Marcos Roberto Fonseca Conceição

Transformações no Plano: Uma Aplicação do Estudo de Matrizes com o Uso de Planilhas Eletrônicas.

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2013

Marcos Roberto Fonseca Conceição

Transformações no Plano: Uma Aplicação do Estudo de Matrizes com o Uso de Planilhas Eletrônicas.

Dissertação submetida por Marcos Roberto Fonseca Conceição como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientador: Me. Eneilson Campos Fontes

Coorientador: Dra. Daiane Silva de Freitas

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2013

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

C744t Conceição, Marcos Roberto Fonseca.
Transformações no plano : uma aplicação do estudo de matrizes com o uso de planilhas eletrônicas / Marcos Roberto Fonseca Conceição. – 2013.
63 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande/FURG, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio Grande/RS.

Orientador: Msc. Eneilson Campos Fontes
Coorientadora: Drª. Daiane Silva de Freitas

1. Estudo de matrizes. 2. Transformações no plano. 3. Planilhas eletrônicas. I . Fontes, Eneilson Campos. II. Freitas, Daiane Silva de. III.Título.

CDU: 51

Catalogação na fonte: Bibliotecária Alessandra de Lemos CRB10/1530

Marcos Roberto Fonseca Conceição

Transformações no Plano: Uma Aplicação do Estudo de Matrizes com o Uso de Planilhas Eletrônicas.

Dissertação submetida por Marcos Roberto Fonseca Conceição como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 09 de Março de 2013:

Me. Eneilson Campos Fontes
(Orientador - FURG)

Dra. Carmen Vieira Mathias
(Avaliadora - UFSM)

Dr. Mario Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2013

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas bênçãos derramadas em minha vida e por mais esta oportunidade, à minha esposa Angela e meus filhos Leonardo e Guilherme por acreditar no meu sonho e me incentivar a continuar sempre apesar das dificuldades, aos colegas pela parceria e troca de experiências, aos professores pela dedicação e ao meu orientador Me. Eneilson Campos Fontes pela grandiosa ajuda nesta última etapa.

Resumo

Durante parte da minha vida profissional trabalhei de forma intensa com o uso planilhas eletrônicas, basicamente fazendo cálculo de comissões, planilhas de vendas, planilhas de estoque e gerando os mais diversos tipos de gráficos, quando me tornei professor de matemática procurei me valer desta experiência em sala de aula oferecendo sempre que possível atividades com o uso deste recurso.

No ensino fundamental tive a oportunidade de trabalhar "O Valor Numérico de uma Expressão Algébrica" utilizando planilha eletrônica, onde os alunos escolheram alguns valores para gerar gráficos, uma atividade bem interessante que preparou os alunos para o estudo de funções e seus gráficos mais adiante.

No ensino médio usei planilhas para trabalhar funções, sequências, progressões aritméticas e geométricas, a ideia de limite, quando trabalhamos a soma dos infinitos termos da progressão geométrica, matrizes e estatística, como usamos a planilha para fazer os cálculos, os alunos ficam liberados para pensar em outros conceitos inerentes aos conteúdos estudados, o que contribui para o seu aprendizado e motivação.

Dos conteúdos por mim desenvolvidos com o uso de planilhas eletrônicas Operações com Matrizes se destaca tanto facilidade de adaptar suas operações quanto pelo resultado final e por esse motivo e por querer contrubuir com uma aplicação desse conteúdo para o ensino médio, essa é a atividade que apresentaremos nesta proposta, desta forma:

Esta proposta de atividade educacional começa apresentando algumas operações com matrizes e investigando as transformações que estas operações geram no plano, faremos uso da planilha eletrônica [1] para efetuar os cálculos e gerar os gráficos o que nos liberará para fazer investigações, analisar suas simetrias, seus pontos fixos, etc.

Outra aplicação importante apresentada é o Morfismo - transição intermediária entre duas figuras, na qual a primeira figura vai perdendo sua forma ao mesmo tempo em que vai tomando a forma de uma segunda figura. Como o cálculo da matriz de pontos do morfismo de uma figura é bastante trabalhoso nos socorremos novamente de uma planilha eletrônica para efetua-los e gerar os gráficos.

Palavras-chaves: Estudo de Matrizes, Transformações no Plano, Planilhas Eletrônicas.

[1] Nesta proposta utilizaremos a planilha eletrônica Microsoft Office Excel 2007

Abstract

During part of my professional life I worked intensively with using spreadsheets, basically making calculation of commissions, sell sheets, inventory sheets and generating several types of graphs, when I became a math teacher tried to avail myself of this experience offering classroom activities whenever possible with the use of this resource.

In elementary school I had the opportunity to work “The Numerical Value of an Algebraic Expression” using spreadsheet where students chose some values to generate graphics, an interesting activity that prepared students for the study of functions and their graphs below.

In high school I used spreadsheets to work functions, sequences, arithmetic and geometric progressions, the idea of a limit, when we work the sum of terms of the infinite geometric series, matrices and statistics, as (a second time) to schedule the worksheet do the math, the students are free to think of other concepts related to the contents studied, which contributes to their learning and motivation.

Developed the content for me in high school with the use of spreadsheets Operations with Matrices excels both ease of adapting their operations as the end result and therefore the activity that is present in this proposal, as follows:

The proposed educational activity starts showing some operations with matrices and investigating the transformations that these operations generate the plan, we will use the spreadsheet [2] to effect the calculations and generate the graphs that frees us to do investigations, analyze their symmetries, their fixed points, etc.

Another important application is presented morphism - an intermediate transition between the two figures, the first figure in which loses its form while it will take the form of the second figure. How to calculate the dot matrix of a morphism figure is quite laborious succor again in the spreadsheet effects for them and generate graphs.

Key-words: Study Matrices, Transformation in the Plan, Spreadsheets.

[2]This proposal will use the spreadsheet Microsoft Office Excel 2007

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Apresentaremos nesta proposta de atividade educacional algumas operações com matrizes e analisaremos as transformações que elas geram no plano, faremos uso de uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos e gerar os gráficos, possibilitando ao aluno investigar as transformações que certas matrizes produzem no plano, interpretando de forma geométrica as operações com matrizes, ampliando seu significado.

O uso de planilhas é sugerido pois busca otimizar as atividades, onde o aluno pode efetuar diversas transformações de um mesmo conjunto de pontos de forma dinâmica e permite visualizar as respectivas figuras geradas automaticamente. Essa iteratividade permite a interação do aluno com os conceitos e ideias matemáticas envolvidas, levantando e testando hipóteses, proporcionando a descoberta.

A utilização das planilhas eletrônicas aliado ao estudo de matrizes é bastante natural, uma vez que a planilha eletrônica é uma tabela onde podemos efetuar todas as operações definidas no referido contexto, e fazem parte de pacotes de programas integrados e a maioria dos computadores em uso nas escolas já as têm instaladas, além disso, as planilhas eletrônicas podem ser utilizadas em muitos momentos na disciplina de matemática contribuindo de forma significativa à aprendizagem do aluno e preparando-o para o mercado de trabalho conforme veremos na seção 1.2.

Pretendemos com esta proposta, que o aluno seja capaz de representar e efetuar operações com matrizes, efetuar transformações no plano utilizando uma planilha eletrônica, representar no plano os pontos obtidos com as transformações utilizando o editor de gráficos das planilhas eletrônicas, efetuar morfismos (transição intermediária entre duas figuras) e representar morfismos no plano.

Para realizar as atividades propostas precisaremos de papel quadriculado - para desenvolver a primeira atividade, computador com uma planilha eletrônica instalada, um para cada aluno ou grupo de alunos, conforme disponibilidade, um projetor multimidea ou televisão onde o aluno possa acompanhar as orientações do professor no desenvolvimento das atividades.

Para um bom andamento do trabalho o aluno deverá ter domínio das operações com matrizes, uma vez que terá que programar o computador para efetuar os cálculos, dessa forma, recomendamos que as atividades sejam desenvolvidas primeiramente de forma manual e num segundo momento seja feita a implementação representando as matrizes, efetuando as transformações e gerando as figuras no computador.

Para amenizar possíveis inseguranças na utilização do computador ou do programa sugerido, uma sugestão seria formar pequenos grupos onde pelo menos um aluno conheça o programa, ou ainda, de maneira alternativa, trabalhar utilizando a planilha eletrônica na introdução de matrizes, onde os alunos podem representá-las na planilha eletrônica e efetuar algumas operações de modo que já fiquem familiarizados com o programa.

Esta proposta de atividade educacional é composta de 3 capítulos, cuja apresentação e conteúdo tem o seguinte plano:

No capítulo 1 inserimos material de suporte para o professor - não é nossa intenção que esta parte do trabalho seja desenvolvida com o aluno. Delineamos na seção 1.1 e 1.2 a importância e a conveniência do uso do computador nas aulas de matemática, suas contribuições para aumentar a motivação do aluno e melhorar seu aprendizado, ainda abordamos as possibilidades e vantagens do uso das planilhas eletrônicas nas aulas de matemática e por fim apresentamos, na seção 1.3, uma breve introdução à teoria de transformações lineares, que dá suporte ao desenvolvimento das atividades que seguirão.

O capítulo 2 é constituido de 6 aulas onde desenvolvemos as atividades que serão trabalhadas com os alunos. Introduzimos o assunto Transformações no Plano orientando passo a passo como utilizar a planilha eletrônica para efetuar algumas fórmulas simples na seção 2.1 e 2.2, seguindo de atividades para fixação. As seções 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 apresentam algumas matrizes e as respectivas transformações que geram no plano seguindo de atividades para fixação e construção de conhecimento.

Definimos morfismo no capítulo 3 e novamente fazemos uso da planilha eletrônica para efetuar os cálculos e gerar os gráficos, no exemplo 3.2 utilizamos ainda, um apresentador de slide para mostrar de forma automática a transição de duas figuras em 10 etapas.

1 Preliminares

1.1 O uso do computador no ensino da matemática

Desde sua invenção o computador tem gradualmente se incorporado a muitas profissões, de tal forma que alguns profissionais teriam dificuldades em cumprir suas atividades sem esse equipamento que está também cada vez mais presente no dia a dia das pessoas, em suas casas, nos bancos, nos supermercados, de modo que para formar um cidadão consciente e capaz de interagir de forma segura na sociedade não poderemos ignorar o uso do computador em sala de aula em particular nas aulas de matemática. Nas palavras de Miskulin:

> A Educação deve estar em consonância com os avanços tecnológicos que perpassam a sociedade atual, para que os alunos possam vivenciar ambientes significativos de aprendizagem, nos quais as novas tecnologias estejam presentes, possibilitando-lhes desenvolverem novas maneiras de gerar e disseminar o conhecimento (MISKULIN, 1999).

Sobre as mudanças no mercado de trabalho e a necessidade dos trabalhadores estarem preparados para essas mudanças a professora Acácia Kuenzer, (KUENZER, 2000, p. 57) avalia:

> Os processos de trabalho de base rígida, fundamentados na eletromecânica e adequados a situações pouco dinâmicas, vão cedendo lugar a processos com base microeletrônica, que asseguram amplo espectro de soluções possíveis, desde que haja domínio da ciência e da tecnologia pelo trabalhador; os sistemas de comunicação disponibilizam toda sorte de informações em tempo real.
> Em decorrência, passa-se a exigir um trabalhador de novo tipo, que tenha mais conhecimento, saiba comunicar-se adequadamente, trabalhe em equipe, avalie seu próprio trabalho, adapte-se a situações novas, crie soluções originais e, de quebra seja capaz de educar-se permanentemente (KUENZER, 2000,apud JACINSKI; FARACO, 2002, p. 3).

Esse quadro complexo desafia, segundo Jacinski e Faraco (JACINSKI; FARACO, 2002) , a escola, em primeiro lugar, a ampliar suas tarefas, de modo a garantir aos alunos, pelo menos a familiarização com essas tecnologias, seja como elemento da formação para o trabalho, seja principalmente como elemento da formação geral dos alunos como cidadãos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (EDUCAÇÃO, 2000) recomendam que a tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho. Também salienta que é preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, Ciências Humanas, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto. Lembra ainda que o uso da diversidade de recursos didáticos é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado.

A relação entre a matemática e a tecnologia ao longo do tempo é analisada pelo professor Ubiratan D'Ambrosio (AMBROSIO, 2011):

> A matemática e a tecnologia, entendida como a convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível. [...] O matemático do presente tem como instrumento de trabalho toda a tecnologia disponível. É muito possível que continue o fascínio por obter resultados com o mínimo de tecnologia disponível. Resolução e problemas geométricos com utilização apenas de régua e compasso continuarão a atrair interesse de alguns matemáticos, como aconteceu desde a antiguidade. Mas o grande desenvolvimento da matemática se dará, como foi em outros tempos, quando incorporando toda a tecnologia disponível, isto é, inserida no contexto cultural (D'AMBROSIO, 2011).

Dessa forma, concluimos que o uso em sala de aula do computador e seus recursos, em particular as planilhas eletrônicas, além de bem-vindos são necessários para que o aluno tenha uma formação adequada e esteja preparado para os desafios do mercado de trabalho.

1.2 O uso de planilhas eletrônicas no ensino da matemática

Planilha eletrônica, ou folha de cálculo, é um tipo de programa de computador que utiliza tabelas para realização de cálculos ou apresentação de dados. Cada tabela é formada por uma grade composta de linhas e colunas. O nome eletrônica se deve à sua implementação por meio de programas de computador. Existem no mercado diversos aplicativos de planilha eletrônica. Os mais conhecidos são Microsoft Excel, Lotus123 e o OpenOffice.org Calc (WIKIPÉDIA, 2012).

A maioria dos computadores saem de fábrica com um pacote de programas onde está presente as planilhas eletrônicas, no caso dos computadores com o sistema operacional Windows esta planilha eletrônica é o Excel, no caso do Linux é o Calc. Por já estarem instalados nos computadores estas planilhas tem sido largamente utilizadas no mercado de trabalho, permitindo além da manipulação de cálculos em planilhas, a inclusão de gráficos criados com base nos dados da planilha, planilhas de cálculos para orçamentos, previsões e planejamentos para investimentos futuros, diversos tipos de tabelas, controle de gastos, controle de caixa, etc. Inclusive muitos computadores que estão disponíveis nas escolas já possuem planilhas eletrônicas instaladas, ou seja, motivos não faltam para que este programa seja apropriado de forma crítica na escola e em especial nas aulas de matemática.

Sobre as vantagens de se utilizar planilhas eletrônicas no ensino de matemática, Moraes (1997) (MORAES, 1997), ressalta que embora as *spreadsheets*[1] tenham a aparência de uma folha de uma livro de contabilidade, elas são ferramentas baseadas no computador, que exploram ou aproveitam o poder computacional do computador; o conhecimento representado em uma *spreadsheets* é quantitativo e abstrato, *spreadsheets* converte quantidades em representações gráficas, propicia ao usuário habilidades de utilizar variáveis, entre outros aspectos; no processo de construção e exploração das *spreadsheets*, existem habilidades de pensamentos criativos envolvidos, projetar *spreadsheets* depende de habilidades de elaboração, sintetização e imaginação, tais como, modificar, expandir, planejar, prever e visualizar. Construir *spreadsheets* requer do usuário a visualização das relações quantitativas dos dados; aprender como representar relações quantitativas entre entidades, através da construção de *spreadsheets* tem um poder significativo de transferência de aprendizagem.

Dessa forma o uso de planilhas eletrônicas nas aulas de matemática podem ajudar a desenvolver no aluno habilidades úteis, na resolução de problemas, tais como, generali-

[1] Spreadsheets são planilhas eletrônicas

zar, formular e testar hipóteses, fazer previsões, elaborar fórmulas matemáticas, construir gráficos, enfim, auxiliar na tomada de decisões.

Em particular no estudo de matrizes as planilhas nos possibilitam automatizar os cálculos e gerar gráficos para investigar as transformações que certas matrizes produzem no plano.

Veremos a seguir alguns conceitos de Álgebra Linear que estão intimamente ligados à nossa proposta de atividade educacional.

1.3 Transformações lineares

Sejam V e W espaços vetoriais[2], uma transformação linear de V em W é uma aplicação $T : V \to W$, que possui a seguinte propriedade:

$$T(u + kv) = T(u) + kT(v)$$

Para quaisquer que sejam u, $v \in V$ e $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.3.1. Sejam $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(u) = \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dados $u, v \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(u + kv) = \alpha(u + kv) = \alpha u + \alpha kv = \alpha u + k(\alpha v) = T(u) + kT(v),$$

segue que T é uma transformação linear.

Mais ainda, toda a transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser deste tipo.
De fato,

$$T(u) = T(u.1)$$

e como T é uma transformação linear e u um escalar,

$$T(u.1) = u.T(1)$$

Chamando $T(1) = \alpha$, temos que $T(u) = \alpha u$.

[2] O leitor interessado poderá encontrar as definições de espaço vetorial, subespaços vetoriais e bases em livros de Àlgebra Linear dos quais recomendo (LIMA, 2011),(BOLDRINI, 1986) e (ANTON; RORRES, 2001).

Exemplo 1.3.2. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$T(x, y) = (2x, 0, x + y)$$

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}
T(u + kv) &= T((x_1, y_1) + k(x_2, y_2)) \\
&= T((x_1, y_1) + (kx_2, ky_2)) \\
&= T((x_1 + kx_2), (y_1 + ky_2)) \\
&= (2(x_1 + kx_2), 0, (x_1 + kx_2) + (y_1 + ky_2)) \\
&= (2x_1, 0, (x_1 + y_1)) + (2kx_2, 0, (kx_2 + ky_2)) \\
&= (2x_1, 0, x_1 + y_1) + k(2x_2, 0, x_2 + y_2) \\
&= T(u) + kT(v)
\end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear.

Teorema 1.3.1. A toda matriz m x n está associada uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e a toda transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ está associada uma matriz m x n.
Demonstração:
Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ e A a matriz m x n. Definimos

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ por } v \mapsto A.v$$

onde $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, assim: $L_A(v) = A. \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

das propriedades de operações com matrizes:

$$L_A(u + kv) = A(u + kv) = Au + Akv = Au + kAv = L_A(u) + kL_A(v),$$

e portanto L_A é uma transformação linear.

Por outro lado, dada uma transformação linear, associamos uma matriz da seguinte forma:

Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e a transformação linear $T : V \to W$, onde $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ é uma base de W. Então $T(v_1), ..., T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{matrix} T(v_1) = a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m \end{matrix}$$

Onde os coeficientes a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ são números reais.

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^\alpha_\beta$, é chamada matriz de T em relação às bases α e β.

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Fica assim estabelecida a bijeção entre transformações lineares e matrizes.

■

Como caso particular, suponhamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Seja $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Então $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$.
Note que esta é a aplicação linear do exemplo 2.2.

Por outro lado se $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$T(x, y) = (2x, 0, x + y)$$

Para encontrarmos a matriz A associada a aplicação T temos que considerar uma base α de V e uma base β de W.

Sejam $\alpha = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$ e $\beta = \{(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$, temos que:

$$\begin{aligned} T(1,0) &= a_{11}.(1,0,0) + a_{12}.(0,1,0) + a_{13}.(0,0,1) = (2,0,1) \\ T(0,1) &= a_{21}.(1,0,0) + a_{22}.(0,1,0) + a_{23}.(0,0,1) = (0,0,1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Segue que:
$a_{11} = 2; a_{12} = 0; a_{13} = 1;$
$a_{21} = 0; a_{22} = 0; a_{23} = 1.$

Logo a transposta da matriz de coeficientes do sistema (1.1) =

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Exemplo 1.3.3. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(u) = u + \lambda$, onde λ é um vetor não nulo em $\mathbb{R}^2$.

Dados u, v vetores em $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(u+kv) &= u + kv + \lambda \\ &= u + \lambda + kv \\ &= T(u) + k[T(v) - \lambda] \\ &\neq T(u) + kT(v) \end{aligned}$$

Logo T não é uma transformação linear, a aplicação assim definida é chamada de translação veremos um pouco mais sobre essa aplicação na seção 2.6.

Nesta proposta estamos interessados apenas no caso particular de transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que chamaremos simplesmente de Transformações no Plano, e é onde concentraremos nossos esforços daqui pra frente.

2 Transformações no plano

A maioria dos aplicativos de computação gráfica permitem a manipulação de uma imagem de várias maneiras, tais como a mudança de suas proporções, rotações ou cisalhamentos. Uma outra técnica básica de manipulação de imagens é a distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém.

Um procedimento mais complicado, chamado de deformação, consiste em distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. Além disto, a deformação de duas imagens por procedimentos complementares com a fusão das deformações obtidas resulta num morfismo das duas imagens.

A principal aplicação de deformações e morfismos tem sido a produção de efeitos especiais no cinema, na televisão e na propaganda. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para estas técnicas – por exemplo, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o "envelhecimento" de fotografias de pessoas desaparecidas ou suspeitos da polícia.

As imagens em uma tela de computador são formadas por pontos, chamados pixels, que são elementos de uma matriz. Uma imagem de resolução 800 x 600 tem 800 x 600 = 480.000 pixels em 800 colunas e 600 linhas. Quando um programa gráfico altera a posição da imagem, gira a imagem ou muda a escala desta imagem, está mudando a posição dos pixels que a formam e tudo isto é feito através de operações com matrizes.

2.1 Aula 1: Introdução às transformações no plano

Objetivos
Conceituar transformações no plano por meio das operações com matrizes.

Metodologia
Abordar o conceito de transformações no plano. Propor aos alunos que efetuem a transformação sugerida e representando as figuras no papel quadriculado; Discutir com a turma o que aconteceu com a figura após a transformação. Pode-se chamar a atenção dos alunos para a simetria entre as figuras Inicial e Final e que a transformação manteve as medidas da figura.

Avaliação
Verificar se todos os alunos conseguiram calcular e representar a transformação no plano, se necessário retome os conceitos para que todos tenham condições de acompanhar as atividades.

Transformações no plano

Imagine um sistema cartesiano ortogonal com a origem no centro da tela do monitor (suposta plana) e um ponto qualquer $(x, y) = P$.
Por meio de um produto de matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Obtemos um novo ponto $(x', y') = P'$, tal que: $x' = ax + by \quad e \quad y' = cx + dy$.

A matriz T $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é chamada de matriz de transformação no plano.

Tudo funciona como se o ponto P "fosse levado" pela matriz T para a posição do ponto P'.

Podemos representar matricialmente coordenadas de pontos de uma figura da seguinte forma: um ponto em cada coluna, com o valor de x na primeira linha e o valor de y na segunda linha. Essa matriz que tem tantas colunas quantos forem os pontos considerados, será chamada de *matriz de pontos*.

Chamaremos de *matriz de pontos estendida* quando acrescentarmos uma última coluna na matriz de pontos onde vamos repetir a coordenada do primeiro ponto.

Vamos considerar como exemplo a Figura 1 a seguir e efetuar a transformação determinada pela matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

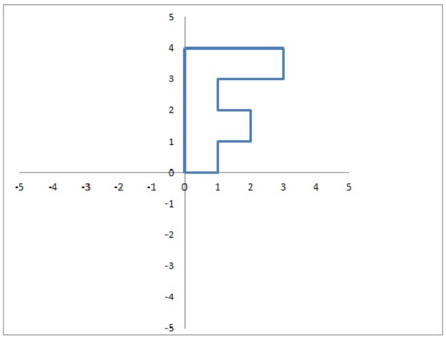


Figura 1 – Figura Inicial

Note que a matriz de pontos referente aos vértices da Figura 1 é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicando a transformação temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

A Figura 2 representa os pontos da matriz transformada no plano cartesiano.

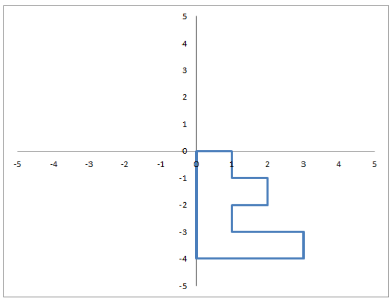


Figura 2 – Reflexão em torno do eixo x.

2.2 Aula 2: Utilizando a planilha eletrônica

Objetivos

Apresentar uma planilha eletrônica e efetuar algumas operações básicas.

Metodologia

Efetuar na planilha eletrônica algumas operações conectado a um equipamento multimidia para que os alunos possam acompanhar e reproduzir. Propor aos alunos que efetuem em seus computadores as atividades propostas do capítulo. Discutir com os alunos os possíveis usos da planilha eletrônica no mercado de trabalho. Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhe o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estejam realizando as atividades.

Avaliação

Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retome os conceitos.

Utilizando a planilha eletrônica

Para automatizar os cálculos das transformações, vamos inserir as fórmulas na Planilha Eletrônica[1], para que o programa efetue as contas e produza o respectivo gráfico.

Planilhas eletrônicas são organizadas através de linhas ordenadas numericamente e colunas ordenadas alfabeticamente. Os campos onde inserimos informações (textos, valores, fórmulas, etc.) chamam-se células e são identificadas pela letra correspondente à coluna e número correspondente à linha à qual pertence. Exemplo: A Célula "B3" está localizada na coluna B e linha 3, conforme Figura 3.

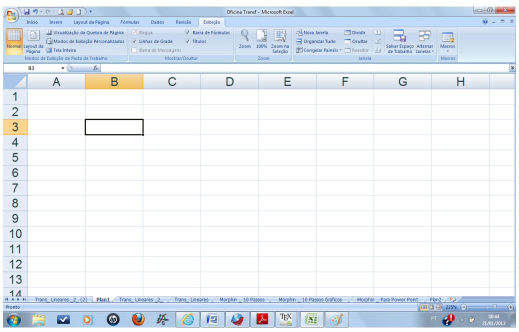


Figura 3 – Célula B3 selecionada.

[1]Vamos nos limitar nesta proposta ao mínimo necessário para o desenvolvimento das atividades, o leitor interessado pode obter maiores informações e dicas de utilização em http://www.fundacaobradesco.org.br/vv-apostilas/ex_suma.htm (BRADESCO, 2011)

Nesta planilha é possível inserir fórmulas simples como somas, subtrações, multiplicações e divisões utilizando os símbolos +, -, * e /, respectivamente, assim como expressões e fórmulas mais complexas.
Por exemplo, se temos na célula B3 o valor 2 e na célula C3 o valor 3 e queremos que a soma dos dois valores apareça na célula D3 basta digitar a fórmula "=B3+C3" na célula D3 e teremos o resultado da soma como queríamos.

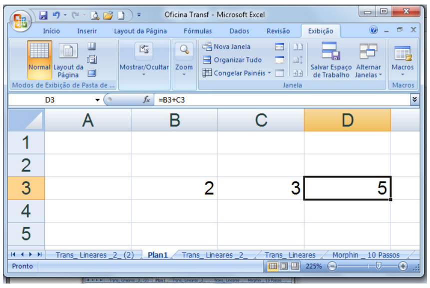


Figura 4 – Soma dos valores contidos nas células B3 e C3 em D3.

Toda a vez que mudarmos os valores das células B3 ou C3 a soma atualizará automaticamente (Figura 4).

Podemos copiar o conteúdo de uma célula ou faixa de células de um local para o outro.
No caso de fórmulas, a célula que está sendo copiada será automaticamente refeita, de forma que os endereços fiquem de acordo com a célula posicionada.
A cópia poderá ser:
Relativa: quando houver fórmula na célula copiada, a fórmula varia relativamente ao sentido para o qual está sendo efetuada a cópia.
Exemplo: se tivermos na célula A10 a fórmula: "=A1+A2" e a copiamos para a célula a direita (B10) a fórmula colada será "=B1+B2", ajustes análogos serão feitos se colarmos a fórmula em outras direções.
Absoluta: para evitar que a fórmula varie em relação à linha ou em relação à coluna utilizamos o símbolo $ (cifrão), precedendo a linha ou coluna que ficará fixa.
Linha absoluta - A$10
Coluna absoluta - $A10
Linha e Coluna absolutas - A10
Procedimentos:
Marcar a região a ser copiada através do Shift + Teclas de Seta;
Acionar o Menu Editar e escolher a opção Copiar. Atalho: Ctrl + C;
Posicionar o cursor na célula destino e selecionar o Menu Editar, opção Colar. Atalho: Ctrl + V.

Seguem algumas atividades para fixação e aprofundamento dos conteúdos estudados até aqui.

Atividades

1. O Índice de Massa Corpórea (IMC) é adotado pela Organização Mundial de Saúde para o cálculo do peso ideal de cada indivíduo. Para fazer o cálculo do IMC basta dividir sua massa em quilogramas pela altura ao quadrado (em metros). O número que será gerado deve ser comparado aos valores da tabela IMC (Entre 18,5 e 24,9 é o normal).
   Insira na célula A1 "Sua massa", na célula A2 "Sua altura", na célula A3 "IMC", na célula B1 o valor da sua massa em quilograma, na célula B2 o valor de sua altura em metros, insira na célula B3 uma fórmula adequada para calcular vários IMCs bastando para isso preencher as células B1 e B2.
   Solução: Fazendo o que se pede para, por exemplo, uma pessoa de 1,8m e 80kg usando a fórmula: "=B1/B2^2" na célula B3, teremos:

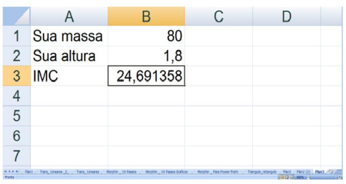


Figura 5 – IMC

2. Insira numa coluna do Excel, os seguintes itens (um em cada linha): Salário, Saldo no Banco, Total, deixe uma linha em branco e continue: Supermercado, Aluguel, Escola, Água/Luz, Telefone, Carro, Seguro, Vestuário, Lazer, Total, deixe uma linha em branco e insira: Saldo.
   Faça uma estimativa dos valores recebidos/gastos por sua família e insira na coluna ao lado, insira uma fórmula ao lado do item Saldo para que este seja calculado bastando atualizar os valores dos ítens.
   Solução: Fazendo o que se pede e usando as fórmulas: "=B1+B2", "=SOMA(B5:B13)" e "=B2-B14" nas células B3, B14 e B16 respectivamente.

3. Insira na célula A1 o primeiro valor da progressão aritmética definida por: $a_n = 2n + 5$. Insira na célula A2 uma fórmula para que seja calculado o segundo termo desta progressão aritmética, copie esta fórmula para as células abaixo de modo a calcular os primeiros 20 termos da progressão aritmética. Dica: para copiar a fórmula você pode clicar no botão direito do mouse e selecionar "copiar" em seguida

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Salário							
2	Saldo no Banco							
3	Total	0						
4								
5	Supermercado							
6	Aluguel							
7	Escola							
8	Água/Luz							
9	Telefone							
10	Carro							
11	Seguro							
12	Vestuário							
13	Lazer							
14	Total	0						
15								
16	Saldo	0						

Figura 6 – Orçamento Familiar

clique na primeira das células onde você quer colar a fórmula, mantendo o botão pressionado mova o cursor para baixo até que todas as células fiquem selecionadas, clique novamente no botão direito e selecione "colar".

Solução: Se a PA é definida por: $a_n = 2n{+}5$ então $a_1 = 2.1{+}5 = 7$, $a_2 = 2.2{+}5 = 9$ logo a razão é 2. Fazendo o que se pede, inserindo a fórmula: "=A1+2" na célula A2 e copiando até a célula A20 teremos:

	A	B	C	D	E
1	7				
2	9				
3	11				
4	13				
5	15				
6	17				
7	19				
8	21				
9	23				
10	25				
11	27				
12	29				
13	31				
14	33				
15	35				
16	37				
17	39				
18	41				
19	43				
20	45				

Figura 7 – Progressão Aritmética

4. Utilize a mesma ideia da atividade anterior para escrever explicitamente os vinte primeiros termos da progressão geométrica definida por $a_n = 3.2^n$.

   Solução: Se a PG é definida por: $a_n = 3.2^n$, então $a_1 = 3.2^1 = 6$, $a_2 = 3.2^2 = 12$ logo a razão é 2. Fazendo o que se pede, inserindo a fórmula: "=A1*2" na célula A2 e copiando até a célula A20 teremos:

1	6
2	12
3	24
4	48
5	96
6	192
7	384
8	768
9	1536
10	3072
11	6144
12	12288
13	24576
14	49152
15	98304
16	196608
17	393216
18	786432
19	1572864
20	3145728

Figura 8 – Progressão Geométrica

5. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Insira no Excel a matriz A nas células A1, B1, A2, B2; a matriz B nas células D1, E1, D2, E2, insira fórmulas nas células G1, H1, G2, H2, para que tenhamos: AXB.

   Solução: Inserindo as fórmulas "=A1*D1+B1*D2", "=A1*E1+B1*E2", "=A2*D1+B2*D2" e "=A2*E1+B2*E2", respectivamente nas células G1, H1, G2 e H2, obtemos:
   Utilize as fórmulas para calcular os seguintes produtos:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	4	.	3	0	=	8	16
2	1	3		2	4		9	12

Figura 9 – *AXB*

a) BXA.

Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	0	.	0	4	=	0	12
2	2	4		1	3		4	20

Figura 10 – *BXA*

b) AXC.

Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	4	.	3	5	=	4	0
2	1	3		1	0		6	5

Figura 11 – *AXC*

c) CXA.
Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	5	.	0	4	=	5	27
2	1	0		1	3		0	4

Figura 12 – *CXA*

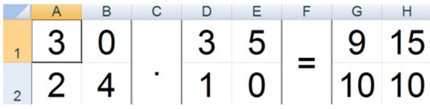


Figura 13 – BXC

d) BXC.

Solução:

e) CXB.

Solução:

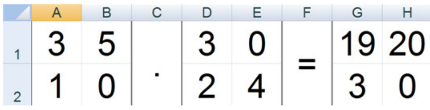


Figura 14 – CXB

f) $AXBXC$.

Solução:

Figura 15 – $(AXB)XC$

g) $CXBXA$.

Solução:

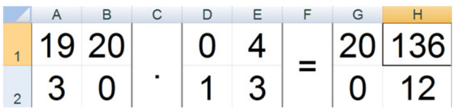


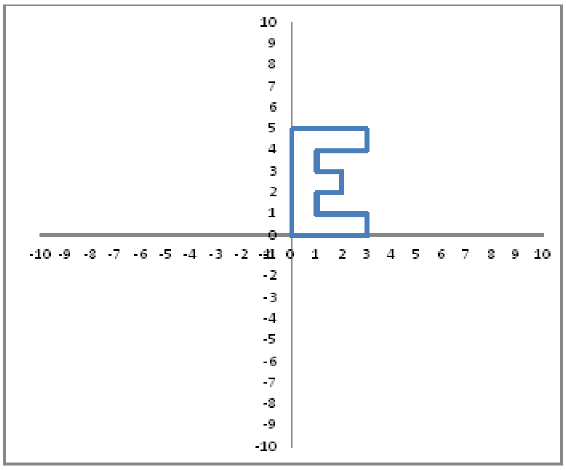
Figura 16 – $(CXB)XA$

6. Dada a matriz de pontos $I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Represente estes pontos no papel quadriculado e ligue os pontos na ordem em que eles aparecem.

   Solução: Fazendo o que se pede, temos:

Matriz de Pontos	0	3	3	1	1	2	2	1	1	3	3	0	0
Figura Inicial	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	0



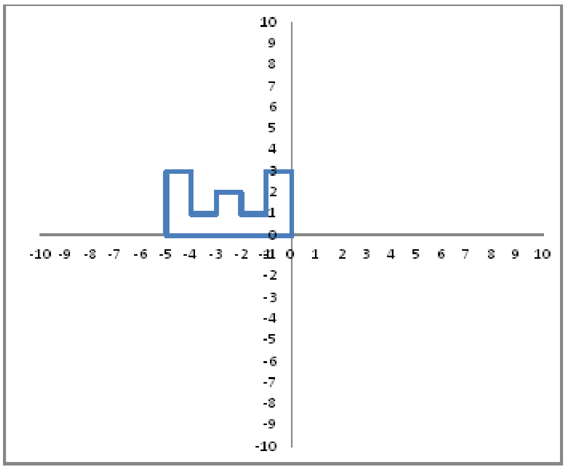
b) Efetue a transformação definida pela matriz $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e represente a matriz transformada no papel quadriculado. O que aconteceu com a figura inicial após a transformação?

Solução: A figura sofreu uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

Matriz de	0	-1
Transformação	1	0

Matriz de Pontos	0	3	3	1	1	2	2	1	1	3	3	0	0
Figura Inicial	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	0

Matriz de pontos	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-4	-4	-5	-5	0
transformada	0	3	3	1	1	2	2	1	1	3	3	0	0



2.3 Aula 3: Construindo os gráficos das transformações

Objetivos
Gerar gráficos das transformações na planilha eletrônica.

Metodologia
Efetuar na planilha eletrônica as passagens sugeridas com equipamento multimidia para que os alunos possam acompanhar e reproduzir em seus computadores. Propor aos alunos que modifiquem a matriz de transformação e verifiquem as transformações que elas geram na figura. Discutir com os alunos o que acontece com a figura se modificarmos um determinado elemento da matriz de transformação. Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhar o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estão realizando as atividades.

Avaliação
Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retomar os conceitos.

Construindo os gráficos das transformações

Para que seja realizado o cálculo do produto das matrizes, gerando a matriz transformada como queremos, precisamos inserir a matriz de transformação, a matriz de pontos estendida e as fórmulas na planilha eletrônica. Assim será realizado o calculo das matrizes transformadas, bastando que se altere a matriz de transformação (Figura 17).

Note que o valor que deve constar na célula D9 deve ser o resultado da soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz de transformação com os elementos correspondentes da primeira coluna da matriz de pontos (conforme a definição de multiplicação de matrizes).

Sugestão: podemos escrever a fórmula: "$= \$D3 * D\$6 + \$E3 * D\$7$", na célula D9 e copiar para as demais (o símbolo \$ colocado na frente da letra que indica a coluna ou em frente ao número que indica a linha fixa esta informação).

Para visualizar as transformações efetuadas, de forma automatizada, precisamos gerar o gráfico dos pontos da matriz transformada, que pode ser feito da seguinte forma:

Primeiro **selecionar** as células que contém a matriz transformada (na Figura 17

são as células que vão de D9 a N10) depois clicando em **Inserir**, em seguida, **Dispersão** nas opções de **Gráficos** e **Dispersão com linhas retas** (sem marcadores).
Assim teremos:

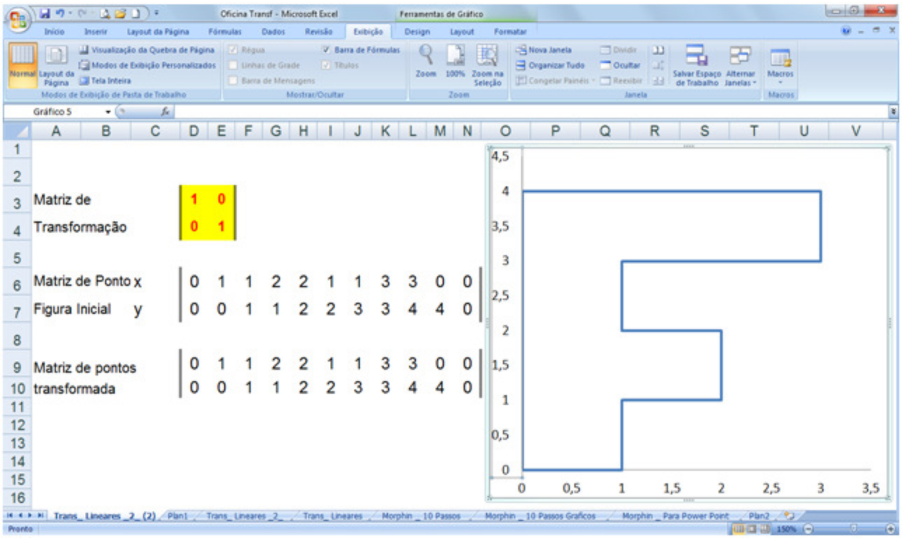


Figura 17 – Gráfico de uma Transformação no Plano

Para melhor visualizar as transformações formate[2] os eixos x e y, uma sugestão é clicar sobre cada eixo (botão da direita), acessando **Formatar Eixo**, e configurando, um eixo de cada vez, conforme Figura 6.

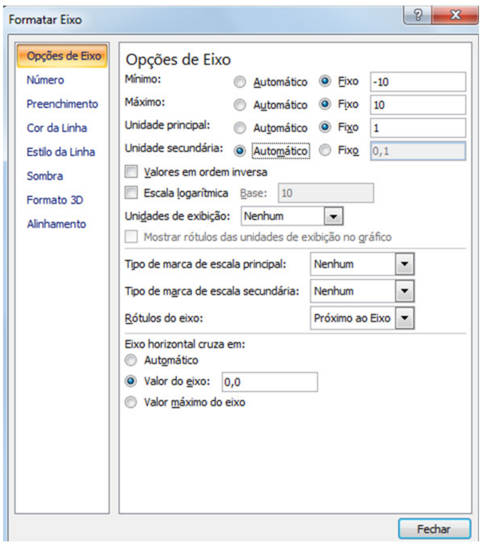


Figura 18 – Formatação dos Eixos

[2]Note que os eixos são formatados com Mínimo e Máximo automáticos, isto é necessário para que a escala dos eixos se ajustem aos pontos do qual devem gerar gráficos. Para esta proposta preferi a escala fixa pois assim teremos uma visualização melhor da dilatação e contração proporcional (mas perco a visualização dos pontos que estão fora deste intervalo) se o professor preferir pode deixar a escala em automático.

Assim quando modificarmos a matriz de transformação os cálculos e gráficos serão gerado automaticamente, como queríamos.

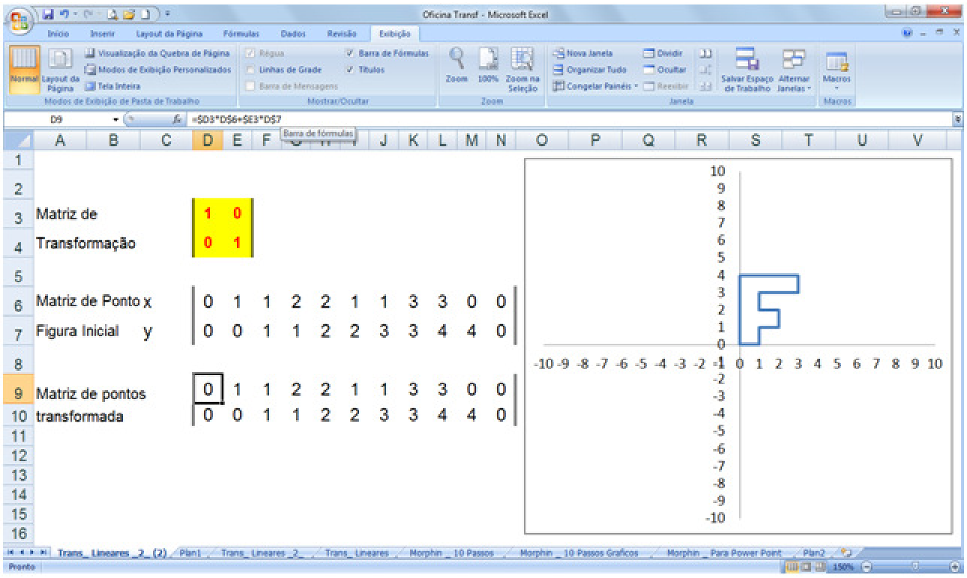


Figura 19 – Gráfico de uma Transformação no Plano com os eixos formatados

2.4 Aula 4: Matrizes de reflexões

Objetivos

Identificar as matrizes que geram reflexão no plano.

Metodologia

Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhe o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estão realizando as atividades. Apresentadas as matrizes de reflexão o professor pode sugerir aos alunos que as reproduzam na planilha eletrônica para verificar as transformações geradas nos gráficos. Pode-se chamar a atenção dos alunos para a simetria entre as figuras Inicial e Final e que as transformações preservaram as medidas da figura.

Avaliação

Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retome os conceitos.

Reflexão em torno do eixo x

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo x.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando esta transformação na Figura 1 (página 22), teremos:

Matriz de Transformação	1	0
	0	-1

Matriz de pontos da figura inicial	0	0	3	3	1	1	2	2	1	1	0
	0	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
Matriz de pontos da figura transformada	0	0	3	3	1	1	2	2	1	1	0
	0	-4	-4	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	0

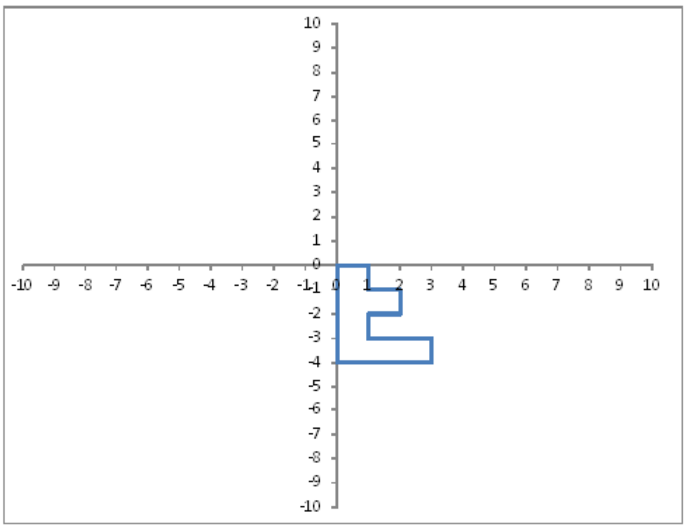


Figura 20 – Reflexão da Figura 1 em torno do eixo x

Reflexão em torno do eixo y

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(-x, y)$, simétrica em relação ao eixo y.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicando esta transformação na Figura 1, teremos:

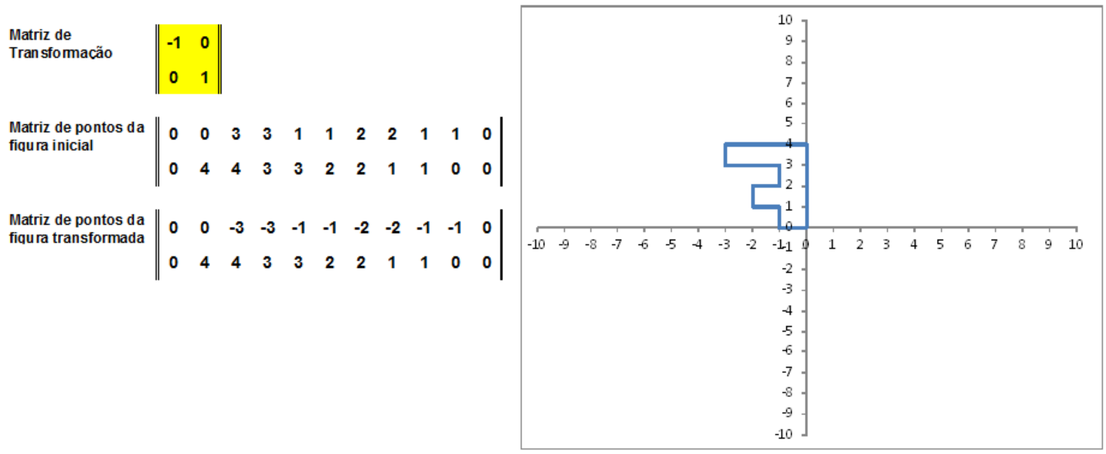


Figura 21 – Reflexão da Figura 1 em torno do eixo y

Reflexão em torno da origem

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(-x, -y)$, simétrica em relação a origem.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando esta transformação na Figura 1, teremos:

Reflexão em torno da reta $y = x$

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem (y, x), simétrica em relação a reta $y = x$.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicando esta transformação na Figura 1, teremos:

Reflexão em torno da reta $y = -x$

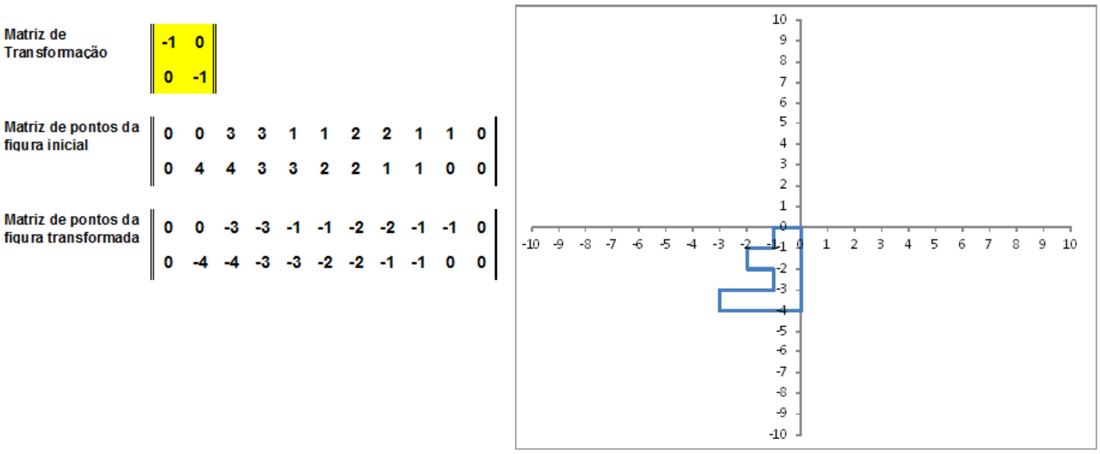


Figura 22 – Reflexão da Figura 1 em torno da origem

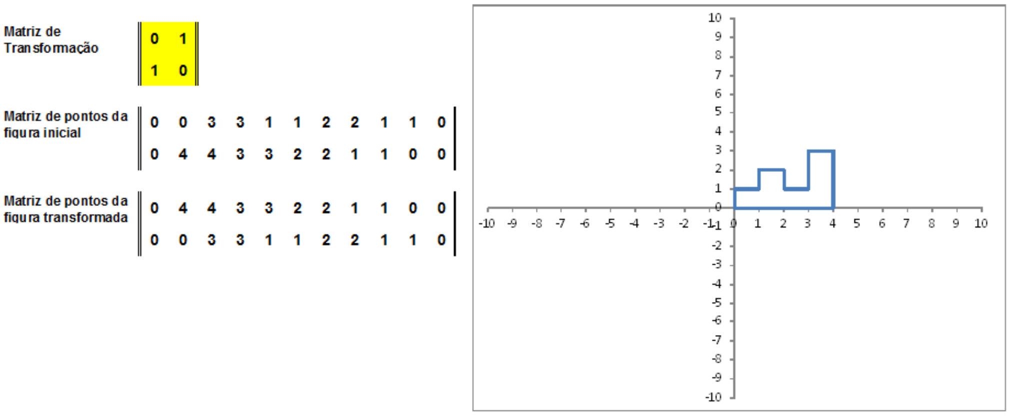


Figura 23 – Reflexão da Figura 1 em torno da reta $y = x$

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(-y, -x)$, simétrica em relação a reta $y = -x$.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicando esta transformação na Figura 1, teremos:

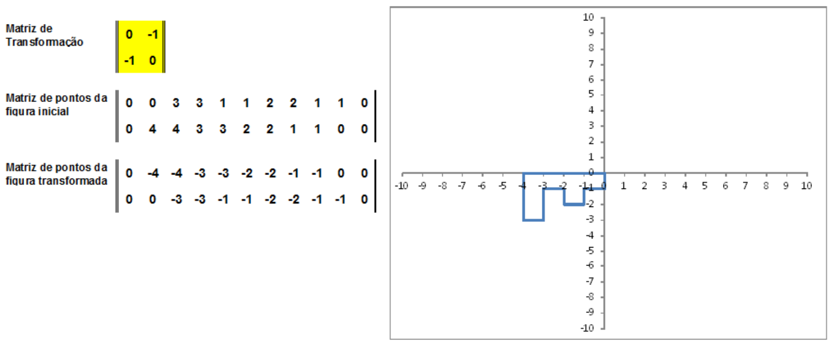


Figura 24 – Reflexão da Figura 1 em torno da reta $y = -x$

2.5 Aula 5: Matrizes de dilatações, contrações e cisalhamento

Objetivos

Identificar as matrizes que geram dilatações, contrações e cisalhamentos no plano.

Metodologia

Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhar o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estão realizando as atividades. Apresentadas as matrizes, o professor pode sugerir aos alunos que as reproduzam na planilha eletrônica para verificar as transformações geradas na figura. Pode-se chamar a atenção dos alunos para a simetria entre as figuras Inicial e Final, quais as transformações preservaram as medidas da figura e quais modificaram as suas medidas.

Avaliação

Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retome os conceitos.

Dilatação ou contração proporcional

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem (kx, ky), $k \in \mathbb{R}$.

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} \text{k} & 0 \\ 0 & \text{k} \end{pmatrix}$

Aplicando uma dilatação proporcional de fator $k = 2$, na Figura 1, teremos:

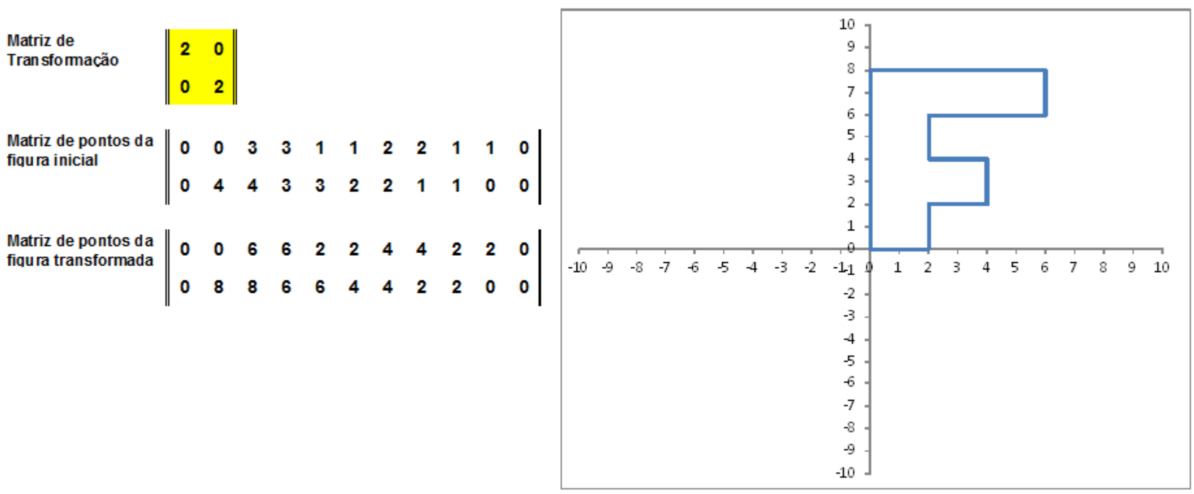


Figura 25 – Dilatação Proporcional da Figura 1 de fator $k = 2$

Dilatação ou contração na direção do eixo x

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem (kx, y), $k \in \mathbb{R}$.
Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} \text{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Aplicando uma dilatação na direção do eixo x de fator $k = 3$, na Figura 1, teremos:

Matriz de Transformação

3	0
0	1

Matriz de pontos da figura inicial

0	0	3	3	1	1	2	2	1	1	0
0	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0

Matriz de pontos da figura transformada

0	0	9	9	3	3	6	6	3	3	0
0	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0

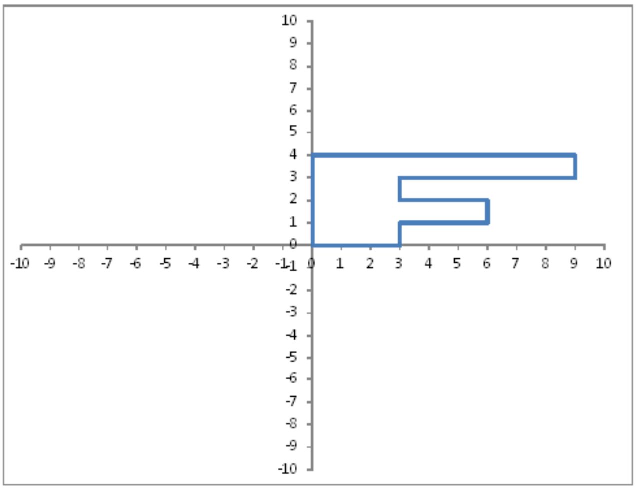


Figura 26 – Dilatação da Figura 1 na Direção o eixo x de fator $k = 3$

Dilatação ou contração na direção do eixo y

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem (x, ky), $k \in \mathbb{R}$.
Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{k} \end{pmatrix}$
Aplicando uma dilatação na direção do eixo x de fator $k = 3$, na Figura 1, teremos:

Cisalhamento horizontal

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(x + ky, y)$, $k \in \mathbb{R}$.
Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 1 & \text{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Aplicando cisalhamento horizontal de fator $k = 0,5$, na Figura 1, teremos:

Cisalhamento vertical

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(x, kx + y)$, $k \in \mathbb{R}$.

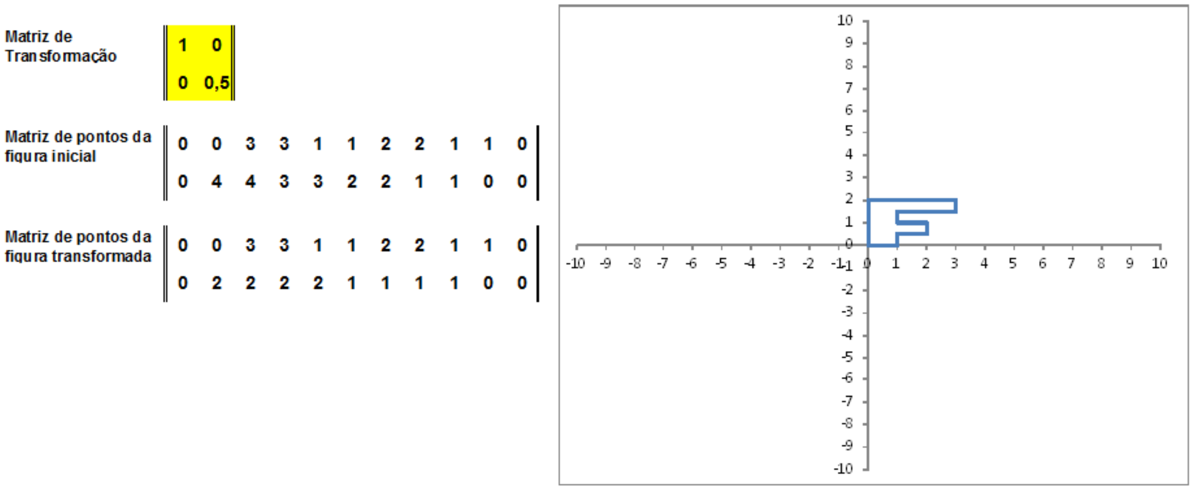


Figura 27 – Contração da Figura 1 na Direção do eixo y de fator $k = 0,5$

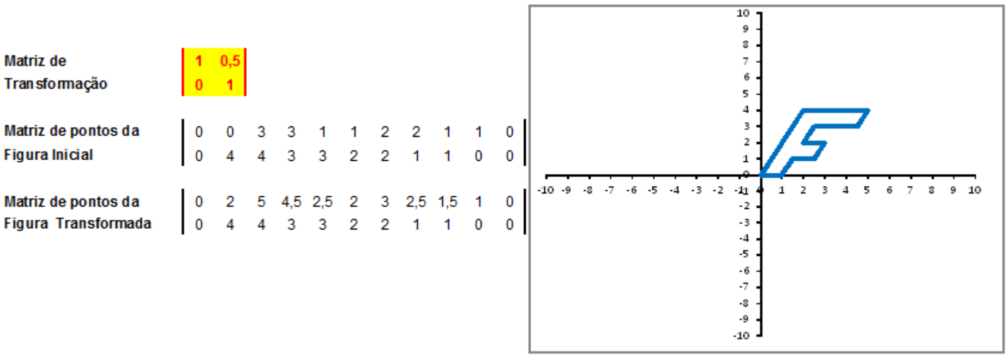


Figura 28 – Cisalhamento Vertical da Figura 1 de fator $k = 0,5$

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Aplicando cisalhamento vertical de fator $k = 0,5$, na Figura 1, teremos:

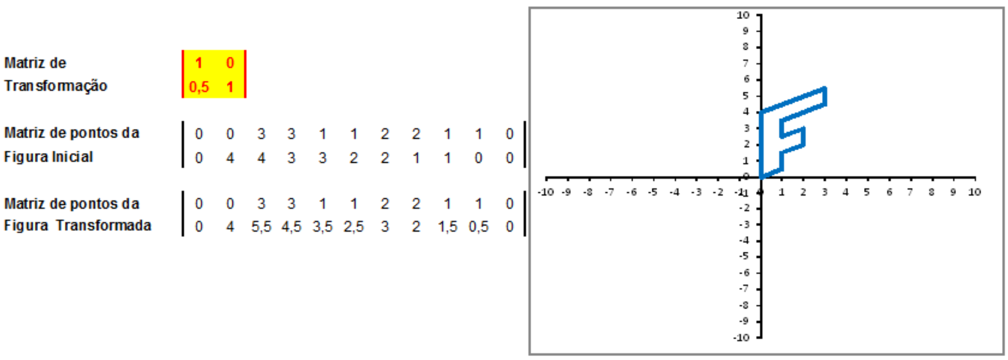


Figura 29 – Cisalhamento Vertical da Figura 1 de fator $k = 0,5$

2.6 Aula 6: Matrizes de rotação e matrizes de translação

Objetivos

Identificar as matrizes que geram rotações e translações no plano.

Metodologia

Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhe o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estão realizando as atividades. Apresentadas as matrizes que geram rotações e translações no plano, o professor pode sugerir aos alunos que as reproduzam na planilha eletrônica, para verificar as transformações geradas nos gráficos. Propor aos alunos que efetuem em seus computadores as atividades propostas do capítulo.

Avaliação

Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retomar os conceitos.

Matrizes de rotação de um ângulo θ, em torno da origem, no sentido anti-horário

Essa transformação leva cada ponto (x, y) para sua imagem:
$(x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta))$

Sua matriz de transformação é $T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Aplicando uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$, na Figura 1, teremos:

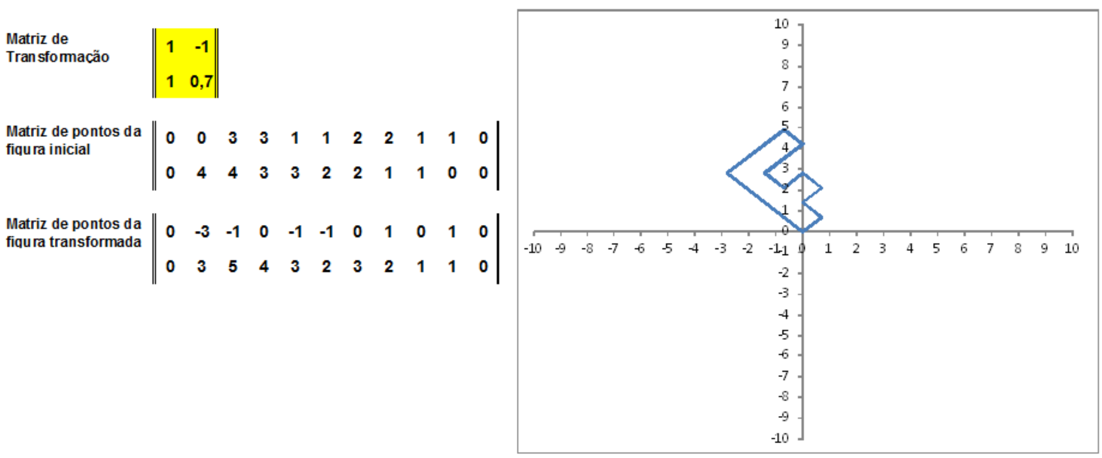


Figura 30 – Rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$, na Figura 1

Matriz de translação

Essa transformação associa cada ponto (x, y) a sua imagem $(x + a, y + b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Essa transformação é implementada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Esta é uma transformação do plano onde a figura final é congruente a figura inicial deslocada a unidades no eixo x e b unidades no eixo y.

Aplicando uma Translação segundo a coordenada $(5, 6)$, na Figura 1, onde a cada valor de x somamos 5 unidades e a cada valor de y somamos 6 unidades, teremos:

Matriz de Transformação	1	0									
	0	1									
Matriz de pontos da figura inicial	0	0	3	3	1	1	2	2	1	1	0
	0	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
Matriz da coordenada de translação	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Matriz de pontos da figura transformada	5	5	8	8	6	6	7	7	6	6	5
	6	10	10	9	9	8	8	7	7	6	6

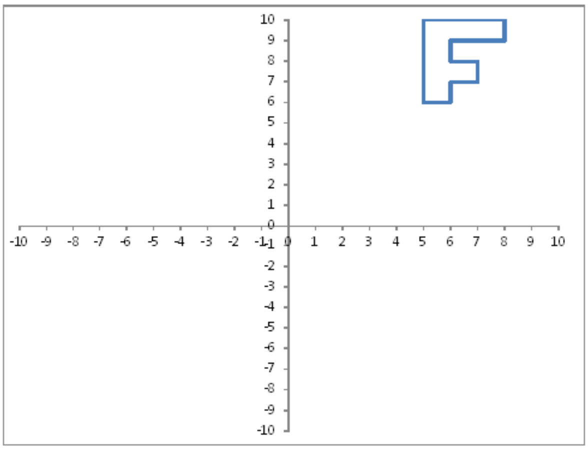


Figura 31 – Translação da Figura 1 segundo a coordenada $(5, 6)$

Seguem algumas atividades para fixação dos conteúdos estudados até aqui.

Atividades

1. Considere como imagem inicial o gráfico da Figura 32 efetue as transformações que seguem:

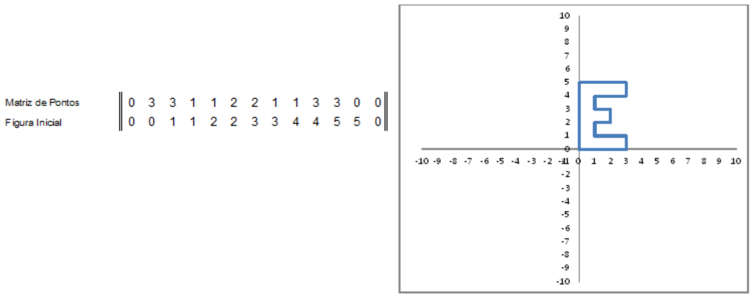
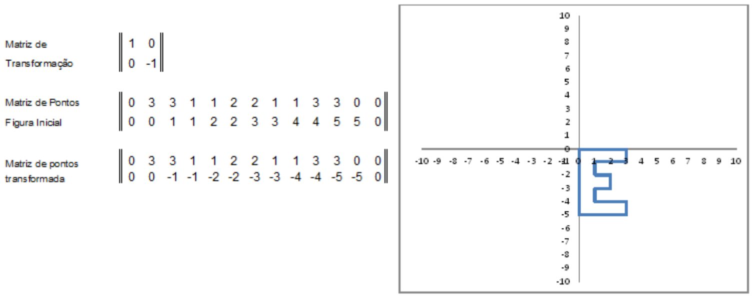
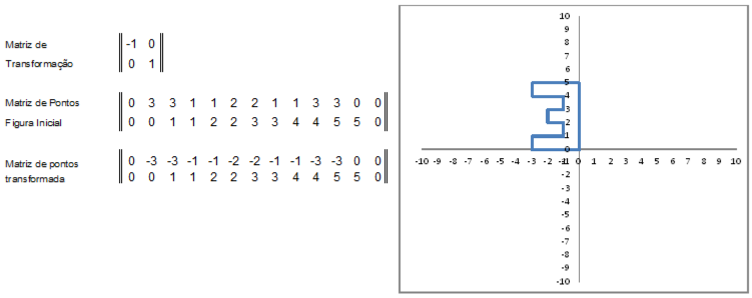


Figura 32 –

a) Reflexão em torno do eixo x.
Solução:



b) Reflexão em torno do eixo y.
Solução:



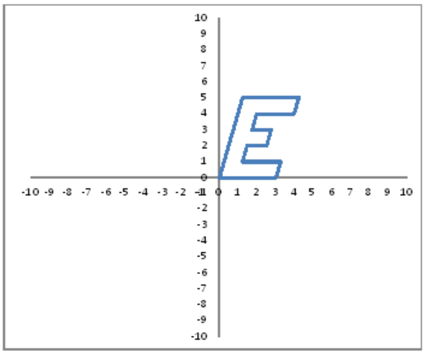
c) Cisalhamento horizontal de fator 0,25.

Solução:

Matriz de Transformação $\begin{vmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$



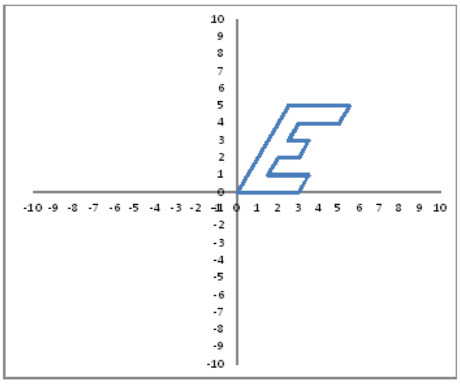
d) Cisalhamento horizontal de fator 0,5.

Solução:

Matriz de Transformação $\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$



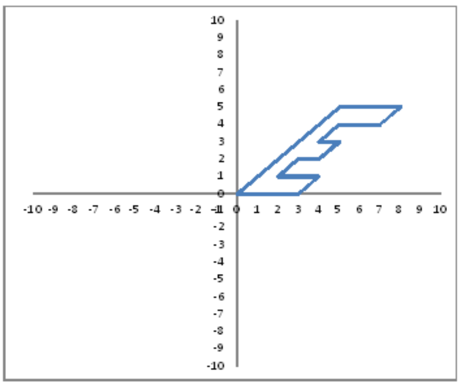
e) Cisalhamento horizontal de fator 0,75.

Solução:

Matriz de Transformação $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

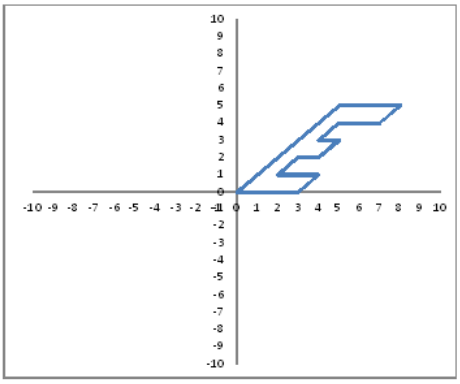


f) Cisalhamento horizontal de fator 1.
Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$



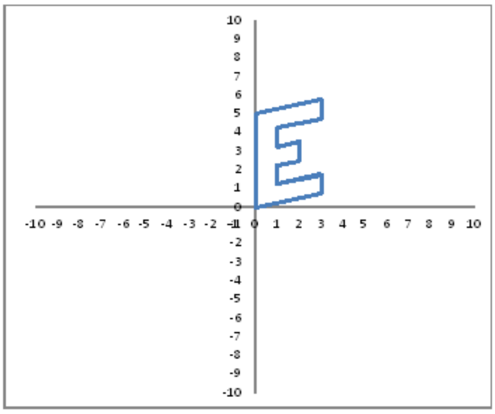
g) Descreva o efeito que o cisalhamento horizontal provoca na figura.
Solução: Espera-se que o aluno perceba que a cada unidade de y o valor de x fica deslocado k unidades.

h) Cisalhamento vertical de fator 0,25.
Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}25 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

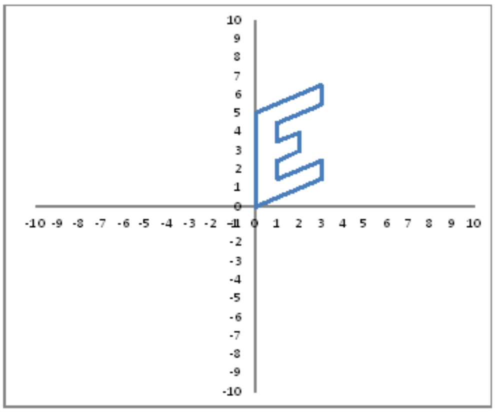


i) Cisalhamento vertical de fator 0,5.
Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

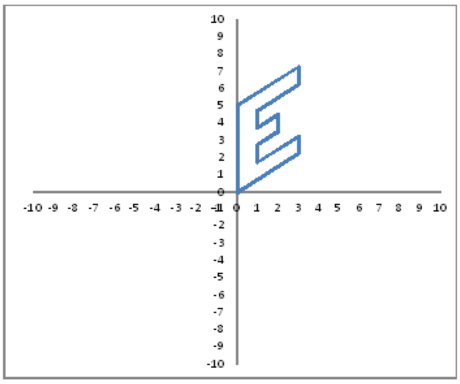


j) Cisalhamento vertical de fator 0,75.
Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}75 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 7 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

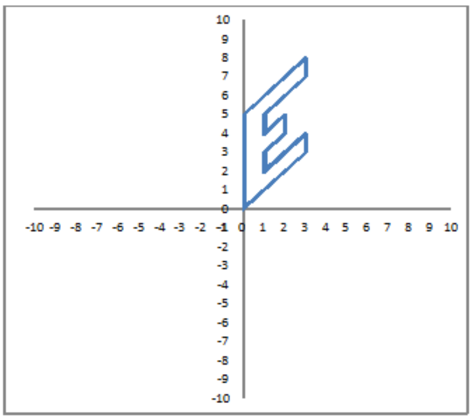


k) Cisalhamento vertical de fator 1.
Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7 & 8 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$



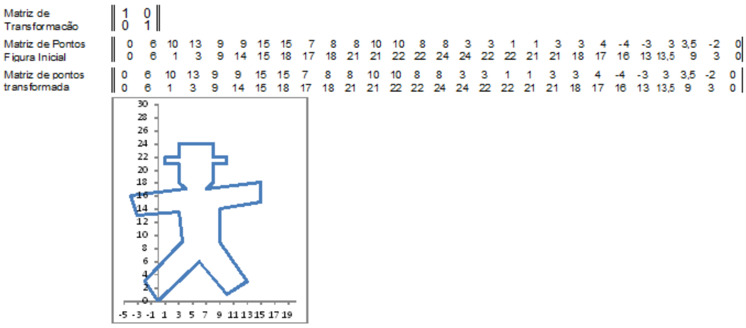
l) Descreva o efeito que o cisalhamento vertical provoca na figura.

Solução:

Espera-se que o aluno perceba que a cada unidade de x o valor de y fica deslocado k unidades.

2. Os seguintes pontos são vértices de uma figura, represente a matriz de pontos na planilha eletrônica e descubra qual é a figura (0, 0), (6,6), (10, 1), (13, 3), (9, 9), (9, 14), (15, 15), (15,18), (7, 17), (8, 18), (8, 21), (10, 21), (10, 22), (8, 22), (8, 24), (3, 24), (3, 22), (1, 22), (1, 21), (3, 21), (3, 18), (4, 17), (-4, 16), (-3, 13), (3, 13,5), (3,5, 9), (-2, 3), (0, 0).

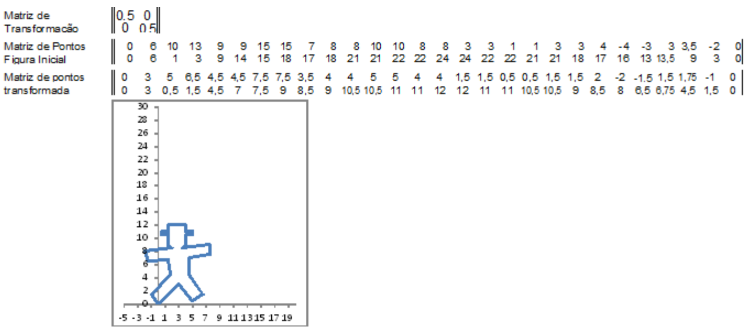
   Solução:



3. Efetue as seguintes transformações na figura do exercício anterior:

   a) Contração proporcional de fator $k = 0,5$.

   Solução:



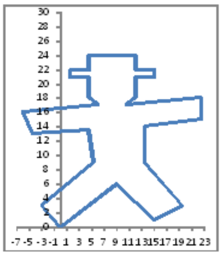
   b) Dilatação de fator $k = 1,5$ na direção do eixo x.

   Solução:

Matriz de Transformacão $\begin{Vmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3{,}5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13{,}5 & 9 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 9 & 15 & 19{,}5 & 13{,}5 & 13{,}5 & 22{,}5 & 22{,}5 & 10{,}5 & 12 & 12 & 15 & 15 & 12 & 12 & 4{,}5 & 4{,}5 & 1{,}5 & 1{,}5 & 4{,}5 & 4{,}5 & 6 & -6 & -4{,}5 & 4{,}5 & 5{,}25 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13{,}5 & 9 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

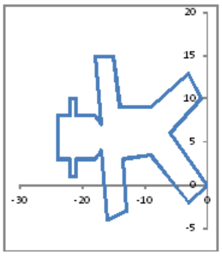


c) Rotação de um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário.
Solução:

Matriz de Transformacão $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3{,}5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13{,}5 & 9 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & -6 & -1 & -3 & -9 & -14 & -15 & -18 & -17 & -18 & -21 & -21 & -22 & -22 & -24 & -24 & -22 & -22 & -21 & -21 & -18 & -17 & -16 & -13 & -13{,}5 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3{,}5 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$

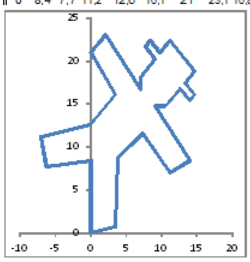


d) Reflexão no eixo y seguida de uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Solução:

Matriz de Transformacão $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3{,}5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13{,}5 & 9 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -6{,}3 & -7 & 0 & 3{,}5 & 0 & 2{,}1 & 7 & 7 & 9{,}1 & 7{,}7 & 8{,}4 & 9{,}8 & 11{,}2 & 14{,}7 & 13{,}3 & 14{,}7 & 14 & 12{,}6 & 10{,}5 & 9{,}1 & 14 & 11{,}2 & 7{,}35 & 3{,}85 & 3{,}5 & 0 \\ 0 & 8{,}4 & 7{,}7 & 11{,}2 & 12{,}6 & 16{,}1 & 21 & 23{,}1 & 16{,}8 & 18{,}2 & 20{,}3 & 21{,}7 & 22{,}4 & 21 & 22{,}4 & 18{,}9 & 17{,}5 & 16{,}1 & 15{,}4 & 16{,}8 & 14{,}7 & 14{,}7 & 8{,}4 & 7 & 11{,}55 & 8{,}75 & 0{,}7 & 0 \end{Vmatrix}$

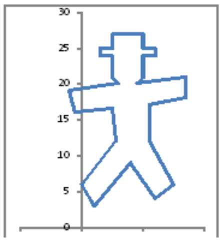


e) Translação segundo a coordenada $(2, 3)$. Solução:

Matriz de Transformação $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Matriz de Pontos Figura Inicial $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 10 & 13 & 9 & 9 & 15 & 15 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & -4 & -3 & 3 & 3{,}5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 & 14 & 15 & 18 & 17 & 18 & 21 & 21 & 22 & 22 & 24 & 24 & 22 & 22 & 21 & 21 & 18 & 17 & 16 & 13 & 13{,}5 & 9 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

Matriz de pontos transformada $\begin{Vmatrix} 2 & 8 & 12 & 15 & 11 & 11 & 17 & 17 & 9 & 10 & 10 & 12 & 12 & 10 & 10 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 6 & -2 & -1 & 5 & 5{,}5 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & 6 & 12 & 17 & 18 & 21 & 20 & 21 & 24 & 24 & 25 & 25 & 27 & 27 & 25 & 25 & 24 & 24 & 21 & 20 & 19 & 16 & 16{,}5 & 12 & 6 & 3 \end{Vmatrix}$



3 Morfismo

Um morfismo pode ser descrito como uma combinação de deformações de duas imagens distintas, associando características correspondentes das duas imagens. Uma das duas imagens é escolhida como imagem inicial e a outra como a imagem final. É usado para gerar um efeito de animado ou de transição de imagens, conforme a imagem abaixo onde é feito a transição entre as figuras de um barco a vela e uma estrela.

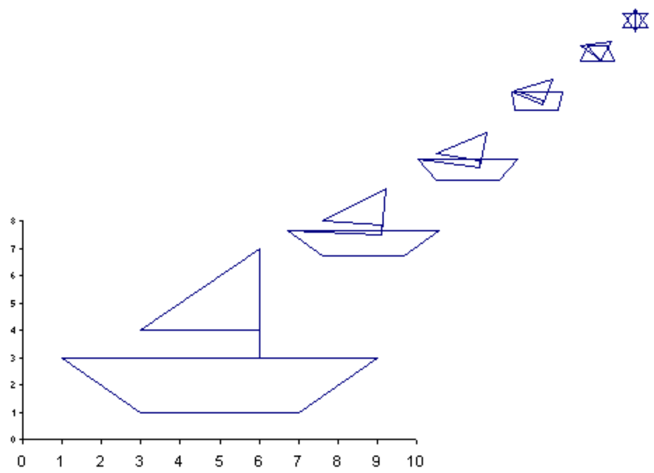


Figura 33 – Morfismo

3.1 Aula 7: Morfismo no plano

Objetivos

Definir, calcular e representar morfismos no plano.

Metodologia

Organizar a turma de modo que todos tenham acesso à planilha eletrônica e acompanhar o desenvolvimento dos alunos para garantir que todos estejam realizando as atividades. Programar a planilha eletrônica e efetuar alguns morfismos com equipamento multimidia para que os alunos possam acompanhar e reproduzir. Propor aos alunos que efetuem em seus computadores as atividades propostas do capítulo.

Avaliação

Verificar se todos os alunos conseguiram desenvolver as atividades, se necessário retome os conceitos.

Morfismo no plano

Representando os vértices da imagem inicial como uma matriz de pontos estendida I e os vértices da imagem final como uma matriz de pontos estendida F, então a matriz de Transição T entre I e F pode ser definida por:

$$T(k) = I + k(F - I), k \in [0, 1]$$

Note que, se $k = 0$ teremos $T(0) = I + 0(F - I) = I$ se $k = 1$ teremos $T(1) = I + 1(F - I) = I + F - I = F$.

Para ilustrar, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.1. Efetuar o morfismo de fator $k = 0,5$ do Triângulo ABD de vértices $(1, 1), (3, 1)$ e $(1, 3)$(figura inicial) e do Retângulo $AB'C'D'$ de vértices $(1, 1), (5, 1), (5, 4)$ e $(1, 4)$ (figura final).

Para utilizar a fórmula do morfismo precisamos que a matriz de pontos estendida dos vértices da figura inicial I e a matriz de pontos estendida dos vértices da figura final F tenham a mesma ordem.

Desta forma, como I tem ordem 2x4 e F tem ordem 2x5, vamos utilizar o ponto médio dos pontos $B = (3, 1)$ e $D = (1, 3)$.

A fórmula para cálculo do ponto médio destes pontos é dada por: $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ que nos dá o ponto $C = (2, 2)$.

Matriz de pontos estendida da figura inicial (Triângulo ABD) acrescido do ponto C: $I' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$(Note que novamente devemos repetir o primeiro ponto na última coluna).

Matriz de pontos estendida da figura final (Retângulo $AB'C'D'$): $F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Assim a matriz $T(k)$, com $k =$ **0,5** pode ser calculada da seguinte forma:

$$a_{11} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1 \qquad a_{21} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1$$

$$a_{12} = 3 + \mathbf{0{,}5}(5-3) = 3+1 = 4 \qquad a_{22} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1$$

$$a_{13} = 2 + \mathbf{0{,}5}(5-1) = 2+2 = 4 \qquad a_{23} = 2 + \mathbf{0{,}5}(4-2) = 2+1 = 3$$

$$a_{14} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1 \qquad a_{24} = 3 + \mathbf{0{,}5}(4-3) = 3+0,5 = 3,5$$

$$a_{15} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1 \qquad a_{25} = 1 + \mathbf{0{,}5}(1-1) = 1+0 = 1$$

Logo a matriz de pontos da figura intermediária (Quadrilátero $AB”C”D”$), para $k = 0,5$ será:

$$T(0,5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos gráficos da Figura 34, elaborados no Excel e sobrepostos, fica claro que a posição do ponto A é fixa, enquanto o ponto B “caminha” para a posição do ponto B', o ponto C “caminha” para a posição do ponto C' e o ponto D “caminha” para a posição do ponto D'.

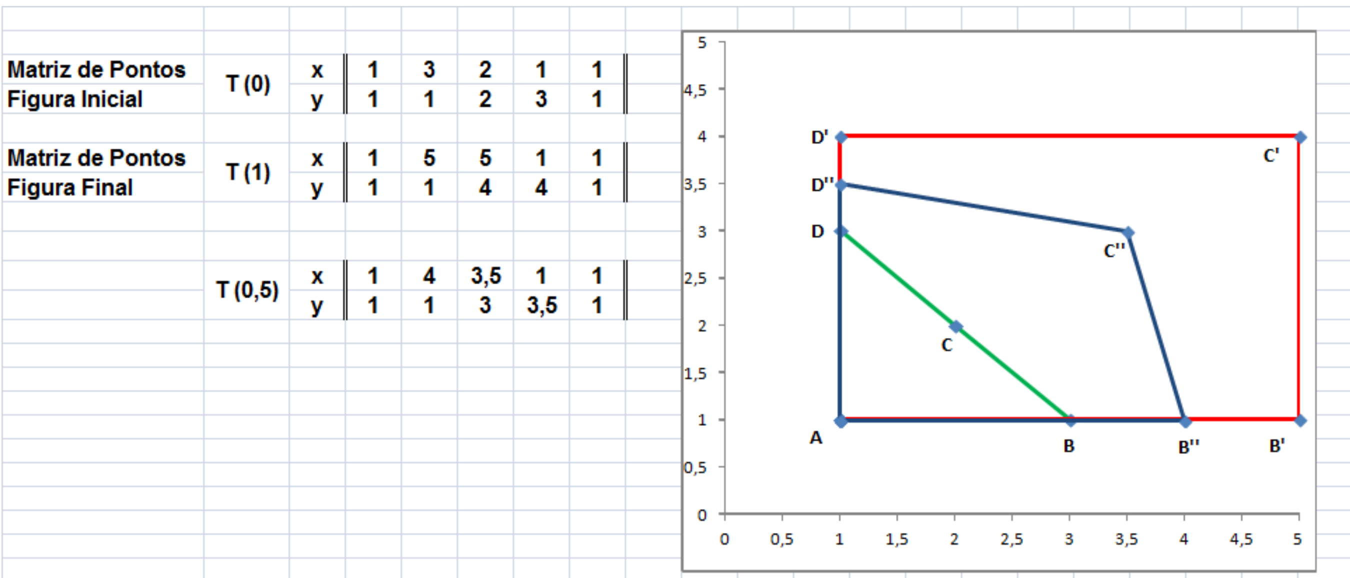


Figura 34 – Transição do Triângulo ABC para o Retângulo $AB'C'D'$ em $k = 0,5$

Exemplo 3.1.2. Efetuar o morfismo das imagens da Figura 35 e Figura 36, para

$k \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$ use um programa para criação/edição de apresentações gráficas para fazer a apresentação desta transição.

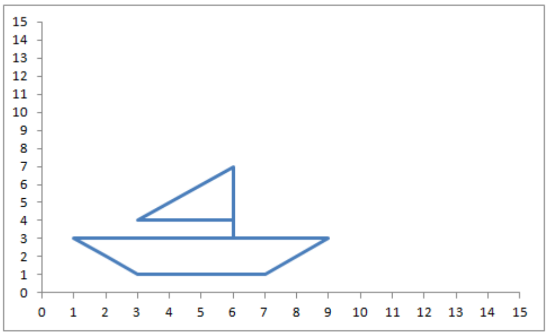


Figura 35 – Veleiro

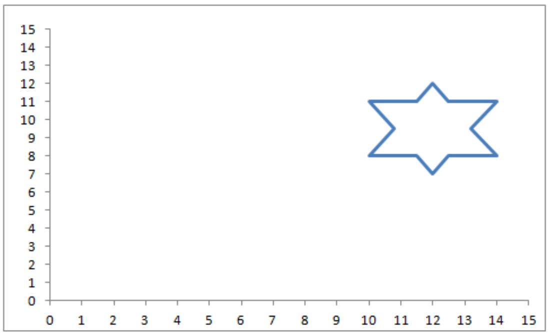


Figura 36 – Estrela

Note que as matrizes de pontos inicial e final são:

Figura 35: $I = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 6 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Figura 36:

$F = \begin{pmatrix} 10 & 11,5 & 12 & 12,5 & 14 & 13,2 & 14 & 12,5 & 12 & 11,5 & 10 & 10,8 & 10 \\ 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9,5 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 9,5 & 8 \end{pmatrix}$

Vamos inserir estas matrizes no Excel, para gerar as matrizes de pontos dos morfismos.

Um modo de resolver é primeiro inserindo a matriz I nas células que vão de E2 até Q3 e a matriz F nas células que vão de E5 até Q6.

Na célula C8 insiro o valor de $k = 0,1$;

Na célula E8 insiro a fórmula "$= E\$2 + \$C8 * (E\$5 - E\$2)$";

Na célula E9 a fórmula "$= E\$3 + \$C8 * (E\$6 - E\$3)$".

Selecionamos as células E8 e E9 (clicando com o botão esquerdo do mouse em E8 e arrastando o mouse até E9, mantendo o botão esquerdo do mouse pressionado) e copiamos para as células ao lado até a coluna Q, desta fórma a matriz $T(0,1)$ estará nas células que vão de E8 até Q9.

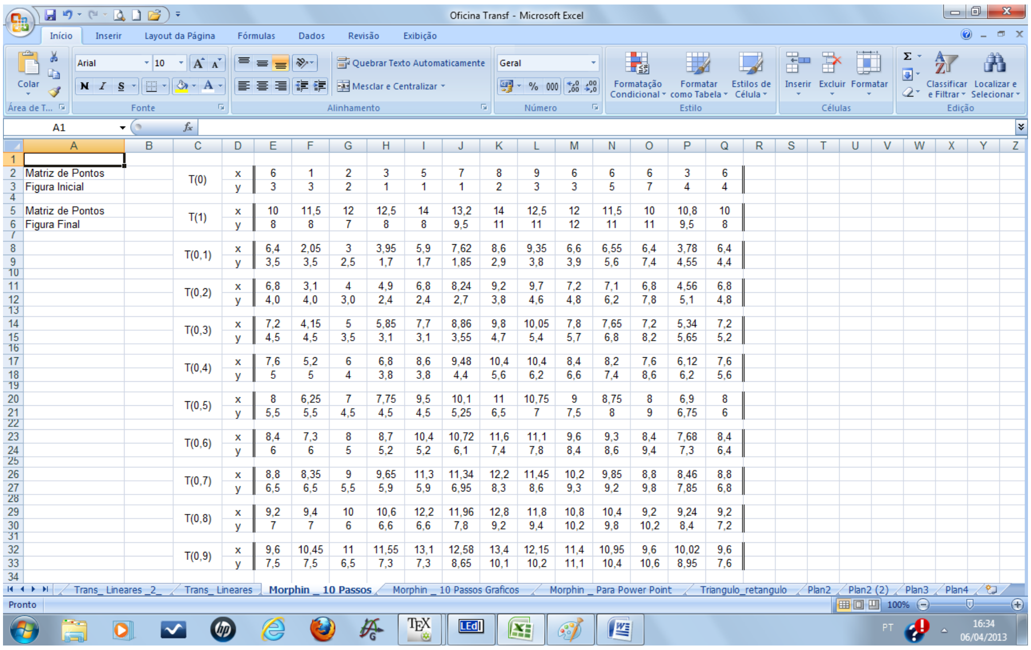
Nas células C11, C14, C17, C20, C23, C26, C29 e C32, inserimos os demais valores de k, respectivamente, 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 e 0,9.

Para finalizar os cálculos, selecionamos as células que vão de E8 até Q9 (clicando com o botão esquerdo do mouse em E8 e arrastando o mouse até Q9, mantendo o botão esquerdo do mouse pressionado) então clicamos, com o botão direito do mouse, nas células E11, E14, E17, E20, E23, E26, E29 e E32 e selecionamos colar, em cada uma delas.

Para cada uma destas matrizes precisamos gerar um gráfico para isso precisamos primeiro **selecionar** as células que contém a matriz I (de E2 até Q3), depois clicando em **Inserir**, em seguida, **Dispersão** nas opções de **Gráficos** e **Dispersão com linhas retas** (sem marcadores).

Para melhor visualizar as transições formatamos os eixos x e y, clicando sobre cada eixo (botão da direita), acessando **Formatar Eixo**, e configurando, um eixo de cada vez da seguinte forma:

Em Opções de Eixo; Mínimo selecionamos Fixo, 0,0; Máximo: Fixo, 15; Unidade principal: fixo, 1,0 (lembre de repetir o processo para o outro eixo).



	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
2	Matriz de Pontos	T(0)	x	6	1	2	3	5	7	8	9	6	6	6	3	6
3	Figura Inicial		y	3	3	2	1	1	1	2	3	3	5	7	4	4
5	Matriz de Pontos	T(1)	x	10	11,5	12	12,5	14	13,2	14	12,5	12	11,5	10	10,8	10
6	Figura Final		y	8	8	7	8	8	9,5	11	11	12	11	11	9,5	8
8		T(0,1)	x	6,4	2,05	3	3,95	5,9	7,62	8,6	9,35	6,6	6,55	6,4	3,78	6,4
9			y	3,5	3,5	2,5	1,7	1,7	1,85	2,9	3,8	3,9	5,6	7,4	4,55	4,4
11		T(0,2)	x	6,8	3,1	4	4,9	6,8	8,24	9,2	9,7	7,2	7,1	6,8	4,56	6,8
12			y	4,0	4,0	3,0	2,4	2,4	2,7	3,8	4,6	4,8	6,2	7,8	5,1	4,8
14		T(0,3)	x	7,2	4,15	5	5,85	7,7	8,86	9,8	10,05	7,8	7,65	7,2	5,34	7,2
15			y	4,5	4,5	3,5	3,1	3,1	3,55	4,7	5,4	5,7	6,8	8,2	5,65	5,2
17		T(0,4)	x	7,6	5,2	6	6,8	8,6	9,48	10,4	10,4	8,4	8,2	7,6	6,12	7,6
18			y	5	5	4	3,8	3,8	4,4	5,6	6,2	6,6	7,4	8,6	6,2	5,6
20		T(0,5)	x	8	6,25	7	7,75	9,5	10,1	11	10,75	9	8,75	8	6,9	8
21			y	5,5	5,5	4,5	4,5	4,5	5,25	6,5	7	7,5	8	9	6,75	6
23		T(0,6)	x	8,4	7,3	8	8,7	10,4	10,72	11,6	11,1	9,6	9,3	8,4	7,68	8,4
24			y	6	6	5	5,2	5,2	6,1	7,4	7,8	8,4	8,6	9,4	7,3	6,4
26		T(0,7)	x	8,8	8,35	9	9,65	11,3	11,34	12,2	11,45	10,2	9,85	8,8	8,46	8,8
27			y	6,5	6,5	5,5	5,9	5,9	6,95	8,3	8,6	9,3	9,2	9,8	7,85	6,8
29		T(0,8)	x	9,2	9,4	10	10,6	12,2	11,96	12,8	11,8	10,8	10,4	9,2	9,24	9,2
30			y	7	7	6	6,6	6,6	7,8	9,2	9,4	10,2	9,8	10,2	8,4	7,2
32		T(0,9)	x	9,6	10,45	11	11,55	13,1	12,58	13,4	12,15	11,4	10,95	9,6	10,02	9,6
33			y	7,5	7,5	6,5	7,3	7,3	8,65	10,1	10,2	11,1	10,4	10,6	8,95	7,6

Figura 37 – Matrizes de Pontos

Clicando (botão esquerdo do mouse) onde diz Série 1 e clique em **delete**, clique numa linha de grade e clique em **delete**.

Para elaborar a apresentação de slides, utilizamos o programa Microsoft PowerPoint 2007 (pode ser utilizado um outro apresentador de slide de forma análoga), o programa abrirá com um slide em branco no centro e uma visualização de seus slides na parte esquerda do monitor (só haverá um), clicamos com o botão direito do mouse e optamos por **excluir slide**.

Em seguida acessamos **Início**, e em **Novo Slide** optamos por **Em branco**, clicamos dez vezes na tecla f4 e assim teremos 11 slides em branco, nas quais copiaremos os gráficos das matrizes de pontos gerados pela planilha eletrônica, clicando no gráfico da matriz I com o botão direito do mouse optamos por copiar, voltando para o PowerPoint, no primeiro slide clicamos com o botão direiro do mouse e optamos por colar. Repetimos o processo para os gráficos das matrizes:
$T(0,1); T(0,2); T(0,3); T(0,4); T(0,5); T(0,6); T(0,7); T(0,8); T(0,9); F.$, nessa ordem.

Por fim teremos as figuras: Inicial, Final e 9 figuras intermediárias. Para automatizar as transições das figuras acesse em **Animações** a opção **Avançar Slide Automaticamente Após: 00:01** por fim pressionamos a tecla F5 para as transições começarem.

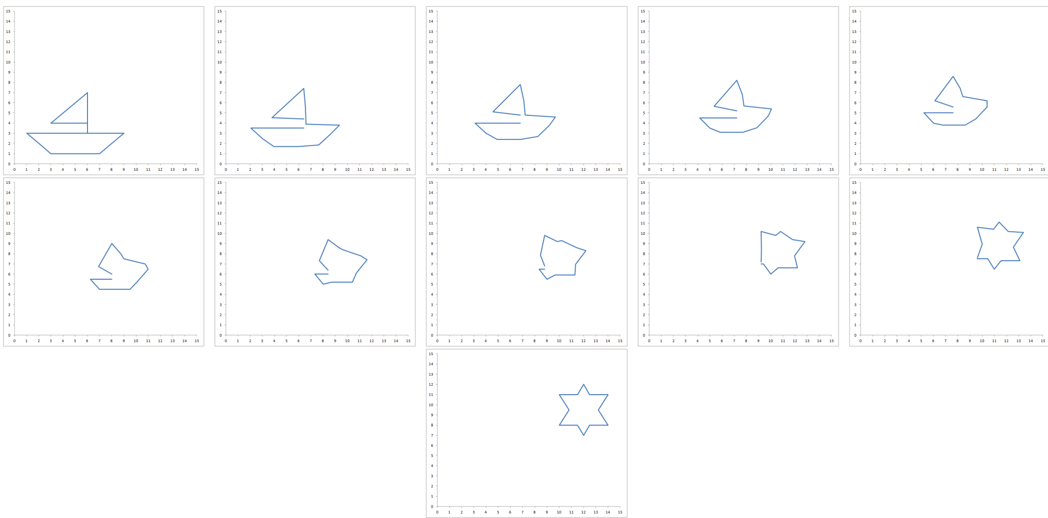


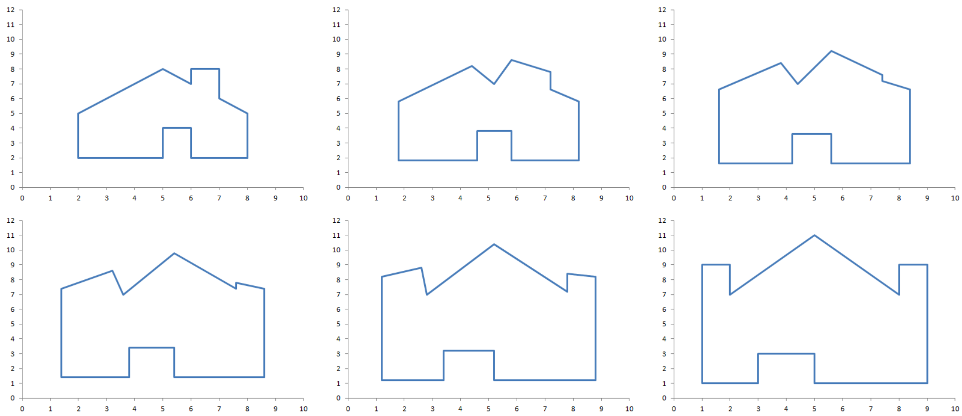
Figura 38 – Morfismo

Atividades

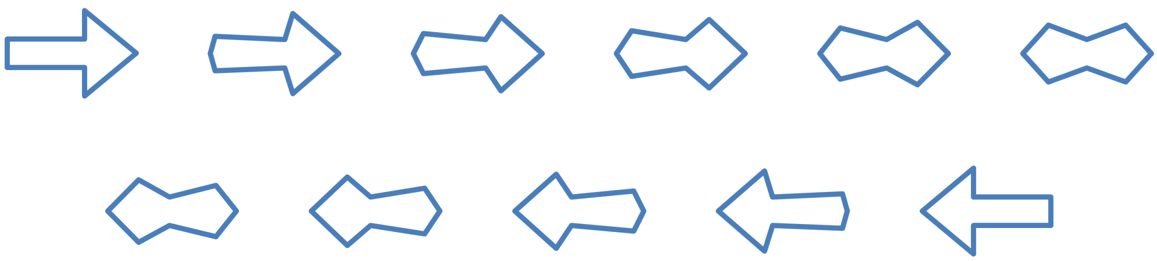
1. Dados os retângulos I de vértices: (1, 1), (7, 1), (7, 4), (1, 4), (1, 1) e F de vértices: (7, 0), (10, 0), (10, 6), (7, 6), (7, 0), para qual valor de k teremos um quadrado? Quais as coordenadas deste quadrado?
Solução:
Teremos um quadrado para k = 0,5. As coordenadas do quadrado serão: (4; 0,5),

(8,5; 0,5), (8,5; 5), (4, 5).

2. Efetue o morfismo das imagens I cujos vértices são as coordenadas (2, 2), (5, 2), (5, 4), (6, 4), (6, 2), (8, 2), (8, 5), (7, 6), (7, 8), (6, 8), (6, 7), (5, 8), (2, 5), (2, 2) e F cujos vértices são as coordenadas (1, 1), (3, 1), (3, 3), (5, 3), (5, 1), (9, 1), (9, 9), (8, 9), (8, 7), (5, 11), (2, 7), (2, 9), (1, 9), (1, 1), para $k \in \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$ e coloque-as em ordem começando com a imagem I e terminando com a imagem F numa apresentação de PowerPoint conforme delineado no exemplo 4.2.
   Solução:
   Seguindo o exemplo 3.1.2 temos:



3. Efetue o morfismo das imagens I cujos vértices são as coordenadas (1; 2,5), (1, 2),(4, 2),(4, 1),(6; 2,5),(4, 4),(4, 3),(1, 3),(1; 2,5) e F cujos vértices são as coordenadas (1; 2,5),(3, 1),(3, 2),(6, 2),(6; 2,5),(6, 3),(3, 3),(3, 4),(1; 2,5), para $k \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$ e coloque-as em ordem começando com a imagem I e terminando com a imagem F numa apresentação de PowerPoint.
   Solução:
   Seguindo o exemplo 3.1.2 temos:



4. Agora é sua vez de exercitar a criatividade, represente no plano duas figuras poligonais e efetue o morfismo das figuras em 5 etapas (lembre-se que o número de pontos considerados de cada figura deve ser o mesmo) e faça uma apresentação no PowerPoint para mostrar para os colegas.

   Resposta pessoal.

4 Possíveis continuações ou desdobramentos

Esta proposta de atividade foi pensada especialmente para aplicação no ensino médio, sabemos que muitas vezes o professor não dipõem de tempo para aprofundar este tipo de aplicação, desta forma procuramos apresentar apenas as ideias necessárias para o desenvonvimento das atividades e deixamos nessa seção sugestões para o professor interessado em seguir o estudo das transformações no plano.

Uma ideia interessante de ser estudada é a do ponto fixo: quais pontos não sofrem alterações quando efetuamos a transformação, ou seja, quais os pontos (x, y) tais que $T(x, y) = (x, y)$. Essa analise pode ser feita graficamente apenas analisando as imagens das transformações, ou de forma algébrica estudando a lei da transformação.

As transformações isométricas (transformações que não alteram as distâncias entre os pontos, ou seja mantém as medidas) podem ser facilmente identificadas pelos alunos simplesmente manipulando as matrizes de transformações e analisando as figuras geradas, logo é uma boa opção para a continuação dos estudos bem como sua relação com a noção de figuras congruentes.

O exercício nº 3 letra d do capítulo 2 oferece a motivação para que o professor possa introduzir a composição de transformações lineares, conceito importante que pode ser facilmente aplicado pelo aluno multiplicando as matrizes da transformação.

O professor pode ainda aproveitar as vantagens de se trabalhar com a planilha eletrônica no estudo de determinantes e como auxiliar na resolução de sistemas (pela regra de Cramer, por exemplo) que são os conteúdos que normalmente sucedem as operações com matrizes.

5 Considerações finais

Procuramos com esta proposta de atividade educacional ampliar o significado das operações com matrizes, proporcionando ao aluno uma interpretação geométrica para essa operações e com isso motivar os alunos ao estudo da matemática em especial às transformações lineares, além disso apresentar ao aluno um programa que pode ser importante tanto para estudar matemática como para sua inserção no mercado de trabalho.

Buscamos ainda propor, ao professor uma sequência de atividades diferenciadas utilizando o mínimo possível de conhecimento de planilha eletrônica, bem como apresentar algumas possibilidades de usos em expressões algébricas, sequências, progressões aritméticas e geométricas, matrizes e matemática financeira, para que o professor se aproprie dessa ferramenta e a utilize em suas aulas de forma a contribuir para a melhoria do ensino da matemática na educação básica.

Referências

AMBROSIO, U. D. *Ubiratan D Ambrosio*. São Paulo: 2011. 1 p. Disponível em: <http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/2011/02/influencia-da-tecnologia-no-fazer.html>. Acesso em: 20.01.2013. Citado na página 15.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001. 495-501 p. Citado na página 17.

BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear: 3. ed.* São Paulo: Harbra Ltda., 1986. 5-171 p. Citado na página 17.

BRADESCO, F. *Planilha Eletrônica*. 2011. Disponível em: <http://www-.fundacaobradesco.org.br/vv-apostilas/ex_suma.htm>. Acesso em: 30.01.2013. Citado na página 24.

EDUCAÇÃO, M. da. *Conhecimentos de Matemática*. Brasília: MEC, 2000. 40-55 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15.01.2013. Citado na página 15.

JACINSKI, E.; FARACO, C. A. *Tecnologias na Educação: uma solução ou um problema pedagógico?* Tese (Doutorado) — Revista Brasileira de Informática na Educação, V.10, n.2, Porto Alegre, 2002. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub-/index.php/rbie/article/view/2221/1984.> Acesso em: 10.01.2013. Citado na página 15.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear: 8. ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 39-104 p. Citado na página 17.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções Teórico-Metodológicas Sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: <http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/coordenacao/tese.> Acesso em: 05.01.2013. Citado na página 14.

MORAES, M. C. *Ubiratan D Ambrosio*. 1997. 1 p. Disponível em: <http://www.br-ie-.org/pub/index.php/rbie/article/view/2320/2082>. Acesso em: 25.01.2013. Citado na página 16.

WIKIPÉDIA, F. *Planilha Eletrônica*. 2012. 1 p. Disponível em: <http://pt.wikipedia-.org/wiki/Planilha _ eletronica>. Acesso em: 30.01.2013. Citado na página 16.

ANEXO A – Lista de atividades: utilizando a planilha eletrônica

1. O Índice de Massa Corpórea (IMC) é adotado pela Organização Mundial de Saúde para o cálculo do peso ideal de cada indivíduo. Para fazer o cálculo do IMC basta dividir sua massa em quilogramas pela altura ao quadrado (em metros). O número que será gerado deve ser comparado aos valores da tabela IMC (Entre 18,5 e 24,9 é o normal).

   Insira na célula A1 "Sua massa", na célula A2 "Sua altura", na célula A3 "IMC", na célula B1 o valor da sua massa em quilograma, na célula B2 o valor de sua altura em metros, insira na célula B3 uma fórmula adequada para calcular vários IMCs bastando para isso preencher as células B1 e B2.

2. Insira numa coluna do Excel, os seguintes itens (um em cada linha): Salário, Saldo no Banco, Total, deixe uma linha em branco e continue: Supermercado, Aluguel, Escola, Água/Luz, Telefone, Carro, Seguro, Vestuário, Lazer, Total, deixe uma linha em branco e insira: Saldo.
   Faça uma estimativa dos valores recebidos/gastos por sua família e insira na coluna ao lado, insira uma fórmula ao lado do item Saldo para que este seja calculado bastando atualizar os valores dos ítens.

3. Insira na célula A1 o primeiro valor da progressão aritmética definida por: $a_n = 2n + 5$. Insira na célula A2 uma fórmula para que seja calculado o segundo termo desta progressão aritmética, copie esta fórmula para as células abaixo de modo a calcular os primeiros 20 termos da progressão aritmética. Dica: para copiar a fórmula você pode clicar no botão direito do mouse e selecionar "copiar" em seguida clique na primeira das células onde você quer colar a fórmula, mantendo o botão pressionado mova o cursor para baixo até que todas as células fiquem selecionadas, clique novamente no botão direito e selecione "colar".

4. Utilize a mesma ideia da atividade anterior para escrever explicitamente os vinte

primeiros termos da progressão geométrica definida por $a_n = 3.2^n$

5. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Insira no Excel a matriz A nas células A1, B1, A2, B2; a matriz B nas células D1, E1, D2, E2, insira fórmulas nas células G1, H1, G2, H2, para que tenhamos: AXB.

   Utilize as fórmulas para calcular os seguintes produtos:
   a) BXA.

   b) AXC.

   c) CXA.

   d) BXC.

   e) CXB.

   f) $AXBXC$.

   g) $CXBXA$.

6. Dada a matriz de pontos $I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Represente estes pontos no papel quadriculado e ligue os pontos na ordem em que eles aparecem.

   b) Efetue a transformação definida pela matriz $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e represente a matriz transformada no papel quadriculado. O que aconteceu com a figura inicial após a transformação?

ANEXO B – Lista de atividades: transformações no plano

1. Efetue as seguintes transformações na figura cuja a matriz de pontos extendida é

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Reflexão em torno do eixo x.
   b) Reflexão em torno do eixo y.
   c) Cisalhamento horizontal de fator 0,25.
   d) Cisalhamento horizontal de fator 0,5.
   e) Cisalhamento horizontal de fator 0,75.
   f) Cisalhamento horizontal de fator 1.
   g) Descreva o efeito que o cisalhamento horizontal provoca na figura.
   h) Cisalhamento vertical de fator 0,25.
   i) Cisalhamento vertical de fator 0,5.
   j) Cisalhamento vertical de fator 0,75.
   k) Cisalhamento vertical de fator 1.
   l) Descreva o efeito que o cisalhamento vertical provoca na figura.

2. Os seguintes pontos são vértices de uma figura, represente a matriz de pontos na planilha eletrônica e descubra qual é a figura (0, 0), (6,6), (10, 1), (13, 3), (9, 9), (9, 14), (15, 15), (15,18), (7, 17), (8, 18), (8, 21), (10, 21), (10, 22), (8, 22), (8, 24), (3, 24), (3, 22), (1, 22), (1, 21), (3, 21), (3, 18), (4, 17), (-4, 16), (-3, 13), (3, 13,5), (3,5, 9), (-2, 3), (0, 0).

3. Efetue as seguintes transformações na figura do exercício anterior:
   a) Contração proporcional de fator $k = 0,5$.
   b) Dilatação de fator $k = 1,5$ na direção do eixo x.
   c) Rotação de um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário.
   d) Reflexão no eixo y seguida de uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$.
   e) Translação segundo a coordenada $(2, 3)$.

ANEXO C – Lista de atividades: Morfismo

1. Dados os retângulos I de vértices: (1, 1), (7, 1), (7, 4), (1, 4), (1, 1) e F de vértices: (7, 0), (10, 0), (10, 6), (7, 6), (7, 0), para qual valor de k teremos um quadrado? Quais as coordenadas deste quadrado?

2. Efetue o morfismo das imagens I cujos vértices são as coordenadas (2, 2), (5, 2), (5, 4), (6, 4), (6, 2), (8, 2), (8, 5), (7, 6), (7, 8), (6, 8), (6, 7), (5, 8), (2, 5), (2, 2) e F cujos vértices são as coordenadas (1, 1), (3, 1), (3, 3), (5, 3), (5, 1), (9, 1), (9, 9), (8, 9), (8, 7), (5, 11), (2, 7), (2, 9), (1, 9), (1, 1), para $k \in \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$ e coloque-as em ordem começando com a imagem I e terminando com a imagem F numa apresentação de PowerPoint conforme delineado no exemplo 4.2.

3. Efetue o morfismo das imagens I cujos vértices são as coordenadas (1; 2,5),(1, 2),(4, 2),(4, 1),(6; 2,5),(4, 4),(4, 3),(1, 3),(1; 2,5) e F cujos vértices são as coordenadas (1; 2,5),(3, 1),(3, 2),(6, 2),(6; 2,5),(6, 3),(3, 3),(3, 4),(1; 2,5), para $k \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$ e coloque-as em ordem começando com a imagem I e terminando com a imagem F numa apresentação de PowerPoint.

4. Agora é sua vez de exercitar a criatividade, represente no plano duas figuras poligonais e efetue o morfismo das figuras em 5 etapas (lembre-se que o número de pontos considerados de cada figura deve ser o mesmo) e faça uma apresentação no PowerPoint para mostrar para os colegas.