



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Renée Bampi Däum

CAMINHOS PARA A OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA NO ENSINO BÁSICO

BLUMENAU
2024

Renée Bampi Däum

CAMINHOS PARA A OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Roger Behling, Dr.

BLUMENAU

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Däum, Renée Bampi
Caminhos para a otimização contínua no ensino básico /
Renée Bampi Däum ; orientador, Roger Behling, 2024.
69 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Otimização contínua. 3. Programação
linear. 4. Ensino básico. I. Behling, Roger. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT. III. Título.

Renée Bampi Däum

CAMINHOS PARA A OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA NO ENSINO BÁSICO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Roger Behling, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Douglas Soares Gonçalves, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Hugo José Lara Urdaneta, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Roger Behling, Dr.
Orientador

BLUMENAU, 2024.

À minha família, meus colegas e meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente à minha mãe, que sempre acreditou na educação como fonte de crescimento, ao apoio do meu irmão, cunhada e sobrinhos.

À Santa Paulina, fonte de esperança e fé.

Ao orientador, professor Roger Behling, que com muita paciência e excelência me guiou durante os últimos meses. Agradeço ainda a todos os demais professores do programa PROFMAT da UFSC pela excelência, dedicação e compreensão durante todo o curso.

Aos meus colegas, que sempre unidos, deram condições para que eu seguisse adiante, em especial meu colega Tony.

E aos meus amigos, que me apoiaram e me compreenderam nesses anos de estudos.

*“Uma teoria matemática
não deve ser considerada
completa até que a tenhamos
feito tão clara que a possamos
explicar ao primeiro homem
que encontramos na rua.”
(HILBERT, David, 1900)*

RESUMO

A otimização está presente em vários aspectos da sociedade, desde discussões em meios acadêmicos até a aplicação por profissionais, como engenheiros. Este trabalho explorará a otimização contínua por meio de conceitos clássicos de programação linear e não linear. A resolução de problemas de otimização será abordada de forma gradual, começando pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker e as condições de qualificação, e se especializando cada vez mais com a inclusão da convexidade das funções envolvidas. A programação linear será apresentada de maneira abrangente, juntamente com dois métodos de resolução: o método Simplex e o método de pontos interiores. A ênfase na programação linear (PL) em problemas com duas variáveis deve-se ao fato de proporcionar material adequado para trabalhos em sala de aula no ensino básico. A contribuição deste trabalho é apresentar duas propostas didáticas com o objetivo de ensinar e resolver problemas de programação linear bidimensionais no ensino básico, baseadas no conceito do teorema fundamental da programação linear. São apresentadas duas opções: uma utilizando tecnologia, especificamente o software GeoGebra, e outra em um formato mais lúdico, usando o geoplano.

Palavras-chave: Otimização contínua. Problemas de programação linear. Ensino básico.

ABSTRACT

Optimization is present in various aspects of society, from discussions in academic circles to applications by professionals such as engineers. This work will explore continuous optimization through classical concepts of linear and nonlinear programming. The resolution of optimization problems will be addressed gradually, starting with the Karush-Kuhn-Tucker conditions and constraint qualifications, and increasingly specializing with the inclusion of the convexity of the functions involved. Linear programming will be presented comprehensively, along with two resolution methods: the Simplex method and the interior-point method. The emphasis on linear programming (LP) in problems with two variables is due to providing suitable material for classroom work in basic education. The contribution of this work is to present two didactic proposals with the objective of teaching and solving two dimensional linear programming problems in basic education, based on the concept of the fundamental theorem of linear programming. Two options are presented: one using technology, specifically the GeoGebra software, and another one in a more playful format, using the geoboard.

Keywords: Continuous optimization. Linear programming problems. Basic education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Mínimo local e mínimo global	15
Figura 2.2 – Relação entre minimizar $-f$ e maximizar f	16
Figura 2.3 – Representação das restrições do exemplo 2.1	18
Figura 2.4 – Representação das restrições do exemplo 2.3	21
Figura 2.5 – Representação das restrições do exemplo 2.4	22
Figura 2.6 – Conjuntos convexo e não convexo	24
Figura 2.7 – Funções convexa e não convexa	24
Figura 2.8 – Representação da restrição do exemplo 2.5	25
Figura 2.9 – Representação das restrições do exemplo 2.6	26
Figura 2.10 – Representação das restrições do exemplo 2.7	27
Figura 2.11 – Representação da restrição do exemplo 2.8	28
Figura 2.12 – Representação das restrições do exemplo 2.9	29
Figura 2.13 – Representação da restrição do exemplo 2.10	30
Figura 2.14 – Representação das restrições do exemplo 2.11	31
Figura 2.15 – Representação das restrições do exemplo 2.12	32
Figura 2.16 – Representação das restrições do exemplo 2.13	34
Figura 2.17 – Representação das restrições do exemplo 2.14	35
Figura 3.1 – Ilustração do teorema fundamental de PL	41
Figura 3.2 – Caminho percorrido pelo método Simplex	41
Figura 3.3 – Visualização gráfica do exemplo 3.3	44
Figura 3.4 – Visualização gráfica do exemplo 3.4	47
Figura 3.5 – Comparativo: método Simplex (pontos pretos) e o MPI.	48
Figura 3.6 – Função de barreira de acordo com parâmetros γ	49
Figura 3.7 – Restrições do problema 3.5	50
Figura 3.8 – Centro de gravidade do problema 3.5	50
Figura 3.9 – Centro de gravidade 2	51
Figura 3.10 – Centro de gravidade 3	51
Figura 3.11 – Centro de gravidade 4	51
Figura 3.12 – Centro de gravidade 5	51
Figura 3.13 – Centro de gravidade 6	52
Figura 3.14 – Trajetória central do problema 3.5	52
Figura 4.1 – Dados do IDEB 2021	53
Figura 4.2 – Visualização gráfica do problema	57
Figura 4.3 – Pontos de intersecção	58
Figura 4.4 – Foto do geoplano	60
Figura 4.5 – Representação do problema no geoplano	63
Figura 4.6 – Representação do problema no geoplano com o vetor da maximização	63

Figura 4.7 – Início da resolução	64
Figura 4.8 – Início da resolução - Fechamento do polígono	64
Figura 4.9 – Resolução do problema	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Tabela de custos de envio (Dólares por caixa) do exemplo 3.1	38
Tabela 3.2 – Lista de atividades do exemplo 3.1	38
Tabela 3.3 – Lista de entrada e saída de caixas do exemplo 3.1	38
Tabela 3.4 – Fluxo de entrada e saída de caixas do exemplo 3.1	39
Tabela 3.5 – Coeficientes do exemplo 3.3	44
Tabela 3.6 – Mudança de base - x_4 para x_1	45
Tabela 3.7 – Finalização de mudança de base - x_4 para x_1	45
Tabela 3.8 – Mudança de base - x_3 para x_2	45
Tabela 3.9 – Finalização de mudança de base - x_3 para x_2	46
Tabela 3.10 – Coeficientes do exemplo 3.4	46
Tabela 3.11 – Mudança de base de x_3 para x_1	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	VISÃO GERAL DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	15
3	PROGRAMAÇÃO LINEAR E MÉTODOS	37
3.1	MÉTODO SIMPLEX	40
3.2	MÉTODO DE PONTOS INTERIORES	47
4	SUGESTÕES DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA	53
4.1	SUGESTÃO 1: USO DO APLICATIVO GEOGEBRA PARA RESOLU- ÇÃO DE PROBLEMAS DE PL	55
4.1.1	Descrição da aula	55
4.1.2	Objetivos	55
4.1.3	Pré-requisitos	55
4.1.4	Ano escolar sugerido	55
4.1.5	Número de aulas	56
4.1.6	Habilidades envolvidas da BNCC e objetos do conhecimento . .	56
4.1.7	Materiais necessários	56
4.1.8	Sequência didática	56
4.1.9	Avaliação	59
4.1.10	Possíveis obstáculos	60
4.2	SUGESTÃO 2: JOGO USANDO GEOPLANO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL	60
4.2.1	Descrição da aula	60
4.2.2	Objetivos	61
4.2.3	Pré-requisitos	61
4.2.4	Ano escolar	61
4.2.5	Número de aulas	61
4.2.6	Habilidades envolvidas da BNCC e objetos do conhecimento . .	61
4.2.7	Materiais necessários	61
4.2.8	Sequência didática	61
4.2.9	Avaliação	65
4.2.10	Possíveis obstáculos	66
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

Em uma busca rápida na internet para o significado da palavra otimização o resultado é praticamente unânime: ato ou efeito de otimizar e/ou processo de se obter o melhor valor objetivo em função de variáveis de decisão. Em nosso dia-a-dia estamos sempre na tentativa de otimizar nosso tempo, nossos gastos, nossos lucros, a produção de algum produto entre tantos outros casos. Nesse contexto, as ciências em geral também se utilizam da otimização, seja na economia, na informática, na medicina, no transporte e etc (RIBEIRO; KARAS, 2014). Para isso, devemos considerar uma série de variáveis inter-relacionadas com um único objetivo de minimizar (ou maximizar) sujeito a restrições que podem limitar a seleção dos valores para essa tomada de decisão (LUENBERGER, 2003).

Ao longo do trabalho apresentaremos discussões acerca de problemas de otimização do tipo

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (0)$$

que podemos classificar como problemas de programação linear ou problemas de programação não linear. Acerca da primeira, (BOYD; VANDENBERGHE, 2004) cita-a como aquela onde a função f e funções de restrições que definem o conjunto Ω são funções lineares ou lineares afins. Já a segunda, não teremos apenas funções lineares envolvidas.

Temos como objetivo principal nessa dissertação estudar tópicos de otimização tais como as condições de Karush-Kuhn-Tucker, método Simplex, método de pontos interiores e, ao final, como contribuição apresentar propostas didáticas para resolução de problemas de programação linear em turmas de oitavo ano do ensino fundamental. Para que nosso objetivo seja alcançado, apresentaremos uma visão mais geral sobre otimização, com uma revisão bibliográfica da teoria que julgamos necessária ao leitor para compreender esses processos citados acima.

Em particular no capítulo 2, apresentaremos as Condições de Karush-Kuhn-Tucker. Em 1950 Kuhn e Tucker introduziram um problema de programação não linear e provaram o teorema principal da teoria que dá condições necessárias para a existência de uma solução ótima para um problema de programação não linear, estabelecendo o que chamamos de teoria matemática da programação não linear (KJELDSSEN, 2000). Além disso, apresentaremos as chamadas condições de qualificação (CQ's) que dizem respeito a propriedades de pontos viáveis em Ω que quando satisfeitas, garantem as Condições de Karush-Kuhn-Tucker (FLOR, 2016). As condições de qualificação a que nos referimos correspondem a CQ de independência linear, CQ de Mangasarian-Fromovitz e CQ de Slater.

No capítulo seguinte apresentaremos a programação linear que, segundo (DANT-

ZIG, 1963) em 1949 quando acadêmicos e órgãos governamentais apresentaram pesquisas usando ferramentas de programação linear antes consideradas separadamente, foram então unificadas. Essas pesquisas, abrangendo desde planejamento de rotação de colheitas até o planejamento de ações militares em larga escala, poderiam utilizar uma estrutura matemática para formular problemas explicitamente e, assim, determinar soluções de maneira mais eficiente, utilizando o método Simplex, por exemplo.

Sobre os métodos apresentados para resolução de problemas de programação linear, temos o método Simplex que

Possibilitou aos economistas formular grandes modelos e analisá-los de forma sistemática e eficiente. A descoberta de Dantzig coincidiu com o desenvolvimento dos primeiros computadores eletrônicos, e o método simplex tornou-se uma das primeiras aplicações importantes desta tecnologia nova e revolucionária. Daqueles dias até o presente, as implementações computacionais do método simplex têm sido continuamente melhoradas e refinadas. (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 355)

e, o método de pontos interiores, apresentado por Karmarkar¹ em 1984, sendo um novo algoritmo polinomial de pontos no interior do conjunto viável, ganhando destaque nos jornais e revistas da época (LUENBERGER; YE, 2008).

No capítulo 4, apresentaremos duas sugestões de propostas didáticas para resolução de problemas de programação linear em \mathbb{R}^2 com a representação de suas restrições no plano cartesiano. Uma proposta utiliza o software GeoGebra e a outra corresponde a um jogo utilizando o geoplano.

A Base Nacional Curricular Comum ressalta que

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 265)

Aliado a isso, queremos mostrar/criar situações que englobem esses conceitos de otimização apresentados em nosso trabalho aos alunos e como a matemática também pode ser apresentada nesse campo ainda pouco explorado em sala de aula.

¹ Narendra K. Karmarkar - matemático indiano

2 VISÃO GERAL DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

A otimização matemática tem por objetivo buscar uma melhor solução para determinados problemas de naturezas diversas, como engenharia de processos, pesquisa operacional, análise numérica e etc.

Precisamos considerar ainda que

Para a maioria dessas aplicações, a otimização matemática é usada como uma ajuda para um tomador de decisão humano, projetista de sistema ou operador de sistema, que supervisiona o processo, verifica os resultados e modifica o problema (ou a abordagem da solução) quando necessário. Este tomador de decisão humano também realiza quaisquer ações sugeridas pelo problema de otimização, por exemplo, comprar ou vender ativos para atingir o valor ótimo. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 3)

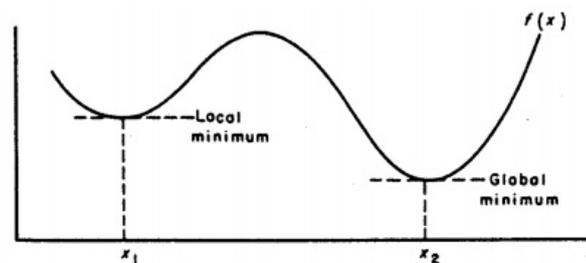
Em algumas situações estamos interessados em minimizar uma função, sujeito a restrições.

Definição 2.1 *Minimizador local e global*

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$. Caso $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$, x^* é dito minimizador global de f em Ω .

Para ilustrar isso, observe a figura 2.1 onde x_1 é mínimo local e x_2 mínimo global de uma $f(x)$.

Figura 2.1 – Mínimo local e mínimo global



Fonte: (DANTZIG, 1963, p.153)

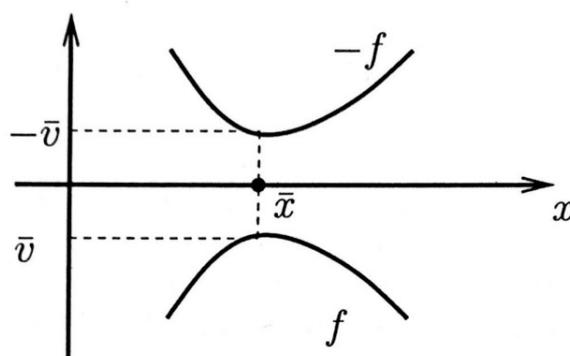
Vamos partir da proposta de

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função arbitrária que chamaremos de função objetivo e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto qualquer o qual chamaremos de conjunto viável, que geralmente possui uma estrutura que pode apresentar igualdades e/ou desigualdades e x será chamado de ponto viável quando pertencer a Ω . Se x^* é minimizador global de f em Ω , então chamaremos de $v^* := f(x^*)$ de valor ótimo de 2.1.

Em alguns casos encontraremos problemas de maximização que podem ser facilmente escritos como um problema de minimização. Observe a figura 2.2 que mostra como essa transformação funciona. Veja que a solução \bar{x} corresponde ao maximizador de f com valor máximo \bar{v} , por outro lado, corresponde ao minimizador de $-f$ com valor mínimo $-\bar{v}$.

Figura 2.2 – Relação entre minimizar $-f$ e maximizar f



Fonte: (IZMAILOV; SOLODOV, 2009, p.4)

O problema geral de otimização que trataremos em nosso trabalho, consiste em

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções dadas. Quando f , h e g forem contínuas, chamaremos (2.2) de um problema de otimização contínua. Nesse trabalho pediremos além de continuidade, que f , h e g sejam continuamente diferenciáveis em certos pontos, ou seja, essas funções são diferenciáveis e suas derivadas são contínuas nos pontos em questão.

Segundo (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), podemos ter dentro da otimização o que chamamos de programação linear e não linear. A primeira diz respeito a problemas em que a função objetivo e suas restrições são lineares (ou lineares afins). Caso contrário, chamaremos de programação não linear.

Assim, o problema da programação linear (PL) consiste em termos uma f objetivo linear, com h e g afins da forma:

$$\begin{aligned} f(x) &:= c^T x, && c \in \mathbb{R}^n \\ h(x) &:= Ax - b = 0, && A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m \\ g(x) &:= Mx - q \leq 0. && M \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ e } q \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tomamos f linear, e não linear afim em geral, porque os problemas correspondentes seriam equivalentes no sentido de ter os mesmos minimizadores mas apenas tendo valores ótimos diferentes.

Em PL minimizadores locais sempre são minimizadores globais, o que não é verdade em programação não linear. No entanto, observamos que nem sempre em PL temos solução mesmo que o conjunto viável seja não-vazio, para ilustrar esse fato, vide exemplo 2.14.

Para obtenção de soluções para o problema (2.2) consideramos muitas vezes as chamadas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Historicamente, segundo o artigo de (KJELDSEN, 2000):

Quando Kuhn e Tucker provaram o teorema de Kuhn-Tucker em 1950, eles lançaram a teoria da programação não linear. No entanto, de certa forma, este teorema já havia sido provado em 1939, por W. Karush em dissertação de mestrado, inédita.

As condições de KKT são baseadas na teoria bastante elegante envolvendo conjuntos matemáticos chamados de cones. Como referência a essa teoria, deixamos ao leitor como sugestão de leitura (RIBEIRO; KARAS, 2014, p. 190-) e (IZMAILOV; SOLODOV, 2009, p. 194-).

Definição 2.2 Ponto KKT

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções continuamente diferenciáveis em $x^* \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que x^* é um ponto KKT do problema (2.2) se existirem $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$, tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (\text{L})$$

$$h_i(x^*) = 0, \quad g_j(x^*) \leq 0 \quad (\text{P})$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad (\text{D})$$

$$g_j(x^*) \cdot \mu_j^* = 0 \quad (\text{C})$$

em que $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \{1, \dots, m\}$ e $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \{1, \dots, p\}$ são as funções componentes de h e g , respectivamente. O símbolo ∇ é indicado como sendo o gradiente das funções f , h e g .

Sobre as condições da definição 2.2, podemos dizer que:

- i. Em (L) temos as condições de Lagrange;
- ii. Em (P) temos a viabilidade primal dada pelas restrições de igualdade e desigualdade;
- iii. Em (D) temos a viabilidade dual associada às desigualdades de (P) que diz respeito a viabilidade dos multiplicadores de Lagrange μ_j ;

- iv. Em (C) temos a complementaridade entre os multiplicadores de viabilidade dual de (D) e as restrições de desigualdade em (P).

Teorema 2.1 *Se as funções h_j 's e g_j 's são lineares afins e x^* é solução local de (2.2), então x^* é ponto KKT de (2.2).*

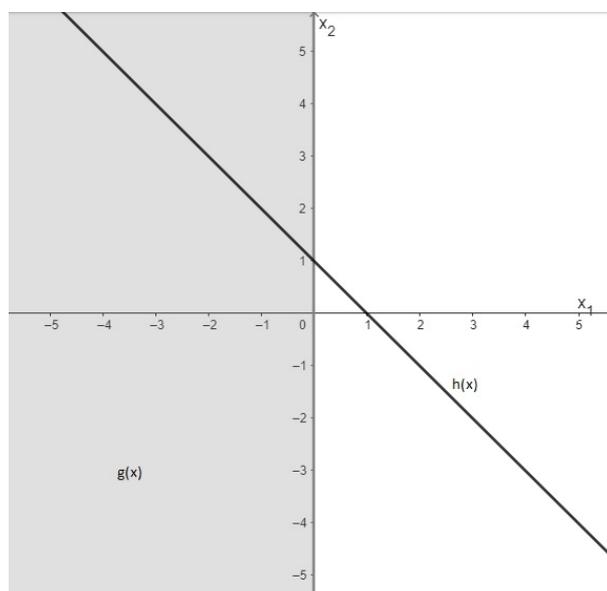
A demonstração deste teorema pode ser encontrado em (RIBEIRO; KARAS, 2014, p. 220). Notamos que sua recíproca não é verdadeira. Bastaria, por exemplo, minimizar $-x_1^2 - x_2^2$ sujeito a restrição afim $x_1 = 1$ e ver que o único ponto KKT que temos é $(1,0)$ e ele na verdade é maximizador global do problema. O fato a que se refere o teorema 2.1 pode ser visto no exemplo 2.1 a seguir.

Exemplo 2.1 *Considere o problema:*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x_1 + x_2 = 1 \\ & g(x) := x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

Na figura 2.3 estão representadas as restrições do exemplo 2.1.

Figura 2.3 – Representação das restrições do exemplo 2.1



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Inicialmente podemos observar que a função objetivo é não linear e as restrições são lineares afins. Podemos notar facilmente que $x^* = (0, 1)$ é minimizador local de f . Isso vem do fato de que $x_2 = 1 - x_1$ e se $x_1 < 0$ implica em $x_2 > 1$, que não minimiza a função. Logo x^* é minimizador local e ponto KKT de acordo com o teorema 2.1.

De fato, pelas condições da definição 2.2, teremos em (L)

$$\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2), \quad \nabla h(x) = (1, 1), \quad \nabla g(x) = (1, 0)$$

e, organizando essas informações com os multiplicadores de Lagrange no minimizador $x^* = (0, 1)$, devemos ter

$$(0,2) + \lambda(1,1) + \mu(1,0) = 0$$

que resulta em $\lambda = -2$ e $\mu = 2$, que em (D) satisfaz as condições da definição 2.2.

Caso haja mais de um ponto KKT e considerando que encontramos $\mu \neq 0$, em (C) temos que $x_1 \cdot \mu = 0$. Nesse caso $x_1 = 0$ e, quando substituído em (P) onde temos $h(x) := x_1 + x_2 - 1 = 0$ e $g(x) := x_1 \leq 0$ nos fornece $x_2 = 1$, único ponto KKT e x^* do problema.

Logo, o ponto $x^* = (0, 1)$ satisfaz o teorema 2.1 e a função é assim minimizada

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ f(0, 1) &= 0^2 + 1^2 = 1 = v^* \end{aligned}$$

A seguir vamos introduzir uma definição importante no que diz respeito a encontrarmos solução para o problema (2.2). São as chamadas condições de qualificação que, quando satisfeitas, garantem a existência dos multiplicadores de Lagrange e a aplicabilidade da definição 2.2 na busca por soluções.

Definição 2.3 *Condição de qualificação (CQ)*

É uma condição sobre as restrições de (2.2) em uma solução local x^* de (2.2), garantindo que ele é um ponto KKT do problema.

A definição 2.3 sugere a priori que poderíamos ter minimizadores que não satisfazem KKT. De fato, o exemplo 2.2 ilustra essa situação.

Exemplo 2.2 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x^2 = 0 \end{aligned}$$

Claramente podemos observar que o minimizador $x^* = 0$ é também minimizador global do problema, porém não satisfaz as condições de KKT. Note que em (L) temos

$$\nabla f(x) = 1, \quad \nabla h(x) = 2x$$

que quando organizamos o multiplicador de Lagrange λ , obtemos $1 + 2\lambda x = 0$. Essa situação se torna impossível, pois em (D) teremos $x^2 = 0$ que implica em $x = 0$ e consequentemente em $1 = 0$.

Existem várias CQ's, mas nesse texto apresentaremos duas de primeira ordem bastante conhecidas na literatura, chamadas de condição de qualificação de independência linear (LICQ) e condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ), esta última mais geral que (LICQ) (ANDREANI, R.; ECHAGUE; SCHUVERDT, 2010). É importante reenfatar que uma CQ é definida como uma propriedade dos pontos

viáveis do problema de otimização, que quando satisfeita por um minimizador local, implica que o mesmo satisfaz a definição 2.2 (ANDREANI, Roberto *et al.*, 2018).

Definição 2.4 *Seja $x^* \in \Omega$. Uma restrição de desigualdade $g_j(x)$ com $\{j = 1, \dots, p\}$ é dita ativa em x^* quando:*

$$g_j(x^*) = 0 \quad (2.4)$$

Isto é, a desigualdade é satisfeita como igualdade. Caso $g_j(x^*) < 0$, dizemos que $g_j(x)$ é inativa em x^* . Denotaremos $A(x^*)$ o conjunto de índices ativos em x^* , ou seja,

$$A(x^*) = \{j \in \{1, \dots, p\} \mid g_j(x^*) = 0\} \quad (2.5)$$

Em relação às restrições de igualdade, elas sempre são ativas em todo ponto viável.

Teorema 2.2 *Condição de qualificação de independência linear (LICQ)*

A condição de independência linear de

$$\{\nabla h_i(x^*)\}_{i=1, \dots, m} \cup \{\nabla g_j(x^*)\}_{A(x^*)} \quad (2.6)$$

é uma condição de qualificação. Essa condição é chamada de LICQ. A demonstração deste fato encontra-se em (BECK, 2014, p. 210).

No exemplo 2.3 a seguir, a condição de qualificação LICQ é satisfeita.

Exemplo 2.3 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & g(x) := x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

A figura 2.4 representa as restrições do exemplo 2.3.

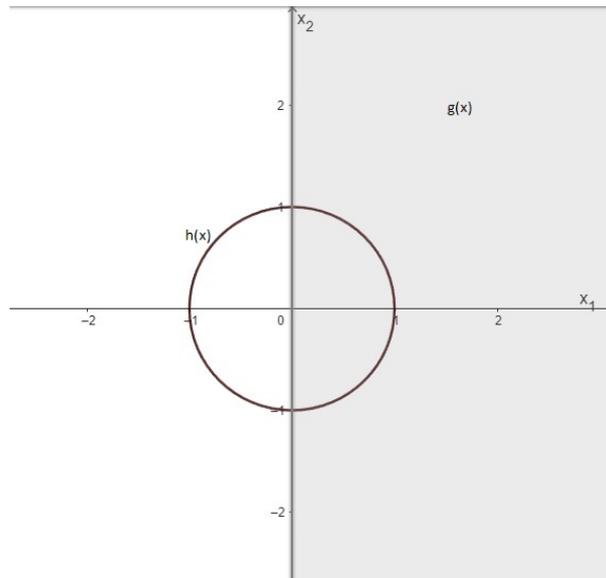
Podemos notar rapidamente que o ponto $x^* = (0, -1)$ é a solução global desse problema, pois para (x_1, x_2) viável é necessário ter $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq -1$, sendo que esta última desigualdade vem de $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Em x^* as restrições são ativas e representadas pelos vetores $\nabla h(x^*) = (0, -2)$ e $\nabla g(x^*) = (1, 0)$, linearmente independentes. Logo, vale LICQ e x^* é ponto KKT tendo como multiplicadores de Lagrange $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\mu = 1$.

Nesse exemplo, podemos seguir com a definição 2.2 e procurar por mais pontos KKT. Veja então que em (L) temos

$$\nabla f(x) = (1, 1), \quad \nabla h(x) = (2x_1, 2x_2), \quad \nabla g(x) = (-1, 0)$$

Figura 2.4 – Representação das restrições do exemplo 2.3



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Podemos observar que se $x_2 = 0$, os vetores serão linearmente independentes, porém temos a garantia que para todo ponto viável, $x_2 \neq 0$. Com isso, na condição de Lagrange

$$(1, 1) + \lambda(2x_1, 2x_2) + \mu(-1, 0) = 0$$

obteremos $1 + 2\lambda x_1 - \mu = 0$ e $1 + 2\lambda x_2 = 0$. Em (P) teremos $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ e $g(x) := -x_1 \leq 0$. E, por fim, em (C), $(-x_1) \cdot \mu = 0$.

Agora em (C) vamos considerar inicialmente o caso $-x_1 = 0$ obtendo $x_1 = 0$ e, usando esse resultado em (P), obtemos $x_2 = \pm 1$, que quando substituídos em (L) nos fornece $\mu = 1$ e $\lambda = \mp \frac{1}{2}$. Com essas informações temos os pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ que são pontos KKT, sendo o primeiro um minimizador local de f e o último já mencionado como x^* . Seguindo, temos o caso $\mu = 0$, que quando substituído em (L) nos fornece $x_1 = x_2 = \frac{1}{2\lambda}$, que novamente ao substituirmos em (P) resulta em $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Como na restrição inicial $x_1 \geq 0$, teremos que $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ou seja, o ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ também é um ponto KKT e corresponde ao maximizador local de f .

Verifiquemos o valor de f em cada ponto

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$f(0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0, -1) = 0 - 1 = -1 = v^*$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Teorema 2.3 *Condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ)*

A condição de independência linear das restrições de igualdade aliada a existência de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla h_i(x^*)^T d = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g_j(x^*)^T d < 0 \quad (2.7)$$

é uma condição de qualificação. Essa condição é chamada de MFCQ. A demonstração deste teorema pode ser encontrado em (BERTSEKAS, 1999, p. 367).

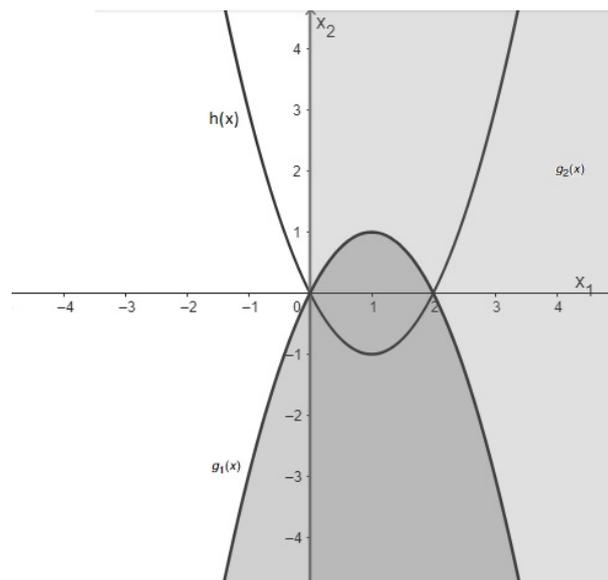
No exemplo 2.4 a seguir vale MFCQ porém não vale LICQ.

Exemplo 2.4 Considere o problema, adaptado de (RIBEIRO; KARAS, 2014)

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x_1^2 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ & g_1(x) := x_1^2 - 2x_1 + x_2 \leq 0 \\ & g_2(x) := -x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

A figura 2.5 representa as restrições do exemplo 2.4.

Figura 2.5 – Representação das restrições do exemplo 2.4



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Veja que o ponto $x^* = (0,0)$ é minimizador do problema mas não cumpre LICQ. As três restrições são ativas nesse ponto, e os vetores

$$\nabla h(x^*) = (-2, -1), \quad \nabla g_1(x^*) = (-2, 1), \quad \nabla g_2(x^*) = (-1, 0)$$

são linearmente dependentes. De fato, o problema cumpre MFCQ quando consideramos o vetor $d = (1, -2)$, pois

$$\begin{aligned} \nabla h(x^*)^T d &= (-2, -1) \cdot (1, -2) = 0, \\ \nabla g_1(x^*)^T d &= (-2, 1) \cdot (1, -2) = -4 < 0, \\ \nabla g_2(x^*)^T d &= (-1, 0) \cdot (1, -2) = -1 < 0. \end{aligned}$$

Logo, x^* é um ponto KKT. Observe que ao aplicarmos a definição 2.2, temos em (L)

$$\nabla f(x) = (1,0), \quad \nabla h(x) = (2x_1 - 2, -1), \quad \nabla g_1(x) = (2x_1 - 2, 1), \quad \nabla g_2(x) = (-1,0)$$

que quando organizamos os multiplicadores de Lagrange no ponto $x^* = (0, 0)$, obtemos

$$(1,0) + \lambda(-2, -1) + \mu_1(-2, 1) + \mu_2(-1,0) = 0$$

e, conseqüentemente temos $\lambda = \mu_1$ e $\mu_2 = 1 - 4\mu_1$ que quando consideramos em (D), temos dois casos

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1, \quad \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu_1 = \frac{1}{4}, \quad \mu_2 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

Para seguirmos a procura de outros pontos KKT, devemos ter de acordo com a definição 2.2 em (P)

$$h(x) := x_1^2 - 2x_1 - x_2 = 0, \quad g_1(x) := x_1^2 - 2x_1 + x_2 \leq 0, \quad g_2(x) := -x_1 \leq 0$$

E, em (C) devemos ter

$$(x_1^2 - 2x_1 + x_2) \cdot \mu_1 = 0 \quad \text{e} \quad (-x_1) \cdot \mu_2 = 0$$

Em (C) vamos considerar dois casos. O caso em que $\mu_1 = 0$ e $-x_1 = 0$ que implica diretamente em $x_1 = 0$. Como $\lambda = 0$ e $\mu_2 = 1$, em (P) encontramos $x_2 = 0$, ponto KKT e x^* do problema. E, no caso em que (C) $x_1^2 - 2x_1 + x_2 = 0$ e $\mu_2 = 0$, que ao usarmos a primeira equação em (P) encontramos $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ e, conseqüentemente $\mu_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda = \frac{1}{4}$ também x^* do problema. Note que o ponto KKT $x^* = (0, 0)$ que minimiza a f , possui multiplicadores de Lagrange diferentes relacionados em cada caso.

Em determinados problemas que resolveremos, as funções objetivo e de restrições, podem ser classificadas como convexas ou não convexas.

Definição 2.5 Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in C$, o segmento

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \tag{2.8}$$

estiver inteiramente contido em C . A figura 2.6 ilustra essa definição.

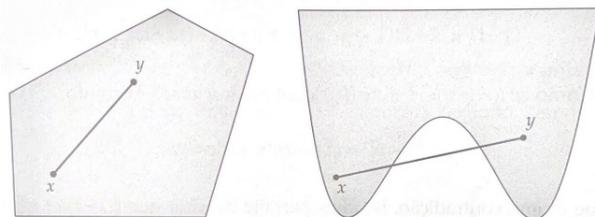
Definição 2.6 Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que a função $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \tag{2.9}$$

para todos $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$.

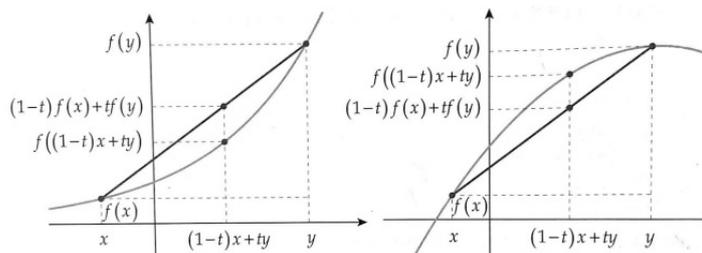
Geometricamente, observe a figura 2.7, onde os autores ilustram que para ser convexa o arco do gráfico deve estar sempre abaixo do segmento que liga as extremidades.

Figura 2.6 – Conjuntos convexo e não convexo



Fonte: (RIBEIRO; KARAS, 2014, p.49)

Figura 2.7 – Funções convexas e não convexas



Fonte: (RIBEIRO; KARAS, 2014, p.56)

Definição 2.7 Dizemos que (2.2) é um problema de otimização convexo, quando o conjunto viável

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\} \tag{2.10}$$

for convexo e a função objetivo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa. Observamos que pedir que Ω seja convexo, implica que existem \tilde{h}_i lineares, tais que $\tilde{h}(x) = h(x)$, $\forall(x)$ em Ω e as g_j 's sejam convexas.

Teorema 2.4 Seja (2.2) convexo, se x^* é solução local de (2.2), então é solução global.

A demonstração deste fato encontra-se em (BERTSEKAS, 2009, p. 117).

No exemplo 2.5 a seguir, usaremos o fato referido no teorema 2.4.

Exemplo 2.5 Considere o problema retirado de (BECK, 2014):

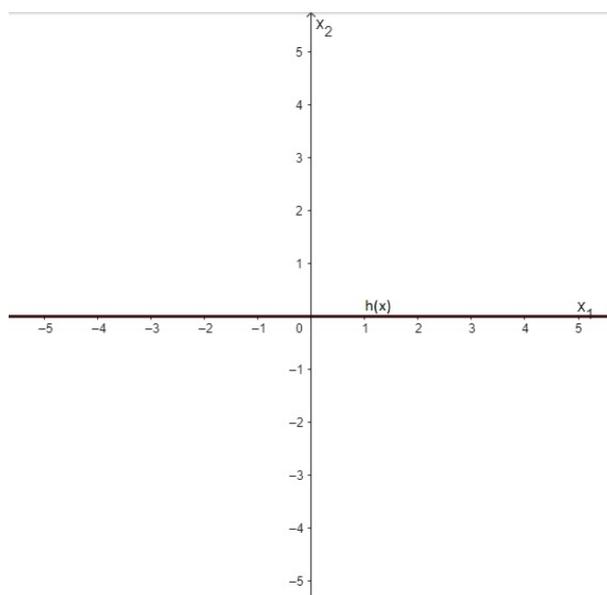
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1^2 - x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x_2 = 0 \end{aligned}$$

Na figura 2.8 está representada a restrição do exemplo 2.5.

Observe que temos um problema convexo. Considerando o minimizador local $x^* = (0, 0)$, podemos afirmar que de fato ele é um minimizador global do problema. Pela condição de qualificação LICQ, temos $\nabla h(x^*) = (0, 1)$ claramente linearmente independente. Então, pelas condições da definição 2.2 que são garantidas, x^* é ponto KKT. De fato em (L), temos

$$\nabla f(x) = (2x_1, -1), \quad \nabla h(x) = (0, 1)$$

Figura 2.8 – Representação da restrição do exemplo 2.5



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

e, organizando essas informações com os multiplicadores de Lagrange no ponto $x^* = (0, 0)$, obtemos

$$(0, -1) + \lambda(0, 1) = 0$$

que resulta em $\lambda = 1$. Logo, o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é um ponto KKT minimizador do problema.

Assim,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$$

$$f(0, 0) = 0^2 - 0 = 0 = v^*$$

Teorema 2.5 *Condição de qualificação de Slater*

Seja (2.2) um problema convexo. A existência de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\bar{x}) = 0, \quad g(\bar{x}) < 0 \tag{2.11}$$

é uma condição de qualificação. Essa CQ é chamada de condição de qualificação de Slater. A demonstração deste fato encontra-se em (BERTSEKAS, 2009, p. 369).

O exemplo 2.6 a seguir cumpre a condição de qualificação de Slater.

Exemplo 2.6 *Considere o problema*

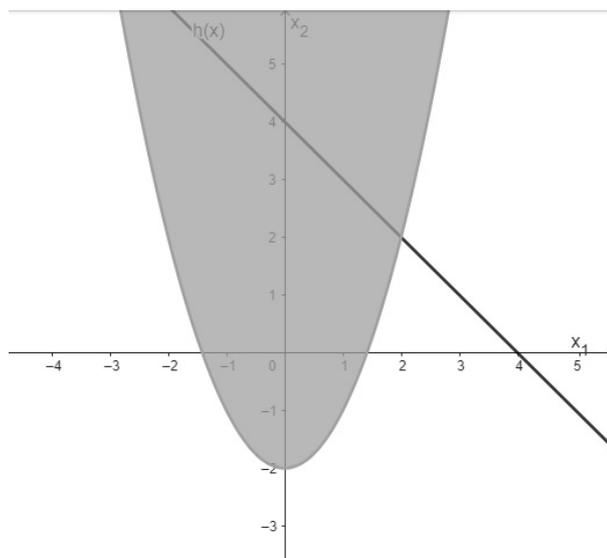
$$\text{minimizar} \quad f(x) := 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad h(x) := x_1 + x_2 = 4$$

$$g(x) := x_1^2 - x_2 \leq 2$$

A figura 2.9 representa o conjunto de restrições do exemplo 2.6.

Figura 2.9 – Representação das restrições do exemplo 2.6



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Pela convexidade do problema, garantido pela definição 2.7 e além disso, seja $\bar{x} = (0, 4)$ que satisfaz as duas restrições, pois teremos $h(\bar{x}) = 0$ e $g(\bar{x}) = -6 < 0$. Logo, pela CQ de Slater, se houver solução, ela será um ponto KKT. Assim, pelas condições da definição 2.2, obtemos em (L) que

$$\nabla f(x) = (3, 4), \quad \nabla h(x) = (1, 1), \quad \nabla g(x) = (2x_1, -1)$$

e, ao organizar essas informações com os multiplicadores de Lagrange λ e μ

$$(3, 4) + \lambda(1, 1) + \mu(2x_1, -1) = 0$$

obtemos $3 + \lambda + 2\mu x_1 = 0$ e $4 + \lambda - \mu = 0$. Em (P), devemos ter

$$h(x) := x_1 + x_2 - 4 = 0, \quad \text{e} \quad g(x) := x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0$$

E, em (C) devemos ter $(x_1^2 - x_2 - 2) \cdot \mu = 0$.

Na condição (C), se $x_1^2 - x_2 - 2 = 0$ e em (P) com $x_1 + x_2 - 4 = 0$, implica em $x_1 = -3$ ou $x_1 = 2$. No caso $x_1 = -3$ substituído em (L) não cumpre com (D). Ao considerarmos $x_1 = 2$ em (L) obtemos os multiplicadores de Lagrange $\lambda = -\frac{19}{5}$ e $\mu = \frac{1}{5}$ e, por sua vez $x_2 = 2$ em (P).

Logo o ponto $(x_1, x_2) = (2, 2)$ é um ponto KKT minimizador do problema.

Assim,

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

$$f(2, 2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14 = v^*$$

O próximo teorema vai estabelecer para problemas convexos, que as condições necessárias de otimalidade de KKT são também suficientes.

Teorema 2.6 *Suponha que (2.2) satisfaz a CQ de Slater. Então \bar{x} é KKT de (2.2) se, e somente se, \bar{x} é solução de global de (2.2).*

A demonstração deste fato pode ser encontrada em (BECK, 2014, p. 214).

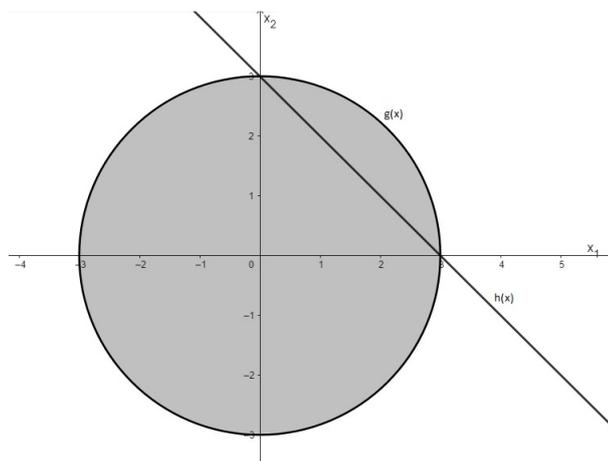
O exemplo 2.7 satisfaz as hipóteses do teorema 2.6.

Exemplo 2.7 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1^2 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) := x_1 + x_2 = 3 \\ & g(x) := x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \end{aligned}$$

A figura 2.10 representa o conjunto de restrições do exemplo 2.7.

Figura 2.10 – Representação das restrições do exemplo 2.7



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Temos que as restrições h e g são afim e convexa, respectivamente. Agora, a CQ de Slater é satisfeita por exemplo, no ponto viável $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Note que \bar{x} é solução do problema e ponto KKT. De fato, usando as condições da definição 2.2 teremos, em (L)

$$\nabla f(x) = (2x_1, 1), \quad \nabla h(x) = (1, 1), \quad \nabla g(x) = (2x_1, 2x_2)$$

e, organizando essas informações com os multiplicadores de Lagrange nos fornece

$$(2x_1, 1) + \lambda(1, 1) + \mu(2x_1, 2x_2) = 0$$

que resulta em $2x_1 + \lambda + 2\mu x_2 = 0$ e $1 + \lambda + 2\mu x_2 = 0$. Já em (P), ficamos com

$$h(x) := x_1 + x_2 - 3 = 0, \quad \text{e} \quad g(x) := x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$$

E, por fim, em (C), devemos ter $(x_1^2 + x_2^2 - 9) \cdot \mu = 0$.

Vamos agora considerar em (C) o caso $\mu = 0$, que em (L) obtemos $\lambda = -1$ e $x_1 = \frac{1}{2}$. Já em (P) ficamos com $x_2 = \frac{5}{2}$, ou seja, temos um ponto KKT. Por outro lado,

no caso $x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$ nos fornece em (P) e em (L) os resultados $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$ e $\mu = -1$ ou ainda $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $\lambda = -1$ e $\mu = -\frac{5}{6}$ que são absurdos pois violam (D).

Assim, o ponto KKT encontrado minimiza f e temos:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} = \frac{11}{4} = v^*$$

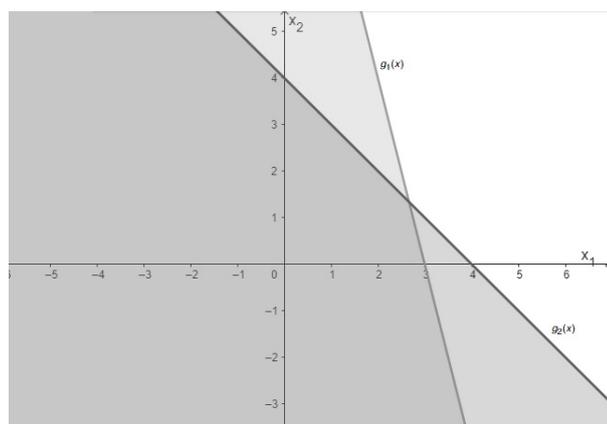
No exemplo 2.8 a seguir, temos um problema de PL onde a CQ de Slater é satisfeita e teremos infinitos pontos KKT.

Exemplo 2.8 Considere o problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f(x) := 8x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x) := 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & g_2(x) := x_1 + x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

A figura 2.11 representa as restrições do problema 2.8.

Figura 2.11 – Representação da restrição do exemplo 2.8



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Por se tratar de um problema de maximização, para melhor resolver, transformaremos em um problema de minimização. Então teremos o novo sistema, que consiste em

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := -8x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x) := 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & g_2(x) := x_1 + x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Como já citado, claramente o problema satisfaz a CQ de Slater. Tenhamos o ponto viável $\bar{x} = (1, 0)$, então $g_1(\bar{x}) = -8 < 0$ e $g_2(\bar{x}) = -3 < 0$. Vamos à análise de acordo com a definição 2.2

Em (L), após a inclusão dos multiplicadores de Lagrange, temos o seguinte

$$(-8, -2) + \mu_1(4, 1) + \mu_2(1, 1) = 0$$

que nos fornece $4\mu_1 + \mu_2 = 8$ e $\mu_1 + \mu_2 = 2$. Nesse ponto temos $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 0$. E, em (C) teremos

$$(4x_1 + x_2 - 12) \cdot \mu_1 = 0 \quad \text{e} \quad (x_1 + x_2 - 4) \cdot \mu_2 = 0$$

Como já sabemos os valores do $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 0$, teremos que analisar o caso $4x_1 + x_2 - 12 = 0$. Se $4x_1 + x_2 - 12 = 0$, podemos concluir que $x_2 = 12 - 4x_1$ ao ser substituída em $g_2(x)$ nos fornece $x_1 \geq \frac{8}{3}$ que satisfaz as restrições do problema. Assim, temos infinitos pontos KKT, tais que $x_1 \geq \frac{8}{3}$, $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 0$. Testamos abaixo, como verificação, alguns pontos que mostram a conclusão do problema

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = 24 = v^*$$

$$f(5, -8) = 24 = v^*$$

$$f\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right) = 24 = v^*$$

No capítulo seguinte resolveremos esse mesmo problema 2.8, sendo referido como exemplo 3.4, usando outro método e teremos uma nova conclusão.

O problema 2.9 a seguir não apresenta conjunto viável, portanto não há solução.

Exemplo 2.9 Considere o problema

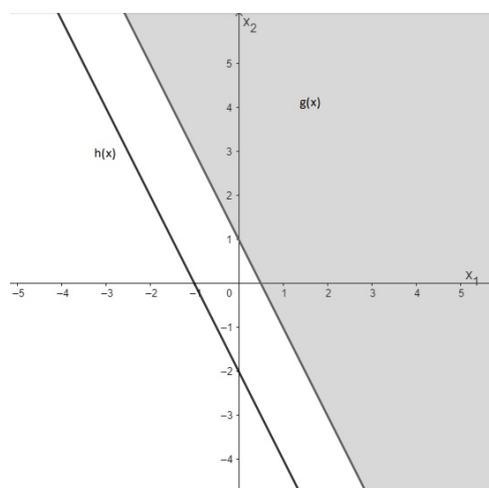
$$\text{minimizar} \quad f(x) := x_1 + x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad h(x) := 2x_1 + x_2 = -2$$

$$g(x) := 2x_1 + x_2 \geq 1$$

A figura 2.12 representa o conjunto de restrições do exemplo 2.9.

Figura 2.12 – Representação das restrições do exemplo 2.9



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Note que, em $h(x)$ podemos fazer a seguinte relação

$$x_2 = -2 - 2x_1$$

que quando substituída em $g(x)$ implica em $-2 \geq 1$, um absurdo.

Logo, não há conjunto viável e o problema não possui solução.

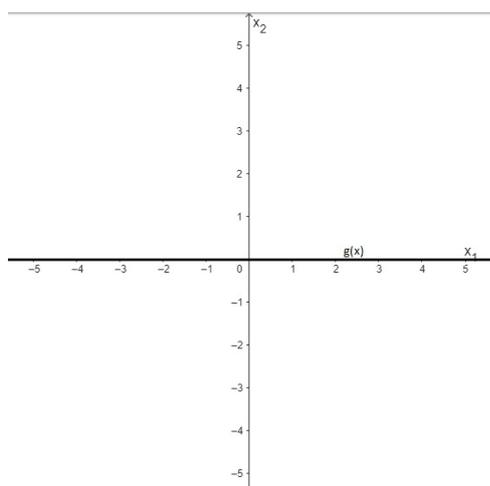
O exemplo 2.10 a seguir, não cumpre nenhuma CQ, não tem ponto KKT, mas tem minimizador global.

Exemplo 2.10 Considere o problema que corresponde a uma variação do exemplo 2.5, do mesmo autor.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) := x_1^2 - x_2 \\ \text{sujeito a} & g(x) := x_2^2 \leq 0 \end{array}$$

A figura 2.13 representa a restrição do problema 2.10.

Figura 2.13 – Representação da restrição do exemplo 2.10



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Analisando a restrição, vemos que ela não satisfaz nenhuma das condições de qualificação no minimizador $x^* = (0, 0)$ global. De fato, a condição de qualificação LICQ não é cumprida, pois o gradiente no minimizador é o vetor nulo e, em relação à condição de qualificação MFCQ, não existe vetor d que a satisfaça, pois temos um produto entre o vetor nulo e o vetor d que não garante a negatividade. Já a CQ de Slater não é satisfeita, pois não teremos $g(\bar{x}) < 0$. Agora, pelas condições da definição 2.2, em (L), temos

$$\nabla f(x) = (2x_1, -1), \quad \nabla g(x) = (0, 2x_2)$$

que após adicionar os os multiplicadores de Lagrange no ponto $x^* = (0, 0)$, devemos ter $(0, -1) + \mu(0, 0) = 0$ encontraremos $-1 = 0$ que é um absurdo. Assim, o minimizador não é um ponto KKT.

O exemplo 2.11 é um problema de PL que satisfaz a CQ de Slater. Também será resolvido no capítulo seguinte por outro método. Lá será referido como exemplo 3.3.

Exemplo 2.11 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && f(x) := x_1 + x_2 \\ &\text{sujeito a} && g_1(x) := x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &&& g_2(x) := 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

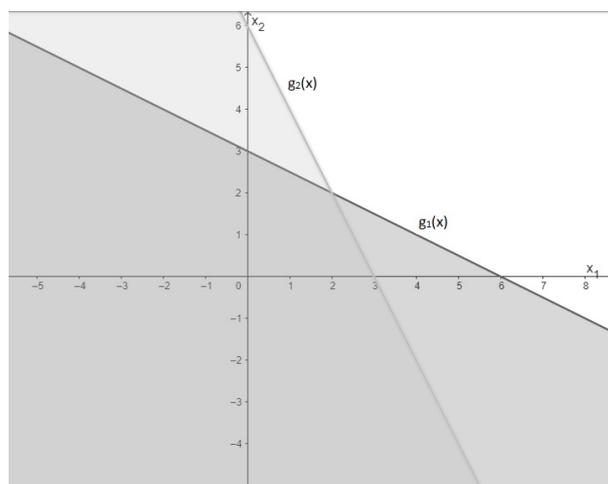
Para melhor resolver, como se trata de um problema de maximização, transformaremos em um problema de minimização.

Assim, temos uma nova configuração do problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) := -x_1 - x_2 \\ &\text{sujeito a} && g_1(x) := x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &&& g_2(x) := 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

A figura 2.14 representa as restrições do exemplo 2.11.

Figura 2.14 – Representação das restrições do exemplo 2.11



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Seja $\bar{x} = (-1, 2)$ um ponto viável do problema. Então, pela CQ de Slater teremos $g_1(\bar{x}) = -3 < 0$ e $g_2(\bar{x}) = -6 < 0$, logo, se houver solução ele será um ponto KKT. De fato, pelas condições da definição 2.2, devemos ter, em (L)

$$\nabla f(x) = (-1, -1), \quad \nabla g_1(x) = (1, 2), \quad \nabla g_2(x) = (2, 1)$$

e organizando os multiplicadores de Lagrange, teremos

$$(-1, -1) + \mu_1(1, 2) + \mu_2(2, 1) = 0$$

ficando com $-1 + \mu_1 + 2\mu_2 = 0$ e $-1 + 2\mu_1 + \mu_2 = 0$. Aqui, obtemos $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$. E, por (C), como $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$, então devemos ter $x_1 + 2x_2 - 6 = 0$ e $2x_1 + x_2 - 6 = 0$. Com isso, obtemos $x_1 = x_2 = 2$ ponto KKT do problema. Assim, na configuração original de maximização,

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$f(2, 2) = 2 + 2 = 4 = v^*$$

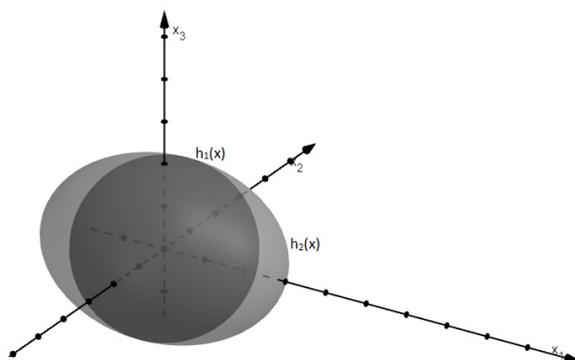
No exemplo 2.12 apresentado a seguir, partiremos a princípio a procura de um ponto KKT de acordo com a definição 2.2 e em seguida verificaremos se o ponto minimizador cumpre com alguma CQ.

Exemplo 2.12 Considere o problema adaptado de (BECK, 2014):

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & h_1(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ & h_2(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2 \end{aligned}$$

Podemos notar que as restrições não são lineares e são não convexas. Observe a figura 2.12 que representa as restrições do problema.

Figura 2.15 – Representação das restrições do exemplo 2.12



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Vamos inicialmente usar a definição 2.2 a procura de um ponto KKT. Em (L), temos

$$\nabla f(x) = (2, 3, -1), \quad \nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3), \quad \nabla h_2(x) = (2x_1, 4x_2, 4x_3)$$

e, organizando os multiplicadores de Lagrange teremos

$$(2, 3, -1) + \lambda_1(2x_1, 2x_2, 2x_3) + \lambda_2(2x_1, 4x_2, 4x_3) = 0$$

E por fim,

$$2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \quad 3 + 2\lambda_1 x_2 + 4\lambda_2 x_2 = 0, \quad -1 + 2\lambda_1 x_3 + 4\lambda_2 x_3 = 0$$

Em (P), devemos ter $h_1(x) = 0$ e $h_2(x) = 0$ então,

$$h_1(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \quad h_2(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0$$

Resolvendo (L), obteremos

$$x_1 = -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \text{com } \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0.$$

$$x_2 = -\frac{3}{2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}, \quad \text{com } \lambda_1 + 2\lambda_2 \neq 0.$$

$$x_3 = \frac{1}{2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}, \quad \text{com } \lambda_1 + 2\lambda_2 \neq 0.$$

Para facilitar os cálculos em (P), denotaremos $t_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ e $t_2 = \frac{1}{2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}$. Ficaremos então com $x_1 = -t_1$, $x_2 = -3t_2$ e $x_3 = t_2$.

Substituindo,

$$(-t_1)^2 + (3t_2)^2 + t_2^2 - 1 = 0$$

$$(-t_1)^2 + 2(-3t_2)^2 + 2t_2^2 - 2 = 0$$

Obtemos,

$$t_1^2 + 10t_2^2 = 1$$

$$t_1^2 + 20t_2^2 = 2$$

Resultando em $t_2^2 = \frac{1}{10}$ e $t_1^2 = 0$. Note que $t_1^2 = 0$ é impossível. Logo, esse exemplo não possui pontos KKT. O autor segue então outra maneira de resolver, observando que o problema apresenta solução ótima pois consiste em minimizar uma função contínua em um conjunto compacto e não vazio. Chama essa solução de ponto irregular e, indica que para pontos irregulares devemos observar o gradiente das restrições que devem ser linearmente dependente. Teremos dois casos possíveis:

i. Caso $x_1 = 0$.

Nesse caso teríamos

$$\text{minimizar } f(x) := 3x_2 - x_3$$

$$\text{sujeito a } h(x) := x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Que resulta em

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Sendo então $f\left(0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}$ a solução mínima.

ii. Caso $x_2 = x_3 = 0$.

Nesse caso teríamos $h_1 := x_1^2 = 1$ e $h_2 := x_1^2 = 2$, que é impossível.

Logo a solução ótima do problema é satisfeita no caso *i*. Note que ao considerarmos o minimizador local $x^* = \left(0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ e usarmos a condição de qualificação LICQ, ficamos com

$$\nabla h_1(x^*) = \left(0, -\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \quad \nabla h_2(x^*) = \left(0, -\frac{12}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{10}}\right)$$

que são linearmente dependentes. Essa conclusão serve também para a condição de qualificação de MFCQ. Como o problema não é convexo, não satisfaz a CQ de Slater.

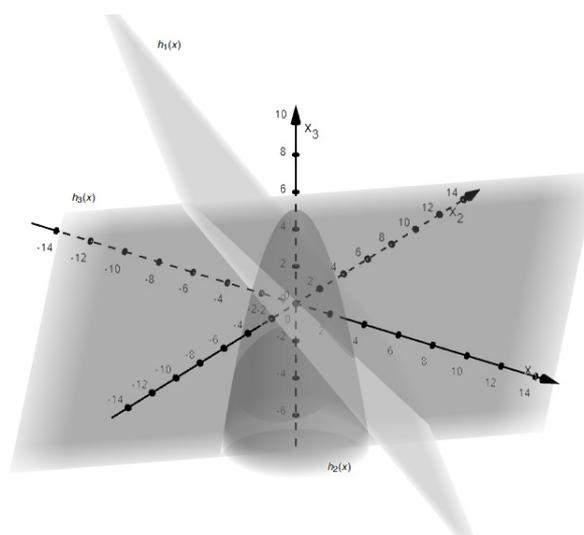
O exemplo 2.13 apresentado a seguir, partiremos novamente a procura de pontos KKT de acordo com a definição 2.2 e em seguida, se o mesmo existir, verificaremos se alguma CQ é satisfeita.

Exemplo 2.13 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & h_1(x) := x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & h_2(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 5 \\ & h_3(x) := x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{aligned}$$

Temos aqui um problema não linear e não convexo. A figura 2.16 representa o conjunto de restrições do problema.

Figura 2.16 – Representação das restrições do exemplo 2.13



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Usando a definição 2.2, teremos em (L) após organizar os multiplicadores de Lagrange

$$(1, 1, -1) + \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2x_1, 2x_2, 1) + \lambda_3(1, -1, -1) = 0$$

que nos fornece o sistema

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 + \lambda_3 = 0$$

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0$$

$$-1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

Em (P), ficaremos com

$$h_1(x) := x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0, \quad h_2(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0, \quad h_3(x) := x_1 - x_2 - x_3 - 3 = 0$$

Aqui, podemos fazer $h_1 + h_3$ e encontraremos $x_1 = 2$. Com esse resultado, ao substituirmos novamente nas h 's em (P) e depois de algumas manipulações algébricas e resolução do sistema em (L), obtemos dois pontos KKT,

$$\begin{aligned} x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3, \quad \lambda_1 = \frac{5}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda_3 = 0 \\ x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{5}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

E, após conferência na $f(x)$, concluímos que $x^* = (2, -1, 0)$ é o minimizador global. Pela condição de qualificação LICQ, temos os vetores

$$\nabla h_1(x^*) = (1, 1, 1), \quad \nabla h_2(x^*) = (4, -2, 1), \quad \nabla h_3(x^*) = (1, -1, -1)$$

que são linearmente independentes e cumprem a CQ referida. Logo

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 - x_3 \\ f(2, -1, 0) &= 2 - 1 - 0 = 1 = v^* \end{aligned}$$

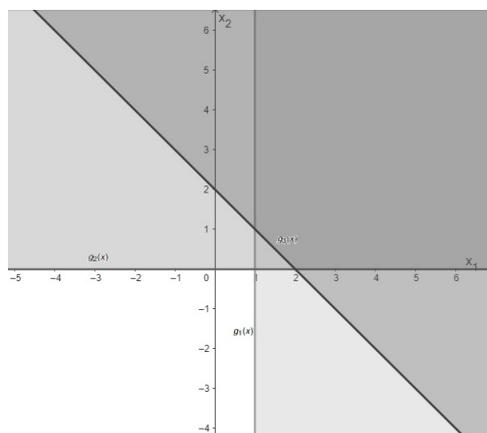
E, por fim, o exemplo 2.14 a seguir. Um problema de PL que não possui solução, mas cumpre a CQ de Slater.

Exemplo 2.14 *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) := x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x) := x_1 \geq 1 \\ & g_2(x) := x_2 \geq 0 \\ & g_3(x) := x_1 + x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

A figura 2.17 representa o conjunto de restrições do exemplo 2.14.

Figura 2.17 – Representação das restrições do exemplo 2.14



Fonte: Próprio autor usando o GeoGebra

Pela convexidade do problema, usando o ponto $\bar{x} = (2, 2)$, a CQ de Slater é satisfeita. Agora, se houver x^* , ele será ponto KKT do problema. Usando as condições da definição 2.2, temos, em (L)

$$(1, -1) + \mu_1(-1, 0) + \mu_2(0, -1) + \mu_3(-1, -1) = 0$$

Então, ficamos com $-\mu_1 - \mu_3 = -1$ e $-\mu_2 - \mu_3 = 1$. Fazendo a relação de que $\mu_3 = 1 - \mu_1$ e $\mu_2 = -1 - \mu_3$, claramente impossível por (D) e não teremos ponto KKT.

Agora, com relação a solução do problema, se $x_2 = 0$ implica em $x_1 \geq 2$, e $v^* = 2$. Porém, se aumentarmos o valor de x_2 , automaticamente a f diminui. Logo, a f não é limitada inferiormente, mesmo o conjunto de restrições sendo viável, que faz nosso problema não ter solução.

Ao longo deste capítulo, ao discutirmos as condições de Karush-Kuhn-Tucker, optamos por fazer uma análise geométrica do conjunto de restrições e a resolução dos problemas de uma maneira algébrica. No capítulo a seguir, faremos uma abordagem mais geométrica da resolução dos problemas e da apresentação dos teoremas que basearam a pesquisa.

3 PROGRAMAÇÃO LINEAR E MÉTODOS

A programação linear teve um grande impacto nos avanços do século XX. Desde sua concepção em 1947 com o planejamento de atividades militares, ou ainda seu grande uso na indústria e também nos meios acadêmicos com economistas e matemáticos. Outros exemplos de problemas que são usados muito comumente em nosso dia a dia, respeitando suas variações e citados por (DANTZIG, 1963), são os de minimizar custos monetários. A seguir temos dois deles.

Exemplo 3.1 *Fábrica de conservas:*

A situação apresentada mostra que três fábricas de conserva de um distribuidor estão localizadas em três cidades diferentes. Cada fábrica consegue preencher 250, 500 e 750 caixas de latas de conserva por dia, respectivamente. O distribuidor opera em cinco diferentes armazéns e cada um consegue vender 300 caixas por dia. O distribuidor deseja determinar o número de caixas para serem despachadas das três fábricas para os cinco armazéns para que então o armazém obtenha quantas caixas possa vender com um custo mínimo de transporte.

Exemplo 3.2 *Dieta familiar*

Aqui temos uma família de cinco pessoas com um salário modesto. O problema gira em torno de criar uma dieta considerando as necessidades e gostos dos membros da família e os preços dos ingredientes. É preciso considerar que o marido deve consumir 3000 calorias por dia, a esposa deve consumir apenas 1500 calorias devido restrição alimentar, e as crianças devem consumir 3000, 2700 e 2500 calorias, respectivamente. De acordo com o médico, essas calorias devem ser obtidas sem ultrapassar uma certa quantidade de gorduras e carboidratos, mas também existe um mínimo de proteína. Além de que todas as vitaminas necessárias devem ser satisfeitas. Os menus semanais devem ter seus custos reduzidos de acordo com os valores dos alimentos em um dia fixo de compra semanalmente.

A abordagem da programação linear é considerar um sistema de funções elementares que são ações que compõem um modelo matemático que caracterizam a viabilidade do problema (chamadas também de atividades). Cada atividade é pensada com entradas que podem representar, por exemplo, a quantidade de caixas a serem despachadas ou ingredientes em uma dieta, essas diferentes entradas também são chamadas de itens. Aí então esse sistema é escrito em um *Tableau* que permite que as informações sejam repassadas de forma compacta para gerar as equações (DANTZIG, 1963). O modelo de programação linear deve satisfazer certas premissas de proporcionalidade, não-negatividade, aditividade e função objetivo linear.

Para o exemplo 3.1 o autor (DANTZIG, 1963, p. 35-42) simplifica o problema, supondo que há apenas duas fábricas de conserva, Fábrica I e Fábrica II e, três armazéns denotados por A, B e C. É estipulado um número de produção de 1000 caixas por dia, sendo 350 na Fábrica I e 650 na Fábrica II, mantendo a demanda de 300 caixas nos três armazéns, sendo o excesso armazenado. Em seguida, o autor apresenta a tabela 3.1 de custos de transporte

Tabela 3.1 – Tabela de custos de envio (Dólares por caixa) do exemplo 3.1

Fábrica	Armazém A	Armazém B	Armazém C
Fábrica I	2,5	1,7	1,8
Fábrica II	2,5	1,8	1,4

Para formular o modelo que descreve a as inter-relações entre a disponibilidade de caixas e a demanda dos armazéns tomamos como exemplo o seguinte: enviar uma caixa da Fábrica I para o Armazém A. A tabela 3.2 apresenta as relações.

Tabela 3.2 – Lista de atividades do exemplo 3.1

Atividade	Envio de	Para
1	I	A
2	I	B
3	I	C
4	II	A
5	II	B
6	II	C
7	Estocar	I
8	Estocar	II

Para a quantidade de caixas, o autor ainda considera a totalidade em cada fábrica (I e II), cada armazém (A, B e C) e os custos de transporte relacionados. A tabela 3.3 apresenta os coeficientes de entrada e saída de caixas, considerando a entrada por um coeficiente positivo e a saída por um negativo. As colunas denotadas por I e II representam as caixas produzidas em excesso nas respectivas fábricas.

Tabela 3.3 – Lista de entrada e saída de caixas do exemplo 3.1

Atividade	I → A	I → B	I → C	II → A	II → B	II → C	I	II
Caixas em I	+1	+1	+1				+1	
Caixas em II				+1	+1	+1		+1
Caixas em A	-1			-1				
Caixas em B		-1			-1			
Caixas em C			-1			-1		
Custos	+2,5	+1,7	+1,8	+2,5	+1,8	+1,4		

Devemos lembrar que cada coeficiente está relacionado a uma atividade (valor desconhecido de caixas) e que neste caso teremos oito variáveis envolvidas de acordo

com a tabela 3.3. Sendo assim, para finalizar, devemos considerar a tabela 3.4 dos fluxos de entrada e saída de caixas.

Tabela 3.4 – Fluxo de entrada e saída de caixas do exemplo 3.1

Item	Fluxo de caixas
Caixas em I	350 caixas disponíveis
Caixas em II	650 caixas disponíveis
Caixas em A	-300 saída de caixas
Caixas em B	-300 saída de caixas
Caixas em C	-300 saída de caixas
Custos em dólares	z mínimo

O exemplo 3.1 apresenta então, a seguinte modelagem:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & 2,5x_1 + 1,7x_2 + 1,8x_3 + 2,5x_4 + 1,8x_5 + 1,4x_6 \\
 \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 350 \\
 & x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 650 \\
 & -x_1 - x_4 = -300 \\
 & -x_2 - x_5 = -300 \\
 & -x_3 - x_6 = -300 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observe que a modelagem do problema apresenta cinco atividades (equações) que foram geradas através da combinação de oito itens (x_1, x_2, \dots, x_8) que representam as entradas de acordo com o problema em questão. Também precisamos deixar claro que o objetivo deste trabalho não é mostrar como modelar um problema e sim mostrar métodos que podem ser usados para resolvê-los. Ao leitor, recomendamos (DANTZIG, 1963, p. 32-) para mais informações sobre modelar um problema de programação linear.

Nesse contexto, trazendo a equação (2.3) novamente, nosso problema em PL deve ser do tipo

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & f(w) := \tilde{c}^T w, & \tilde{c} \in \mathbb{R}^n \\
 \text{sujeito a} \quad & h(w) := \tilde{A}w - \tilde{b} = 0, & \tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } \tilde{b} \in \mathbb{R}^m \\
 & g(w) := \tilde{M}w - \tilde{q} \leq 0. & \tilde{M} \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ e } \tilde{q} \in \mathbb{R}^p
 \end{aligned}$$

Com readequação de sinais e acréscimo de variáveis de folga, é possível reescrever o problema anterior no formato dito padrão de programação linear

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & c^T x, & c \in \mathbb{R}^n \\
 \text{sujeito a} \quad & Ax = b, & x \geq 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

No capítulo anterior, muitos dos exemplos resolvidos eram problemas de PL, podemos considerar então, que as condições de KKT são um método para se determinar uma solução de um problema de PL. Dizemos que se o conjunto viável é vazio, então o problema de PL é inviável, vide exemplo 2.9. Dizemos que o problema de PL é ilimitado, quando a função objetivo é ilimitada inferiormente na região viável, isto é, existe uma sequência de pontos viáveis para a solução de (3.2) cujos valores objetivos tendem a $-\infty$ (NOCEDAL; WRIGHT, 2006), tornando o problema de PL sem solução, tal qual o exemplo 2.14.

Definição 3.1 *Dado um conjunto convexo não-vazio C formado pelas restrições do problema de PL onde x é um ponto viável, dizemos que x é ponto extremo (ou vértice) de C quando x não estiver estritamente entre os pontos finais dos segmentos de reta contidos no conjunto C .*

Definição 3.2 *Um conjunto é dito poliedral quando é não-vazio e é formado pela intersecção de um número finito de semi-espacos do tipo*

$$g_j(x) := u_j^T x \leq q_j, \quad u_j \in \mathbb{R}^m \text{ e } q_j \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

com $j = \{1, \dots, p\}$.

Teorema 3.1 *Teorema fundamental da Programação Linear*

Seja P um conjunto poliedral que possui pelo menos um ponto extremo. Uma função linear limitada inferiormente em P atinge um ponto mínimo em algum ponto extremo de P . A prova deste fato encontra-se em (BERTSEKAS, 2009, p. 113).

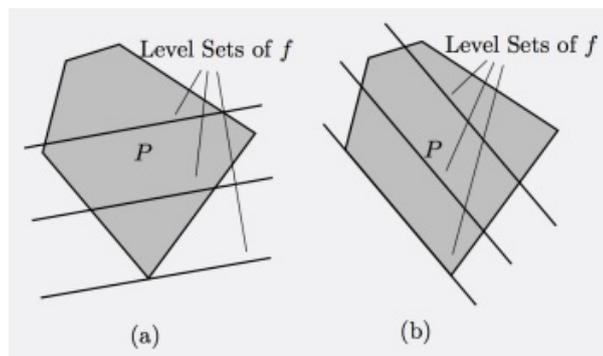
Na figura 3.1 estão representados os conjuntos de nível da f (Level Sets of f). Essa figura ilustra o teorema 3.1. Podemos analisar que no caso (a) temos um ponto extremo no conjunto de restrições, ou ainda, que a função linear f atinge um mínimo em um ponto extremo de P . No caso (b) não temos apenas um ponto extremo, nesse caso o mínimo pode ser atingido em um ou mais pontos e até mesmo em um número infinito de pontos não extremos.

A teoria a que se refere o teorema 3.1 nos ajuda a compreender como funcionam alguns algoritmos para resolução de problemas de PL, como o método Simplex apresentado a seguir.

3.1 MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex é um algoritmo que procura uma solução ótima em problemas de programação linear, otimizando uma função linear com uma série de restrições envolvendo equações lineares através de iterações, que consiste em pivotamentos até

Figura 3.1 – Ilustração do teorema fundamental de PL



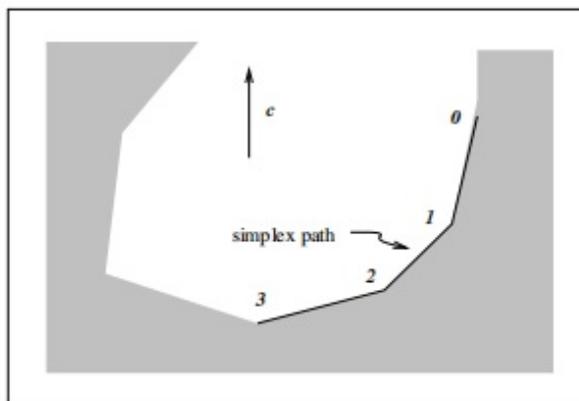
Fonte: (BERTSEKAS, 2009, p. 114)

que se encontre uma solução factível que também chamaremos de viável. Foi criado por George Bernard Dantzig em 1947.

A estratégia do método Simplex consiste em calcular vértices adjacentes diminuindo a função objetivo, o que gera uma sequência finita de vértices que convergem à uma solução de (2.3).

Geometricamente, em (NOCEDAL; WRIGHT, 2006) a figura 3.2 mostra o caminho percorrido (simplex path) pelo método Simplex em um problema em \mathbb{R}^2 . Nessa figura o vértice ótimo é encontrado em 3 passos.

Figura 3.2 – Caminho percorrido pelo método Simplex



Fonte: (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 369)

De forma geral, apresentaremos o problema da programação linear conforme (3.4) para resolução utilizando o método simplex

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z \\
 \text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

com $x_j \geq 0$, e a_{ij} coeficiente das variáveis onde $i = \{1, \dots, m\}$ e $j = \{1, \dots, n\}$. Os coeficientes c_j da função objetivo são chamados de fatores de custo.

As definições a seguir nos ajudam a entender como funciona o sistema (3.4).

Definição 3.3 Chamaremos de z o valor da função objetivo a ser minimizada e usaremos como

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z \quad (3.5)$$

onde z é a variável cujo valor deve ser minimizado de acordo com níveis x_j , onde $i = \{1, \dots, n\}$.

Em alguns problemas encontramos restrições na forma de desigualdades, conforme já descrito em (2.3). Para situações como essa, segundo (DANTZIG, 1963), o primeiro passo para utilizarmos o método simplex é introduzir variáveis artificiais na forma padrão do problema e só então nesse momento o algoritmo simplex é usado. Ou seja, se a inequação for da forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (3.6)$$

devemos então adicionar uma variável de folga x_{n+1} conforme nova equação abaixo para obtermos uma relação de igualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \quad (3.7)$$

caso contrário, se (3.6) apresentar uma relação de \geq , devemos subtrair uma variável de folga.

Sendo assim, vamos considerar que a apresentação de um problema de programação linear para ser resolvido pelo método Simplex, após a adição das variáveis de folga nas inequações fica da seguinte maneira:

$$\begin{array}{llll} \text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & & +(-z) = 0 \\ \text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & +x_{n+2} & = b_2 \\ & \vdots & & \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \end{array} \quad (3.8)$$

com $x_j \geq 0$, a_{ij} coeficiente das variáveis onde $i = \{1, \dots, m\}$ e $j = \{1, \dots, n\}$. E, podemos perceber que x_{n+1}, \dots, x_{n+m} são as variáveis de folga adicionadas ao conjunto de restrições.

Para efeitos do teorema 3.2, precisaríamos definir a noção de degeneração de PL's. Apresentaremos o teorema sem entrar em detalhes, mas direcionamos o leitor para uma discussão em (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Teorema 3.2 *Suponha que o problema de PL (2.3) é não degenerado e limitado, então o método simplex encontra uma solução. Além disso, a convergência do simplex acontece em um número finito de passos.*

A prova desse fato encontra-se em (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 370).

Considerando esses fatos, segundo (DANTZIG, 1963), quando aplicamos o método Simplex em (3.8) e encontramos (3.9), então o problema está apresentado na forma padrão viável.

$$\begin{array}{rcccc}
 (-z) & & +\bar{c}_{m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{c}_n x_n & = -\bar{z}_0 \\
 x_1 & & +\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
 x_2 & & +\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
 \dots & & \vdots & & \\
 x_m & & +\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m
 \end{array} \tag{3.9}$$

Onde as variáveis básicas $x_1, \dots, x_m, (-z)$ minimizam a função objetivo, que $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_j, \bar{b}_i$ e \bar{z}_0 são constantes, todos os x_i são não negativos e todos os $\bar{b}_i \geq 0$. Assim, nessa forma padrão a solução básica é dada por

$$z = \bar{z}_0; \quad x_1 = \bar{b}_1; \quad x_2 = \bar{b}_2; \quad \dots \quad x_m = \bar{b}_m; \tag{3.10}$$

com as variáveis não-básicas

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0 \tag{3.11}$$

A seguir, resolveremos alguns exemplos comentados usando o método Simplex. O exemplo 3.3 é um exemplo de problema de PL onde o resultado será garantido pelo teorema 3.2 e a solução será vista da forma (3.9). Note que o exemplo 3.3 corresponde ao exemplo 2.11 do capítulo anterior que foi resolvido pelo método KKT.

Exemplo 3.3 *Considere o problema de programação linear*

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & x_1 + x_2 \\
 \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

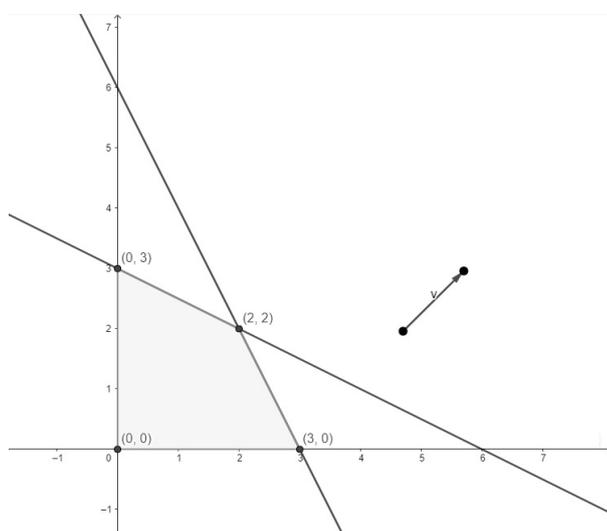
Note que, para termos a forma para resolução via Simplex de acordo com (3.8), a função objetivo $x_1 + x_2$ deve ser do tipo $z = x_1 + x_2$, onde z é o valor máximo procurado, assim teremos $z - x_1 - x_2 = 0$, já considerando o caso do problema ser transformado em um problema de minimização. As restrições estão na forma de desigualdades, logo,

devemos acrescentar uma variável de folga em cada uma de acordo com a definição (3.6). Assim temos um novo sistema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Analisando graficamente o problema 3.3 observando a figura 3.3, temos os quatro pontos extremos formados pelas restrições que são as soluções viáveis e o vetor v que representa a função objetivo.

Figura 3.3 – Visualização gráfica do exemplo 3.3



Fonte: Próprio autor, usando software GeoGebra

Agora resolveremos usando o método Simplex através de tabelas, também chamadas de *Tableau*. Segue-se a tabela 3.5 com os coeficientes das variáveis das três equações do problema.

Tabela 3.5 – Coeficientes do exemplo 3.3

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	-1	-1	0	0	0
x_3	0	1	2	1	0	6
x_4	0	2	1	0	1	6

Observe que as variáveis de folga receberam coeficiente zero na função objetivo e escolhemos as mesmas para compor a primeira coluna da nossa tabela. Aqui podemos concluir que a solução inicial, corresponde a $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, com $z = 0$, que na figura 3.3 corresponde ao ponto $(0,0)$.

Para resolver usando o método, devemos escolher na linha z , o coeficiente mais negativo, que no caso corresponde a x_1 e x_2 . Vamos escolher a coluna x_1 , onde nas

linhas de x_3 e x_4 temos que escolher o elemento *pivô*, que nada mais é que a menor razão entre $\frac{b}{x_1}$. Note que $\frac{6}{1} = 6$ e $\frac{6}{2} = 3$, logo a última razão nos fornece o pivô 2 na coluna x_1 . Assim, faremos a divisão da linha x_4 por 2 (pivô) e a mudança da linha para a base x_1 e obtemos a tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Mudança de base - x_4 para x_1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	-1	-1	0	0	0
x_3	0	1	2	1	0	6
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

Para seguir, devemos observar o pivô 1 na linha x_1 . Os valores acima dele devem ser zerados. Com isso para a nova linha x_3 , devemos multiplicar toda a linha x_1 por (-1) e adicionar com a linha x_3 termo a termo. Já para a linha z, devemos multiplicar a linha x_1 por 1 e adicionar a linha z termo a termo. Temos então a tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Finalização de mudança de base - x_4 para x_1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_3	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	3
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

Observe que de acordo com a tabela 3.7, a solução viável é $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ e $z = 3$ que ainda não são soluções ótimas. Na figura 3.3, corresponde ao ponto (3,0)

Como seguimos com um coeficiente negativo na linha z, devemos repetir o processo, agora tomando como base a coluna x_2 . Para determinar o pivô temos $\frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$ e $\frac{3}{\frac{3}{2}} = 6$. Logo o pivô será $\frac{3}{2}$ e a linha x_3 será dividida por $\frac{3}{2}$ e passará para a base x_2 como segue a tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Mudança de base - x_3 para x_2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

O próximo passo, sendo o pivô 1 na linha x_2 é obter o coeficiente zero acima e abaixo dele. Para isso devemos ter a linha x_2 multiplicada por $\frac{1}{2}$ e adicionada com a linha z para a nova linha z. Multiplicar a linha x_2 por $-\frac{1}{2}$ e adicionar a linha x_1 para obter a nova linha x_1 . Sendo assim, teremos a tabela 3.9.

Tabela 3.9 – Finalização de mudança de base - x_3 para x_2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2

Finalmente, na linha z todos os coeficientes são não-negativos. Logo, concluímos que $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ e o máximo da função objetivo é 4. No polígono da figura 3.3, corresponde ao ponto (2, 2).

O exemplo 3.4 apresentado a seguir, corresponde a um problema de PL degenerado. Foi resolvido no capítulo anterior pelas condições de KKT como exemplo 2.8.

Exemplo 3.4 Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 8x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Agora, arrumando o problema na forma para resolução do Simplex, temos

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 8x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Analisando graficamente o problema 3.4 com a figura 3.4, temos 4 pontos extremos formados pelas restrições e o vetor u que representa a função objetivo.

Após organizar os coeficientes do exemplo 3.4 no Tableau, ficamos com a tabela 3.10. Podemos ver que a solução inicial básica equivale a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $z = 0$, que corresponde ao ponto (0,0) na figura 3.4.

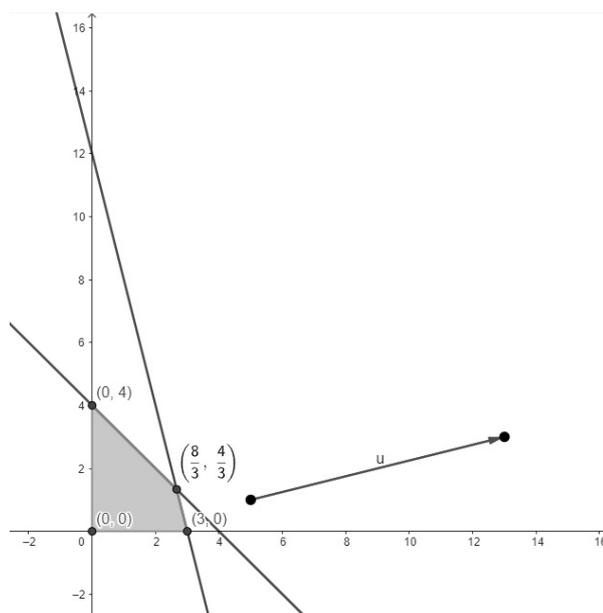
Tabela 3.10 – Coeficientes do exemplo 3.4

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	-8	-2	0	0	0
x_3	0	4	1	1	0	12
x_4	0	1	1	0	1	4

Agora, para determinarmos o pivô, escolhemos a coluna x_1 e concluímos que o elemento pivô será o 4, logo a tabela 3.11 apresenta a nova base de x_3 para x_1 .

Aqui nesse caso, concluímos que $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ e $z = 24$, que corresponde ao ponto (3,0). Como não há mais valores negativos na linha z, já encontramos o valor

Figura 3.4 – Visualização gráfica do exemplo 3.4



Fonte: Próprio autor, usando software GeoGebra

Tabela 3.11 – Mudança de base de x_3 para x_1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	1	0	0	2	0	24
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	3
x_4	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	1

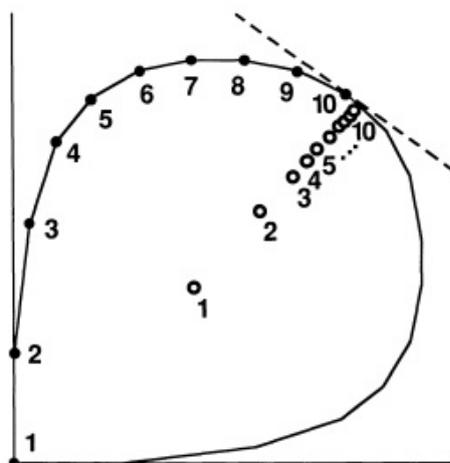
ótimo. Porém, nesse exemplo específico, o valor encontrado na resolução no capítulo anterior como exemplo 2.8 corresponde a $x_1 \geq \frac{8}{3}$ e $x_2 \leq \frac{4}{3}$. Isso implica dizer, que o Simplex convergiu para uma solução que não era vértice no capítulo anterior, porém estava dentro do conjunto de pontos KKT infinitos.

3.2 MÉTODO DE PONTOS INTERIORES

Uma outra maneira de encontrarmos soluções ótimas para programação linear, que não seja pelo método Simplex, é usando o método de pontos interiores (MPI). Ao compararmos geometricamente, o método Simplex funciona na fronteira do conjunto viável, já o MPI aproxima-se do limite do conjunto viável sem nunca se situar realmente nos limites desta região (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). A figura 3.5 faz um comparativo entre o método Simplex e o método de pontos interiores. Podemos complementar que o método Simplex caminha em vértices adjacentes com custos cada vez menores (minimização), enquanto o MPI tenta aplicar o o método de Newton no sistema KKT.

Segundo (HOOKER, 1986), o tempo de execução de um algoritmo não polinomial como o método Simplex, pode crescer exponencialmente com o tamanho de alguns problemas em certos casos, que seria um ponto falho do método. O que vem

Figura 3.5 – Comparativo: método Simplex (pontos pretos) e o MPI.



Fonte: (HOOKER, 1986, p. 77)

ao encontro com o que afirma (NOCEDAL; WRIGHT, 2006), que mesmo altamente eficiente em quase todos os problemas práticos, o Simplex pode ter um desempenho muito limitado ao se tratar de problemas pontuais. Esse problema a que o autor se refere, foi citado por (KLEE; MINTY, 1972) e mostra um problema n -dimensional, em que o conjunto poliedral viável tem 2^n vértices.

Os autores (KLEE; MINTY, 1972) enfatizam que estudaram o mau comportamento do método Simplex e não o comportamento médio do método Simplex. Citam ainda que segundo (DANTZIG, 1963) em problemas com m restrições lineares e n variáveis, o número de iterações pode variar de m a $2m$ e raramente $3m$. Esse número é geralmente menor de $\frac{3m}{2}$ quando há menos de 50 equações com 200 variáveis. Na análise, (KLEE; MINTY, 1972, p. 174) comparam o número de iterações citado por Dantzig, com a inequação (3.12), objeto do estudo dos autores, para problemas da ordem de $(n, 2n)$, considerando n variáveis e $2n$ restrições

$$\Xi(n, 2n) \geq 2^n - 1 \quad (3.12)$$

onde Ξ representa o número de iterações.

Para se ter uma ideia, (LUENBERGER; YE, 2008) fazem um comparativo usando (3.12). Imagine um problema envolvendo $n = 3$ variáveis e $m = 6$ equações. Nessa configuração teríamos 7 pivotamentos no método Simplex. Agora, ao tratarmos de um problema com $n = 50$ e $m = 100$, encontramos $2^{50} - 1 \approx 10^{15}$ pivotamentos, que se considerado a resolução por um computador nos dá em torno de 33 anos para resolver o problema.

Apresentado em 1984 por Karmarkar, (KARMARKAR, 1984), um novo algoritmo polinomial, um método de pontos interiores com um grande potencial e possível competidor para o método Simplex. Nesse processo, é o interior do conjunto viável que desempenha um papel dominante, este algoritmo evita propositalmente os limites do

conjunto viável e eventualmente converge para um vértice como solução (LUENBERGER; YE, 2008).

No método de pontos interiores, (BERTSEKAS, 2015) explica que à função objetivo é adicionada uma função denotada por função de barreira logarítmica $B(x)$, definida no interior do conjunto solução, que é contínua e a tende a ∞ , assim que qualquer uma das restrições $g(x)$ se aproximam de zero.

Podemos então utilizar a função barreira da seguinte forma

$$B(x) = - \sum_{i=1}^n \ln \{-g_i(x)\} \quad (3.13)$$

e, consideraremos uma sequência γ_k positiva, convergindo a zero, tal que

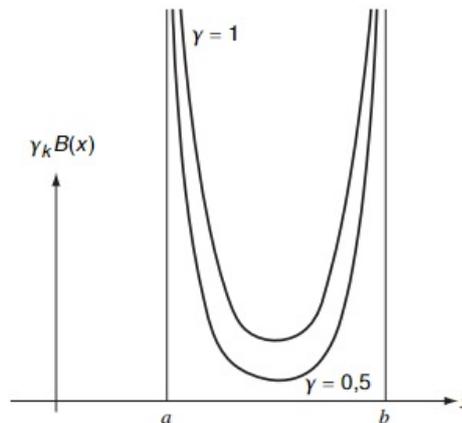
$$0 < \gamma_{k+1} < \gamma_k \quad (3.14)$$

Dado isso, um MPI do tipo barreira logarítmica consiste em encontrar $x^k \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$x^k \in \arg \min \{c^T x - \gamma_k B(x)\}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Note que se $\gamma = 0$, obtemos a função inicial e por usarmos funções logarítmicas $g_i(x) > 0$. Sobre γ , podemos dizer que corresponde a um parâmetro de barreira ou aproximação. Observe a figura 3.6 que ilustra como esse parâmetro como funciona.

Figura 3.6 – Função de barreira de acordo com parâmetros γ



Fonte: Adaptado de (LUENBERGER; YE, 2008, p. 406)

Para o formato padrão de programação linear, baseada em (3.2), temos que o método de pontos interiores nos dá

$$x_k \in \arg \min \left\{ c^T x - \gamma_k \sum_{i=1}^n \ln(-x_i) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

É possível fazer essa abordagem de barreiras no Método de Newton aplicado ao sistema KKT, porém não entraremos em discussão. Ao leitor fica a sugestão de leitura em (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, p. 505 - 510).

O estudo de centro analítico foi baseado em (LUENBERGER; YE, 2008, p. 118) e considera o politopo limitado por $\Omega \in \mathbb{R}^n$ representado por n inequações e m variáveis. O centro analítico é como o centro de gravidade (CG) do politopo e nos fornece a base para o método de trajetória central e a ideia de MPI. A cada iteração, a trajetória dos CG's formados abaixo do conjunto de nível da f objetivo e o conjunto Ω (minimização), forma o que chamamos de caminho central, que é quando z se aproxima de z^* , ou seja, $z < z^*$, sendo z^* o valor ótimo do problema.

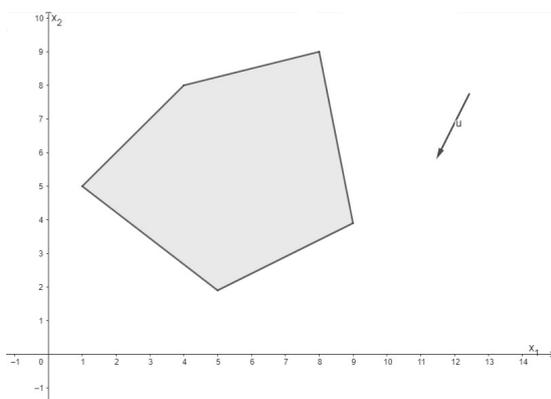
O exemplo 3.5 a seguir representa essa situação com um problema em \mathbb{R}^2 . Todo o exemplo foi feito no software GeoGebra. Apresentaremos apenas as imagens com alguns comentários.

Exemplo 3.5 Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 4x_2 \geq 23 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 49 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

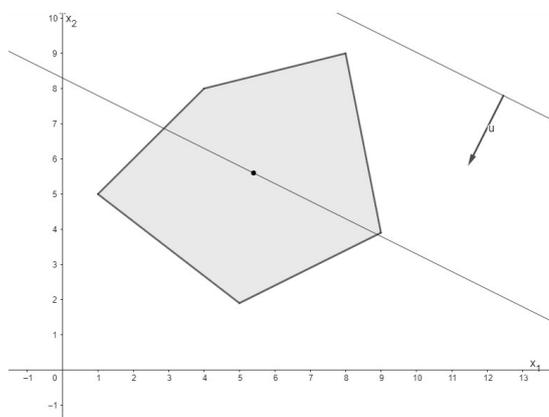
A figura 3.7 representa o politopo formado pelas restrições do problema 3.5. O vetor u representa a função a ser minimizada. Para começarmos a trajetória central, marcaremos o centro analítico do politopo (também considerado como centro de gravidade), adicionaremos o conjunto de nível relativo ao vetor u e um conjunto de nível passando pelo centro de gravidade, conforme figura 3.8.

Figura 3.7 – Restrições do problema 3.5



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

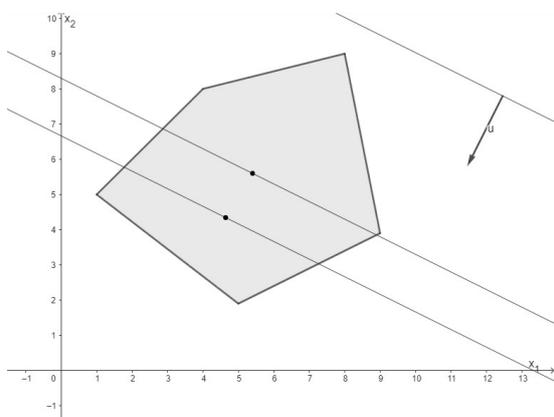
Figura 3.8 – Centro de gravidade do problema 3.5



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

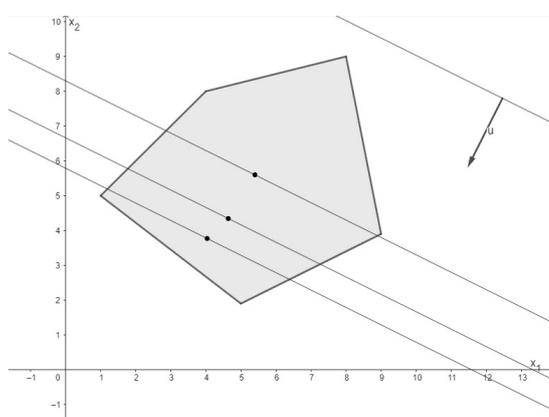
Repetimos o processo de marcar o centro de gravidade, porém no polítopo abaixo do conjunto de nível citado anteriormente. Observe a figura 3.9 e seguimos o mesmo processo, conforme a figura 3.10.

Figura 3.9 – Centro de gravidade 2



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

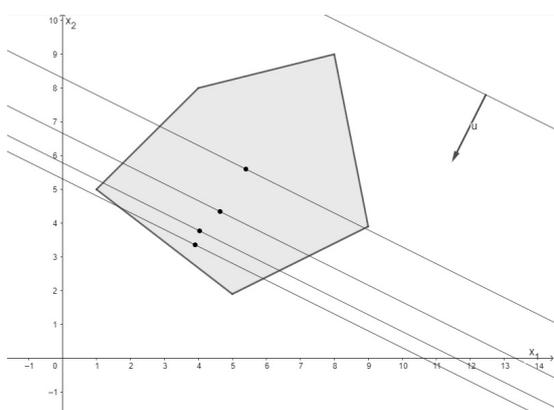
Figura 3.10 – Centro de gravidade 3



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

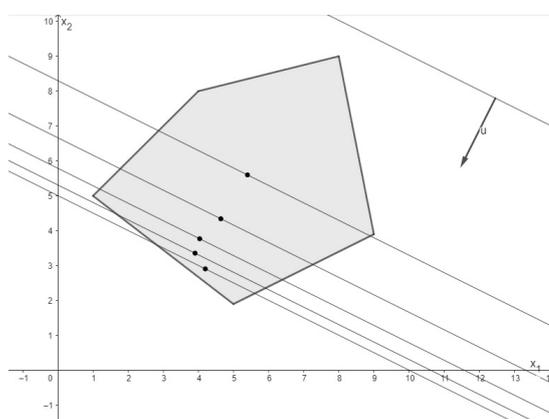
Ao adicionarmos o centro de gravidade 4, conforme a figura 3.11, já podemos observar a convergência da trajetória. Na figura 3.12 isso fica mais claro.

Figura 3.11 – Centro de gravidade 4



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

Figura 3.12 – Centro de gravidade 5

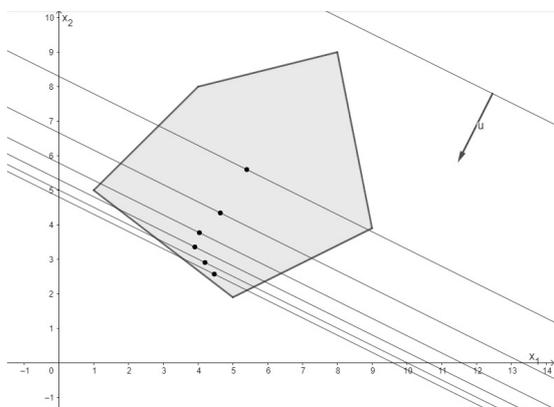


Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

Na figura 3.13 já podemos concluir o método. E, para uma melhor visualização, a figura 3.14 apresenta apenas a trajetória central para a resolução do problema 3.5.

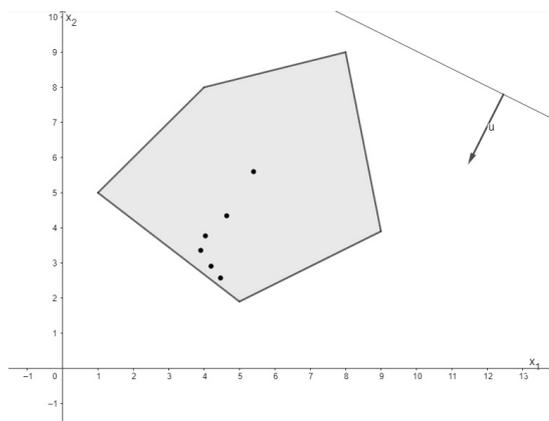
Assim, o vértice $x^* = (5, 2)$ é o minimizador. Logo o valor ótimo $z^* = 9$.

Figura 3.13 – Centro de gravidade 6



Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

Figura 3.14 – Trajetória central do problema 3.5

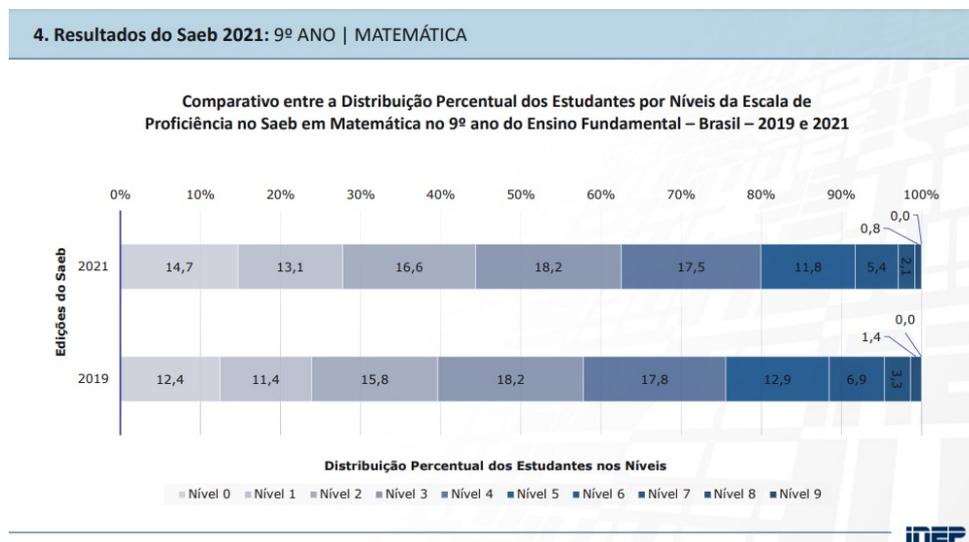


Fonte: Próprio autor, usando o software GeoGebra

4 SUGESTÕES DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sala de aula de um professor de ensino básico, por vezes torna-se um ambiente heterogêneo de aprendizagem. Enquanto alguns alunos após breve explicação já começam a desenvolver as atividades propostas, outra parte do grupo ainda demanda de mais atenção. Isso fica claro quando analisamos os dados mais recentes que se tem acesso, de acordo com (INEP, 2022), referentes ao IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) do ano de 2021 para o componente de matemática do nono ano do ensino fundamental, conforme figura 4.1.

Figura 4.1 – Dados do IDEB 2021



Fonte: (INEP, 2022, p. 40)

Isso faz com que nós professores tenhamos sempre em mente maneiras de como tornar nossa aula mais atrativa, mais conectada com os alunos e ainda, fazer com que os alunos consigam ao final da aula, atingir o objetivo da mesma. O trabalho não é fácil, depende de muitos fatores tanto físicos quanto humanos.

A realidade da sala de aula mostrada na figura 4.1 vem ao encontro ao que os autores (FELIPPE; MACEDO, 2022) compilam em artigo, citando que a escola é um lugar para construção de conhecimento e que o desafio está em por em prática as teorias e conceitos hoje que servirão para o amanhã. Pontuam ainda que, para que o conteúdo tenha significado para o aluno precisamos considerar a pluralidade da sala de aula e ver a matemática como situações de resolução de problemas.

No seu dia a dia, o professor deve planejar de acordo com um documento norteador, a Base Nacional Curricular Comum, também conhecida de BNCC. Ela serve de referência para que as redes de ensino garantam um patamar comum de aprendizagens que se materializam como um conjunto de decisões que envolvem, entre outras ações, contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, selecionar e aplicar

metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas (BRASIL, 2018).

Destacamos aqui, duas competências gerais retiradas do documento:

2 - Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;

5 - Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

Em artigo, (VALENTE, 2022) faz um apanhado de ideias acerca da tecnologia, citando entre outras coisas, que com a disseminação da tecnologia no início dos anos 2000 criou-se a distinção de usuários que apenas sabiam usá-la (alfabetizado digital) e, aqueles que sabiam explorar outros recursos em diferentes práticas e contexto (chamados de letrados digitais). Nesse contexto cita dois conceitos interessantes: o da "bricolagem", que é definida como uma habilidade de usar o que está à sua mão e recombina-la para criar algo e, o de "curadoria", que nada mais é do que organizar, selecionar, apresentar algo com o objetivo de criar condições para que possamos desenvolver habilidades de tratar a informação, colocando o professor no papel de curador.

Segundo (LÉVY, 1999), as técnicas de simulação, em particular aquelas que utilizam imagens interativas, não substituem os raciocínios humanos mas prolongam e transformam a capacidade de imaginação e de pensamento. Ao observarmos o que (VALENTE, 2022) pontua em seu artigo e combinarmos com o que (LÉVY, 1999) apresenta, trazemos duas propostas nesse capítulo para uma abordagem em sala de aula do tema dessa dissertação com o uso específico de um aplicativo, o GeoGebra.

Apresentaremos ainda, uma proposta em formato de jogo. Sobre planejar o uso de jogos

A utilização do jogo como material pedagógico tem como objetivo criar um ambiente descontraído que viabilize a aprendizagem significativa por meio da observação, da criatividade, do pensamento lógico, da resolução de situação problema, da articulação com diferentes conhecimentos e da inter-relação com os colegas de sala (TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO, 2014).

É preciso que ao olharmos a nossa sala de aula, no desenvolvimento das nossas ações tenhamos a clareza de que nossos alunos desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2018).

Visto isso, apresentamos a seguir duas sugestões de plano de aula para o ensino básico envolvendo otimização. As duas situações partem do pressuposto de resolver problemas de PL baseadas no teorema 3.2 que não será trabalhado em sala,

mas deve ser de conhecimento prévio do professor que pretende aplicar a atividade. A primeira utiliza um software dinâmico chamado GeoGebra, disponível gratuitamente na internet, e a segunda apresenta um jogo usando um material físico chamado de Geoplano.

4.1 SUGESTÃO 1: USO DO APLICATIVO GEOGEBRA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL

4.1.1 Descrição da aula

Através de um problema simples apresentar aos alunos uma noção do que é otimização, mais especificamente programação linear. A ideia é representar geometricamente uma situação de programação linear, buscando o ponto ótimo de acordo com as restrições e a função objetivo. A atividade foi pensada para ser desenvolvida em duplas. Espera-se que o professor apresente a situação-problema aos alunos e da língua portuguesa transcreva para a linguagem algébrica. Ao apresentar o problema, discutir com os alunos a simbologia usada, já que o uso do \leq e \geq ainda é pouco conhecido para eles no ensino fundamental.

É importante salientar que essa sequência didática foi pensada como fechamento ou atividade final das aulas relativas a equação do primeiro grau com duas incógnitas.

4.1.2 Objetivos

Apresentar aos alunos uma área da matemática chamada de otimização;

Usar o GeoGebra como meio para resolver de maneira gráfica um problema de programação linear.

4.1.3 Pré-requisitos

Para o desenvolvimento da atividade, é necessário que os alunos tenham conhecimento prévio sobre equação do primeiro grau com duas incógnitas e sua representação no plano cartesiano. Como é uma atividade usando o programa GeoGebra, é preciso que os alunos tenham conhecimento básico em informática. A versão utilizada do programa foi 6.0.823.0.

4.1.4 Ano escolar sugerido

A sugestão é que seja trabalhada no oitavo ano do ensino fundamental, porém nada impede ao professor trabalhar em outros anos, levando sempre em consideração os pré-requisitos necessários.

4.1.5 Número de aulas

Em torno de quatro a seis aulas de 45 minutos cada uma.

4.1.6 Habilidades envolvidas da BNCC e objetos do conhecimento

(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano - associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.

4.1.7 Materiais necessários

A atividade deve ser feita em um laboratório de informática ou algo do tipo, em que os alunos tenham acesso ao aplicativo GeoGebra instalado no computador ou acesso a versão online. Sugere-se ainda que o professor tenha acesso a um dispositivo de projeção para que os alunos possam acompanhar com o professor o desenvolvimento da atividade. Os alunos deverão levar também pelo menos um caderno e material para registro por dupla.

4.1.8 Sequência didática

Momento 1: apresentar aos alunos o problema:

Uma fábrica de móveis deseja fabricar mesas e cadeiras a fim de obter o maior lucro possível. Sabemos que o lucro após a venda de cada cadeira é de R\$ 45,00 e de R\$ 80,00 por mesa. Sabe-se também que o material necessário para fabricar uma cadeira é de 5 tábuas e de 20 tábuas para cada mesa. Temos no máximo 400 tábuas disponíveis. Em relação ao tempo, temos 10 horas de trabalho para finalizar uma cadeira e 15 horas para cada mesa, num total máximo de 450 horas de trabalho disponíveis.

Como os alunos já tem um conhecimento prévio sobre equações do 1º grau com duas incógnitas, sugerir que eles analisem o problema por uns 10 minutos e tentem traduzir para a linguagem algébrica. Para padronizar a execução da atividade, sugiro usarmos x para cadeiras e y para mesas. A situação deve ser traduzida algebricamente como:

Maximizar o lucro de $45x + 80y$, considerando:

$5x + 20y \leq 400$, cabe ao professor explicar que não necessariamente usaremos as 400 tábuas e sim no máximo 400, por isso explicar o uso de \leq ao invés de $=$ em situações mais formais.

$10x + 15y \leq 450$, do mesmo modo da situação anterior, é preciso deixar claro aos alunos que não necessariamente usaremos as 450 horas disponíveis.

Momento 2: apresentar aos alunos o GeoGebra.

Geogebra é um software dinâmico de matemática que reúne geometria, álgebra entre outras funcionalidades, segundo o próprio desenvolvedor. Nos minutos iniciais instigar aos alunos a explorar o aplicativo, explicando que os comandos são feitos na guia a esquerda na tela. Isso pode levar tempo, mas o professor pode explorar com os alunos como fazer pontos, retas, equações e etc, e deixá-los livres um momento para explorar novos comandos.

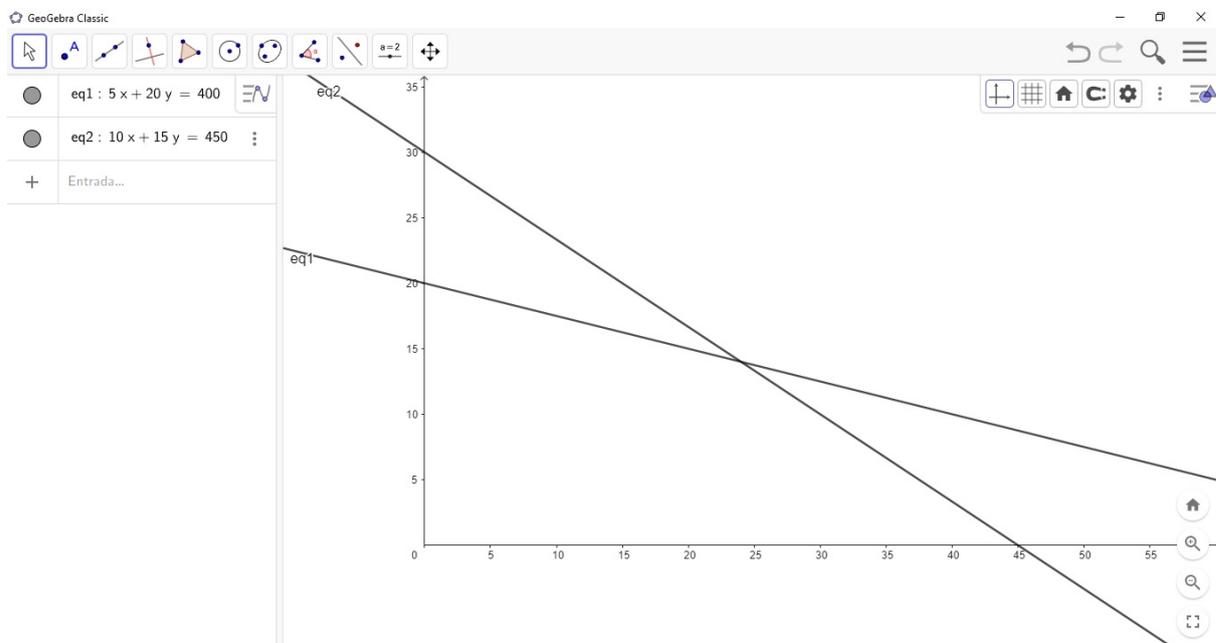
Ao iniciar a atividade propriamente dita, para melhor visualização junto aos alunos, fazer as seguintes modificações:

Clicando no plano cartesiano com o botão direito do mouse, no item *Exibir malha*, selecionar a opção *Sem malha*, assim teremos a tela mais limpa.

Nas configurações, no canto superior direito, na aba *EIXO X*, habilitar a marcação de *Direção positiva apenas*. Explicar aos alunos que essa decisão é tomada pois nossa situação problema não permite valores negativos para x cadeiras e y mesas.

Feito isso, no campo da esquerda, devemos digitar as nossas equações. As equações a que nos referimos são as chamadas restrições do problema. Em nosso caso são a quantidade de tábuas e de horas. Usaremos as equações no formato $5x + 20y = 400$ e $10x + 15y = 450$. Após cada equação ser digitada, deve-se dar ENTER. Teremos então a figura 4.2.

Figura 4.2 – Visualização gráfica do problema



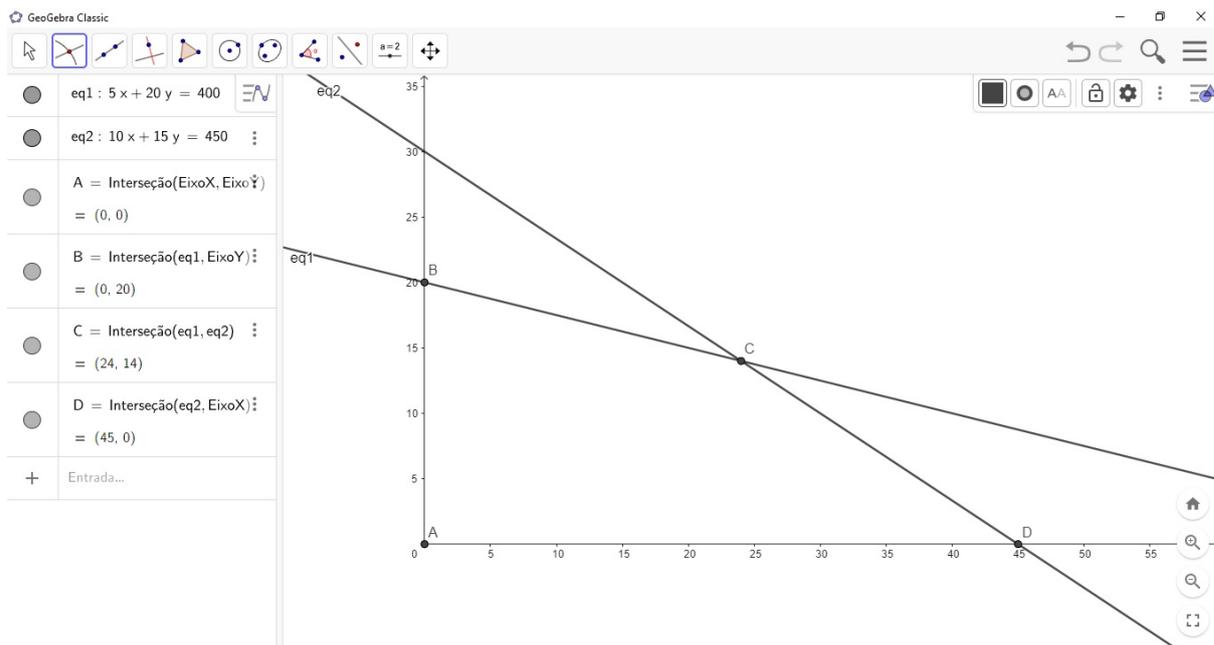
Fonte: Próprio autor, usando software GeoGebra

O próximo passo é afirmar aos alunos que essa representação poligonal nos mostra as possíveis soluções do nosso problema, onde todas as soluções viáveis estão no polígono formado pela intersecção entre retas e os eixos do plano cartesiano.

Usando a ferramenta *Ponto*, que é o segundo botão na parte superior do software e clicando na opção *Intersecção entre dois objetos*, usaremos essa ferramenta em quatro intersecções: eixo X e eixo Y (A), equação 1 e eixo Y (B), equação 1 e equação 2 (C) e por fim, equação 2 e eixo X (D).

Assim, o software nos mostrará as quatro intersecções e suas respectivas coordenadas, conforme imagem 4.3

Figura 4.3 – Pontos de intersecção



Fonte: Próprio autor, usando software GeoGebra

Pedir aos alunos que manualmente em seus cadernos, usem a equação a ser maximizada $45x + 80y$ e verifiquem qual dos quatro pontos terá o valor máximo do lucro nessas condições. Que no caso deve ser satisfeito no ponto C, com a fabricação de 24 cadeiras e 14 mesas.

Instigar os alunos a investigar outros pares ordenados dentro do polígono formado para verificarem que a solução encontrada não será ótima. Inclusive é interessante sugerir outros lugares do plano para essa verificação, como acima de uma reta e baixo de outra, até mesmo mais acima das retas. É importante que os alunos façam a constatação já afirmada pelo professor, em que de fato a solução ótima está em um dos vértices do polígono.

Momento 3: resolver outros problemas de maneira similar.

Como sugestão, deixo os seguintes problemas:

- Uma artesã produz dois tipos de objetos para comercializar. No objeto A, são gastos nove horas de mão de obra e três horas de secagem. No objeto B, são gastos uma hora de mão de obra e uma hora de secagem. Sabendo

que a artesã tem disponível até 18 horas de mão de obra e até 12 horas de secagem. Sabendo que cada objeto A fornece lucro de R\$ 4,00 e de R\$ 1,00 para cada objeto B, qual a quantidade de objetos a serem produzidos de cada um para que o lucro seja máximo?

- Um fabricante de bombom dispõe de um estoque de 130kg de bombom com sabor cereja e 170kg de bombom com sabor côco. Deseja vender os bombons em duas configurações de pacotes, o primeiro deve conter metade do peso em bombons de cereja e outra metade com bombons de côco, e comercializado a R\$ 20,00 o quilograma. Já o segundo pacote deve conter um terço do peso em bombons de cereja e os dois terços restantes com bombons de côco, sendo comercializado por R\$ 12,00. Quantos quilogramas de cada mistura devem ser preparados para se obter o lucro máximo?
- Uma jovem estudante tem no seu orçamento até R\$ 160,00 para gastar com atividade física em um clube de sua cidade, sendo R\$ 5,00 o custo por hora para a prática de natação e R\$ 2,00 o aluguel de uma bicicleta. Dispõe também de até 65 horas mensais disponíveis para tais atividades. Deve praticar no mínimo 5 horas de natação e 10 de ciclismo. O treinador do clube afirmou que em média são gastos 400kcal na natação e 280kcal no ciclismo, com isso, quantas horas de cada modalidade a estudante deve praticar para maximizar o gasto calórico mensal?
- Uma empresa de produtos químicos comercializa a mistura de dois solventes. Para a primeira mistura, são usadas uma parte de solvente A e duas partes de solvente B, com um volume máximo produzido de 32 litros. A segunda mistura é feita usando quatro partes do solvente A e quatro partes do solvente B, com um volume máximo de 72 litros. Sabemos ainda que o solvente A é comprado pela empresa com quantidades a partir de dois litros e o solvente B com quantidades a partir de 12 litros. O lucro na comercialização das misturas em relação ao solvente A é de R\$ 45,00 o litro e do solvente B R\$ 60,00 o litro. Qual a quantidade máxima de solventes a serem comprados para que se tenha um lucro máximo na venda?

4.1.9 Avaliação

Sugerimos dividir a avaliação em duas partes. A primeira parte, que corresponde a 50% da nota, constitui em avaliar individualmente se o aluno trabalhou de maneira colaborativa com sua dupla e manteve comportamento adequado durante as aulas. A segunda metade da avaliação é pedir aos alunos para apresentarem a resolução das atividades propostas usando o software GeoGebra e os cálculos da maximização no seu material de apoio.

4.1.10 Possíveis obstáculos

Como toda atividade desenvolvida em sala de aula possui obstáculos e dificuldades, essa não seria diferente. A falta de acesso ao laboratório de informática com internet é o principal obstáculo que o professor deve estar atento, juntamente com a familiaridade dos alunos com o uso do computador. É preciso verificar antes em todos os computadores a viabilidade de funcionamento do site ou do aplicativo.

Na falta de laboratório de informática na escola, abaixo apresentamos uma sugestão com os mesmos princípios, porém utilizando uma abordagem mais manual.

4.2 SUGESTÃO 2: JOGO USANDO GEOPLANO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL

4.2.1 Descrição da aula

Primeiramente deve-se apresentar aos alunos o geoplano, que é um material formado por uma superfície plana com furos equidistantes. O material utilizado faz parte do Kit do Explorador Matemático, desenvolvido pela BRINK MOBIL conforme figura 4.4.

Figura 4.4 – Foto do geoplano



Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

Através de um problema, apresentar aos alunos uma noção do que é otimização, mais especificamente programação linear. A ideia é representar geometricamente uma situação de programação linear, buscando o ponto ótimo de acordo com as restrições e a função objetivo. A atividade deve ser feita com grupos entre três e quatro alunos. Espera-se que o professor apresente a situação-problema aos alunos e da língua portuguesa transcreva para a linguagem algébrica. Ao apresentar o problema, discutir com os alunos a simbologia usada, já que o uso do \leq e \geq ainda é pouco conhecido para eles no ensino fundamental.

É importante salientar que essa sequência didática foi pensada como fechamento ou atividade final das aulas relativas a equação do primeiro grau com duas incógnitas.

4.2.2 Objetivos

Apresentar aos alunos uma área da matemática chamada de otimização;
Usar o geoplano como um meio para resolver de maneira dinâmica um problema de programação linear.

4.2.3 Pré-requisitos

Para um bom desenvolvimento da atividade, é necessário que os alunos tenham conhecimento prévio de equações do primeiro grau com duas incógnitas e saber localizar pontos no plano cartesiano.

4.2.4 Ano escolar

A sugestão é que seja trabalhada no oitavo ano do ensino fundamental, porém nada impede ao professor trabalhar em outros anos, levando sempre em consideração os pré-requisitos necessários.

4.2.5 Número de aulas

Pelo menos quatro aulas de 45 minutos cada.

4.2.6 Habilidades envolvidas da BNCC e objetos do conhecimento

(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano - associação de uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

4.2.7 Materiais necessários

Utilizaremos um geoplano, pinos para encaixe, elástico para representar as retas, uma bolinha de ferro, um plástico transparente para fechamento do polígono viável e uma seta confeccionada com papel para representar o vetor da função objetivo.

4.2.8 Sequência didática

Momento 1: apresentar aos alunos o problema.

Uma loja de roupas deseja maximizar o lucro de vendas de suas peças que mais tem saída, calças jeans e camisetas. O gerente sabe que o lucro de venda de uma calça jeans é de R\$ 40,00 e de uma camiseta é de R\$ 20,00. Para controle da loja,

no estoque deve ter no mínimo 20 calças e a diferença entre a quantidade de calças de camisetas deve ser de pelo menos 100 unidades. Observa-se ainda que quem compra uma calça e duas camisetas, acabou gerando uma baixa de pelo menos 100 peças ao fim do período de observação. Porém, quem leva duas calças jeans e três camisetas gera uma baixa de até 400 peças no estoque.

Após análise junto aos alunos deve-se passar para a linguagem algébrica. Para isso usaremos x para calças e y para camisetas. Algebricamente o problema seria o seguinte:

Maximizar o lucro de $40x + 20y$, considerando:

$x \geq 20$, ou seja, a quantidade de calças é maior que vinte unidades no estoque;

$x - y \geq 100$, a diferença mínima entre a quantidade de peças;

$x + 2y \geq 100$, a baixa mínima de peças;

$2x + 3y \leq 400$, por fim, a baixa máxima de peças;

Lembrando que como x e y são peças de roupa, os valores são positivos.

Lembre-se que os alunos não estão familiarizados com a linguagem das desigualdade, o que facilmente o professor pode converter todas em igualdade, sem perder a essência do trabalho em questão, desde que deixe claro aos alunos as diferenças entre elas e o que representam.

Momento 2: montando o geoplano.

Observe que nossa situação problema não permite valores negativos, logo o geoplano será a representação do primeiro quadrante do plano cartesiano. Considerando ainda os valores citados, a escala do geoplano precisa ser analisada de maneira que fique fácil a representação. Nesse caso ilustrado aqui, cada ponto equivale a 10 unidades. Cada restrição será representada por uma reta. Precisaremos determinar dois pontos em cada uma para traçá-la. Várias são as estratégias para fazer essa busca de pontos, cabe ao professor achar a que se adeque melhor a sua realidade e a de seus alunos. O próximo passo é afimar aos alunos que essa representação poligonal formada pelas retas e suas intersecções nos mostram as possíveis soluções do nosso problema. Para cada reta utilizou-se de uma cor diferente de elástico. A figura 4.5 ilustra a situação.

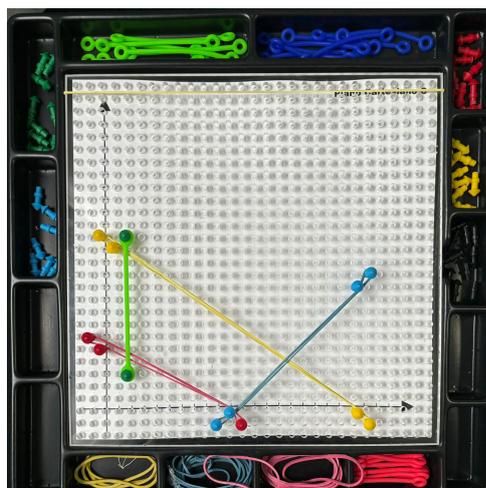
Vamos aqui, introduzir uma representação do vetor da função objetivo a ser maximizada. Pode-se usar qualquer área do geoplano, desde que mantenha as proporções da função objetivo (40 para x e 20 para y). Acrescente também uma seta no sentido da maximização (para cima) nesse caso. Observe a figura 4.6.

Agora, pegue a bolinha de ferro que utilizaremos para nos ajudar e coloque dentro do polígono formado pelas restrições. Observe a figura 4.7.

Momento 3: determinar a solução

Agora que o problema está devidamente representado, devemos recobrir o polígono com um plástico transparente. Note que mais um ponto foi incluído em uma

Figura 4.5 – Representação do problema no geoplano



Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

Figura 4.6 – Representação do problema no geoplano com o vetor da maximização



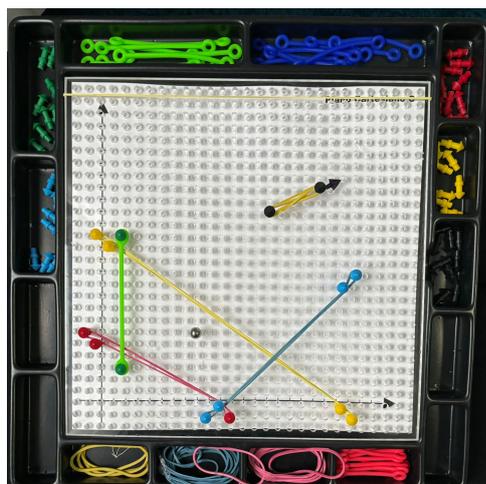
Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

intersecção para que assim a figura ficasse mais firme para o propósito do jogo. Em todas as retas foi acrescentado mais um elástico por cima para fixar o plástico. Observe a figura 4.8:

Agora com nosso problema devidamente representado, devemos pegar o geoplano e girá-lo de maneira que o vetor que representa a função objetivo esteja apontando para o chão, ou mais precisamente, perpendicular ao chão ou superfície de apoio. Aqui optou-se por apoiar em uma parede para que tenhamos a certeza da perpendicularidade. Nesse momento a força da gravidade rolará a bolinha para a solução ótima. Observe a figura 4.9.

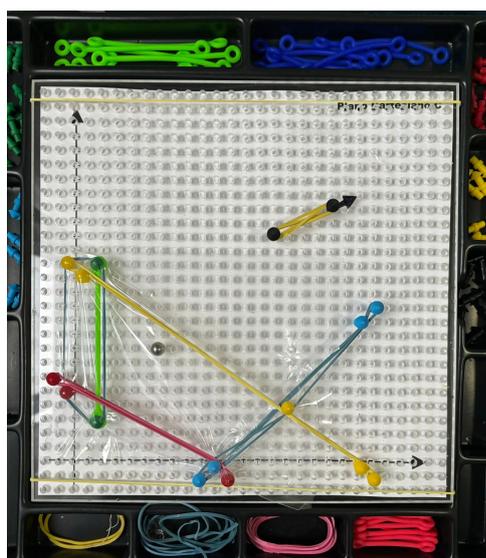
Nesse caso, encontramos o vértice da intersecção entre as retas azul e amarela, que correspondem ao ponto (140,40), ou seja, o lucro máximo é obtido vendendo

Figura 4.7 – Início da resolução



Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

Figura 4.8 – Início da resolução - Fechamento do polígono



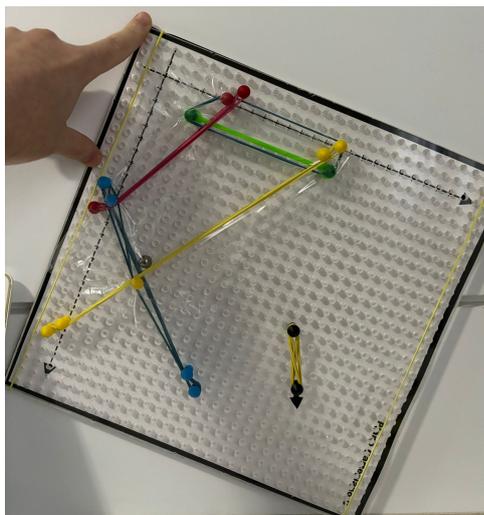
Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

140 calças e 40 camisetas, que corresponde a R\$ 7200,00. É interessante instigar os alunos a investigar outros pares ordenados dentro do polígono formado para verificar que a solução encontrada não será ótima. Inclusive é interessante sugerir outros lugares do plano para essa verificação, como acima de uma reta e abaixo de outra, até mesmo mais acima das retas. É importante que os alunos façam a constatação já afirmada pelo professor, em que de fato a solução ótima está em um dos vértices do polígono.

Momento 4: resolver atividades semelhantes

- Uma fábrica de móveis deseja fabricar mesas e cadeiras a fim de obter o maior lucro possível. Sabemos que o lucro após a venda de cada cadeira é de R\$ 30,00 e de R\$ 60,00 por mesa. Sabe-se também que o material

Figura 4.9 – Resolução do problema



Fonte: Próprio autor, usando material BRINK MOBIL

necessário para fabricar uma cadeira é de 5 tábuas e de 20 tábuas para cada mesa com no máximo 400 tábuas disponíveis. Em relação ao tempo, temos 10 horas de trabalho para finalizar uma cadeira e 15 horas para cada mesa, num total de 450 horas de trabalho disponíveis.

- Uma artesã produz dois tipos de objetos para comercializar. No objeto A, são gastos nove horas de mão de obra e três horas de secagem. No objeto B, são gastos uma hora de mão de obra e três horas de secagem. Sabendo que a artesã tem disponível até 18 horas de mão de obra e de no máximo 12 horas de secagem. Cada objeto A tem lucro de R\$ 4,00 e R\$ 1,00 para cada objeto B. Qual o máximo de objetos a serem produzidos de cada um para que o lucro seja máximo?
- Uma empresa de produtos químicos utiliza a mistura de dois solventes. Para a primeira mistura, são usadas uma parte de solvente A e duas partes de solvente B, com um volume máximo de 32 litros. A segunda mistura é feita usando quatro partes do solvente A e duas partes do solvente B, com um volume máximo de 72 litros. Sabemos ainda que o solvente A é comprado pela empresa com quantidades maiores que dois litros e o solvente B com quantidades acima de 12 litros. O lucro sobre o solvente A é de R\$ 45,00 e do solvente B R\$ 60,00. Qual a quantidade máxima de solventes a serem comprados para que se tenha um lucro máximo?

4.2.9 Avaliação

Sugiro dividir a avaliação em duas partes. A primeira parte, que corresponde a 50% da nota, constitui em avaliar individualmente se o aluno trabalhou de maneira

colaborativa com seu grupo e manteve comportamento adequado durante as aulas. A segunda metade da avaliação é pedir aos alunos para apresentarem a resolução das atividades propostas usando o geoplano e os cálculos da maximização.

4.2.10 Possíveis obstáculos

A quantidade de geoplanos disponíveis para a resolução da atividade pode se tornar um grande obstáculo. Muitas vezes as escolas nem possuem esse material. Existem algumas variações que ao invés de furos são utilizados pinos que não influenciam o resultado. Como sugestão no caso da falta desses materiais citados, o professor pode usar papel quadriculado para representar as retas e desenvolver a atividade com algumas modificações. Como a atividade seria baseada em desenhos no plano, só é necessário marcar as equações e fazer o giro conforme a atividade anterior. Como não teremos o elemento "bolinha de ferro" na atividade, é só observar o vértice mais ao "sul" da figura.

5 CONCLUSÃO

Na primeira parte da dissertação, tratamos a otimização de uma maneira geral. Utilizamos as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) e respectivos teoremas para resolução de alguns exemplos de problemas de otimização ilustrativos. Abordamos condições necessárias e suficientes de otimalidade e, em particular, apresentamos uma discussão detalhada de condições de qualificação e conceitos de análise convexa.

Após esse aprendizado geral sobre problemas de otimização contínua, nos especificamos em problemas de programação linear (PL). Vimos os dois métodos mais famosos e conhecidos em PL, a saber, o método Simplex e o método de pontos interiores (MPI). Exploramos visões geométricas e algébricas desses métodos. Para o primeiro, optamos por resolver via *Tableau* e ao mesmo tempo acompanhar os resultados com o polítopo formado pelas restrições do problema e, observar as iterações caminhando pelos vértices do mesmo até encontrar uma solução ótima. Para ilustrar o funcionamento do MPI utilizamos centros de gravidade de polítopos que compunham o que chamamos de trajetória central. Essa trajetória central formada pelos centros de gravidade converge para uma solução ótima do PL.

Elaboramos duas sequências didáticas a serem apresentadas aos alunos do ensino básico abordando otimização. A primeira sequência envolvia o aprendizado com o software GeoGebra para resolução de problemas de PL e a segunda um jogo com elásticos, bolinha usando um Geoplano. Deixamos como sugestões, a adaptação das aulas para uma malha quadriculada ou pontilhada nos moldes do jogo usando o geoplano e, uma atividade de MPI baseada no exemplo apresentado no GeoGebra.

REFERÊNCIAS

- ANDREANI, R.; ECHAGUE, C.E.; SCHUVERDT, M.L. **Constant-Rank Condition and Second-Order Constraint Qualification**. 146. ed. United States of America: J Optim Theory Appl, 2010. P. 255–266.
- ANDREANI, Roberto; MARTÍNEZ, José Mario; RAMOS, Alberto; SILVA, Paulo J. S. **Strict Constraint Qualifications and Sequential Optimality Conditions for Constrained Optimization**. *Mathematics of Operations Research*. 43. ed. United States of America: informs, 2018. P. 693–717.
- BECK, Amir. **Introduction to nonlinear Optimization: Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB**. Israel: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2014.
- BERTSEKAS, Dimitri P. **Convex Optimization Theory**. United States of America: Athena Scientific, 2009.
- BERTSEKAS, Dimitri P. **Convex Optmization Algorithms**. United States of America: Athena Scientific, 2015.
- BERTSEKAS, Dimitri P. **Nonlinear Programming**. 2. ed. United States of America: Athena Scientific, 1999.
- BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieve. **Convex Optimization**. United States of America: Cambridge University Press, 2004.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 1. ed. Brasil: Ministério da Educação, 2018.
- DANTZIG, George Bernard. **Linear Programming and Extensions**. 1. ed. United States of America: Princeton University Press, 1963.
- FELIPPE, Alana Cavalcante; MACEDO, Shirley da Silva. **Contributions of Mathematical games and Mathematical modeling in teaching Mathematics**. 11. ed. [S.l.: s.n.], 2022.
- FLOR, João Alberto Ramos. **Tópicos em Condições de Otimalidade para Otimização não linear**. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2016.

HOOKER, J. N. **Karmarkar's Linear Programming Algorithm**. 4. ed. United States of America: INFORMS, 1986. P. 75–90.

INEP. **MEC e Inep divulgam resultados do Saeb e do Ideb 2021**. Brasil: [s.n.], 2022.

IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail. **Otimização - volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade**. 2. ed. Brasil: IMPA, 2009.

KARMAKAR, Narendra. **A new polynomial-time algorithm for linear programming**. 4. ed. United States of America: Combinatorica, 1984. P. 373–395.

KJELDSEN, Tinne Hoff. **A Contextualized Historical Analysis of the Kuhn–Tucker Theorem in Nonlinear Programming: The Impact of World War II**. 4. ed. Dinamarca: Academic Press, 2000.

KLEE, Victor; MINTY, George J. **How good is the Simplex algorithm?** New York: Academic Press, 1972. P. 159–175.

LÉVY, Pierre. **Cybercultura**. 1. ed. São Paulo: Editora 34 Ltda, 1999.

LUENBERGER, David G. **Linear and Nonlinear programming**. 2. ed. United States of America: Springer, 2003.

LUENBERGER, David G.; YE, Yinyu. **Linear and Non Linear Programming**. 3. ed. United States of America: Springer, 2008.

NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen J. **Numerical Optimization**. 2. ed. United States of America: Springer, 2006.

RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. **Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais**. 1. ed. Brasil: Cengage Learning Edições Ltda., 2014.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza; APRESENTAÇÃO, Katia Regina dos Santos da. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática**. 15. ed. [S.l.: s.n.], 2014. P. 302–323.

VALENTE, José Armando. **Curadoria e bricolagem: competências do letramento digital**. 2. ed. Novo Hamburgo: Revista Conhecimento Online, 2022. P. 196–219.