

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN**

**O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E SUA APLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO  
BÁSICA**

**TOLEDO**

**2024**

**VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN**

**O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E SUA APLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO  
BÁSICA**

**THE PRINCIPLE OF FINITE INDUCTION AND ITS APPLICATION IN BASIC  
EDUCATION**

Dissertação apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Robson Willians Vinciguerra

Coorientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Wilian Francisco de Araujo

**TOLEDO**

**2024**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação**  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Toledo**



VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN

## **O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E SUA APLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).  
Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 06 de Setembro de 2024

Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Maicon Felipe Malacarne, Doutorado - Biopark Educação - Associação de Ensino, Pesquisa e Extensão Biopark

Dr. Wilian Francisco De Araujo, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 09/09/2024.

À Deus, meu esposo e meus filhos, minhas  
razões de viver.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus por ter me dado saúde e coragem para superar os desafios e À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, especialmente o corpo docente, pelo aprendizado e horas compartilhadas.

Ao meu orientador, Robson Willians Vinciguerra, e meu coorientador, Wilian Francisco de Araújo, por aceitarem esse desafio e dedicarem preciosas horas sanando dúvidas e guiando este trabalho.

À Faculdade Biopark, pelo incentivo e apoio na formação de seu quadro de colaboradores, permitindo que eu utilizasse parte de minha carga horária para este objetivo.

Aos meus familiares, especialmente marido e filhos, pela compreensão e apoio em todas as angústias e necessidades.

A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.  
(Bertrand Russell)

## RESUMO

Este trabalho visa usar a demonstração por indução matemática como ferramenta didática para o ensino. O foco é auxiliar o professor na explicação de fórmulas e conjecturas, promovendo uma experiência matemática profunda para os alunos. Queremos que os alunos questionem as generalizações e se tornem mais analíticos em relação às afirmações feitas. Como metodologia serão empregadas técnicas de indução matemática para explicar conceitos e fórmulas já existentes e, dessa forma, teremos a indução matemática como uma ferramenta formal que ajuda a desenvolver uma compreensão precisa dos conceitos matemáticos, sendo crucial para evitar erros derivados de falsas generalizações. Por fim, concluiremos sugerindo que o uso da indução matemática visa fornecer aos alunos uma base sólida e a capacidade de realizar demonstrações rigorosas antes de afirmar qualquer observação matemática.

**Palavras-chave:** demonstração; indução finita; ensino de matemática.

## ABSTRACT

This work aims to use proof by mathematical induction as a didactic tool for teaching. The focus is on assisting teachers in explaining formulas and conjectures, promoting a deeper mathematical experience for students. We want students to question generalizations and become more analytical regarding the statements made. As a methodology, mathematical induction techniques will be employed to explain existing concepts and formulas, thus using mathematical induction as a formal tool that helps develop a precise understanding of mathematical concepts, which is crucial to avoid errors resulting from false generalizations. Finally, we will conclude by suggesting that the use of mathematical induction aims to provide students with a solid foundation and the ability to perform rigorous proofs before asserting any mathematical observation.

**Keywords:** demonstration; mathematical induction; mathematics teaching.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Efeito dominó . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>Figura 2 – Polígonos . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>Figura 3 – Demonstração Lei Angular de Tales . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>Figura 4 – Quantidade mínima de triângulos internos . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>Figura 5 – Relação entre <math>S_6</math> e <math>S_5</math> . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>Figura 6 – Probabilidade da união de dois eventos . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>Figura 7 – Probabilidade da união de três eventos . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Figura 8 – Torre de Hanói . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>Figura 9 – Movimento de 1 disco . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Figura 10 – Movimento de 2 discos . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Figura 11 – Movimento de 3 discos . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>Figura 12 – Movimento de 4 discos . . . . .</b>	<b>41</b>

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1 – 40 valores para <math>n</math></b>	<b>11</b>
<b>Quadro 2 – Primeiras substituições</b>	<b>24</b>
<b>Quadro 3 – Primeiros termos da recorrência</b>	<b>26</b>
<b>Quadro 4 – Quantidade de lados X Quantidade de triângulos</b>	<b>31</b>
<b>Quadro 5 – Quantidade de lados X Soma dos ângulos internos</b>	<b>32</b>
<b>Quadro 6 – Movimentos 1 disco</b>	<b>39</b>
<b>Quadro 7 – Movimentos 2 discos</b>	<b>40</b>
<b>Quadro 8 – Movimentos 3 discos</b>	<b>40</b>
<b>Quadro 9 – Movimentos 4 discos</b>	<b>41</b>
<b>Quadro 10 – Discos X Recorrência</b>	<b>43</b>
<b>Quadro 11 – Discos X Expressão geral</b>	<b>43</b>

## ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\forall$	Para todo
$A \Rightarrow B$	$A$ implica em $B$
$A \Leftrightarrow B$	$A$ se e, somente se $B$
$P(n)$	Propriedade que depende de $n$
$A \subset B$	$A$ está contido em $B$
$A \not\subset B$	$A$ não está contido em $B$
$a \in A$	$a$ é um elemento de $A$
$a \notin A$	$a$ não é um elemento de $A$
$A \cup B$	$A$ união $B$
$A \cap B$	$A$ interseção $B$
$a > b$	$a$ é maior que $b$
$a \geq b$	$a$ é maior ou igual a $b$
$a < b$	$a$ é menor que $b$
$a \leq b$	$a$ é menor ou igual a $b$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\bigcup_{i=1}^n A_i$	União de $n$ conjuntos
$\text{Pr}(A)$ ou $P(A)$	Probabilidade de $A$
$X^c$	Complementar do conjunto $X$
$A - B$	Diferença entre os conjuntos $A$ e $B$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1.1	Estrutura do trabalho . . . . .	12
2	CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS E O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA . . . . .	13
2.1	Axiomas de Peano . . . . .	13
2.2	Princípio da Indução Finita . . . . .	14
2.3	Adição dos Números Naturais . . . . .	15
2.4	Multiplicação dos Números Naturais . . . . .	17
2.5	Relação de Ordem dos Números Naturais . . . . .	18
2.6	Demonstrando Igualdades, Desigualdades e Problemas de Aritmética . . . . .	19
2.7	Outras formas do Princípio de Indução . . . . .	23
3	APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	30
3.1	Soma dos ângulos internos de um polígono . . . . .	30
3.2	Probabilidade da união de eventos . . . . .	33
3.3	Torre de hanói . . . . .	38
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	45
	Referências . . . . .	46

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente na vida das pessoas desde os tempos antigos, e, conforme o mundo vem evoluindo, é possível observar técnicas, metodologias e outras modalidades de ensino diferenciadas sendo introduzidas nas salas de aula.

Essa evolução no ensino de matemática é importante para o aprendizado dos alunos, no entanto, algumas técnicas podem ser aprimoradas ou revisadas, a fim de que o aluno possa ter acesso ao conteúdo completo, com explicações rebuscadas e também com o rigor matemático que determinados conteúdos exigem.

Um exemplo disso, cujo nome é o assunto deste trabalho, é a indução matemática. Muitas vezes alguns exemplos são dados e são generalizados para os demais casos em sala de aula, porém, são testados somente para os números 1, 2, 3 e, logo após, já são aceitos para todos os demais. Como é o caso da afirmação: A expressão  $P(n) : n^2 - n + 41$  fornece um número primo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se fizermos uma tabela com os primeiros 40 valores para  $n$ , obtemos:

**Quadro 1 – 40 valores para  $n$**

$n$	$P(n)$	$n$	$P(n)$	$n$	$P(n)$	$n$	$P(n)$	$n$	$P(n)$	$n$	$P(n)$
1	41	8	97	15	251	22	503	29	853	36	1301
2	43	9	113	16	281	23	547	30	911	37	1373
3	47	10	131	17	313	24	593	31	971	38	1447
4	53	11	151	18	347	25	641	32	1033	39	1523
5	61	12	173	19	383	26	691	33	1097	40	1601
6	71	13	197	20	421	27	743	34	1163		
7	83	14	223	21	461	28	797	35	1231		

Fonte: Do autor (2024)

Mas para  $n = 41$ , teremos  $P(41) : 41^2 - 41 + 41 = 41^2$  que não é primo. Logo, a sequência deixa de gerar obrigatoriamente números primos. Caso essa função fosse testada apenas substituindo alguns valores, seria bem provável que se concluísse que a referida função gera números primos para todo  $n$  natural, quando na verdade isso não acontece.

Os alunos, normalmente confundem que a validade de uma proposição em alguns casos, já é suficiente para demonstrá-la, o que é um erro evitável quando utilizamos o método da indução para demonstrar sua validade.

Esses erros de generalização infelizmente são comuns e, uma maneira de eliminá-los é realizar as demonstrações corretamente, a fim de evitar que os alunos aceitem ou conjecturem erroneamente, além de instigar o senso crítico dos alunos quando deparados com expressões e fórmulas que lhes causem dúvidas.

Neste trabalho, explicaremos e definiremos o que é a indução matemática e como ela pode estar inserida dentro da educação básica e auxiliar o professor na explicação de deter-

minados problemas e fórmulas matemáticas, como também aos alunos na compreensão de generalizações.

Para isso, criaremos uma sugestão (produto educacional), para professores, de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula com os alunos gerado a partir das contribuições deste trabalho.

A escolha da sugestão para aplicação na educação básica, deu-se por convenção e maior flexibilidade de adaptação em diferentes níveis de ensino.

Durante a leitura do trabalho, vale ressaltar que estaremos sempre considerando os números naturais como um conjunto do qual o número 0 não faz parte, ou seja, o número 1 não será sucessor de nenhum número pertencente aos naturais e será, por consequência, o primeiro número no conjunto dos números naturais.

## **1.1 Estrutura do trabalho**

O trabalho inicia com uma breve introdução, seguida do capítulo 2, onde faremos a construção dos números naturais a partir dos axiomas de Peano destacando o surgimento do princípio de indução finita a partir de um dos axiomas. Além disso, mostraremos algumas propriedades relacionadas à adição, multiplicação e relação de ordem sobre os números naturais e mostraremos algumas aplicações do princípio de indução finita relacionados à demonstração de igualdades, desigualdades e problemas de aritmética como também outras formas do princípio da indução juntamente com as situações em que podem ser utilizados. Por fim, no capítulo 3, mostraremos algumas aplicações do princípio da indução finita em conteúdos estudados no ensino de matemática da educação básica e finalizaremos com a conclusão deste estudo e a proposta de um produto educacional.

## 2 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS E O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O conjunto dos números naturais é uma das bases fundamentais da matemática. Em nosso trabalho iremos considerá-lo como sendo números inteiros e positivos, começando em 1 e indo até o infinito. Representado pela letra  $\mathbb{N}$ , esse conjunto inclui os números 1, 2, 3, 4 e assim por diante, sem incluir o zero, números negativos ou frações. Os números naturais são usados para contar objetos, representar ordem e expressar quantidades inteiras. Eles desempenham um papel crucial em várias áreas da matemática, como aritmética, álgebra e teoria dos números. Além disso, são essenciais em diversas aplicações práticas, como contagem, medição e modelagem de fenômenos naturais.

Neste capítulo traremos uma introdução à construção dos números naturais por meio dos axiomas de Peano, destacando o axioma de indução, do qual provem o Princípio de Indução Finita que é objeto de estudo deste trabalho. Além disso, buscamos evidenciar a importância deste princípio como método de demonstração de afirmações envolvendo os números naturais.

Tomaremos também a liberdade para omitir algumas demonstrações, onde para mais detalhes o leitor poderá consultar [Morgado e Carvalho 2014].

### 2.1 Axiomas de Peano

Para iniciarmos o processo de construção do princípio da indução finita e suas aplicações na educação básica, precisamos inicialmente, abordar o conjunto dos números naturais.

Os números naturais podem ser vistos como uma simples sequência, ou como um instrumento de contagem, e a forma como ele é analisado remete ao que chamamos de números ordinais ou números cardinais respectivamente.

Neste trabalho, nos dedicaremos aos **números ordinais**, uma vez que estamos interessados na sequência de números naturais e não na contagem deles.

Ao analisarmos os números naturais sob a perspectiva de uma sequência simples, podemos nos basear em uma lista de axiomas, propostos por Giuseppe Peano (1858-1932), a qual sustenta-se na ideia de sucessores. Essa lista que caracteriza o conjunto numérico estudado ( $\mathbb{N}$ ), compõe-se dos seguintes axiomas:

- (i) Todo Número Natural tem um único sucessor, que também é um Número Natural;
- (ii) Números Naturais diferentes tem sucessores diferentes;
- (iii) Existe um único Número Natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- (iv) Seja  $X$  um conjunto de Números Naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de cada elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Nesse sentido, vale acrescentar que para obtermos o sucessor de um número natural  $n$ , basta adicionarmos uma unidade, ou seja, o sucessor de  $n$  pode ser escrito como  $n + 1$ . Assim, podemos reescrever os axiomas de Giuseppe Peano, em linguagem matemática mais apropriada para nossos objetivos futuros, como:

- (i) Todo Número Natural  $n$  tem um sucessor, representado por  $n + 1$ ;
- (ii) Se  $m + 1 = n + 1$ , então  $m = n$ ;
- (iii) Existe um único Número Natural, designado por 1, tal que  $n + 1 \neq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv) Seja  $X$  um conjunto de Números Naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso,  $n + 1 \in X$ , para cada  $n \in X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Todos os axiomas são importantes e necessários para caracterizarmos o conjunto dos números naturais, no entanto, estaremos evidenciando o quarto axioma, conhecido como Axioma da Indução, para as análises seguintes.

## 2.2 Princípio da Indução Finita

O quarto axioma, conhecido como axioma da indução, garante que em determinado subconjunto de  $\mathbb{N}$  é possível incluir todos os elementos de  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 2.1** (Princípio da Indução Finita). *Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:*

- (i)  $P(1)$  é válida;
- (ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n + 1)$ ;

Então,  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Considere  $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ é verdadeira}\} \subset \mathbb{N}$ . Por hipótese, pelo item (i)  $P(1)$  é verdadeira, então  $1 \in X$ . Também por hipótese, pelo item (ii),  $P(n + 1)$  é verdadeira, uma vez que  $P(n)$  verdadeira implica sua validade.  $P(n + 1)$  sendo verdadeira, temos que  $(n + 1) \in X$  pela forma como  $X$  foi considerado. Assim, pelo axioma 4 de indução, podemos concluir que  $X = \mathbb{N}$ . Logo,  $P(n)$  vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como queríamos mostrar. ■

O Teorema 2.1 é conhecido como **Princípio da Indução Finita** e constitui um método para verificar a validade de afirmações matemáticas relacionadas aos números naturais.

O princípio de indução finita nos remete a uma brincadeira feita com dominó conhecida como "efeito dominó", Figura 1. A brincadeira consiste em construir uma fileira de dominós formando um desenho de modo que a distância entre dois dominós seja sempre menor que a altura do dominó para que sempre que um dominó cair, este derrube o seguinte e assim por diante. Então, ao derubar a primeira peça da fileira construída, todas as demais peças vão caindo



na sequência em que foram colocadas, formando um fenômeno interessante que atrai muitas pessoas a repetir o processo de diferentes formas. Esta brincadeira tem uma analogia com o princípio de indução finita. Na brincadeira, desejamos que todas as peças sejam derrubadas, no caso do princípio de indução finita, queremos que uma fórmula valha para todos números naturais.

**Figura 1 – Efeito dominó**



Fonte: Do autor (2024)

Agora para que todos os domínios caiam, duas coisas precisam ocorrer, primeiro precisamos garantir que sempre que uma peça cair, a seguinte cairá e depois, precisamos derrubar a primeira peça. Observe que o mesmo ocorre no princípio de indução finita Teorema 2.1, a hipótese ii) garante que se a fórmula valer para um  $n$  qualquer, também valerá para o seu sucessor  $n + 1$  (um derruba o outro). Agora, a hipótese i), em que exige que a fórmula valha para  $n = 1$  significa que a fórmula vale para algum natural, e este é o primeiro (derrubar o primeiro). O resultado que observamos na brincadeira é que todas as peças caem sequencialmente, a primeira derruba a segunda, a segunda derruba a terceira, e assim por diante. O mesmo ocorre com o princípio de indução finita, se tivermos o item i) da hipótese ocorrendo, ou seja, que fórmula valha para  $n = 1$ , a hipótese ii) ocorrendo também faz com que valha a fórmula para  $n = 2$ , e novamente a hipótese ii) mostra que vale para  $n = 3$ , e assim por diante até obtermos a validade da fórmula para todos números naturais.

### 2.3 Adição dos Números Naturais

Na sequência, vamos evidenciar a importância desse método para verificar que uma definição que envolve os números naturais realmente pode ser aplicada a todos os números naturais.

**Definição 2.2** (Adição). *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , definimos a adição  $m + n$  por*

- (i)  $m + 1$  é o sucessor de  $m$ ;

(ii)  $m + (n + 1)$  é o sucessor de  $m + n$ , ou seja,  $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ .

Observe como procedemos a adição  $2 + 3$  utilizando a definição:

- $2 + 1 =$  sucessor de  $2 = 3$ ;
- $2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 =$  sucessor de  $3 = 4$ ;
- $2 + 3 = 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 4 + 1 =$  sucessor de  $4 = 5$ .

A definição acima relaciona dois números arbitrários  $m, n \in \mathbb{N}$ , mas como sabemos que a definição é realmente válida, já que não consigo testá-la sempre por  $\mathbb{N}$  possuir infinitos elementos?

Observe novamente o exemplo acima. Para realizar a adição  $2 + 3$ , percebe-se que a primeira parcela  $2$  é fixada e inicia-se fazendo  $2 + 1$ , e utiliza-se desse resultado para o cálculo de  $2 + 2$ , que por sua vez é utilizado para obter o resultado final  $2 + 3$ . Esse processo é chamado de recorrência, onde é preciso recorrer ao anterior para calcular o seguinte.

Esse exemplo permite ver como o princípio de indução pode ser usado para garantir que sempre seja possível realizar a soma  $m + n$ . De fato, considere  $m \in \mathbb{N}$  fixo e arbitrário. Considere também  $P(n) : m + n$  definido e aplica-se a indução em  $n$ .

É preciso mostrar que vale  $P(1)$ . Neste caso, pela definição  $m + 1 =$  sucessor de  $m$ . Portanto,  $P(1)$  vale, pois  $m + 1$  está definido.

Agora, supõe que  $P(n)$  ocorre para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $m + n$  está definido. Então por consequência,  $m + n$  é um número natural.

Vamos mostrar agora que  $P(n + 1)$  vale, ou seja,  $m + (n + 1)$  está definido. Por hipótese de indução  $m + n$  está definido, assim podemos usar esse número para definir  $m + (n + 1)$  como sendo seu sucessor, ou seja,  $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ , conforme o item ii) da definição de adição.

Portanto,  $P(n + 1)$  está definido.

Como o princípio de indução finita foi aplicado em  $n$ , obtemos que  $P(n) : m + n$  está definido,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Mas, sendo  $m \in \mathbb{N}$  um número natural arbitrário, concluí-se também que  $m + n$  está definido,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ .

As definições utilizando os números naturais envolvem recorrências e isso possibilita, por meio do princípio da indução finita, que seja garantida a sua aplicabilidade em todos os números naturais.

Veremos abaixo uma lista de propriedades que podem ser deduzidas utilizando o método de indução finita. Faremos a demonstração apenas do item (ii), os demais podem ser consultados no livro [Hefez 2006]:

**Teorema 2.3** (Propriedades da Adição). *Para todo  $m, n, p, r \in \mathbb{N}$ , tem-se:*

- (i)  $m + n \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  é fechado para adição);

(ii)  $m + (n + p) = (m + n) + p$  (*Associatividade*);

(iii)  $m + n = n + m$  (*Comutatividade*).

(iv)  $m + r = n + r \Leftrightarrow m = n$  (*Lei do corte*).

**Demonstração:** (ii) Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  fixos e arbitrários e considere:

$$P(p) : m + (n + p) = (m + n) + p$$

Aplicaremos indução sobre  $p$ .

Para  $p = 1$ , obtemos  $P(1) : m + (n + 1) = (m + n) + 1$  que é verdadeira pelo item (ii) da definição de adição.

Agora, suponha que a afirmação valha para  $p$ , ou seja,  $m + (n + p) = (m + n) + p$ . Vamos mostrar que  $m + (n + (p + 1)) = (m + n) + (p + 1)$ . De fato,

$$\begin{aligned} m + (n + (p + 1)) &= m + ((n + p) + 1) \quad (\text{por 2.2(ii)}) \\ &= (m + (n + p)) + 1 \quad (\text{por 2.2(ii)}) \\ &= ((m + n) + p) + 1 \quad (\text{pela hipótese de indução}) \\ &= (m + n) + (p + 1) \quad (\text{por 2.2(ii)}) \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita 2.1, temos que  $m + (n + p) = (m + n) + p$  ocorre para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Como  $m, n \in \mathbb{N}$  são arbitrários, concluímos que  $m + (n + p) = (m + n) + p$  para todo  $m, n, p \in \mathbb{N}$ . Como queríamos provar. ■

## 2.4 Multiplicação dos Números Naturais

Na sequência, pode-se observar a definição de multiplicação:

**Definição 2.4** (Multiplicação). *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , definimos a multiplicação  $m \cdot n$  por*

(i)  $m \cdot 1 = m$ ;

(ii)  $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$ .

Assim como o caso da adição, a definição da multiplicação  $m \cdot n$  é feita também utilizando recorrência para que o princípio da indução finita garanta que ocorra para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Utilizando as duas definições acima e as propriedades da adição é possível enunciar e demonstrar, pelo método da indução, as propriedades da multiplicação e também, a distributiva, que relaciona a adição com a multiplicação. Faremos a demonstração apenas do item iv), as demonstrações dos demais itens poderão ser consultadas no livro [Hefez 2016]:

**Teorema 2.5** (Propriedades da Multiplicação). *Para todo  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , tem-se:*

- (i)  $m.n \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  é fechado para multiplicação);
- (ii)  $m.(n + p) = m.n + m.p$  (Distributiva à esquerda);
- (iii)  $m.(n.p) = (m.n).p$  (Associativa);
- (iv)  $(m + n).p = m.p + n.p$  (Distributiva à direita);
- (v)  $1.n = n$  (Elemento neutro);
- (vi)  $m.n = n.m$  (Comutatividade).

**Demonstração:** (iv) Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  fixos e arbitrários e considere  $P(p) : (m + n).p = m.p + n.p$ . Vamos utilizar indução em  $p$ :

A propriedade vale para  $p = 1$ , já que  $(m + n).1 = m + n = m.1 + n.1$ , por 2.4 (i).

Suponhamos que a propriedade seja válida para um algum  $p \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$(m + n).p = m.p + n.p.$$

Vamos mostrar que vale  $P(p + 1)$ , ou seja, que  $(m + n).(p + 1) = m.(p + 1) + n.(p + 1)$ .

De fato,

$$\begin{aligned} (m + n).(p + 1) &= (m + n).p + (m + n) \quad (\text{por 2.4(ii)}) \\ &= (m.p + n.p) + (m + n) \quad (\text{pela hipótese de indução}) \\ &= ((m.p + n.p) + m) + n \quad (\text{associativa da adição}) \\ &= (m.p + (n.p + m)) + n \quad (\text{associativa da adição}) \\ &= (m.p + (m + n.p)) + n \quad (\text{comutativa da adição}) \\ &= ((m.p + m) + n.p) + n \quad (\text{associativa da adição}) \\ &= (m.p + m) + (n.p + n) \quad (\text{associativa da adição}) \\ &= m.(p + 1) + n.(p + 1) \quad (\text{por 2.4(ii)}) \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita 2.1, temos que  $(m + n).p = m.p + n.p$  ocorre para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Como  $m, n \in \mathbb{N}$  são arbitrários, concluímos que  $(m + n).p = m.p + n.p$  para todo  $m, n, p \in \mathbb{N}$ . Como desejávamos mostrar. ■

## 2.5 Relação de Ordem dos Números Naturais

Além das definições de adição e multiplicação, também podemos definir a relação de ordem, como segue:

**Definição 2.6** (Ordem). *Sejam  $m$  e  $n$  números naturais. Dizemos que  $m$  é menor que  $n$  e denotamos por  $m < n$  quando existe um número natural  $p$  tal que  $m + p = n$ .*

Por exemplo,  $3 < 8$ , pois existe  $5 \in \mathbb{N}$  tal que  $3 + 5 = 8$ .

Finalizamos esta seção com as principais propriedades da relação de ordem. Provaremos apenas o item (iii), as demais demonstrações podem ser consultadas em [Hefez 2016].

**Teorema 2.7.** *Sejam  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se  $m < n$  e  $n < p$ , então  $m < p$  (Transitividade).*
- (ii) *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , qualquer das afirmações  $m < n$ ,  $m = n$ ,  $n < m$  exclui as outras duas. (Tricotomia)*
- (iii) *Se  $m < n$ , então  $m + p < n + p$  e  $mp < np$ . (Monotonicidade)*

**Demonstração:** (iii) Como  $m < n$ , por definição  $n = m + k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $n + p = (m + k) + p = m + (k + p) = m + (p + k) = (m + p) + k$ . Portanto,  $m + p < n + p$ .

Analogamente, como  $n = m + k$ , segue que  $np = (m + k)p = mp + kp$ . Portanto,  $np > mp$ . ■

**Definição 2.8.** *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $m$  é menor ou igual a  $n$  e, denotamos por  $m \leq n$ , quando  $m < n$  ou  $m = n$ .*

Nesta seção observamos a aplicação do princípio de indução finita para construção do conjunto dos números naturais juntamente com suas propriedades. Na seção seguinte, mostraremos como esse método é utilizado para demonstrar igualdades, desigualdades e problemas de aritmética envolvendo os números naturais.

## 2.6 Demonstrando Igualdades, Desigualdades e Problemas de Aritmética

Agora traremos alguns exemplos que foram demonstrados através do princípio de indução finita em três principais modelos: igualdades matemáticas, desigualdades matemáticas e também uma aplicação da indução matemática a um problema da aritmética.

O caso base da demonstração por indução é verificar a validade de  $P(1)$ ; ou seja, a primeira condição. Feito isso, mostrar que  $P(n + 1)$  é verdadeira, após supor que  $P(n)$  seja válido, é denominado *passo de indução* e corresponde à segunda e última condição necessária para concluir a demonstração por indução.

Considere os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.9.** *A igualdade  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, considere  $P(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Vamos iniciar a demonstração por indução, verificando a primeira condição, ou seja, mostrando que  $P(1)$  ocorre. Para isso, considerando  $n = 1$ , obtemos que:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo,  $P(1)$  vale.

Agora iremos mostrar a validade do passo de indução, ou seja,

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

será nossa hipótese de indução para provar que

$$P(n+1) : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

ocorre. De fato, substituindo a hipótese de indução em  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + (n+1)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + (2n+2)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Logo,  $P(n+1)$  está validada, como queríamos mostrar. ■

**Exemplo 2.10.** A igualdade  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Primeiramente, consideremos

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ .

Iniciaremos a demonstração por indução, verificando a primeira condição, ou seja, confirmar que  $P(1)$  é realmente válida. Para isso, basta considerarmos  $n = 1$  e verificarmos que:

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$$

Logo,  $P(1)$  está validada.

Agora iremos mostrar a validade do passo de indução, nossa segunda condição, no entanto, para isso, é primeiro preciso considerar  $P(n)$  válida, ou seja,  $P(n)$  será nossa hipótese de indução, assim, assumimos que vale:

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e mostraremos que  $P(n+1)$  é verdade, ou seja, que

$$P(n+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Substituindo a hipótese de indução em  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\ &= \frac{(n^2 + n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 2)(2n + 3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Logo,  $P(n+1)$  está validada, como queríamos mostrar. ■

Além desses exemplos de igualdade, também é possível utilizar o princípio de indução finita em desigualdades matemáticas. Uma desigualdade importante a ser mostrada através do princípio indutivo é a Desigualdade de Bernoulli, enunciada e demonstrada abaixo:

**Exemplo 2.11** (Desigualdade de Bernoulli). *Seja  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x > -1$ , então vale a desigualdade*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário satisfazendo  $x > -1$  e considere

$$P(n) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Começaremos verificando que  $P(1)$  ocorre. Temos

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad (1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$$

Logo,  $P(1)$  ocorre.

Agora iremos mostrar a validade do passo de indução, para isso, suponhamos  $P(n) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$  e vamos provar

$$P(n + 1) : (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x.$$

De fato, como  $1 + x > 0$ , podemos multiplicar em ambos os lados da hipótese de indução por  $1 + x$  que a desigualdade não se altera, ou seja:

$$(1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)$$

Disso, obtemos:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &\geq 1 + x + nx + nx^2 \end{aligned}$$

Agora, uma vez que  $nx^2 \geq 0$ , obtemos  $nx^2 + 1 + x + nx \geq 0 + 1 + x + nx$ , que nos dá,  $nx^2 + 1 + x + nx \geq 1 + x + nx$ . Então,

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &\geq 1 + x + nx + nx^2 \\ &\geq 1 + x + nx \\ &\geq 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

Portanto,  $P(n + 1)$  está validada, como queríamos mostrar. ■



Também é possível utilizar a indução matemática para demonstrar problemas de aritmética, como segue o exemplo abaixo, mas antes lembramos que, dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , dizemos que  $a$  é divisível por  $b$  quando existe algum  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = b \cdot k$ . Por exemplo, 6 é divisível por 2, já que existe  $3 \in \mathbb{Z}$  tal que  $6 = 2 \cdot 3$ .

**Exemplos 2.12.** (*Problema de Aritmética*)

$P(n) : n^5 + 4n$  é divisível por 5 para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Vamos iniciar a demonstração por indução, verificando a primeira condição, ou seja, confirmar que  $P(1)$  seja realmente divisível por 5. Para isso, basta considerarmos  $n = 1$ :

$$1^5 + 4 \cdot 1 = 1 + 4 = 5 = 5 \cdot 1$$

Logo,  $P(1)$  está validada.

Agora iremos mostrar a validade do passo de indução, nossa segunda condição, no entanto, para isso, é primeiro preciso considerar  $P(n) : n^5 + 4n$  é divisível por 5 válida, ou seja,  $n^5 + 4n = 5 \cdot k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Agora, considerando então  $P(n)$  válida, queremos concluir  $P(n+1) : (n+1)^5 + 4(n+1)$  é divisível por 5. Primeiro observe que:

$$\begin{aligned} (n+1)^5 + 4(n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 + 4n + 4 \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 4n + 5 \\ &= n^5 + 4n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5 \\ &= n^5 + 4n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1) \end{aligned}$$

Então, somando em ambos lados da hipótese de indução  $n^5 + 4n = 5 \cdot k$  o termo  $5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} (n+1)^5 + 4(n+1) &= n^5 + 4n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1) \\ &= 5k + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1) \\ &= 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1) \end{aligned}$$

Logo,  $P(n+1)$  é divisível por 5, como queríamos mostrar. ■

## 2.7 Outras formas do Princípio de Indução

Nesta seção iremos apresentar algumas variações do princípio de indução finita. Apresentaremos as demonstrações das mesmas, juntamente com exemplos e uma breve explanação sobre quando é conveniente utilizar cada uma delas.

A primeira variação mostra que o princípio de indução finita pode ser aplicado para verificar a validade de qualquer afirmação  $P(n)$ , não necessariamente partindo de  $n = 1$ . Por exemplo, se considerarmos  $P(n) : n^2 > 2n + 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , os primeiros valores de  $n$  na afirmação nos dão:

**Quadro 2 – Primeiras substituições**

$n$	$P(n)$
1	$1 > 3$
2	$4 > 5$
3	$9 > 7$
4	$16 > 9$
5	$25 > 11$
6	$36 > 13$
...	...

Fonte: Do autor (2024)

Analisando o quadro acima, vemos que para  $n = 1$  e  $n = 2$  a afirmação  $P(n) : n^2 > 2n + 1$  é falsa, porém para  $n \geq 3$  nos parece que sempre irá ocorrer. O resultado abaixo mostra que podemos verificar essa afirmação a partir de  $n = 3$ .

**Teorema 2.13.** *Sejam  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Suponha que*

(i)  $P(n_0)$  é válida;

(ii)  $\forall n \geq n_0, P(n)$  é válida  $\Rightarrow P(n + 1)$  é válida.

Então,  $P(n)$  é válida para todo  $n \geq n_0$ .

**Demonstração:** Vamos aplicar o axioma da indução para

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n_0 + n - 1) \text{ é válida}\}.$$

Temos:

(i)  $1 \in X$ , pois  $P(n_0 + 1 - 1) = P(n_0)$  é válida pelo item i).

(ii)  $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ .

Suponha  $n \in X$ , por definição de  $X$ , temos que  $P(n_0 + n - 1)$  é válido. Note que:

$$\begin{aligned} n \geq 1 &\Rightarrow n_0 + n \geq 1 + n_0 \\ &\Rightarrow n_0 + n - 1 \geq 1 + n_0 - 1 = n_0 \end{aligned}$$

Como  $n_0 + n - 1 \geq n_0$  e  $P(n_0 + n - 1)$  é válido, pelo item ii), segue que  $P(n_0 + n - 1 + 1)$  é válido, ou seja,  $n + 1 \in X$ . Pelo Axioma de Indução,  $X = \mathbb{N} \Rightarrow P(n_0 + n - 1)$  válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou ainda, se chamarmos  $n_0 + n - 1 = k$ , então  $P(k)$  é válido para todo  $k \geq n_0$ . ■

**Exemplo 2.14.** Mostre que  $n^2 > 2n + 1$ , para todo  $n \geq 3$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Primeiramente, consideremos

$$P(n) : n^2 > 2n + 1.$$

Vamos iniciar a demonstração por indução, verificando a primeira condição, ou seja, confirmar que  $P(3)$  seja realmente válida. Para isso, basta considerarmos  $n = 3$  e notarmos que:

$$3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Logo,  $P(3) : 3^2 > 2 \cdot 3 + 1$  ocorre, como queríamos mostrar.

Agora iremos mostrar a validade do passo de indução, para isso, é primeiro preciso considerar nossa hipótese de indução, ou seja, que  $P(n) : n^2 > 2n + 1$  é verdade, e vamos provar que  $P(n + 1) : (n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$  é válido. Começamos somando  $2n + 1$  no primeiro membro da hipótese  $n^2 > 2n + 1$ , essa técnica, conhecida como completar quadrado, permite obter da hipótese o termo  $(n + 1)^2$  conforme o cálculo abaixo:

$$\begin{aligned} n^2 > 2n + 1 &\Rightarrow n^2 + 2n + 1 > 2n + 1 + 2n + 1 \\ &\Rightarrow (n + 1)^2 > 4n + 2 \end{aligned}$$

Lembramos que precisamos provar a desigualdade  $(n + 1)^2 > 2n + 3$  e, isso será obtido se ocorrer  $4n + 2 > 2n + 3$ , visto que teríamos

$$(n + 1)^2 > 4n + 2 > 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$$

Para isso, observe que

$$4n + 2 > 2n + 3 \Leftrightarrow 4n - 2n > 3 + 2 \Leftrightarrow 2n > 5 \Leftrightarrow n > 2,5$$

Mas, como  $n > 3$  a desigualdade  $4n + 2 > 2n + 3$  é atendida, como restávamos provar. Portanto,  $P(n + 1)$  está validada. ■

Para a próxima variação do princípio de indução finita, observemos a sequência formada pela seguinte recorrência:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Calculando os primeiros termos da recorrência, obtemos:

**Quadro 3 – Primeiros termos da recorrência**

$n$	$a_n$
1	1
2	2
3	3
4	4
...	...

Fonte: Do autor (2024)

A tabela nos indica um padrão que nos permite conjecturar que  $a_n = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora, observe que tal conjectura provém da recorrência acima que depende de dois termos anteriores. No passo de indução, estaremos supondo que a fórmula vale para  $n+1$ , para provar o caso  $n+2$ . Agora, veja que  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ . Por hipótese de indução sabemos que  $a_{n+1} = n+1$ , mas não podemos afirmar nada sobre  $a_n$ . Logo, não podemos aplicar diretamente o princípio de indução finita (Teorema 2.1). Precisamos de uma variação que permita tomar como hipótese, não somente o antecessor de  $n+1$ , mas a quantidade de termos que depende a recorrência, no caso desse exemplo, precisaria considerar como hipótese de indução que  $a_{n+1} = n+1$  e  $a_n = n$  e depois aplicar esses valores na recorrência para obter o desejado. O teorema abaixo nos traz uma variação do princípio de indução que permite resolver situações como esta.

**Teorema 2.15.** *Seja  $P(n)$  uma sentença aberta, relativa ao natural  $n$ , suponhamos que:*

- (i)  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  são verdadeiras.
- (ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n), P(n+1), \dots, P(n+k-1)$  implicam a validade de  $P(n+k)$ .

Então  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

Sejam  $k \in \mathbb{N}$  fixo e arbitrário e  $P(n)$  uma afirmação satisfazendo i) e ii). Vamos mostrar que  $P(n)$  vale, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos  $Q(n) : P(n), P(n+1), \dots, P(n+k-1)$  são válidos.

Note que  $Q(1)$  é verdade, pois pelo item i),  $Q(1) : P(1), P(2), \dots, P(k)$  é verdade.

Vamos mostrar agora que

$Q(n) \Rightarrow Q(n+1) : P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k-1), P(n+k)$  são válidas

De fato, suponha que  $Q(n) : P(n), P(n+1), \dots, P(n+k-1)$  são válidas. Pelo item ii) segue que  $P(n+k)$  é válido. Então, obtemos que

$P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k-1), P(n+k)$  são válidas

ou seja  $Q(n + 1)$  é verdade.

Pelo Princípio da indução finita,  $Q(n)$  vale, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $P(n)$  é verdade, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Exemplo 2.16.** Considere a sequência:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $a_n = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De fato, considere a afirmação  $P(n) : a_n = n$ . Temos que

- (i)  $P(1), P(2)$  são verdadeiras, pois  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 2$ , pela definição da recorrência.
- (ii)  $P(n), P(n + 1) \Rightarrow P(n + 2)$ .

Suponha que  $P(n) : a_n = n$  e  $P(n + 1) : a_{n+1} = n + 1$  são verdadeiras, temos:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n = 2(n + 1) - n = 2n + 2 - n = n + 2$$

Portanto,  $P(n + 2) : a_{n+2} = n + 2$  é verdade e pelo Teorema 2.15 podemos afirmar então que  $P(n) : a_n = n$  é verdade, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A próxima variante do princípio de indução, também conhecida como "Princípio de Indução Forte" é aplicada quando precisamos provar uma fórmula que provem de uma recorrência que depende de todos os seus termos anteriores. Por exemplo, considere  $a_n$  a sequência definida por:

$$a_0 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n + 2} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n + 2} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Por meio da recorrência, obtemos a sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{0 + 2} = \frac{2}{2} = 1 \\ a_2 &= \frac{a_0 + a_1}{1 + 2} = \frac{2 + 1}{3} = 1 \\ a_3 &= \frac{a_0 + a_1 + a_2}{2 + 2} = \frac{2 + 1 + 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Disso, podemos conjecturar que o termo geral  $a_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma vez que, o termo geral  $a_{n+1}$  da recorrência que fornece a sequência acima depende de  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , ou seja, de todos os seus termos anteriores, precisamos uma variante do método de indução em que na hipótese de indução assumamos que valha a conjectura para todos estes termos anteriores, no caso deste exemplo, precisamos assumir que  $a_0 = 1, a_1 = 1, \dots, a_n = 1$ , para provarmos o passo de indução  $a_{n+1} = 1$ .

Observamos abaixo a apresentação do princípio de indução forte juntamente com sua demonstração e na sequência, a demonstração do exemplo acima.

**Teorema 2.17.** Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ , suponhamos que:

(i)  $P(1)$  é válida;

(ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(k)$ , para todo  $k \leq n$ , implica a validade de  $P(n+1)$ .

Então  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Consideremos a sentença aberta  $Q(k) : P(k)$  é válida, para todo natural  $k \leq n$ . Como, por (i),  $P(1)$  é válida,  $Q(1)$  também é. Suponhamos agora que  $Q(n)$  seja válida. Isto quer dizer que  $P(k)$  é válida, para todo  $k \leq n$ . Mas, por (ii), isto implica a validade de  $P(n+1)$ , que por sua vez implica que  $P(k)$  seja válida para todo  $k \leq n+1$ . Logo,  $Q(n+1)$  também é válida. Portanto, pela forma original do princípio da indução finita,  $Q(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de onde decorre a validade de  $P(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Voltaremos ao exemplo anterior envolvendo o somatório com sua solução por meio do Teorema 2.17.

**Exemplo 2.18.** Seja  $a_n$  a sequência definida por:

$$a_0 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+2} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n+2}, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Mostraremos que  $a_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note que, neste caso, o termo  $a_{n+1}$  da recorrência depende de todos os seus antecessores e, assim, cabe aqui aplicar o Princípio de Indução Forte. Para isso, considere:

$$P(n) : a_n = 1$$

$$\text{Temos que } P(1) \text{ é verdade, pois } a_1 = \frac{a_0}{0+2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Vamos mostrar agora que

$$P(k) : a_k = 1, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n \Rightarrow P(n+1) : a_{n+1} = 1.$$

Suponha que  $a_k = 1$ , para todo  $1 \leq k \leq n$ , então, pela recorrência, temos que

$$a_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n+2} = \frac{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k}{n+2}$$

Por hipótese de indução,  $a_1 = 1, \dots, a_n = 1$ , o que nos dá

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n = 1 + \cdots + 1 = n \cdot 1 = n$$

Substituindo na expressão de  $a_{n+1}$ , vem

$$a_{n+1} = \frac{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k}{n+2} = \frac{2+n}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1$$

e, portanto,  $P(n+1) : a_{n+1} = 1$  é válido.

Pelo princípio da indução forte, concluímos que  $a_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como queríamos provar.

Finalizamos esta seção com a Propriedade Boa Ordenação que garante a existência de um menor elemento para qualquer subconjunto não vazio  $X$  de  $\mathbb{N}$ . Isso significa que

$$\exists n_0 \in X \text{ tal que } n_0 \leq x, \forall x \in X.$$

Vale ressaltar, que tal resultado também é uma aplicação do Teorema 2.17.

**Teorema 2.19.** (Propriedade da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio  $X \subset \mathbb{N}$  possui um menor elemento.*

**Demonstração:** É equivalente provar que todo subconjunto  $X$  de  $\mathbb{N}$  que não possui menor elemento é vazio, ou seja,  $X^c = \mathbb{N}$ . Seja  $X$  um conjunto que não possui menor elemento.

Considere  $P(n) : n \in X^c$ .

(i)  $P(1)$  vale, pois  $1 \notin X$ , já que  $1 \in X \Rightarrow 1$  é menor elemento de  $X$ .

(ii)  $P(k)$  vale, para todo  $1 \leq k \leq n \Rightarrow P(n+1)$ .

Suponha que  $P(k)$  é verdade, para todo  $1 \leq k \leq n$ , isto é,  $1, 2, \dots, n \in X^c$ , ou ainda,  $1, 2, \dots, n \notin X$ . Mas isto implica que  $n+1 \notin X$ , caso contrário,  $n+1$  seria menor elemento de  $X$ . Agora,  $n+1 \notin X \Rightarrow n+1 \in X^c \Rightarrow P(n+1)$  ocorre.

Pelo Princípio da Indução Finita Forte,  $P(n)$  vale, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $n \in X^c$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $X^c = \mathbb{N}$  e, portanto,  $X = \emptyset$ . ■

### 3 APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Com base na leitura dos artigos de [Silva 2022] e [Silva 2015], e também com a teoria dos livros acima já citados, neste capítulo, traremos algumas sugestões de aplicações em sala de aula onde o princípio de indução finita pode ser utilizado para evidenciar a validade das fórmulas matemáticas que dependem dos números naturais.

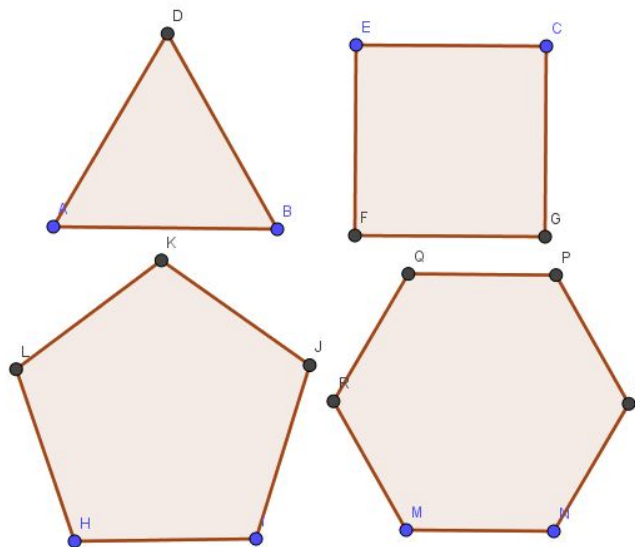
#### 3.1 Soma dos ângulos internos de um polígono

Uma aplicação do método da indução matemática na educação básica pode ser vista ao demonstrar a fórmula que indica a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer. Sabemos que polígonos são figuras geométricas planas constituídas por uma sequência finita de segmentos de reta chamados de "lados". Cada lado está conectado a dois outros lados em seus extremos, formando um ângulo em cada interseção. Os polígonos possuem vértices, que são os pontos de encontro dos lados.

Os polígonos podem variar em número de lados, começando com o triângulo (3 lados), continuando com o quadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), hexágono (6 lados) e assim por diante. Um polígono regular é aquele em que todos os lados e ângulos são iguais.

Na figura 2, seguem alguns exemplos de polígonos. O polígono com o menor número de lados possível, como já evidenciado na figura 2, é o triângulo, que possui exatamente 3 lados e a soma dos ângulos internos de um triângulo, de acordo com a Lei Ângular de Tales, é  $180^\circ$ .

Figura 2 – Polígonos



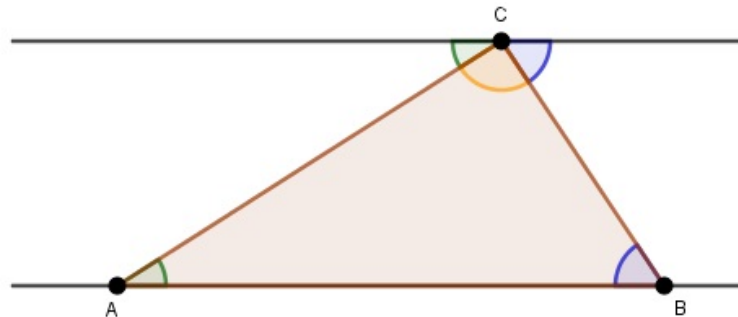
Fonte: Do autor (2024)

A demonstração da Lei Ângular de Tales pode ser facilmente verificada na Figura 3, onde, através do conceito de ângulos alternos e internos, em retas paralelas cortadas por



transversais, é possível considerar ângulos congruentes aos ângulos internos do triângulo, concluindo que os três juntos formam uma semicircunferência e, portanto, podemos afirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é de fato  $180^\circ$ , dentro da geometria euclidiana.

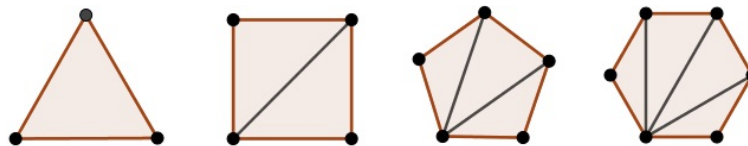
**Figura 3 – Demonstração Lei Angular de Tales**



Fonte: Do autor (2024)

Com base nessa constatação, é possível dividir um polígono qualquer em triângulos, o que sempre será possível escolhendo e fixando aleatoriamente algum de seus vértices e ligá-lo aos demais por meio de diagonais e, a partir da quantidade mínima de triângulos obtidos, calcular a soma total dos ângulos internos desse polígono, conforme a Figura 4.

**Figura 4 – Quantidade mínima de triângulos internos**



Fonte: Do autor (2024)

Para obter a quantidade mínima de triângulos internos de um polígono de  $n$  lados, como já dito, basta tomar um vértice qualquer, fixá-lo e, a partir dele, ligá-lo com cada um dos demais, formando  $n - 3$  diagonais internas.

A partir da figura é possível ainda, construir um quadro que relaciona a quantidade de lados com a quantidade mínima de triângulos possíveis:

**Quadro 4 – Quantidade de lados X Quantidade de triângulos**

Números de Lados	Quantidade de Triângulos
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6
...	...
$n$	$n - 2$

Fonte: Do autor (2024)

Dessa forma, poderíamos ajustar o quadro incluindo a soma dos ângulos internos  $S_n$  de cada polígono de  $n$  lados, dado que a cada novo triângulo obtido implica no acréscimo dos  $180^\circ$  referentes a ele:

**Quadro 5 – Quantidade de lados X Soma dos ângulos internos**

Números de Lados	Quantidade de Triângulos	Soma dos Ângulos Internos
3	1	$180 = (3 - 2) \cdot 180$
4	2	$360 = (4 - 2) \cdot 180$
5	3	$540 = (5 - 2) \cdot 180$
6	4	$720 = (6 - 2) \cdot 180$
7	5	$900 = (7 - 2) \cdot 180$
8	6	$1080 = (8 - 2) \cdot 180$
...	...	...
$n$	$n - 2$	$S_n = (n - 2) \cdot 180$

Fonte: Do autor (2024)

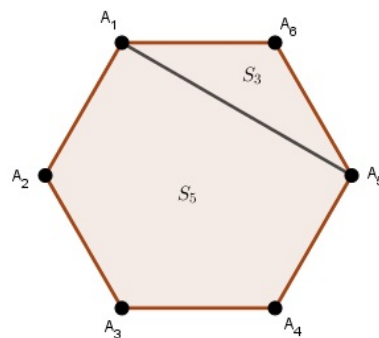
Analisando o padrão do quadro, podemos conjecturar que a fórmula para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono com  $n$  lados, é dada por:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

No entanto, deveríamos nos perguntar: Será mesmo que essa fórmula é válida para todo  $n \geq 3$ ? Para responder essa pergunta devemos utilizar o princípio da indução finita e garantir que  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$  seja realmente válida para todo  $n$  natural, com  $n \geq 3$ .

No passo de indução, assumimos que a fórmula vale para  $n$  e, utilizamos para mostrar que vale para  $n + 1$ . Para isso, devemos encontrar a relação entre  $S_n$  e  $S_{n+1}$ . Se analisarmos, por exemplo, o hexágono  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  da Figura 5, ao traçarmos a diagonal  $A_1A_5$  obtemos o triângulo  $A_1A_5A_6$  e o pentágono  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Então, podemos inferir que  $S_6 = S_5 + S_3$ , ou seja, existe uma relação entre  $S_6$  e  $S_5$ .

**Figura 5 – Relação entre  $S_6$  e  $S_5$**



Fonte: Do autor (2024)

De um modo geral, se  $A_1A_2 \cdots A_{n+1}$  é um polígono de  $n + 1$  lados, ao traçarmos a diagonal  $A_1A_n$  obtemos o triângulo  $A_1A_nA_{n+1}$  e o polígono de  $n$  lados  $A_1A_2 \cdots A_n$ . Disso,

obtemos a seguinte recorrência

$$S_{n+1} = S_n + S_3.$$

Agora estamos aptos a realizar a demonstração por indução da fórmula

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \quad \text{para todo } n \geq 3$$

De fato, para  $n = 3$ , temos que  $S_3$  é a soma dos ângulos internos do triângulo e, portanto,  $S_3 = 180^\circ$ . Por outro lado,

$$S_3 = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 1 \cdot 180^\circ = 180^\circ.$$

Portanto, para  $n = 3$  a fórmula vale.

Suponha, agora, que  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$  para algum  $n > 3$ . Vamos mostrar que

$$S_{n+1} = [(n + 1) - 2] \cdot 180^\circ.$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + S_3 \\ &= (n - 2) \cdot 180 + 180 \quad (\text{hipótese de indução e caso } n = 3) \\ &= [(n - 2) + 1] \cdot 180 \\ &= [(n + 1) - 2] \cdot 180. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Para um polígono com  $n$  lados, a fórmula é:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

### 3.2 Probabilidade da união de eventos

A probabilidade da união de eventos é a probabilidade de que pelo menos um dos eventos envolvidos ocorra, considerando um conjunto de eventos. A notação para a união de eventos é denotada por  $A \cup B$  para dois eventos A e B,  $A \cup B \cup C$  para três eventos A, B e C e assim sucessivamente para quatro ou mais eventos.

A fórmula para calcular a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos (disjuntos) é simples, basta unir a probabilidade de cada um dos dois eventos, assim:

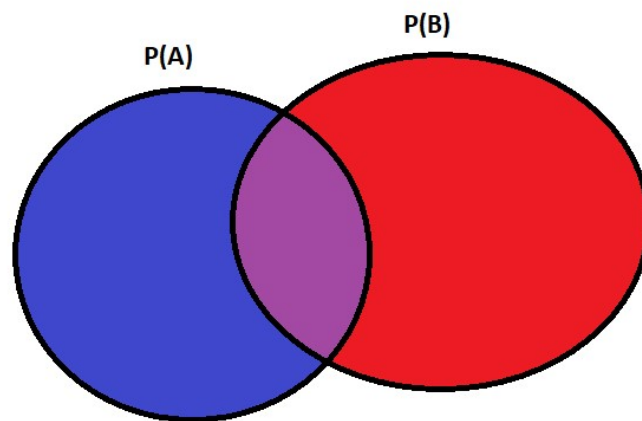
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sua representação através de diagramas é dispensável, uma vez que trata-se apenas de dois conjuntos (diagramas) que não coincidem.

Já a fórmula para calcular a probabilidade da união de dois eventos não mutuamente exclusivos, ou seja, que possuem algum elemento em comum na interseção, ou até todos comuns, é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Figura 6 – Probabilidade da união de dois eventos**



Fonte: Do autor (2024)

Note que ao unir a probabilidade dos dois conjuntos A e B, a probabilidade da interseção é considerada duas vezes, uma vez na probabilidade de A, e outra vez na probabilidade de B, por esse motivo, é necessário desconsiderar a interseção uma vez, já que ela foi contada em duplicidade. Esse motivo justifica a subtração contida na fórmula.

De modo análogo, é possível expandir para três eventos, onde a fórmula para calcular a probabilidade da união de três eventos disjuntos é:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

E sua representação através de diagramas também é dispensável, uma vez que trata-se apenas de três conjuntos (diagramas) que não coincidem.

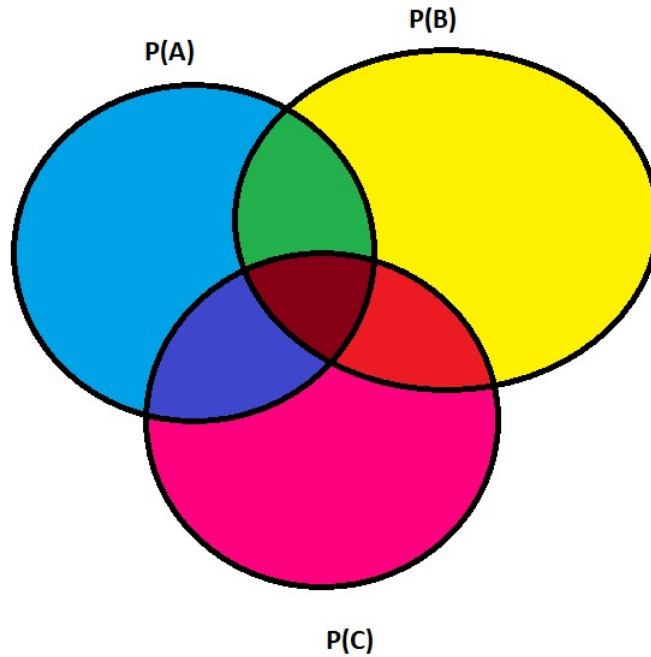
Quando estamos falando da probabilidade da união de três eventos que possuem alguma (ou todas) interseções entre eles, a fórmula também é expandida se assemelhando ao processo anterior, onde somamos as probabilidades separadas, subtraímos as interseções duas a duas e depois adicionamos a interseção simultânea dos três eventos, uma vez que ela foi totalmente retirada ao subtrair as interseções duas a duas. A fórmula que representa esse

processo é:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Também é possível visualizar em diagramas para três eventos A, B e C, facilitando a compreensão em relação ao que é somado e ao que é subtraído, conforme mostra a figura 7:

**Figura 7 – Probabilidade da união de três eventos**



Fonte: Do autor (2024)

Observe na figura 7, a justificativa intuitiva da fórmula quando trata-se da união de 3 eventos não mutuamente exclusivos.

Se continuarmos esse processo, recorrentemente, chegaremos a união de  $n$  eventos, porém, na medida que a quantidade de eventos envolvidos aumenta, a fórmula e os diagramas se tornam proporcionalmente complexos, dessa forma, utilizaremos uma fórmula geral, válida para  $n$  eventos, e provaremos-a utilizando a indução matemática ao invés dos diagramas, permitindo assim uma generalização confiável desse processo, além de utilizarmos da ferramenta em estudo deste trabalho especificamente.

Indução na probabilidade da união de infinitos eventos

Nessa seção, utilizaremos como referência o livro [Schervish e DeGroot 2011], onde trataremos a probabilidade da união de  $n$  eventos, com  $n \in \mathbb{N}$ .

Nosso objetivo é demonstrar a fórmula para a probabilidade da união de  $n$  eventos e para facilitar a percepção do passo de indução, faremos as demonstrações  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ .

- A demonstração para  $n = 1$  evento é trivial, pois  $P(A) = P(A)$ .

- A demonstraco para  $n = 2$  eventos:

**Demonstraco:** Primeiro, observamos que da teoria de conjuntos  verdade que

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$

Aplicando a probabilidade na igualdade acima vem:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[B \cup (A \cap B^c)] \\ &= P(B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B) + P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Isso  possível, pois sabemos que  $B$   disjunto de  $A \cap B^c$ , que nos dá

$$P[B \cup (A \cap B^c)] = P(B) + P(A \cap B^c)$$

e  $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ . ■

- A demonstraco para  $n = 3$  eventos:

**Demonstraco:** Neste caso, para simplificar a notaco faremos  $V = A \cup B \cup C$  e  $W = A \cup B$  que nos permite recorrer  probabilidade da unio de dois eventos. Temos

$$\begin{aligned} P(V) &= P(A \cup B \cup C) \\ &= P(W \cup C) \\ &= P(W) + P(C) - P(W \cap C) \\ &= P(W) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \\ &= P(W) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(W) + P(C) - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\} \\ &= P(W) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P[(A \cap B) \cap C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

e segue a fórmula como desejado. ■

A demonstração para  $n$  eventos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

**Demonstração:**

(i) Para  $n = 1$  é trivial.

(ii) Para  $n = 2$  está mostrado na subseção 5.2.1.

(iii) Suponha que a fórmula vale para  $n$ , ou seja, que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

(iv) Vamos provar o caso  $n + 1$ , ou seja, que

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{(n+1)+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1})$$

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  eventos. Definimos  $A = \cup_{i=1}^n A_i$  e  $B = A_{n+1}$ . Pelo caso  $n = 2$ , temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Então,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por hipótese de indução, temos que

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Assim, obtemos

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) + P(B) - P(A \cap B).$$

A diferença entre a igualdade acima e a tese está em todos os termos nos quais um dos subscritos  $(i, j, k, l, \dots)$  é igual a  $n + 1$ . Esses termos são os seguintes:

$$P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) - \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}) + \dots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}).$$

O primeiro termo na fórmula acima é  $P(B) = P(A_{n+1})$ . Tudo o que resta é mostrar que  $P(A \cap B)$  é igual a todos os termos exceto o primeiro.

Usamos agora, a generalização natural da propriedade distributiva para escrever:

$$A \cap B = (\cup_{i=1}^n) \cap A_{n+1} = \cup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$$

A união contém  $n$  eventos, e, portanto, podemos aplicar na hipótese de indução substituindo cada  $A_i$  por  $A_i \cap A_{m+1}$ . O resultado é que  $P(A \cap B)$  é igual a todos os termos exceto o primeiro dentro da hipótese.

Como queríamos mostrar. ■

Essa aplicação na educação básica, trata-se de um apoio ao professor, para que ele tenha conhecimento da expansão e demonstração da fórmula da probabilidade da união de eventos, embora não seja aplicada diretamente aos alunos. Normalmente os livros didáticos trazem a fórmula apenas para 1 e 2 eventos e, os mais completos, até três eventos. Uma vez que a fórmula da probabilidade da união de eventos é, normalmente, estudada somente no ensino superior e em cursos de formação de professores, não faremos sugestão de sequência didática para o ensino básico nesta seção em específico.

### 3.3 Torre de hanói

Outro exemplo de aplicação do método da indução é o jogo conhecido como Torre de Hanói. Esse jogo é bastante popular e é facilmente fabricado ou encontrado para aquisição.

A Torre de Hanói, Figura 8, é um famoso quebra-cabeça ou jogo lógico composto por uma base com três hastes fixadas e discos de diferentes diâmetros. O objetivo é mover todos os discos da primeira haste para outra haste, utilizando uma haste intermediária, respeitando certas regras e utilizando a menor quantidade de movimentos possíveis.

**Figura 8 – Torre de Hanói**



Fonte: Do autor (2024)



As regras do jogo são as seguintes:

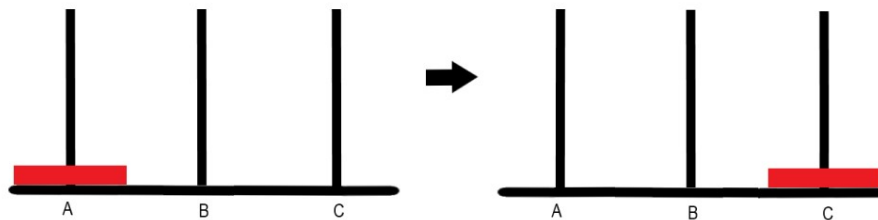
- (i) Cada movimento consiste em mover o disco do topo de uma pilha para o topo de outra pilha, mantendo a ordem dos discos (discos maiores não podem ficar sobre discos menores).
- (ii) Só é permitido mover um disco de cada vez.
- (iii) Um disco só pode ser movido para a pilha do topo.

Sabendo as regras, é possível iniciar o jogo, com discos variados:

**Um disco**

É fácil ver que se temos um único disco, para movê-lo para a haste C, basta simplesmente realocá-lo em um único movimento, uma vez que não temos outros discos e, logo, não temos outras regras para verificar. Assim, chamaremos esse movimento de 1C, uma vez que o disco 1 teve como destino a haste C. Veja a figura 9

**Figura 9 – Movimento de 1 disco**



Fonte: Do autor (2024)

**Quadro 6 – Movimentos 1 disco**

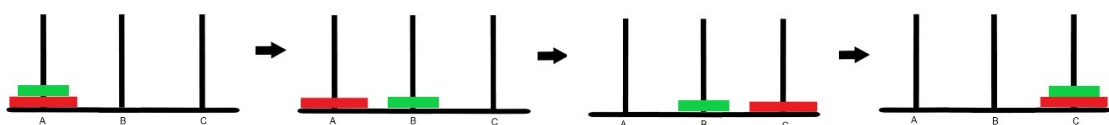
Discos	Solução	Movimentos
1	1C	1

Fonte: Do autor (2024)

**Dois discos**

Primeiramente alocamos o disco menor (disco 2) para a haste B, para então o disco maior (disco 1) ficar "livre" e poder ser realocado para a haste C, agora o disco 2 volta a ser colocado sobre o disco 1 na haste C, finalizando a transferência total da pilha.

**Figura 10 – Movimento de 2 discos**



Fonte: Do autor (2024)

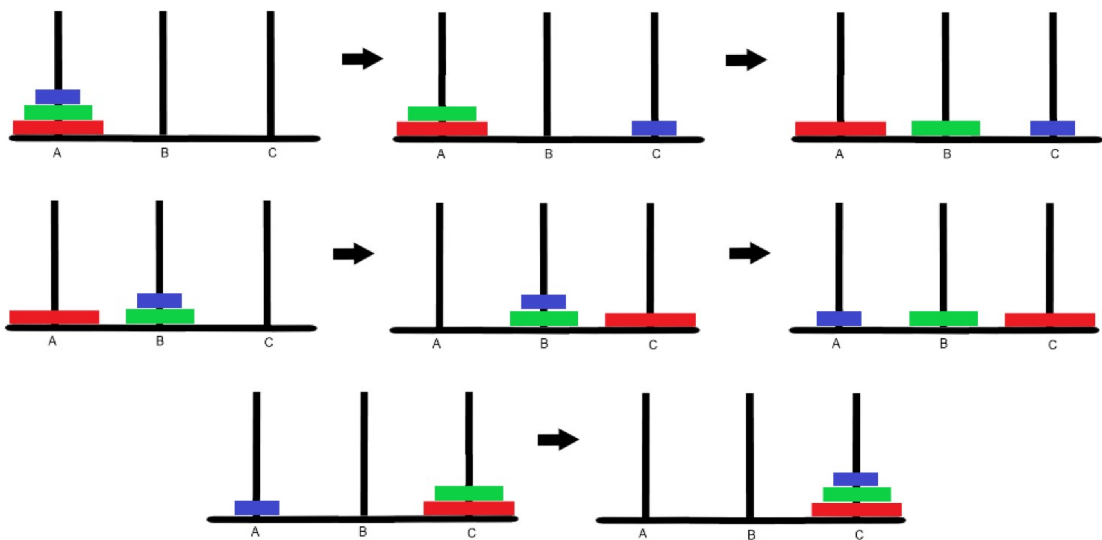
**Quadro 7 – Movimentos 2 discos**

Discos	Solução	Movimentos
2	2B; 1C; 2C	3

Fonte: Do autor (2024)

### Três discos

Com três discos, devemos repetir os processos anteriores: removemos os menores até conseguir remover o maior de todos e depois recolocamos os menores sobre o maior já na haste de destino, conforme ilustrado na figura 11.

**Figura 11 – Movimento de 3 discos**

Fonte: Do autor (2024)

**Quadro 8 – Movimentos 3 discos**

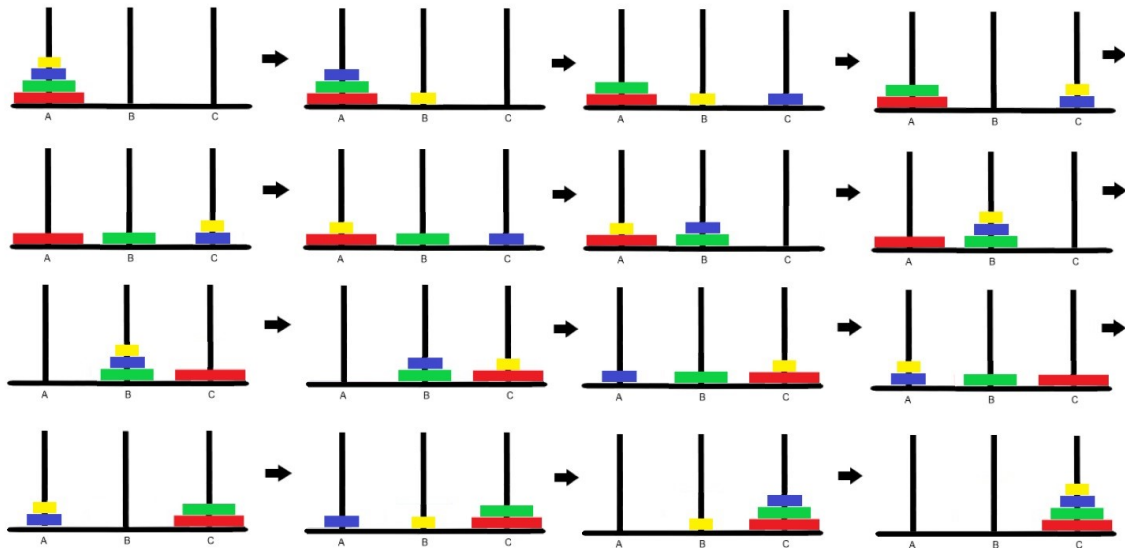
Discos	Solução	Movimentos
3	3C; 2B; 3B; 1C; 3A; 2C; 3C	7

Fonte: Do autor (2024)

### Quatro discos

Com quatro discos, os processos se repetem, sempre respeitando as regras de movimentar um único disco e nunca sobrepôr um disco maior sobre um menor. O processo está passo a passo descrito na figura 12:

Figura 12 – Movimento de 4 discos



Fonte: Do autor (2024)

Quadro 9 – Movimentos 4 discos

Discos	Solução	Movimentos
4	4C; 3B; 4B; 2C; 4A; 3C; 4C; 1B; 4B; 3A; 4A; 2B; 4C; 3B; 4B	15

Fonte: Do autor (2024)

Esse processo pode ser continuado para uma quantidade finita de discos, no entanto, vamos agora analisar os movimentos e destacar algumas observações sempre recorrendo ao caso anterior já conhecido, levando em consideração que para movimentar 4 discos, por exemplo, é preciso movimentar  $3 + 1$  discos, então, observamos que:

1. Para um único disco, a quantidade mínima de movimentos é trivial, apenas um movimento é necessário, como já ilustrado pela figura 9.
2. Para dois discos é necessário primeiro fazer a transferência do disco de cima para uma outra haste e, já vimos que isso é feito trivialmente com um único movimento, logo em seguida fazemos a transferência do segundo disco para uma terceira haste, com a mesma ideia de um único movimento, e por fim, finalizamos trazendo o primeiro disco movimentado para essa terceira haste também, em mais um movimento único, e assim, encerra-se a dinâmica. Veja que precisamos o mínimo de  $1 + 1 + 1 = 3$  movimentos, já que tivemos 3 transferências análogas ao primeiro caso, cada uma com um único movimento, como já ilustrado pela figura 10.
3. Para três discos vamos observar que movimentar 3 é o mesmo que movimentar  $2 + 1$ , ou ainda, movemos os dois discos de cima para a haste B, pelo processo visto no exemplo anterior utilizando 3 movimentos, em seguida, movemos o terceiro disco em

um único movimento e finalizamos movendo novamente os dois discos sobre esse terceiro com os mesmos três movimentos iniciais, ou seja, utilizamos  $3 + 1 + 3$  totalizando 7 movimentos, como ilustrado na figura 11. É importante destacar que acabamos de mostrar que é possível movimentar 3 discos com base no conhecimento e quantidades mínimas de movimentos para movimentar 2 discos e 1 disco, ou seja, recorremos aos casos anteriores para resolver este.

4. Para resolvermos com quatro discos, primeiramente precisamos ter em mente que trata-se de  $3 + 1$  discos, ou seja, movimentaremos os 3 discos superiores para a haste B, com a quantidade mínima de 7 movimentos já visto no exemplo anterior, logo após movimentaremos o disco maior para a haste B com um único movimento e então finalizamos movimentando a pilha com três discos sobre o disco maior, novamente com os 7 movimentos mínimos necessários, nesse caso, precisamos de  $7 + 1 + 7 = 15$  movimentos, como ilustrado na figura 12.

Para generalizarmos essa recorrência utilizando uma linguagem algébrica, podemos considerar  $d_n$  o número mínimo de movimentos para movimentar  $n$  discos, logo teremos:

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = d_1 + 1 + d_1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$d_3 = d_2 + 1 + d_2 = 3 + 1 + 3 = 7$$

$$d_4 = d_3 + 1 + d_3 = 7 + 1 + 7 = 15$$

$$\vdots$$

De modo geral, se queremos transferir  $n$  discos que estão em uma haste  $A$  para uma haste  $C$ , precisamos primeiro transferir  $n - 1$  discos para a haste  $B$  de modo provisório, com o objetivo de livrar o disco maior que será transferido para a haste de destino  $C$  com um 1 movimento, e novamente transferir os  $n - 1$  discos que estavam temporariamente na haste  $B$ , finalmente para a haste  $C$ . Disso obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{n+1} = d_n + 1 + d_n = 2d_n + 1$$

Com base nisso, a recorrência permite elaborarmos um quadro geral com o número de discos utilizados e o número mínimo de movimentos para a solução de cada caso.

**Quadro 10 – Discos X Recorrência**

Números de Discos	Quantidade Mínima de Movimentos
1	$d_1 = 1$
2	$d_2 = 2d_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
3	$d_3 = 2d_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
4	$d_4 = 2d_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$
5	$d_5 = 2d_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$
6	$d_6 = 2d_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$
...	...
$n$	$d_n = 2d_{n-1} + 1$

Fonte: Do autor (2024)

Agora, analisando a sequência obtida pela recorrência, é possível detectar um padrão que nos permite conjecturar o termo geral desta sequência, sem que seja necessário recorrer ao termo anterior.

**Quadro 11 – Discos X Expressão geral**

Números de Discos	Quantidade Mínima de Movimentos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
6	$63 = 2^6 - 1$
...	...
$n$	$2^n - 1$

Fonte: Do autor (2024)

Logo, conjecturamos a fórmula  $d_n = 2^n - 1$  como termo geral da sequência do número mínimo de movimentos para  $n$  discos. Observe que essa fórmula depende somente de  $n$ , diferente da recorrência onde era necessário ter conhecido  $d_{n-1}$  para obter  $d_n$ .

Porém como vimos, testar para uma quantidade finita de discos não garante que o termo geral  $d_n = 2^n - 1$  funcione para uma quantidade infinita de discos, para que possamos garantir isso, utilizaremos o princípio da indução finita:

**Teorema 3.1.** *O número mínimo para resolver a Torre de Hanói com  $n$  discos é*

$$d_n = 2^n - 1$$

**Demonstração:** Iniciaremos a demonstração testando para  $n = 1$ , então:

$$d_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$$

Agora, por hipótese de indução, admitiremos que:

$$d_n = 2^n - 1$$

é a quantidade mínima de movimentos possíveis para  $n$  discos e queremos provar que:

$$d_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

De fato, basta utilizarmos a recorrência, que nos dá:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= 2d_n + 1 \\ &= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \quad (\text{hipótese de indução}) \\ &= 2 \cdot 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Logo, concluímos pelo princípio da indução finita que  $d_n = 2^n - 1$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

#### **4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

É crucial conectarmos os conteúdos da educação básica ao ensino superior para proporcionar uma transição fluida e progressiva no aprendizado dos alunos. Essa integração fortalece a consolidação dos fundamentos e competências essenciais desde os primeiros anos escolares até níveis mais avançados, promovendo uma compreensão mais profunda e a aplicação prática do conhecimento acadêmico.

Além de reduzir lacunas educacionais, essa abordagem pretende estimularmos o engajamento dos estudantes, preparando-os para desafios acadêmicos, profissionais e pessoais futuros, ao reconhecermos a continuidade e relevância dos conceitos ao longo de sua trajetória educacional.

Como consequência deste trabalho, criamos um produto educacional que propõe uma atividade com a Torre de Hanói para ser realizada em sala de aula por professores da educação básica. Esta proposta foi sugerida, entre todas as aplicações da dissertação, por convenção.

## REFERÊNCIAS

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção Textos Universitários).

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 08. 298 p. (Coleção PROFMAT, v. 08). ISBN 978-85-8337-105-2.

MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. (Coleção PROFMAT). ISBN 9788583370154.

SCHERVISH, M. J.; DEGROOT, M. H. **Probability and statistics**. 4. ed. Boston: Pearson, 2011. ISBN 978-0321500465.

SILVA, E. L. d. **Aplicação do método de indução matemática no ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2015.

SILVA, F. S. **Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o Ensino Médio**. 2022. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2022.