

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



# O USO DO GPS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA JOVENS E ADULTOS

NATÁLIA ALBUQUERQUE BARROS

RIO DE JANEIRO  
2024

# O USO DO GPS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA JOVENS E ADULTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Xavier Penna

RIO DE JANEIRO 2024

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

277 Barros, Natália Albuquerque  
O uso do GPS na Educação Matemática para Jovens e  
Adultos / Natália Albuquerque Barros. -- Rio de Janeiro :  
UNIRIO, 2024.  
35 p

Orientador: Fábio Xavier Penna.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado  
do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática,  
2024.

1. GPS na educação. 2. Matemática no EJA. 3.  
Aprendizagem significativa. I. Penna, Fábio Xavier,  
orient. II. Título.

NATÁLIA ALBUQUERQUE BARROS

## O USO DO GPS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 02 de setembro de 2024.

Membros da banca:



Prof. Dr. Fábio Xavier Penna (Orientador – UNIRIO)



Prof. Michel Cambraia de Paula (UNIRIO)



Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dania Gonzalez Morales (PUC)

RIO DE JANEIRO 2024

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, por serem exemplos de força e responsabilidade; aos meus irmãos, pela paciência e empatia; aos meus amigos e ao meu companheiro, pela força, parceria e presença. A vocês, meu amor e gratidão.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Fábio XP, pela confiança, apoio e paciência nessa durante todo o processo de elaboração desta dissertação.

Aos meus professores da UNIRIO, que contribuíram para a minha formação.

Aos meus pais e irmãos, que me inspiram a superar os desafios e me apoiam incondicionalmente.

Ao meu companheiro por me encorajar, me motivar e acreditar no meu potencial.

A Deus por me conceder essa chance, força e perseverança ao longo desta caminhada.

## RESUMO

No contexto do ensino de matemática para estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), esta pesquisa propõe uma abordagem inovadora, integrando o sistema de posicionamento global (GPS) como ferramenta educacional. Com base em uma década de experiência no magistério, observou-se que a desconexão entre a teoria matemática e sua aplicação prática é um desafio significativo, especialmente para alunos do EJA. A pesquisa busca explorar como a introdução do GPS pode reduzir essa lacuna, proporcionando uma compreensão mais relevante e motivadora da matemática.

**Palavras - chave:** Aprendizagem Significativa; Educação de Jovens e Adultos (EJA); GPS na Educação.

## ABSTRACT

In the context of mathematics education for students in Adult and Youth Education (AYE), this research proposes an innovative approach by integrating the Global Positioning System (GPS) as an educational tool. Based on a decade of teaching experience, it has been observed that the disconnect between mathematical theory and its practical application poses a significant challenge, particularly for AYE students. This research aims to explore how the introduction of GPS can bridge this gap, providing a more relevant and engaging understanding of mathematics.

**Keywords:** Meaningful Learning; Adult and Youth Education (AYE); GPS in Education.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. CARACTERÍSTICAS E DESAFIOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)...</b>	<b>3</b>
<b>3. OBJETIVOS.....</b>	<b>5</b>
<b>4. O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS) E SUA RELEVÂNCIA NO MUNDO ATUALMENTE:.....</b>	<b>7</b>
<b>5. ENTENDENDO O FUNCIONAMENTO DO GPS:.....</b>	<b>9</b>
<b>6. APLICANDO A MATEMÁTICA DO GPS PARA O EJA.....</b>	<b>16</b>
<b>7. METODOLOGIA DE ENSINO IMPLEMENTADA.....</b>	<b>18</b>
7.1. 1ª Etapa: Aula explicativa sobre o funcionamento do GPS:.....	18
7.2 2ª Etapa: Aula Prática em Sala de Aula:.....	19
7.3 3ª Etapa: Aula Prática na Sala Maker:.....	21
7.4. 4º Etapa: Jogo Educativo:.....	24
7.5. Segundo Modelo do Jogo Educativo:.....	26
7.6. Terceiro Modelo do Jogo Educativo:.....	27
<b>8. A IMPORTÂNCIA DA TECNOLOGIA E DA SALA MAKER NAS ESCOLAS.....</b>	<b>31</b>
<b>9. RESULTADOS.....</b>	<b>34</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>35</b>

## Lista de figuras

Figura 5.1: Ilustração dos satélites que fazem parte do Sistema GPS.....	17
Figura 5.2: Esquema ilustrando o controle e uso do Sistema GPS .....	18
Figura 5.3: Ilustração do segmento de usuário.....	19
Figura 5.6: Interseção de duas esferas.....	20
Figura 5.7: Interseção de três esferas: possíveis para o receptor recebendo sinais de 3 satélites.....	21
Figura 5.7: Ilustração em 3D do funcionamento da Trilateração.....	23
Figura 5.8: Ilustração em 2D do sinal do satélite 1.....	25
Figura 5.9: Ilustração em 2D do sinal transmitido por dois satélites e dois pontos de interseção.....	25
Figura 5.10: Ilustração em 2D da trilateração no Sistema GPS.....	25
Figura 7.1: Treinando desenho de circunferência, primeira etapa da atividade feita pelos alunos da turma EJA 3.....	27
Figura 7.2: Interseção de duas circunferências, segunda etapa da atividade feita pelos alunos da turma EJA 3.....	27
Figura 7.3 Interseção de três circunferências.....	28
Figura 7.4: Trabalho final com papel quadriculado de alguns alunos da turma.....	29
Figura 7.5: Exemplo de atividade com o Geogebra.....	31
7.6: Exemplos de atividade com o Geogebra.....	31
Figura 7.7 Atividade com a primeira etapa do jogo com o Geogebra.....	33
7.8 Atividade com a primeira etapa do jogo com o Geogebra.....	33
Figura: 7.11: Mapa utilizado na etapa 2 do jogo.....	35
Figura 7.13: Mapa usado no Jogo GPS.....	37
Figura: 7.14 Segunda etapa do jogo GPS na Geogebra.....	38

## 1. INTRODUÇÃO

No ensino da matemática muitos alunos possuem dificuldade em integrar a teoria e a prática cotidiana. Leciono matemática há 10 anos em colégios públicos e particulares, tenho turmas do ensino médio e fundamental e há 5 anos leciono no turno da noite para turmas de educação de jovens e adultos (EJA), que é voltado para alunos maiores de idade, na sua maioria com mais de 45 anos que precisam terminar o ensino médio.

Como as turmas do EJA são formadas por alunos que pararam de estudar por muito tempo e estão voltando para conseguir o diploma, a maioria trabalha durante o dia e não tem tempo de estudar em casa, sendo assim o único contato com a matéria e o estudo é na hora da aula à noite no colégio, influenciando no baixo aprendizado dos conteúdos passados em aula.

A maioria dos meus alunos me perguntam o “pra que” aprender certos conteúdos na matemática. Eles tendem a achar importante lidar apenas com as operações básicas a fim de mexer com dinheiro, tornando os demais conteúdos do ensino fundamental e médio, tanto em álgebra como em geometria, desmotivantes e sem aplicabilidade.

Observando as dificuldades apresentadas pelos alunos, principalmente, os que estudam na educação de jovens e adultos (EJA) em aprender e se conectar com a matemática e levando em consideração a falta do tempo para praticar a matéria e estudar, essa pesquisa tem como finalidade explorar novas abordagens no ensino que sejam eficazes e diminuam a distância entre teoria e prática em sala de aula.

A pesquisa proposta traz como tema a utilização de sistemas de posicionamento global (GPS) como ferramenta educacional na educação de matemática para jovens e adultos e aborda a relevância da integração de aulas práticas na matemática.

Após discutir as características específicas e os desafios enfrentados pelos alunos do EJA, os objetivos são traçados, seguidos por uma explicação detalhada sobre o Sistema de Posicionamento Global (GPS), focando seu funcionamento técnico e sua importância na sociedade. A aplicação dos princípios matemáticos do

GPS para o ensino é então aplicada através de uma metodologia de ensino implementada em quatro etapas. Por fim, os resultados obtidos com a metodologia são apresentados, discutindo os impactos observados no aprendizado dos alunos do EJA e suas implicações para futuras práticas educacionais.

Como o GPS desempenha um papel significativo em nossa sociedade moderna, a sua aplicação no contexto educacional, mostrando como a matemática faz parte do seu funcionamento, apresenta uma oportunidade para aprimorar a compreensão e o engajamento dos alunos em sala de aula.

## 2. CARACTERÍSTICAS E DESAFIOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)

Durante meus cinco anos como educadora, lecionando para turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA), pude atuar em quatro escolas estaduais diferentes. Nesse período, percebi que as dificuldades, experiências pessoais e rotina dos alunos do EJA são constantes e similares.

Enquanto no ensino regular, que é o ensino básico cursado na idade certa, nos deparamos com dificuldades com o conteúdo, falta de interesse e uso excessivo do celular, a jornada de ensino para os alunos do EJA vai além da dificuldade da matéria. Ao contrário do regular, onde a falta de interesse pode ser um obstáculo, no EJA há falta de tempo, falta de rotina de estudo, deficiências na base de conhecimentos e outros desafios para obter um aprendizado eficaz. Apesar dessas faltas, o desejo de progredir está sempre presente nesses alunos.

Essas dificuldades são atribuídas às características da rotina dos alunos. Quem frequenta o EJA na maioria, possui trabalho integral, pois há uma idade mínima de 17 anos para poder cursar. Após o expediente de trabalho, vão para a escola à noite, onde a sala de aula se torna o único momento disponível para o estudo. Nas aulas noturnas, eles enfrentam o desafio de absorver os conteúdos sem a oportunidade de revisar em casa depois.

“A EJA é uma modalidade que traz consigo a realidade social do indivíduo como um meio que possa prejudicar o processo de ensino e aprendizagem. Dado que os estudantes já possuem responsabilidades por conta da idade, os entraves no cotidiano, como a falta de escolas próximas às suas residências, a falta de tempo para o trabalho, gerando cansaço, e também as práticas pedagógicas fora da realidade dos adultos são elementos que dificultam o processo de escolarização. (COSTA;SILVA,2015)”

A ausência de tempo para revisão resulta em um processo de aprendizagem lento, principalmente na matemática, que possui conteúdos abstratos, evidenciando a necessidade de estratégias de ensino mais eficazes para esse público.

A modalidade de Educação de Jovens e Adultos reflete a realidade social dos alunos, apresentando desafios únicos para o processo de ensino e aprendizagem. Além das dificuldades inerentes ao conteúdo, a falta de tempo, as responsabilidades do trabalho e as práticas pedagógicas muitas vezes desconectadas da realidade, os alunos do EJA enfrentam obstáculos adicionais, como dificuldades em escrever, acompanhar as aulas, abrir cadernos e copiar do quadro.

Como motivar, ensinar e garantir que o propósito de educadora esteja sendo cumprido em uma realidade tão desafiadora? Diante desse contexto, se faz necessário explorar alternativas pedagógicas que promovam uma experiência educacional mais inclusiva e eficiente para esses alunos, alternativas que possam ajudar os alunos a ver a matemática, pensar a matemática e expressar a matemática.

### 3. OBJETIVOS

O ensino da matemática enfrenta desafios significativos, tais como a desconexão existente entre a teoria e sua aplicação prática no cotidiano, resultando em desmotivação e falta de compreensão por parte dos alunos. Devido às rápidas evoluções tecnológicas observadas nos últimos anos, os exemplos de problemas matemáticos aplicados em sala de aula se tornaram, em sua maioria, obsoletos frente aos desafios enfrentados atualmente nas rotinas das pessoas.

Este cenário é ainda mais evidente nas turmas do EJA, que possuem lacunas nas matérias e pouco tempo para estudar e preenchê-las. Ao observar essas dificuldades, esta pesquisa surge com o objetivo principal de explorar como a introdução de sistemas de posicionamento global (GPS) no ensino do EJA pode impactar positivamente a compreensão e o desempenho desses estudantes. O foco é proporcionar uma conexão significativa entre conceitos matemáticos e situações do dia a dia, com a intenção de tornar o aprendizado mais relevante e motivador, preparando melhor o aluno para a atualidade e posicionando-o dentro do contexto de evolução tecnológica vivido atualmente.

Estudos anteriores, como a Coletânea Tecnologias Educacionais, de Mônica Maria Siqueira Damasceno e Ricardo Damasceno de Oliveira, indicaram que o uso de tecnologia no ensino pode melhorar o desempenho dos alunos, na Coletânea os autores concordam com Piovesan e Zanardini (2008), e citam que “É imprescindível que as novas metodologias de ensino da disciplina passem a considerar a importância do estudante ser um participante ativo de sua aprendizagem, observando, refletindo, tirando conclusões e vivenciando de forma dinâmica a assimilação dos conteúdos matemáticos” (p.12).

A proposta busca diminuir essas lacunas, explorando novas estratégias pedagógicas que não apenas tornem a matemática mais acessível para os alunos do EJA, mas também explorem estratégias que favoreçam a compreensão, a memorização e ajudem o aluno a adquirir um raciocínio matemático.

Nesse contexto, ao pensar em aulas práticas e inovadoras que usem a tecnologia, é essencial considerar a realidade dos alunos matriculados na Educação Jovens e Adultos (EJA). Então, a ferramenta escolhida deve ser alguma que eles de fato usam e tenham fácil acesso.

Levando essas questões em consideração, o Sistema de Posicionamento Global (GPS), foi a ferramenta escolhida por ser usada pela maioria dos alunos, tanto para navegação e lazer, quanto para o trabalho em delivery e aplicativos de mobilidade urbana, com a finalidade de entender e sanar as dificuldades que os alunos possam apresentar em relação à matéria.

#### 4. O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS) E SUA RELEVÂNCIA NO MUNDO ATUALMENTE:

O GPS (Sistema de Posicionamento Global) é uma tecnologia desenvolvida pelos Estados Unidos, na década de 1970, inicialmente com aplicações militares, com objetivo de, em tempo real, localizar pessoas, navios, mísseis, aeronaves e outros. Nos anos 2000, a tecnologia GPS foi integrada em vários dispositivos de uso público.

O sistema de rádio navegação permite a localização precisa de pessoas, lugares e objetos no mundo todo, obtendo suas posições tridimensionais. Essa tecnologia utiliza satélites artificiais para transmitir sinais que, ao serem captados por dispositivos como smartphones, possibilitam determinar coordenadas geográficas precisas.

Segundo o professor Tiago Badre Marino, do Departamento de Geociências do Instituto de Agronomia da UFRRJ, em uma apresentação sobre o Sistema de Posicionamento por Satélites Artificiais (GPS), a principal função do GPS é a navegação, mas o aparelho disponibiliza várias informações, tais como:

- Waypoints: são coordenadas que representam lugares específicos, como cidades, praças, pontes, cruzamentos, etc.
- Trilhas: Sequência de coordenadas que registram um caminho percorrido pelo utilizador.
- Rotas: Sequência de waypoints que formam um percurso planejado de viagem.
- Go to: indica um ponto de destino e ele fornece a direção a ser seguida para se chegar a esse ponto.
- Trackback: voltar ao ponto de origem seguindo a trilha inicial ou pedindo ao GPS para criar uma rota de retorno, que também levará ao ponto inicial mas economiza alguns contornos.
- Distância entre dois pontos: esta função permite que o GPS calcule a distância entre quaisquer waypoints que estejam gravados. A capacidade de cada GPS poder ou não executar uma ou outra função, depende da sua marca e modelo.

Assim, o GPS se tornou um grande facilitador de atividades e serviços essenciais no mundo atual. Hoje é possível encontrar o sistema em uma variedade de dispositivos, nos smartwatches, celulares, carros e outros.

No entanto, sua utilidade vai além de determinar rotas, orientar usuários a acharem seus destinos e acompanhar atividades físicas. Ele é utilizado em situações de localização de emergência, podendo enviar sinais para equipes de resgates, localizar pessoas em perigo, é essencial para avisar acidentes no trânsito e conseqüentemente prevenir novos acidentes.

O GPS é extremamente preciso, o receptor corrige constantemente baseado no relógio atômico dos satélites, seu sistema é estável e de acesso livre, sem custo para o usuário.

## 5. ENTENDENDO O FUNCIONAMENTO DO GPS:

O GPS (Sistema de Posicionamento Global) é dividido em três segmentos: o segmento espacial (Figura 5.1), o segmento de controle (Figura 5.2) e o segmento do usuário (Figura 5.3).

1. Segmento Espacial: Compreende uma constelação de, no mínimo, 24 satélites que executam duas órbitas circulares diárias em torno da Terra, mantendo-se a uma altitude de aproximadamente 20.200 km. Esses satélites são distribuídos em seis planos orbitais distintos, que se referem à trajetória seguida pelos satélites ao redor da Terra, garantindo que, a qualquer momento e em qualquer local, pelo menos quatro satélites estejam situados acima da linha do Equador.

Fonte: ([www.fc.up.pt/engenhariageoespacial](http://www.fc.up.pt/engenhariageoespacial))

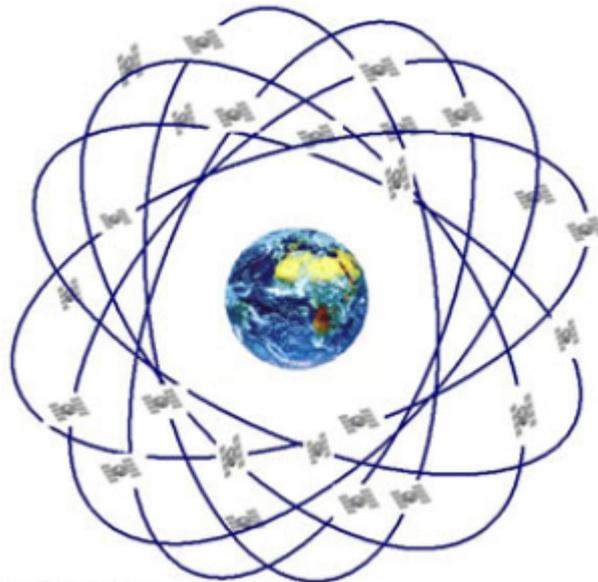


Figura 5.1: Ilustração dos satélites que fazem parte do Sistema GPS.

2. Segmento de controle: Responsável por monitorar e controlar a constelação de satélites GPS. Isso envolve ajustar as órbitas, atualizar os relógios dos satélites e transmitir informações necessárias para garantir a precisão do sistema. Essas operações são executadas por estações terrestres distribuídas estrategicamente.

Fonte: (TOLENTINO, 2024)

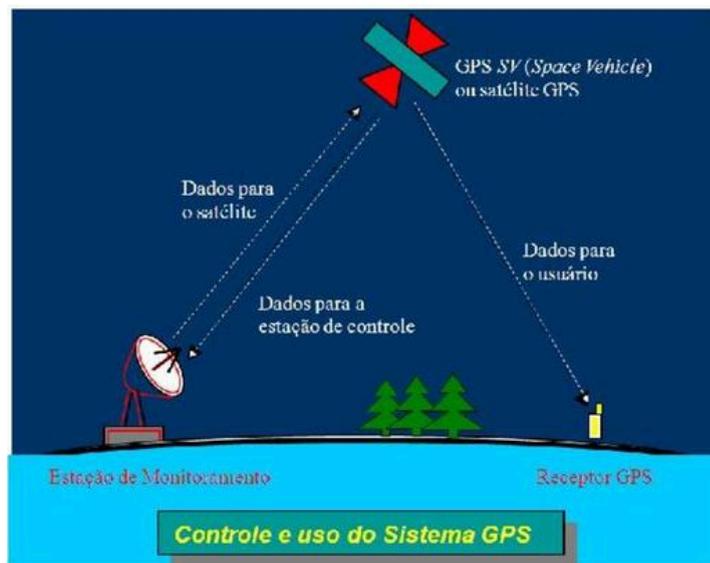


Figura 5.2: Esquema ilustrando o controle e uso do Sistema GPS .

Fonte: (TOLENTINO, 2024)

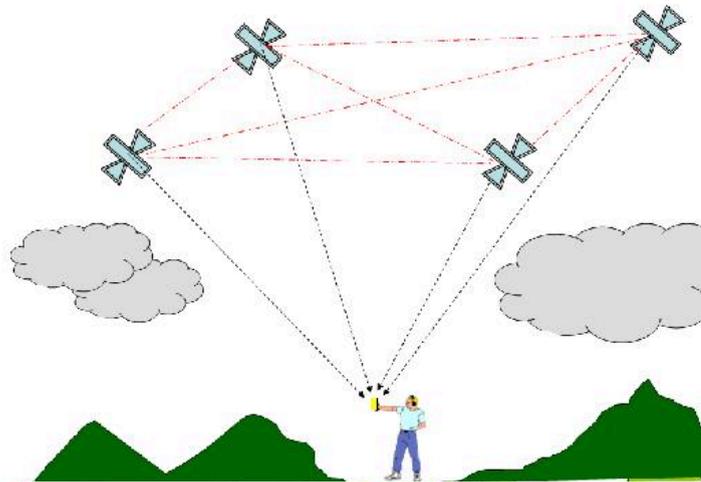


Figura 5.3: Ilustração do segmento de usuário.

3. Segmento de usuário: É a parte do GPS utilizada por nós, usuários. Consiste nos receptores GPS que estão em dispositivos como smartphones, veículos e outros aparelhos. Esses receptores recebem sinais dos satélites, calculam a posição e fornecem informações de localização, orientação e navegação ao usuário.

Cada satélite do sistema emite sinais de rádio de forma muito precisa, simultânea e ininterrupta. Ao receber esses sinais em seus receptores, podem calcular sua posição exata por meio de uma técnica chamada de trilateração.

Essa técnica, basicamente, permite ao GPS determinar nossa posição medindo o tempo que o sinal de cada satélite leva para chegar até a antena receptora. Como a velocidade do sinal é constante (cerca de 300.000 km/s), multiplicando essa velocidade pelo tempo medido obtém-se a distância até cada satélite. Para determinar nossa posição, é necessário saber onde estão os satélites.

Cada um envia constantemente um almanaque com sua posição no espaço, permitindo-nos calcular nossa própria posição.

Teoricamente, apenas três satélites seriam suficientes para determinar nossa posição. No entanto, na prática, utilizamos quatro.

Com a distância de um satélite, só podemos determinar que nossa localização está em algum ponto de uma esfera imaginária com raio igual a essa distância. Com a distância de dois satélites, sabemos que nossa posição está em algum ponto da intersecção das duas esferas.

Fonte: Elaboração própria no geogebra.

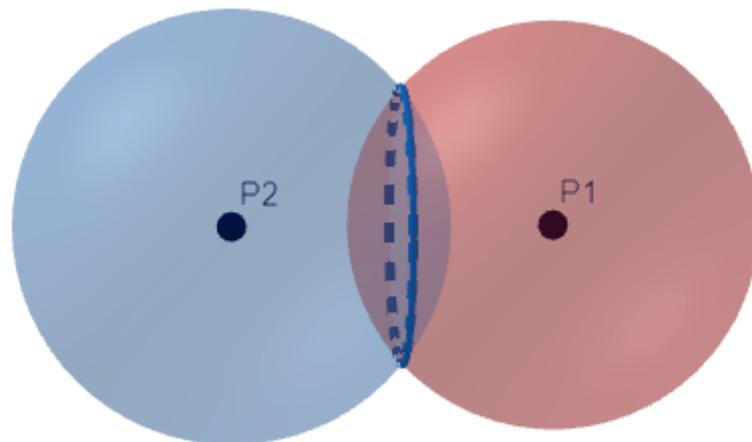


Figura 5.6: Intersecção de duas esferas.

Ao adicionar um terceiro satélite, a intersecção das esferas reduz a ambiguidade sobre nossa localização para apenas dois pontos. Um desses pontos pode ser eliminado, pois está no espaço, e nós sabemos que estamos na superfície da Terra. Assim, encontramos nossa posição.

Fonte: Elaboração própria no geogebra

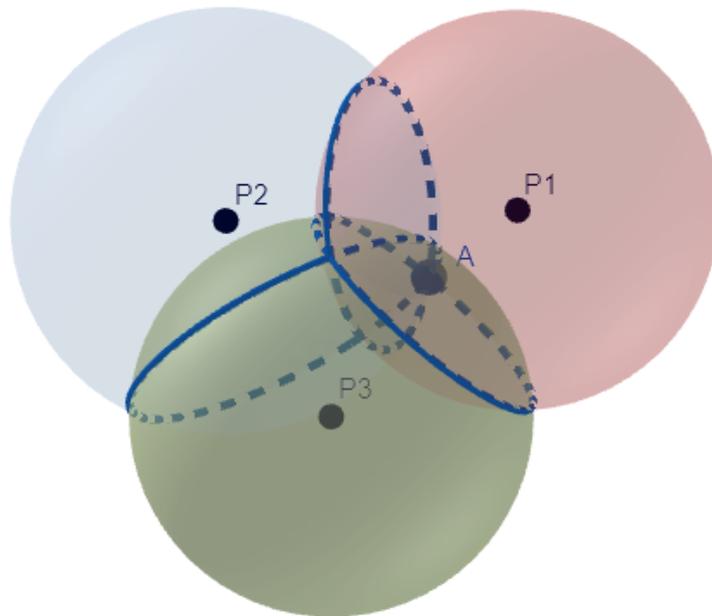
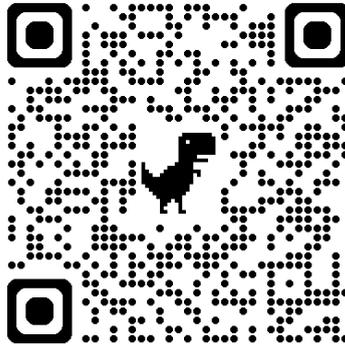


Figura 5.7: Interseção de três esferas: possíveis para o receptor recebendo sinais de 3 satélites.

O quarto satélite nos permite escolher um dos dois pontos determinados anteriormente e nos fornece não apenas latitude e longitude, mas também a altitude exata de nossa localização.

Além disso, o quarto satélite é fundamental para garantir a precisão. Se as medições de distância feitas pelo nosso receptor forem perfeitas, os sinais dos quatro satélites se encontram em um único ponto. No entanto, se as medições forem imprecisas, os sinais não se encontram em um único ponto. O quarto satélite nos alerta para o erro, permitindo-nos corrigir qualquer discrepância e garantindo que os sinais se intersectam em um único ponto.

Para uma visualização interativa e detalhada da interseção das esferas, disponibilizei o QR Code abaixo:



<https://www.geogebra.org/m/d3krmn8b>

Para determinar a posição do receptor, Jeferson Freitas (2017) explica que, cada satélite transmite continuamente um sinal que é recebido pelo receptor. Este, por sua vez, mede o tempo que os sinais demoram para chegar até ele. Multiplicando este tempo pela velocidade do sinal, obtém-se a distância entre o satélite e o receptor. Desse modo, o receptor mede o tempo  $t_1$  que leva para o sinal emitido pelo satélite  $P_1$  chegar. Assim, a distância entre o satélite  $P_1$  e o receptor é dada por  $r_1 = c t_1$ . O conjunto de pontos situados a distância  $r_1$  do satélite  $P_1$  forma uma esfera  $\Sigma_1$  de centro  $P_1$  e raio  $r_1$ . Seja  $(x, y, z)$  a posição desconhecida do receptor e  $(a_1, b_1, c_1)$  a posição conhecida do satélite  $P_1$ . Logo,  $(x, y, z)$  deve satisfazer a equação que descreve os pontos da esfera  $\Sigma_1$ :

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2.$$

Agora, se ao mesmo tempo o receptor recebe o sinal de um outro satélite situado em  $P_2$  de coordenadas  $(a_2, b_2, c_2)$ , ele, da mesma forma feita anteriormente, calcula a distância do receptor ao satélite  $P_2$ , dada por  $r_2 = c t_2$ , onde  $t_2$  é o tempo que leva para o sinal chegar até o receptor. Se o receptor recebe o sinal dos dois satélites então, ele deve estar na interseção de duas esferas,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , cujos centros são os satélites  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente.

E como antes, o receptor deve estar na esfera  $\Sigma_2$  de equação:

$$(\mathbf{x} - a_2)^2 + (\mathbf{y} - b_2)^2 + (\mathbf{z} - c_2)^2 = r_2^2$$

Isto faz com que o receptor esteja na interseção de duas esferas secantes, que é uma circunferência. Mas ainda não temos a posição precisa do receptor.

Quando o receptor recebe o sinal de mais um satélite situado em  $P_3(a_3, b_3, c_3)$ , o receptor está sobre uma esfera  $\Sigma_3$  de raio  $r_3$  de equação:

$$(\mathbf{x} - a_3)^2 + (\mathbf{y} - b_3)^2 + (\mathbf{z} - c_3)^2 = r_3^2$$

Logo, o receptor deve estar na interseção de 3 esferas, cujos centros são os satélites. Neste caso a interseção de três esferas é um conjunto com dois pontos.

Com a interseção de mais uma esfera  $\Sigma_4$  com centro num quarto satélite  $P_4(a_4, b_4, c_4)$  e raio  $r_4$  conseguimos identificar o ponto de localização do receptor. A esfera  $\Sigma_4$  tem equação:

$$(\mathbf{x} - a_4)^2 + (\mathbf{y} - b_4)^2 + (\mathbf{z} - c_4)^2 = r_4^2$$

Fonte: (GIS Geography, 2024)

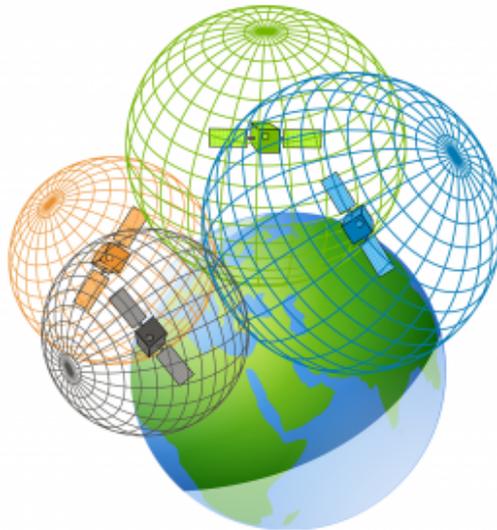


Figura 5.7: Ilustração em 3D do funcionamento da Trilateração.

## 6. APLICANDO A MATEMÁTICA DO GPS PARA O EJA.

Ao levar em consideração a realidade dos alunos do EJA, vamos trabalhar a trilateração do GPS usando um exemplo bidimensional, assim dando a oportunidade dos alunos entenderem como a matemática vai funcionar.

A trilateração, como visto no capítulo anterior, se baseia em achar uma posição desconhecida por meio de três posições já conhecidas. Quando esse método é trabalhado em 2d, o receptor vai receber o sinal de um primeiro satélite informando a distância naquele tempo preciso, podendo estar em qualquer lugar da circunferência formada pelo raio medindo a distância.

Quando o receptor receber o sinal do segundo satélite ele vai ter uma interseção entre as duas circunferências formadas pelo raio da distância do sinal dado, assim o receptor poderá estar em dois pontos dessa interseção.

Logo, para saber ao certo em qual desses dois pontos o receptor está, é preciso um terceiro sinal de outro satélite, para obter a intersecção dessas três circunferências formadas pelo raio da distância do sinal dado, obtendo com precisão o lugar onde o receptor está.

Fonte: (GIS Geography, 2024)

Fonte: (GIS Geography, 2024)



Figura 5.8: Ilustração em 2D do sinal do satélite 1.

Figura 5.9: Ilustração em 2D do sinal transmitido por dois satélites e dois pontos de interseção.

Fonte: (GIS Geography, 2024)

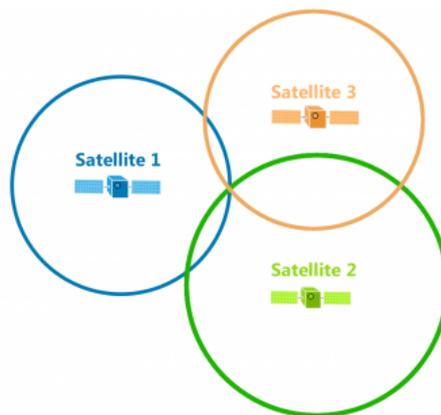


Figura 5.10: Ilustração em 2D da trilateração no Sistema GPS.

## 7. METODOLOGIA DE ENSINO IMPLEMENTADA

A metodologia adotada nesta pesquisa buscou integrar abordagens práticas e tecnológicas para promover uma compreensão mais efetiva dos conceitos matemáticos pelos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). A turma EJA 3, que corresponde ao segundo ano do ensino médio, é composta por 30 estudantes, que enfrentam desafios específicos no processo de aprendizagem devido ao contexto do EJA. O processo de ensino foi estruturado em quatro etapas, onde a quarta etapa foi dividida em três variações de atividades, cada uma projetada para atender às necessidades e características dos alunos.

### 7.1. 1ª Etapa: Aula explicativa sobre o funcionamento do GPS:

A primeira aula começou com uma dinâmica de grupo, na qual os alunos foram questionados sobre onde eles percebem a presença da matemática no dia a dia. Após uma roda de conversa, constatou-se que nenhum aluno falou sobre a matemática na tecnologia, se restringiram apenas a falar sobre dinheiro e formas geométricas dos prédios e janelas. Diante disso, foi introduzido uma breve explicação sobre o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), destacando sua relevância no cotidiano e sua base matemática. Para finalizar a aula, foi passado vídeo explicativo sobre o GPS, a fim de proporcionar uma compreensão visual dessa tecnologia.

 [A Mágica do GPS - Professor Albert e a Ciência da Natureza](#)

Essa etapa foi aplicada com o objetivo de situar o aluno nas próximas atividades, para dar continuidade no trabalho com eles e familiarizar-se com o funcionamento do GPS. Além disso, foi uma etapa importante para mim, como professora, para entender o nível de falta do conhecimento no assunto e falta do raciocínio matemático dos alunos no cotidiano.

## 7.2 2ª Etapa: Aula Prática em Sala de Aula:

Após a explicação do funcionamento, a segunda etapa foi uma aula prática onde providenciei papel quadriculado, compasso e régua para todos os alunos. O objetivo foi abordar conceitos geométricos fundamentais sobre circunferência, como raio, diâmetro e distância entre pontos, com o foco na compreensão dos conceitos geométricos relacionados à trilateração, destacando sua importância para determinar uma posição exata no espaço.

Cada aluno recebeu uma folha quadriculada com quatro pontos marcados, onde deveriam fazer três circunferências que passam pelo mesmo ponto.

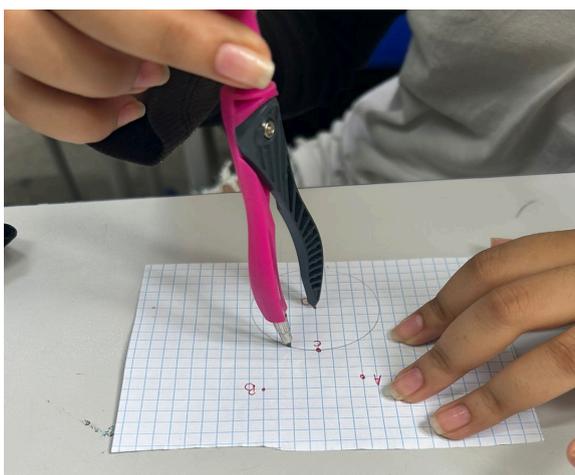


Figura 7.1: Treinando desenho de circunferência, primeira etapa da atividade feita pelos alunos da turma EJA 3

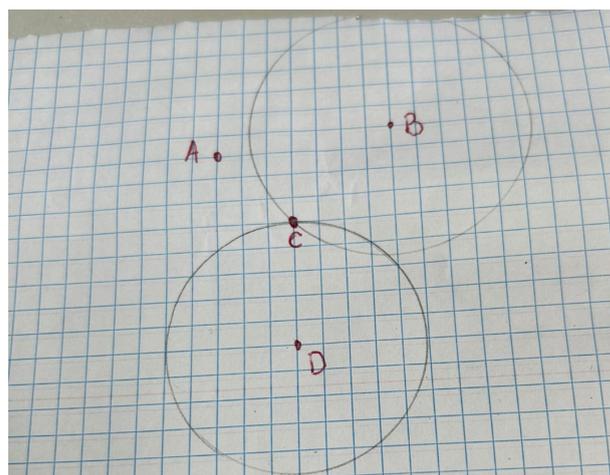


Figura 7.2: Interseção de duas circunferências, segunda etapa da atividade feita pelos alunos da turma EJA 3

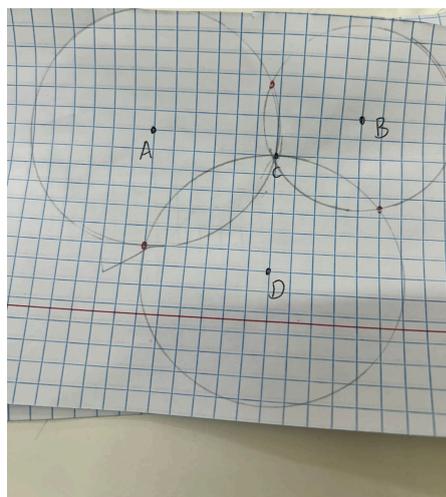


Figura 7.3 Interseção de três circunferências.

O objetivo dessa atividade é proporcionar uma compreensão prática dos conceitos geométricos ligados à trilateração, além disso o uso do papel quadriculado e o uso do compasso trabalha a técnica do aluno e o ajuda a internalizar conceitos abstratos como raio, diâmetro e interseção de circunferência de uma forma mais concreta.

Os alunos apresentaram dificuldade em usar o compasso, mas após algumas tentativas eles conseguiram completar a atividade e terminaram medindo a distância dos raios de cada uma.

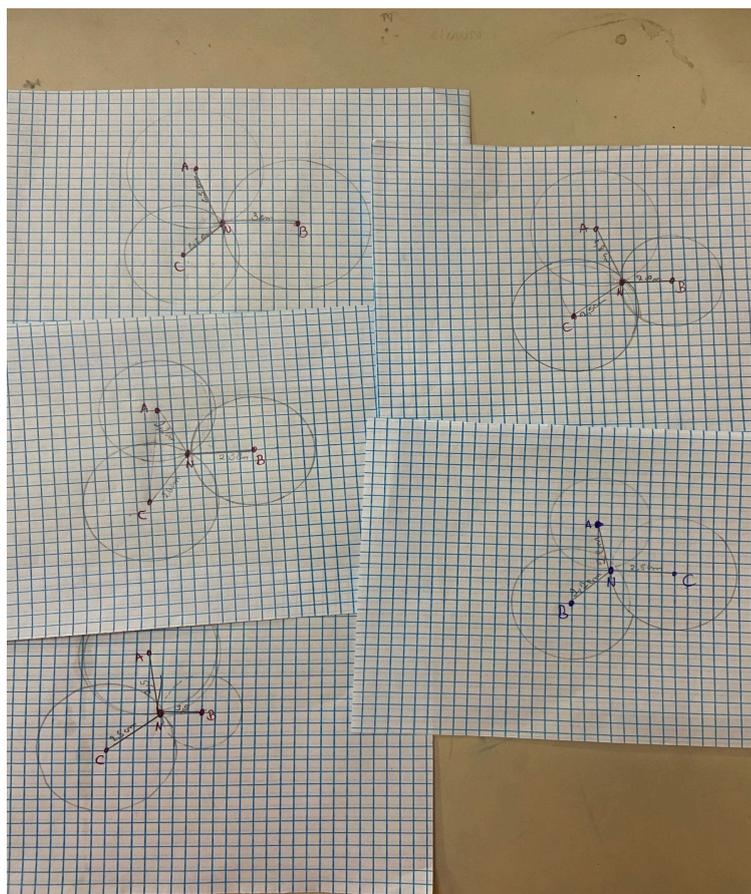


Figura 7.4: Trabalho final com papel quadriculado de alguns alunos da turma.

### 7.3 3ª Etapa: Aula Prática na Sala Maker:

Atualmente os colégios estaduais do Rio de Janeiro possuem uma sala de aula chamada de sala maker, ela possui recursos tecnológicos como chromebooks e televisão integrada, o que possibilitou a aplicação das atividades que necessitavam desses recursos, como, por exemplo, a atividade de aplicação do GeoGebra.

O GeoGebra é uma ferramenta de software educacional que integra dinamicamente geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos. O GeoGebra permite que os usuários realizem construções geométricas interativas, explorem conceitos algébricos e visualizem as relações entre diferentes áreas da

matemática. Essa ferramenta foi integrada para orientar os alunos na construção de pontos, retas e circunferências, ampliando as atividades anteriormente realizadas no papel quadriculado para uma abordagem dinâmica e interativa no ambiente digital.

Os alunos foram organizados em duplas e cada uma usou um chromebook disponível na sala maker. No início foi mostrado aos alunos como acessar o GeoGebra em seus computadores e foi feita uma demonstração prática das principais funcionalidades do software, como a criação de objetos geométricos, circunferências em especial, marcação e distância entre pontos e uso de ferramentas de medição. Houve a necessidade de relembrar plano cartesiano, mesmo sendo uma matéria bastante trabalhada quando a turma estava no EJA 2. Em seguida foi feita uma atividade guiada na qual foi pedido para os alunos construírem circunferências, primeiro sabendo a medida do raio e depois a partir de dois pontos distintos. Após a atividade guiada pedi para que os alunos explorassem o GeoGebra de forma independente, experimentando diversas ferramentas e funcionalidades do programa.

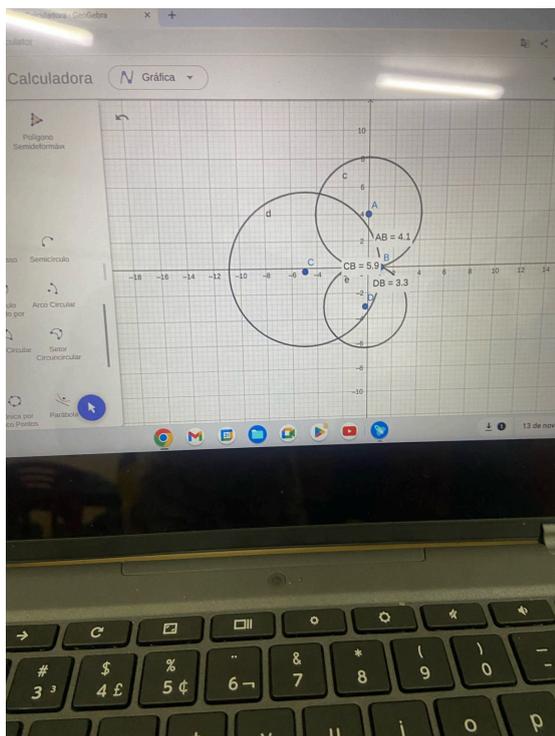


Figura 7.5: Exemplo de atividade com o Geogebra.

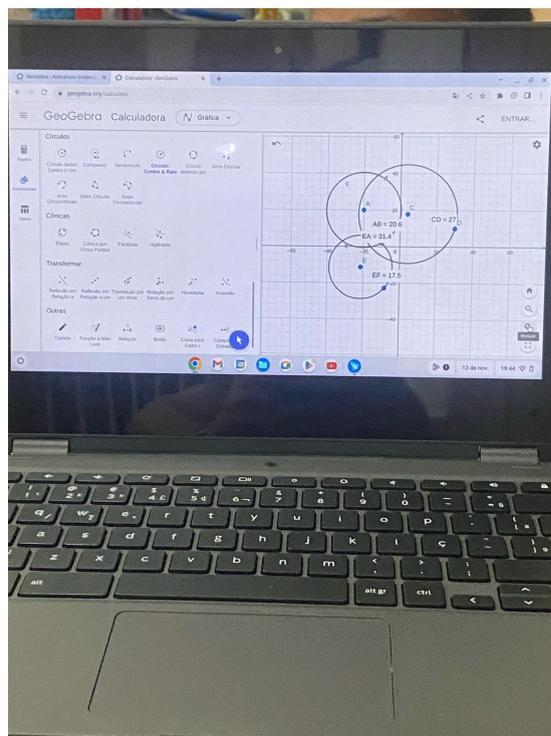


Figura 7.6: Exemplos de atividade com o Geogebra.

Ao término da aula, houve uma discussão para que os alunos compartilhassem suas experiências e descobertas ao explorar a GeoGebra.

Nesta etapa, foi possível observar que os alunos se mostraram muito interessados em usar os chromebooks, sair da sala de aula para uma outra sala com tecnologia trouxe uma animação e curiosidade para a turma. Entretanto, foi visto também que eles apresentaram dificuldade em logar suas contas no computador, muitos não sabiam seus emails e senhas, levando a necessidade de um tempo maior para começar a atividade com todos os presentes.

#### 7.4. 4º Etapa: Jogo Educativo:

Na etapa final do projeto foi desenvolvido um jogo educativo, com três modelos, utilizando o programa Geogebra, o qual foi projetado para integrar os conceitos matemáticos aprendidos durante as aulas práticas. Esse jogo não apenas proporcionou uma abordagem lúdica para fixar o conceito da geometria, mas também serviu como uma ferramenta prática para explorar a técnica da trilateração. Através do jogo, os alunos foram guiados na aplicação desses conceitos, permitindo-lhes visualizar e compreender de forma mais acessível como o GPS utiliza princípios matemáticos para determinar a localização.

A dinâmica do primeiro modelo do jogo é simples: no mapa virtual, <https://www.geogebra.org/m/qe337rhw>, são posicionados cinco satélites fixos em locais estratégicos. Um jogador escolhe aleatoriamente uma coordenada no mapa, representando sua localização 'oculta'. O objetivo do outro jogador é determinar essa coordenada usando a técnica da trilateração, baseando-se nas informações das distâncias entre a localização 'oculta' e os satélites fixos.

Para determinar a localização, o jogador deve selecionar três dos cinco satélites e medir as distâncias entre cada um deles e a localização 'oculta'. Com base nessas distâncias conhecidas e nos princípios da trilateração, o outro jogador pode calcular a posição aproximada da localização 'oculta'. O jogo é uma oportunidade prática para os alunos aplicarem seus conhecimentos matemáticos em um cenário realista, ao mesmo tempo em que desenvolvem habilidades de resolução de problemas e raciocínio espacial.

##### **Objetivo:**

Descobrir a localização oculta do outro jogador usando o método da trilateração.

##### **Regras:**

1. **Escolha das Localizações:** Cada jogador escolhe uma localização oculta no mapa e a anota em segredo.
2. **Distâncias:** Cada jogador deve selecionar três dos cinco satélites e medir as distâncias entre cada um deles a localização 'oculta'.

3. **Trilateração:** Usando as três distâncias fornecidas, os jogadores devem aplicar o método da trilateração para determinar a localização oculta do adversário.

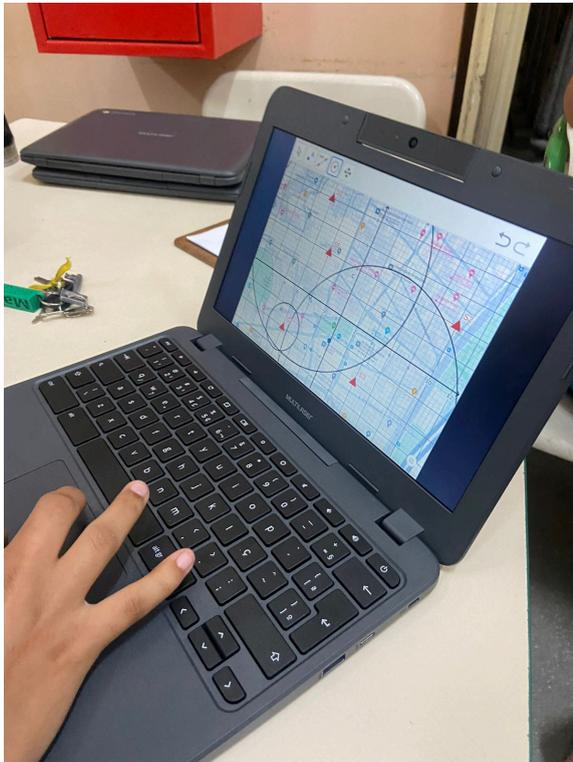
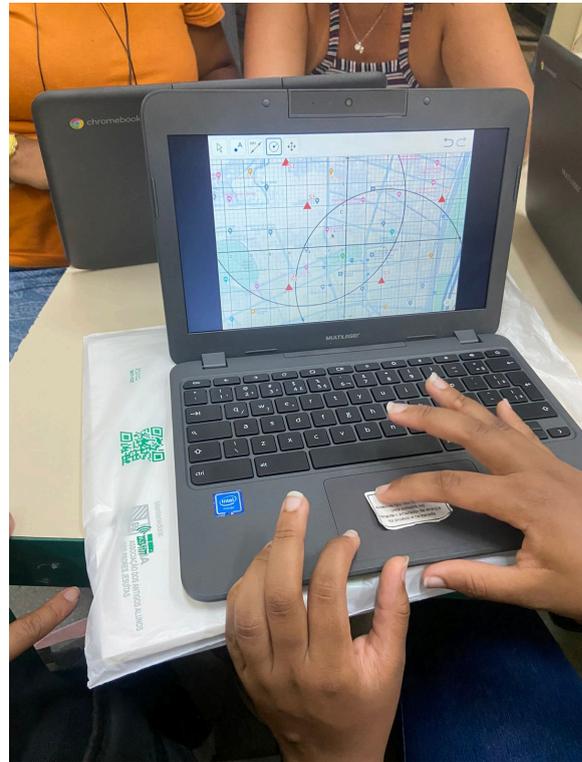


Figura 7.7 Atividade com a primeira etapa do jogo com o Geogebra.



7.8 Atividade com a primeira etapa do jogo com o Geogebra.

No applet deste modelo, as ferramentas essenciais, como "ponto," "distância," e "círculo centro e raio," foram fixadas para facilitar o manuseio do jogo.

## 7.5. Segundo Modelo do Jogo Educativo:

Com a intenção de dinamizar a última etapa, na próxima aula o jogo, <https://www.geogebra.org/m/v5v6aypy>, foi aplicado com algumas mudanças.

Nesta etapa, o objetivo é descobrir a localização oculta do outro jogador a partir de três distâncias fornecidas em relação a três pontos de referência conhecidos no mapa. Os jogadores devem escolher cada ponto de referência, como "igreja", "escola", ou "parque". Usando o método da trilateração, os jogadores poderão determinar a localização exata oculta pelo adversário.

### **Objetivo:**

Descobrir a localização oculta do outro jogador usando o método da trilateração.

### **Regras:**

1. **Escolha das Localizações:** Cada jogador escolhe uma localização oculta no mapa e a anota em segredo.
2. **Distâncias:** Cada jogador fornecerá três distâncias a partir de três pontos de referência conhecidos no mapa.
3. **Trilateração:** Usando as três distâncias fornecidas, os jogadores devem aplicar o método da trilateração para determinar a localização oculta do adversário.

O objetivo principal dessa etapa é reforçar a compreensão da definição de circunferência. No applet desse jogo, os eixos e a malha não foram usados, a fim de dar prioridade às circunferências e para estimular o raciocínio e a escolha consciente das ferramentas, nenhuma delas foi fixada, incentivando os alunos a explorar o GeoGebra por conta própria. Ao calcular as distâncias e desenhar circunferências baseadas nesses pontos de referência, os alunos exploram a natureza de uma circunferência, exploram o conjunto de todos os pontos do plano que estão a uma distância fixa, permitindo que eles visualizem o raio e a definição de forma prática.

Fonte: Elaboração própria a partir do aplicativo Geogebra.

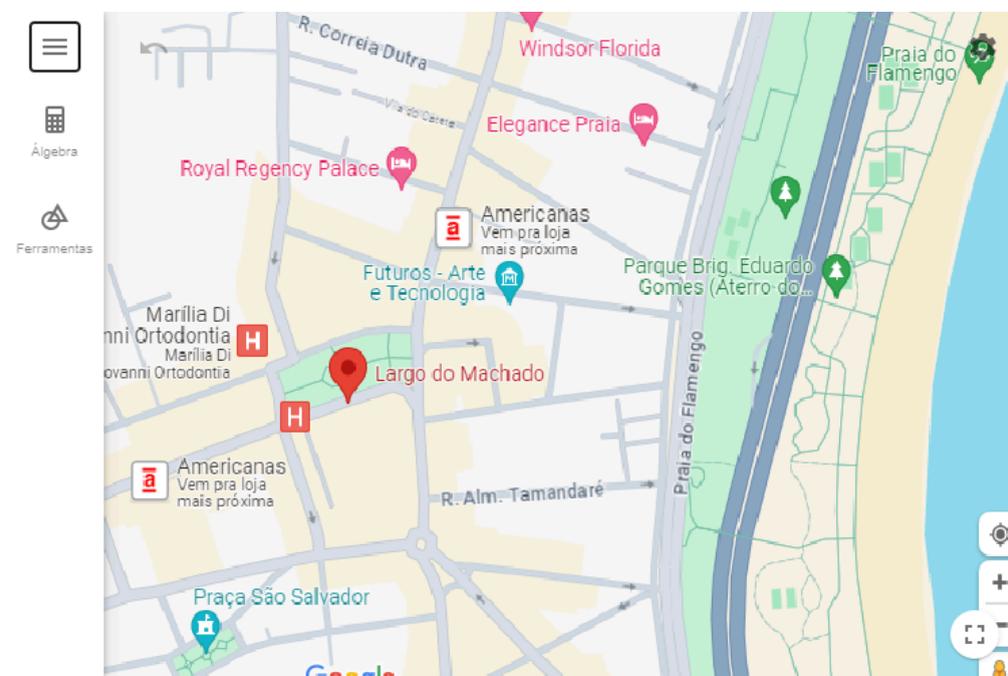


Figura: 7.11: Mapa utilizado na etapa 2 do jogo.

## 7.6. Terceiro Modelo do Jogo Educativo:

Nesta última etapa, <https://www.geogebra.org/m/knryrk4f>, além do jogo ser aplicado com a intenção de dinamizar a aprendizagem, com um formato onde há um aluno vencedor, incentivando a participação ativa, o jogo permite trabalhar outros conceitos da matemática, incluindo a compreensão e aplicação do plano cartesiano.

### **Objetivo:**

Descobrir primeiro a localização oculta do outro jogador usando o método da trilateração.

## Regras:

1. **Escolha das Localizações:** Cada jogador escolherá uma localização oculta no mapa.
2. **Dado:** Os jogadores decidirão quem começa jogando sorteando o dado.
3. **Distâncias:** O jogador vencedor lançará o dado novamente. Se o resultado for 1 ou 4, ele terá direito a uma pergunta sobre a distância do satélite até a localização. Se o resultado for 2 ou 5, ele poderá fazer duas perguntas, e se for 3 ou 6, ele terá direito a três perguntas. Se não conseguir localizar com as perguntas, passa a vez para o outro jogador.
4. **Descoberta da Localização:** O jogador que encontrar a localização, dando as coordenadas corretas do adversário primeiro, será o vencedor do jogo.

Fonte: Geogebra <<https://www.geogebra.org/m/xsvzcs9h>>



Figura 6.12: Dado utilizado no jogo.

Fonte: Elaboração própria a partir do aplicativo Geogebra.

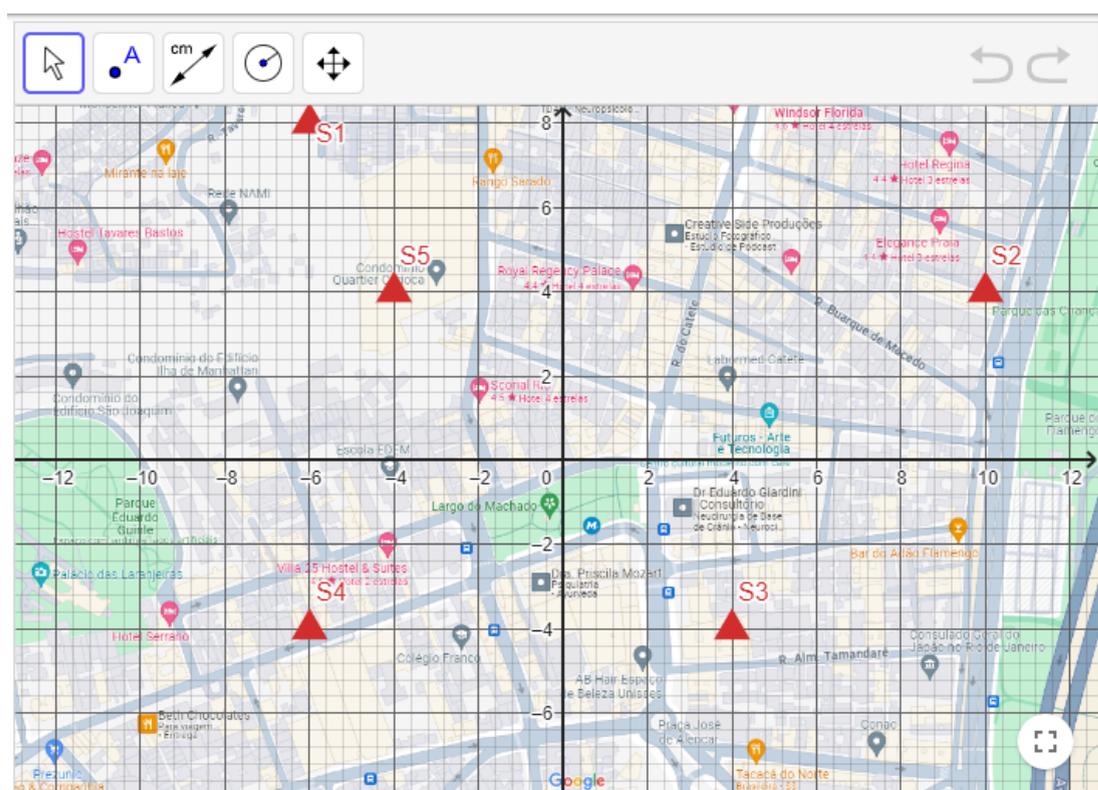


Figura 7.13: Mapa usado no Jogo GPS.

Os jogos, distribuídos ao longo de três aulas, tiveram como objetivo familiarizar os alunos com o manuseio do chromebook, promover maior habilidade no uso das ferramentas do Geogebra e facilitar a compreensão de um jogo mais dinâmico. O intuito foi garantir que as aulas fossem produtivas.

Durante todo o processo de desenvolvimento e implementação das atividades, foi utilizada a abordagem baseada na observação do impacto das práticas no entendimento e desempenho dos alunos. Essa abordagem nos permitirá

ajustar e aprimorar continuamente as estratégias de ensino, garantindo uma experiência educacional cada vez mais envolvente para os estudantes.

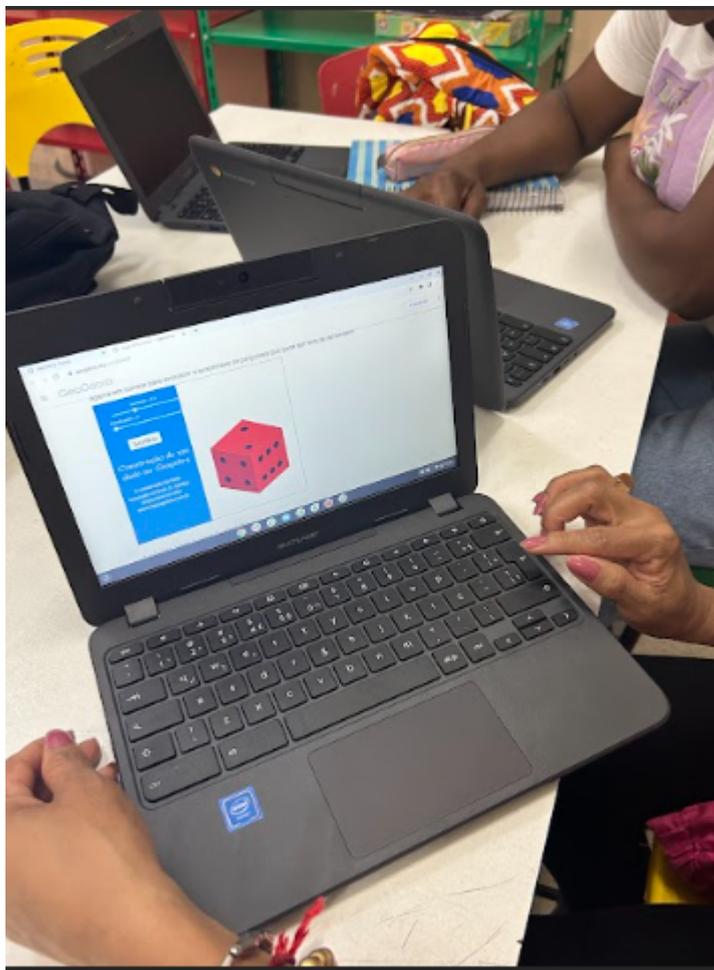


Figura: 7.14 Segunda etapa do jogo GPS na Geogebra.

## 8. A IMPORTÂNCIA DA TECNOLOGIA E DA SALA MAKER NAS ESCOLAS

No decorrer da aplicação das atividades, foi observado a dificuldade geral dos alunos em acessar o computador. Essa dificuldade começava ao ligar e colocar email e senha, não saber acessar a internet e nem manusear as ferramentas básicas do computador. Por esse motivo, essas aulas demoraram mais tempo, do que o previsto, para serem iniciadas, pois houve a necessidade de ajudar os alunos a se conectarem.

A fala geral dos alunos em um primeiro momento foi, “não sabemos mexer nisso”, então mesmo estando animados em mudar de sala e fazer aulas diferentes, eles mostraram insegurança ao mexer nos chromebooks.

Esse tipo de dificuldades nos leva a refletir que o aluno da rede pública, na sua maioria, tem acesso ao celular mas não têm acesso a um computador, ressaltando a importância da utilização da sala maker nos colégios públicos, que promove a educação de forma democrática, garantindo que todos os alunos, independente de sua origem socioeconômica, tenham acesso aos mesmos recursos e possam ter contato com as tecnologias atuais.

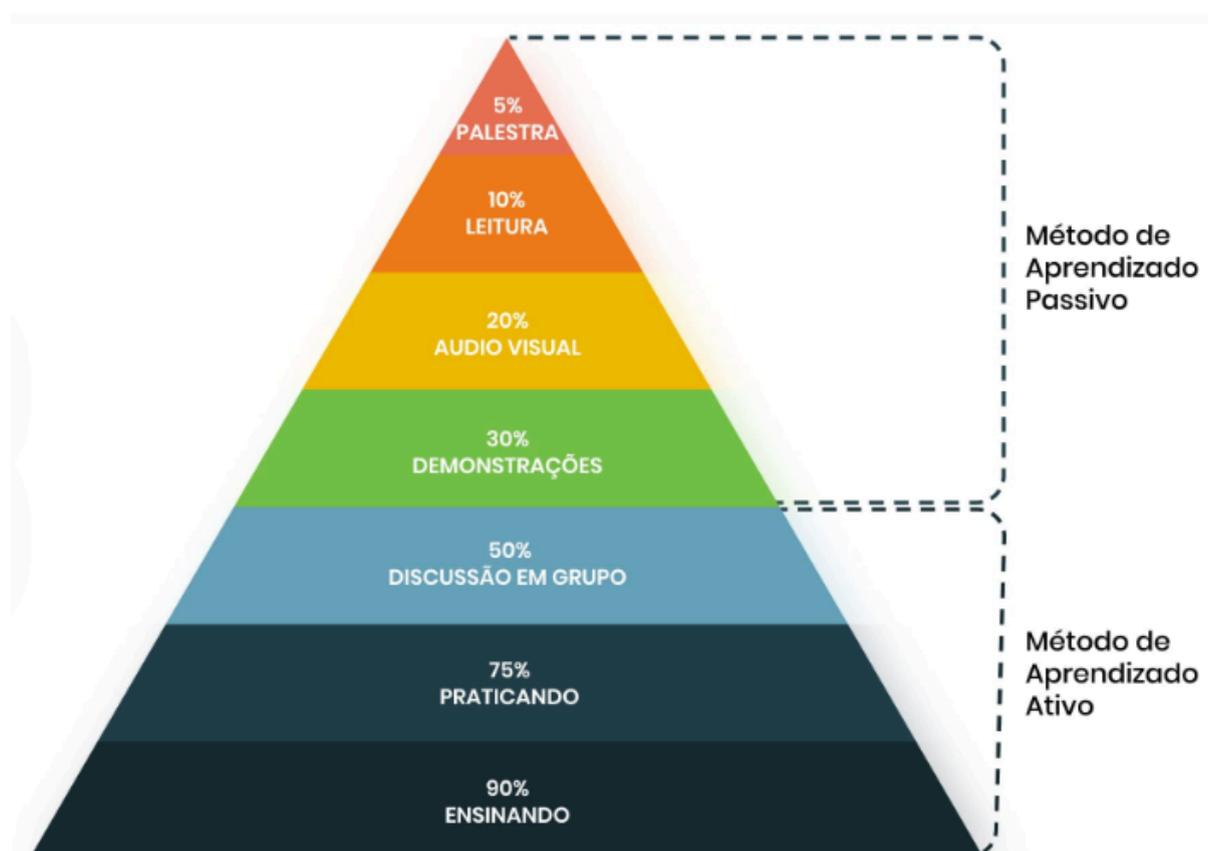
De acordo com Barros Klumpp, Carvalho da Silva, de Souza Santos, de Araújo, dos Santos Silva, Moraes e Silva (2021)

“A significativa das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem permite que o aluno desenvolva um produto final de seu interesse, utilizando as tecnologias como ferramentas para seu próprio conhecimento, possibilitando assim que os alunos se tornem sujeitos ativos, fazendo novas descobertas. A tecnologia educacional, neste contexto, é o conceito referente aos recursos tecnológicos para fins pedagógicos, sendo sua principal finalidade trazer uma educação inovadora que ajude no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.” (pg 13).

O uso da Sala Maker na metodologia implementada, agrega a experimentação ativa dos alunos na pesquisa, não apenas os incentivando a aprender, mas os preparando e dando a oportunidade de serem inseridos no mundo tecnológico.

Segundo Brockveld, para a educação, a ampla exposição à experimentação pode significar processos de aprendizagem que promovam o trabalho coletivo e a resolução de problemas de forma criativa e empática. Além disso, Magennis e Farrell (2005), atribuem às situações de aprendizagem por desafio, a uma maior taxa de retenção de conhecimentos (figura 8.1), estimulando a autonomia e protagonismo do estudante.

Fonte: TYME.LY.



8.1: Pirâmide da aprendizagem.

A Sala Maker foi implementada entre os anos de 2021 e 2022 pela Secretaria de Educação (SEEDUC), em todas as escolas da rede estadual. A sala foi equipada com recursos de última geração, como impressoras 3D, vinte Chromebooks, televisão, kits de robótica e outros dispositivos eletrônicos. Essa iniciativa visa

estimular o aprendizado diferenciado e proporcionar aos alunos de baixa renda uma maior familiaridade com a tecnologia.

“A exclusão digital possui forte correlação com outras formas de desigualdade social e, em geral, as taxas mais altas desta exclusão encontram-se nos setores de mais baixa renda. A desigualdade social no campo das comunicações, na sociedade moderna de consumo de massa, não se expressa somente no acesso ao bem material - rádio, telefone, televisão, Internet -, mas também na capacidade do usuário de retirar, a partir de sua capacitação intelectual ou profissional, o máximo proveito das potencialidades oferecidas por cada instrumento de comunicação e informação”.  
(SORJ, 2003, p.59)

Assim, ao preparar atividades com recursos tecnológicos, os professores estarão ajudando a desenvolver habilidades digitais essenciais, explorar e desenvolver ferramentas e recursos disponíveis. Além disso, ao integrar a tecnologia de forma significativa nas atividades escolares, as escolas podem capacitar os alunos a se tornarem usuários críticos da tecnologia, preparando-os para enfrentar os desafios e aproveitar as oportunidades da sociedade digital atual e do futuro, promovendo uma igualdade de oportunidades educacionais.



Figura 8.2: Chromebooks da Sala Maker.

## 9. RESULTADOS

A abordagem da pesquisa, incluindo o desenvolvimento de um jogo educativo, estimula o interesse e o engajamento dos alunos visando tornar o aprendizado de matemática mais atrativo, incentivando a participação ativa e a continuidade do interesse em aprender a matemática.

Essa participação ativa do aluno o ajuda a estimular o pensamento crítico e praticar a resolução de problemas. Além disso, os alunos se ajudaram mutuamente, tendo a oportunidade de compartilhar experiências e aprender uns com os outros.

Com a implementação dessas atividades os alunos apresentaram uma melhoria na compreensão de alguns conceitos matemáticos fundamentais. A integração de práticas em sala de aula, o uso do Geogebra e a realização de atividades no papel quadriculado tiveram como objetivo proporcionar uma compreensão mais sólida.

Essas atividades resultaram no aumento da autoconfiança dos alunos. À medida que eles superam suas dificuldades em cada etapa, eles se sentem capazes de aplicar o que foi aprendido, fortalecem a confiança nas suas habilidades matemáticas e ficam motivados a aprenderem novas matérias.

Com a aplicação prática do GPS como ferramenta pedagógica, a trilateração se tornou uma aplicação tangível, proporcionando aos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) uma visão concreta de como a matemática está conectada às atividades do mundo real.

Essa pesquisa permite levar para fora do horário de aula o olhar matemático. Ela não apenas contribuiu para ressaltar a necessidade de atividades práticas em sala de aula, mas também deparou-se com a importância de realizar aulas que sejam capazes de democratizar o acesso à tecnologia e ao conhecimento, a importância de disponibilizar oportunidades aos nossos alunos, transformando as suas dificuldades em motivação para aprender.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO DOS DIRETORES DE ESCOLAS DO RIO DE JANEIRO. **Sala Maker. 2020.** Disponível em: < <https://www.aderj.org.br/post/sala-maker.> >

A PIRÂMIDE DE APRENDIZAGEM: EXPLICADA PARA PROVEDORES DE TREINAMENTO. Disponível em: <[piramidedaaprendizagem.com](http://piramidedaaprendizagem.com)>

BARROS Klumpp; C. F. CARVALHO DA SILVA, M. A.; DE SOUZA SANTOS, L. M.; DE ARAÚJO, M. J. D.; DOS SANTOS SILVA, M. J. C.; MORAES, L. R.; SILVA, S. L. A. **A Importância das Tecnologias Digitais.** Editora Bagai. Pará, 2021. Disponível em : < [Editora BAGAI - A Importância das Tecnologias Digitais.pdf](#) >

BROCKVELD, Marcos Vinícius Vanderlinde. **A Cultura Maker em prol da inovação: boas práticas voltadas a sistemas educacionais.** Conferência Anprotec, 2017. <<https://via.ufsc.br/wp-content/uploads/2017/11/maker.pdf>>

Elementar, meu caro Watson!. **A Mágica do GPS – Professor Albert e a Ciência da Natureza.** 2017. (12m36s). Disponível em: <<https://youtu.be/3XvnaonC0U8>>.

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. **Engenharia Geoespacial."** Disponível em:< [https://www.fc.up.pt/engenhariageoespacial/.](https://www.fc.up.pt/engenhariageoespacial/)>

GIS Geography. **Trilateration vs Triangulation in GPS.** Disponível em: <<https://gisgeography.com/trilateration-triangulation-gps/>>

MAGENNIS, Saranne; FARRELL, Alison. **Teaching and learning activities: Expanding the repertoire to support student learning. Emerging issues in the practice of university learning and teaching,** v. 1, 2005.

MARINO, Tiago Badre. (s.d.). GPS - **Sistema de Posicionamento por Satélites Artificiais.** Disponível em: < <http://www.ufrj.br/lga/tiogomarino/aulas/.pdf>>

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: Descrição ao, fundamentos e aplicações.** 2. ed. Presidente Prudente: UNESP, 2007.

PIOVESAN, S. B, ZANARDINI, J.B ... **O ensino e aprendizagem da Matemática por meio da metodologia de Resolução de Problemas: algumas considerações.** Programa de Desenvolvimento Educacional –PDE, 2008, da Secretaria de Estado de Educação do Paraná. Disponível <[http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes\\_pde/artigo\\_suci\\_leiva\\_b\\_aldissera\\_piovesan.pdf](http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_suci_leiva_b_aldissera_piovesan.pdf)>

ROCHA, J. A. M. R. GPS, **Uma abordagem prática**. 4. ed. Recife: Edições Bagaço, 2003.

ROCHA, J. A. M. R. **O abc do GPS**. 2. ed. Recife: Edições Bagaço, 2005.

ROUSSEAU, C; SAINT-AUBIN, Y. **Matemática e atualidade**. volume1. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SORJ, Bernardo. Brasil@povo.com: **A luta contra a desigualdade na Sociedade da Informação**. Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editora. Brasília DF: UNESCO, 2003.

TEIXEIRA DE FREITAS, Jeferson.**Projeções,Mapas e GPS: algumas aplicações na educação básica**.Universidade de Brasília Instituto de Ciências Exatas Departamento de Matemática Projeções, Mapas e GPS: algumas aplica, Brasília, 2017.

TOLENTINO, Vaz. **Tecnologia GPS: Segmento Espacial, Segmento de Controle, Segmento do Usuário**. Disponível em : <<https://vaztolentino.com/>>

Universidade Federal de Santa Catarina. **Coletânea Tecnologias Educacionais**. Disponível em: <[edu.capes.capes.gov.br](http://edu.capes.capes.gov.br). >