraremos abaixo na figura 27.

Figura 27: Semelhança entre Jogo da Velha e Determinantes



Fonte: Próprio autor (2024)

Observe a semelhança entre as duas figuras, entre os dois processos. A posição e ordem de execução é a mesma, procurar rotas alternativas de vitória no jogo da velha no toro, um método para decorar, nos levou ao mesmo caminho que o cálculo de determinantes. Acima está ilustrado a parte positiva do cálculo dos determinantes, mas é análogo à parte negativa.

Afim de tornar essa visualização mais fácil e relacionar o jogo da velha no cilindro com o cálculo de determinantes, este trabalho visa propor uma oficina para ser realizada com alunos do ensino médio, visando uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos de determinantes. A discussão sobre aulas mais interativas de matemática que aproximem o aluno da matéria, é um assunto que já vem sendo abordado a muito tempo no meio acadêmico. Como visto anteriormente, os jogos são uma ótima oportunidade para colocar prática os conteúdos apresentados em sala. Além de oferecer uma abordagem mais lúdica, desperta o interesse dos alunos, uma vez que o jogo permite uma interação social a quem participa. Oferecer uma oficina pedagógica associado com o uso de jogos matemáticos se apresenta como uma alternativa válida e enriquecedora para o processo de aprendizagem por parte dos alunos participantes. Nesse sentido Pereira (2022) diz que

> Considerando a complexidade que circunda o ensino da matemática em nossos dias, entendemos que é nosso papel, como agentes educadores que possuem a missão de contribuir para a construção do conhecimento, abrir caminhos para novas práticas de aprendizagem, de maneira a permitir com que os alunos conheçam a matemática de uma forma prazerosa e interessante. Entendemos que é preciso despertar o interesse dos alunos para novas formas de aprender matemática. Nesse sentido, a revisão das práticas docentes voltadas para o ensino da matemática deve ser realizada visando um desempenho melhor dos alunos, e nessa conjuntura a aplicação de oficinas pedagógicas voltadas para o ensino da matemática se apresenta como uma excelente ferramenta de ensino/aprendizagem. (Pereira, 2022, p.12)

Corroborando Pereira, Paviani e Fortana (2009) afirmam que

> Uma oficina é, pois, uma oportunidade de vivenciar situações concretas e significativas, baseada no tripé: sentir-pensar-agir, com objetivos pedagógicos. Nesse sentido, a metodologia da oficina muda o foco tradicional da aprendizagem (cognição), passando a incorporar a ação e a reflexão. Em outras palavras, numa oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, de forma ativa e reflexiva. (Paviani e Fortana, 2009, p. 78)

A associação com o jogo, um recurso lúdico, torna ainda mais rica a experiência, como propõe Pereira (2022):

> Uma Oficina de Matemática Experimental (OME) propõe trabalhar o ensino da matemática, de maneira tal que os alunos aceitem o desafio de encontrar soluções para as situações-problema propostas, estimulando-os a investigar, desenvolver habilidades para resolver os problemas e validar as soluções obtidas. O uso de recursos lúdicos na execução das OMEs é essencial, uma vez que a aplicação desses recursos contribui para tornar o processo de ensino/aprendizagem um momento prazeroso para o aluno, abrindo assim a perspectiva de um novo olhar do educando para a matemática. (Pereira, 2022, p.12)

Entendendo sobre a relevância que uma oficina pedagógica pode ter no aprendizado dos alunos, esta dissertação traz uma proposta de oficina que visa o aprendizado significativo do cálculo de determinantes de matrizes quadradas através da itermediação do jogo da velha no cilindro.

5.1 Proposta de oficina

Afim de apresentar de forma mais clara e objetiva a proposta do trabalho, será apresentado, inicialmente os objetivos da oficina e, logo em seguida, o passo a passo para alcançar os objetivos propostos. A execução desta atividade foi planejada para ser realizada em dois encontros, ou 4 aulas, podendo ser dividida da maneira que o professor mediador preferir. Essa adaptação é válida, e os autores Paviani e Fortana (2009) discorrem a respeito afirmando que

> A oficina, como qualquer ação pedagógica, pressupõe planejamento, mas é na execução que ela assume características diferenciadas das abordagens centradas no professor e no conhecimento racional apenas. O planejamento prévio caracteriza-se por ser flexível, ajustando-se às situações-problema apresentadas pelos participantes, a partir de seus contextos reais de trabalho. (Paviani e Fortana, 2009)

O público alvo desta oficina são alunos da 2ª série do ensino médio, haja vista que é neste momento que eles terão contato com o conteúdo de matrizes e determinantes. No entanto, pode ser realizada também com alunos de 3ª série do ensino médio, que participarão da atividade já com conhecimentos prévios sobre o conteúdo. Além disso, pode ser aplicada a ingressantes de alguns cursos de graduação que trabalham com geometria analítica, cálculo ou álgebra linear.

 47

5.1.1 Objetivos da oficina

O objetivo geral desta oficina é o aprendizado mais significativo do cálculo de determinantes por parte dos alunos. Para isso, será apresentado aos alunos o Jogo da Velha no Cilindro, que é uma adaptação do tradicional jogo da velha. Nesse sentido, espera-se que os alunos entendam a estrutura do jogo, aprendam a construir o tabuleiro e que, acima de tudo, aprendam a jogá-lo.

Logo após a apresentação e construção do jogo, será apresentado aos alunos o conceito de matrizes e cálculo de determinantes. O intuito é que os alunos consigam relacionar a estrutura do jogo da velha no toro com a estrutura da regra de Sarrus para o cálculo dos determinantes. Com isso, ficará mais fácil aprender a regra matemática e aplicá-las em seus estudos.

Para a realização desta oficina, o ambiente poderá ser a sala de aula dos alunos da série trabalhada, sem precisar acrescentar em estrutura, ou pode ser realizada em auditórios ou até mesmo pátios, ficará a critério do professor mediador da oficina. Também serão necessários diversos materiais, uns de uso do professor, e outros para os alunos. O professor mediador precisará de: cartolinas, para mostrar de maneira detalhada os passos da oficina; pincéis coloridos, para ilustrar nas cartolinas o que os alunos precisam fazer; pincéis para quadro branco, para anotações no quadro da sala de aula. Já os alunos necessitarão de: papel A4, para realizar os desenhos; pincéis coloridos para jogar e posteriormente realizar os cálculos dos determinantes.

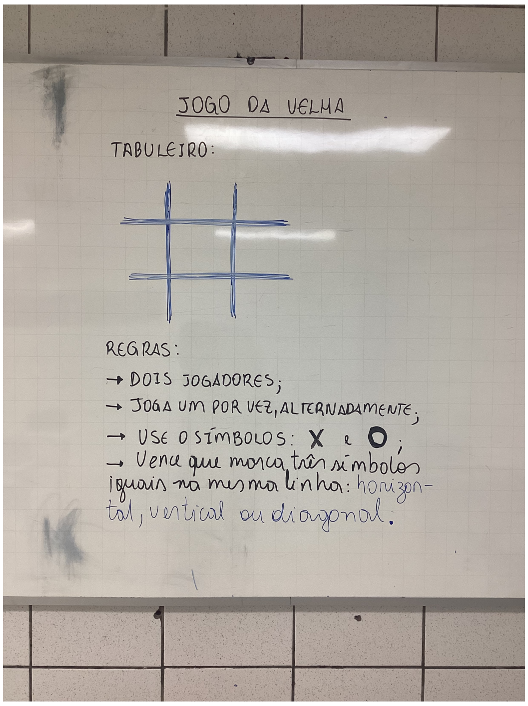
Vale ressaltar que a providência dos materiais pode ser de responsabilidade do professor, da escola, ou até mesmo dos alunos, mediante um prévio aviso.

5.1.2 Passo a passo da Oficina

- Apresentação do jogo da velha tradicional.

Afim de atender aos objetivos, no primeiro contato com os alunos é ideal que seja apresentado uma abordagem geral sobre o jogo da velha tradicional, sua história, regras e estratégias vencedoras - o conteúdo para essa apresentação está sintetizado no capítulo 2 desta dissertação. Para isso, organize os alunos em duplas, colocando uma mesa e duas cadeiras à disposição de cada dupla. Apresente no quadro as regras: são dois jogadores em disputa, joga um jogador por vez, alternadamente; cada jogador tem seu símbolo específico, em geral usa-se "O"e "X"; vence o jogador que marcar três símbolos iguais na mesma linha, seja ela horizontal, vertical ou diagonal. Em seguida, fale sobre as estratégias vencedoras já trabalhadas nesse pesquisa que foram citadas anteriormente.

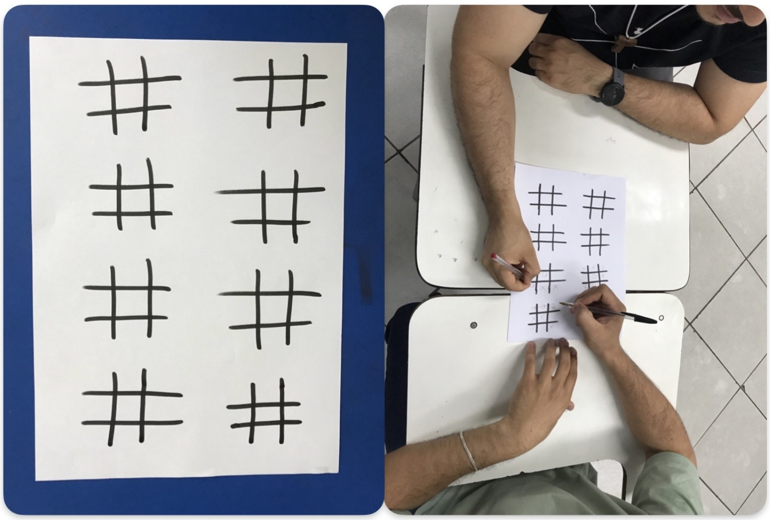
Figura 28: Apresentando as regras



Fonte: Próprio autor (2024)

Neste momento, peça que eles utilizem uma folha A4 para montar o tabuleiro do jogo da velha tradicional, e cada dupla vai disputar entre si algumas partidas de jogo da velha, afim de que internalizem as estratégias vencedoras. Observe a imagem abaixo como pode ser feito na folha A4 a divisão dos jogos.

Figura 29: Praticando o jogo da velha



Fonte: Próprio autor (2024)

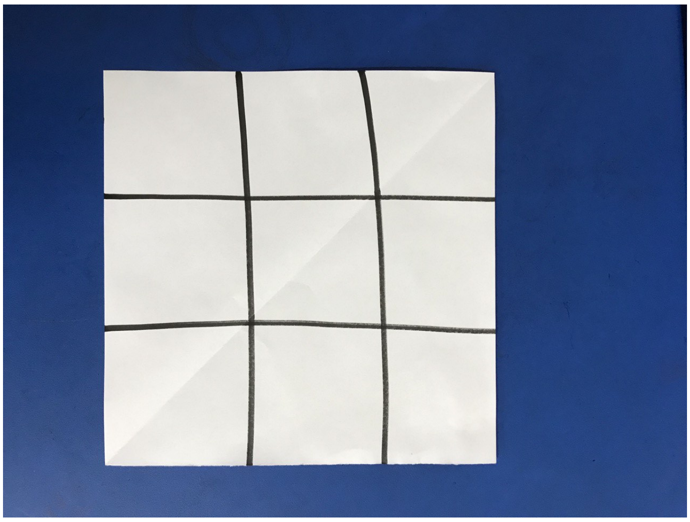
Proponha um desafio entre os alunos pra ver quem vence mais vezes, sempre alternando quem começa as partidas entre os participantes de cada dupla, ou seja, considerando uma dupla com alunos A e B, se o aluno A inicia uma partida, a próxima partida quem deve iniciar é o aluno B.

5.1.3 Jogo da velha no toro

Para iniciar de fato a apresentação do jogo da velha no toro, é necessário que os alunos estejam com os papéis A4 e pincéis coloridos na mesa. Peça para que os alunos desenhem um jogo da velha tradicional, de modo a pegar toda a extensão da folha, como mostra a figura abaixo.

Figura 30: Tabuleiro na folha A4

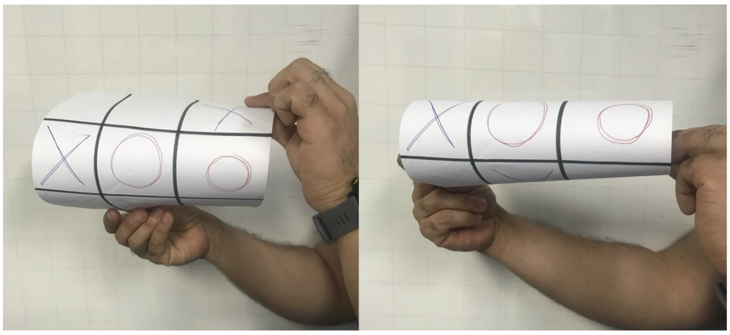
 50



Fonte: Próprio autor (2024)

O desafio agora é demonstrar para os alunos como os lados são infitos e se conectam perfeitamente. Para isso, os alunos devem unir as bodas do jogo, primeiro a borda superior com a borda inferior, como mostra a figura a seguir.

Figura 31: União da borda superior e inferior

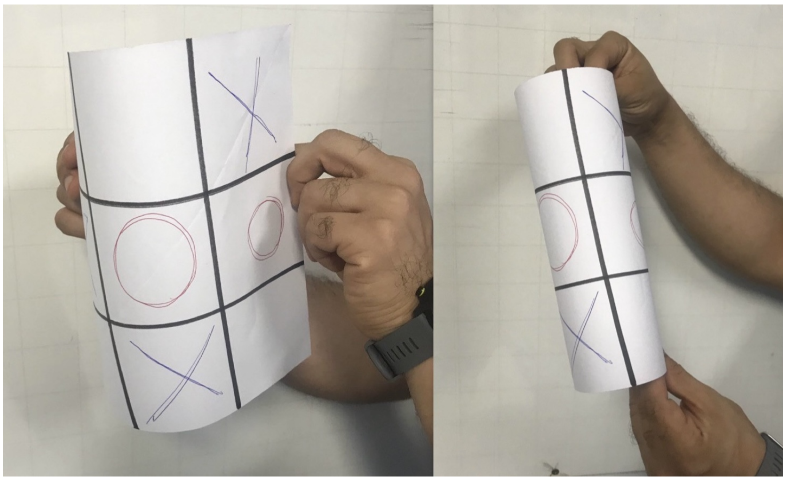


Fonte: Próprio autor (2024)

Posteriormente, agora a borda direita com a borda esquerda. Isso fará com que os alunos entendam o padrão de conexão entre as casas das extremidades.

Figura 32: União da borda direita com a esquerda

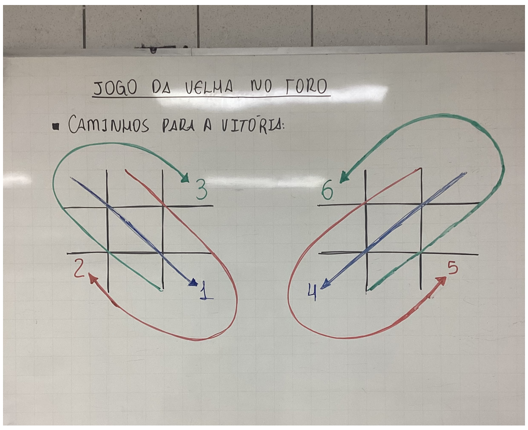
 51



Fonte: Próprio autor (2024)

Depois dos alunos entenderem como as casas se conectam, é necessário colocar em prática. Peça para que as duplas joguem entre si e observe se eles estão acertando ou não na hora de decidir se venceram. Depois dessa experiência, faça um resumo sobre o desempenho deles e mostre na lousa algumas estratégias que sempre garantirão a vitória. O foco, é demonstrar o padrão de vitórias nas diagonais principais e secundárias, já conceituadas anteriormente neste trabalho. Nas figuras a seguir estão demonstradas as seis diagonais que devem ser apresentadas aos alunos.

Figura 33: Diagonais principais e secundárias



Fonte: Próprio autor (2024)

Esse momento fará os alunos absorverem e fixarem em suas estruturas cognitivas os padrões de vitória. A internalização desses padrões deve ajudar os alunos no momento de memorizar o cálculo de determinantes pelo método de Sarrus, então, nesse momento, observem eles jogarem mais algumas partidas entre si, desta vez com os padrões de vitória internalizados.

5.1.4 Cálculo de determinantes

Neste momento da oficina, deve-se ministrar uma mini aula de determinantes, levando em considerção que os alunos já possuem um conhecimento prévio sobre a definição e operações com matrizes. Apresente aos alunos a definição de determinantes, algumas aplicações, a regra de Sarrus e as propriedades dos determinantes. Utilize, se necessário, o conteúdo apresentado no Capítulo 3 deste trabalho. O objetivo desta etapa, é o aprendizado da regra de Sarrus, inicialmente, com a repetição das duas primeiras colunas no lado direito da matriz, como podemos observar no exemplo abaixo.

Exemplo: Considere a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right.$$

Soma das diagonais principais:

$$(1 \cdot 5 \cdot 0) + (4 \cdot 4 \cdot 3) + (2 \cdot 2 \cdot 8) = 0 + 48 + 32 = 80$$

Soma das diagonais secundárias:

$$(2 \cdot 5 \cdot 3) + (1 \cdot 4 \cdot 8) + (4 \cdot 2 \cdot 0) = 30 + 32 + 0 = 62$$

Cálculo do determinante:

$$\det(A) = 80 - 62 = 18$$

Depois dessa breve apresentação da regra de Sarrus, proponha aos alunos realizarem alguns exemplos semelhantes. Depois de fiscalizar a realização desses exemplos, apresente aos alunos o método prático, visto anteriormente nas Figuras 25 e 26, e realize um exemplo de demonstração, pode ser usando a mesma matriz anterior. O exemplo das figuras abaixo foram feitos em um quadro branco como deve ser realizado no momento da oficina, para que os alunos percebam o desenho e o padrão de realização do determinante.

Neste momento, chame atenção sobre a semelhança desse cálculo com os "padrões de vitória"no jogo da velha no toro, peça aos alunos para resgatarem os exemplos feitos na etapa anterior e observarem essa semelhança. Esses exemplos podem ser em forma de lista de exercícios, para que os alunos tentem resovê-la individualmente e discutam entre si os resultados encontrados, gerando um debate entre eles, enriquecendo a oficina com momentos de discussões matemáticas visando chegar a um resultado comum e correto.

Depois de vários exemplos realizados com o jogo da velha no toro, é esperado que os alunos tenham internalizado a semelhança entre o jogo e cálculo dos determinantes, e que esse processo tenha facilitado o seu aprendizado, além de proporcionar um visão mais prazerosa da matemática. O uso de recusos lúdicos tem essa finalidade, de chamar atenção dos alunos e despertar o interesse em aprender matemática de uma maneira mais prazerosa e, consequentemente, aprendam de maneira mais significativa.

Capítulo 6

Considerações finais

Este trabalho foi motivado pelos resultados ruins da educação brasileira em pesquisas avaliativas, apresentados na introdução. Isso nos levou a pesquisar uma estratégia para motivar os alunos a aprenderem matemática de forma significativa. A escolha do assunto se deu a partir de relatos constantes em nosso cotidiano escolar, falas de alunos afirmando que não conseguem aprender os assuntos de matrizes e determinantes. A partir disso, tentamos encontrar uma maneira de facilitar esse processo.

As pesquisas realizadas em livros didáticos e especialmente no livro de Iezzi e Hazzan, Fundamentos de Matemática Elementar Volume 4, nos abriu a mente a tentar encontrar uma forma dos alunos aprenderem cálculo de determinantes pela regra de Sarrus. Não foi um caminho fácil encontrar o que chamamos de Jogo da Velha no Toro, foram muitas pesquisas, leituras, análises e tentativas de fazer dar certo, até que encontramos o tabuleiro ideal. A escassez de pesquisas sobre jogo da velha e também sobre o Toro, dificultou ainda mais o processo de construção desse trabalho. Após centenas de exemplos feitos, chegamos a conclusão que a criação desse jogo iria conntribuir muito com o ensino de determinantes. A ideia da oficina se mostrou a opção mais eficiente frente aos objetivos da pesquisa, isso porque os objetivos só serão alcançados com muita prática dos alunos, com a construção dos tabuleiros, seguir as regras e as interações entre eles.

A não aplicação do projeto para comprovar os resultados, se dar pelo fato do tempo de realização da pesquisa. Criar os jogos, elaborar o projeto e aplicar, nos demandaria mais tempo do que o que nos foi proposto. Mas, a pesquisa está em fase inical, ela terá continuidade, com a aplicação e colheita dos resultados.

Espera-se que esta pesquisa seja útil para a comunidade escolar, apesar da não aplicação, a proposta pedagógica pode ajudar professores do ensino médio em diversificar suas aulas sobre determinantes, oferecendo aos alunos uma aprendizagem mais significativa, além de uma interação muito enriquecedora entre eles.

Referências Bibiográficas

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: educação infantil e ensino fundamental. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 2 ago. 2023

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório Brasil no PISA 2018*. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: <http://exemplo.com/pisa_2018.pdf> Acesso em: 2 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório de Resultados do SAEB 2021: volume 1*. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: <http://exemplo.com/saeb_2021_vol1.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2024.

DAMASCENO, Jeferson. *O impacto das tecnologias digitais no ensino de matemática. Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 25, n. 3, p. 55-68, 2023.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debate*s. SBEM, Ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

ELLIS, Alex. Topological Tic-Tac-Toe #1: The Torus. *Concrete Nonsense*, 15 abr. 2008. Disponível em: <https://concretenonsense.wordpress.com/2008/04/15/topological-tic-tac-toe-1-the-torus/>. Acesso em: 19 abr. 2024.

GOULART, Rosilaine de Fátima Pereira. *A prática pedagógica em oficinas pedagógicas*. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Francisco Beltrão, 2017.

GUARALDO. Como surgiu o jogo da velha. *Cultura Pop na Web*, 16 maio 2013. Disponível em: <https://culturapopnaweb.wordpress.com/2013/05/16/como-surgiu-o-jogo-da-velha/>. Acesso em: 4 abr. 2024.

GRANDO, Regina Célia. *O uso de jogos no ensino de matemática*. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar: Volume 4 - Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1748-8.

JAKUBE. Optimal games of tic-tac-torus. *Code Golf Stack Exchange*, 2015. Disponível em: <https://codegolf.stackexchange.com/questions/48824/optimal-games-of-tic-tac-torus>. Acesso em: 2 maio. 2024.

LIMA, A. M. d.; PEREIRA, M. G. G.; CHAQUIAM, M. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 5, n. 14, 2018.

OLIVEIRA, M.; BRIM, S.; PINEIRO, J. *A utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática*. Revista Brasileira de Educação Matemática, v. 21, n. 3, p. 123-136, 2019.

PEREIRA, Camila. *Uso de metodologias ativas no ensino de Matemática*. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

PEREIRA, Rosilaine de Fátima. *Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência*. Francisco Beltrão: Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2017.

PONTES, Edel Alexandre Silva. *A práxis do professor de matemática por intermédio dos processos básicos e das dimensões da aprendizagem de Knud Illeris*. Revista

Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v. 2, p. 78-88, 2021.

QUEIROZ, Maria de Fátima. *Desafios e perspectivas do ensino de matemática no Brasil.* Revista de Educação Matemática, v. 27, n. 1, p. 35-49, 2023.

REIS JUNIOR, Reinaldo Oliveira. *Oficina de geometria espacial.* Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021.

SILVA, Andrey Camurça da. *Oficina de resolução de problemas matemáticos.* Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2022.

SILVA, João. *Plano de aula: Jogo da Velha.* São Paulo: Autor, 2020. Disponível em: <http://exemplo.com/jogo_da_velha.pdf>. Acesso em: 2 jul. 2024.

STAMBERG, R. D.; STOCHERO, E. *Jogos no ensino de matemática: uma estratégia para facilitar a aprendizagem.* Revista Educação Matemática, v. 23, n. 2, p. 45-58, 2016.

WIKIHOW. Como ganhar no jogo da velha. *wikiHow*, 2024. Disponível em: <https://pt.wikihow.c
no-Jogo-da-Velha>. Acesso em: 7 abr. 2024.

 59

Referências Bibiográficas

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: educação infantil e ensino fundamental. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 2 ago. 2023

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório Brasil no PISA 2018*. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: <http://exemplo.com/pisa_2018.pdf> Acesso em: 2 jan. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório de Resultados do SAEB 2021: volume 1*. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: <http://exemplo.com/saeb_2021_vol1.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2024.

DAMASCENO, Jeferson. *O impacto das tecnologias digitais no ensino de matemática. Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 25, n. 3, p. 55-68, 2023.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debate*s. SBEM, Ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

ELLIS, Alex. Topological Tic-Tac-Toe #1: The Torus. *Concrete Nonsense*, 15 abr. 2008. Disponível em: <https://concretenonsense.wordpress.com/2008/04/15/topological-tic-tac-toe-1-the-torus/>. Acesso em: 19 abr. 2024.

GOULART, Rosilaine de Fátima Pereira. *A prática pedagógica em oficinas pedagógicas*. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Francisco Beltrão, 2017.

GUARALDO. Como surgiu o jogo da velha. *Cultura Pop na Web*, 16 maio 2013. Disponível em: <https://culturapopnaweb.wordpress.com/2013/05/16/como-surgiu-o-jogo-da-velha/>. Acesso em: 4 abr. 2024.

GRANDO, Regina Célia. *O uso de jogos no ensino de matemática*. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar: Volume 4 - Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1748-8.

JAKUBE. Optimal games of tic-tac-torus. *Code Golf Stack Exchange*, 2015. Disponível em: <https://codegolf.stackexchange.com/questions/48824/optimal-games-of-tic-tac-torus>. Acesso em: 2 maio. 2024.

LIMA, A. M. d.; PEREIRA, M. G. G.; CHAQUIAM, M. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 5, n. 14, 2018.

OLIVEIRA, M.; BRIM, S.; PINEIRO, J. *A utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática*. Revista Brasileira de Educação Matemática, v. 21, n. 3, p. 123-136, 2019.

PEREIRA, Camila. *Uso de metodologias ativas no ensino de Matemática*. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

PEREIRA, Rosilaine de Fátima. *Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência*. Francisco Beltrão: Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2017.

PONTES, Edel Alexandre Silva. *A práxis do professor de matemática por intermédio dos processos básicos e das dimensões da aprendizagem de Knud Illeris*. Revista

61

Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v. 2, p. 78-88, 2021.

QUEIROZ, Maria de Fátima. *Desafios e perspectivas do ensino de matemática no Brasil*. Revista de Educação Matemática, v. 27, n. 1, p. 35-49, 2023.

REIS JUNIOR, Reinaldo Oliveira. *Oficina de geometria espacial*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021.

SILVA, Andrey Camurça da. *Oficina de resolução de problemas matemáticos*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2022.

SILVA, João. *Plano de aula: Jogo da Velha*. São Paulo: Autor, 2020. Disponível em: <http://exemplo.com/jogo_da_velha.pdf>. Acesso em: 2 jul. 2024.

STAMBERG, R. D.; STOCHERO, E. *Jogos no ensino de matemática: uma estratégia para facilitar a aprendizagem*. Revista Educação Matemática, v. 23, n. 2, p. 45-58, 2016.

WIKIHOW. Como ganhar no jogo da velha. *wikiHow*, 2024. Disponível em: <https://pt.wikihow.c
no-Jogo-da-Velha>. Acesso em: 7 abr. 2024.