

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

José Xavier Batista

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA:
DEMONSTRAÇÃO E ATIVIDADES COM O
WINPLOT

Santo André - SP

2013

JOSÉ XAVIER BATISTA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: DEMONSTRAÇÃO E ATIVIDADES
COM O WINPLOT

Dissertação apresentada
ao Curso de Mestrado
Profissional em Matemática da
Universidade Federal do ABC, como
requisito parcial para obtenção do Grau
de Mestre. Área de Concentração:
Álgebra

Orientador: Prof. Dr. JOÃO CARLOS DA MOTTA FERREIRA

Santo André - SP

2013

JOSÉ XAVIER BATISTA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: DEMONSTRAÇÃO E ATIVIDADES
COM O WINPLOT

Dissertação apresentada
ao Curso de Mestrado
Profissional em Matemática da
Universidade Federal do ABC, como
requisito parcial para obtenção do Grau
de Mestre. Área de Concentração:
Álgebra

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. JOÃO CARLOS DA MOTTA FERREIRA - Orientador
UFABC

Prof^a Dr^a RENATA PRENSTTETER GAMA
UFSCAR

Prof^a Dr^a VIRGÍNIA CARDIA CARDOSO
UFABC

Santo André - SP

2013

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus e depois a minha querida esposa Jocélia e amados filhos Thiago e Gabriel e meus pais José e Nadir.

Agradecimentos

Agradeço, acima de tudo, a Deus que me guiou e fortaleceu nessa árdua caminhada.

A minha família que me apoiou e sofreu comigo, suportando minha ausência em muitos momentos. Esse título também é deles.

Aos amigos que me ajudaram e estiveram juntos nessa caminhada, em especial Vitor, Viviane, Jorge e Andréia e a tantos outros colegas de outros polos do Profmat.

Ao Professor Doutor João Carlos Motta Ferreira, que com sua dedicação me acompanhou e incentivou, se tornando um amigo sereno e, quando preciso, um professor rigoroso.

Agradeço também a Sociedade Brasileira de Matemática e a Capes por essa oportunidade e por esse mestrado que muito me enriqueceu como professor e também como matemático.

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é apresentar e demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra e utilizar o software Winplot para uma ideia intuitiva do enunciado desse Teorema, para os alunos do ensino médio, devido a impossibilidade de compreensão de sua demonstração, na sua forma original. Nesse sentido, esse trabalho apresenta uma breve história e construção dos números complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra, que se apóia sobre essa construção, com algumas de suas consequências importantes. Apresentamos o software Winplot com alguns dos seus principais comandos e propomos algumas atividades relacionadas ao enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra, estabelecendo conexões entre algumas áreas da Matemática, como por exemplo Geometria Analítica.

Palavras-chaves: Números complexos, Polinômios, Teorema Fundamental da Álgebra, Software Winplot.

Abstract

The principal objective of this project is to show and proof the Fundamental Theorem of Algebra and to use the software Winplot to give a intuitive idea of the Fundamental Theorem of Algebra, to ensino médio students due to impossibility of the understanding its proof, in its original form. In this sense, this work show a brief history and construction of the complex numbers, the Fundamental Theorem of Algebra, that support on this construction, with some of the its important consequences. We show the Winplot software with some of the main commands and propose some activities related with the Fundamental Theorem of Algebra, establishing connection between some Mathematics parts, for example analytic Geometry.

Keywords: Fundamental Theorem of Algebra, Complex Numbers, Polynomial, Winplot software.

Lista de Figuras

2.1	Imersão de \mathbb{R} em \mathbb{C}	13
2.2	Plano Complexo	15
2.3	Conjugação de números complexos	15
2.4	Módulo de z	16
3.1	Os conjuntos $D_r(z_0)$, $\overline{D}_r(z_0)$, $D'_r(z_0)$ e $C_r(z_0)$	27

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Números Complexos	1
1.2 Teorema Fundamental da Álgebra	4
2 Números e Polinômios Complexos	7
2.1 Construção dos Números Complexos	7
2.2 Conjugado	14
2.3 Forma polar	16
2.4 Argumento de um número complexo	18
2.5 As raízes n -ésimas de um número complexo	20
2.6 Polinômios Complexos e Graus de Polinômios	22
2.7 Raízes e fatorização de polinômios complexos	23
3 Conceitos Básicos da Topologia e Análise Complexa	26
3.1 Topologia básica dos complexos	26
3.2 Continuidade dos polinômios em \mathbb{C}	29
4 Teorema Fundamental da Álgebra e Suas Consequências	32
4.1 Teorema Fundamental da Álgebra	32
4.2 Raízes em polinômios de grau um e dois	39

	x
4.3 Raízes de polinômios do tipo $p(z) = z^n - a$	40
5 Consequências e Atividades para o Ensino Médio	41
5.1 Justificativa Pedagógica	41
5.2 Atividade 1	45
5.3 Atividade 2	47
5.4 Atividade 3	49
5.5 Atividade 4	52
5.6 Atividade 5	53
5.7 Atividades Teóricas	54
6 Apêndice	55
6.1 Atividade 1	55
6.2 Atividade 2	57
6.3 Atividade 3	60
6.4 Atividade 4	63
6.5 Atividade 5	65
Referências Bibliográficas	66

Capítulo 1

Introdução

Nesse capítulo apresentamos uma breve história dos números complexos e do Teorema Fundamental da Álgebra. Esse capítulo tem dois objetivos: primeiro lugar desmitificar a crença de que os números complexos surgiram para resolver certas equações quadráticas e em segundo lugar apresentar uma história, ainda que breve, sobre esse importante Teorema mostrando quantos grandes matemáticos trabalharam para que sua validade fosse reconhecida. Esse capítulo está baseado em [19], [13], [5] e [9]

1.1 Números Complexos

Os números complexos não se originaram, como alguns supõem, da necessidade de dar uma solução para a equação $x^2 + 1 = 0$. Problemas e operações que não tem solução são extremamente comuns na Matemática. Eis alguns exemplos:

- $x \equiv 0 \pmod{2}$, tal que x é ímpar;
- $x = x + 2$;
- Desenhar um triângulo no plano euclidiano com ângulos internos α , β e γ tais que $\alpha + \beta + \gamma = 200^\circ$.

Logo era natural aceitar que equações do tipo $x^2 + a = 0$, com $a > 0$, não tinham solução, pois essa solução passava pela extração de raiz quadrada de números negativos, o que é impossível em \mathbb{R} .

Só que o problema da extração de raiz quadrada de números negativos teve que ser repensado após a descoberta de um método para resolução de equações do terceiro grau por Nicolo Fontana de Brescia(1499 - 1557), mais como Tartaglia. O método de Tartaglia foi publicado em 1545 por Gerolamo Cardano (1501-1576) no livro *Ars Magna*, motivo pelo qual esse método é conhecido como método de Cardano.

O método de Cardano permitia descobrir a raiz real de toda equação do tipo $y^3+py+q = 0$. Com algumas manipulações algébricas, também descobertas por Tartaglia, é possível escrever qualquer equação completa do terceiro grau, ou seja $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, em uma equação do tipo $y^3+py+q = 0$. Logo o método de Cardano resolve todas equações do terceiro grau. Nesse método a raiz real da equação $y^3 + py + q = 0$ é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.1)$$

Cardano sabia de antemão que $x = 4$ é uma solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, pois $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$, logo aplicando seu método nessa equação Cardano esperava encontrar $x = 4$ como solução. Vejamos o que Cardano encontrou

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{121 \cdot (-1)}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{121 \cdot (-1)}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ou seja, se o método funcionasse para equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, devemos ter $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 4$. Logo a resolução algébrica dessa equação passava pelo cálculo de uma raiz quadrada de um número negativo, no caso analisado, $\sqrt{-1}$. Esse fato intrigou Cardano por toda a sua vida.

Somente em 1572 Rafael Bombelli(1526-1572) publica *L'Algebra*, onde aparece as seguintes regras operatórias e as fórmulas da adição e multiplicação

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) &= -1 \\
 (-\sqrt{-1}).(-\sqrt{-1}) &= -1 \\
 (-\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) &= 1 \\
 -1.(\sqrt{-1}) &= -\sqrt{-1} \\
 (a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{-1} \\
 (a + b\sqrt{-1}).(c + d\sqrt{-1}) &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

O livro *L'Algebra* é o resultado dos estudos sobre esse novo tipo de número e foi iniciado por volta de 1550, alguns anos após Cardano publicar seu *Ars Magna*. Utilizando suas regras e fórmulas, Bombelli encontrou os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 (2 + \sqrt{-1})^3 &= [(2 + \sqrt{-1}).(2 + \sqrt{-1})] .(2 + \sqrt{-1}) \\
 &= [(2.2 - 1.1) + (2.1 + 1.2)\sqrt{-1}] .(2 + \sqrt{-1}) \\
 &= (3 + 4\sqrt{-1}).(2 + \sqrt{-1}) \\
 &= (3.2 - 4.1) + (3.1 + 4.2)\sqrt{-1} \\
 &= 2 + 11\sqrt{-1} \\
 (2 - \sqrt{-1})^3 &= [(2 - \sqrt{-1}).(2 - \sqrt{-1})] .(2 - \sqrt{-1}) \\
 &= [(2.2 - (-1).(-1)) + (2.(-1) + (-1).2)\sqrt{-1}] .(2 - \sqrt{-1}) \\
 &= (3 - 4\sqrt{-1}).(2 - \sqrt{-1}) \\
 &= (3.2 - (-4).(-1)) + (3.(-1) + (-4).2)\sqrt{-1} \\
 &= 2 - 11\sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

então

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 2 + 2 = 4 \quad (1.3)$$

Comparando (1.2) e (1.3) percebemos que o método desenvolvido por Bombelli auxiliava o cálculo da raiz de uma equação do terceiro grau quando aparecia raiz quadrada

de número negativos. Por causa desses resultados, esses 'números' começaram a ser aceitos como ferramenta computacional, mas não eram vistos como números, com existência efetiva. O próprio Cardano rejeitava a ideia de aceitar esses 'artifícios' como números, apesar de de ser inevitável que esses artifícios tinham vindo para ficar.

Por volta de 1750, Leonard Euler(1707 - 1783) denotou $\sqrt{-1}$ por i nos trabalhos de Bombelli e deduziu várias propriedades desses números, como a forma polar dos números complexos. Euler tentou a partir da fórmula de resolução da equação do quarto grau, descoberta por Lodovico Ferrari (1522 - 1565), encontrar uma fórmula resolutive para equações do quinto grau. Mas todas as tentativas falharam.

Outro grande matemático, Joseph Louis Lagrange(1736 - 1816) também tentou encontrar uma fórmula para resolver equações do quinto grau e teve o mesmo insucesso de Euler. Lagrange chegou a publicar um trabalho intitulado *Reflexões sobre a solução de equações polinômiais* cerca de trinta anos após as tentativas frustradas de Euler.

Surgia naturalmente algumas questões: será que toda equação polinomial tem solução? e se tiver é possível encontrar uma fórmula resolutive? e será que esses novos números serão suficientes ou precisaremos de outros números?

Antes que essas questões fossem respondidas, um fato importante fez com esses entes ou recursos algébricos começassem a aceitar como números: a descoberta de uma interpretação geométrica para tais números. Essa interpretação geométrica veio através dos trabalhos de Caspar Wessel (1745 - 1818) em 1797 e de Jean Robert Argand (1768 - 1822) em 1806. Essa representação relacionava cada número complexo com um par ordenado, ou o vetor tendo origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade nesse par ordenado. A partir dessa representação os números complexos passaram a ser aceitos verdadeiramente como números.

1.2 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra tem uma longa história e é uma das páginas mais bonitas da História da Matemática.

Depois da aceitação dos números complexos, pelo menos como ferramenta computacional ou resultado intermediário para soluções de equações algébricas, Albert Girard introduziu em 1629 o problema de saber o número de raízes de uma equação algébrica

qualquer. Ele afirmava que toda as equação de grau n tinha n raízes. Girard aceita inclusive que as soluções pudessem ser impossíveis, ou seja, números negativos ou raízes de números negativos. Mas Girard não apresenta nenhuma prova para essa afirmação.

Em 1637, René Descartes(1696-1750) prova a regra para o número máximo de raízes reais de um polinômio. Mas ele não apresenta nada sobre a existência de tais raízes.

Um avanço significativo ocorreu em 1746, quando Jean Le Rond d'Alembert encontra um demonstração, considerada bastante difícil, quando estudava um método para integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais. Entretanto a prova de d'Alembert tinha um erro que só foi corrigido em 1851 por V. Puiseux(1820-1883). É interessante observar que na literatura francesa o Teorema Fundamental da Álgebra é conhecido como Teorema de d'Alembert.

Como d'Alembert, outros matemáticos encontraram demonstrações que ou apresentavam falhas ou estavam incompletas. Só para citar algumas temos Euler em 1742, Lagrange em 1772, Laplace em 1795 e James Wood em 1798. Algumas dessas demonstrações foram posteriormente corrigidas.

Em 1799, Gauss apresenta a primeira demonstração considerada correta do Teorema Fundamental da Álgebra em sua tese de doutorado. Gauss apresentou mais três demonstrações para o Teorema: duas em 1816 sendo uma bastante algébrica e outra baseada na teoria das integrações e mais uma em 1849(no jubileu de seu doutoramento)onde ele apresenta pela primeira vez uma demonstração para polinômios com variável e coeficientes complexos.

Mas a demonstração dada por Gauss não foi a primeira correta. Em 1814 Jean-Robert Argand(1768-1822) apresentou uma demonstração completa e sem erros baseada em um esboço que o próprio Argand havia publicado em 1806. Entretanto a prova de Argand não foi aceita por utilizar um resultado ainda não demonstrado, o da existência de um mínimo em funções contínuas definidas em um conjunto compacto. Esse resultado só foi provado em 1861 por Wierstrass. A demonstração de Argand é considerada a mais fácil e uma das mais algébricas. Fácil por conseguir trazer o problema do campo dos números complexos para o campo dos números reais e algébrica pois utiliza o mínimo possível de elementos de Análise. Nossa demonstração é uma variação da prova de Argand.

Atualmente o Teorema Fundamental da Álgebra é demonstrado em cursos de Aná-

lise Complexa como corolário do Teorema de Liouville.

Um comentário bastante interessante é o Teorema Fundamental da Álgebra pertence a uma classe de Teoremas cuja demonstração garantem a existência de algum objeto matemático, mas não diz como construir tal objeto. Esse é justamente o caso do Teorema Fundamental da Aritmética, que garante a existência de infinitos primos, e o Teorema Fundamental do Cálculo. Talvez por isso não seja dada nenhuma justificativa para a validade do Teorema Fundamental da Álgebra na Educação Básica.

Capítulo 2

Números e Polinômios Complexos

Nesse capítulo faremos a construção do Corpo dos Números Complexos e introduziremos as noções de polinômios complexos, raízes complexas e o conceito de fatoração. Na construção dos números complexos apresentaremos suas principais propriedades e demonstraremos alguns resultados necessários à demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, o principal resultado dessa dissertação. A construção que faremos está baseada em [20], [10], [12], [13] e [11].

2.1 Construção dos Números Complexos

Definição 2.1. *Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definamos nesse novo conjunto duas operações binárias*

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad e \quad (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2), \quad (2.1)$$

denominadas adição e multiplicação, respectivamente.

Definição 2.2. *Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 . Dizemos que z_1 é igual a z_2 , e escrevemos $z_1 = z_2$, se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.*

O conjunto \mathbb{R}^2 , munido das operações de adição e multiplicação e da noção de igualdade, será denotado por \mathbb{C} e denominado de *conjunto dos números complexos*.

Proposição 2.1. *O conjunto \mathbb{C} é um corpo, isto é, as operações de adição e multiplicação verificam as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 \quad (\text{lei associativa da adição}),$$

- (ii) $z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$ (lei comutativa da adição),
- (iii) o elemento $(0, 0)$, denominado de elemento neutro da adição ou zero, é o único número complexo tal que $z_1 \oplus (0, 0) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$,
- (iv) para todo elemento $z_1 = (x_1, y_1)$, o elemento $-z_1 = (-x_1, -y_1)$, denominado de elemento oposto aditivo ou simétrico, é o único número complexo tal que $z_1 \oplus (-z_1) = (0, 0)$,
- (v) $z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) = (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3$ (lei associativa da multiplicação),
- (vi) $z_1 \otimes z_2 = z_2 \otimes z_1$ (lei comutativa da multiplicação),
- (vii) o elemento $(1, 0)$, denominado de unidade da multiplicação, é o único número complexo tal que $z_1 \otimes (1, 0) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$,
- (viii) para todo elemento $z_1 = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$, o elemento $\frac{1}{z_1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right)$, denominado de inverso da multiplicação ou simplesmente de inverso, é o único número complexo tal que $z_1 \otimes \frac{1}{z_1} = (1, 0)$,
- (ix) $z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3)$ (lei distributiva da multiplicação em relação a adição),

para quaisquer que sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Para quaisquer que sejam os números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$:

- (i) Pela definição da adição em \mathbb{C} e pela propriedade associativa da adição, em \mathbb{R} , temos:

$$\begin{aligned}
 z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) &= (x_1, y_1) \oplus ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)) \\
 &= (x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
 &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\
 &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\
 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \oplus (x_3, y_3) \\
 &= ((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) \oplus (x_3, y_3) \\
 &= (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3.
 \end{aligned}$$

(ii) Pela definição da adição em \mathbb{C} e pela propriedade comutativa, em \mathbb{R} , temos:

$$\begin{aligned}
 z_1 \oplus z_2 &= (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \\
 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
 &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\
 &= (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) \\
 &= z_2 \oplus z_1.
 \end{aligned}$$

(iii) A propriedade do número complexo $(0, 0)$ é evidente. Agora, suponhamos que (a, b) seja um número complexo tal que $z_1 \oplus (a, b) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. Segue disso que:

$$\begin{aligned}
 z_1 \oplus (a, b) = z_1 &\implies (x_1, y_1) \oplus (a, b) = (x_1, y_1) \\
 &\implies (x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1) \\
 &\implies x_1 + a = x_1 \quad \text{e} \quad y_1 + b = y_1 \\
 &\implies a = x_1 - x_1 \quad \text{e} \quad b = y_1 - y_1 \\
 &\implies a = 0 \quad \text{e} \quad b = 0 \\
 &\implies (a, b) = (0, 0).
 \end{aligned}$$

Assim, $(0, 0)$ é o único número complexo com tal propriedade.

(iv) É evidente que $z_1 \oplus (-z_1) = (0, 0)$. Agora, suponhamos que (a, b) seja um número complexo tal que $z_1 \oplus (a, b) = (0, 0)$. Segue disso que:

$$\begin{aligned}
 z_1 \oplus (a, b) = (0, 0) &\implies (x_1, y_1) \oplus (a, b) = (0, 0) \\
 &\implies (x_1 + a, y_1 + b) = (0, 0) \\
 &\implies x_1 + a = 0 \quad \text{e} \quad y_1 + b = 0 \\
 &\implies a = -x_1 \quad \text{e} \quad b = -y_1 \\
 &\implies (a, b) = (-x_1, -y_1).
 \end{aligned}$$

Assim, $-z_1 = (-x_1, -y_1)$ é o único número complexo com tal propriedade.

(v) Pela definição da multiplicação em \mathbb{C} e pela propriedade associativa da multiplicação,

em \mathbb{R} , temos:

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) &= (x_1, y_1) \otimes ((x_2, y_2) \otimes (x_3, y_3)) \\
&= (x_1, y_1) \otimes (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\
&= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2), x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\
&= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2, x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1y_2 + y_1x_2)x_3 + (x_1x_2 - y_1y_2)y_3) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \otimes (x_3, y_3) \\
&= ((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)) \otimes (x_3, y_3) \\
&= (z_1 \otimes z_2) \otimes z_3.
\end{aligned}$$

(vi) Pela definição da multiplicação em \mathbb{C} e pela propriedade comutativa da multiplicação em \mathbb{R} , temos:

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes z_2 &= (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \\
&= (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + y_1x_2) \\
&= (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) \\
&= z_2 \oplus z_1.
\end{aligned}$$

(vii) A propriedade do número complexo $(1, 0)$ é evidente. Agora, suponhamos que (a, b) seja um número complexo tal que $z_1 \otimes (a, b) = z_1$, para todo $z_1 \in \mathbb{C}$. Primeiramente, observemos que se (a, b) for o elemento neutro da adição, então $z_1 = z_1 \otimes (a, b) = z_1 \otimes (0, 0) = (x_1 \cdot 0 - y_1 \cdot 0, y_1 \cdot 0 + x_1 \cdot 0) = (0, 0)$, para qualquer $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, o que é um absurdo. Logo, devemos ter $(a, b) \neq (0, 0)$. Assim, para $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ tal que $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
z_1 \otimes (a, b) = z_1 &\implies (x_1, y_1) \otimes (a, b) = (x_1, y_1) \\
&\implies (x_1a - y_1b, x_1b + y_1a) = (x_1, y_1) \\
&\implies \begin{cases} x_1a - y_1b = x_1 \\ x_1b + y_1a = y_1 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x_1a - y_1b = x_1 \\ y_1a + x_1b = y_1 \end{cases}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação, do sistema (2.2), por x_1 e a segunda equação por y_1 temos:

$$\begin{cases} x_1 a - y_1 b = x_1 \\ y_1 a + x_1 b = y_1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 a - x_1 y_1 b = x_1^2 \\ y_1^2 a + x_1 y_1 b = y_1^2 \end{cases}.$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1^2 a - x_1 y_1 b = x_1^2 \\ y_1^2 a + x_1 y_1 b = y_1^2 \end{cases} &\implies x_1^2 a + y_1^2 a = x_1^2 + y_1^2 \\ &\implies (x_1^2 + y_1^2) a = x_1^2 + y_1^2 \\ &\implies (x_1^2 + y_1^2) a - (x_1^2 + y_1^2) = 0 \\ &\implies (x_1^2 + y_1^2)(a - 1) = 0 \\ &\implies a = 1. \end{aligned}$$

Substituindo $a = 1$ no sistema (2.2), obtemos $x_1 b = 0$ e $y_1 b = 0$. Segue disso que $b = 0$. Consequentemente, temos $(a, b) = (1, 0)$. Assim, $(1, 0)$ é o único número complexo com tal propriedade.

(viii) A partir de um cálculo direto, podemos mostrar que $z_1 \otimes \frac{1}{z_1} = (1, 0)$. Agora, se para $z_1 = (x_1, y_1) \neq (0, 0)$ temos que $(a, b) \in \mathbb{C}$ é tal que $z_1 \otimes (a, b) = (1, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (a, b) = (1, 0) &\implies (x_1, y_1) \otimes (a, b) = (1, 0) \\ &\implies (x_1 a - y_1 b, x_1 b + y_1 a) = (1, 0) \\ &\implies \begin{cases} x_1 a - y_1 b = 1 \\ y_1 a + x_1 b = 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (2.3) por x_1 e a segunda equação por y_1 temos:

$$\begin{cases} x_1 a - y_1 b = 1 \\ y_1 a + x_1 b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 a - x_1 y_1 b = x_1 \\ y_1^2 a + x_1 y_1 b = 0 \end{cases}. \tag{2.4}$$

Somando as linhas de (2.4) e considerando que $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1^2 a - x_1 y_1 b = x_1 \\ y_1^2 a + x_1 y_1 b = 0 \end{cases} &\implies x_1^2 a + y_1^2 a = x_1 \\ &\implies a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) na segunda equação de (2.3), temos:

$$y_1 a + x_1 b = 0 \implies \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} + x_1 b = 0 \implies \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + b = 0 \implies b = -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Assim, $(a, b) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right)$. Logo, $\frac{1}{z_1}$ é o único número complexo com tal propriedade.

(ix) Aplicando as definições da adição e da multiplicação em \mathbb{C} e a propriedade distributiva, em \mathbb{R} , temos:

$$\begin{aligned} z_1 \otimes (z_2 \oplus z_3) &= (x_1, y_1) \otimes ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \otimes (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 - y_1 y_2 - y_1 y_3, x_1 y_2 + x_1 y_3 + y_1 x_2 + y_1 x_3) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3), (x_1 y_2 + x_2 y_1) + (x_1 y_3 + x_3 y_1)) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \oplus (x_1 x_3 - y_1 y_3, x_1 y_3 + x_3 y_1) \\ &= ((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)) \oplus ((x_1, y_1) \otimes (x_3, y_3)) \\ &= (z_1 \otimes z_2) \oplus (z_1 \otimes z_3). \end{aligned}$$

No que segue, faremos a imersão do conjunto \mathbb{R} no conjunto \mathbb{C} . Para isso, utilizaremos a linguagem da Álgebra Linear. Tal imersão nada mais é do que o isomorfismo entre \mathbb{R} e um subespaço de \mathbb{C} . Assim, embora os conjuntos \mathbb{R} e \mathbb{C} tenham naturezas e estruturas algébricas diferentes, o isomorfismo garantirá a existência de uma cópia algébrica de \mathbb{R} em \mathbb{C} . Isso permitirá um abuso de linguagem ao escrever $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, conforme [11], a saber: o conjunto do pares ordenados com a segunda coordenada igual a zero. A imersão nos trará muitos benefícios quanto a notação dos números complexos e a escrita das operações em \mathbb{C} , pois poderemos utilizar as mesmas notações utilizadas em \mathbb{R} . A imersão será feita, conforme o resultado, abaixo.

Teorema 2.1. *Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $T(x) = (x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. As asserções são verdadeiras:*

(i) T é injetiva;

(ii) T preserva as operações de adição e multiplicação.

Demonstração. A demonstração de 2.1 é trivial. De fato:

(i) Para quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2 , com $x_1 \neq x_2$, temos que $T(x_1) = (x_1, 0) \neq (x_2, 0) = T(x_2)$, pela definição (2.2). Logo T é injetiva.

(ii) Agora, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, a partir das definições de T e das operações, em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) \\ &= (x_1 + x_2, 0 + 0) \\ &= (x_1, 0) \oplus (x_2, 0) \\ &= T(x_1) \oplus T(x_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(x_1 x_2) &= (x_1 x_2, 0) \\ &= (x_1 x_2 - 00, x_1 0 + 0x_2) \\ &= (x_1, 0) \otimes (x_2, 0) \\ &= T(x_1) \otimes T(x_2). \end{aligned}$$

□

A função T está representada no diagrama a seguir:

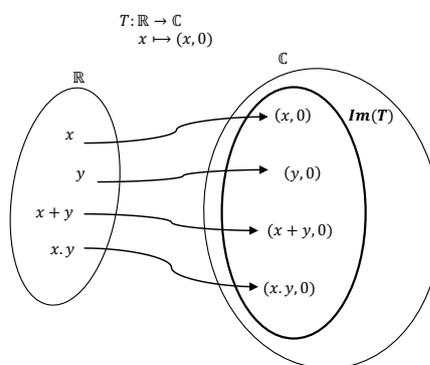


Figura 2.1: Imersão de \mathbb{R} em \mathbb{C}

Poderíamos elevar T à categoria de função bijetora, reduzindo o contradomínio ao conjunto dos pontos de \mathbb{C} que tem a segunda ordenada igual a zero, ou seja, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid z = (a, 0), \text{ para } a \in \mathbb{R}\}$.

Introduzamos agora uma notação algébrica mais confortável. Para isso, observemos que, para todo número complexo $z = (x, y)$, podemos escrevê-lo na forma

$$(x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = (x, 0) \oplus (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) \oplus ((y, 0) \otimes (0, 1)), \quad (2.6)$$

onde $(0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$. Assim, identificando os elementos $(x, 0)$ e $(y, 0)$ com os números reais x e y , respectivamente, pelo Teorema (2.1), as operações binárias \oplus e \otimes com os símbolos $+$ e \cdot , respectivamente, e definindo $i = (0, 1)$, então podemos escrever a expressão (2.6) na forma $(x, y) = x + yi$, onde $i^2 = -1$. Nesse caso, as operações binárias, de adição e multiplicação, se escreverão na forma

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \text{ e } (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i.$$

2.2 Conjugado

Para dar um significado geométrico do que definiremos a seguir, faremos algumas convenções.

Definição 2.3. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, definimos ***a*** como a ***parte real*** e ***b*** como a ***parte imaginária*** de z e as denotamos por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$, respectivamente.

Como todo par ordenado (a, b) é equivalente ao número complexo $z = a + bi$, representaremos geometricamente os números complexos como pares ordenados do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , denominado de *plano complexo*. Nele, todo número complexo tem sua parte real, representada pela abscissa do ponto (*eixo real*) e sua parte imaginária pela ordenada do ponto (*eixo imaginário*). O número complexo $0 = 0 + 0i$ é representado pela origem.

Definição 2.4. Dado o número complexo $z = a + bi$, definimos o conjugado de z como $\bar{z} = a - bi$.

O conjugado tem uma representação geométrica interessante: z e \bar{z} são simétricos em relação ao eixo real (fig 2.3)

A proposição a seguir lista as principais propriedades do conjugado.

Proposição 2.2. Para todo e qualquer $z, w \in \mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades:

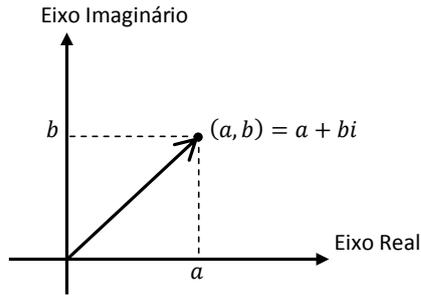


Figura 2.2: Plano Complexo

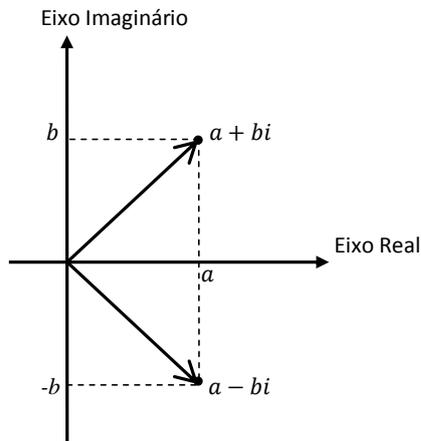


Figura 2.3: Conjugação de números complexos

$$(i) \quad \bar{\bar{z}} = z;$$

$$(ii) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$(iii) \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w;$$

$$(iv) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z);$$

$$(v) \quad z + (-\bar{z}) = 2\operatorname{Im}(z)i;$$

Demonstração. Sejam $z = a + bi$ e $w = x + yi \in \mathbb{C}$. Então:

$$(i) \quad \bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z;$$

$$(ii) \quad \overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (x + yi)} = \overline{(a + x) + (b + y)i} = (a + x) - (b + y)i = (a - bi) + (x - yi) = \bar{z} + \bar{w};$$

$$(iii) \quad \overline{z\bar{w}} = \overline{(a + bi)(x + yi)} = \overline{(ax - by) + (bx + ay)i} = (ax - by) - (bx + ay)i = ax - by - bxi - ayi = ax + byi^2 - bxi - ayi = a(x + yi) - bi(x - yi) = (a - bi)(x - yi) = \bar{z}\bar{w};$$

$$(iv) \quad z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = a + bi + a - bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z);$$

$$(v) \quad z + (-\bar{z}) = (a + bi) + [-(a - bi)] = a + bi - a + bi = 2bi = 2\operatorname{Im}(z)i.$$

□

2.3 Forma polar

O módulo de um número real x , representado por $|x|$, é definido como a distância de x a 0, ou seja, $|x| = \sqrt{x^2}$. Vamos definir de maneira análoga o módulo de um número complexo.

Definição 2.5. *O módulo ou valor absoluto de um número complexo $z = a + bi$ é definido como a distância de z até a origem 0, ou seja:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

A fig. 2.4 representa graficamente o módulo de $|z|$.

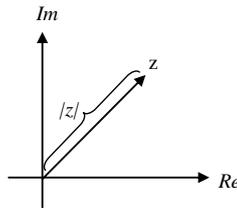


Figura 2.4: Módulo de z

Como definimos o módulo de z utilizando a noção usual de distância do plano, então as propriedades da distância valem automaticamente para o módulo. A próxima proposição tratará de algumas delas e de outras bem interessantes.

Proposição 2.3. *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ são válidas as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|;$$

$$(ii) \quad |z|^2 = z\bar{z};$$

$$(iii) \quad |\bar{z}| = |z|;$$

$$(iv) \quad |zw| = |z||w|;$$

$$(v) \quad |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{primeira desigualdade triangular});$$

(vi) $|z + w| \geq ||z| - |w||$ (segunda desigualdade triangular);

(vii) Se $w = \lambda z$, onde λ é um número real tal que $0 \leq 1 + \lambda \leq 0$, então $|z + w| = |z| - |w|$.

Demonstração. Sejam $z = a + bi$ e $w = x + yi$. Então:

(i) A desigualdade $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$ segue diretamente da propriedade do módulo de números reais, sem nenhuma dificuldade. Quanto a segunda temos:

$$|\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Logo, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

(ii) Observemos agora que $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a(a - bi) + bi(a - bi) = (a + bi)(a - bi) = z\bar{z}$.

(iii) Também que $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

(iv) A partir do item (iii), da proposição 2.2, do item (ii), acima, e da propriedade comutativa da multiplicação, temos

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{z\bar{w}}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Como os módulos $|zw|$, $|z|$ e $|w|$ são números reais não negativos, então podemos extrair as raízes quadradas de ambos os membros da igualdade $|zw|^2 = (|z||w|)^2$, e daí obtemos $|zw| = |z||w|$.

(v) A partir da proposição 2.2, dos itens (i), (ii) e (iii), acima, e da propriedade comutativa da multiplicação, temos

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Logo $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Como ambos os lados da desigualdade são números reais não negativos, temos $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(vi) Da primeira desigualdade triangular temos que $|z| = |z + (w + (-w))| = |(z + w) + (-w)| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$ e então $|z| \leq |z + w| + |w|$. Segue portanto que, $|z + w| \geq |z| - |w|$. De maneira análoga temos $|w + z| \geq |w| - |z|$. Como $|z + w| = |w + z|$, concluímos que $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

(vii) De fato, se $w = \lambda z$, onde λ é um número real tal que $0 \leq 1 + \lambda \leq 0$, então

$$\begin{aligned} |z + w| &= |z + \lambda z| = |(1 + \lambda)z| = |1 + \lambda||z| = (1 + \lambda)|z| = |z| + \lambda|z| \\ &= |z| - (-\lambda)|z| = |z| - |(-\lambda)||z| = |z| - |(-\lambda)z| = |z| - |-w| = |z| - |w|. \end{aligned}$$

□

2.4 Argumento de um número complexo

Definição 2.6. Dado um número complexo $z (\neq 0)$, chamamos de argumento de z a um ângulo θ satisfazendo as condições $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ e $\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$.

Observamos que se um ângulo θ_0 satisfaz a definição (2.6), então todo ângulo da forma $\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, também é um argumento de z . O valor de θ_0 , para $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, é chamado de argumento principal de z .

Teorema 2.2. Todo número complexo não nulo $z = a + bi$ pode ser escrito como

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Demonstração. Como $z = a + bi$ é não nulo então $|z| \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} z = a + bi &\Rightarrow z = |z| \frac{(a + bi)}{|z|} \\ &\Rightarrow z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{bi}{|z|} \right) \\ &\Rightarrow z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da identidade (2.7) e da definição (2.6), concluímos que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. □

Proposição 2.4. Dados dois números complexos

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

valem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)];$$

$$(ii) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Demonstração. (i) Efetuando o produto de z_1 e z_2 , temos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (|z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)) (|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2] \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

(ii) Efetuando a divisão e utilizando a definição de conjugado temos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2 \\ &= \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \overline{|z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos \theta_1 \cos(-\theta_2) + i \cos \theta_1 \sin(-\theta_2) + i \sin \theta_1 \cos(-\theta_2) + i^2 \sin \theta_1 \sin(-\theta_2)] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos \theta_1 \cos(-\theta_2) + i \cos \theta_1 \sin(-\theta_2) + i \sin \theta_1 \cos(-\theta_2) - \sin \theta_1 \sin(-\theta_2)] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos \theta_1 \cos(-\theta_2) - \sin \theta_1 \sin(-\theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos(-\theta_2) + \cos \theta_1 \sin(-\theta_2))] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 (Fórmula de De Moivre). *Para todo número inteiro n e número complexo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, temos que*

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (2.8)$$

Demonstração. Provemos primeramente que a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,

- Para $n = 0$ temos $r^0 (\cos(0\theta) + i \sin(0\theta)) = r^0 (\cos 0 + i \sin 0) = 1 = z^0$.
- Suponhamos agora que a igualdade é válida para algum natural $k \in \mathbb{N}$. Provemos que $z^{k+1} = r^{k+1} [\cos((k+1)\theta) + i \sin((k+1)\theta)]$. De fato, a partir da hipótese de indução, temos que $z^k = r^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))$ o que implica em

$$\begin{aligned} \implies z^{k+1} &= z^k z \\ \implies z^{k+1} &= r^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ \implies z^{k+1} &= r^k r (\cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta)) \\ \implies z^{k+1} &= r^{k+1} (\cos[(k+1)\theta] + i \sin[(k+1)\theta]). \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita, a identidade é válida para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, para todo $k \in \mathbb{Z}$ com $k < 0$, podemos escrever $k = -l$, onde $l \in \mathbb{N}$ e $l \neq 0$.

Segue disso que

$$\begin{aligned} z^k &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^k = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-l} \\ &= \frac{1}{[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^l} \\ &= \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^l (\cos(l\theta) + i \sin(l\theta))} \\ &= \frac{1}{r^l} \cos(0 - l\theta) + i \sin(0 - l\theta) \\ &= r^{-l} [\cos(-l\theta) + i \sin(-l\theta)] \\ &= r^k [\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)]. \end{aligned}$$

O teorema está demonstrado. □

2.5 As raízes n -ésimas de um número complexo

Definição 2.7. Dado um número natural n e um número complexo $z (\neq 0)$, dizemos que um número complexo w é uma raiz n -ésima de z se $w^n = z$.

Teorema 2.4. Para todo número natural n e número complexo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) (\neq 0)$, existem exatamente n raízes n -ésimas distintas de z . Nesse caso, tais raízes são da forma

seguinte:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Demonstração. Seja $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$ uma raiz n -ésima de z , isto é, $z = w^n$. Da Fórmula De Moivre temos que $w^n = s^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)]$. Como,

$$\begin{aligned} z = w^n &\iff r(\cos \theta + i \sin \theta) = s^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] \\ &\iff \begin{cases} r = s^n \\ \theta + 2m\pi = n\phi, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \frac{\theta + 2m\pi}{n}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned}$$

concluimos que

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi m}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi m}{n} \right) \right], \text{ para algum } m \in \mathbb{Z},$$

e denotamos tal raiz por z_m .

Agora, mostremos que o conjunto dos restos k , obtidos pelas divisões de inteiros quaisquer por n , determinam n raízes n -ésimas distintas de z

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

De fato, sejam p e q dois números em \mathbb{Z} e z_p, z_q duas raízes n -ésimas de z . Então, da forma polar dos números complexos, temos que

$$\begin{aligned} z_p = z_q &\iff \frac{\theta + 2p\pi}{n} - \frac{\theta + 2q\pi}{n} = 2\pi t, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{2p\pi}{n} - \frac{2q\pi}{n} = 2\pi t, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{2p}{n} - \frac{2q}{n} = 2t, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{p}{n} - \frac{q}{n} = t, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{p-q}{n} = t, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff p - q = tn, \quad \text{para algum } t \in \mathbb{Z} \\ &\iff p \equiv q \pmod{n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

De 2.9, concluimos que para cada resto $k = 0, 1, \dots, n-1$ existe uma raiz n -ésima de z determinada pelo argumento principal $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ e diferente das determinadas pelos restos

restantes. Consequentemente, as raízes n -ésimas de z são determinadas exatamente pelo conjunto de números complexos

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

□

2.6 Polinômios Complexos e Graus de Polinômios

Nessa seção, introduzimos um importante conceito, a noção de polinômio complexo. Sobre ele, será enunciado o principal resultado dessa dissertação.

Definição 2.8. *Um polinômio complexo é uma função $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números complexos com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$).

Definição 2.9. *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo e um subconjunto $X \subset \mathbb{C}$. Definimos o conjunto imagem de X , por p , como o conjunto*

$$p(X) = \{w \in \mathbb{C} \mid w = p(z), \text{ para algum } z \in X\}.$$

Proposição 2.5. *Seja p um polinômio complexo. Então existem únicos números complexos a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$) tais que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. De fato, sejam complexos $a_n, a_{n-1}, a_1, \dots, a_0$ com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$) tais que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e escolhamos $n+1$ valores distintos do plano complexo z_0, z_1, \dots, z_n . Sejam $w_0 = p(z_0), w_1 = p(z_1), \dots, w_n = p(z_n)$ e consideremos o sistema de equações, associado aos pontos z_0, z_1, \dots, z_n ,

$$\begin{cases} a_0 + z_0 a_1 + \dots + z_0^{n-1} a_{n-1} + z_0^n a_n = w_0 \\ a_0 + z_1 a_1 + \dots + z_1^{n-1} a_{n-1} + z_1^n a_n = w_1 \\ \vdots \\ a_0 + z_n a_1 + \dots + z_n^{n-1} a_{n-1} + z_n^n a_n = w_n \end{cases} \quad (2.10)$$

A matriz dos coeficientes, do sistema de equações lineares 2.10, é denominada de matriz de Vandermonde de ordem $(n+1) \times (n+1)$, cujo determinante, denominado de determinante

de Vandermonde, é dado por

$$\det \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ & & \ddots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} & z_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i) \neq 0. \quad (2.11)$$

Assim, pela regra de Cramer, o sistema admite uma única solução. Conseqüentemente, a função polinômial é determinada univocamente pelos complexos a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$).

A Proposição 2.5, nos permite então introduzir a seguinte definição.

Definição 2.10. *Dado um polinômio complexo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos o grau de p , denotado pelo símbolo $\partial(p)$, como sendo o número inteiro n . Assim, $\partial(p) = n$.*

Definimos o grau do polinômio complexo nulo por $-\infty$, isto é, $\partial(0) = -\infty$.

A importante Proposição, abaixo, é de fácil demonstração e por isso omitiremos a sua prova.

Proposição 2.6. *Sejam p e q dois polinômios complexos. Então:*

- (i) *O grau do polinômio soma $p + q$, definido por $(p + q)(z) = p(z) + q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, satisfaz a propriedade $\partial(p + q) \leq \max\{\partial(p), \partial(q)\}$;*
- (ii) *O grau do polinômio multiplicação por um escalar ap , definido por $(ap)(z) = ap(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde a ($\neq 0$) $\in \mathbb{C}$ é fixo, satisfaz a propriedade $\partial(ap) = \partial(p)$;*
- (iii) *O grau do polinômio produto pq , definido por $(pq)(z) = p(z)q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, satisfaz a propriedade $\partial(pq) = \partial(p) + \partial(q)$.*

2.7 Raízes e fatorização de polinômios complexos

Nessa seção, apresentamos o conceito de raiz de um polinômio, necessário para o desenvolvimento dessa dissertação, e em seguida dois importantes resultados relacionados a esse conceito.

Definição 2.11. *Seja um polinômio complexo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números complexos com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$). Um número complexo $z_0 \in \mathbb{C}$ é chamado de uma raiz de $p(z)$ se $p(z_0) = 0$.*

Observação 2.1. *A razão para usarmos o nome especial de raízes do polinômio $p(z)$ e não o de zeros da função $p(z)$ se deve ao fato de que elas possuem muitas propriedades interessantes que não são compartilhadas pelos zeros de funções em geral.*

Definição 2.12. *Seja um polinômio complexo $p(z)$ de grau $n \geq 1$ suponhamos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(z)$. Definimos a multiplicidade da raiz z_0 como sendo o número natural m satisfazendo a condição: existe um polinômio complexo $q(z)$ tal que*

$$p(z) = q(z)(z - z_0)^m \text{ e } q(z_0) \neq 0.$$

O importante lema, abaixo, é de fácil verificação e por isso omitiremos a sua prova.

Lema 2.1. *Para todo número natural n e números complexos z e z_0 a seguinte identidade vale*

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}).$$

Lema 2.2. *Seja um polinômio complexo $p(z)$ de grau $n \geq 1$. Então, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ existe um polinômio complexo $q(z)$ (de grau $n - 1$) tal que*

$$p(z) - p(z_0) = q(z)(z - z_0).$$

Demonstração. Pela hipótese do lema, temos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números complexos com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$). Assim, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned} & p(z) - p(z_0) \\ &= (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0) - (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0) \\ &= a_n (z^n - z_0^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \dots + a_1 (z - z_0) \\ &= a_n (z - z_0)(z^{n-1} + \dots + z_0^{n-1}) + a_{n-1} (z - z_0)(z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2}) + \dots + a_1 (z - z_0) \\ &= (a_n (z^{n-1} + \dots + z_0^{n-1}) + a_{n-1} (z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2}) + \dots + a_1) (z - z_0) \\ &= q(z)(z - z_0), \end{aligned}$$

onde $q(z) = a_n (z^{n-1} + \dots + z_0^{n-1}) + a_{n-1} (z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2}) + \dots + a_1$.

Proposição 2.7. *Seja um polinômio complexo $p(z)$ de grau $n \geq 1$. Então, $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(z)$ se, e somente se, existe um polinômio complexo $q(z)$ (de grau $n - 1$) tal que*

$$p(z) = q(z)(z - z_0).$$

Demonstração. O resultado é uma consequência direta do Lema 2.2.

Capítulo 3

Conceitos Básicos da Topologia e Análise Complexa

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos topológicos de disco aberto e fechado, e de Análise, como a continuidade e a compacidade sobre polinômios complexos, necessários para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Utilizaremos as definições presentes em [1],[3], [10], [6], [18], [17] e em [22]. Observamos que nas referências citadas as definições, proposições e teoremas são sobre \mathbb{R}^n e em nosso trabalho adaptamos para \mathbb{R}^2 , que é o conjunto de elementos de \mathbb{C} .

3.1 Topologia básica dos complexos

Definição 3.1. *Dados um real $r > 0$ e um complexo arbitrário z_0 , definimos:*

- (i) o **disco aberto** de centro z_0 e raio r como o conjunto $D_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância menor do que r do ponto z_0 , isto é,

$$D_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\};$$

- (ii) o **disco fechado** de centro z_0 e raio r como o conjunto $\overline{D}_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância igual ou menor do que r do ponto z_0 , isto é,

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq r\};$$

- (iii) o **disco aberto deletado** ou **disco aberto perfurado** de centro z_0 e raio r como o conjunto $D'_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância maior

do que zero e menor do que r do ponto z_0 , isto é,

$$D'_r(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\};$$

(iv) a **circunferência** de centro z_0 e raio r como o conjunto $C_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância igual a r do ponto z_0 , isto é,

$$C_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

A fig. 3.1 ilustra graficamente os conjuntos definidos acima, $D_r(z_0)$, $\bar{D}_r(z_0)$, $D'_r(z_0)$ e $C_r(z_0)$, respectivamente.

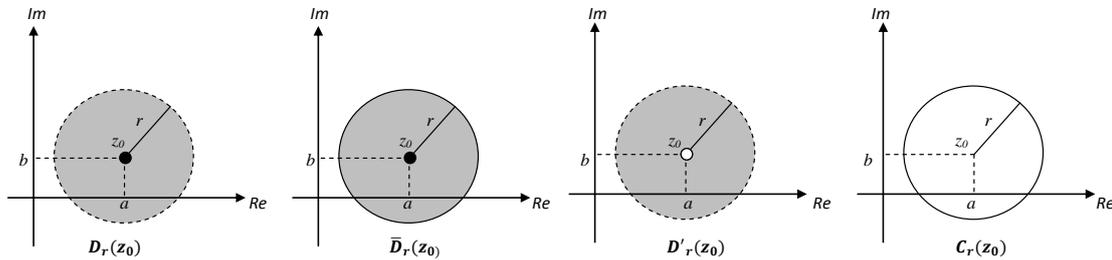


Figura 3.1: Os conjuntos $D_r(z_0)$, $\bar{D}_r(z_0)$, $D'_r(z_0)$ e $C_r(z_0)$

Dado um subconjunto U do plano complexo, dizemos que um ponto z é *interior* de U se existe um disco $D_r(z)$ contido em U , para algum real positivo r . O conjunto de todos os pontos interiores de U , denotado por $\text{int}(U)$, é chamado de *interior* de U .

Um subconjunto U de \mathbb{C} é chamado de *conjunto aberto* quando $\text{int}(U) = U$, ou seja, quando todos os pontos de U são pontos interiores e é *fechado* se o seu complemento $\mathbb{C} \setminus U$ é aberto.

Dizemos que um subconjunto $V \subset \mathbb{C}$ é *limitado* se existe um real $s > 0$ tal que $|z| < s$ para todo $z \in V$. A partir da notação de discos, vemos que V é limitado se V é um subconjunto de um disco aberto $D_s(0)$, para algum número real positivo s . Se V não for limitado dizemos que é *ilimitado*.

Dizemos que um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ é compacto se ele é fechado e limitado.

Uma *sequência* em \mathbb{C} é uma aplicação $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{N} é o conjunto dos naturais. Dado uma sequência x , denotamos $x(k) = x_k$, para todo natural k , e denominamos o k -ésimo termo de x . Nesse caso, indicamos a sequência x por (z_k) .

Uma subsequência de (z_k) é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < \dots < k_m \dots\} \subset \mathbb{N}$. A notação $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é utilizada para indicar um subsequência.

Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{C}$ é o limite de uma sequência (z_k) se para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \rightarrow |z_k - a| < \epsilon$. Nesse caso, dizemos que a sequência é convergente.

Dizemos que uma sequência $(z_k) \subset \mathbb{C}$ é *limitada* se existe um real $s > 0$ tal que $|z_k| < s$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se (z_k) não for limitada, então dizemos que é *ilimitada*.

Teorema 3.1. *As seguintes afirmações sobre um conjunto K são equivalentes:*

- (i) K é compacto;
- (ii) Toda sequência $(z_k) \subset K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K .

Demonstração. (i) \rightarrow (ii). Seja uma sequência de números complexos $(z_k) \subset K$ e escrevamos $z_k = a_k + b_k i$, onde $a_k = \text{Re}(z_k)$ e $b_k = \text{Im}(z_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como K é um conjunto compacto, então K é limitado o que implica que (z_k) é uma sequência limitada. Assim, as sequências $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são limitadas em \mathbb{R} e portanto podemos obter duas subsequências $(a_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para valores a_0 e b_0 , respectivamente. Segue disso que, tomando $z_0 = a_0 + b_0 i$, então $\lim_{k \in \mathbb{N}'} z_k = z_0$, pois

$$|z_k - z_0| \leq |a_k - a_0| + |b_k - b_0|,$$

para todo $k \in \mathbb{N}'$. Agora, se $z_0 \notin K$, então existe um número real $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset \mathbb{C}/K$, pois K é um conjunto fechado. Assim, existe um inteiro $m_0 \in \mathbb{N}'$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}'$ com $m \geq m_0$ temos que $|z_k - z_0| < r$ o que implica que $z_k \in \mathbb{C}/K$ o que é um absurdo. Logo, $z_0 \in K$.

(ii) \rightarrow (i). Suponhamos que K é um conjunto ilimitado, então existe uma sequência $(z_k) \subset K$ tal que $|z_k| \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue disso que podemos extrair uma subsequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para um elemento $z_0 \in K$. Isso implica que a subsequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é limitada o que é um absurdo. Logo K é um conjunto limitado. Finalmente, suponhamos que o conjunto \mathbb{C}/K não é aberto, então existe um elemento $z_0 \in \mathbb{C}/K$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $D_{\frac{1}{k}}(z_0) \cap K \neq \emptyset$, isto é, existe um elemento $z_k \in D_{\frac{1}{k}}(z_0) \cap K$. Segue disso que a sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ possui uma subsequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para um elemento $a \in K$. Como $\lim_{k \in \mathbb{N}'} z_k = z_0$, então $z_0 = a$ o que é um absurdo. Logo, para todo elemento $z_0 \in \mathbb{C}/K$, existe um número real $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset \mathbb{C}/K$, isto é, \mathbb{C}/K é um conjunto aberto. Consequentemente, K é um conjunto fechado.

3.2 Continuidade dos polinômios em \mathbb{C}

Definição 3.2. *Seja um polinômio complexo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e um número $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que o polinômio p é contínuo no ponto z_0 se para todo real $\epsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z - z_0| < \delta$ temos que $|p(z) - p(z_0)| < \epsilon$.*

Dizemos que p é contínuo em um conjunto $X \subset \mathbb{C}$, quando p é contínuo em todo desse conjunto.

Teorema 3.2. *Todo polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo em \mathbb{C} .*

Demonstração. Sejam um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números complexos com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$), e $z_0 \in \mathbb{C}$. Observemos primeiramente que para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$, satisfazendo a condição $|z - z_0| < 1$, temos que $|z| < 1 + |z_0|$ o que implica em

$$\begin{aligned} |z^m - z_0^m| &= |z - z_0| \left| \sum_{k=0}^{m-1} z^{m-k-1} z_0^k \right| \\ &\leq |z - z_0| \left(\sum_{k=0}^{m-1} |z^{m-k-1} z_0^k| \right) \\ &= |z - z_0| \left(\sum_{k=0}^{m-1} |z|^{m-k-1} |z_0|^k \right) \\ &\leq |z - z_0| \left(\sum_{k=0}^{m-1} (1 + |z_0|)^{m-k-1} |z_0|^k \right), \end{aligned}$$

para todo $m = 2, \dots, n$. Segue disso que

$$\begin{aligned} |p(z) - p(z_0)| &= \left| \sum_{m=0}^n a_m z^m - \sum_{m=0}^n a_m z_0^m \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^n a_m (z^m - z_0^m) \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^n |a_m| |z^m - z_0^m| \\ &= \sum_{m=1}^n |a_m| |z^m - z_0^m| \\ &\leq |z - z_0| \left(\sum_{m=1}^n |a_m| \left(\sum_{k=0}^{m-1} (1 + |z_0|)^{m-k-1} |z_0|^k \right) \right). \end{aligned}$$

Assim, para todo número real positivo ϵ , tomemos o número real positivo

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{1 + \left| \sum_{m=1}^n |a_m| \left(\sum_{k=0}^{m-1} (1 + |z_0|)^{m-k-1} |z_0|^k \right) \right|} \right\}.$$

Então, para todo complexo $z \in \mathbb{C}$, satisfazendo a condição $|z - z_0| < \delta$, temos que $|p(z) - p(z_0)| < \epsilon$. Consequentemente, p é contínuo no ponto z_0 .

Do que acabamos de ver, podemos concluir que p é contínuo em \mathbb{C} .

Corolário 3.1. *Seja um polinômio complexo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e um número $z_0 \in \mathbb{C}$. Então, para toda sequência $(z_k) \subset \mathbb{C}$ convergente para z_0 , a sequência $(p(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para o valor $p(z_0)$, isto é, $\lim_{k \in \mathbb{N}} p(z_k) = p(z_0)$.*

Demonstração. De fato, seja $(z_k) \subset \mathbb{C}$ uma sequência convergente para z_0 e tomemos a sequência $(p(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Seja um número real $\epsilon > 0$. Pelo Teorema 3.2, existe um número real $\delta > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z - z_0| < \delta$ temos que $|p(z) - p(z_0)| < \epsilon$. Por outro lado, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ temos que $|z_k - z_0| < \delta$. Segue disso que $|p(z_k) - p(z_0)| < \epsilon$. Consequentemente, $\lim_{k \in \mathbb{N}} p(z_k) = p(z_0)$.

Corolário 3.2. *Para todo polinômio complexo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o polinômio $|p| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $|p|(z) = |p(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$, é contínuo em \mathbb{C} .*

Demonstração. De fato, basta observar que para todo número complexo $z_0 \in \mathbb{C}$, temos que $||p(z)| - |p(z_0)|| \leq |p(z) - p(z_0)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Corolário 3.3. *Seja um polinômio complexo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e um número $z_0 \in \mathbb{C}$. Então, para toda sequência $(z_k) \subset \mathbb{C}$ convergente para z_0 , a sequência $(|p|(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para o valor $|p|(z_0)$, isto é, $\lim_{k \in \mathbb{N}} |p|(z_k) = |p|(z_0)$.*

Teorema 3.3. *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo. Para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ o conjunto imagem $p(K)$ é também um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja (w_k) uma sequência de números complexos em $p(K)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um número complexo z_k tal que $w_k = p(z_k)$. Como K é compacto a sequência admite uma subsequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $a \in K$. Pelo Corolário 3.1, resulta que $\lim_{k \in \mathbb{N}'} p(z_k) = p(a)$. Assim toda sequência de pontos $(w_k) \subset p(K)$ possui uma subsequência $(w_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente para um ponto de $p(K)$. Consequentemente, $p(K)$ é compacto.

Teorema 3.4. *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo. Para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ existem números complexos $z_0, z_1 \in K$ tais que $|p(z_0)| \leq |p(z)| \leq |p(z_1)|$ para todo $z \in K$.*

Demonstração. Consideremos os números reais $y_0 = \inf\{|p|(K)\}$ e $y_1 = \sup\{|p|(K)\}$. Como K é compacto existe uma sequência $(z_k) \subset K$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}} |p|(z_k) = y_0$. Como K é compacto a sequência (z_k) admite uma subsequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $z_0 \in K$. Pelo Corolário 3.3, temos que $\lim_{k \in \mathbb{N}'} |p|(z_k) = |p|(z_0)$. Segue disso que $y_0 = |p|(z_0)$. Similarmente, podemos demonstrar que existe um número complexo $z_1 \in K$ tal que $y_1 = |p|(z_1)$. Assim, o Teorema está demonstrado.

Capítulo 4

Teorema Fundamental da Álgebra e Suas Consequências

Nesse capítulo, serão apresentados os principais resultados dessa dissertação, a saber: o Teorema Fundamental da Álgebra e suas consequências, para o processo de fatorização dos polinômios complexos. Também, uma análise sobre as raízes, para alguns casos particulares de polinômios complexos, será feita no final do capítulo.

4.1 Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 4.1. *Para todo polinômio não constante $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, existe um elemento $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$, isto é, todo polinômio não constante com coeficientes em \mathbb{C} possui ao menos uma raiz em \mathbb{C} .*

Demonstração. Antes de tudo, observemos que $p(z_0) = 0$ se, e somente se, $|p(z_0)| = |0|$ se, e somente se, $|p(z_0)| = 0$. Assim, provar que $p(z_0) = 0$ é equivalente a provar que $|p(z_0)| = 0$ e como $|p(z_0)|$ é um número real, utilizaremos as propriedades do módulo para resolver esse problema, transportando-o do campo dos números complexos para o campo dos números reais. É isso que faremos.

Para isso, podemos primeiramente que os valores $|p(z)|$ possui um mínimo absoluto em \mathbb{C} , isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. De fato, por hipótese podemos considerar $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são

números complexos com $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$). Assim, para todo $z (\neq 0) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \\ &= |z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \\ &\geq |z^n| \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| - \dots - \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| - \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \\ &= |z|^n \left| |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |z|^n = +\infty$ e $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{|z|^{n-k}} = 0$, para todo ($k = 0, 1, \dots, n-1$), então concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| &\geq \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left(|z|^n \left| |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right| \right) \\ &\geq \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |z|^n \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left(\left| |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right| \right). \\ &\geq +\infty \cdot |a_n| = +\infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Segue de (4.1) que existe um número real $r > 0$ tal que

$$|p(0)| < |p(z)|,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > r$. Em outras palavras, existe um disco fechado centrado na origem de raio $r > 0$ $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$ tal que todo número complexo z tomado fora do disco $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$ é levado por $p(z)$ em um número complexo cujo módulo é maior que $|p(0)|$. Por outro lado, o disco $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$ é um conjunto compacto de \mathbb{C} e como a função $|p(z)|$ é contínua em $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$, então pelo teorema 3.4, existe um número complexo $z_0 \in \overline{\mathcal{D}}_r(0)$ tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|,$$

para todo $z \in \overline{\mathcal{D}}_r(0)$, isto é, o número complexo z_0 é um ponto de mínimo em $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$. Como z_0 é ponto de mínimo em $\overline{\mathcal{D}}_r(0)$, $|p(z_0)| \leq |p(0)|$ e $|p(0)| \leq |p(z)|$, para todo $z \notin \overline{\mathcal{D}}_r(0)$, podemos concluir que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Em seguida, mostremos que se $p(z_0) \neq 0$, então existe um número complexo $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$, ou seja, existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que o número complexo $p(z_1)$ está mais próximo da origem que $p(z_0)$. Para isso, tomemos $z_1 - z_0 = h$, para algum $h \in \mathbb{C}$. Assim, $z_1 = z_0 + h$ e $p(z_1) = p(z_0 + h)$. Calculando $p(z_0 + h)$, temos

$$p(z_0 + h) = a_n(z_0 + h)^n + a_{n-1}(z_0 + h)^{n-1} + \dots + a_1(z_0 + h) + a_0.$$

Desenvolvendo os termos binomiais nas parcelas, acima, obtemos

$$\begin{aligned} a_n(z_0 + h)^n &= a_n z_0^n + \binom{n}{1} a_n z_0^{n-1} h + \dots + \binom{n}{n-1} a_n z_0 h^{n-1} + a_n h^n; \\ a_{n-1}(z_0 + h)^{n-1} &= a_{n-1} z_0^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_{n-1} z_0^{n-2} h + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-1} z_0 h^{n-2} \\ &\quad + a_{n-1} h^{n-1}; \\ &\vdots \\ a_1(z_0 + h) &= a_1 z_0 + a_1 h \end{aligned}$$

o que reescrever $p(z_0 + h)$ na forma

$$\begin{aligned} p(z_0 + h) &= a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 \\ &\quad + \binom{n}{1} a_n z_0^{n-1} h + \dots + \binom{n}{n-1} a_n z_0 h^{n-1} + a_n h^n \\ &\quad + \binom{n-1}{1} a_{n-1} z_0^{n-2} h + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-1} z_0 h^{n-2} + a_{n-1} h^{n-1} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_1 h. \end{aligned}$$

Como $p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0$, então agrupando os termos de mesmo grau em h obtemos

$$p(z_0 + h) = p(z_0) + m_1 h + m_2 h^2 + \dots + m_n h^n,$$

onde os coeficientes m_i ($1 \leq i \leq n$) só dependem dos valores de $z_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ e a_0 , podendo existir algum deles iguais a zero. Seja então m_k ($1 \leq k \leq n$) o primeiro coeficiente não nulo. Temos então

$$\begin{aligned} p(z_0 + h) &= p(z_0) + m_k h^k + m_{k+1} h^{k+1} + \dots + m_n h^n \\ &= p(z_0) + m_k h^k + h^k (m_{k+1} h + m_{k+2} h^2 \dots + m_n h^{n-k}) \\ &= p(z_0) + m_k h^k + h^k r(h), \end{aligned}$$

onde $r(h) = m_{k+1}h + m_{k+2}h^2 \cdots + m_n h^{n-k}$. Assim, das propriedades do módulo, obtemos

$$\begin{aligned}
 |p(z_0 + h)| &= |p(z_0) + m_k h^k + h^k r(h)| \\
 &= |(p(z_0) + m_k h^k) + h^k r(h)| \\
 &\leq |p(z_0) + m_k h^k| + |h^k r(h)|.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Embora o número complexo $h \in \mathbb{C}$ seja fixo, foi tomado arbitrário. Assim, podemos escolher um argumento e um módulo de h de modo que $-1 \leq \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \leq 0$. De fato, escrevendo m_k , h e $p(z_0)$ na forma polar, temos $m_k = r_m(\cos \alpha_m + i \sin \alpha_m)$, $h = r_h(\cos \alpha_h + i \sin \alpha_h)$ e $p(z_0) = r_p(\cos \alpha_p + i \sin \alpha_p)$ o que implica em

$$\begin{aligned}
 \frac{m_k h^k}{p(z_0)} &= \frac{r_m[\cos \alpha_m + i \sin \alpha_m](r_h[\cos \alpha_h + i \sin \alpha_h])^k}{r_p[\cos \alpha_p + i \sin \alpha_p]} \\
 &= \frac{r_m[\cos \alpha_m + i \sin \alpha_m]r_h^k[\cos(k\alpha_h) + i \sin(k\alpha_h)]}{r_p(\cos \alpha_p + i \sin \alpha_p)} \\
 &= \frac{r_m r_h^k[\cos(\alpha_m + k\alpha_h) + i \sin(\alpha_m + k\alpha_h)]}{r_p(\cos \alpha_p + i \sin \alpha_p)} \\
 &= \frac{r_m r_h^k}{r_p} [\cos(\alpha_m + k\alpha_h - \alpha_p) + i \sin(\alpha_m + k\alpha_h - \alpha_p)].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tomando $r_h \leq \sqrt[k]{\frac{r_p}{r_m}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{r_m r_h^k}{r_p} &\leq \frac{r_m \left(\sqrt[k]{\frac{r_p}{r_m}} \right)^k}{r_p} \\
 &= \frac{r_m \frac{r_p}{r_m}}{r_p} \\
 &= \frac{r_m \frac{r_p}{r_m}}{r_p} \\
 &= \frac{r_p}{r_p} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$r_h \leq \sqrt[k]{\frac{r_p}{r_m}} \text{ implica em } 0 \leq \frac{r_m r_h^k}{r_p} \leq 1. \tag{4.4}$$

Escolhendo $\alpha_h = \frac{\pi - \alpha_m + \alpha_p}{k}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \alpha_m + k\alpha_h - \alpha_p &= \alpha_m + k \frac{\pi - \alpha_m + \alpha_p}{k} - \alpha_p \\
 &= \alpha_m + \pi - \alpha_m + \alpha_p - \alpha_p \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\alpha_h = \frac{\pi - \alpha_m + \alpha_p}{k} \quad \text{implica em} \quad \alpha_m + k\alpha_h - \alpha_p = \pi. \quad (4.5)$$

Assim, a partir de (4.3), (4.4), (4.5) e do argumento de h , explicitado acima, podemos concluir que $-1 \leq \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \leq 0$.

De nossa última conclusão, temos que

$$\begin{aligned} |p(z_0) + m_k h^k| &= \left| p(z_0) \left(1 + \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \right) \right| \\ &= |p(z_0)| \left| 1 + \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \right| \\ &= |p(z_0)| \left(1 + \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \right) \\ &= |p(z_0)| + |p(z_0)| \frac{m_k h^k}{p(z_0)} \\ &= |p(z_0)| - \left| p(z_0) \left(-\frac{m_k h^k}{p(z_0)} \right) \right| \\ &= |p(z_0)| - |m_k h^k|. \end{aligned}$$

Nas condições acima e da inequação (4.2), concluimos que

$$|p(z_0 + h)| \leq |p(z_0)| - |m_k h^k| + |h^k r(h)|. \quad (4.6)$$

Ainda, podemos escolher o módulo de h de forma que $|h^k r(h)| < |m_k h^k|$. De fato, pois $|h^k r(h)| < |m_k h^k|$ se, e somente se, $|h^k| |r(h)| < |m_k| |h^k|$ se, e somente se, $|r(h)| < |m_k|$.

Como

$$\begin{aligned} \lim_{|h| \rightarrow 0} |r(h)| &= \lim_{|h| \rightarrow 0} |m_{k+1} h + m_{k+2} h^2 + \cdots + m_n h^{n-k}| \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} |h(m_{k+1} + m_{k+2} h + \cdots + m_n h^{n-k-1})| \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} |h| |m_{k+1} + m_{k+2} h + \cdots + m_n h^{n-k-1}| \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} |h| \lim_{|h| \rightarrow 0} |m_{k+1} + m_{k+2} h + \cdots + m_n h^{n-k-1}| \\ &= 0 |m_{k+1} + m_{k+2} h + \cdots + m_n h^{n-k-1}| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um real $\delta > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{C}$ com $|h| < \delta$, então $|r(h)| < \epsilon$. Tomando $\epsilon = |m_k|$, então existe δ_0 tal que $|h| < \delta_0$ implica em $|r(h)| < |m_k|$. Consideremos então, $h (\neq 0) \in \mathbb{C}$ tal que $|h|$ seja menor que o mínimo ente

δ_0 e $\sqrt[k]{\frac{r_p}{r_m}}$. Nesse caso, teremos na equação (4.6)

$$\begin{aligned} |p(z_0 + h)| &\leq |p(z_0)| - |m_k h^k| + |h^k r(h)| \\ &< |p(z_0)| - |m_k h^k| + |m_k h^k| \\ &= |p(z_0)|. \end{aligned}$$

Portanto se $p(z_0) \neq 0$, então existe um número complexo z_1 , do tipo $z_1 = z_0 + h$, com h definido como acima, tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$. Como, na primeira parte provamos que existe um z_0 tal que $|p(z_0)|$ é mínimo absoluto em \mathbb{C} , se $p(z_0) \neq 0$, então pelo visto existiria um z_1 tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$ o que nos levaria a um absurdo. Consequentemente, devemos ter $p(z_0) = 0$.

Como consequência, do resultado acima, podemos enunciar duas importantes consequências do teorema Fundamental da Álgebra, a saber:

Teorema 4.2. *Seja um polinômio complexo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ de grau $n \geq 1$. Então, $p(z)$ possui exatamente n raízes distintas z_1, z_2, \dots, z_n . Nesse caso, o polinômio $p(z)$ pode ser escrito na forma*

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

A partir da definição de multiplicidade de uma raiz de um polinômio, enunciamos a segunda importante consequência do teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 4.3. *Seja um polinômio complexo $p(z)$ de grau $n \geq 1$. Então, existem números complexos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, $\zeta_i \neq \zeta_j$ ($i \neq j$), e números naturais m_1, m_2, \dots, m_k satisfazendo $1 \leq m_l \leq n$ ($l = 1, 2, \dots, k$), $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ e tais que*

$$p(z) = (z - \zeta_1)^{m_1} (z - \zeta_2)^{m_2} \dots (z - \zeta_k)^{m_k}.$$

A seguir apresentamos o processo de fatorização, para o caso de polinômios complexos com coeficientes reais. Para isso, precisaremos de um resultado auxiliar conforme, abaixo.

Lema 4.1. *Seja um polinômio complexo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números reais. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(z)$, então o conjugado $\overline{z_0}$ também é uma raiz de $p(z)$.*

Demonstração. Pela hipótese temos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. Assim, tomando o complexo conjugado sobre o polinômio $p(z)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 p(\bar{z}_0) &= a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\
 &= a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\
 &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\
 &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\
 &= \overline{p(z_0)} \\
 &= \bar{0} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Proposição 4.1. *Seja $p(z)$ um polinômio complexo com coeficientes reais e de grau ímpar. Então, $p(z)$ possui ao menos uma raiz real.*

Demonstração. Pelo lema 4.1, o número de raízes complexas não reais aparecem sempre em quantidades pares. Como o polinômio $p(z)$ é de grau ímpar, então ao menos uma delas é um número real.

Proposição 4.2. *Seja um polinômio complexo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são números reais. Suponhamos que ξ_1, \dots, ξ_r denotem as distintas raízes reais de $p(z)$ e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$ os números complexos com $\text{Im}(\zeta_k) \neq 0$ tais que ζ_k e $\bar{\zeta}_k$ ($k = 1, \dots, s$) são as restantes distintas raízes complexas de $p(z)$. Escrevamos $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 1, \dots, s$) com α_k e β_k reais. Então,*

$$p(\bar{z}_0) = a_n (z - \xi_1)^{n_1} \dots (z - \xi_r)^{n_r} ((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{m_1} \dots ((z - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{m_s},$$

onde n_j é a multiplicidade da raiz ξ_j ($j = 1, \dots, r$) e m_k é a multiplicidade da raiz ζ_k ($k = 1, \dots, s$).

Demonstração. O resultado é uma consequência direta dos teorema 4.3 e da proposição 4.1. Para as raízes reais é imediato. Agora, para os pares de raízes conjugadas usamos o fato de que

$$(z - \zeta_k)(z - \bar{\zeta}_k) = (z - \alpha_k - \beta_k i)(z - \alpha_k + \beta_k i) = (z - \alpha_k)^2 + \beta_k^2$$

($k = 1, \dots, s$).

4.2 Raízes em polinômios de grau um e dois

Para o caso de polinômios de grau um ou dois, podemos determinar as suas raízes, de uma maneira mais direta, conforme os dois teoremas, abaixo.

Teorema 4.4. *Seja um polinômio complexo de grau um, $p(z) = az + b$ ($a \neq 0$). Então, sua única raiz é dada por $-\frac{b}{a}$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.2, o resultado é imediato.

Teorema 4.5. *Seja um polinômio complexo de grau dois, $p(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$) e consideremos $d = b^2 - 4ac$. Se w é uma das duas raízes 2-ésimas de d , então as duas raízes de $p(z)$ são dadas por*

$$\frac{-b + w}{2a} \quad e \quad \frac{-b - w}{2a}.$$

Demonstração. De fato, podemos escrever o polinômio na forma

$$\begin{aligned} p(z) &= az^2 + bz + c \\ &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{w}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{w}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{w}{2a} \right) \\ &= a \left(z + \frac{b-w}{2a} \right) \left(z + \frac{b+w}{2a} \right) \\ &= a \left(z - \left(\frac{-b+w}{2a} \right) \right) \left(z - \left(\frac{-b-w}{2a} \right) \right). \end{aligned}$$

Isso mostra que as raízes de $p(z)$ podem ser dadas por $\frac{-b+w}{2a}$ e $\frac{-b-w}{2a}$.

4.3 Raízes de polinômios do tipo $p(z) = z^n - a$

Para o caso de polinômios do tipo $p(z) = z^n - a$, podemos também determinar as suas raízes, de uma maneira direta, observando que tais raízes são as soluções da equação $z^n = a$. Assim, temos segue o seguinte resultado.

Teorema 4.6. *Seja um polinômio complexo do tipo $p(z) = z^n - a$, onde $a \in \mathbb{C}$ tal que $a = |a|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Então, suas raízes são*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Além disso, o polinômio $p(z)$ pode ser escrito na forma

$$p(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}).$$

Capítulo 5

Consequências e Atividades para o Ensino Médio

Nesse capítulo apresentamos nossa motivação para discursar sobre o Teorema Fundamental da Álgebra e sugestões de atividades práticas, em laboratórios de informática, e atividades teóricas. Na seção 5.1 apresentamos nossas motivações, com uma pequena abordagem pedagógica, nas seções 5.2 a 5.6 oferecemos sugestões das atividades práticas e na seção 5.7 temos as sugestões de atividades práticas.

5.1 Justificativa Pedagógica

Pelo que foi apresentado nos capítulos 3 e 4, não é possível fazer uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, para alunos do Ensino Médio. Mas segundo os PCN¹ algumas das finalidades do ensino da Matemática são as seguintes:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

¹Parâmetros Curriculares Nacionais, disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>

Acreditamos então que mesmo não sendo possível dar uma demonstração de tal teorema, é possível dar uma ideia intuitiva da validade do seu enunciado.

O que faremos é muito próximo do que é feito no Ensino Fundamental, quando é apresentado aos alunos os números irracionais. Lá, no Ensino Fundamental, a existência dos números irracionais não é provada, nem mesmo é feita a demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional. No entanto, tais números são apresentados com alguma justificativa e partir daí aceita-se a existência deles.

O procedimento para "mostrar" que $\sqrt{2}$ é irracional é o de buscar a cada passo, números com mais casas decimais que elevados ao quadrado se aproximem por falta de $\sqrt{2}$ e observar que esses números não são decimais exatos nem dízimas periódicas, levando-os a uma conclusão de que tais números não são racionais. É óbvio, que tal procedimento não é uma demonstração, pois mesmo que repetíssemos esse processo, digamos, um milhão de vezes nada garante que o número que estamos procurando é um racional com período com um milhão e uma casas e nesse caso não poderíamos mesmo perceber o padrão. Esse é o procedimento adotado na maioria dos livros didáticos do ensino fundamental, como na coleção [8] uma das mais adotadas no país.

Mas após uma pesquisa em alguns dos livros didáticos de maior uso no ensino médio, como [7], [14], [2] e [21], percebemos que o Teorema Fundamental da Álgebra é tratado como um axioma, sem nenhuma justificativa de sua validade. Até mesmo na coleção [15], considerada mais completa e de uso em muitas universidades como referência sobre o conteúdo de matemática do Ensino Médio e que demonstra a maioria dos teoremas e propriedades do ensino médio, nenhuma consideração é feita sobre a demonstração ou alguma ideia intuitiva sobre a validade do Teorema Fundamental da Álgebra. Como dissemos acima, realmente não é possível demonstrá-lo no Ensino Médio, mas alguma justificativa desse tão importante teorema pode ser dada. Esse é o objetivo desse capítulo, ou seja, mostrar intuitivamente que todo polinômio tem raiz complexa, sem contudo demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Isso será feito utilizando uma série de atividades.

A primeira e a segunda atividade visam relembrar o conceito de equações paramétricas aprendidas em Geometria Analítica (tal conteúdo é tradicionalmente ensinado antes dos números complexos) e mostrar o uso de um software para desenho de funções e, em especial, de equações paramétricas. Na terceira e quarta atividade, escolhemos

dois polinômios e mostramos que existem soluções complexa, para esses polinômios. Na quinta atividade o aluno deverá fazer uso do processo aprendido nas atividades anteriores e "verificar" a existência de raiz de um polinômio de grau 5. Ressaltamos também que essas atividades foram idealizadas a partir da leitura do item 9 do livro [16].

Para 'convencer' o aluno do ensino fundamental da irracionalidade da $\sqrt{2}$ faz-se uso de calculadoras. No nosso caso utilizaremos um software chamado Winplot. Esse software é utilizado para desenhar curvas e superfícies, ou seja, pode trabalhar com funções em duas ou três dimensões. Esse software é gratuito e uma rápida busca na internet encontramos muitos sites que oferecem o Winplot para download. Aconselhamos o site <http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot> (acessado em 02 de junho de 2013), pois além do software para download podemos encontrar muitas informações sobre o programa e sugestões de uso para o software.

Um dos grandes problemas de se trabalhar com funções complexas, como é o caso dos polinômios, é o fato de que não temos como plotar gráficos, pois para plotar os gráficos de funções complexas a valores complexos precisaríamos desenhá-los no \mathbb{R}^4 , o que não é possível.

Para tentar vencer esse obstáculo vamos plotar um gráfico para cada módulo de complexos, ou seja, dividir o plano complexo em circunferências e para cada circunferência teremos uma curva. Se essa curva passar pelo zero complexo, o ponto $(0, 0)$, então temos uma raiz com o módulo utilizado para plotar a curva.

É claro que não é possível desenhar uma curva para cada módulo, pois o módulo é um número real e esses são infinitos. Então o que faremos é algo parecido com o que fez Argand em sua demonstração: assumir que sendo uma função contínua definida num conjunto compacto, como é o caso da circunferência, então a imagem da função também é um conjunto compacto. A idéia é desenharmos algumas curvas e verificar que a medida que consideramos complexos com módulos maiores a origem passa da parte externa da curva para a parte interna da curva. Logo deve existir um número complexo cujo módulo produz uma curva que passe pela origem e esse número complexo é uma raiz do polinômio considerado.

Observamos que esse procedimento não fornece, como a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, um método para obtenção de raízes de polinômios, mas permite que o aluno tenha uma idéia intuitiva que é possível chegar tão próximo quanto se queira

do módulo da raiz do polinômio.

Antes de apresentarmos as atividades convém algumas observações sobre o uso do software que devem ser apresentadas aos alunos, observamos também que essas observações são válidas para a maioria dos softwares utilizados em matemática:

- (a) Utilizamos a vírgula para separar a parte decimal da parte inteira de número, mas a maioria dos programas e equipamentos, como as calculadoras, utilizam o padrão americano onde o ponto realiza essa função. Esse é o caso do Winplot. Logo é preciso dar essa informação ao aluno quando for utilizar o programa;
- (b) O seno é abreviado por *sen* aqui no Brasil, mas o Winplot utiliza também o padrão americano que representa o seno por *sin*;
- (c) O símbolo da multiplicação utilizado no Winplot é o asterisco (*).
- (d) A raiz de $p(z)$ é o valor de z tal que $p(z) = 0$. Mas o 0 dos complexos é $0 + 0i$ que é a origem do plano complexo. Logo estamos procurando um complexo que tenha como imagem a origem do plano complexo.

Apresentamos também algumas atividades teóricas com as consequências do Teorema Fundamental da Álgebra.

Passemos agora para as atividades.

5.2 Atividade 1

Dadas as equações paramétricas a seguir, faça o que se pede em cada item:

$$\begin{cases} x = 2 + t & t \in \mathbb{R} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

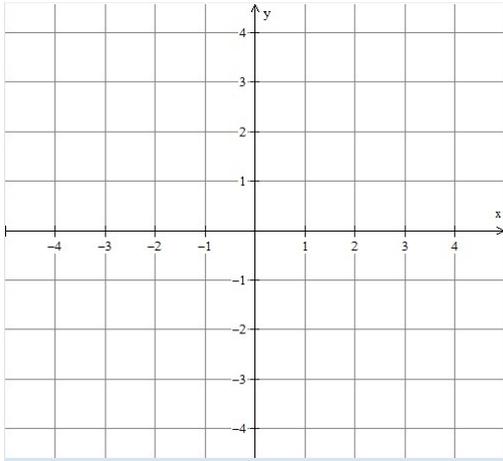
(a) Complete a tabela:

t	x	y
-2		
-1		
0		
1		
2		

(b) Em cada linha da tabela anterior, x e y são as coordenadas de um ponto. Complete a tabela a seguir, utilizando as coordenadas da tabela anterior:

t	Ponto
-2	A = (,)
-1	B = (,)
0	C = (,)
1	D = (,)
2	E = (,)

(c) Localize os pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano a seguir:



(d) Que curva representa as equações paramétricas?

(e) Qual é a raiz da curva?

5.3 Atividade 2

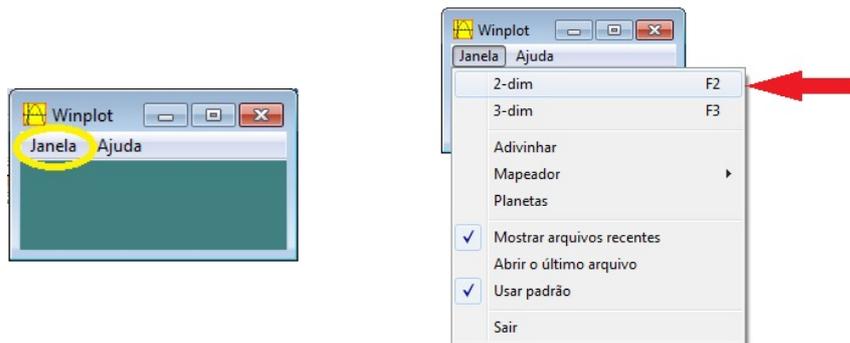
Utizando novamente as equações paramétricas da Atividade 1, questão a seguir, e o software Winplot, faça o que se pede:

$$\begin{cases} x = 2 + t & t \in \mathbb{R} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

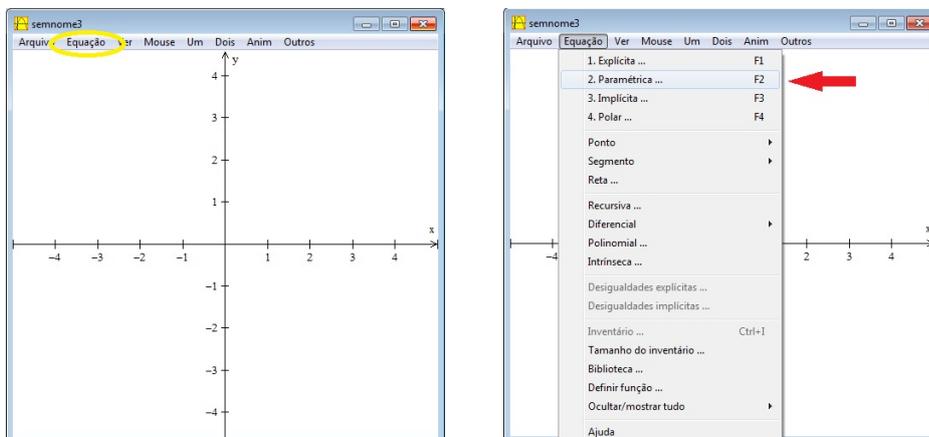
(a) Abra o software Winplot, clicando no ícone;



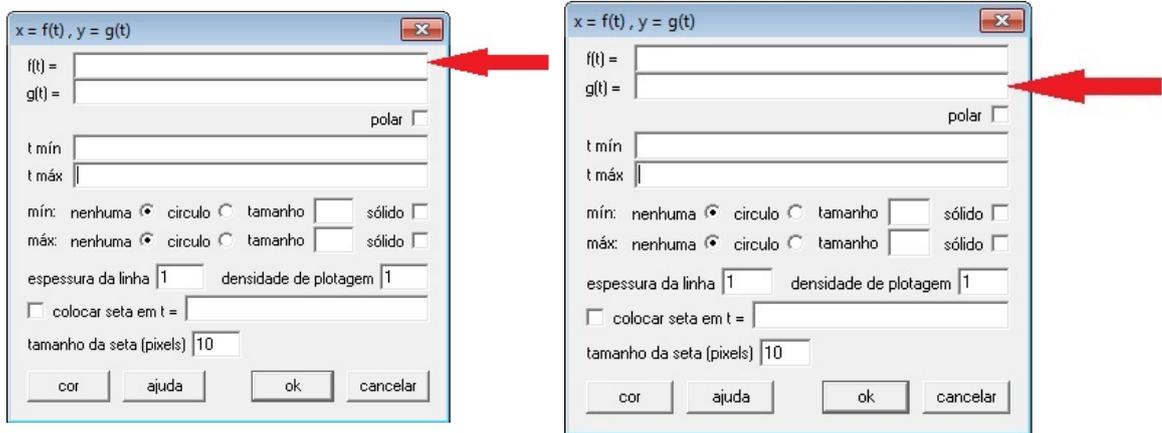
(b) Clique em Janela e a seguir em 2-dim;



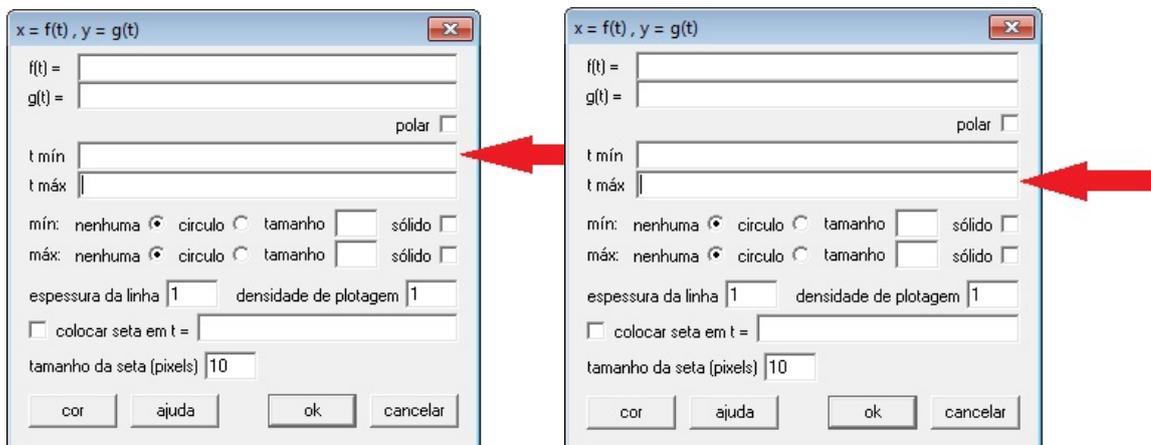
(c) Na nova janela que abrir clique em 'Equação' e depois em 'Paramétrica':



- (d) Abrirá uma janela com dois campos: $f(t)$ e $g(t)$. No campo $f(t)$ devemos digitar a equação que permite calcular o valor do x e no campo $g(t)$ devemos digitar a equação que determina o valor do y .



- (e) Ainda na mesma janela digitamos o valor mínimo de t , que deve ser 0 , no campo 't mín' e o valor máximo, que deve ser 2π , no campo 't máx' e depois clique em 'ok':



- (e) Agora responda as questões:

- Que curva foi apresentada?
- Qual a raiz da curva?
- Compare essa curva com a obtida na atividade 1.

5.4 Atividade 3

Vamos verificar que o polinômio $p(z) = z + i$ tem raiz em \mathbb{R} . Para realizar a atividade siga os seguintes passos:

(a) Escreva $p(z)$ na forma polar. Para isso faça $z = R(\cos(t) + i \sin(t))$, substitua em $p(z)$:

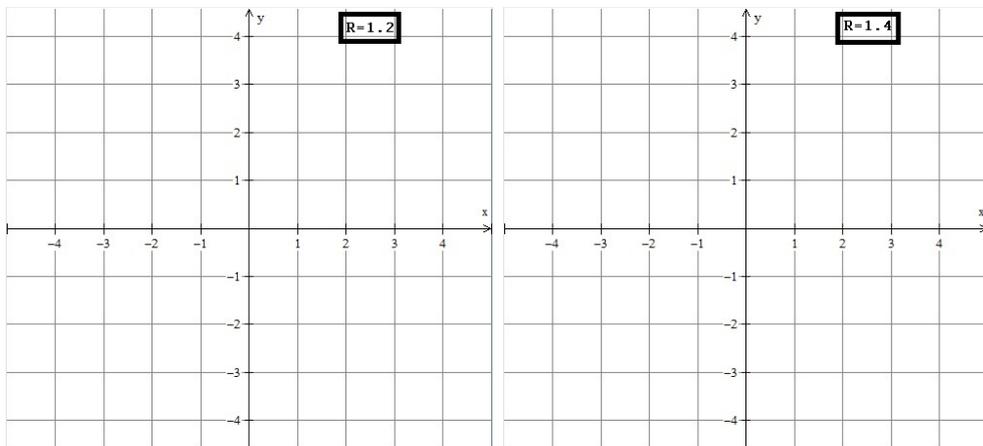
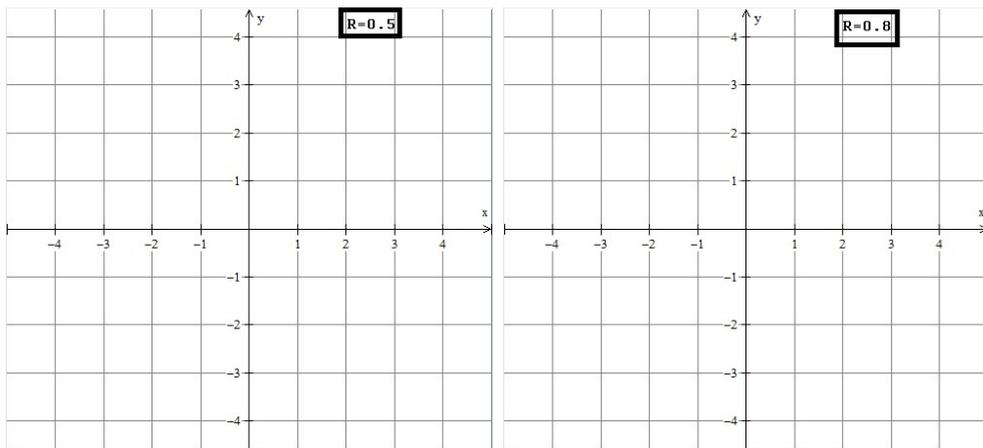
(b) Aplique a distributiva para eliminar os parênteses:

(c) Agrupe as partes reais e as partes imaginárias:

- (d) A expressão que encontramos pode ser escrita na forma de equações paramétricas, pois parte real corresponde ao x de $p(z)$ e a parte imaginária corresponde ao y de $p(z)$. Complete então

$$p(z) = \begin{cases} x = \operatorname{Re}[p(z)] = \\ y = \operatorname{Im}[p(z)] = \end{cases}$$

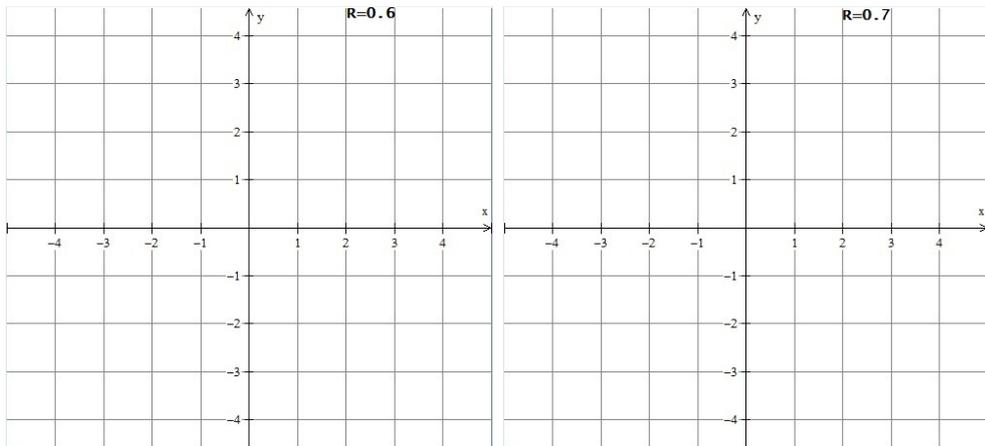
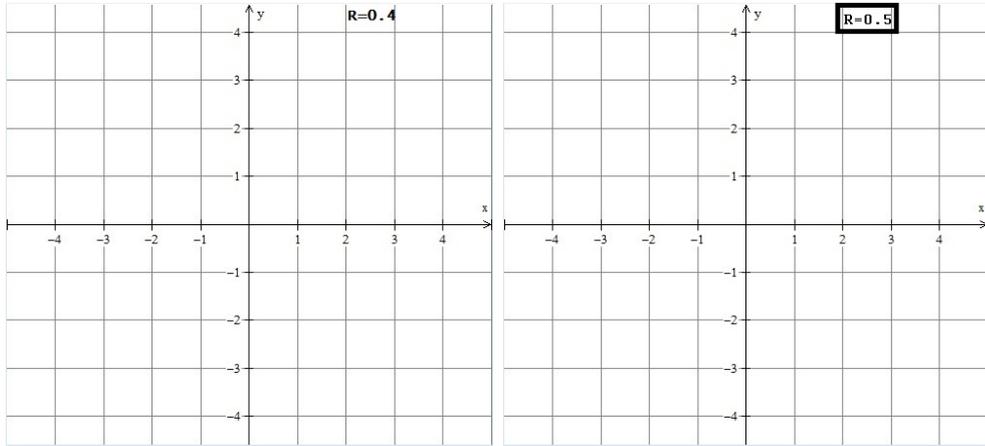
- (e) Utilizando as equações paramétricas do item anterior, repita os procedimentos apresentados nos itens de a até e da atividade 2, utilizando para R o valor 0,5. Esboce a curva apresentada pelo Winplot no plano correspondente a $R=0.5$. Depois clique em 'editar' e troque o valor do R para 0,8. Desenhe a curva mostrada no plano cartesiano correspondente. Repita o procedimento para utilizando para o os valores 1,2 e 1,4. Esboce as curvas obtidas nos planos cartesianos correspondentes:



- (f) Analisando os gráficos esboçados no item anterior o que você pode conjecturar sobre o origem (o ponto $(0,0)$)?
- (g) Utilizando uma casa decimal, qual o valor do módulo de uma a raiz de $p(z)$? Verifique utilizando o Winplot.

5.5 Atividade 4

Repita todos os itens da atividade 3, mas utilizando o polinômio $p(z) = z^2 + 5iz + 3$ e para R os valores 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,7. Esboce as curvas nos planos correspondentes:



5.6 Atividade 5

Com as conclusões das atividades anteriores, procure um valor aproximado do módulo R de alguma raiz de $p(z) = z^5 - i$

5.7 Atividades Teóricas

As atividades a seguir são aplicações dos resultados sobre polinômios apresentadas no capítulo 4.

Exemplo 5.1. *Seja o polinômio complexo $p(z) = (1 + 2i)z - (1 + i)$. A partir do teorema 4.4, sua única raiz é dada por $\frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{3 - i}{5}$.*

Exemplo 5.2. *Seja o polinômio complexo $p(z) = z^2 - 5iz - 6$. A partir do teorema ??, tomando $d = (5i)^2 + 24 = -1$ e como uma das soluções da equação $w^2 = -1$ é $w = i$, então as raízes de $p(z)$ são $\frac{5i - i}{2} = 2i$ e $\frac{5i + i}{2} = 3i$.*

Exemplo 5.3. *Seja o polinômio complexo $p(z) = z^3 - i$. Pelo teorema 4.6, as raízes de $p(z)$ são dadas por*

$$z_k = \sqrt[3]{|i|} \left[\cos \left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2,$$

isto é, $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $z_2 = -i$. Assim,

$$p(z) = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) (z + i).$$

Capítulo 6

Apêndice

Nesse apêndice apresentamos as soluções das atividades 1, 2, 3, 4 e 5 do capítulo 5.

6.1 Atividade 1

Dadas as equações paramétricas a seguir, faça o que se pede em cada item:

$$\begin{cases} x = 2 + t & t \in \mathbb{R} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

(a) Complete a tabela:

t	x	y
-2	0	-3
-1	1	-2
0	2	-1
1	3	0
2	4	1

Cálculos do x e do y :

$$t = -2 \Rightarrow x = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0 \quad y = -2 - 1 = -3$$

$$t = -1 \Rightarrow x = 2 + (-1) = 2 - 1 = 1 \quad y = -1 - 1 = -2$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 2 + 0 = 2 \quad y = 0 - 1 = -1$$

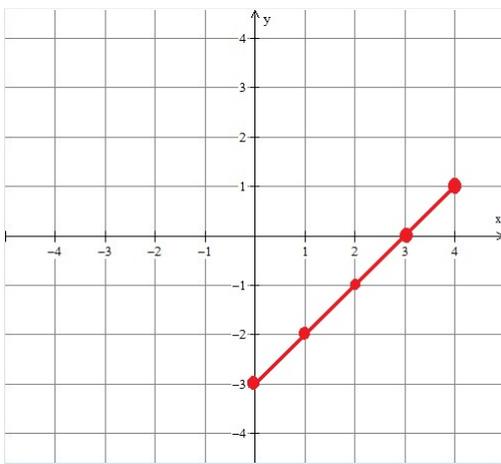
$$t = 1 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3 \quad y = 1 - 1 = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \quad y = 2 - 1 = 1$$

- (b) Em cada linha da tabela anterior, x e y são as coordenadas de um ponto. Complete a tabela a seguir, utilizando as coordenadas da tabela anterior:

t	Ponto
-2	A = (0, -3)
-1	B = (1, -2)
0	C = (2, -1)
1	D = (3, 0)
2	E = (4, 1)

- (c) Localize os pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano a seguir:



- (d) Que curva representa as equações paramétricas?

A curva é uma reta

- (e) Qual é a raiz da curva?

A raiz é o ponto $D = (3, 0)$

6.2 Atividade 2

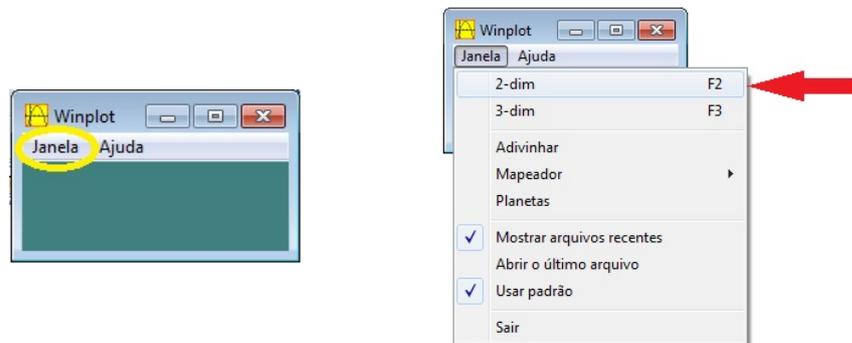
Utizando novamente as equações paramétricas da Atividade 1, e o software Winplot, faça o que se pede:

$$\begin{cases} x = 2 + t & t \in \mathbb{R} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

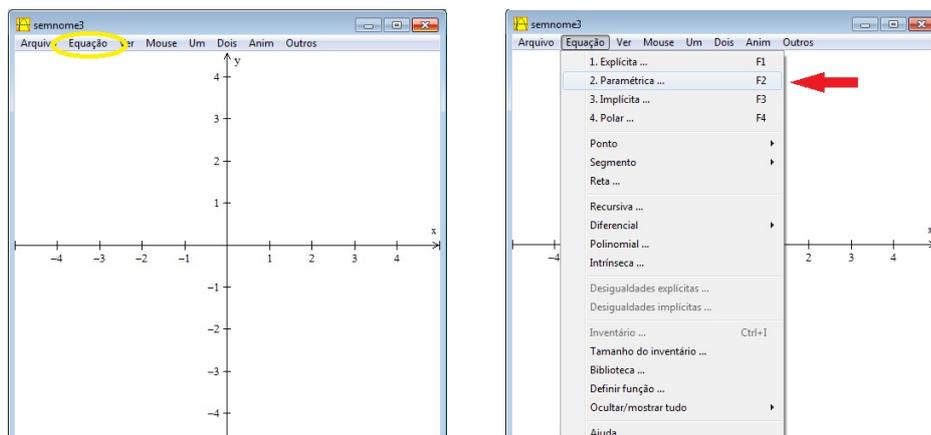
- (a) Abra o software Winplot, clicando no ícone;



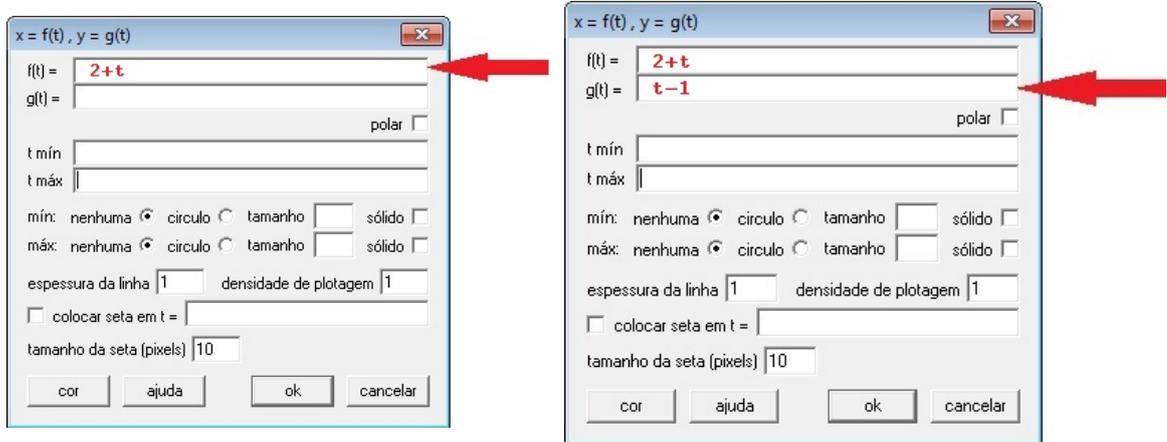
- (b) Clique em Janela e a seguir em 2-dim;



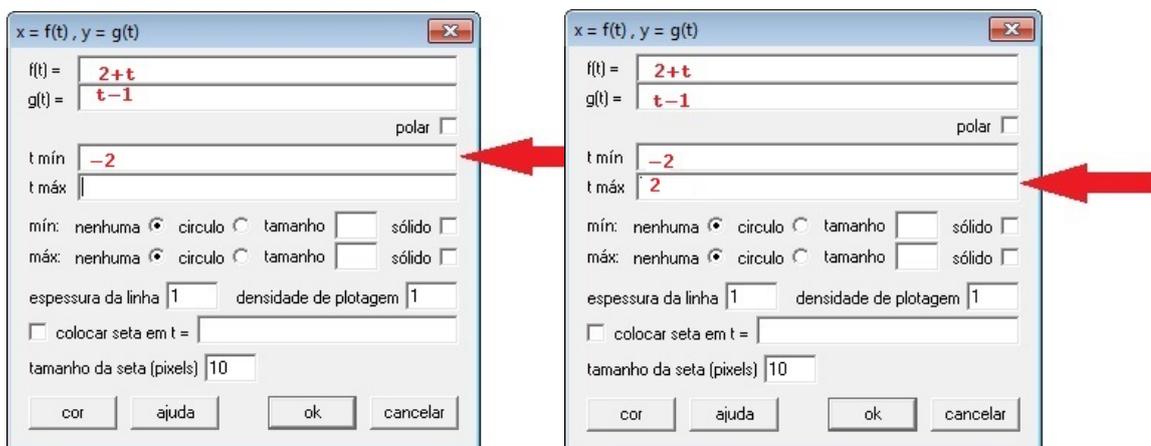
- (c) Na nova janela que abrir clique em 'Equação' e depois em 'Paramétrica':



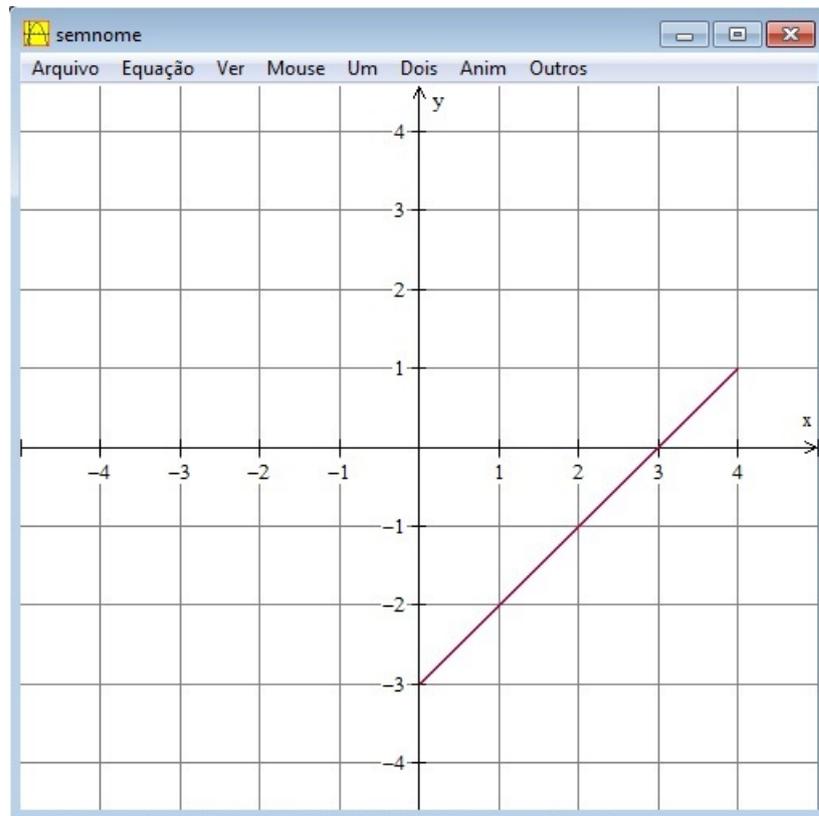
- (d) Abrirá uma janela com dois campos: $f(t)$ e $g(t)$. No campo $f(t)$ devemos digitar a equação que permite calcular o valor do x e no campo $g(t)$ devemos digitar a equação que determina o valor do y .



- (e) Ainda na mesma janela digitamos o valor mínimo de t no campo 't mín' e o valor máximo no campo 't máx' e depois clique em 'ok':



A curva que será apresentada é:



(e) Agora responda as questões:

- Que curva foi apresentada?

Uma reta

(f) Qual a raiz da curva?

O ponto $D=(3,0)$

(g) Compare essa curva com a obtida na atividade 1.

Espera-se que o aluno perceba que obteve a mesma curva da atividade 1, mas o trabalho sem o software foi maior

6.3 Atividade 3

Vamos verificar que o polinômio $p(z) = z + i$ tem raiz em \mathbb{C} . Para realizar a atividade siga os seguintes passos:

- (a) Escreva $p(z)$ na forma polar. Para isso faça $z = R(\cos(t) + i \sin(t))$ e substitua em $p(z)$:

$$p(z) = z + i$$

$$P(z) = R(\cos(t) + i \sin(t)) + i$$

- (b) Aplique a distributiva para eliminar os parênteses:

$$p(z) = R \cos(t) + iR \sin(t) + i$$

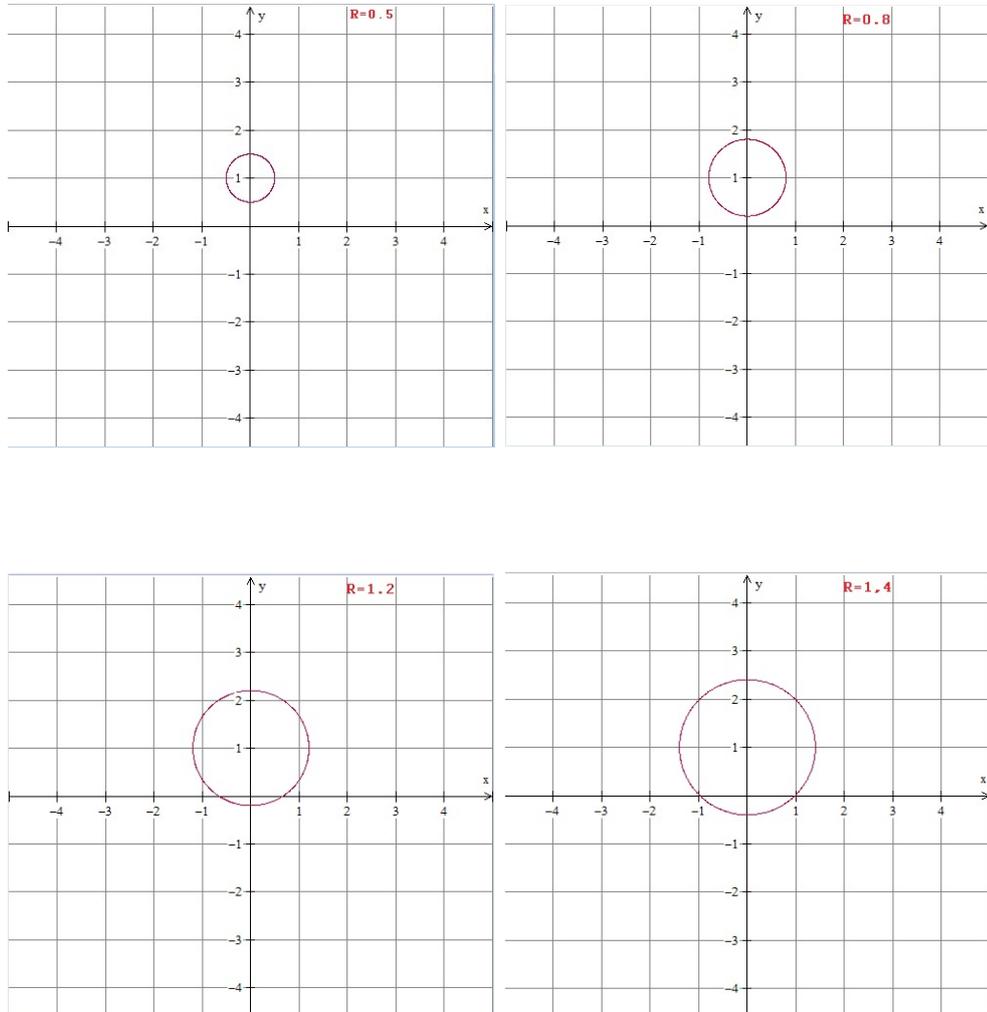
- (c) Agrupe as partes reais e as partes imaginárias:

$$p(z) = [R \cos(t)] + i[R \sin(t) + 1]$$

- (d) A expressão que encontramos pode ser escrita na forma de equações paramétricas, pois parte real corresponde ao x de $p(z)$ e a parte imaginária corresponde ao y de $p(z)$. Complete então

$$p(z) = \begin{cases} x = \operatorname{Re}[p(z)] = R \cos(t) \\ y = \operatorname{Im}[p(z)] = R \sin(t) + 1 \end{cases}$$

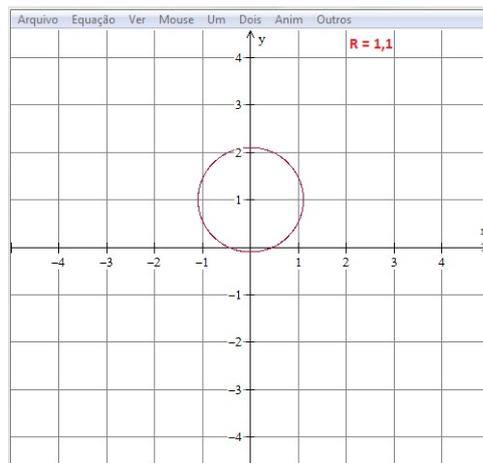
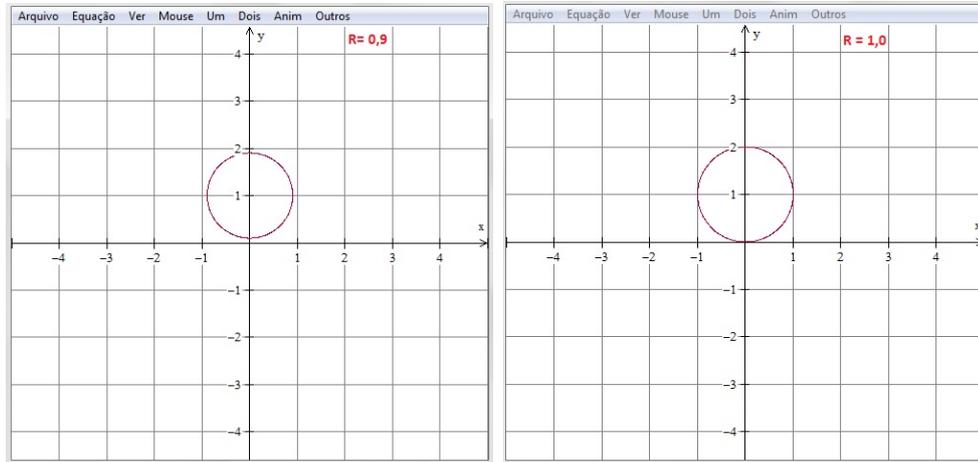
- (e) Utilizando as equações paramétricas do item anterior, repita os procedimentos apresentados nos itens de a até d , utilizando para R os seguintes valores $0,5 - 0,8 - 1,2 - 1,4$. Para valor de R será exibida uma curva. Faça um esboço de cada uma delas no plano cartesiano correspondente a seguir:



- (f) Analisando os gráficos esboçados no item anterior o que você pode conjecturar sobre o origem (o ponto $(0,0)$)? **A origem está fora das curvas nos dois primeiros gráficos e está dentro das curvas nos outros gráficos, logo deve existir um valor de R tal que o gráfico passe pela origem.**

- (g) Utilizando uma casa decimal, qual o valor do módulo de uma a raiz de $p(z)$? Verifique utilizando o Winplot. A raiz deve ter módulo R igual a 0,9 ou 1,0 ou 1,1.

Plotando as curvas temos:



Logo o valor do módulo da raiz com uma casa decimal é $R = 1,0$

6.4 Atividade 4

Repita todos os itens da atividade 3, mas utilizando o polinômio $p(z) = z^2 + 5iz + 3$ e para R os valores 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,7. Esboce as curvas nos planos correspondentes:

(a) substituindo $z = R(\cos(t) + i\text{sen}(t))$ em $p(z)$ temos:

$$p(z) = z^2 + 5iz + 3$$

$$p(z) = [R(\cos(t) + i\text{sen}(t))]^2 + 5i[R(\cos(t) + i\text{sen}(t))] + 3$$

(b) Aplicando a fórmula de Moivre e aplicando a distributiva temos:

$$p(z) = R^2(\cos(2t) + i\text{sen}(2t)) + 5i[R(\cos(t) + i\text{sen}(t))] + 3$$

$$p(z) = R^2\cos(2t) + iR^2\text{sen}(2t) + 5i[R\cos(t) + iR\text{sen}(t)] + 3$$

$$p(z) = R^2\cos(2t) + iR^2\text{sen}(2t) + 5iR\cos(t) + 5i^2R\text{sen}(t) + 3$$

$$p(z) = R^2\cos(2t) + iR^2\text{sen}(2t) + 5iR\cos(t) - 5R\text{sen}(t) + 3$$

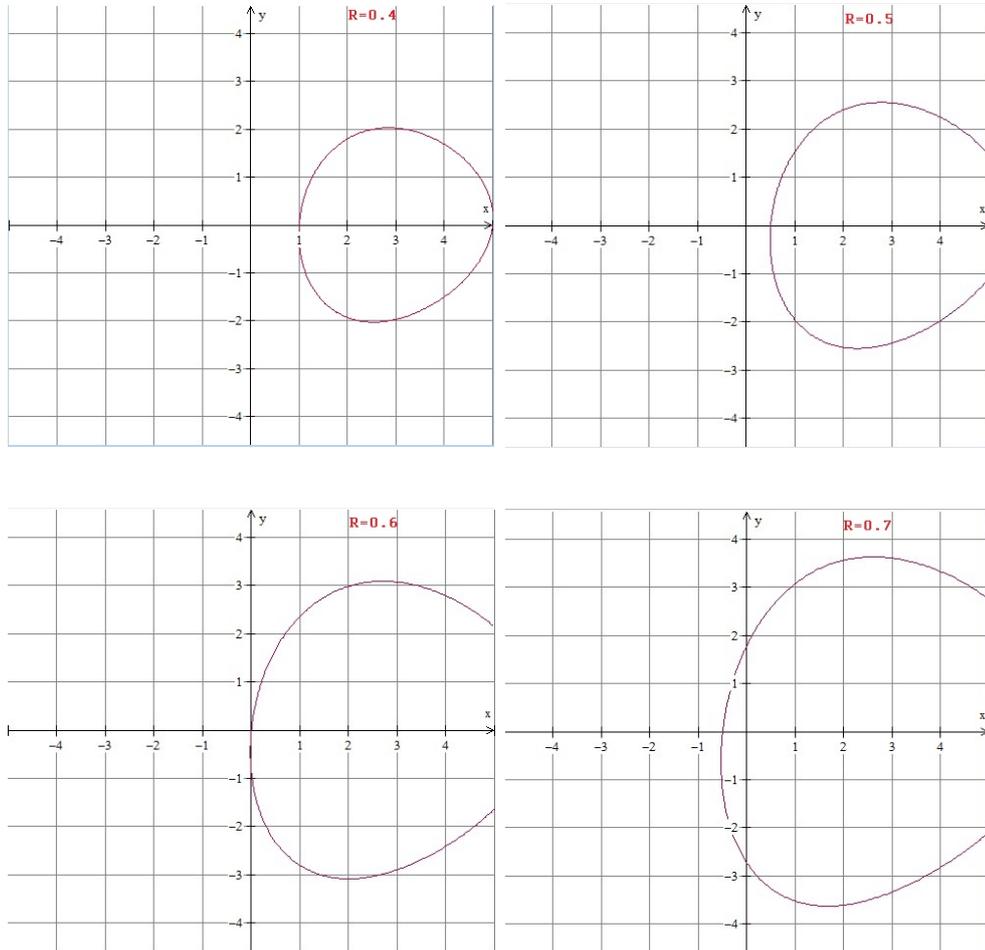
(c) Agrupando a parte real e a parte imaginária temos:

$$p(z) = [R^2\cos(2t) - 5R\text{sen}(t) + 3] + i[R^2\text{sen}(2t) + 5R\cos(t)]$$

(d) Escrevendo as equações paramétricas de $p(z)$ temos

$$p(z) = \begin{cases} x = \text{Re}[p(z)] = R^2\cos(2t) - 5R\text{sen}(t) + 3 \\ y = \text{Im}[p(z)] = R^2\text{sen}(2t) + 5R\cos(t) \end{cases}$$

(e) Utilizando o Winplot para gerar os gráficos pedidos temos:



(f) A origem está fora da curva quando $R = 0,5$ e fora quando $R = 0,7$ e $R = 0,8$.

Quando $R = 0,6$ a curva 'parece' passar pela origem.

(g) Analisando as curvas o módulo da raiz com uma casa decimal é $R = 0,6$.

6.5 Atividade 5

Com as conclusões das atividades anteriores, procure um valor aproximado com uma casa decimal do módulo R de alguma raiz de $p(z) = z^5 - i$

Esperamos que o aluno encontre $R = 1,0$ como o valor aproximado do módulo de uma das raízes.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo *Variáveis complexas e aplicações*, LTC, 2008.
- [2] BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da *Matemática - Aula por Aula, 3ª Série*, FTD, 2008
- [3] BARTLE, Robert G. *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons Inc, 1967.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão ; MORGADO, Augusto César e WAGNER, Eduardo *Trigonometria e Números Complexos*, SBM, 2005
- [5] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de ; ROQUE, Tatiana *Tópicos de História da Matemática - Coleção PROFMAT*, SBM, 2012
- [6] CHURCHIL, Ruel V. *Variáveis Complexas e aplicações*, McGraw-Hill, 1975
- [7] DANTE, Luiz Roberto *Matemática*, Ática, 2009
- [8] DANTE, Luiz Roberto *Tudo é matemática*, Ática, 2005
- [9] EVES, Howard *Introdução à história da matemática*, Editora UNICAMP, 2004.
- [10] FERNANDES, Cecília S. e BERNARDES JR, Nilson C., *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, SBM, 2008.
- [11] FERREIRA, Jamil, *A Construção dos Números*, SBM, 2011.
- [12] HEFEZ, Abramo *Curso de Álgebra - volume 1. 4 ed.*, IMPA, 2011
- [13] HEFEZ, Abramo e VILLELA, Maria Lúcia Torres *Polinômios e Equações Algébricas - Coleção PROFMAT*, SBM, 2012
- [14] IEZZI, Gelson ; DOLCE, Oswaldo ; DEGENSZAJN, David ; ALMEIDA, Nilze de *MATEMÁTICA Ciência e Aplicações*, Atual Editora, 1991

- [15] IEZZI, Gelson *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Vol 6*, Atual Editora, 1991
- [16] LIMA, Elon Lages ; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto ; WAGNER, Eduardo ; MORGADO, Augusto César *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3*, SBM, 2006
- [17] LIMA, Elon Lages *Análise real - volume 2*, IMPA, 2011
- [18] LIMA, Elon Lages *Curso de Análise - volume 2*, IMPA, 2011
- [19] MILIES, César Polcino *A Emergência dos Números Complexos, Revista do Professor de Matemática, número 24, páginas 5 - 15*, SBM, 1993
- [20] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios - volume 6*, SBM, 2012.
- [21] SMOLE, Kátia Cristina Stocco ; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira *Matemática*, Saraiva, 2010
- [22] SOARES, Marcio G., *Cálculo em uma Variável Complexa.*, IMPA, 2006