SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**FRANCENILDO DA SILVA PEREIRA**

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

**ABAETETUBA - PA**
**2024**

**FRANCENILDO DA SILVA PEREIRA**

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, ofertado pela Universidade Federal do Pará - UFPA, como requisito final para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Rômulo Correa Lima

**ABAETETUBA - PA**
**2024**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

P436s Pereira, Francenildo da Silva.
SEQUÊNCIA didática com auxílio do jogo de xadrez para o ensino de análise combinatória : análise combinatória / Francenildo da Silva Pereira. — 2024.
60 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2024.

1. Xadrez. 2. Análise Combinatória. 3. Combinação. 4. Permutação. 5. Arranjos. I. Título.

CDD 510.712

---

FRANCENILDO DA SILVA PEREIRA

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA**

**A DIDACTIC SEQUENCE WITH THE ASSISTENCE OF CHESS GAME TEACHING COMBINATORIAL ANALYSIS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Pará do Campus de Abaetetuba, com requisito final para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado em Abaetetuba, 01 de agosto 2024.

**BANCA EXAMINADORA:**

**- Prof. Dr. Rômulo Correa Lima**
**Orientador**

__________________________________________________

**- Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa**

__________________________________________________

**- Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa**

__________________________________________________

**- Prof. Dr. Antônio Maia de Jesus Chaves Neto**

__________________________________________________

**ABAETETUBA - PA**
**2024**

Dedico este trabalho ao meu pai, Benedito Alves Pereira – Dedé (in memoriam), que me ensinou: “da cabeça ao coração são só dois palmos” e “uma caneta é mais leve que uma enxada”. Dedico também a minha mãe, Maria Raimunda da Silva Pereira, por me ensinar que “o sucesso é feito de sangue, suor e lágrimas”. Enfim, dedico a minha eterna parceira e amor da minha vida, Camila Gomes Rodrigues, que me ensinou: “para que se conformar com ser vaga-lume, se você pode ser estrela?”

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido que eu chegasse até aqui com força e saúde. Agradeço aos meus pais Benedito Alves Pereira (in memoriam) e Maria Raimunda da Silva Pereira que sempre me incentivaram a estudar, e sempre me motivaram a nunca desistir mesmo com todas as dificuldades enfrentadas. A minha esposa Camila, por sempre me apoiar em todas as minhas decisões, e por entender minhas madrugadas em claro durante o curso. Aos meus colegas de trabalho por estarem sempre dispostos a me substituir quando estive ausente durante o período do curso. Aos meus colegas do curso, aos quais criamos um laço de amizade e fomos parceiros e partilhamos nossas experiências e conhecimentos proporcionando aulas enriquecedoras e, assim juntos superamos nossas dificuldades. Por fim, a todos os Professores do PROFMAT, em especial a meu orientador, o Professor Rômulo Correa Lima por todo o apoio, paciência e orientação que nunca faltaram durante a elaboração deste trabalho.

Muito obrigado.

**RESUMO**

No presente trabalho apresenta-se o jogo de xadrez como uma ferramenta para o ensino da análise combinatória, visto que os jogos estão presentes no ensino por apresentarem uma relevância no desenvolvimento cognitivo e promover simulações de situações problemas que requerem organização para posteriormente buscar-se a tomada de decisões, exercita diversas características, como raciocínio logico, concentração, pensamento analítico, autoconfiança, pensamento crítico e que possibilita aprendizagem através dos erros, situações vista em problemas matemáticos, tendo sua aplicação em uma área bastante vasta da matemática. Além disso, o desenvolvimento das partidas, com o cálculo das jogadas e a integração das peças exercitam a imaginação e o raciocínio logico, assim como a escolha da próxima jogada valoriza a autonomia e a iniciativa de cada aluno. Diante disso, desenvolveu-se um projeto a partir de um estudo de caso na escola, de regime particular, Sistema de Ensino Vestibulando , situada no município de Abaetetuba-PA, o qual foi realizado com a participação de 10 alunos entre 12 a 17 anos do ensino fundamental e médio a fim de identificar a prática do jogo de xadrez e sua utilização como um recurso pedagógico no contexto escolar, para então determinar os meios de implantação do jogo de xadrez na escola como instrumento para o ensino da análise combinatória. No capítulo I, apresenta-se o jogo de xadrez, desde a sua origem até o conhecimento do tabuleiro seguida da apresentação das peças, onde cada uma tem sua própria característica física, seu próprio movimento e um papel dentro do jogo, e a relação que o jogo tem com matemática, auxiliando o desenvolvimento da concentração e da memória. No capítulo II, tem-se um resumo com a fundação teórica do conteúdo de análise combinatória com os principais tópicos trabalhados no ensino médio – fatorial, princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinações - com exemplos e aplicações voltadas para alunos do ensino médio e fundamental. No capítulo III, é apresentado algumas aplicações, que foram utilizadas durante a elaboração do projeto, envolvendo o jogo de xadrez e a utilização da análise combinatória para a solução de tais problemas, propiciando aos estudantes que identifiquem conceitos e estratégias de raciocínio para resolverem problemas dentro do jogo de xadrez. Para a realização deste trabalho, foram realizadas duas avaliações durante este processo, a primeira ocorreu de forma tradicional, com o objetivo de verificar o grau de entendimento da turma, em relação ao conteúdo de análise combinatória. A segunda avaliação ocorreu após o ensino da metodologia com xadrez, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos referente às duas avaliações, os dados obtidos foram coletados e registrados por meio de gráficos, os quais estão representados no capítulo III deste trabalho. Este trabalho tem como objetivo explorar as potencialidades da utilização do jogo de xadrez, como um recurso, no processo de ensino e aprendizagem da análise combinatória, trazer relações do xadrez com a matemática, mostrando como jogar xadrez contribuirá para o aprendizado da disciplina. Para atingir-se esses objetivos tem-se que, elaborar, aplicar, descrever atividades para que os alunos aprendam matemática enquanto aprendem a jogar xadrez.

**Palavras-chave**: jogo de xadrez; ensino de matemática; raciocínio lógico; análise combinatória.

**ABSTRACT**

In this work, the game of chess is presented as a tool for teaching combinatorial analysis, since games are present in teaching because they are relevant to cognitive development and promote simulations of problem situations that require organization to later search for decision making, exercises several characteristics, such as logical reasoning, concentration, analytical thinking, self-confidence, critical thinking and which enables learning through errors, situations seen in mathematical problems, having its application in a very broad area of mathematics. Furthermore, the development of matches, with the calculation of and the integration of pieces exercise imagination and logical reasoning, as well as choosing the next move values each students autonomy and initiative. In view of this, a project was developed based on a case study at a private school, Sistema de Ensino Vestibulando, located in the municipality of Abaetetuba-PA, in which 10 students between 12 and 17 years old were used in elementary school and medium in order to identify the practice of the game of chess and its use as a pedagogical resource in the school context, to then determine the means of implementing the game of chess at school as an instrument for teaching combinatorial analysis. In chapter I, the game of chess is presented, from its origins to knowledge of the board followed by the presentation of the pieces, where each one has your own physical characteristic, your own movement and a role within the game, and the relationship that the game has mathematics, helping the development of concentration and memory. In chapter II, there is a summary with the theoretical foundation of the content of combinatorial analysis with the main topics covered in high school - factorial, fundamental principle of counting, permutations, arrangements and combinations - with examples and applications aimed at high school students it is fundamental. In chapter III, some applications are presented, which were used during the development of the project, involving the game of chess and the use of combinatorial analysis to solve such problems, enabling students to identify concepts and reasoning strategies to solve problems within of the game of chess. To carry out this work, two assessments were carried out during this process, the first took place in a traditional way, with the aim of verifying the level of understanding of the class, in relation to the content of Combinatorial Analysis. The second assessment took place after teaching the chess methodology, with the aim of verifying the students' performance regarding the two assessments. The data obtained was collected and recorded using graphs, which are represented in chapter III of this work. The development of matches, with the calculation of moves and the integration of pieces exercise imagination and logical reasoning, as well as choosing the next moves values each student's autonomy and initiative. This work aims to explore the potentialities of using the game of chess, as a resource, in the process of teaching and learning combinatorial analysis, to bring relationships chess and mathematics, showing how playing chess will contribute to learning the subject. To achieve these objectives, we have to develop, apply, and describe activities so that students learn mathematics while learning to play chess.

**Keywords**: chess game; mathematics teaching; logical reasoning; combinatorial analysis.

**SUMÁRIO**

# 1 - INTRODUÇÃO

Grandes são as dificuldades de se ensinar matemática atualmente. De acordo com vários autores a matemática é uma disciplina que sempre traz muitas dificuldades em ensiná-la (Silveira, 2002; Jimeno, 2006; Fernández Baroja, 1991). É claro que esses problemas são devido a vários fatores como má adequação entre evolução psicológica e programas, métodos e materiais utilizados, entre outros fatores, fazendo com que essa disciplina fique pouco atrativa ao interesse dos alunos.

Inserir os jogos como metodologia de ensino da matemática é uma forma de propiciar ao estudante o desenvolvimento de suas habilidades de forma lúdica e prazerosa.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (Brasil, 1998, p. 46).

O trabalho com jogos em sala de aula, além de ser prazeroso e divertido, faz com que haja uma aceitação maior no que diz respeito aos conteúdos trabalhados. A Matemática é vista por muitos alunos como uma disciplina difícil, desse modo se tornam desinteressados por ela. Aranão (1996), esclarece que o jogo em sala de aula é um importante recurso metodológico, para desenvolver a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos matemáticos.

Os jogos e brincadeiras auxiliam o professor como uma estratégia metodológica para ajudá-los nesse processo. Além de chamar atenção dos alunos, desenvolve a aprendizagem e estimula o raciocínio lógico. Para que o trabalho com jogos dê resultado, contudo, é necessária uma avaliação prévia de quais jogos e como serão utilizados e as finalidades propostas por eles.

Kishimoto (2007) enfatiza que resolução de problema e jogo são elementos semelhantes, pois ambos se unem através do lúdico. Para ela, os diferentes níveis de ensino devem ter caráter lúdico para desestruturar o aluno e leva-los a construção de novos conhecimentos.

De maneira geral, a Matemática ensinada nas Escolas é vista pelos alunos como uma ciência distante da realidade. A Matemática está presente em grande parte do nosso cotidiano, independente do nível de complexidade. Entender isso é compreender o mundo à sua volta e poder atuar nele. Essa representação da matemática como ciência exata e precisa, transforma-a em uma linguagem de poder distante da realidade, deixando estudantes inseguros, passivos e desmotivados com relação à aprendizagem da disciplina. Ao refletir sobre o ambiente escolar e a maneira como a Matemática se desenvolve nesse ambiente, cabe ao Professor da disciplina buscar meios de dar vida a essa Ciência, mostrando que a Matemática está presente em nosso dia a dia de várias maneiras, visto que ela é formada a partir de problemas manifestados da sociedade. Entre os vários conteúdos abordados nas séries finais do Ensino Fundamental, a Análise Combinatória é um exemplo de como a Matemática pode estar ligada diretamente aos problemas cotidianos, seja num jogo ou num determinado dado estatístico.

Assim, o objetivo geral deste trabalho consiste em analisar os efeitos da utilização do jogo de xadrez no ensino da análise combinatória. Visa identificar os referenciais teóricos tanto com relação ao ensino da análise combinatória quanto ao jogo de xadrez, conhecer a metodologia aplicada atualmente na matemática, estabelecer uma inter-relação do xadrez com o assunto trabalhado e identificar os benefícios que o xadrez traz na aprendizagem e nos níveis disciplinares.

A inserção do jogo, combinado com uma boa metodologia do professor, pode levar as aulas de Matemática a ficarem cada vez mais prazerosas e cativante, fazendo com que cada conteúdo matemático seja significativo para o aluno. O jogo por si só não pode ser aplicado de forma solta, apenas como forma de preencher o tempo, deve ser sempre relacionado aos conteúdos estudados ou a serem estudados.

> A ludicidade é uma necessidade do ser humano em qualquer idade e não pode ser vista apenas como diversão”. O desenvolvimento do aspecto lúdico facilita a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural [...], facilita os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento. (Santos, 2011, p.12).

No processo de formação educacional, cada vez mais são envolvidos habilidades e instrumentos pedagógicos, destacando aspectos de desenvolvimento cognitivo e psicossocial, exigindo cada vez mais do aluno a capacidade de raciocinar, pensar, agir e o principal, aprender a aprender. Nesse sentido, cabe ao professor procurar propiciar situações que motivem o aluno a ter uma aprendizagem significativa, de acordo com o nível de desenvolvimento cognitivo do aluno, em atividades que possam desafiá-lo, de forma a despertar seu interesse pelo que está sendo ensinado em sala de aula.

Para alcançar esses objetivos, os professores precisam cada vez mais de instrumentos que auxiliem no envolvimento dos alunos no processo ensino-aprendizagem, estimulando à comunicação e o raciocínio, bem como o pensamento crítico, a solução de problemas, autonomia, entre outras habilidades.

Um dos instrumentos utilizados no Brasil e no mundo é o jogo de xadrez, no Brasil ainda pouco usado e estudado, e que pode contribuir no desenvolvimento intelectual e social dos alunos.

Cada vez mais os jogos estão presentes no ensino, principalmente na disciplina de matemática, pois os jogos possuem uma relevância no desenvolvimento cognitivo. Na perspectiva de Huizinga (1990), o jogo se constitui em uma atividade universal anterior à própria cultura, contribuindo para o desenvolvimento social, cognitivo e afetivo dos sujeitos.

No início os jogos em geral eram vistos apenas como atividades destinadas ao lazer, embora se perceba que os jogos apresentam características que vão além da diversão:

> O jogo é mais do que um fenômeno fisiológico ou um reflexo psicológico. Ultrapassa os limites da atividade puramente física ou biológica. É uma função significante, isto é, encerra um determinado sentido. No jogo existe alguma coisa 'em jogo' que transcende as necessidades imediatas da vida e confere um sentido à ação. Todo o jogo significa alguma coisa (Huizinga, 1990, p. 4). A introdução de jogos no ensino é previsto nos parâmetros curriculares nacionais de matemática (PCN's), o mesmo que sugere "Nos jogos de estratégia parte-se da realização de exemplos práticos que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático". (PCN's,1998, p. 47).

Tais atividades com jogos devem oferecer ao aluno, segundo os PCN's, a possibilidade de busca e elaboração de estratégicas na resolução de problemas, além de apresentar atrativo e proporcionar simulações de situações problemas, que requer organização de procedimento de soluções:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações. (PCN's, 1998, p. 47).

Dentro deste contexto, tem-se a implantação do jogo de Xadrez como uma atividade de suma importância para o treinamento do raciocínio lógico. É sabido, que o jogo de Xadrez vem a enriquecer não só o nível cultural do indivíduo, mas também várias outras capacidades como a memória, a agilidade no pensamento, a segurança na tomada de decisões, o aprendizado na vitória e na derrota, a capacidade de concentração e entre outros aspectos (Pimenta, 2006).

O principal mérito do jogo de Xadrez é a capacidade do aluno possuir o seu próprio ritmo "mas, o principal mérito da aprendizagem enxadrística, desde que adotada ludicamente, repousa no fato de permitir que cada aluno possa progredir seguindo seu próprio ritmo e, assim, atender a um dos objetivos primordiais da educação moderna".

Assim, faz-se necessário investigar, como o jogo de xadrez está sendo utilizado nas escolas. Diante do exposto, ficam as seguintes perguntas: o jogo de xadrez pode ser utilizado como uma ferramenta para melhoria da aprendizagem da matemática na educação básica? Que fatores influenciam a utilização do jogo de xadrez como inovação pedagógica no ensino de matemática (análise combinatória)? Como está sendo utilizada a introdução do jogo de xadrez nos ambientes escolares, principalmente, na educação matemática?

Em relação ao conceito de análise combinatória, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é proposto aplicar tal conteúdo em todas as séries do ensino fundamental de forma gradual, a partir da "compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostos, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas" (Brasil, 2018, p.277). Desta forma, os primeiros problemas envolvendo contagem resolvidos em sala de aula, seriam voltados para o entendimento do conceito de "casos possíveis", para que posteriormente fossem resolvidos aplicando a ideia de princípio multiplicativo e aditivo.

Na análise combinatória o xadrez muito pode contribuir, pois no decorrer da partida o jogador deve ser capaz de calcular com exatidão a manobra que realizará com suas peças, para que depois possa escolher qual o caminho mais rápido e eficaz a ser seguido, para obter maior sucesso. Exploraremos melhor esta relação entre jogo de xadrez e análise combinatória no capítulo 3.

Esse estudo visou demonstrar utilizando ferramentas estatísticas aplicadas ao Teste de Desempenho Escolar (T.D.E.) e questionários que comprovassem o benefício que este jogo poderia trazer no cálculo aritmético e principalmente na compreensão dos conceitos aplicados no ensino da análise combinatória.

## 1.1 - BENEFÍCIOS DO XADREZ COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

Experimentos anteriores realizados em alguns países demonstram que alunos que aprenderam a jogar xadrez melhoraram suas notas na escola. O uso do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica é fundamental importância na vida escolar, pois reconhece e respeita regras, aprimora o raciocínio lógico, melhora a socialização e desenvolve a autoestima.

No âmbito intelectual podemos dizer que há uma melhora considerável em alguns níveis: concentração, análise, raciocínio lógico, criatividade e imaginação. No âmbito social as melhoras são: respeito às normas, facilidade na tomada de decisões, organização, autoestima, controle emocional, além das melhoras nos âmbitos cultural e saúde.

A presença do lúdico nas atividades cotidianas na escola, representadas por jogos e brincadeiras é algo que fascina. O brincar é algo fundamental para o desenvolvimento humano. De acordo com Macedo (2005), o brincar é envolvente, interessante e informativo. Huizinga (1971), escreveu em seu livro “Homo Ludens” que o jogo é uma categoria primária da vida e que está na base do surgimento da civilização.

Constatou-se também que o jogo de xadrez contribui a raciocinar e pensar matematicamente já que os alunos experimentam, intuem, relacionam conceitos e realizam abstrações, deduções e induções, particularizam e generalizam, conseguem argumentar as decisões tomadas e escolhem os processos e as técnicas utilizadas.

Algumas situações da matemática é preciso o autocontrole emocional, que é muitas vezes decisivo, para que o aluno encontre lucidez para discernir sobre a melhor resposta e o melhor encaminhamento do problema, com possibilidade, inclusive de falhar, ainda que soubesse o resultado ou o modo de resolvê-lo. Todos estes elementos podem ser devidamente preparados durante o treinamento do jogo de xadrez, para que se possa contribuir efetivamente para a melhoria na atuação do aluno em frente aos desafios da educação matemática.

O jogo de Xadrez é definido com um jogo de regras, que impõe ao aprendiz normas de planejamento e estratégia, além de uma série de julgamentos que o jogador deve fazer, pois existe um limitador que se relaciona a interdependência entre as jogadas (anteriores e do adversário).

Piaget (1996), afirma existir três tipos de jogos: jogos de exercícios, jogos simbólicos e jogos de regras. O último engloba os dois primeiros, tornando-se o mais importante dos jogos quando o aluno alcança o período das operações concretas, pois a pessoa torna-se capaz de jogar respeitando as regras por consentimento mútuo, ressaltando a possibilidade social da proposta.

Cada vez mais os estudos relacionam o jogo de xadrez com o ensino de matemática por proporcionar situações que requerem tomadas de decisões, pensamento crítico e que possibilitada à aprendizagem através dos erros, situações vista em problemas matemáticos. Segundo Grando (2000):

> Portanto, situações que propiciem à criança uma reflexão e análise do seu próprio raciocínio, que esteja ‘fora’ do objeto, nos níveis já representativos, necessitam ser valorizadas no processo de ensino aprendizagem da matemática e o jogo demonstra ser um instrumento importante na dinamização desse processo. Grando (2000, p. 44)

Em vista do fator motivacional subjacente ao ato de jogar Xadrez, é possível favorecer o interesse e a habilidade necessários para o bom desempenho em outras disciplinas. Aliás, o jogo de Xadrez tem se mostrado um excelente instrumento para o acompanhamento do desenvolvimento cognitivo. Isto é particularmente notável no que envolve o ensino de Matemática, pois auxilia a aprendizagem de:

> **- Aritmética:** com a ajuda das noções de troca e valor comparado das peças e de controle das casas.
> **- Álgebra**: graças à representação gráfica do tabuleiro e ao cálculo do índice de desempenho dos jogadores que pode ser assimilado a um sistema de equações com "n" incógnitas.
> **- Geometria:** o movimento das peças introduz às noções de vertical, horizontal, diagonal (Sá, 1993, p. 14).

Grandes matemáticos como Gauss (1777-1855) e Euler (1707-1783) interessaram-se em explorar a matemática presente no jogo de xadrez, como por exemplo, Gauss, propôs a colocação de oito damas no tabuleiro e Euller, o percurso do cavalo sobre as 64 casas do tabuleiro:

> A retomada de problemas que apaixonaram grandes matemáticos tais como Gauss (1777-1855), com o problema da disposição das oito damas sobre o tabuleiro sem que, quaisquer duas delas, se alcancem em seus domínios (casas do tabuleiro) e Euller (1707-1783), com o problema do percurso do cavalo sobre as 64 casas do tabuleiro sem passar mais de uma vez por qualquer casa, permite sublinhar que o jogo de xadrez é um poderoso estimulante para a educação matemática na medida em que fornece uma reserva inesgotável de situações problema (Goes, 2002, p.29).

## 1.2 - A MATEMÁTICA POR TRÁS DO JOGO DE XADREZ

O Jogo de xadrez é muito utilizado por professores de matemática em todo o mundo, como forma de aplicar e relacionar conteúdos da disciplina, levando-os a obterem resultados surpreendentes. Assim como a matemática, o jogo de xadrez é amado e odiado por muitos, por ser visto como um jogo difícil e cheio de regras. Mas não é só esta relação que os dois têm em comum. Começando pelo tabuleiro, que utiliza a forma geométrica de um quadrado 8x8 que resulta em $8^2 = 64$ quadrados menores (casas). Já na apresentação do tabuleiro, podem ser trabalhados alguns conceitos de potenciação, figuras geométricas e áreas, desde as séries iniciais.

Cada linha é simbolizada por uma letra (a, b, c, d, e, f, g, h) e cada coluna por um número (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), podendo facilmente relacioná-lo com um plano cartesiano de coordenadas (x, y), onde cada casa pode ser um par ordenado, por exemplo: as casas a3, b4, g6. Desta maneira cada jogada pode ser nomeada, levando o jogador a se localizar de uma melhor forma no tabuleiro. As progressões também estão presentes no jogo de xadrez. Desde o conto do seu surgimento, como será visto na capítulo I deste trabalho, em relação ao pedido do criador do jogo, o sábio indiano Sissa, que pediu ao rei um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos de trigo pela segunda casa, quatro pela terceira e assim por diante, até a última casa do tabuleiro. Para calcular a quantidade total, o jogador se depara com a seguinte soma $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63}$, que é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

As diagonais também tem uma relação com as progressões, pois assim como as casas, elas são nomeadas da seguinte maneira: A diagonal $h1 \rightarrow a8$ é uma diagonal composta pelas casas (h1, g2, f3, e4, d5, c6, b7 e a8) e pode-se observar também que muitas dessas casas fazem parte de mais de uma diagonal, levando a relacionar o conteúdo a análise combinatória. Enfim, vários são os conceitos matemáticos que podem ser trabalhados com o auxílio do jogo de xadrez. Neste trabalho, serão explorados os tópicos de análise combinatória, como serão vistos no capítulo III.

# 2 - CAPÍTULO I

## 2.1 - HISTÓRICO E LENDA DO JOGO DE XADREZ

O jogo de xadrez é considerado um dos jogos mais antigos do mundo e há diversos debates em relação ao seu surgimento, porém de acordo com medrado (2009, p.17) a teoria mais aceita é que ele se originou na Índia, por volta do século VI. Era conhecido como "o jogo do exército", ou "Chaturanga", e podia ser jogado com dois ou mais jogadores. De acordo com Lasker (1999, p.31) o nome Chaturanga significa “exército formado por quatro membros”. Eram quatro pessoas que por sua vez jogavam com um dado que indicava qual peça deveria ser mexida.

Segundo Fadel e Mata (2007, p. 7), o Xadrez é um jogo muito antigo, cheio de lendas e mitos. Sua invenção já foi atribuída a chineses, egípcios, persas e árabes, porém, não há confirmação a partir dos diversos fatos históricos até o presente momento. Várias possibilidades de sua origem já foram destacadas por historiadores, em diversas épocas, desde a apreciação de uma antiga pintura egípcia que mostra duas pessoas participando de um jogo parecido com o Xadrez, cerca de 3.000 anos a.C, lendas, como a de Sissa e Caíssa, chegando à Chaturanga, praticado por volta de 600 a.C, ao norte da Índia.

A Lenda de Sissa é utilizada por muitos professores ao ser trabalhado o histórico do xadrez e com isso já enfatiza a proporção que são encontrada nos cálculos.

Segundo Silva e Tirado (1999) a Lenda de Sissa relata que um Sultão (Rei) Kaíde, vivia aborrecido, pois havia perdido um filho em uma guerra, e organizou um concurso para que apresentasse algo que o distraísse, o vencedor poderia escolher a recompensa, sendo o grande vencedor o sábio Sissa com o jogo de xadrez.

Ainda conforme Silva e Tirado (1999), O rei teria ficado tão feliz que permitiu ao inventor escolher o que ele desejasse como pagamento. Sissa escolheu que colocasse 1 grão de trigo na primeira casa, 2 na segunda casa, 4 na casa do tabuleiro e assim por adiante sempre dobrando a quantidade da casa anterior, o que caracteriza uma soma de uma progressão geométrica. Como o tabuleiro de xadrez possui sessenta e quatro casas e o primeiro termo corresponde a um grão de trigo, temos o termo inicial elevado à zero e o último termo elevado a sessenta e três.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

Note que a razão é dois, o primeiro termo é igual a um e conhecendo o número de termos pode-se aplicar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita (Morgado, Carvalho, 2015):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

$S_{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ ■

O número foi assustador pois seriam necessários 61.000 anos da produção da época, sendo assim Sissa foi nomeado Primeiro-ministro. Essa lenda pode ser encontrada no livro ”O homem que calculava” de Malba Tahan.

> Para se ter uma ideia da grandeza deste número, caso uma pessoa deseje contar a partir de 1 até o final (1, 2, 3, etc.), levando apenas um segundo para contar o número seguinte, trabalhando 24 horas por dia, sem parar até o final, seriam necessários 58 454 204 609 séculos, isto é, quase sessenta bilhões de séculos (Rezende, 2013, p. 13).

A versão mais popular do Chaturanga ocorreu quando passou a ser jogado por dois adversários. Historicamente foi introduzido no Ocidente através das rotas comercias (Silva, 2002), chegando à Europa pelos muçulmanos no século IX. A Espanha e a Itália receberam o jogo dos Mouros, pessoas consideradas cultas aprendiam naturalmente a jogar o xadrez (Bernard, 1993 apud Varges, 2006).

Na Idade Média o xadrez passou por transformações que o conduziu a sua forma atual. O jogo, tinha uma característica elitista, sendo intitulado como “jogo dos reis e o rei dos jogos” (Silva, 2002, p. 07).

A origem precisa do xadrez é desconhecida, no entanto o mais provável é que o jogo tenha surgido na Índia por volta do século V, em seguida se espalhou para o mundo árabe e chegou a Europa, o que faz um paralelo com o surgimento dos algarismos Hindu-Arábicos, já que estes também foram uma invenção dos Hindus e que foi difundido pelos Árabes até a Europa Ocidental durante a Idade Média. A partir do século XV o xadrez ganha bastante popularidade e surgem os primeiros jogadores profissionais. Em 1851 foi estabelecido um código de regras que unificou o jogo de xadrez tornando a base das regras atuais, em 1886 começaram a surgir os primeiros campeonatos mundiais de xadrez, no qual o enxadrista do império Austríaco Wilhelm Steinitz se tornou o primeiro campeão mundial de xadrez. Em 1924 foi estabelecido a Federação Internacional de Xadrez (FIDE) que é responsável pela organização das competições a nível internacional, mas que também incentiva e promove o xadrez escolar, fazendo do esporte uma ferramenta educacional (TASCHETTO, 2004).

Com um grande número de jogadores ingressando no esporte houve a necessidade de quantificar a força de um jogador afim de que eles fossem organizados de forma mais justa quanto aos torneios e a títulos de mestres. Com o auxílio da matemática foi possível qualificar os enxadristas e separá-los em faixas de ranting Elo, criado pelo físico húngaro-americano Arpad Emrick Elo. Em 1972, o mundo enxadrístico presenciou um dos maiores embates durante o período da Guerra Fria, onde o jogo de xadrez foi palco de batalha entre as duas maiores potências da época. A União Soviética dominava o esporte e todos os campeões mundiais do período pós segunda guerra eram soviéticos, no entanto o americano Robert James Fischer derrotou Boris Spassky pelo campeonato mundial de xadrez (FIGUEIREDO, 2014).

Rocha (2010) alude que:

> Na Guerra Fria, os melhores jogadores de xadrez, famosos por suas vitórias em importantes torneios e campeonatos, foram cobrados ao máximo para tentar derrotar o oponente, pois, a nação de um grande campeão de xadrez seria, em tese, o território onde estariam as inteligências mais brilhantes e patrióticas. O norte americano Robert J. Fischer, representante dos Estados Unidos da América do Norte, no ano de 1972, em Reykjavík – Islândia venceu o seu oponente russo Boris Spassky, representante da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas. E como resultado recebeu o título de Campeão Mundial de Xadrez, pois conseguiu perfazer um total de 12,5 pontos contra o seu adversário que conseguiu 8,5 pontos. Fischer quebrou uma hegemonia de 26 anos dos russos. Isso teve consequentemente um grande peso simbólico, em virtude da propagação da ideologia de que a democracia americana e seu sistema educacional capacitavam melhor as pessoas, tornando-as mais inteligentes do que as pessoas orientadas pelo comunismo soviético. Rocha (2010, p. 48)

Em 1996 com a introdução dos computadores, o mundo acompanhou um supercomputador da International Business Machines (IBM) construído pra jogar contra o atual campeão mundial da época, Garry Kasparov; no primeiro confronto o russo levou a melhor, mas em 1997 o computador Deep Blue havia sido atualizado, e finalmente a máquina venceu o ser humano, provando ter uma enorme capacidade de cálculo, sendo capaz de analisar até $2\ .10^8$ de jogadas por segundo. O século XXI trouxe a geração das engines, ou seja, programas de computadores superpoderosos capazes de calcular e decidir movimentos no jogo de xadrez, o StockFish e AlphaZero são alguns exemplos, que impediram o homem de fazer frente a estas máquinas, no entanto, profissionais e amadores tem aprendido muito com as análises de partidas feitas por estas engines.

O xadrez é considerado um jogo de infinitas possibilidades, segundo Shannon, o número de combinações possíveis chega a ser $10^{120}$. Algumas táticas foram desenvolvidas por enxadristas notáveis que utilizaram da sua experiência para dar grande mobilidade ao jogo. Algumas dessas táticas podemos citar como:

**GARFOS** – são ataques duplos

**PREGADURA** – quando o adversário fica impossibilitado de mover alguma peça

**ESPETO** – quando há ataque duplo e uma das peças será capturada

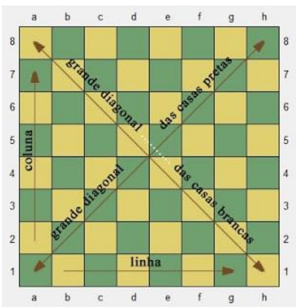
Diversos estudiosos e instituições tem procurado difundir o jogo de xadrez e cada vez mais tem expandindo-se essa prática milenar. R. Eletr. Cient. Inov. Tecnol, Medianeira, v. 8, n. 16, 2017. E – 7394.

> [...] Com o intuito de difundir e democratizar o xadrez escolar a Federação Internacional do Xadrez (FIDE) e Organização das Ações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) em meados de 1986 criaram o Comittee on Chess in Schools (CCS) em português significa Comissão do Xadrez nas Escolas. Tal importância deste conteúdo que ao decorrer dos anos alguns países passaram a incentivar o xadrez escolar (Giachini, et al., 2011, p.6).

## 2.2 - TABULEIRO E AS PEÇAS

**2.2.1 - TABULEIRO:** Silva (2004) narra que o tabuleiro é formado por colunas, filas e diagonais, como pode ser visto na figura 1. Colunas são sequências de casas verticais. Filas são sequências de casas horizontais. Diagonais são sequências de casas inclinadas, em linha reta e de uma mesma cor. Todas as casas do tabuleiro possuem nome, que é dado pelo encontro de uma fila com uma coluna. As colunas recebem letras de **a** até **h** e as filas são numeradas de 1 a 8, como mostra a figura 1. O encontro da coluna a com a fila 1 vai dar origem a casa a1.

Figura 1 – Tabuleiro




Fonte: o autor.

Assim temos:

· O lado de baixo como lado inferior, e o lado de cima como lado superior;

· 8 linhas ou fileiras, numeradas de 1 a 8 da parte inferior do tabuleiro para a superior em relação ao jogador de peças brancas;

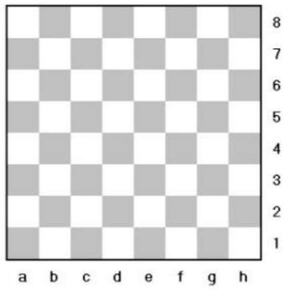
· 8 colunas, identificadas por letras minúsculas de a até h, da esquerda para a direita em relação ao jogador de peças brancas;

· 13 diagonais brancas;

· 13 diagonais pretas.

Observação: é importante a posição do tabuleiro de xadrez para a colocação das peças. Por exigência da regra do jogo, o tabuleiro deverá ser sempre colocado de maneira que a primeira coluna à direita do jogador tenha na sua base uma casa branca. (figura 2)

Figura 2 – Posição inicial do tabuleiro

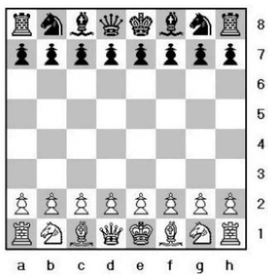



Fonte: O autor

O tabuleiro de xadrez é dividido em oito colunas representadas pelas letras minúsculas: a, b, c, d, e, f, g, h. E por oito linhas representadas pelos números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

O jogo de xadrez é praticado por duas pessoas em um tabuleiro de 64 casas com 32 peças, sendo 16 peças pra cada jogador, as dezesseis peças na coloração branca que sempre deverão ocupar as linhas 1 e 2, enquanto as outras dezesseis peças na cor preta ocuparão as linhas 7 e 8, essa disposição pode ser observada na Figura 3.

Figura 3 – Posição inicial das peças




Fonte: Silva, Wilson da. Curso de Xadrez. Metodologias de Ensino, 2014.

### 2.2.2- CONHECENDO AS PEÇAS

As peças possuem nomes e movimentos distintos e a quantidade delas é mostrada na figura abaixo.

Figura 4 – Peças do xadrez

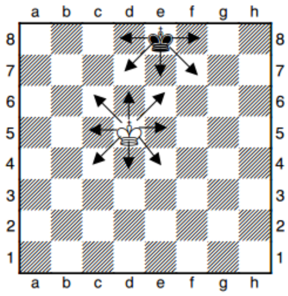
| Peças | Quantidade | Abreviação | Brancas | Pretas |
|---|---|---|---|---|
| Rei | 1 | R | ♔ | ♚ |
| Dama | 1 | D | ♕ | ♛ |
| Torre | 2 | T | ♖ ♖ | ♜ ♜ |
| Bispo | 2 | B | ♗ ♗ | ♝ ♝ |
| Cavalo | 2 | C | ♘ ♘ | ♞ ♞ |
| Peão | 8 | Não há | ♙ ♙ ♙ ♙<br>♙ ♙ ♙ ♙ | ♟ ♟ ♟ ♟<br>♟ ♟ ♟ ♟ |

Fonte: Silva, Wilson da. Curso de Xadrez. Metodologias de Ensino, 2014.

## 2.3- MOVIMENTO DAS PEÇAS:

**2.3.1 - REI:** O rei é a peça principal do jogo e se move para todos os lados de uma em uma casa. Silva (2004) descreve os movimentos do rei na figura 4, nessa figura o rei branco está na casa d5 e pode ser movimentado para c6, d6, e6, e5, e4, d4, c4 ou c5 (oito casas distintas).

Figura 5 – Movimentos do rei

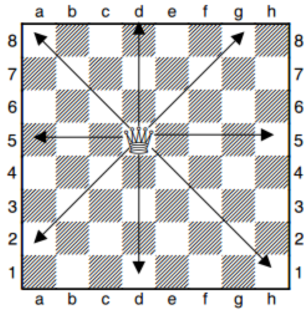



Fonte: o autor.

O rei não pode ficar ao lado do rei adversário, é uma jogada ilegal. Observando a figura 3, caso o rei preto estivesse na casa d7, as brancas jamais poderiam jogar o rei para as casas c6, d6 ou e6 por estarem atacadas pelo rei preto. Quanto a captura, o rei poderá fazê-lo de acordo com a sua movimentação, mas nunca poderá capturar uma peça que esteja protegida por outra e nem se movimentar para uma casa que esteja sob ataque.

**2.3.2 - DAMA:** A dama, também conhecida como rainha, movimenta-se em todas as direções (coluna, fila ou diagonal) sendo uma peça muito poderosa pelo seu raio de ação, mas não pode pular nenhuma outra peça. Na figura 6, a dama ataca 27 casas simultaneamente.

Figura 6 – Movimentos da dama

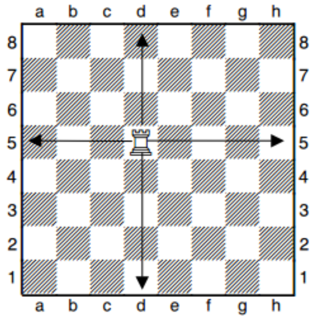



Fonte: o autor.

O seu raio de ação diminui à medida que existam peças nas casas em que ela ataque. Na posição inicial, por exemplo, a dama possui o seu caminho bloqueado por suas próprias peças.

**2.3.3 - TORRE:** Movimenta-se em colunas e filas, este deslocamento da torre poderá ser realizado em quantas casas o jogador quiser, com exceção das casas que estiverem ocupadas pelas próprias peças, caso alguma peça do adversário esteja no raio de ação da torre, a captura poderá ser efetuada e a torre ocupará o lugar da peça tomada, como mostra a figura 7. Uma torre situada no centro do tabuleiro pode atacar 14 casas.

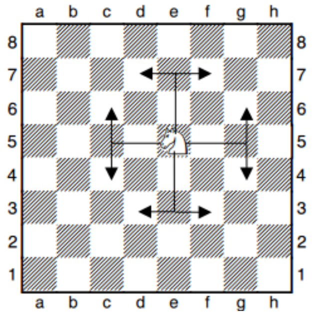
Figura 7 – Movimentos da torre




Fonte: O autor.

**2.3.4 - CAVALO:** Possui um movimento particular bastante diferente das demais peças. Para simplificar, digamos que o cavalo pula em "L": duas casas na horizontal ou vertical, como uma torre, e depois uma casa acima ou abaixo (se foi movido na horizontal), ou à direita ou à esquerda (se foi movido na vertical), sempre capturando a peça que estiver no final do L. O cavalo é a única peça que salta sobre as outras. Se o cavalo sair de uma casa branca irá parar em uma casa preta e vice-versa. Um cavalo na casa e5 conforme a figura 8 pode ir para 8 casas diferentes (c6, d7, f7, g6, g4, f3, d3 e c4).

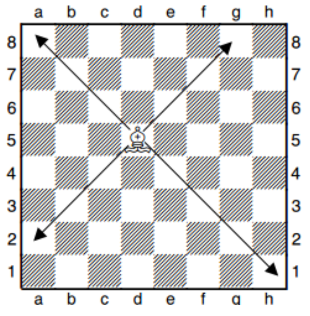
Figura 8 – Movimentos do cavalo




Fonte: O autor.

**2.3.5 - BISPO:** Move-se pelas diagonais, conforme pode ser visto na figura 9, quantas casas desejar, exceto se tal casa esteja obstruída por alguma peça própria, o bispo sempre atacará na diagonal e ocupará o lugar da peça adversária capturada conforme pode ser visto na figura 8. Cada jogador começa a partida com um par de bispos, um que percorre as casas pretas e outro pelas casas brancas. O bispo no centro do tabuleiro ataca um total de 13 casas.

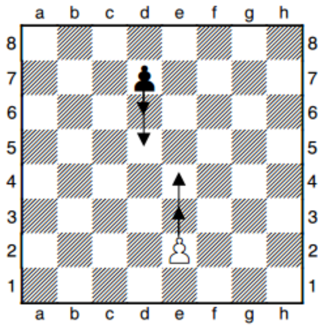
Figura 9 – Movimentos do bispo




Fonte: O autor.

**2.3.6 - PEÃO:** O peão movimenta-se somente para frente de casa em casa. Quando está na posição inicial, ele pode avançar duas casas, a partir deste movimento o peão só poderá avançar uma casa de cada vez (figura 10).

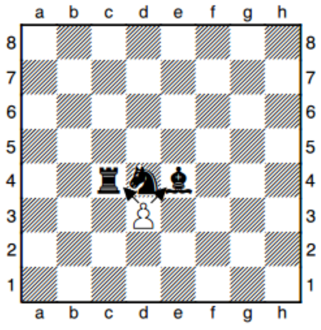
Figura 10 – Movimentos dos peões




Fonte: O autor.

Os peões não capturam as peças ao longo de seu movimento, como as demais peças. A captura é feita em diagonal, ficando no lugar da peça que foi atacada por ele, não podendo realizar capturas para trás. Na figura 11, o peão em d3 pode capturar a torre ou o bispo em e4, mas não pode capturar o cavalo.

Figura 11 – Captura da torre ou do bispo pelo peão

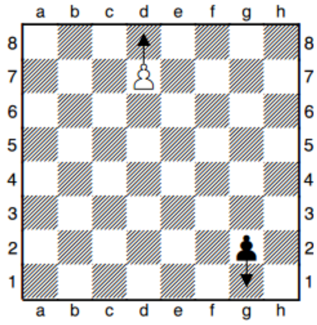



Fonte: O autor.

## 2.4 - MOVIMENTOS ESPECIAIS.

**2.4.1 - PROMOÇÃO OU COROAÇÃO**: Quando o peão atravessar o tabuleiro e chegar à última casa do outro lado deve obrigatoriamente ser trocado por outra peça (dama, torre, bispo ou cavalo), independente do jogador ter perdido ou não estas peças. Na figura 33, quando o peão em d7 chegar a d8 deve ser trocado por dama, torre, cavalo ou bispo. O mesmo acontece com o peão preto em g2.

Figura 12 – Promoção do peão

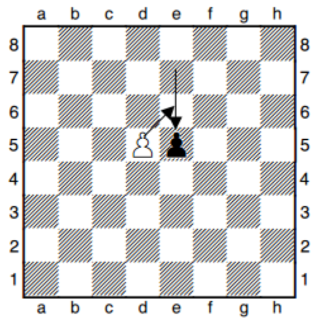


Fonte: O autor.

**2.4.2 - EN PASSANT**: É um termo francês que significa na passagem, este movimento acontece quando um peão que está na casa inicial e anda duas casas e fica ao lado de um peão adversário, este pode capturá-lo como se o outro houvesse andado uma casa.

Na figura 12, o peão preto estava em e7, avançou duas casas e foi para e5. Ao fazer este movimento, o peão preto passou pela casa e6, casa de captura do peão branco que está em d5. O peão branco pode captura-lo movendo-se para a casa e6, como mostra a figura 13. A captura por *en passant* (na passagem) deve ser feita imediatamente após o avanço do peão adversário.

Figura 13 – Em passante



Fonte: o autor.

**2.4.3 - ROQUE**: São dois movimentos em um lance. O roque é realizado com uma das torres e o rei. O rei anda duas casas em direção a torre, e a torre salta sobre o rei e ocupa a casa ao lado deste. Para a realização do roque é importante observar que só é possível executá-lo quando:

1) O rei e a torre do lado escolhido não foram movimentados.

2) Não houver peças entre o rei e a torre.

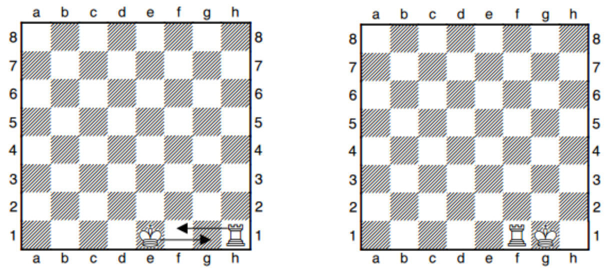
3) O rei não estiver em xeque.

4) As casas em que o rei passar não estiverem ameaçadas.

5) O rei, ao roçar, não terminar em xeque.

O roque feito com a torre do lado do rei, o roque chama-se pequeno (figura 14)

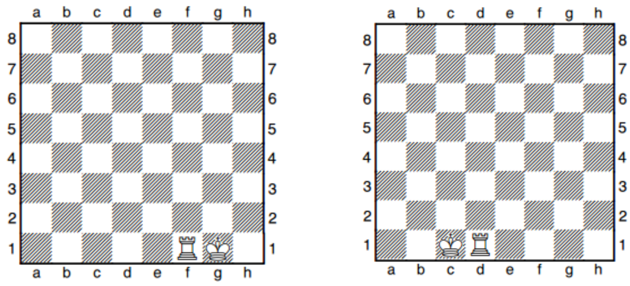
Figura 14 – Roque pequeno




Fonte: o autor.

O roque feito com a torre do lado da dama, chama-se roque grande (figura 15).

Figura 15 – Roque grande



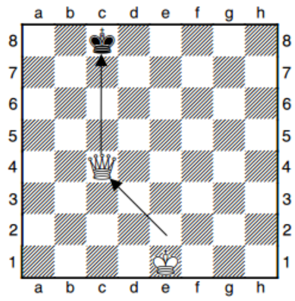

Fonte: o autor.

**2.5 - FINALIZAÇÃO DE UMA PARTIDA**

O objetivo do jogo é dá o xeque-mate ao rei do oponente, ou seja, atacar o rei do adversário de forma que ele não tenha casa de fuga e nem disponha de alguma peça pra se colocar na frente do ataque, quando o rei está sob ataque diz-se que está em xeque, e quando o ataque não pode ser evitado denomina-se xeque mate e é o fim da partida, outro modo de se obter a vitória acontece quando o jogador adversário desiste durante a partida, julgando está numa posição completamente perdida.

**2.5.1 - XEQUE:** Quando o rei está ameaçado por qualquer peça adversária, diz-se que ele está em xeque. Na figura 16, a dama branca estava em e2 e foi jogada pela casa c4, deixando o rei adversário em xeque. Nesta situação, deve-se dizer ao adversário a palavra xeque. Para o jogador escapar do xeque basta movimentar o rei para uma casa que não esteja sendo atacada pela dama branca (b8, b7, d8 ou d7)

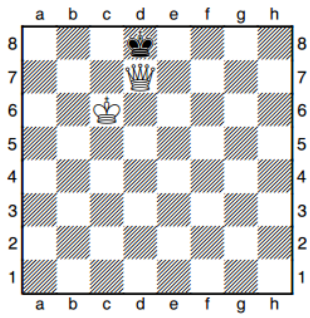
Figura 16 – Xeque



Fonte: o autor.

**2.5.2 - XEQUE-MATE:** O xeque-mate é o término de uma partida. Se o rei estiver em xeque e não existirem casas para o rei ocupar que não estejam ameaçadas, então o rei está em xeque-mate. A figura 17 demonstra como é uma posição de xeque-mate. As brancas jogaram a dama na casa d7 e deram xeque-mate. A dama branca ataca o rei e todas as casas de fuga (c8, c7, e8 e e7) e não pode ser capturada, pois conta com a defesa do rei branco.

Figura 17 – Xeque-mate

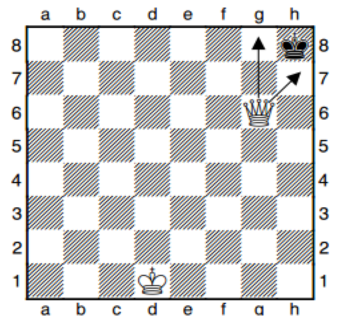


Fonte: Silva, o autor.

Os empates, por sua vez, podem acontecer por insuficiência de material, se ambos os jogadores concordarem no empate, também quando se repete por três vezes o mesmo lance na partida ou por afogamento que é quando o rei não está sendo atacado, mas não possui casas de fuga ou outra peça para mover.

**2.5.3 - REI AFOGADO:** Quando o rei não está em xeque e as casas que o cercam estão ameaçadas, a partida está empatada, pois o rei está "afogado". Na figura 18, o lance corresponde às pretas. O rei não está em xeque e as casas g8, g7 e h7 estão ameaçadas pela dama branca. A partida está empatada.

Figura 18 – Rei afogado




Fonte: o autor.

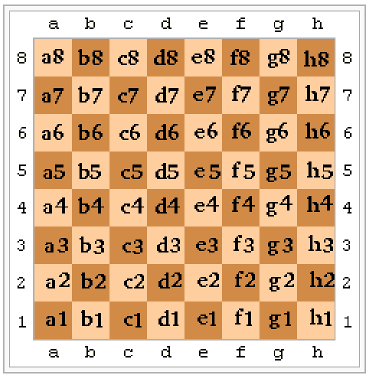
As regras que vigoram atualmente foram aprovadas no 77º congresso da Federação Internacional de Xadrez (FIDE) realizado na Alemanha em 2008 e nela contém todos os pormenores do jogo desde o controle do tempo até a acomodação dos jogadores (ALEMANHA, 2008).

## 2.6 - NOTAÇÃO ALGÉBRICA

A anotação de partidas de Xadrez era uma dificuldade para os escritores de Xadrez, antes de haver uma notação. Um dos métodos, inventados por Danican Philidor, numerava as casas do tabuleiro de 1 a 64, mas esta notação era muito confusa. Philipp Stamma melhorou este método, combinando letras e números, com as colunas recebendo as letras *A* a *H*. Este método foi adotado por vários autores, inclusive La Bourdonnais.

A notação começa com a identificação de cada casa do tabuleiro de Xadrez com uma coordenada única. Primeiro, as colunas (isto é, as fileiras em paralelo à direção que os jogadores estão olhando) são denominadas com as letras ***a*** a ***h*** em minúsculas, da esquerda do jogador com as "brancas". Então a coluna *"**a**"* fica à esquerda do jogador de brancas e, respectivamente, na direita do jogador de pretas. Então as linhas (fileiras horizontais entre os jogadores) são numeradas de 1 a 8, começando com a primeira linha na visão das peças brancas. Portanto, na visão das peças pretas a primeira fileira é a linha 8. Cada casa do tabuleiro tem então a sua identificação única: a letra da sua coluna junto do número da linha, como mostra a figura 19.

Figura 19 – Nomenclatura das casas




Fonte: o autor

Cada tipo de peça, com exceção ao peão, é identificada por uma letra maiúscula, geralmente a primeira letra do nome daquela peça em qualquer linguagem que é falada pelo jogador que estiver anotando. Em português, os jogadores usam **R** para o rei, **D** para dama, **T** para a torre, **B** para o bispo, e **C** para o cavalo, como mostrado anteriormente na figura 4.

Os jogadores podem usar letras diferentes em outras línguas. Por exemplo, jogadores de língua inglesa usam o **K** para o rei (de *king*) e os franceses utilizam o **F** para o bispo (de *fou*). Os peões não são indicados por letras, mas sim pela ausência de uma, já que os peões podem avançar apenas para a frente.

### 2.6.1 - NOTAÇÃO ALGÉBRICA PARA AS JOGADAS

Cada jogada é indicada pela letra da peça, mais a coordenada da casa de destino. Por exemplo Be5 (bispo se move para e5), Cf3 (cavalo se move para f3), c5 (peão se move para c5).

### 2.6.2 - NOTAÇÃO ALGÉBRICA PARA AS JOGADAS COM CAPTURA

Quando uma peça faz uma captura, um **x** é colocado entre a inicial e a casa de destino. Por exemplo, ***Bxe5** (bispo captura a peça em **e5**).* Quando um peão faz uma captura, a coluna da qual o peão partiu é usada no lugar da inicial da peça. Por exemplo, ***exd5** (peão na coluna **e** captura a peça em **d5**).* "Dois pontos" (**:**) às vezes é usada, tanto no lugar do *x* *(**B:e5**)* quanto após a jogada *(**Be5:**)*. Capturas ***En passant*** são especificadas pela casa de partida do peão que capturou, o **x**, e a casa para qual ele se move (não a localização do peão capturado), originalmente seguido pela notação "e.p". Não é obrigatório que se especifique que a captura foi en *passant*. Com a notação abreviada, a indicação de captura "x" é sempre requisitada.

### 2.6.3 – EXEMPLO DE NOTAÇÕES ALGÉBRICAS DOS MOVIMENTOS DAS PEÇAS

Em uma das experiências realizadas, na primeira jogada o condutor das peças brancas moveu seu cavalo que fica ao lado do rei para a frente do bispo que lhe fica contíguo. Neste caso, primeiramente deve-se escrever a inicial do cavalo e depois a coordenada da casa para a qual ele foi movido (coluna f, terceira linha = f3): **Cf3** (ver figura 20).

Figura 20, Cf3 - movimento o cavalo branco da casa g1para a casa f3.

Fonte: o autor.

As jogadas de peões não são indicadas com a inicial "P". Para anotar uma jogada de peão, basta escrever a coordenada da casa para a qual um peão foi movido. Voltando ao exemplo, suponha que o jogador de Pretas tenha lançado o peão da Dama duas casas à frente. A jogada seria anotada assim: **d5** (ver figura 21).

Figura 21, d5 - movimento do peão preto da casa d7 para a casa d5.

Fonte: o autor.

Em seguida, o jogador das brancas resolveu mover seu peão do rei duas casas para a frente. Como já dito, não há necessidade de escrever a inicial "P". Resta, portanto, apenas a coordenada: **e4** (ver figura 22).

Figura 22, **e4** - Movimento do peão branco da casa e2 para a casa e4.

Fonte: o autor.

As capturas de peão por peão são representadas apenas menção às letras das colunas onde eles estão, começando-se pela coluna do peão que captura e terminando-se na casa onde se encontra o capturado. No movimento, caso as pretas resolvam capturar o peão das brancas, assim será anotada a jogada: **dxe4** (ver figura 23).

Figura 23, **dxe4** - captura do peão branco e4 pelo peão preto d5.

Fonte: o autor.

Os xeques são indicados com o sinal + colocado ao final da anotação da jogada. No movimento, o bispo do rei branco dará xeque ao rei preto. A jogada será anotada assim: **Bb5+** (ver figura 24).

Figura 24, **Bb5+** - xeque do bispo branco b5 no rei preto e8.

Fonte: o autor.

O Cavalo preto bloqueia o xeque: **Cd7** (ver figura 25).

Figura 25, **Cd7** – defesa do cavalo preto d7 ao rei preto e8.


Fonte: o autor.

As capturas de peças por peças são indicadas com o sinal **X**. No exemplo, se o Bispo toma o Cavalo e dá novo xeque, assim fica a jogada: **Bxd7+** (ver figura 26).

Figura 26, **Bxd7+** – captura do cavalo preto d7 pelo bispo branco b5.


Fonte: o autor.

O Bispo preto recaptura o Bispo branco: **Bxd7** (ver figura 27).

Figura 27, **Bxd7** – Recaptura do bispo branco d7 pelo bispo preto c8.

Fonte: o autor.

Vamos a outro exemplo de anotação de jogada de peão, o peão branco move-se duas casas à frente: **d4** (ver figura 28).

Figura 28, **d4** – Peão branco d2 move-se para d4.

Fonte: o autor.

As capturas *en passant* são indicadas com a sigla **e.p.** ao final da anotação da jogada. No próximo movimento, o peão preto da quarta fileira captura o peão branco *en passant*: **exd3 e.p.** (ver figura 29).

Figura 29, **exd3 e.p** – Captura do peão branco d4 em passant pelo peão preto e4.

Fonte: o autor.

O roque pequeno é indicado com a convenção **O-O** e o grande com **O-O-O**. No exemplo, as Brancas fazem roque: O-O (ver figura 30).

Figura 30, **O-O** – roque pequeno entre o Rei e1 e a Torre h1.

Fonte: o autor.

Desta forma, para se anotar um lance, o jogador terá que escrever a inicial da peça movida com letra maiúscula juntamente com a casa para onde a peça se moveu com letra minúscula. E quando houver um lance com captura, uma letra “x” deverá ser adicionado logo após a inicial da peça movida como registra-se na Tabela 3, caracterizando uma disposição dos primeiros lances de uma partida.

### 2.6.4 - NOTAÇÕES CURTAS COMUNS

As seguintes notações curtas são frequentemente usadas para comentar jogadas:

- ! uma boa jogada
- !! uma jogada excelente
- ? um erro
- ?? um erro crasso
- !? uma jogada interessante que talvez não seja a melhor
- ?! uma jogada dúbia, mas não facilmente refutada
- □ jogada forçada
- X captura
- + xeque
- ++ xeque mate
- O-O roque pequeno
- O-O-O roque grande
- Abd abandono de partida
- e.p. em passant

- 1 x 0 vitória das brancas
- 0 x 1 vitória das pretas
- = empate

# 3 - CAPITULO II
## 3.1 - CONCEITOS INICIAIS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, será apresentada a base teórica que fundamenta o trabalho proposto, veremos os conceitos inicias dos conteúdos de análise combinatória, exemplos e aplicações, voltados para alunos dos ensinos fundamental e médio e tem como objetivo diminuir as dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino e aprendizagem deste conteúdo matemático. Espera-se que sirva de auxílio para que professores e alunos possam trabalhar as atividades que serão propostas na sequência didática, apresentada no capítulo III deste trabalho com a utilização do jogo de xadrez.

A análise combinatória é a área da matemática responsável pela análise das possibilidades e das combinações de um evento pois, estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem e é um dos mais importantes tópicos da matemática discreta, devido ao seu vasto campo de aplicabilidade. Além do mais, permite a criação de situações-problema que podem ser discutidas através da construção e discussão de ideias, favorecendo o desenvolvimento da capacidade crítica-argumentativa em diversos níveis de ensino, desde o fundamental, Médio o Superior.

À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos, quando pensamos num grupo com quantidade pequena de elementos. Porém, a necessidade de tais métodos faz-se necessária quando trata-se de conjuntos com uma quantidade grande de elementos.

Neste contexto, a Análise Combinatória, como a parte da Matemática que permite a escolha e a contagem dos elementos de um conjunto sem necessariamente ter que listá-los (PESSOA e BORBA, 2009), é um dos conteúdos matemáticos que contribuem para o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como: analisar, investigar, refletir, levantar hipóteses, testar, argumentar, generalizar e validar. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, apud Almeida, 2010, p. 18): “O raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral”.

Tradicionalmente, este assunto é tratado pelos professores de maneira abstrata. É o que nos diz Mendonça (2011, p.19) quando em relação ao ensino desse conteúdo afirma que “(...) os docentes dispensam a abordagem do tema e optam por apresentar algumas situações a partir da apresentação de fórmulas, sem a construção de um conhecimento expressivo por parte do aluno”. Dessa forma, os 16 conceitos, propriedades e algoritmos são mostrados pelo professor como um processo automático seguido da aplicação de exercícios-padrão.

Neste sentido, é preciso entender que o processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória na esfera do Ensino Médio não é algo simples e requer do professor atenção, reflexão e cuidado ao trabalhar o referido conteúdo, uma vez que sua prática pedagógica deve priorizar a compreensão dos conceitos combinatórios e dos procedimentos adotados, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio combinatório na resolução de problemas, o entendimento das dificuldades apresentadas pelos estudantes e a busca por soluções que possam ajudá-los a superar essas dificuldades.

## 3.2 – FATORIAL

Às vezes, contar não é uma tarefa muito fácil. Certas contagens, se feitas um a um, além de exaustivas mostram-se inviáveis. Para resolver problemas de contagem em que interessa-nos apenas quantos elementos são, e não necessariamente quais são esses elementos, é que foram criadas as técnicas de contagem: princípio fundamental da contagem, permutações (simples e com repetição), arranjo e combinação. Ao campo da matemática que se ocupa das técnicas de contagem chamamos análise combinatória.

Antes, porém, do estudo dessas técnicas de contagem, convém conhecer e saber trabalhar com uma ferramenta matemática de relevante importância: o fatorial.

Nos processos de contagem, quando se utiliza o princípio fundamental da contagem, é comum deparar-se com o cálculo do produto de números naturais consecutivos. Esse tipo de operação está relacionado ao conceito de fatorial.

### 3.2.1 - DEFINIÇÃO DE FATORIAL

Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o fatorial de n (ou n fatorial), cuja representação é n!, por meio da relação:

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (produto dos n primeiros naturais positivos)

Logo, se n é um número natural positivo, vale a seguinte propriedade:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Portanto, o fatorial de um número natural positivo é igual ao produto dele pelo fatorial de seu antecessor.

Essa propriedade justifica, de certa forma, as definições:

$$1! = 1 \ e \ 0! = 1$$

De fato, pois, fazendo $n = 1$ em $n! = n \cdot (n - 1)!$, temos:

$$1! = 1 \cdot (1 - 1)!$$

Ou seja:

$$1! = 1 \cdot 0! \Leftrightarrow$$
$$0! = 1$$

**EXEMPLO 1:**

Determinar o produto $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ em forma de fatorial.

**SOLUÇÃO:**

Note que o produto:

$$P = 20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

Pode ser escrito da seguinte forma:

$$P = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 8) ... (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1)$$

Colocando-se o 2 em evidência, temos:

P=$\left(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{10\ vezes}\right) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

Daí, segue que:

$$P = 2^{10} \cdot 10!$$

**EXEMPLO II:**

Um supermercado possui 6 funcionários trabalhando no caixa ao mesmo tempo, antes de iniciar o intervalo. O intervalo dos funcionários é de 20 minutos para cada um deles, e eles tiram o intervalo um por vez, de modo que 5 caixas sempre fiquem funcionando. Quem determina a ordem desse intervalo é o gerente. Determinar o número de maneiras distintas que o gerente pode definir o intervalo desses funcionários.

**SOLUÇÃO:**

Sabe-se que será escolhido 1 funcionário para ir primeiro dentre os 6 possíveis. Quando esse funcionário volta, será escolhido 1 entre os 5 funcionários que ainda não tiraram o intervalo e assim sucessivamente, até que o último funcionário também tire o intervalo. Então, o número de opções distintas que o gerente pode escolher para que os funcionários tirem os seus intervalos é:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

### 3.3 - O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) consta de duas partes, Parte I e Parte II, ligeiramente diferentes. Antes de enunciar o PFC, precisaremos de dois lemas essenciais para este propósito. Mas antes, vejamos alguns exemplos que nos ajudarão a entender o PFC.

**EXEMPLO 1:** Seja A um conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 2, 4 e 6. Então: A = {24, 26, 42, 46, 62, 64} e #A = 6, ou seja, o conjunto A tem 6elementos.

**EXEMPLO 2:** Seja B um conjunto formado pelos anagramas da palavra ARI. Então, B = {ARI, RAI, IAR, AIR, IRA, RIA} e #B = 6, ou seja, o conjunto B tem 6elementos.

**EXEMPLO 3:** Seja C um conjunto de números de três dígitos, todos distintos, formados a partir dos algarismos:1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Então, C = {123, 124, 125, ..., 875, 876}

Pode-se perceber que é bem trabalhoso escrever todos os elementos desse conjunto e depois numerá-los, corre-se o risco de esquecer algum elemento ou repeti-los. Por isso, veremos a seguir técnicas que nos permitirão chegar ao resultado exato, e poderemos concluir que o conjunto C tem 336elementos.

**LEMA 1.** Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. Pode-se formar $m \cdot n$ pares ordenados $(a_i, b_j)$, onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

**DEMONSTRAÇÃO:** Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Daí, tem-se:

$$m\ linhas \quad \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \cdots, (a_1, b_n) \rightarrow n\ pares \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_2, b_n) \rightarrow n\ pares \\ \quad \vdots \quad , \quad \vdots \quad , \quad \cdots , \quad \quad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \cdots, (a_m, b_n) \rightarrow n\ pares \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então:

$$\underbrace{n + n + \cdots + n}_{m\ vezes} = m \,.\, n$$

Em notação matemática, considera-se que um determinado evento possa ser realizado em duas etapas, digamos, de $m$ e $n$ maneiras distintas. Então o total de possibilidades será calculado multiplicando $m$ por $n$, $(m \cdot n)$.

A seguir mostraremos um exemplo para que possamos entender no que consiste o lema 1, demonstrado acima.

**EXEMPLO 1:** Paulo irá participar da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale compras no valor de R$1000,00. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisas de cores distintas, quatro calças e dois pares de sapatos de cores distintas do tipo social. De quantas maneiras diferente Paulo poderá combinar todo o vestuário que está no kit de roupa?

**SOLUÇÃO:** Pelo lema anterior, temos que o total de maneiras possíveis é dado por: (total de camisas)× (total de calças) × (total de pares de sapatos) = total de combinações possíveis. 6 × 4 × 2 = 48

Portanto, é possível fazer 48 combinações diferentes de roupas utilizando o kit oferecido pela loja.

**LEMA 2.** O número de pares ordenados $(a_i, a_j)$ tais que $a_i, a_j \in A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é $m \cdot (m-1)$.

**DEMONSTRAÇÃO:** Fixando-se o primeiro elemento do par, e variando-se o segundo. Tem-se que:

$$m\ linhas \quad \begin{cases} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \cdots, (a_1, a_m) \to (m-1)\ pares \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \cdots, (a_2, a_m) \to (m-1)\ pares \\ \quad \vdots \quad , \quad \vdots \quad , \quad \cdots, \quad \vdots \\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), \cdots, (a_m, a_{m-1}) \to (m-1)\ pares \end{cases}$$

Logo, o número de pares ordenados será:

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \cdots + (m-1)}_{m\ vezes} = m\,.\,(m-1)$$

**EXEMPLO 2:** Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

**SOLUÇÃO:** Cada número pode ser considerado um par de dígitos *(a, b)* onde $a \in$ {1, 2, 3, · ·· , 8}, $b \in$ {1, 2, 3, · ·· , 8} e $a \neq b$. Assim, pelo lema anterior, o resultado procurado será 8 · 7 = 56.

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM – PARTE 1.**

Sejam $A_1, \cdots, Ar$ conjuntos não vazios e finitos. Seja $\#A_i = n_i$ a cardinalidade do conjunto $A_i$, para *i = 1, · ·· , r*.

O conjunto

$$A = \{(a_1, \cdots, a_r): a_1 \in A_i\}$$

tem cardinalidade $\#A = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$.

**EXEMPLO 3:** Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

**SOLUÇÃO:** Indiquemos por K o resultado cara e C o resultado coroa. Queremos o número de triplas ordenadas (a, b, c) onde a ∈ {K,C} , b ∈ {K,C} e c ∈ {K,C}, logo, o resultado procurado é:

$$2.2.2 = 8$$

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM – PARTE 2.**

Seja A um conjunto não-vazio e finito, com $n$ elementos $(n \geq 2)$. Então, o conjunto:

$$X = \{(a_1, \cdots, a_r): a_i \in A\ e\ a_i \neq\ a_j\ se\ i \neq j, onde\ 1 \leq i, j \leq r\}$$

tem cardinalidade $\#X = n.(n - 1).(n - 2). \cdot \cdot\cdot (n - (r - 1))$.

**EXEMPLO 4:** De quantas maneiras três pessoas podem ficar em fila indiana?

**SOLUÇÃO:** Cada modo corresponde a uma tripla ordenada de pessoas. Desta forma, o resultado procurado é: 3.2.1 = 6.

**EXEMPLO 5:** Um shopping center possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do shopping center, pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

**SOLUÇÃO:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), a pessoa terá 5.4.3 = 60 maneiras de atingir o segundo pavimento do shopping.

## 3.4 – PERMUTAÇÕES

Teoricamente, todo problema de análise combinatória pode ser resolvido usando-se apenas o princípio fundamental da contagem. Entretanto, o conhecimento de algumas estratégias que surgirão com relativa frequência será providencial, facilitando as resoluções de problemas mais sofisticados.

### 3.4.1 - PERMUTAÇÃO SIMPES

A palavra “permutação” pode ser entendida como sinônimo de “ordenação”, enquanto o adjetivo “simples” significa que, em cada agrupamento, não há elementos repetidos.

De maneira geral, dado um conjunto A finito com n elementos, pode-se formar $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$ agrupamentos diferentes, os quais ordenados, diferem pela ordem e são chamados de permutação simples de n elementos. O número total de permutações (agrupamentos) é dado por:

$$P_n = n!\,(l\hat{e} - se\text{: } permutação\ de\ n)$$

É importante notar que, permutar n objetos, na prática, significa coloca-los em fila e fazer todas as trocas possíveis nas posições, significa obter todas as filas possíveis.

**EXEMPLO**

Quantas filas diferentes podemos formar com 8 pessoas, se três delas, Raquel, Júlia e Tomás não podem ficar juntas (as três)?

**SOLUÇÃO:**

Temos um total de $P_8 = 8!$ Filas, os três ficando juntos ou não. Agora, supondo o grupo Raquel, Júlia e Tomás (RJT) uma só pessoa, o número de maneiras delas ficarem juntos é $P_3 = 3!$, e o número de modos de acomodar os seis elementos (o grupo RJT e as outras 5 pessoas) na fila é $P_6 = 6!$. Pelo princípio fundamental da contagem, temos $3! \cdot 6!$ filas, em que os três ficam juntos. Daí, temos $8! - 3! \cdot 6! = 40320 - 4320 = 36000$ filas, em que os três não ficam juntos.

### 3.4.2 - PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Permutação com repetição consiste em todos os reordenamentos que podemos fazer com um conjunto de n elementos, sendo que há repetição entre eles. Podemos perceber a presença da permutação com repetição em problemas envolvendo senhas, algarismos numéricos, anagramas de palavras que possuem letras repetidas, entre outros."

Para calcular a quantidade de permutações com repetição de um conjunto com n elementos, calculamos a permutação de n e dividimos pelo produto do fatorial de quantas vezes cada um dos elementos se repete.

Na fórmula para determinar o número de permutações com repetição, dividimos o fatorial do número total n de elementos, pelo produto entre os fatoriais dos elementos que se repetem.

Logo, temos:

$$P_n^{x,y\ldots z} = \frac{n!}{x! \cdot y! \cdot \ldots \cdot z!}$$

Onde:

$P_n^{x,y\ldots z}$ = Quantidade de permutações

$n$ = quantidade de elementos

$x, y, \ldots, z$ = elementos repetidos

**EXEMPLO**

O banco de Kárita pede para que ela crie uma senha formada só por números, com 6 algarismos. Para construir essa senha de forma que ela não esqueça, Kárita usará somente os algarismos existentes na data de nascimento do seu filho, sendo que ele nasceu no dia 24/08/20. Nessas condições, determine o número de senhas distintas que ela pode formar usando os 6 algarismos contidos na data de nascimento do seu filho.

**SOLUÇÃO:**

Para calcular o número de senhas possíveis, calcularemos a permutação com repetição, pois há algarismos que se repetem. Os algarismos são {2, 4, 0, 8, 0, 2}, então temos que $n = 6$. Além disso, o algarismo 0 se repete 2 vezes, e o algarismo 2 se repete 2 vezes, então, substituindo na fórmula da permutação com repetição, temos que:"

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} \Rightarrow$$

$$P_6^{2,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$P_6^{2,2} = 180$$

**3.5 - ARRANJO SIMPLES**

Seja M um conjunto com n elementos distintos, digamos M = {a1, a2, · ··, an} . Chamamos de arranjo dos n elementos tomados p a p, $(1 \leq p \leq n)$ a qualquer sequência de p elementos formada com elementos de M todos distintos, onde a ordem desses elementos altera o agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem ( parte II ), existem *n* possibilidades de escolha para o primeiro elemento do agrupamento, *(n-1)* possíveis escolhas para o segundo elemento, *(n-2)* para o terceiro elemento e assim, *n-(p-1)* possíveis escolhas para o *p-ésimo* elemento do agrupamento.

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p\ fatores}, \qquad 0 < p \leq n$$

Desenvolvendo a expressão do segundo membro e multiplicando-o por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Então:

$$A_{n,p} \; ou \; A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**OBSERVAÇÕES:**

- Em particular, se p = 1, é fácil perceber que An,1 = n.

- Nota-se ainda que, de acordo com a definição de arranjo, tem-se necessariamente que $1 \leq p \leq n$.

**EXEMPLO 1:**

Na busca de incentivar os estudantes da escola a participarem do evento de sobre jogo de xadrez, um colégio decidiu sortear 3 prêmios para 10 estudantes que apresentarem um tabuleiro de xadrez no dia do evento, sendo os prêmios: uma bicicleta, um smartphone e um tablet. Determine o número de maneiras distintas que podemos ter o resultado desse sorteio.

**SOLUÇÃO:**

Como a ordem em que os prêmios são distribuídos altera a premiação, trata-se de um problema de arranjo simples. Nesse caso, queremos calcular um arranjo de 10 elementos, tomados de 3 em 3.

Daí, temos:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow$$

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} \Rightarrow$$

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} \Rightarrow$$

$$A_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} \Rightarrow$$

$$A_{10}^3 = 720$$

Logo, temos 720 maneiras distintas de distribuirmos esses prêmios.

**EXEMPLO 2:**

Seis amigos decidiram realizar uma disputa de xadrez para saber quem era o melhor enxadrista da turma. Sabendo que na disputa teremos primeiro, segundo e terceiro lugares, quantos são os pódios possíveis?

**SOLUÇÃO:**

Os pódios possíveis são calculados pelo arranjo de 6 elementos, tomados de 3 em 3, pois a ordem dos enxadristas altera o pódio.

Logo:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow$$

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} \Rightarrow$$

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} \Rightarrow$$

$$A_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \Rightarrow$$

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} \Rightarrow$$

$$A_6^3 = 120$$

Portanto, temos 120 maneiras de compor o pódio.

## 3.6 – COMBINAÇÕES SIMPLES

Na combinação simples, a ordem dos elementos não é relevante. São arranjos que se diferenciam apenas pela natureza de seus elementos. Sendo um conjunto M, formado por n elementos e uma combinação de *p* elementos de M, pode-se fazer as permutações desses elementos, e encontrar *p!* sequências, ou seja, os arranjos dos *n* elementos de M tomados *p* a *p*, denotamos por combinação dos *n* elementos tomados *p* a *p*, com $n \geq p$, representado por $C_n^p$ ou $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$ o número de subconjuntos de M com p elementos.

Portanto:

$$p! \cdot C_n^p = A_n^p$$

Daí, segue que:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Portanto:

$$C_n^p = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Aqui, vale ressaltar a diferença entre uma combinação (que é um conjunto) e um arranjo (que é uma sequência). Notemos que, numa combinação, não importa a ordem dos elementos, enquanto num arranjo, a ordem que os elementos se apresentam diferenciam a sequência.

**EXEMPLO 1:**

Em uma competição de xadrez, há 10 participantes. Cada jogador joga contra todos os outros uma única vez. Qual o total de partidas jogadas nesta competição?

**SOLUÇÃO:**

Notemos que a ordem com que os participantes são posicionados não altera a partida, logo trata-se de um problema de combinação simples.

Temos 10 participantes que serão agrupados 2 a 2. Logo:

$$C_{10}^{2}$$

Fazendo o desenvolvimento da combinação, temos:

$$\frac{10!}{2! \cdot (10-2)!}$$

Daí, temos:

$$\frac{10!}{2! \cdot 8!} \Rightarrow$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} \Rightarrow$$

$$\frac{90}{2} = 45$$

Portanto, teremos um total de 45 partidas.

**EXEMPLO 2:**

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos.

Determine a expressão que representa o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição.

**SOLUÇÃO:**

Como a ordem dos jogadores não altera a dupla, trata-se de um problema de combinação simples.

Calcularemos todas as duplas possíveis e depois vamos subtrair todas as duplas em que ambos são canhotos.

As duplas possíveis são uma combinação de 10 elementos tomados de 2 em 2, e as duplas em que ambos são canhotos são uma combinação de 4 elementos tomados de 2 em 2, logo, temos que:

$$C_{10}^{2} - C_{4}^{2} \Rightarrow$$

$$\frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} - \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \Rightarrow$$

Logo, a expressão que calcula o número de duplas possíveis é dada por:

$$\frac{10!}{2! \cdot 8!} - \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

# 4 - CAPÍTULO III

## 4.1- O JOGO DE XADREZ COMO ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Para a realização deste trabalho, da utilização do jogo de xadrez no ensino da análise combinatória, foi desenvolvido um projeto de pesquisa e aplicações sobre tal jogo em problemas referentes aos tópicos da análise combinatória em uma escola, situada no município de Abaetetuba-PA.

A pesquisa foi realizada com 10 alunos (por se tratar de uma experiência escolar, não foram envolvidos todos os alunos da escola) sendo eles de maior afinidade com a prática do jogo de xadrez, de ambos os sexo, entre 13 a 15 anos do ensino fundamental maior e ensino médio e com a participação dos professores de Matemática. Foram oferecidas oficinas de iniciação ao xadrez, onde os alunos foram colocados em duplas e cada dupla possuía um tabuleiro e um jogo de peças. Ao final de cada trabalho de pesquisa aplicou-se um questionário para os alunos com questões relacionadas à aprendizagem em análise combinatória e a utilização do jogo de xadrez, e outro com os professores, a fim de analisar e avaliar os métodos pedagógicos utilizados por eles.

> “Em todo o mundo existem projetos de xadrez embasados em estudos que comprovam a melhora no rendimento escolar, concentração e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Em países como a França e Holanda o xadrez já há muito tempo faz parte do currículo escolar como atividade extracurricular. Após sua implantação, percebeu-se um elevado nível de alunos com melhora no coeficiente escolar e uma queda de atendimento a alunos com dificuldades de concentração" (Pimenta, 2012).

Entretanto observa-se que essa ferramenta é pouco explorada em outras disciplinas, apesar da interdisciplinaridade ser defendida pelos PCN’s.

A interdisciplinaridade supõe um eixo integrador, que pode ser o objeto de conhecimento, um projeto de investigação, um plano de intervenção. Nesse sentido, ela deve partir da necessidade sentida pelas escolas, professores e alunos de explicar, compreender, intervir, mudar, prever, algo que desafia uma disciplina isolada e atrai a atenção de mais de um olhar, talvez vários ( BRASIL, 2002, pp. 88-89).

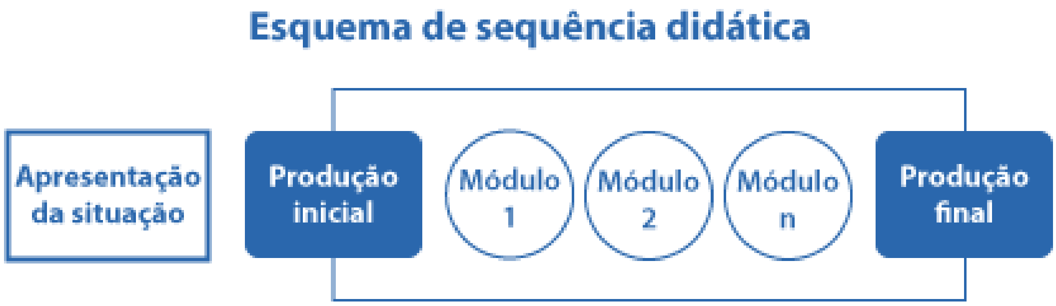
O jogo de xadrez possui grande contribuição no ensino da análise combinatória, pois no decorrer da partida o jogador deve ser capaz de calcular com exatidão a manobra que realizará com suas peças, para que depois possa escolher qual o caminho mais rápido e eficaz a ser seguido, para obter maior sucesso. Explorou-se melhor esta contribuição com a proposta da sequência didática além dos resultados obtidos durante o desenvolvimento do projeto.

## 4.2 – PROPOSTAS PARA A UTILIZAÇÃO DO JOGO DE XADREZ NO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste tópico será proposta uma sequência didática, composta por atividades propostas aos alunos, para as turmas de 9º ano do ensino fundamental e que também pode ser aplicada para as turmas do segundo ano do ensino médio, visto que o assunto “Análise Combinatória” é visto de maneira mais aprofundada nesta série, para assimilar os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem, fatorial, Arranjos, Permutação e Combinação simples.

A sequência didática, segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p.82) “é um conjunto de atividades escolares organizadas de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito.” Tais atividades são planejadas e combinadas de forma que atendam aos objetivos educacionais, onde o início e o fim são conhecidos pelos professores e alunos, desta maneira o processo de aprendizagem se torna mais eficiente. No geral a sequência didática possibilitará a reflexão sobre a prática docente por meio da observação do processo de ensino-aprendizagem, onde o professor poderá redefinir as suas ações com base no desenvolvimento e relação entre todos os participantes.

Figura 31 – Sequência Didática




FONTE: FELÍCIO, Rosane. Protótipos de ensino e Projetos de letramento, 2019.

A sequência didática leva em consideração a faixa etária, o ano escolar e o nível dos alunos envolvidos, desta forma as atividades são organizadas e planejadas para que os mesmos possam obter uma aprendizagem significativa.

Pretende-se auxiliar o aluno no entendimento dos conceitos iniciais da Análise Combinatória, ao tempo em que correlacionam-se os mesmos com o jogo de xadrez. Esta sequência é composta de quatro etapas:

**ETAPA 1 – PRODUÇÃO INICIAL:**

Na primeira etapa, o aluno é apresentado ao objeto de estudo, tal como os recursos a serem utilizados pelo professor durante aplicação da sequência didática em seguida, propôs-se um problema de análise combinatória e verificou-se as respostas.

O objetivo dessa etapa é desenvolver habilidades de atenção, memória e raciocínio lógico.

**ETAPA 2:**

Aborda-se a resolução do problema utilizando os conceitos iniciais da análise combinatória, de maneira dialogada.

Nessa etapa, que é a produção inicial, ocorre a avaliação diagnóstica que serve para verificação do nível e capacidade dos alunos referente ao assunto abordado, isso permitirá ao professor identificar os pontos em que precisará intervir e adaptar os módulos de acordo com a realidade dos alunos.

Nesta etapa, o objetivo é compreender que a Análise Combinatória está inserida no nosso meio, como um ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente em escolher, agrupar e contar os elementos de um conjunto. Possui aplicação direta no cálculo das probabilidades, sendo instrumento de vital importância para as ciências aplicadas, como a Medicina, a Engenharia e a Estatística entre outras.

**ETAPA 3:**

Nesta etapa, os problemas identificados na avaliação diagnóstica deverão ser trabalhados por meio de pesquisas e atividades além de recursos didáticos e aulas dinâmicas.

Utiliza-se o jogo de xadrez para pôr em prática todos os conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores. Nessa etapa, os alunos deparam-se com várias questões que envolvem a análise combinatória e o xadrez.

**ETAPA 4 – PRODUÇÃO FINAL:**

Na última etapa, que é a produção final, possibilitará ao aluno colocar em prática as noções aprendidas durante as etapas anteriores por meio de um novo problema o que revelará os resultados obtidos por meio da sequência didática.

## 4.3 – APLICAÇÕES:

### 4.3.1 - MÓDULO 1 :APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM:

**OBJETIVO:** Utilizar o Principio multiplicativo para resolver problemas de contagem

### XADREZ E COMBINATÓRIA: APLICAÇÃO DO JOGO DE XADREZ NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

### APLICAÇÃO I

Ao iniciar o jogo de xadrez, o jogador que possui as peças brancas irá fazer a primeira jogada, ele possui as seguintes opções para iniciar o jogo: Qualquer peão da linha 2 ou os cavalos situados em b1 e g1, já que de acordo com as regras do xadrez, os cavalos são as únicas peças que podem saltar outras peças. De quantas maneiras poderá ser feita essa primeira jogada?

Figura 32 – Primeira Jogada

Fonte: Universidade Estadual de Santa Cruz - proposta de uma sequência didática, 2020

***Solução:*** *O Jogo poderá ser iniciado movimentando um dos oito peões ou um dos dois cavalos. Os alunos devem observar que cada peão poderá iniciar a partida de duas maneiras possíveis, ou eles se deslocam uma casa para a frente ou se deslocam duas casas. Sendo assim, a quantidade de maneiras para iniciar o jogo com um dos peões é 16. Os cavalos terão duas opções de saída, cada um deles. Portanto, após observarem o tabuleiro espera-se que o aluno conclua que há 20 maneiras de iniciar uma partida de xadrez. As figuras abaixo mostram essas possibilidades.*

Figura 33 – Iniciando o Jogo

(I)2 jogadas possíveis para cada peão (II)2 jogadas possíveis para cada cavalo

Fonte: Universidade Estadual de Santa Cruz - proposta de uma sequência didática, 2020

**APLICAÇÃO II**

Retornando à questão anterior e combinando as jogadas iniciais entre brancas e pretas, de quantas maneiras é possível fazer a primeira jogada?

***Solução****: Neste caso, a cada jogada das peças brancas também será feita uma jogada com as peças pretas. Já verificou-se na questão anterior que o jogador tem 20 possibilidades de iniciar o jogo. Como os dois eventos (jogar uma peça branca e jogar uma peça preta) são eventos independentes, então pelo Princípio Fundamental da Contagem, teremos um total de* $20 \cdot 20 = 400$ *maneiras.*

Figura 34 - Uma das 400 possíveis jogadas

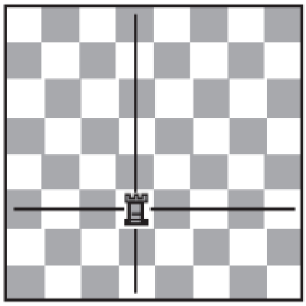
Fonte: Oautor

Na aplicação I, o objetivo inicial foi que o aluno descrevesse cada jogada possível de se fazer, de modo que ele conseguisse observar todas as possibilidades. Já na aplicação II, a ideia principal é/foi fazer com que o aluno desenvolvesse o conceito de eventos independentes e efetuasse cálculos utilizando o princípio fundamental da contagem, pois descrever todas as 400 jogadas possíveis seria muito trabalhoso.

**APLICAÇÃO III**

O Xadrez é jogado por 2 jogadores. Cada jogador tem um total de 16 peças (brancas ou pretas). Nesta questão utilizaremos somente a Torre, uma das peças do xadrez. O movimento da torre é por qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme a figura 35, mostrada abaixo:

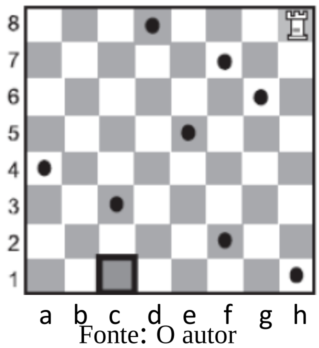
Figura 35 – Possíveis movimentos da torre



Fonte: O autor

Na figura 36, a seguir, o objetivo é chegar na casa c1 sem passar por cima dos pontos pretos. Considerando o movimento da torre, determinar a quantidade mínima de movimentos necessários para alcançar tal objetivo?

Figura 36 – Possíveis movimentos da torre para se chegar a ***C1***




Fonte: O autor

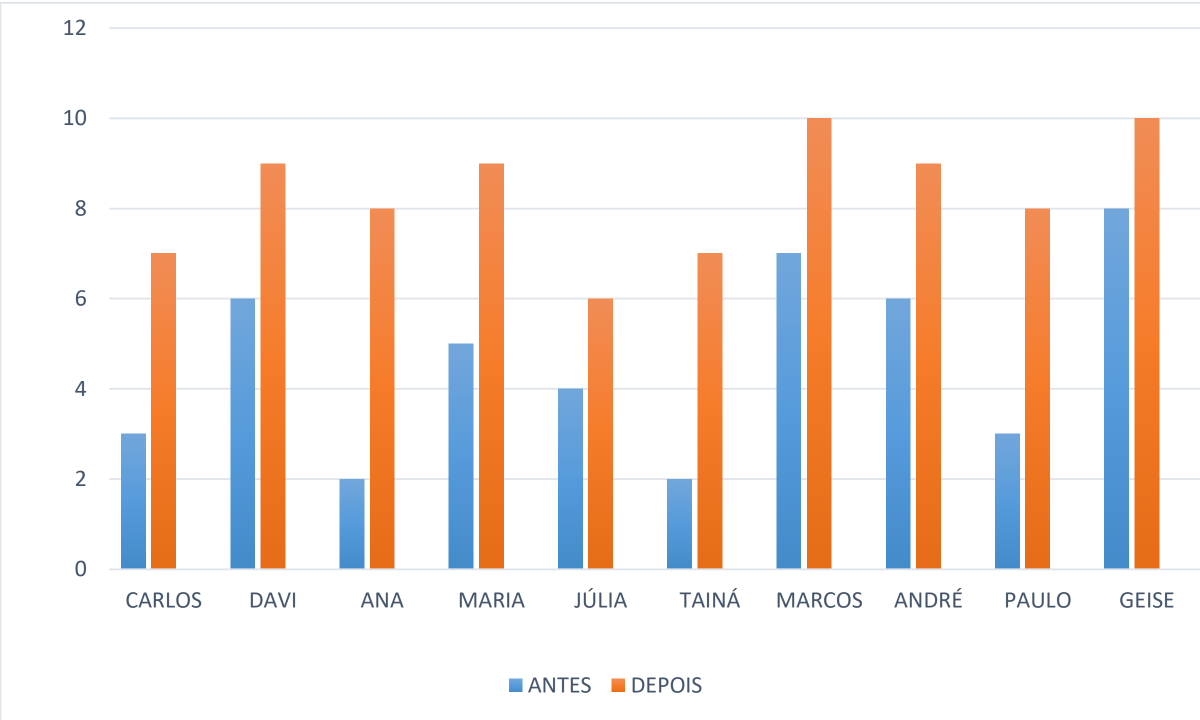
**Solução:** *Os alunos devem visualizar todos os movimentos possíveis para a torre chegar na casa c1. Por exemplo: Inicialmente a torre tem 2 opções para iniciar, ou parte na horizontal ou vertical. O movimento* ***H8→E8, E8→E6, E6→D6, D6→D1 e D1→C1*** *é uma solução possível, porém são efetuados 5 movimentos. Os alunos devem observar que quanto maior for a distância percorrida pela torre no tabuleiro, menos movimento ela vai fazer. Por exemplo:* ***H8→H2, H2→G2, G2→G1 e G1→C1*** *é uma solução com 4 movimentos e é a menor quantidade de movimentos possíveis para a torre partir da casa H8 e chegar na casa C1.*

**OBSERVAÇÕES:** Os alunos devem começar a relacionar conteúdos de análise combinatória com as jogadas do xadrez.

Na primeira aplicação, o objetivo inicial é que o aluno possa descrever cada jogada possível de se fazer, de modo que ele consiga observar todas as possibilidades. Já na segunda aplicação, a ideia principal é fazer com que o aluno desenvolva o conceito de eventos independentes e efetue cálculos utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, pois descrever todas as 400 jogadas possíveis seria muito trabalhoso.

O gráfico 1, mostrado abaixo descreve os resultados obtidos antes e depois das atividades desenvolvidas sobre o princípio fundamental da contagem com a aplicação das atividades envolvendo o jogo de xadrez.

Gráfico 1 – Desempenho dos alunos antes e depois das aplicações envolvendo o jogo de xadrez




Fonte: o autor

### 4.3.2 - MÓDULO II – APLICAÇÕES DE FATORIAL E PERMUTAÇÕES:

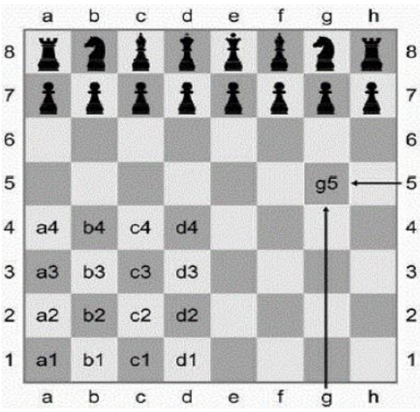
**OBJETIVO:** Utilizar a definição de Fatorial, suas consequências e aplicações para a sua utilização na resolução de problemas de Permutações Simples como um caso particular do Princípio Fundamental da Contagem e o de Permutação com Repetição como um caso combinado de Permutações Simples.

**XADREZ E COMBINATÓRIA: APLICAÇÃO DO JOGO DE XADREZ NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FATORIAL E PERMUTAÇÕES SIMPLES E COM REPETIÇÃO**

**APLICAÇÃO I:**

A figura abaixo mostra a disposição das peças pretas do xadrez, na linha 7 todos os peões e na linha 8 o restante das peças: 2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, 1 rainha e 1 rei.

Figura 37 – Disposição das peças pretas em um tabuleiro




Fonte: o autor

**ITEM A:** Suponha que os peões estejam numerados de 1 a 8, determinar de quantas maneiras distintas pode-se agrupa-los na linha 7

***Solução:*** *Como temos 8 casas disponíveis e 8 peões com numerações distintas, temos um caso de permutação simples. Logo, a solução é dada por:*

$$P_8 = 8! \implies$$

$$P_8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$

*Portanto, temos 40320 possibilidades para agruparmos os 8 peões.*

**ITEM B:** Determinar o total de disposições possíveis para as oito peças restantes de modo a distribuí-las na linha 8 do tabuleiro de acordo com suas posições nessa linha?

***Solução**: Como temos 2 torres ( $T_1, T_2$ ), 2 cavalos $(C_1, C_2)$, 2 bispos $(B_1, B_2)$, 1 rainha (Q) e um rei (R), temos duas possibilidades para agrupar as torres, os cavalos e os peões, 1 possibilidade para o rei e uma para a rainha. Um dos agrupamentos possíveis é dado por $T_1C_2B_1QRB_2C_1T_2$ , logo pelo princípio fundamental da contagem temos que:*

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

*Portanto, temos 8 possibilidades para agrupar essas peças em suas respectivas posições nessa linha.*

**ITEM C:** Determinar o total de disposições possíveis para as oito peças restantes de modo a distribuí-las na linha 8 do tabuleiro em qualquer posição?

***Solução**: Como temos 2 torres (T), 2 cavalos (C), 2 bispos (B), 1 rainha (Q) e um rei (R), podemos imaginar esses problema como o total de anagramas da palavra TTCCBBQR que é a permutação de 8 elementos com repetição. Dessa forma a solução é:*

$$P_8^{2,2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \Longrightarrow$$

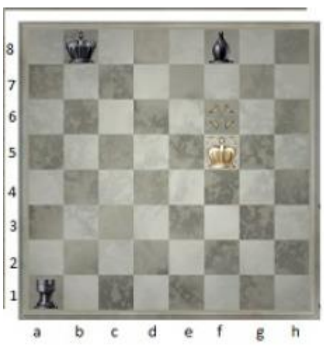
$$P_8^{2,2,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5040$$

*Logo serão 5040 disposições.*

**APLICAÇÃO II:**

Na situação (figura 8) abaixo, a Torre preta está na posição a1. Considerando que o objetivo é capturar o Rei da posição f5, quantos são os caminhos possíveis de a Torre chegar até o Rei, de modo que a cada movimento ela avance em direção ao Rei?

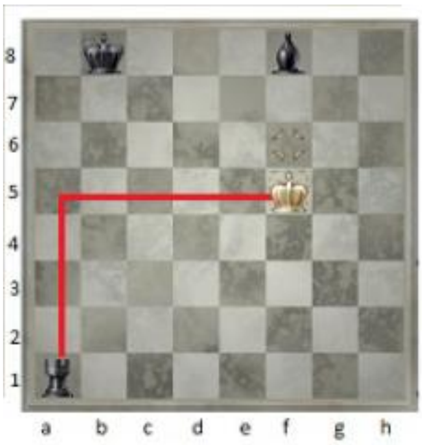
Figura 38 – Torre em a1 e Rei em f5




Fonte: o autor

**Solução**: *O movimento da torre é sempre vertical ou horizontal, o movimento* ***a1→a5, a5→f5*** *é uma solução. Chamaremos de* ***v*** *as casas na vertical e* ***h*** *as casas na horizontal. Nesta solução os alunos devem observar que a torre passou por 4 casas verticais e 5 casas horizontais, pode-se representar pela sequência* ***vvvvhhhhh.***

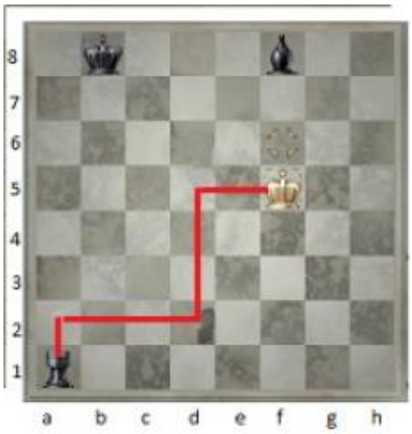
Figura 39 – Um dos movimentos da torre de a1 à f5



Fonte: o autor

*O aluno deve observar que qualquer caminho escolhido formará uma sequência com quatro letras* ***v*** *e 5 letras* ***h****. Por exemplo, o caminho* ***vhhhvvvhh*** *representado pela figura 10, abaixo:*

Figura 40 – Um dos movimentos da torre de a1 à f5



Fonte: o autor

*Com isso, pode-se chegar à solução desejada calculando o total de Anagramas da sequência vvvvhhhhh, que seria calcular uma permutação com repetição, pois para qualquer* *sequência escolhida sempre teremos a repetição dos mesmos movimentos em posições diferentes. Logo tem-se:*

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \Longrightarrow$$

$$P_9^{4,5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 126$$

Outra forma de chegar ao resultado é usando a combinação simples, pois como a torre terá que passar por 9 casas, sendo 4 verticais e 5 horizontais, então será uma combinação de 9 elementos. Escolhem-se 4, uma vez determinado os movimentos verticais, ficarão determinados os horizontais e vice e versa. Desta forma teríamos:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \Longrightarrow$$

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} \Longrightarrow$$

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \Longrightarrow$$

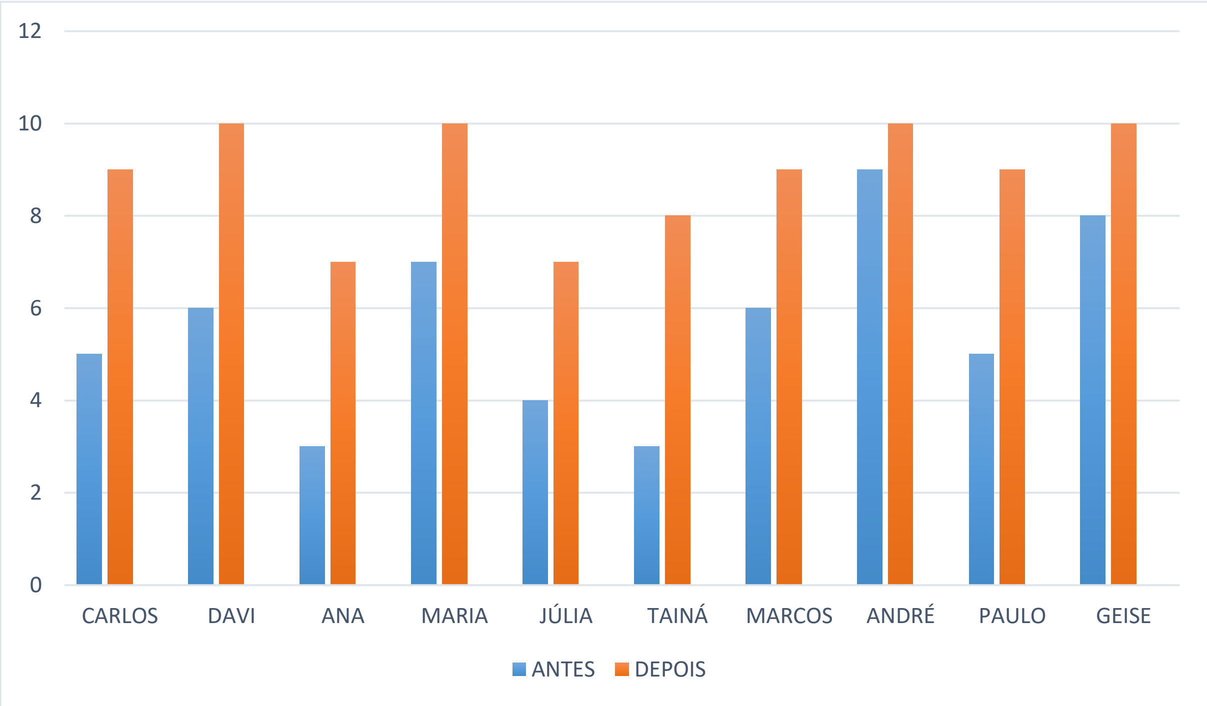
$$C_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 126$$

Chegava-se ao mesmo resultado.

**OBSERVAÇÃO:** No jogo de xadrez, o jogador deve sempre imaginar várias jogadas à frente, fazendo uma previsão de todas as possibilidades. Uma questão como essa leva o jogador de xadrez a se questionar qual o caminho mais vantajoso, de modo a obter sucesso durante a partida.

O desempenho dos alunos, antes e depois das atividades desenvolvidas, com o tópico fatorial e permutações, com o auxílio do jogo de xadrez, está disposto no gráfico abaixo.

Gráfico 2 – Desempenho dos alunos antes e depois das aplicações envolvendo o jogo de xadrez




Fonte: o autor

**4.3.3 - MÓDULO III – APLICAÇÕES DE COMBINAÇÕES E ARRANJOS :**

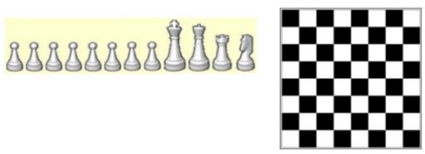
**OBJETIVO:** Utilizar a definição de combinações e arranjos, suas propriedades e aplicações para a sua utilização na resolução de problemas de contagem.

**XADREZ E COMBINATÓRIA: APLICAÇÃO DO JOGO DE XADREZ NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO COMBINAÇÕES E ARRANJOS**

**APLICAÇÃO I:**

Considere um tabuleiro de xadrez como o representado na figura abaixo. Supondo que qualquer peça pode ocupar qualquer lugar, determinar a quantidade de formas diferentes que podem ser dispostos no tabuleiro oito peões brancos (iguais entre si) e, a seguir, as demais peças (uma torre, um cavalo, o rei e a rainha).

Figura 41 – Nome da figura



Fonte: https://como-jogar.blogspot.com.br

**Solução**: *Primeiramente observa-se que o tabuleiro de xadrez é composto por 64 casas. Como os peões são todos iguais então a ordem entre eles não importa, logo trata-se de um problema de combinação de 64 elementos escolhidos 8 a 8* $(C_{64,8})$. *Em seguida deve-se dispor as quatro peças (torre, cavalo, rei e rainha) nas casas restantes (56). Como as peças são diferentes e sua posição no tabuleiro é importante,*

*então trata-se de um problema de arranjo simples de 56 elementos escolhidos 4 a 4* $(A_{56,4})$. *Logo a solução será:* $(C_{64,8}) \, . \, (A_{56,4})$

**APLICAÇÃO II:**

As partidas de xadrez costumam durar bastante tempo, porém é possível que a partir de uma combinação de jogadas ela acaba em poucos movimentos. Nesta atividade os alunos devem descrever todos os movimentos possíveis para que uma partida termina em 2 movimentos das peças pretas.

**Solução:** *Os alunos devem fazer várias observações e tentativas até chegar a solução da quantidade de maneiras que as pretas consigam um xeque-mate com duas jogadas. Os movimentos serão: brancas: peão f3; pretas: peão e5; brancas: peão g4; pretas: rainha h4.*

Figura 42 – Xeque mate em duas jogadas

*(brancas:peão f3)*

*(pretas: peão e5)*

*(brancas: peão g4)*

*(pretas: rainha h4)*

Fonte: Universidade Estadual de Santa Cruz - proposta de uma sequência didática, 2020

**APLICAÇÃO III:**

No xadrez, os peões são consideradas as peças mais frágeis, no entanto existe uma jogada chamada de promoção do peão, caso ele consiga atingir a outra extremidade do tabuleiro, poderá ser substituído por qualquer peça do jogo, com exceção do rei. Normalmente os jogadores escolhem a Rainha por ser a peça mais forte. Nesta atividade os alunos devem calcular de quantas maneiras é possível:

**ITEM A:** Dispor 8 rainhas no tabuleiro.

**Solução:** *Os alunos devem situar-se de diversas maneiras de disporem as 8 rainhas no tabuleiro e anotar os resultados. A partir de um certo momento, essa contagem vai ficando cada vez mais difícil, pois se trata de um número muito grande de combinações. Uma das possíveis soluções esta mostrada na figura 43.*

Figura 43 - Uma das possíveis soluções de se posicionar 8 rainhas em um tabuleiro

Fonte: o autor

*Uma forma de resolver esse problema é por meio de combinações simples, já que a ordem das rainhas no tabuleiro não importa, pois são todas iguais. Como no tabuleiro são 64 casas, o problema consiste em escolher 8 dessas casas. Logo, teremos uma combinação simples de 64 para escolher 8.*

*Utilizando a fórmula de combinação simples, teremos:*

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

$$C_{64,8} = \frac{64!}{8! \cdot (64-8)!}$$

$$C_{64,8} = \frac{64.63.62.61.60.59.58.57.56.55.54.53.52!}{8! \cdot 52!}$$

$$C_{64,8} = \frac{64.63.62.61.60.59.58.57.56.55.54.53}{8.7.6.5.4.3.2.1} = 4426165368\, maneiras.$$

**ITEM B:** dispor 8 rainhas no tabuleiro, de forma que nenhuma esteja atacando a outra na linha ou coluna.

**Solução:** *Espera-se que os alunos façam diversas tentativas afim de conseguirem visualizar algumas possibilidades. A rainha é uma peça muito poderosa do xadrez, quanto mais ela se aproxima do centro mais alcance de ataque ela terá sobre o tabuleiro, chegando até a atacar 27 casas de uma só vez, como mostra a figura (44) abaixo:*

Figura 44 – Rainha atacando 27 casas

Fonte: Universidade Estadual de Santa Cruz - proposta de uma sequência didática, 2020

*Com isso colocar 8 rainhas no mesmo tabuleiro não é um trabalho tão simples.*

*Para resolver o problema de uma rainha não atacar a outra na linha e coluna, elas serão dispostas de maneira que cada rainha não deve estar na linha ou coluna de ataque da outra, logo deve-se dispô-las de modo que uma delas não ocupe a linha e nem a coluna da outra, como mostra a figura 45:*

Figura 45 – Rainhas dispostas uma em cada linha e coluna

Fonte: o autor

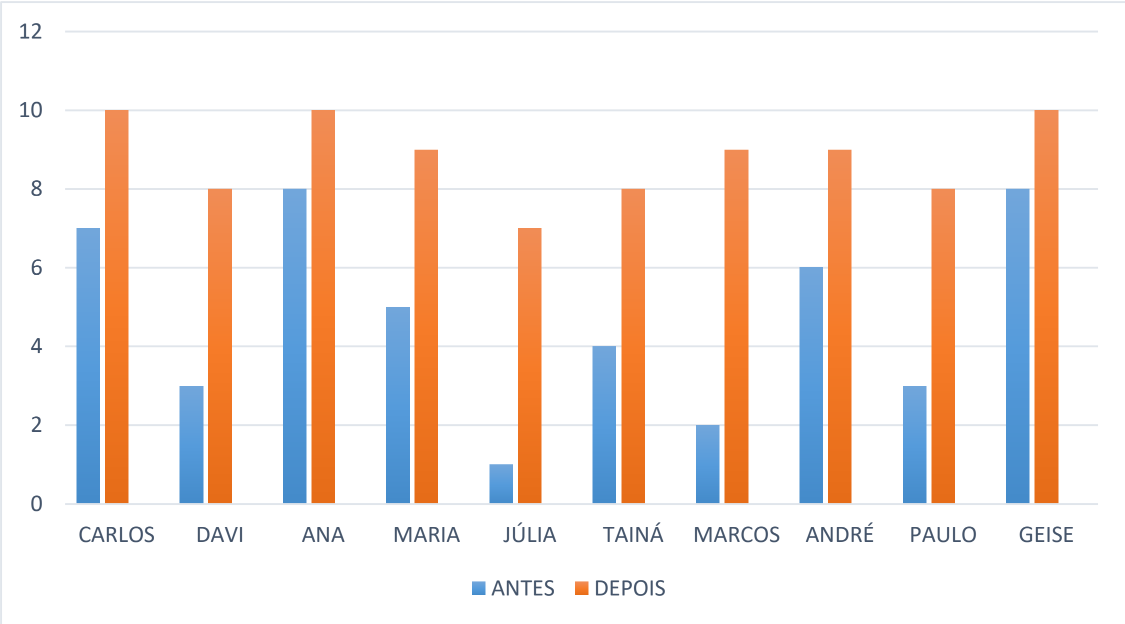
*Essa situação acima pode ser calculada utilizando a ideia de permutação, como cada rainha irá ocupar uma linha e uma coluna distinta da anterior. Para situar a primeira rainha no tabuleiro teremos 8 opções de escolha, como a segunda rainha, não pode ocupar a mesma linha e coluna da primeira, então restarão 7 opções de escolha, e assim por diante até a última rainha que só terá 1 opção. Desta forma teremos:*

*P8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320 maneiras*

*Portanto existem 40320 maneiras de dispor 8 rainhas no tabuleiro de forma que nenhuma delas ataque a outra nas linhas e colunas.*

O desempenho obtido pelos alunos com o tópico arranjos e combinações, com o auxílio do jogo de xadrez, está disposto no gráfico abaixo:

Gráfico 3 - Desempenho dos alunos antes e depois das aplicações envolvendo o jogo de xadrez




Fonte: o autor

Foi notado durante a realização desse projeto que o jogo de xadrez pode desenvolver habilidades em diversos níveis. Nos aspectos do raciocínio lógico e da análise combinatória, quando o aluno passa a ter contato com o jogo de xadrez ele se depara com diversos exercícios que lhe são propostos, fazendo com que ele busque a melhor combinação dos lances a serem realizados, se confrontando com diversas possibilidades. Seu avanço durante o jogo vai depender de sua decisão tomada a cada jogada.

O jogador deve sempre verificar qual o melhor movimento a ser realizado naquela posição, este número de lances cresce de acordo com as jogadas, o jogador passa, após certo tempo de prática, a descartar algumas possibilidades já estudadas e, com isso, agiliza sua análise contemplando apenas as possibilidades mais viáveis. Isto reforça a habilidade de observação, reflexão, análise e síntese.

# 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização deste trabalho espera-se propor as possibilidades da utilização do jogo de xadrez no ensino da matemática, especificamente no ensino da análise combinatória.

Há diversas possibilidades na prática do jogo de Xadrez, que pode ensinar aos alunos o mais importante na solução de um problema, que é analisar e entender a realidade que se apresenta. O jogo de xadrez possui características importantes, as quais podem desenvolver habilidades em diversos níveis, como por exemplo, o raciocínio lógico no jogo de xadrez, cujos alunos passam a ter contato com diversos exercícios que lhe são propostos, nos quais eles devem buscar a melhor combinação dos lances a serem realizados, tendo a sua frente inúmeras possibilidades. Isto resultará em um ganho, podendo ser material (peças) ou posicional (deixando com uma posição que reverterá para a vitória).

Quando o aluno está jogando uma partida de xadrez, é necessário que utilize muito raciocínio, para que possa colocar em prática o seu plano estratégico, o qual deve ser escolhido após uma longa análise da posição e verificação da eficácia, por isso, há necessidade de muita concentração e atenção. Isso contribui para que o aluno adquira facilidade no raciocínio lógico, o que é contemplado com frequência em questões matemáticas.

Este aspecto pode ser treinado por meio das estratégias do jogo do xadrez, tendo em vista algumas semelhanças destas situações com aquelas vivenciadas na escola. Um outro ponto interessante na prática do jogo de xadrez é o fato dos enxadristas precisarem anotar as jogadas realizadas, para que seja feita, ao término da partida, uma análise dos lances executados. A anotação algébrica parte do pressuposto que todas as casas do tabuleiro sejam nomeadas com letras e números, podendo ser comparado ao plano cartesiano, no qual os alunos devem localizar, nas retas, as coordenadas e marcar os pontos.

Contudo, o jogo de xadrez ainda não está presente na educação matemática, embora que haja incentivos de sua prática através de vários projetos nas diversas esferas governamentais.

O xadrez, sem sombra de dúvida, é um esporte que pode desenvolver habilidades que ajudam os estudantes a melhorarem seu desempenho escolar, mas para obter um desenvolvimento significativo é preciso que o educador se comprometa e trabalhe com dedicação com esta ferramenta, pois trata-se de uma atividade que propicia a aprendizagem de forma criativa e divertida na medida em que tal atividade desenvolve as faculdades mentais, motora e psíquica dos sujeitos, uma vez que ele aprende fazendo e ao mesmo tempo concorrendo

Neste trabalho, apresentou-se uma proposta para a explanação do conteúdo de análise combinatória, onde o público alvo são alunos do ensino fundamental e médio, com o auxílio do jogo de xadrez. Na primeira parte deste trabalho (introdução) fez-se um embasamento teórico em relação à importância e contribuições do jogo de xadrez para o aprendizado do conteúdo de análise combinatória e a necessidade de se trabalhar esse conteúdo desde as séries iniciais de maneira gradual, ou seja, a cada série o aluno teria contato com o conteúdo e sempre adicionando algo mais.

Na segunda parte (capítulo I), foi exposto o jogo de xadrez como uma ferramenta metodológica para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem, a relação que o jogo tem com a matemática, suas regras e movimentos de cada peça, onde cada aluno tem o contato com o jogo de xadrez, e de forma prática iria desenvolver suas habilidades no que diz respeito ao jogo.

Na terceira parte (capítulo II), foram expostos os principais conceitos de Análise combinatória (fatorial, princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos, e combinação simples). Os exemplos escolhidos foram uma forma de facilitar o entendimento do aluno, uma vez que ao longo do ensino médio, ele terá contato com esse conteúdo de maneira mais abrangente.

Na quarta parte (capítulo III), apresenta-se uma sequência didática na qual trabalha-se algumas relações e aplicações entre o jogo de xadrez e o conteúdo de análise combinatória. Esse capítulo foi dividido em três módulos. No primeiro módulo, trabalhou-se as aplicações do o jogo de xadrez na resolução de problemas envolvendo o princípio fundamental da contagem. No segundo módulo, trabalhou-se aplicações do jogo relacionadas com a resolução de problemas envolvendo fatorial, permutações simples e com repetições. No terceiro módulo, mostrou-se as aplicações do jogo na resolução de problemas envolvendo arranjos e combinações simples.

Diante dos dados expostos neste trabalho, foi possível perceber que a implementação do jogo de xadrez, como ferramenta pedagógica na escola pesquisada, contribui para a formação de indivíduos capazes de enfrentar desafios que surgem no cotidiano, visto que o xadrez viabiliza um desenvolvimento cognitivo e psicossocial diante dos contextos em que são inseridos.

Dentre as possibilidades que a utilização do xadrez oferece, acredita-se que a mais relevante seja a solução-problema, uma vez que habilita no aluno a capacidade de análise, reflexão, e de uma melhor compreensão da realidade. O xadrez proporciona o desenvolvimento de habilidades como, por exemplo, o raciocínio lógico, dado que o estudante dispõe de um contato direto com diversos exercícios que possibilitam a combinação de estratégias para que sejam executadas.

Assim, a prática do xadrez possui grande potencial, contribuindo para um desenvolvimento cognitivo e social, que auxiliam no aprendizado de diversas disciplinas, especialmente, nas que mais requerem o raciocínio lógico, como é o caso da matemática.

Apesar de existirem diversos estudos que demostram os benefícios provenientes da prática do xadrez no contexto educacional, ainda há um grande número de instituições educacionais que não utilizam este valioso método como ferramenta no processo ensino-aprendizagem.

A implementação do projeto -jogo de xadrez- nesta escola tem trazido bons resultados, os quais podem ser observados em sala de aula, como notas mais elevadas, autocontrole, o desenvolvimento de raciocínio lógico e análise, entre outros. Assim, pode-se identificar benefícios para o aluno desde o conhecimento ao domínio do tabuleiro, resultando em ganhos para sua noção espaço-dimensional.

# 6 - REFERÊNCIAS

BECKER, Idel. **Manual de Xadrez**. 7ª edição. São Paulo: Ed. Nobel, 1978. 205p.

BORGES, G. N. **Uma sequência didática para o ensino de análise combinatória com auxílio do jogo de xadrez.** 2020. 54f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus – BA, 2020.

IVANA, D. Aranão. A Matemática Através de Brincadeiras e Jogos. 1. Edição. Editora: Papirus, 1996.

BRASIL. Ministério Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais 5ª e 8ª séries** - Matemática para o Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

TIZUKO, M. Kishimoto. O jogo e a educação infantil. 8ª edição. Editora Cortez. Page 2. Tradução. Campinas, SP.

CENTRO DE EXELENCIA DE XADREZ. Disponível em http://www.cex.org.br. Acessado em 15 jan. de 2024.

DAUVERGNE, Peter. O caso do Xadrez como ferramenta para desenvolver as mentes de crianças. FILGUTH, Rubens (Org). **A importância do Xadrez**. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 11 - 17.

FADEL, J.G.R.; MATA, V.A. **O xadrez como atividade complementar na escola:** uma possibilidade de utilização do jogo como instrumento pedagógico. Curitiba: SEED/PDE, 2007.

GÓES, D. de C. **O jogo de Xadrez e a formação do professor de matemática.** 2002. 107 f.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000.

SANTOS, E. L., DIAS, Educação não escolar: **uma percepção acerca dos espaços não escolares na cidade de Ilhéus Bahia**. Ilhéus, BA: EDITUS, 2011.

BRASIL.Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GRILLO, R. M.; GRANDO, R. C. **O xadrez pedagógico e a matemática no contexto em sala de aula.** São Paulo - SP: Pimenta Cultural, 2021.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática elementar:** combinatória, probabilidade. 3. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

HUIZINGA, J. **Homo ludens:** o jogo como elemento da cultura. 2. ed. Tradução João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 1990. 236p.

MEDRADO, T. **Xadrez em sua essência: Sua história, seu contexto**. Revista de História – Petrolina Out./dez. 2009.

PEREIRA, Lucia Helena Pena. **Bioexpressão: a caminho de uma educação lúdica para a formação de educadores.** Rio de Janeiro: Mauad X: Bapera, 2005.

PIASSI, Eric Augusto. **Xadrez:** uma visão de ensino. Clube de Xadrez - Xadrez nas escolas. Disponível em http://www.clubedeXadrez.com.br/menu_artigos.asp?s=cmdview3605. Acesso em: 20 jan. 2024.

PIMENTA, Ciro José Cardoso, **XADREZ:** esporte, história e sua influência na sociedade. Disponível em http://www.cex.org.br. Acessado em 20 jan. 2024.

PYSKLEVITZ, L. C. **O xadrez no ensino da matemática.** 2016. Volume II. Caderno PDE (Universidade Estadual do Paraná – Unespar).

ROCHA, W. R. **O jogo e o xadrez: entre teorias e histórias**. Dissertação (Mestrado em História). Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2009.

SÁ, et al. **Xadrez: cartilha**. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, 1993. 26p.

SILVA, W. da; TIRADO. **Meu primeiro livro de xadrez**. Curitiba: Ed. Expoente, 1995.

SILVA, W. da. **Processos cognitivos no jogo de xadrez**. 2004. f. 196.

SILVA, W. **Processos cognitivos no jogo de Xadrez**. 2004. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

SOUZA, J. C.; PEREIRA, A. M. **Metodologia de trabalho.** 3. ed. São Paulo: Estrela, 2011.
ASSIS, Machado de. **Dom Casmurro**. São Paulo: Ática, 1970.

TASCHETTO, A. **O jogo de xadrez relacionado com a matemática.** 2004. 81f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2004.

TIRADO, A.; SILVA, W. da. **Meu primeiro livro de Xadrez :** curso para escolares. Curitiba, Editora Gráfica Expoente Ltd., 1999. 185p.

WOOLFOLK, Anita E. **Psicologia da educação**. 7 ed. Porto Alegre: Artmed, 2000. 568p.