Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

MAURÍCIO CELSO DE OLIVEIRA JÚNIOR

UMA TRILHA PEDAGÓGICA USANDO MODELAGEM MATEMÁTICA: APOSENTADORIA E FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Orientador: Omar Javier Solano Albornoz

NITERÓI
OUTUBRO/2024

Mauricio Celso de Oliveira Junior

Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais

Dissertação apresentada por Mauricio Celso de Oliveira Junior, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em matemática.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Orientador: Javier Solano

Niterói, RJ
2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

O48t Oliveira Junior, Maurício Celso de
Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais / Maurício Celso de Oliveira Junior. - 2024.
115 f.: il.

Orientador: Omar Javier Solano Albornoz.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

1. Ensino da matemática. 2. Funções exponenciais. 3. Modelagem matemática. 4. Aposentadoria. 5. Produção intelectual. I. Solano Albornoz, Omar Javier, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Mauricio Celso de Oliveira Junior

Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais

Dissertação apresentada por Mauricio Celso de Oliveira Junior, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre.

Aprovada em: 22 de outubro de 2024.

Banca examinadora

Professor Javier Solano - Orientador
Doutor, Universidade Federal Fluminense

Professor Ageu Barbosa Freire
Doutor, Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Professor Mitchael Alfonso Plaza Martelo
Doutor, Universidade Federal Fluminense

Niterói, RJ
2024

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por permitir a realização e conclusão deste trabalho.

Também agradeço a minha esposa Natália e a minha filha Antônia, que suportaram minha ausência em muitos momentos, sem deixar de me apoiar.

Agradeço à minha mãe Marize, que sempre me motivou e apoiou durante toda a jornada de desenvolvimento deste trabalho.

Sou imensamente grato aos professores do PROFMAT, em especial meu orientador Omar Javier Solano, a quem tenho grande admiração. Também agradeço aos meus colegas de turma, principalmente Wanderlan Carminatti e Leandro da Silva, aos quais serei eternamente grato.

E finalmente, agradeço aos milhares de alunos que estiveram presentes na minha trajetória docente. Sem estes, nada faria sentido.

A beleza da matemática só se mostra a seguidores mais pacientes.

— Maryam Mirzakhani.

Resumo

Um grande problema na educação matemática brasileira é o distanciamento entre o conteúdo curricular e a realidade vivenciada pelos alunos. Essa incongruência compromete o desempenho acadêmico, o que produz uma percepção negativa da disciplina que, ocasionalmente, leva alguns alunos a quadros de ansiedade e medo. A transmissão de conhecimento baseada somente na memorização de fórmulas contribui para manter esse quadro. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional (LDB) ressaltam a importância de um processo educacional que prepare os alunos para a vida fora do ambiente escolar, desenvolvendo habilidades muito além do que é necessário apenas para resolver problemas matemáticos. Nesse sentido, a modelagem matemática aparece como uma das estratégias mais importantes por meio da qual a matemática pode ser trazida de volta para situações do dia a dia, ajudando os alunos a entender a relevância dela em suas vidas.

O nosso objetivo é introduzir conceitos matemáticos através de situações problema que fazem parte da vida prática dos alunos. Diferentemente da abordagem feita nos livros, em geral, que estabelece relações entre as famílias de funções e uma grande variedade de problemas pequenos independentes e não relacionados, no trabalho apresentamos as funções exponenciais e logarítmicas usando um único assunto como fio condutor, a aposentadoria. O assunto, além de relevante, é rico em situações problema que podem ser entendidas usando a modelagem matemática. Através de uma trilha pedagógica, que integra a modelagem matemática ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas, propomos atividades por meio das quais o aprendizado é contextualizado, estabelecendo uma conexão entre conceitos matemáticos e situações da vida real. Usando situações relacionadas ao mercado de trabalho, como contribuições para a previdência social e estimativas de salários, esta sequência de atividades, além de levar os alunos a compreenderem alguns conceitos fundamentais das funções, também apresenta idéias financeiras de grande pertinência para a vida dos alunos após o ensino médio e ingresso no mercado de trabalho.

Analisamos também a abordagem às funções exponenciais e logarítmicas feitas em algumas obras usadas nas escolas do estado do Rio de Janeiro e apresentamos os linhamentos que a BNCC dá em relação ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas e às estratégias que usamos na criação da trilha pedagógica.

Palavras-chaves: ensino de matemática. funções exponenciais. modelagem matemática. aposentadoria.

Abstract

A major problem in Brazilian mathematics education is the gap between the curricular content and the reality experienced by students. This incongruity have a negative impact on academic performance and it produces a negative perception of the subject. In some cases, it leads some students to experience anxiety and fear. The transmission of knowledge based only on memorizing formulas contributes to maintaining this situation. The common national curriculum base (BNCC by its name in portuguese) and the National Education Guidelines and Bases Law (LDB by its name in portuguese) highlight the importance of an educational process that prepares students for life outside the school environment, developing skills far beyond what is necessary just to solve mathematical problems. In this sense, mathematical modeling appears as one of the most important strategies through which mathematics can be brought back into everyday situations, helping students understand its relevance in their lives.

Our goal is to introduce mathematical concepts through problem situations that are part of students' practical lives. Unlike the approach taken in books, in general, which establishes relationships between families of functions and a wide variety of small independent and unrelated problems, in this work we present exponential and logarithmic functions using a single subject as a guiding thread, retirement. This subject is relevant and rich in problem situations that can be understood using mathematical modeling. The dissertation, through a pedagogical path, which integrates mathematical modeling with the teaching of exponential and logarithmic functions, proposes activities through which learning is contextualized, establishing a connection between mathematical concepts and real-life situations. Using situations related to the job market, such as social security contributions and salary estimates, this sequence of activities, in addition to making students understand some fundamental concepts of the functions, also presents financial ideas that are highly relevant to students' lives after secondary education and entry into the job market.

We also analyze the approach to exponential and logarithmic functions made in some works used in schools in the state of Rio de Janeiro. We present the guidelines that the BNCC gives in relation to the teaching of exponential and logarithmic functions and in relation to the strategies we use in the pedagogical trail.

Key-words: mathematics teaching. exponential functions. mathematical modeling. retirement.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CDB	Certificado de Depósito Bancário
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
CVM	Comissão de Valores Mobiliários
ETF	Exchange Traded Fund
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatistica
INSS	Instituto Nacional de Seguridad Social
IPCA	Índice de Preços ao Consumidor Amplo
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional
RGPS	Regime Geral de Previdência Social
RPPS	Regime Próprio de Previdência Social
SEEDUC-RJ	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro

Sumário

1 Introdução

No Brasil, o ensino de matemática tem sido um tema de debate constante, principalmente devido ao distanciamento percebido entre o conteúdo ensinado nas salas de aula e a realidade dos educandos. Essa disparidade não apenas afeta o desempenho dos estudantes, mas também influencia diretamente na percepção e na relação que eles desenvolvem com a disciplina ao longo de suas vidas acadêmicas e até mesmo profissionais. Este trabalho se propõe a explorar possíveis estratégias para mitigar esse distanciamento, visando contribuir para a melhoria do ensino de matemática no contexto brasileiro.

Além da dificuldade na aprendizagem, outra barreira significativa é a percepção negativa que muitos alunos têm em relação à matemática. Muitos estudantes enfrentam ansiedade e medo em relação à disciplina, o que pode ser exacerbado por métodos de ensino tradicionais que enfatizam a memorização de fórmulas em vez de explorar conceitos e aplicações práticas. Conforme argumenta Carol Dweck, psicóloga conhecida por seu trabalho sobre mentalidade de crescimento, “A crença de que habilidades matemáticas são fixas e inatas pode levar os alunos a desistirem mais facilmente diante de desafios. É crucial promover uma mentalidade de crescimento que enfatize o esforço e a persistência”(DWECK, 2006).

Outro desafio importante é a adequação do currículo de matemática às demandas de um mundo em constante mudança. Com os avanços tecnológicos e a globalização, as habilidades matemáticas necessárias no mercado de trabalho estão evoluindo rapidamente. Conforme apontado por Andreas Schleicher, diretor de Educação da OCDE, “O ensino de matemática deve preparar os alunos não apenas para resolver problemas do presente, mas também para enfrentar desafios futuros desconhecidos. Isso requer um currículo flexível e dinâmico”(SCHLEICHER, 2019). Portanto, há uma necessidade crescente de integrar tecnologia e pensamento crítico no ensino de matemática para preparar os estudantes para os desafios do século XXI.

Ao nos depararmos com os desafios educacionais modernos, percebemos a dissociação entre o conteúdo a ser ensinado e a realidade do educando. Nesse ponto, no decorrer da trajetória escolar do discente, é percebido o aumento do abismo entre as vivências no ambiente escolar e fora deste.

Segundo Paulo Freire, o ensino de matemática deve ser contextualizado e relacionado com a vida dos alunos para que eles percebam sua importância prática: “É fundamental estabelecer conexões entre o conteúdo matemático e as experiências de vida dos estudantes para tornar o aprendizado significativo”(FREIRE, 1987). Este princípio destaca a necessidade de um ensino que não apenas transmita fórmulas e procedimentos, mas que também estimule a reflexão e a aplicação dos conceitos matemáticos em situações do cotidiano.

Durante toda a minha experiência profissional, 12 anos como professor particular e de preparação para concursos públicos e 4 anos como professor da rede pública, pude perceber a grande dificuldade dos alunos de entenderem os conceitos matemáticos, em especial as funções exponencial e logarítmica. Durante esse período, também ficou nítida a falta de perspectiva profissional e desconhecimento da realidade do mercado de trabalho por parte de um grande número de alunos. Portanto, a partir de vivências próprias e estatísticas educacionais disponíveis, surge a idéia da construção do modelo de ensino das funções exponenciais e logarítmicas, através dos cálculos previdenciários e da realidade do mercado de trabalho.

Neste trabalho de conclusão de curso, temos como objetivo apresentar alternativas pedagógicas, usando a modelagem matemática como método de ensino. Através de uma trilha pedagógica, vamos apresentar ao aluno as funções exponenciais e logarítmicas, algumas de suas propriedades, o comportamento do gráfico da função e sua presença no cotidiano. Utilizando como base para nosso modelo, apresentaremos os cálculos previdenciários, de evolução salarial e de alternativas financeiras para a manutenção da qualidade e do estilo de vida do trabalhador após a aposentadoria. Logo, além do conhecimento matemático acerca das funções estudadas, os alunos serão apresentados durante a realização das atividades, ao funcionamento do mercado de trabalho e sistema de aposentadoria brasileiro.

A trilha foi pensada para alunos do ensino médio, pois é no ensino médio onde o estudo de funções exponenciais e logarítmicas é formalizado e estes alunos já se encontram mais próximos ao ingresso no mercado de trabalho. Mas vale a pena resaltar que a trilha pode ser usada com alunos do ensino fundamental, pois a trilha é útil também para oferecer ao aluno o primeiro contato com as funções exponenciais e logarítmicas, além de que são necessários apenas conhecimentos básicos para a realização das atividades.

A fim de mensurar os resultados da trilha pedagógica elaborada neste trabalho, será aplicado aos alunos das turmas, antes e após realização das atividades, um questionário acerca dos conhecimentos sobre funções exponenciais e logarítmicas. Para além, também será avaliada, na perspectiva dos alunos, a pertinência da temática das questões nas suas vidas, não somente no contexto escolar.

Em suma, enfrentar os desafios do ensino de matemática na atualidade exige um compromisso contínuo com a inovação pedagógica, a inclusão educacional e o desenvolvimento profissional dos professores. Através de abordagens que valorizem a contextualização, a personalização e a aplicação prática dos conceitos matemáticos, é possível não apenas melhorar o aprendizado dos alunos, mas também prepará-los de forma mais eficaz para os desafios e oportunidades do mundo moderno.

1.1 Modelagem matemática

Um dos grandes desafios do processo de ensino aprendizagem da matemática consiste no distanciamento entre as vivências dos alunos e a teoria da sala de aula. Quantos professores já não ouviram frases como: "para que aprender isso?", "eu nunca vou usar isso.", "eu sou de humanas, só preciso saber somar, subtrair, multiplicar e dividir" e etc. O ensino de matemática, assim como o de física e química, já partem de um ponto de maior resistência em relação a outras áreas. Desta maneira, a modelagem matemática surge a fim de re-aproximar conceitos abstratos, da realidade de quem os está aprendendo. Segundo Bassanezi, "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2006), p.16.

A modelagem matemática consegue ir além do processo de ensino aprendizagem de solucionar problemas. Criando um ambiente contextualizado, onde se faz presente o uso prático da matemática no mundo real. Ao unir conceitos matemáticos às diversas situações do cotidiano, a modelagem tornou-se uma ferramenta de conexão entre teoria e prática, auxiliando de maneira significativa na compreensão dos conceitos matemáticos e incentivando o raciocínio crítico. "A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la." (BASSANEZI, 2006), p.17.

De acordo com Bassanezi, a modelagem matemática segue um passo a passo, onde a análise científica e prática se alinham num processo dinâmico de investigação a fim de solucionar um problema real. Podemos observar o passo a passo do processo na figura 1.

Como podemos observar na imagem, a partir de um problema não matemático, é desencadeado todo o processo de desenvolvimento de um modelo matemático a fim de determinar uma solução válida para o problema inicial. Em (BASSANEZI, 2006) são descritas cada uma das etapas do processo de modelagem. Essas etapas são:

- Experimentação: A experimentação é uma atividade predominantemente laboratorial que facilita a coleta de dados. Os métodos experimentais são geralmente determinados pela origem do experimento e pelo objetivo da pesquisa.
- Abstração: A abstração é responsável por levar a criação do modelo matemático. É durante o processo de abstração que:
  - São selecionadas as variáveis pertinentes à pesquisa.
  - É feita a problematização e formulação dos problemas teóricos.
  - Formulam-se hipóteses.

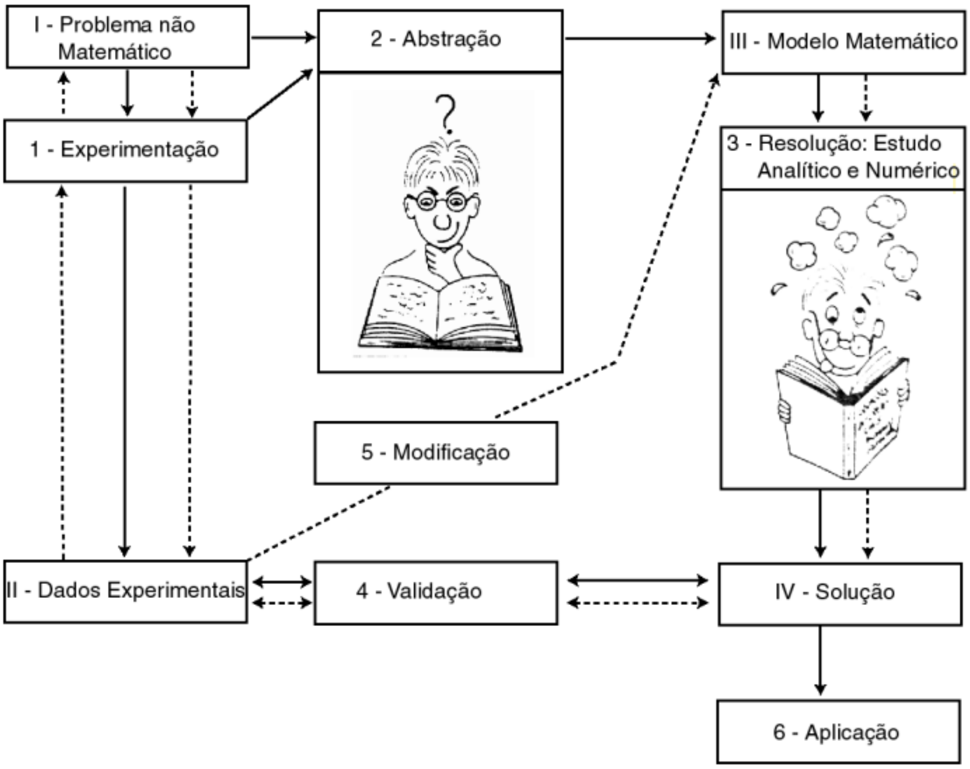


Figura 1 – Esquematização do processo de modelagem. Fonte: (BASSANEZI, 2006).

  – Também ocorre a simplificação. Pois, quando considerados todos os detalhes do estudo matemático, tal conteúdo tornasse excessivamente complexo.

- Resolução: Sempre ligada ao grau de complexidade do modelo, a resolução muitas vezes só é viável através do uso de recursos computacionais. Esta atividade é própria do matemático.

- Validação: Durante a validação o modelo e suas hipóteses são confrontados com dados empíricos, a fim de alcançar a aceitação ou não.

- Modificação: Nesta etapa, o modelo sofre ajuste. Essa necessidade surge por inúmeras possibilidades como simplificação demasiada, erros na obtenção de informações, entre outros.

Para além, Bassanezi estabelece dois tipos de modelo:

- Modelo Objeto: é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de um modelo objeto; Um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo.

- Modelo teórico: é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

A partir dos modelos estabelecidos, o autor ainda propõe quatro classificações para o modelo matemático em si, levando em consideração o 'tipo de matemática' utilizada. As classificações são:

i) Linear ou não-linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;

ii) Estático ou Dinâmico, conforme apresente dependência ou não do tempo, respectivamente.

iii) Educacional ou aplicativo. O primeiro é baseado em um número pequeno ou simples de suposições. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo típico de tais modelos. O método empregado por tais modelos envolve a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. Geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequado para se fazer previsões. A importância destes modelos está na aquisição de experiência e no fornecimento de ideias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada. O modelo aplicativo é baseado em hipóteses realistas e, geralmente, envolve relações entre muitas variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com parâmetros. Neste caso, são preferidos métodos computacionais para obter as soluções, pois os métodos analíticos podem ser inviáveis. Quanto mais complexo for o modelo, mais difícil será mostrar que ele de fato representa fielmente a situação modelada.

iv) Estocástico ou Determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações.

Na sequência de atividades que vamos apresentar, usando modelagem matemática, podemos classificar os modelos que usaremos como educacionais. Não pretendemos fazer um modelo que se ajuste exatamente à realidade. Não estamos levando em consideração todas as variáveis que afetam o problema sob estudo. Por exemplo, no modelo que vamos estabelecer, o salário de um trabalhador aumenta anualmente o mesmo percentual. As últimas etapas no processo de modelagem formuladas por Bassanezi, validação e modificação, não vão ser desenvolvidas no processo de modelagem proposto nas atividades. Isto é uma característica comum dos processos de modelagem matemática usados no ensino. Nosso interesse é apresentar um primeiro passo na compreensão do funcionamento da aposentadoria e de assuntos relacionados. Sendo assuntos complexos, isto seria impossível sem assumir hipóteses simplificadas.

Em seu livro, Bassanezi lista alguns pontos de destaque em relação à relevância da modelagem matemática quando utilizada como instrumento de pesquisa. Entre os pontos destacados, é citado a possibilidade da modelagem ser utilizada como recurso para melhor entendimento da realidade.

Durante a prática docente, muitos alunos questionam onde será aplicado, durante suas vidas, o conhecimento que está sendo apresentado durante as aulas de matemática. Deste ponto, podemos observar que quanto mais distanciada a prática educacional da realidade do educando, maior se torna a barreira imposta pela realidade ao processo de ensino aprendizagem. Munindo-se da modelagem, não apenas professores de matemática, como professores de outras disciplinas como física e química, conseguem aproximar sua prática da realidade daqueles que serão impactados pela mesma.

1.2 Modelagem matemática na BNCC

Segundo a BNCC, a matemática deve ir além da resolução de problemas, onde, a partir do Ensino fundamental temos como competência específica do ensino da matemática:

> “5. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental.”

E para o ensino médio:

> “3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. ”

A BNCC também traz a modelagem matemática em suas habilidades a serem desenvolvidas desde os primeiros anos do ensino fundamental até o último ano do ensino médio. Alguns exemplos de habilidades a serem desenvolvidas:

(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Figura 2 – Habilidade do ensino fundamental, BNCC. Fonte: (BRASIL, 2018).

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Figura 3 – Habilidade do ensino médio, BNCC. Fonte: (BRASIL, 2018).

A modelagem matemática, ao integrar a matemática com situações reais e do cotidiano dos estudantes, proporciona uma série de benefícios para o processo de ensino e aprendizagem. Ao invés de apresentar a matemática como um conjunto de fórmulas e regras abstractas, a modelagem a torna uma ferramenta útil para compreender e resolver problemas do mundo real. Isso desperta o interesse dos alunos, tornando as aulas mais dinâmicas e significativas. Através da modelagem, os estudantes desenvolvem habilidades como a resolução de problemas, o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de trabalhar em equipe.

Além disso, a modelagem matemática contribui para a interdisciplinaridade, conectando a matemática com outras áreas do conhecimento, como ciências, geografia e história. Ao modelar fenômenos naturais, sociais ou econômicos, os alunos compreendem a importância da matemática para interpretar e explicar o mundo ao seu redor. A modelagem também permite que os estudantes vivenciem o processo de investigação científica, desde a formulação de perguntas até a validação de modelos, desenvolvendo assim um pensamento mais científico e crítico.

Podemos concluir, que, muito mais do apenas uma ferramenta disponível ao professor, a modelagem matemática é colocada como objetivos a serem alcançados em todos os níveis da educação básica brasileira.

1.3 Organização do trabalho

No capítulo 2 vamos explicar quais são as competências e habilidades, segundo a BNCC, relacionadas com o ensino das funções exponenciais e logarítmicas. A apresentação rigorosa destas famílias de funções, explicando as suas principais propriedades e mostrando os teoremas de caracterização delas, são o conteúdo do capítulo 3. No capítulo 4, consideramos quatro livros usados no ensino de matemática nas escolas do estado do Rio de Janeiro. Analisamos eles segundo as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas, segundo a BNCC, no ensino das funções exponenciais e logarítmicas. No capítulo 5 explicamos um pouco como funciona o regime geral da previdência social, deixando claras as diferenças entre antes e depois de 2019, quando foi aprovada a Emenda Constitucional 103. Nas seções 5.5 e 5.6 falamos da importância do planejamento financeiro e dos investimentos, em particular dos tipos de investimento que vamos usar nas atividades da sequência didática.

A trilha pedagógica que elaboramos sobre o assunto da aposentadoria é o assunto do capítulo 6. A trilha está dividida em aulas, em cada aula é abordado um assunto e aparecem um certo número de questões, que são as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos. Apresentamos também sugestões para os professores, que julgamos necessárias na aplicação das atividades.

Finalmente no apêndice A, aparece o formulário de avaliação que elaboramos para medir o impacto da aplicação da trilha pedagógica; algumas tabelas que usamos na aplicação de determinadas questões das atividades; e finalmente na seção A.3 temos os resultados da aplicação do formulário de avaliação para alunos da Escola Estadual Dr. Adino Xavier, em São Gonçalo.

2 Funções exponenciais e a BNCC

A BNCC é categorizada em competências e, em cada uma das competências estabelecidas são enumeradas suas habilidades específicas a serem desenvolvidas em cada um dos níveis educacionais.

Todas as habilidades e objetivos de aprendizagem estabelecidos na BNCC são representados por códigos formados por 5 letras e cinco números. Tais caracteres indicam as etapas educacionais (educação infantil - EI, ensino fundamental - EF e ensino médio - EM), a série a ser desenvolvida ou alçado tal habilidade ou objetivo, área ou componente curricular e etc.

Interpretando os códigos caracterizadores das habilidades estabelecidas pela base nacional comum curricular, tomemos como exemplo **EM13LGG103:**

- O primeiro par de letras **EM** indica a etapa de Ensino Médio;
- O primeiro par de números: **13**, indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos;
- A segunda sequência de letras: **LGG**, indica a área ou o componente curricular representado pelo pelo primeiro par de letras (EM):
    a) LGG = Linguagens e suas Tecnologias
    b) LP = Língua Portuguesa
    c) MAT = Matemática e suas Tecnologias
    d) CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias
    e) CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
- Os números finais: **103**, indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (que corresponde ao 1º número: 1) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números: 03).

As funções exponenciais e logaritmicas tem suas habilidades relacionadas as competencias específicas 3, 4 e 5. Desta maneira, referente a disciplina de matemática, as habilidades associadas ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas a serem trabalhadas durante o ensino médio estão nas figuras 4, 5 e 6.

Tendo em vista que um dos objetivos do nosso trabalho é construir e aplicar uma trilha pedagógica para turmas do ensino médio no estado do Rio de Janeiro, levaremos em consideração o currículo elaborado pela respectiva secretaria de educação (SEEDUC-RJ). Assim, temos na tabela 1, o currículo estabelecido a partir da BNCC:

Tabela 1 – Tabela de habilidades e competências pela SEEDUC-RJ, Fonte: (SEEDUC-RJ, 2022)

Competência específica	**Habilidade**	**Habilidade específica**	**Objetos de conhecimento**
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.	EM13MAT304.RJ01 - Compreender o crescimento das funções exponenciais, através do estudo do gráfico.	Gráfico da função exponencial.
		EM13MAT304.RJ02 - Identificar a função exponencial presente na natureza e nos mais diversos campos de pesquisas científicas. (Biologia, Química, Engenharias, medicina e etc.).	Função exponencial.
		EM13MAT304.RJ03 - Perceber o crescimento rápido da função exponencial em problemas que envolvem populações das nações, por exemplo.	Comportamento da função exponencial.
		EM13MAT304.RJ04 - Identificar que a função exponencial expressa juros compostos.	Função exponencial: juros compostos

Continuação da tabela 1

Competência específica	**Habilidade**	**Habilidade específica**	**Objetos de conhecimento**
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	EM13MAT403 Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.	EM13MAT403.RJ01 - Identificar domínio, imagem, crescimento e decrescimento das funções exponenciais e logarítmicas através de gráficos e associá-las a problemas em diversas áreas de conhecimento (Física, Química e etc.). EM13MAT403.RJ02 - Entender o conceito de função inversa ja que as funções logarítmicas e exponenciais se comportam de maneira inversa. EM13MAT403.RJ03 - Entender que as funções exponenciais e logarítmicas têm domínios distintos na construção de seus gráficos.	Gráfico da função exponencial e logarítmica. Funções inversas: exponencial e logarítmica. Gráfico de funções: exponencial e logarítmica.

Fim da tabela

Aparentemente, a habilidade **M13MAT305**, constante na BNCC, foi esquecida, excluída ou subentendida, durante a elaboração do currículo referencial do Estado do Rio de Janeiro.

Outra peculiaridade do currículo referencial elaborado pela secretaria de educação, é o fato de estabelecer para o 1° ano do ensino médio, o desenvolvimento da competência específica 5. Porém, as habilidades a serem trabalhadas, pertencem a competência específica 4.

Este referencial estabelece que as habilidades apresentadas devem ser desenvolvidas em turmas do primeiro ano do ensino médio regular, no decorrer do 4° bimestre do ano letivo corrente.

(EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Figura 4 – Habilidades relacionadas às funções exponencial e logaritmo, (a), BNCC. Fonte: (BRASIL, 2018).

(EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.

Figura 5 – Habilidades relacionadas às funções exponencial e logaritmo, (b), BNCC. Fonte: (BRASIL, 2018).

(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Figura 6 – Habilidades relacionadas às funções exponencial e logaritmo, (c), BNCC. Fonte: (BRASIL, 2018).

3 Funções exponenciais e logarítmicas

As famílias de funções afins, quadráticas, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são apresentadas e estudadas nas disciplinas de matemática no ensino fundamental e médio. Algumas destas famílias têm caracterizações muito importantes, que são também propriedades que podem ser usadas para introduzir de uma maneira mais natural este tipo de funções. Por exemplo, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monótona e injetiva, tal que os acréscimos $f(x+h) - f(x)$ dependem apenas de h (para todo $x, h \in \mathbb{R}$) tem que ser uma função afím. Agora, se queremos que o acréscimo relativo $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$ dependa apenas de h, temos uma função *exponencial*.

É importante observar que para a escrita deste capítulo, usamos como referência básica os livros (LIMA et al., 2006) e (LIMA, 2014).

3.1 Função exponencial

As funções exponenciais aparecem na modelagem matemática de problemas que aparecem em diversas áreas do conhecimento; no crescimento/decrescimento populacional, no decaimento radioativo, na capitalização por juros compostos, etc. Na sequência de atividades que vamos propor a função exponencial vai aparecer no cálculo de aumentos de salários, contribuições para o INSS e valores da aposentadoria.

Consideramos um número real $a > 0$. Para definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, vamos proceder, como é feito tradicionalmente, primeiro definindo no caso em que $x \in \mathbb{N}$, logo para $x \in \mathbb{Z}$, a seguir quando $x \in \mathbb{Q}$, e finalmente definir para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Como queremos definir $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, não podemos considerar como base um número $a < 0$, pois neste caso não poderíamos definir $a^{1/2}$, por exemplo.

3.2 Expoentes naturais

Podemos definir de maneira indutiva, colocando $a^1 = a$ e

$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Isto significa que a^n é o produto de n fatores iguais a a. Para $n, m \in \mathbb{N}$, temos que

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

pois em ambos lados da igualdade vamos ter $n + m$ fatores iguais a a.

Para $m \in \mathbb{N}$ fixo, temos que $(a^m)^1 = a^m$. Assumindo como hipótese de indução que $(a^m)^n = a^{mn}$, temos que

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

A sequência $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ vai ser sempre monótona. De fato, no caso em que $0 < a < 1$, multiplicando esta desigualdade por a, temos que $a^2 < a$. Multiplicando esta última desigualdade por a, temos que $a^3 < a^2$. Repetindo este argumento, podemos provar que $a > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \ldots$.

No caso em que $a = 1$, temos que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência é constante. No caso em que $a > 1$, multiplicando esta desigualdade por a, temos que $a^2 > a$. Repetindo este argumento, podemos provar que vale a desigualdade $a < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \ldots$.

Portanto a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a^n$ é decrescente se $0 < a < 1$ e crescente se $a > 1$.

3.3 Expoentes inteiros

Queremos definir a^n para $n \in \mathbb{Z}$, de maneira a termos ainda a propriedade $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ para $m, n \in \mathbb{Z}$. Temos que definir $a^0 = 1$. Esta definição é a única possível pois $a = a^{0+1} = a^0 \cdot a$. A seguir, para definir a^{-n}, com $n \in \mathbb{N}$, usamos que

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}.$$

Então precisamos definir para $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se algum de vocês assina primeiro A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a^n$ mantém as mesmas propriedades de monotonicidade do que a função restrita ao conjunto dos números naturais. Se $0 < a < 1$, a função é decrescente e se $a > 1$, a função é crescente. Consideremos o caso $a > 1$; a prova no caso $0 < a < 1$ é análoga. Sejam $n, m \in \mathbb{Z}$, com $n < m < 0$, temos que $0 < -m < -n$, então $a^{-m} < a^{-n}$. Assim, $\dfrac{1}{a^{-n}} < \dfrac{1}{a^{-m}}$. Isto implica que $a^n < a^m$. Por outro lado, sabemos que $1 < a < a^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e assim $\dfrac{1}{a^n} < 1$. Então, se $m < 0 \leq n$, $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}} < 1 \leq a^n$. Provamos assim que a função $f(n) = a^n$, para $n \in \mathbb{Z}$, é crescente quando $a > 1$.

3.4 Expoentes racionais

O nosso objetivo é manter ainda a propriedade: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Se $r = \dfrac{m}{n}$, então $rn = m$ e

$$(a^r)^n = a^{rn} = a^m.$$

Logo devemos definir

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

A definição não é ambígua, pois considerando $p \in \mathbb{N}$, temos que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{mp}{np}$. Definindo $z = \sqrt[np]{a^{mp}}$ e $y = \sqrt[n]{a^m}$, vale que

$$y^n = a^m \implies y^{np} = a^{mp} \implies z = y.$$

Por outro lado, temos que $a^{p/q} \cdot a^{r/s} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$. Assim

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}}.$$

Proposição 3.1. *A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(r) = a^r$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.*

Demonstração. Vamos provar no caso $a > 1$, a prova no caso $0 < a < 1$ é análoga. Suponha que $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Então

$$\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2} < \frac{m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Logo $m_1 n_2 < m_2 n_1$, o que implica que $a^{m_1 n_2} < a^{m_2 n_1}$, pois $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é crescente. Desta última desigualdade podemos concluir que

$$\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} < \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1}}.$$

□

3.5 Definição e propriedades da função exponencial

Falta definir a^x para um número irracional x. Vamos fazer no caso $a > 1$, o caso $0 < a < 1$ é análogo. Lembremos que para $r < x < s$, com r, s racionais, temos $a^r < a^s$. Podemos definir então a^x como sendo o número real, que é aproximando por baixo por a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$ e que é aproximado por cima por a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Precisamos provar que existe um único número com esta propriedade.

Proposição 3.2. *Suponhamos $a > 1$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que*

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \implies a^r < \alpha \leq \beta < a^s$$

então $\alpha = \beta$.

Demonstração. Se $\alpha \neq \beta$, então não pode existir $t \in \mathbb{Q}$ tal que $a^t \in (\alpha, \beta)$. Vamos provar que isto é uma contradição. Ou seja, vamos mostrar a seguinte afirmação:

Para qualquer intervalo (α, β), com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $a^t \in (\alpha, \beta)$.

Se $\alpha < 1 < \beta$, podemos considerar $t = 0$. Vamos mostrar no caso em que $1 < \alpha < \beta$. Temos que a sequência $(a^n)_n$ não é limitada, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta < a^M$. Agora, sendo $1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M} > 1$, a sequência $\left(\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n\right)_n$ também não é limitada, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 < a < \left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^N$. Assim

$$a^{\frac{1}{N}} < 1 + \frac{\beta-\alpha}{a^M},$$

e então

$$a^M(a^{\frac{1}{N}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Portanto, se para $m \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{m}{N} \leq M$, vale que

$$a^{\frac{m+1}{N}} - a^{\frac{m}{N}} = a^{\frac{m}{N}}(a^{\frac{1}{N}} - 1) \leq a^M(a^{\frac{1}{N}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Isto implica que todos os intervalos $[a^{\frac{m}{N}}, a^{\frac{m+1}{N}}]$, com $0 \leq m \leq NM - 1$, têm comprimento menor ou igual a $\beta - \alpha$. Como a união destes intervalos cobre $(1, a^M)$ e $(\alpha, \beta) \subset (1, a^M)$, existe m tal que $a^{\frac{m}{N}} \in (\alpha, \beta)$.

Para provar no caso em que $\alpha < \beta < 1$, basta usar a prova anterior considerando o intervalo $(1/\beta, 1/\alpha)$. $\square$

Isto termina a definição da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, com $a > 0, a \neq 1$. As propriedades que usamos no caminho para definir esta função nos subconjuntos de $\mathbb{R}$, ainda são válidas para a função definida na reta inteira. Isto é,

Proposição 3.3. *Para $a > 0, a \neq 1$, a* função exponencial de base *a, $f(x) = a^x$, tem as seguintes propriedades:*

1. *$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*
2. *$f(1) = a$.*
3. *f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.*

Além disso, valem as propriedades

4. *f é contínua.*
5. *A imagem de f é $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.*

Demonstração de 4). Supondo que f é contínua em 0, podemos provar que é contínua em x_0, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato, temos que

$$a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Como a^{x_0} é um número fixo e $a^h - 1$ vai para o 0 quando h vai para 0 (pois a^x é contínua em 0), temos que $a^{x_0+h} - a^{x_0} \to 0$, quando $h \to 0$. Logo f é contínua em x_0.

Falta verificar a continuidade em $x = 0$. Suponhamos que $a > 1$, o outro caso é análogo. Fixemos $\epsilon > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$. Se $a < 1 + n\epsilon$ então $a < (1+\epsilon)^n$. Logo $a^{1/n} < 1 + \epsilon$. Assim,

- se $0 < h < 1/n$, então $1 < a^h < 1 + \epsilon$.
- se $-1/n < h < 0$, então $0 < -h < 1/n$. Logo $1 < a^{-h} < 1+\epsilon$. Assim, $\dfrac{1}{1+\epsilon} < a^h < 1$.

Para termos $a < 1 + n\epsilon$, basta pegar $n > \dfrac{a-1}{\epsilon}$. Escolhido n, provamos acima que se $|h| < 1/n$, então $|a^h - 1| < \epsilon$. □

Demonstração de 5). Queremos provar que dado $y \in (0, \infty)$, existe $x_y \in \mathbb{R}$, tal que $a^{x_y} = y$. Na demonstração da proposição 3.2, provamos que dado qualquer intervalo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $a^t \in (\alpha, \beta)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos o intervalo $\left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)$. Consideramos também os intervalos $(y-2, y-1)$ e $(y+1, y+2)$. Então, existem $z, r_n, w \in \mathbb{Q}$ tais que $a^z \in (y-2, y-1)$, $a^{r_n} \in \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)$, $a^w \in (y+1, y+2)$. Portanto temos que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y, \qquad \text{e} \qquad a^z < a^{r_n} < a^w \text{ para todo } n$$

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente (estamos supondo $a > 1$), podemos concluir que $z < r_n < w$ para todo n. Assim a sequência (r_n) é limitada. Considerando uma subsequência se for necessário, podemos assumir que a sequência (r_n) é convergente. Suponhamos que $\lim r_n = x_y$. Pela continuidade de $f(x) = a^x$, $\lim a^{r_n} = a^{x_y}$. Assim $a^{x_y} = y$. □

3.6 Caracterização da Função Exponencial

Vimos já quando fomos definindo a função exponencial nos subconjuntos da reta $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, que a propriedade fundamental a ser preservada passando de um subconjunto para o subconjunto maior era $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Vamos ver esta propriedade caracteriza completamente as funções exponenciais, isto é, não tem funções diferentes à exponencial verificando a propriedade.

Teorema 3.4. *Seja uma função monótona crescente (ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ $(a = f(1))$*;*
2. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

3. *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$;*

Demonstração. 1) $\implies$ 2) é imediato.

2) $\implies$ 3). Seja $x \in \mathbb{R}$. Provemos primeiro para $n \in \mathbb{N}$, por indução. A condição 2) implica que $f(2x) = f(x+x) = f(x)^2$. Suponhamos que para $n \in \mathbb{N}$, vale $f(nx) = f(x)^n$. Provemos para $n+1$. Pela condição 2) e a hipótese de indução,

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) \cdot f(x) = f(x)^n \cdot f(x) = f(x)^{n+1}.$$

Agora, usando 2), temos que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Se $f(0) \neq 0$, então $f(0) = 1$. Se $f(0) = 0$, então $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a condição $f(0) = 0$ implica que f é constante igual a 0. Como estamos supondo que f é crescente, isto é uma contradição. Logo, vale que $f(0) = 1$. Então

$$f(0 \cdot x) = f(0) = 1 = f(x)^0$$

Portanto, 3) vale também para $n = 0$.

Finalmente, usando novamente 2), para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$1 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) \cdot f(-nx)$$

Isto implica que $f(-nx) = \dfrac{1}{f(nx)}$. Usando esta igualdade e o provado para $n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = \dfrac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$. Isto termina a prova de 3).

3) $\implies$ 1). Usando 3), $f(n) = f(n \cdot 1) = f(1)^n$. Definindo $a = f(1)$, temos que $f(n) = a^n$ para $n \in \mathbb{Z}$. Novamente usando 3) temos para $m \in \mathbb{Z}$,

$$a = f(1) = f\left(\frac{m}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

Então $f\left(\dfrac{1}{m}\right) = a^{\frac{1}{m}}$. Usando novamente 3) e o já provado, $f\left(\dfrac{n}{m}\right) = f\left(\dfrac{1}{m}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$. Isto mostra que para $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = a^r$. Vamos supor que f seja crescente (a prova no caso f decrescente é análoga). Então $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos por contradição que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq a^{x_0}$. Se $f(x_0) < a^{x_0}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x_0) < a^r < a^{x_0}$ (isto é justamente a afirmação contida na demonstração da proposição 3.2). Como $f(x)$ é crescente, então $x_0 < r$. Mas isto implica que $a^{x_0} < a^r$, pois a função a^x também é crescente. Isto é uma contradição! Portanto para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Supondo $f(x_0) > a^{x_0}$, a prova é completamente análoga. □

3.7 Logaritmos

Estudamos várias propriedades das funções exponencias. Vimos, por exemplo (Proposição 3.3.3), que são funções injetivas. Isto implica que podemos definir a função inversa de uma função exponencial. Esta função inversa está definida em $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ (Proposição 3.3.5). Sendo $f(x) = a^x$, a função inversa $g = f^{-1}$ deve verificar as condições

$$\begin{aligned} g(a^x) &= x \quad \text{ para todo } x \in \mathbb{R}; \\ a^{g(x)} &= x \quad \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

As propriedades das funções exponenciais se traduzem em propriedades das suas funções inversas. Por exemplo $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ implica que a função inversa g satisfaz a propriedade $g(xy) = g(x) + g(y)$. Ainda mais, da mesma maneira que a propriedade $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ (para todo x, y) caracteriza as funções exponenciais (ver teorema 3.4), a propriedade $g(xy) = g(x) + g(y)$ (para todo x, y) caracteriza as suas funções inversas.

Teorema 3.5. *Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe $a > 0, a \neq 1$, tal que $g(x)$ é a função inversa de $f(x) = a^x$.*

2. *$g(xy) = g(x) + g(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração do Teorema 3.5: 1) $\implies$ 2). Se $g(x)$ é a inversa de $f(x) = a^x$, então vale o seguinte

$$g(a^x) = x \quad \text{ para todo } \; x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Agora, sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Existem $z, w \in \mathbb{R}$ tais que $a^z = x$ e $a^w = y$. Usando (3.1), concluimos que vale o seguinte

$$g(xy) = g(a^z a^w) = g(a^{z+w}) = z + w = g(a^z) + g(a^w) = g(x) + g(y).$$

2) $\implies$ 1). Vamos provar no caso em que g é crescente; o outro caso é análogo. Usando 2), temos que $g(x) = g(x \cdot 1) = g(x) + g(1)$ para todo x, logo $g(1) = 0$. Como $g(x)$ é crescente, $g(2) > 0$. Definimos a função $h(x) = \frac{g(x)}{g(2)}$. Obviamente $h(1) = 0$ e $h(2) = 1$. Temos que $h(x)$ também é crescente e verifica a condição $h(xy) = h(x) + h(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. A função $H(x) = h(2^x)$ é crescente. Queremos provar que $H(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando 2), para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale que

$$H(x + y) = h(2^{x+y}) = h(2^x \cdot 2^y) = h(2^x) + h(2^y) = H(x) + H(y).$$

Pela teorema fundamental da proporcionalidade ((LIMA, 2014), teorema 5.8), isto implica que $H(x) = H(1)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $H(1) = 1$, então $h(2^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $g(2^x) = g(2) \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$g\left(2^{\frac{x}{g(2)}})\right) = g(2) \cdot \frac{x}{g(2)} = x.$$

Portanto $g(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = 2^{\frac{1}{g(2)}}$. Essa última afirmação, junto com a sobrejetividade de $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, implica que também vale a propriedade $a^{g(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Logo $g(x)$ é a função inversa de a^x. $\square$

As funções inversas das funções exponenciais são chamadas de *funções logarítmicas*. A notação usada é a seguinte. A função inversa de $f(x) = a^x$ é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

$\log_a(x)$ é chamado *logaritmo de x na base a*, que é exatamente o expoente ao qual deve ser elevada a base a para obter x. A função logaritmo verifica as condições

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R};$$
$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

4 Análise Bibliográfica

Neste capítulo, faremos a análise de quatro obras disponibilizadas para escolha das redes de ensino de todo o Brasil durante o PNLD (Projeto Nacional do Livro e do Material Didático). Observaremos, entre outros pontos, se as obras disponibilizadas estão de acordo com a BNCC, se conteúdos e atividades se relacionam, em algum grau, com a realidade brasileira.

4.1 Informações sobre as obras selecionadas

1. **Matemática em contextos** - Funções exponenciais, funções logarítmicas e sequências; (DANTE; VIANA, 2020).

    - *Sinopse do autor:* A obra apoia-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos princípios da educação integral e nos estudos mais recentes do processo de ensino e aprendizagem da área de Matemática e suas Tecnologias para trabalhar as competências gerais, bem como as competências específicas e as habilidades previstas para o Ensino Médio dessa área do conhecimento, promovendo a compreensão e a aplicação das principais ideias e ferramentas da Matemática de modo significativo e que possibilite aos estudantes resolver problemas do ambiente escolar e do mundo real. Recorrendo a explorações simples, intuitivas e compreensíveis dos conteúdos essenciais, os estudantes têm espaço e oportunidades diversas para serem protagonistas dos próprios processos de aprendizagem, desenvolvendo uma educação integral.
    - *Autor(es):* Luiz Roberto Dante; Fernando Viana.
    - *Editora:* Ática - 1ª edição, São Paulo, 2020.

2. **Multiversos matemática.** - Funções e suas aplicações; (SOUZA, 2020).

    - *Sinopse do autor*: Multiversos Matemática é uma coleção que favorece a transição e a consolidação das propostas do Novo Ensino Médio, pois contempla os conteúdos emergentes das habilidades indicadas na BNCC. O trabalho interdisciplinar é estimulado na obra, permitindo aos estudantes perceber a Matemática em outras áreas do conhecimento e relacionar conceitos e práticas do mundo do trabalho. Também são apresentadas propostas de trabalho coletivo e estímulo à resolução de problemas, investigação, reflexão, interpretação, argumentação, análise crítica e pensamento lógico. O desenvolvimento do pensamento computacional também é um ponto de destaque na obra: ele permeia toda a coleção e é promovido com ou sem o uso de tecnologias digitais.

- *Autor(es)*: Joamir Roberto de Souza.
- *Editora:* FTD - 1ª edição, São Paulo, 2020

3. **Prisma matemática.** - Funções e progressões; (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020).

    - *Sinopse do autor*: A coleção Prisma Matemática tem o objetivo de estimular o estudante a compreender a Matemática para utilizá-la em sua vida e na continuação dos estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo, responsável e capaz de enfrentar novos desafios. Aliada aos conteúdos matemáticos específicos, a coleção explora o uso de recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e reflete sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.
    - *Autor(es)*: José Roberto Bonjorno; José Ruy Giovanni Júnior; Paulo Roberto Câmara de Sousa
    - *Editora:* FTD. - 1ª edição, São Paulo, 2020.

4. **Matemática interligada.** - Função afim, quadrática, exponencial e logarítmica; (ANDRADE, 2020).

    - *Sinopse do autor:* A coleção se alinha à teoria sociointeracionista, valorizando aspectos históricos e culturais e posicionando os estudantes no centro do processo de aprendizagem. Para isso, os conteúdos são abordados de maneira direta, propiciando a aplicação de metodologias ativas e o desenvolvimento do protagonismo do estudante no próprio processo de aprendizagem, por meio de situações e temas interdisciplinares, contextualizados e que consideram o trabalho conjunto com outros componentes curriculares, as culturas juvenis, o mundo do trabalho, o exercício da cidadania, os projetos de vida dos estudantes e os Temas Contemporâneos Transversais. Além disso, seguindo os preceitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a coleção orienta e prioriza o desenvolvimento das competências gerais, das competências específicas e das habilidades previstas na BNCC, para que os estudantes tenham uma formação cidadã e possam tomar decisões futuras conscientes.
    - *Autor(es):* Thais Marcelle de Andrade.
    - *Editora:* Scipione - 1ª edição, São Paulo, 2020.

4.2 Sumários das obras

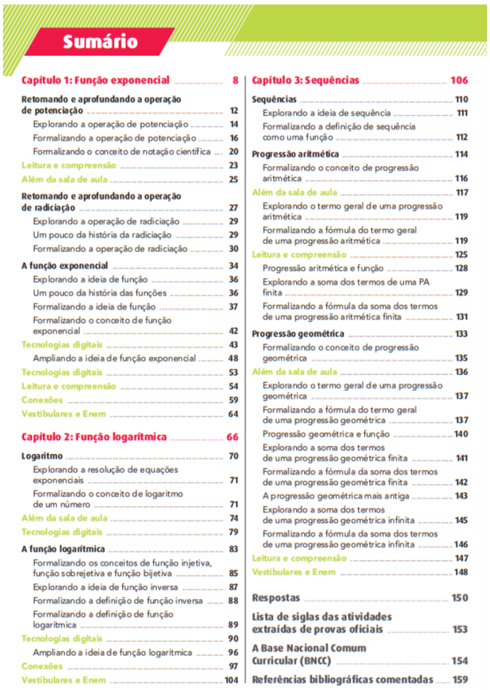


Figura 7 – Sumário de Matemática em contextos. Fonte: (DANTE; VIANA, 2020).

Figura 8 – Sumário de Multiversos matemática (a). Fonte: (SOUZA, 2020).

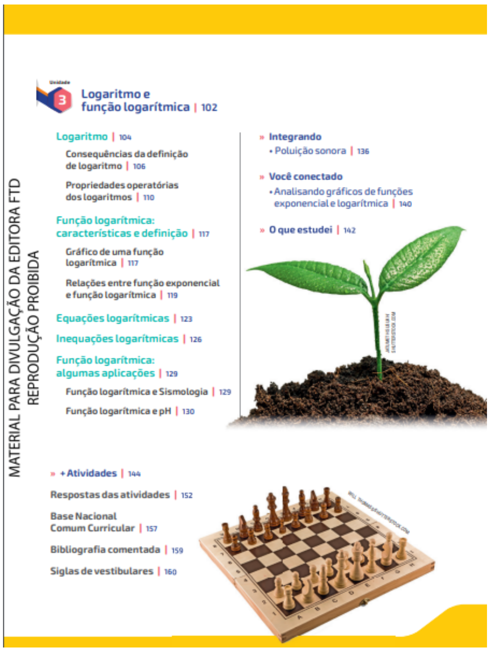


Figura 9 – Sumário de Multiversos matemática (b). Fonte: (SOUZA, 2020).

Figura 10 – Sumário de Prisma matemática (a). Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020).

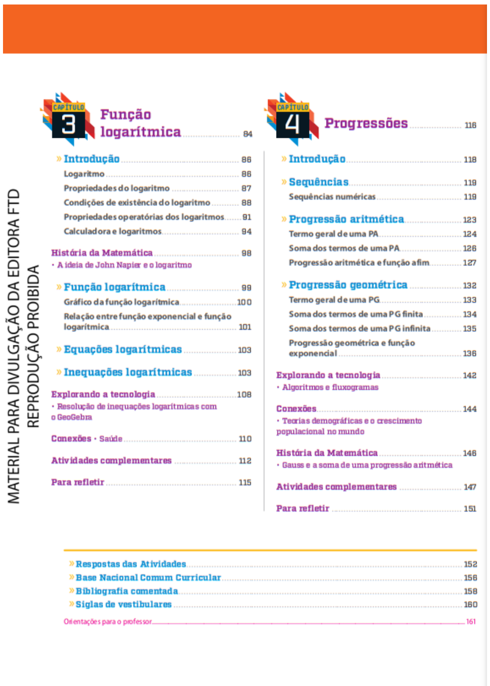


Figura 11 – Sumário de Prisma matemática (b). Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020).

Figura 12 – Sumário de Matemática interligada. Fonte: (ANDRADE, 2020).

4.3 Conteúdos, atividades e a BNCC

Ao analisarmos cada uma das obras, observamos muitos pontos em comum entre as quatro. Logo nas primeiras páginas, temos todas as obras indicando as habilidades a serem trabalhadas no capítulo. Na tabela 2, indicamos quais habilidades específicas que abordam as funções exponenciais e logarítmicas que são trabalhadas pelos livros analisados.

Tabela 2 – Habilidades nas obras selecionadas

Habilidade	Obras			
	Matemática em contextos	**Multiversos matemática**	**Prisma matemática**	**Matemática interligada**
EM13MAT303		X	X	X
EM13MAT304	X	X	X	X
EM13MAT305	X	X	X	X
EM13MAT403	X	X	X	X
EM13MAT508		X		

Além das habilidades referentes às funções exponenciais e logarítmicas, outras habilidades também são desenvolvidas. São elas EM13MAT101, EM13MAT103, EM13MAT315 entre outras.

Todas as obras iniciam o capítulo sobre funções exponenciais apresentando situações onde a função está presente. São utilizados exemplos como multiplicação celular, sistemas de medidas utilizados na informática, infecções por covid e etc. Do ponto de vista pedagógico, é muito interessante essa abordagem, pois aproxima o conteúdo do mundo real e do contexto onde o aluno está inserido.

Também no início das obras, é feito um breve resumo acerca do cálculo de potências e suas propriedades. As obras apresentam demonstrações das propriedades de potenciação, com exceção do "Prisma matemática" e "Matemática interligada". O mesmo ocorre no trecho do livro dedicado às operações e propriedades com radicais.

As obras seguem a mesma progressão de conteúdos: Cálculo de potências e radicais - notações científicas - números significativos - funções exponenciais - equações exponenciais - inequações exponenciais. Vale ressaltar que o livro didático "Matemática em contexto", durante a progressão dos conteúdos abordados em suas páginas, faz uma revisão dos conteúdos, desde cálculo de potências até funções e gráfico de funções, o que traz mais fundamentação ao iniciar o estudo das funções exponenciais.

No capítulo referente às funções logarítmicas, todas as obras também apresentam habilidades e competências a serem alcançadas e desenvolvidas no decorrer do capítulo, além de habilidades transversais à componente curricular. O livro "Matemática interligada" desenvolve no mesmo capítulo as funções exponenciais e logarítmicas, as demais obras dedicam capítulos distintos para o desenvolvimento de cada uma das funções.

Podemos observar nas figuras 13, 14, 15 e 16, alguns exemplos de atividades propostas pelos livros didáticos selecionados para análise, que atendem as habilidades EM13MAT304, EM13MAT303, EM13MAT305 e EM13MAT403, respectivamente.

De maneira geral podemos observar como as obras analisadas conseguiram se adequar às necessidades e exigências da BNCC. Porém, os livros deixam questões como mercado de trabalho, previdência e tantos outros assuntos que, após a vida escolar, vão estar presentes na vida dos alunos. Desta maneira, este TCC desenvolve como produto educacional uma trilha pedagógica onde, além de trabalhar conteúdos matemáticos de grande importância para o desenvolvimento do aluno, também abordamos temas que são pertinentes para a vida do aluno após o ensino médio e ingresso no mercado de trabalho.

No trabalho, serão desenvolvidos cálculos de descontos previdenciários, pesquisa acerca da realidade salarial brasileira e da região onde o aluno se encontra, estimativas de evolução salarial ao longo da vida profissional, processo de aposentadoria, como esta funciona, e outros assuntos relacionados.

O produto educacional desenvolvido neste trabalho de conclusão de curso tem, I, II, IV e V

45. Uma represa utilizada como reservatório para o abastecimento de água de uma determinada região tem capacidade aproximada de 16 000 000 m³ num período de normalidade de chuvas. Após o início de um período de seca, a variação da quantidade de água desse reservatório passou a ser dada pela função $V(t) = V_0 \cdot 2^{-0{,}05t}$, sendo V_0 a capacidade da represa em um período de normalidade, t o número de meses de estiagem e $V(t)$ a quantidade de água nesse reservatório em m³ após t meses. Uma resposta possível: O reservatório terá a metade da sua capacidade após quantos meses de estiagem? 20 meses.

- Elabore uma questão com base nos dados do enunciado acima. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

Figura 13 – Questão de Prisma matemática. Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020).

17. Em boletos bancários, é comum a indicação de multa e juros para o caso de pagamento em atraso.

a) Considere um boleto de R$ 560,00 no qual incide a multa de 1,5% em caso de atraso mais 0,2% de juros por dia. Quanto será pago a mais do que o valor do boleto ao atrasar o pagamento em 8 dias? R$ 17,36

b) Pesquise com familiares um boleto que ainda precise ser pago e elabore um problema, como o do item **a**, com os dados desse boleto. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema que você criou enquanto você resolve o problema dele. Por fim, confira a resolução que ele fez e a resposta obtida.

Figura 14 – Questão de Matemática em contextos. Fonte: (DANTE; VIANA, 2020).

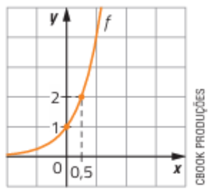
100. Certa população de bactérias pode ter seu crescimento populacional representado por uma função cuja lei de formação é dada por $f(x) = 256 \cdot 2^{0{,}5x}$, em que x é o tempo em dias a partir do início da observação. 100. a) $f^{-1}(x) = 2\log_2 \frac{x}{256}$; a população de bactérias.

a) Determine a lei de formação da função f^{-1}. O que representa a variável x nessa função?

b) Após quantos dias do início da observação, a população passou a ser de 1 024 bactérias? 4 dias

Figura 15 – Questão de Matemática interligada. Fonte: (ANDRADE, 2020).

26. Analise o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$.



Determine a lei de formação de uma função g, cujo gráfico seja simétrico ao f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

Figura 16 – Questão de Multiversos matemática. Fonte: (SOUZA, 2020).

além do caráter pedagógico matemático, o objetivo de monstrar a importância de usar a matemática para entender assuntos que fazem parte da vida prática; neste caso específico, do planejamento financeiro.

5 Fundamentos da aposentadoria e investimentos

A previdência social, surge com a finalidade de assegurar os direitos dos trabalhadores. Tanto funcionários públicos quanto trabalhadores do setor privado, tem inúmeros benefícios e garantias por conta da existência da previdência.

De acordo com a lei 8.213, de 24 de julho de 1991, em seu artigo 1°:

> “A Previdência Social, mediante contribuição, tem por fim assegurar aos seus beneficiários meios indispensáveis de manutenção, por motivo de incapacidade, desemprego involuntário, idade avançada, tempo de serviço, encargos familiares e prisão ou morte daqueles de quem dependiam economicamente.”(BRASIL, 1991).

Entre os benefícios garantidos pela previdência, temos a aposentadoria. A aposentadoria se divide em dois regimes: Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) e Regime Geral de Previdência Social (RGPS). Enquanto o RPPS é o sistema que rege a aposentadoria dos trabalhadores do setor público, em todas as esferas políticas, o RGPS é o sistema que rege a aposentadoria dos trabalhadores do setor privado.

Segundo o artigo 40 da Constituição do Brasil:

> “O regime próprio de previdência social dos servidores titulares de cargos efetivos terá caráter contributivo e solidário, mediante contribuição do respectivo ente federativo, de servidores ativos, de aposentados e de pensionistas, observados critérios que preservem o equilíbrio financeiro e atuarial.”(BRASIL, 1988).

E também, segundo o artigo 201, da emenda constitucional 103, de 12 de novembro de 2019

> “A previdência social será organizada sob a forma do Regime Geral de Previdência Social, de caráter contributivo e de filiação obrigatória, observados critérios que preservem o equilíbrio financeiro e atuarial, e atenderá, na forma da lei, a: I - cobertura dos eventos de incapacidade temporária ou permanente para o trabalho e idade avançada; ”(BRASIL, 2019)

Nas próximas seções, utilizamos como fonte de informação, além da constituição brasileira, leis e emendas citadas anteriormente, os artigos (GLOBO, 2019b), (GLOBO, 2019a) e (JUSBRASIL, 2019).

5.1 Regimes previdenciários e suas diferenças

No Brasil, o sistema previdenciário é composto por dois principais regimes: o Regime Geral de Previdência Social (RGPS) e os Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS). Cada um desses regimes possui características distintas, que atendem a diferentes grupos de trabalhadores e têm regras específicas para a concessão de benefícios. A compreensão dessas diferenças é fundamental para que os segurados possam planejar sua aposentadoria e entender os direitos que possuem.

O Regime Geral de Previdência Social (RGPS) é administrado pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) e é voltado para a maioria da população que está inserida no mercado de trabalho formal. Os trabalhadores contribuem mensalmente com um percentual de seus salários, que varia de acordo com a faixa de renda, para ter acesso a benefícios como aposentadoria, pensão por morte, auxílio-doença, entre outros. O RGPS é caracterizado por um sistema de repartição, onde as contribuições dos trabalhadores ativos financiam os benefícios dos aposentados e pensionistas. Essa estrutura é fundamental para garantir a proteção social da população, mas também enfrenta desafios, como o envelhecimento da população e a necessidade de manter o equilíbrio financeiro.

Por outro lado, os Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) são destinados aos servidores públicos federais, estaduais e municipais. Cada ente federativo é responsável por administrar seu próprio regime, o que significa que as regras podem variar significativamente entre diferentes órgãos e esferas de governo.

Os RPPS geralmente oferecem benefícios semelhantes aos do RGPS, mas com características específicas, como a possibilidade de aposentadoria com tempo de serviço reduzido e regras diferenciadas para cálculo de benefícios. Essa autonomia permite que os RPPS adaptem suas políticas às necessidades dos servidores, provocando desigualdades entre os diferentes regimes. Uma das principais diferenças entre o RGPS e os RPPS está na forma de cálculo dos benefícios. No RGPS, o valor da aposentadoria é calculado com base na média das contribuições feitas ao longo da vida laboral, enquanto nos RPPS, o cálculo pode considerar o último salário ou a média das remunerações, dependendo das regras de cada regime. Além disso, os RPPS costumam ter regras mais flexíveis em relação à aposentadoria por tempo de contribuição, permitindo que servidores se aposentem mais cedo em comparação com os trabalhadores do setor privado.

Outro aspecto importante a ser considerado é a questão da sustentabilidade financeira de ambos os regimes. O RGPS enfrenta desafios significativos devido ao aumento da expectativa de vida e à diminuição da taxa de natalidade, o que resulta em um número crescente de aposentados em relação ao número de contribuintes. Para garantir a viabilidade do sistema, reformas têm sido implementadas, como a alteração das idades mínimas e do tempo de contribuição. Já os RPPS, embora também enfrentam desafios, têm a possibilidade de ajustar suas regras de acordo com as necessidades específicas de seus servidores, o que pode proporcionar maior flexibilidade na gestão dos recursos.

5.2 Critérios de aposentadoria

Discutiremos nessa seção os critérios para aposentadoria por idade e por tempo de contribuição. Porém, para simplificar o desenvolvimento das atividades, optamos por explorar os critérios para aposentadoria por tempo de contribuição durante as aulas propostas. Os critérios de aposentadoria no Brasil são estabelecidos por uma combinação de leis e regulamentos que variam conforme o regime previdenciário ao qual o trabalhador está vinculado. A aposentadoria pode ser solicitada por diferentes motivos, como idade, tempo de contribuição ou condições especiais, e cada uma dessas modalidades possui requisitos específicos que devem ser atendidos. Com as reformas previdenciárias recentes, especialmente a Emenda Constitucional nº 103 de 2019, as regras de aposentadoria passaram por mudanças significativas, impactando diretamente a forma como os trabalhadores planejam sua aposentadoria.

A aposentadoria por idade é uma das modalidades mais conhecidas e requer que o segurado atinja uma idade mínima, além de ter cumprido um período de carência, que é o número mínimo de contribuições exigido. Para os homens, a idade mínima é de 65 anos, enquanto para as mulheres, é de 62 anos, com a expectativa de que esses limites aumentem progressivamente nos próximos anos. Essa modalidade é especialmente importante para aqueles que não conseguiram atingir o tempo de contribuição necessário para outras formas de aposentadoria, permitindo que um maior número de trabalhadores tenha acesso ao benefício.

Outra forma de aposentadoria é a por tempo de contribuição. A aposentadoria por tempo de contribuição garante um benefício igual a 60% da média dos salários recebidos, caso o trabalhador tenha contribuído durante, no mínimo, 15 anos quando mulher e 20 anos quando homem. A esse percentual, acrescentasse 2% para cada ano trabalhado além do mínimo. Ou seja, para ter direito a 100% do salário-de-benefício, é necessário que o trabalhador contribua com a previdência por 35 e 40 anos, para mulheres e homens, respectivamente. Essa modalidade é vantajosa para aqueles que começaram a trabalhar mais jovens e conseguiram manter uma carreira estável ao longo dos anos. A aposentadoria por tempo de contribuição é frequentemente vista como uma opção mais atrativa, pois permite que o trabalhador se aposente mais cedo, desde que cumpra os requisitos estabelecidos.

Além dessas modalidades, existem também aposentadorias especiais, que são destinadas a categorias específicas de trabalhadores, como professores da Educação Básica, policiais e trabalhadores expostos a condições insalubres. Por exemplo, os professores da

Educação Básica podem se aposentar após 30 anos de efetivo exercício para homens e 25 anos para mulheres, com a possibilidade de receber 100% do salário-de-benefício. Essas regras especiais reconhecem as particularidades e os desafios enfrentados por esses profissionais, proporcionando uma forma de aposentadoria mais justa e adequada às suas realidades.

Os critérios de aposentadoria também incluem aspectos relacionados à transição entre as regras antigas e novas, especialmente para aqueles que já estavam próximos de se aposentar antes das reformas. O sistema de transição foi criado para suavizar o impacto das mudanças, permitindo que trabalhadores que já contribuíam antes da reforma possam se aposentar com regras mais favoráveis. Isso inclui a aplicação de pedágios, onde o trabalhador deve cumprir um tempo adicional de contribuição, mas ainda assim pode se beneficiar de condições mais vantajosas do que as novas regras.

Por fim, é importante destacar que a documentação e o processo de solicitação de aposentadoria são etapas cruciais para garantir que os direitos dos trabalhadores sejam respeitados. Os segurados devem reunir a documentação necessária, que pode incluir comprovantes de contribuição, documentos pessoais e outros registros que atestem o tempo de serviço. A solicitação pode ser feita de forma presencial, online ou por telefone, e é fundamental que os trabalhadores estejam cientes de seus direitos e dos requisitos específicos de cada modalidade de aposentadoria para garantir uma transição tranquila para essa nova fase de suas vidas.

5.3 Comparativo entre o sistema de aposentadoria antes e depois de 2019

Como já falamos, o sistema de aposentadoria no Brasil passou por uma transformação significativa com a aprovação da Emenda Constitucional nº 103, em 2019. Antes dessa reforma, as regras de aposentadoria eram consideradas mais flexíveis, permitindo que muitos trabalhadores se aposentassem com idades e tempos de contribuição mais baixos. A reforma trouxe mudanças que visam equilibrar as contas da Previdência Social, refletindo a necessidade de um sistema mais sustentável diante do aumento da expectativa de vida da população e do envelhecimento da força de trabalho.

Antes de 2019, a aposentadoria por idade permitia que as mulheres se aposentassem aos 60 anos e os homens aos 65 anos, com um tempo mínimo de contribuição de 15 anos para ambos os sexos. Essa estrutura era vista como benéfica para muitos trabalhadores, especialmente aqueles que começaram a contribuir cedo e desejavam se aposentar mais cedo. A reforma, no entanto, elevou a idade mínima para 62 anos para mulheres e 65 anos para homens, além de introduzir um sistema de pontos que combina idade e tempo de contribuição, tornando o processo de aposentadoria mais complexo e exigente.

Outro aspecto importante da reforma foi a introdução de regras de transição, que foram criadas para suavizar o impacto das novas exigências sobre aqueles que já estavam próximos de se aposentar. Antes da reforma, os trabalhadores podiam se aposentar com um tempo de contribuição fixo, mas após 2019, a regra do pedágio foi implementada, exigindo que os trabalhadores que não atingiram os requisitos de tempo de contribuição antes da reforma cumprissem um tempo adicional, que pode ser de 50% ou 100% do tempo que faltava. Essa mudança gerou preocupações entre os trabalhadores que se sentiam prejudicados, pois muitos precisariam trabalhar por mais tempo do que o planejado.

Além disso, a reforma trouxe mudanças significativas na aposentadoria por tempo de contribuição. Anteriormente, os homens podiam se aposentar após 30 anos de contribuição e as mulheres após 25 anos. Com a nova legislação, o tempo mínimo de contribuição foi mantido, mas a combinação com a idade mínima e o sistema de pontos tornou-se mais rigorosa. Para se aposentar, os homens precisam atingir 101 pontos e as mulheres, 91 pontos, o que significa que a soma da idade e do tempo de contribuição deve atender a esses critérios. Essa mudança foi vista como uma forma de incentivar os trabalhadores a contribuírem por mais tempo, mas também gerou críticas por aumentar a dificuldade de acesso à aposentadoria.

Outro ponto de comparação relevante é a questão das aposentadorias especiais. Antes da reforma, categorias como professores e trabalhadores rurais tinham regras mais flexíveis para se aposentar. A reforma manteve algumas dessas regras, mas também introduziu novas exigências que podem impactar a forma como esses profissionais planejam sua aposentadoria. Por exemplo, os professores ainda podem se aposentar após 30 anos de serviço, mas agora precisam estar atentos às novas regras de pontos e idade mínima, o que pode complicar o planejamento de carreira e aposentadoria.

5.4 Concluindo o assunto

O sistema previdenciário brasileiro reflete um esforço contínuo para equilibrar a proteção social e a sustentabilidade financeira. As reformas de 2019, embora necessárias para garantir a viabilidade do sistema, levantam questões sobre a justiça social e a adequação das novas regras. A necessidade de um sistema que atenda às demandas de uma população em envelhecimento e que promova a inclusão social é um desafio que o Brasil ainda enfrenta. É fundamental que o sistema previdenciário continue a evoluir, garantindo direitos e promovendo a inclusão, ao mesmo tempo em que assegura a sustentabilidade financeira necessária para o futuro.

5.5 Investimentos

Em uma postagem no seu blog, o banco BMG (BANCO BMG, 2022) elenca 7 motivos para investir que, segundo o ponto de vista do autor, são mais relevantes dentre os muitos existentes. São eles:

1. Reserva financeira para emergências e imprevistos.
2. Se aposentar com tranquilidade, pois os investimentos são uma ótima opção para ter uma renda extra no futuro.
3. Se proteger da inflação. A situação desejada é que o dinheiro renda mais do que o IPCA.
4. Investir cabe no seu bolso, pois tem investimentos a partir de valores muito baixos e que rendem mais que a poupança.
5. Realizar sonhos, pois o dinheiro ganho pode ajudar a pagar alguma compra ou experiência desejada.
6. Conhecimento financeiro, pois este conhecimento ajuda a ter um melhor gerenciamento financeiro, um maior controle sobre os gastos.
7. Construir um patrimônio, pensando no futuro pessoal e familiar.

No livro “Finanças na vida real” (BONA, 2023), distribuído na rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, o autor André Bona demonstra a importância de investir a fim de garantir uma aposentadoria mais tranquila. Bona exemplifica de maneira simples, sem considerar as possíveis variáveis financeiras, como a falta de planejamento pode impactar negativamente a vida de um trabalhador no momento da aposentadoria. Para isso ele toma como exemplo um trabalhador de 35 anos cuja renda mensal e despesas são iguais. Este trabalhador se aposenta aos 70 anos e tem expectativa de vida de 85 anos. Sem levar em consideração possíveis mudanças salariais ou cenários econômicos, o autor leva os leitores a compreender que, ao se aposentar, a renda deste trabalhador tende a diminuir. A partir desse momento, o trabalhador passa a viver em déficit financeiro, ou seja, sua renda deixa de ser suficiente para garantir sua subsistência. Desta maneira, Bona demonstra a necessidade do planejamento financeiro além da aposentadoria.

Portanto, parece muito importante criar uma consciencia sobre a realidade do trabalhador no âmbito financeiro, tanto previo à aposentadoria como posterior a ela. Para garantir uma qualidade de vida adequada para o futuro, o trabalhador precisa entender a sua situação e criar um plano para a aposentadoria.

5.6 Tipos de investimentos

Os investimentos se dividem em dois grandes grupos: a renda variável e a renda fixa. Como os nomes já deixam evidente, a renda variável apresenta oscilações constantes, sendo influenciada por agentes financeiros e por eventos macro e microeconômicos, o que faz com que seus rendimentos não sigam uma linha constante. Já a renda fixa, possui um caráter mais estável, mesmo que suas taxas e indexadores também sejam influenciados por eventos externos da esfera financeira, esse tipo de investimento sempre está atrelado a alguma taxa, seja a taxa de juros ou a inflação.

Dentro de cada um desses grupos, podemos encontrar uma grande diversidade de classes de investimento. Na renda variável, temos a opção de investir em empresas através do mercado acionário de ações, podemos investir em imóveis, seja via compra direta ou através de cotas de fundos imobiliários, cripto ativos, entre muitas outras opções.

Na parte de renda fixa, somos apresentados aos CDBs, que são títulos financeiros privados atrelados a algum dos índices referenciais brasileiros como a taxa Selic, através do CDI, que corresponde a taxa básica de juros brasileira, ou ao IPCA, que representa a taxa de inflação da economia, entre outras. Também há a possibilidade de investimento no tesouro direto, que são títulos financeiros emitidos pelo governo brasileiro, utilizados para captação de recursos a fim de financiar obras e o desenvolvimento nacional. Os títulos públicos assim como os títulos privados, também são indexados a algum indicador da economia brasileira. Estes investimentos podem ser divididos em dois grupos: os pré - fixados, que possuem taxa fixa e maior previsibilidade dos rendimentos e pós fixados, que dependem da taxa de referência para atualização dos seus rendimentos. No produto educacional elaborado para este TCC, selecionamos três investimentos, sendo dois de renda variável e um de renda fixa. Para renda variável, selecionamos os chamados ETFs (Exchange Traded Funds). Segundo o site oficial da bolsa de valores brasileira (B3), o ETF

> "...é fundo negociado em Bolsa que representa uma comunhão de recursos destinados à aplicação em uma carteira de ações que busca retornos que correspondam, de forma geral, à performance, antes de taxas e despesas, de um índice de referência. Como índice de referência do ETF de Ações admite-se qualquer índice de ações reconhecido pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM)."(BOLSA DO BRASIL, 2024).

Foram escolhidos para o desenvolvimento de atividades, dentre as inúmeras possibilidades, os ETFs BOVA11 e IVVB11. De acordo com o site especializado *statusinvest*, "O Ibovespa é importante porque serve como referência para os ganhos e perdas do mercado de ações no Brasil." (STATUSINVEST, 2024). Este índice representa a rentabilidade de uma carteira de investimentos formada por ações de 83 empresas, entre elas estão Petrobras, Vale, Banco do Brasil, etc.

O segundo ETF selecionado, faz referência ao índice S&P 500. Este índice acompanha a rentabilidade de uma carteira formada por ações das 500 maiores empresas da economia norte-americana. Empresas conhecidas mundialmente como Coca-cola, Apple, Amazon e muitas outras.

Por fim, para abordar nas atividades o conceito de renda fixa, selecionamos um título do tesouro direto renda+, cuja taxa é atrelada ao IPCA mais uma taxa pré fixada. Este titulo publico foi lançado em 21 de dezembro de 2022, com o intuito de criar uma alternativa para complementação da aposentadoria.

6 Trilha pedagógica

CÁLCULO PREVIDENCIÁRIO, APOSENTADORIA E FUNÇÕES: UMA TRILHA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS USANDO MODELAGEM MATEMÁTICA.

6.1 Introdução

Como produto educacional optamos por construir uma trilha pedagógica. Segundo o Centro de Educação Tecnológica do Amazonas (CETAM), entendesse a trilha pedagógica como "...uma abordagem estruturada e sequencial para o processo de ensino e aprendizagem. Ela busca organizar conteúdos, atividades e avaliações de maneira lógica e coerente, facilitando a aquisição de conhecimentos e habilidades pelos alunos. O objetivo principal é proporcionar um caminho claro e eficiente para o desenvolvimento das competências necessárias, respeitando o ritmo e o estilo de aprendizagem de cada indivíduo." A trilha pedagógica tem como características importantes, a sequencialidade (pois as atividades são planejadas de forma gradual), a coêrencia (as atividades estão alinhadas com os objetivos de aprendizagem) e a diversidade (são usados recursos e estratégias necessários para as diferentes formas de aprender).

Afim de criar um modelo para o ensino das funções exponencial e logarítmica para alunos do ensino médio, as atividades foram elaboradas a partir dos cálculos previdenciários brasileiros. As atividades pertencentes à trilha abordaram o processo de evolução salarial de um trabalhador, desconto previdenciário, cálculo do benefício de aposentadoria, alternativas de investimentos, etc. A ideia de abordar a temática previdenciária surge da necessidade de relacionar o conteúdo aprendido em sala de aula com a realidade fora do ambiente escolar.

De acordo com a lei LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996 (Lei de diretrizes e bases da educação nacional - LDB) (BRASIL, 1996), que afirma o caráter abrangente da educação:

> Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.
>
> § 2º A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social."

E ainda,

> “Art. 3º O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: X - valorização da experiência extra-escolar; XI - vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais.”

Acreditamos que a trilha elaborada atende os preceitos estabelecidos na LDB, trazendo pertinência ao estudo e preparando o discente para a vida profissional.

6.2 Proposta e aplicação das atividades

A trilha pedagógica elaborada como produto educacional deste trabalho tem como proposta relacionar diversos tópicos do ensino de matemática, a fim de levar o aluno a acumular repertório e, assim, compreender as funções e como estas se apresentam em seu cotidiano.

As atividades foram dispostas em aulas, de pelo menos uma hora e quarenta minutos (2 tempos de 50 minutos), sendo realizadas em grupos. Destacamos que o público alvo das atividades propostas nesta trilha pedagógica são alunos do ensino médio. Este fato ocorre pois é no ensino médio onde o estudo de funções é formalizado e estes alunos já se encontram na iminência do ingresso no mercado de trabalho. Porém, qualquer aluno com familiaridade em porcentagem, médias e potenciação, pode realizar as atividades. A trilha pode ser usada para que o aluno tenha o primeiro contato com as funções exponenciais e logarítmicas.

Dividimos as atividades em cinco etapas: etapa preparatória, apresentação do problema, cálculo do aumento do salário, cálculo dos descontos e benefícios e comparação dos benefícios da aposentadoria com outros investimentos. No início temos uma revisão sobre o cálculo de porcentagem, médias e potências. Na sequência, os mesmos tópicos desenvolvidos na aula anterior são relacionados ao mundo do trabalho. Adiante, é proposta uma pesquisa sobre assuntos que serão pertinentes nas próximas aulas. Continuando, as três aulas seguintes têm como objetivo, levar o aluno a definir a função exponencial, verificar sua propriedade fundamental, estabelecer sua relação com os logaritmos e, com uso do Geogebra, observar o comportamento do seu gráfico. Por fim, nas duas últimas aulas, com auxílio de programas de criação de planilhas, demonstraremos com maior profundidade o funcionamento do cálculo previdenciário brasileiro, determinaremos valores de aposentadorias para um trabalhador hipotético e verificaremos como o ato de investir com foco na aposentadoria pode fazer grande diferença na manutenção da qualidade de vida do trabalhador.

6.3 Sugestões ao professor

Toda a sequência didática foi estruturada num formato progressivo, de maneira que o conhecimento seja adquirido de maneira cumulativa. Pensamos que a sequência deve ser seguida na ordem estabelecida, a fim de que, após cada atividade, o aluno adquira os conhecimentos necessários para atividades posteriores.

Todo o planejamento das atividades foi feito considerando que o aluno deve ser o protagonista principal. Consideramos que o sucesso das atividades depende de que seja o aluno quem faz as aproximações às respostas, os erros e as descobertas. Por isso, é importante que o professor permita que o aluno desenvolva as atividades, que motive ao aluno para que se torne mais autônomo no percurso das atividades. O professor precisa estar próximo dos alunos no decorrer das aulas, mas sem interferir ativamente no processo de desenvolvimento das atividades. É válido estabelecer grupos de trabalho durante todo o percurso da trilha, permitindo que os próprios alunos estabeleçam uma rotina de trabalho. É importante que o professor perceba se há algum "problema"que está impedindo o avanço das atividades e proponha possíveis caminhos para resolver o problema, sem dar respostas prontas, permitindo ao aluno dar continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Para garantir melhor aproveitamento da realização das atividades, disponibilizamos o link das tabelas eletrónicas que serão desenvolvidas e utilizadas nas questões das aulas 7 e 8.

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1QRFFFbaUdBFn-YxpIZeHGYF5R62b-6tJtXbX7Yf4iEA/edit?usp=sharing

No produto educacional, algumas das atividades propostas contam com sugestões ao professor, a fim de dar suporte a este durante sua prática docente.

Para mensurar o nivel de entendimento antes e depois da realização das atividades junto aos alunos, criamos um formulário usando o Google forms. Vamos explicar com mais detalhe informações sobre o formulário na seção A.1 do apêndice A.

6.4 A trilha pedagógica

1ª etapa: Preparação

Aula 1 : Cálculo de porcentagem, médias e potenciação.

Objetivo: Revisar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 1.1 Calcule as porcentagens abaixo:

(a) 10% de 200
(b) 15% de 300
(c) 22% de 80
(d) 17% de 90
(e) 25% de 1200
(f) 12,5% de 900
(g) 9,7% de 800
(h) 13,4% de 152
(i) 22,8% de 2546

Questão 1.2 A imagem na figura 17 representa o preço da banana numa feira de rua. Sobre o preço inicial da banana, responda:

Figura 17 – Figura da questão 1.2.

(a) Qual será o preço da banana após um aumento de 10% ?

(b) Qual será o preço da banana após um desconto de 15%, em relação ao preço obtido no item a)?

(c) Se a banana passar a ser vendida a 9,20, qual será o percentual de aumento aplicado ao seu preço inicial?

(d) Se a banana passar a ser vendida a 6,40, qual será o percentual de desconto aplicado, em relação ao valor obtido no item b)?

Questão 1.3 Determine a média aritmética dos valores representados abaixo:

(a) 23, 45, 73, 78, 94

(b) 100, 328, 452, 581, 973, 325

(c) 1248, 4284, 3124

Questão 1.4 Leia os problemas abaixo e responda:

(a) Na prova para um cargo na enfermaria do hospital, uma candidata fez 6 pontos na prova de conhecimentos específicos, 4 pontos em conhecimentos gerais e 5 pontos em Português. Determine a média ponderada das notas dessa candidata sabendo que os respectivos pesos são 5, 3 e 2.

(b) Sabendo que um aluno obteve as notas 8, 9, 6 e 8 e que essas notas têm, respectivamente, os pesos 2, 2, 3 e 3, calcule a sua média.

(c) A idade média dos meninos atendidos em uma clínica pediátrica foi 6 anos e das meninas, 8. O número de meninos era 25 e o de meninas, 30. Então, qual a idade média das crianças atendidas?

(d) Na farmácia de um hospital universitário foi feita uma inspeção no lote de determinado remédio em comprimidos. Foram encontradas:

- 2 embalagens com 6 comprimidos;
- 4 embalagens com 7 comprimidos;
- 4 embalagens com 5 comprimidos;
- 3 embalagens com 8 comprimidos.

Qual foi a média ponderada de comprimidos por embalagem?

Questão 1.5 Calcule as potências:

(a) 2^3 (b) 5^4 (c) 8^0 (d) 10^3 (e) 7^2 (f) 8^1

Sugestão ao professor: Esta aula de revisão consiste em atividades relativamente simples pois os alunos das turmas onde as mesmas foram aplicadas, carregavam muitas dificuldades dos anos anteriores por conta da pandemia. Os assuntos tratados nas questões são os que consideramos fundamentais para o aluno conseguir encarar as seguintes atividades. A aula foi pensada para ser desenvolvida inteiramente pelos alunos, mas pode ser facilmente adequada pelo professor de acordo com as capacidades dos alunos que realizarão as atividades. Por exemplo, fica a critério do professor a realização de uma exposição da matéria, feita prévia (ou posterior) ao desenvolvimento das atividades propostas nesta aula.

2ª etapa: Apresentação do problema

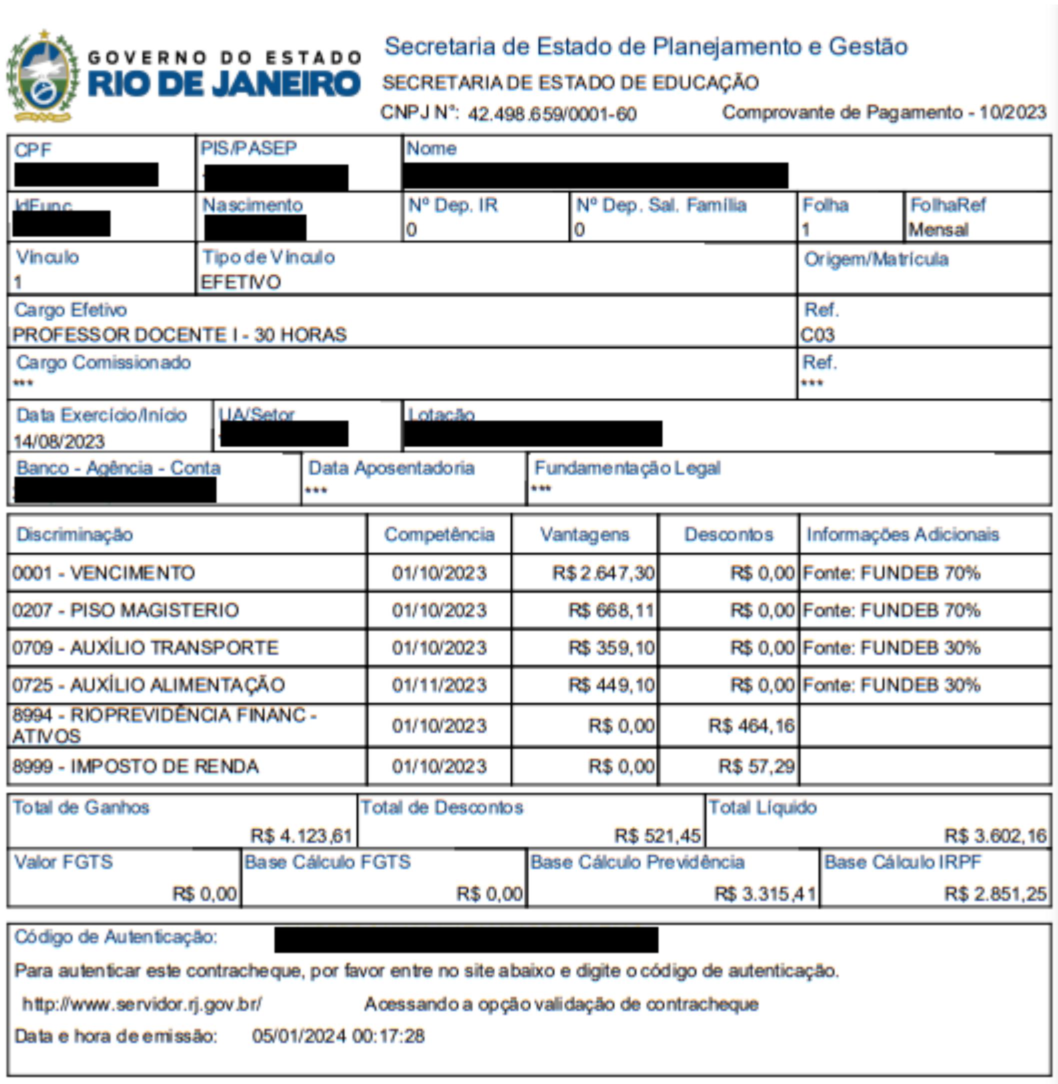
<u>Aula 2</u> : Aplicação dos conceitos de porcentagem, médias e potenciação no contexto do mercado de trabalho.

Objetivo: Aplicar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação, revistos na aula anterior, utilizando termos e objetos relacionados ao mercado de trabalho.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 2.1 A figura 18 é o contracheque de um professor da rede estadual de ensino.



GOVERNO DO ESTADO RIO DE JANEIRO

Secretaria de Estado de Planejamento e Gestão

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

CNPJ Nº: 42.498.659/0001-60 Comprovante de Pagamento - 10/2023

CPF	PIS/PASEP	Nome			
[redacted]	[redacted]	[redacted]			
IdFunc [redacted]	Nascimento [redacted]	Nº Dep. IR 0	Nº Dep. Sal. Família 0	Folha 1	FolhaRef Mensal
Vínculo 1	Tipo de Vínculo EFETIVO			Origem/Matrícula	
Cargo Efetivo PROFESSOR DOCENTE I - 30 HORAS				Ref. C03	
Cargo Comissionado ***				Ref. ***	
Data Exercício/Início 14/08/2023	UA/Setor [redacted]	Lotação [redacted]			
Banco - Agência - Conta [redacted]	Data Aposentadoria ***	Fundamentação Legal ***			

Discriminação	Competência	Vantagens	Descontos	Informações Adicionais
0001 - VENCIMENTO	01/10/2023	R$ 2.647,30	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0207 - PISO MAGISTERIO	01/10/2023	R$ 668,11	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0709 - AUXÍLIO TRANSPORTE	01/10/2023	R$ 359,10	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
0725 - AUXÍLIO ALIMENTAÇÃO	01/11/2023	R$ 449,10	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
8994 - RIOPREVIDÊNCIA FINANC - ATIVOS	01/10/2023	R$ 0,00	R$ 464,16	
8999 - IMPOSTO DE RENDA	01/10/2023	R$ 0,00	R$ 57,29	

Total de Ganhos	Total de Descontos	Total Líquido	
R$ 4.123,61	R$ 521,45	R$ 3.602,16	
Valor FGTS R$ 0,00	Base Cálculo FGTS R$ 0,00	Base Cálculo Previdência R$ 3.315,41	Base Cálculo IRPF R$ 2.851,25

Código de Autenticação: [redacted]

Para autenticar este contracheque, por favor entre no site abaixo e digite o código de autenticação.

http://www.servidor.rj.gov.br/ Acessando a opção validação de contracheque

Data e hora de emissão: 05/01/2024 00:17:28

Figura 18 – Contracheque de um trabalhador.

Neste contracheque, podemos observar que esse professor tem valores a receber e valores a descontar do seu salário. Um desses descontos (8994 - RIOPREVIDÊNCIA FI-

NANC - ATIVOS) é referente a sua previdência, ou seja, é destinado a sua aposentadoria. Agora, sobre esse contracheque, responda:

(a) Qual o percentual de desconto em relação ao salário do professor? Considere 3315,41 como base de cálculo.

(b) Ao receber um aumento de 20% sobre sua base de cálculo, qual seria seu novo valor?

(c) Após o aumento do item anterior, qual seria o valor do desconto previdenciário, mantida a mesma proporção?

Questão 2.2 Consideremos a tabela 3, que descreve a evolução salarial de uma certa trabalhadora durante 20 anos.

Tabela 3 – Evolução salarial de uma trabalhadora

Ano	**Salário**	**Ano**	**Salário**
1°	R$ 900,00	11°	R$ 1465,96
2°	R$ 945,00	12°	R$ 1539,25
3°	R$ 992,25	13°	R$ 1616,21
4°	R$ 1041,86	14°	R$ 1697,02
5°	R$ 1093,95	15°	R$ 1781,87
6°	R$ 1148,64	16°	R$ 1870,96
7°	R$ 1206,07	17°	R$ 1964,50
8°	R$ 1266,37	18°	R$ 2062,72
9°	R$ 1329,68	19°	R$ 2165,85
10°	R$ 1396,16	20°	R$ 2274,14

(a) Com base na tabela 3, determine a média dos salários recebidos pela trabalhadora.

(b) Determine 70% e 80% da média dos salários recebidos pela trabalhadora.

Sugestão ao professor: Ao final das atividades, é fundamental que os alunos compreendam que os cálculos presentes na questão 2.2 são a base para a definição do valor da aposentadoria. Para tanto, é interessante iniciar uma discussão sobre os resultados obtidos. Essa reflexão pode contribuir para uma maior conscientização sobre a importância de planejar a aposentadoria e os desafios que muitos trabalhadores enfrentam nesta nova fase da vida.

AULA 3 : Pesquisa sobre a realidade salarial da região e estudo dirigido a partir das informações obtidas na pesquisa.

Objetivo: Situar os alunos sobre a realidade salarial da região onde vivem e aplicar os conceitos aprendidos nas atividades anteriores dentro das suas realidades geográficas.

Material utilizado: Acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 3.1 Dividindo a turma em grupos de 4 até 8 alunos, perfazendo um total de até 6 grupos, proponha a seguinte pesquisa:

(a) Como é calculado o valor da aposentadoria?

(b) Qual o valor descontado do salário destinado a aposentadoria?

(c) Qual a idade mínima para a aposentadoria?

(d) Qual a expectativa de vida média do brasileiro? E dos habitantes da sua região?

(e) Qual o salário médio da região onde você vive?

(f) Em comparação com o salário médio brasileiro, o salário da sua região é maior, menor ou igual? Se a média salarial for diferente da nacional, qual a proporção dessa diferença?

Sugestão ao professor: A realização desta atividade pode ser diversificada, sendo executada como apresentação de seminários, pesquisa, resumo, mapa mental ou outros instrumentos propostos. Parece importante que os alunos possam pesquisar, fora da aula, informações sobre as questões propostas.

3ª etapa: Cálculo do aumento do salário

AULA 4 : Atividades utilizando os conceitos aprendidos nas aulas anteriores para determinar o aumento de salário de um trabalhador.

para determinar o salário do trabalhador, estamos usando uma função exponencial.

Objetivo: Através do cálculo de atualização salarial de um trabalhador, concluir que precisamos calcular os valores de uma determinada função exponencial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 4 que está na seção A.2.

Questão 4.1 Um trabalhador inicia sua vida profissional em 2024. O governo atual propôs um aumento do salário mínimo de 6,6%. Considerando que este aumento se torna fixo, ou seja, todos os anos trabalhados após 2024 apresentarão o mesmo aumento no salário mínimo.

Por cada real que o trabalhador recebe em 2024,

(a) Quanto vai receber em 2025?

(b) E em 2026?

(c) E em 2027?

(d) E em 2028?

(e) E em 2030?

(f) E em 2035?

(g) E em 2050?

(h) E em 2059?

Questão 4.2 Assumindo que um trabalhador brasileiro médio e um trabalhador gonçalense médio iniciam sua vida profissional em 2024 e que os salários serão reajustados a uma taxa fixa de 6,6% ao ano, responda.

(a) Qual vai ser o salário de cada trabalhador em 2025? Em 2030? Em 2035? Em 2059?

(b) Poderia escrever uma fórmula simples para representar a evolução salarial deste trabalhador? Qual será o salário do trabalhador no ano de 2024+n?

Observação: Como resultado da pesquisa da aula anterior, os alunos devem ter achado uma fonte para saber os salários médios brasileiro e gonçalense. Uma fonte confiável é o site do IBGE, ver (IBGE, 2024).

Sugestão ao professor: A fim de responder às questões 4.1 e 4.2, é ideal a criação de uma tabela com três colunas específicas. A primeira delas seria preenchida com os anos e as demais seriam utilizadas para calcular o aumento percentual por cada real ganho, e a outra para registrar o valor total do aumento salarial em cada ano (ver tabela 4, na seção A.2 do apêndice A).

No item b) da questão 4.2, é esperado que o aluno chegue à seguinte função:

$$S(n) = A \cdot (1 + 6,6/100)^n \text{ onde } A \text{ é o salário em 2024.}$$

Vamos usar a notação $s(n) = (1 + 6,6/100)^n$. Isso significa que $S(n) = A \cdot s(n)$.

AULA 5 : Demonstrar, através da comparação salarial entre dois trabalhadores, a propriedade $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$ e estabelecer a relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$.

Objetivo: Através da comparação salarial entre dois trabalhadores, levar o aluno a deduzir e compreender a propriedade $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$ e apresentar ao aluno a relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$, necessária para determinar o tempo decorrido até cada trabalhador alcançar determinado patamar salarial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 5 que está na seção A.2.

Questão 5.1 Vamos assumir que o valor do **salário mínimo** a partir de 2024, vai ser determinado pelo aumento fixo de 6,6% a cada ano. Agora, suponha dois trabalhadores (T1 e T2) ganhando o salário mínimo. Um deles (T1) começou a sua vida laboral em 2024 e o outro (T2) em 2029. Determine:

(a) Qual vai ser o salário inicial de cada um dos trabalhadores?

(b) Qual o salário dos trabalhadores em 2033?

(c) E qual o salário deles em em 2039?

Dica: Utilize o raciocínio da questão 4.1. Segundo o (IBGE, 2024), o salário mínimo de 2024 é R$1412.

Observações: Pelo enunciado da questão, é "esperado"que o aluno entenda que o salário de T1 e T2 coincide em todos os anos em que os dois estão trabalhando simultaneamente. No segundo momento, usando a fórmula de $s(n)$ e o que já sabe sobre os salários de T1 e T2, o objetivo é que o aluno chegue a concluir a propriedade $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$. As seguintes conclusões fazem parte da argumentação necessária para resolver a atividade.

- O salário de T1 em 2024 é A. O salário de T2 em 2029 é $S(5) = s(5) \cdot A$.
- O salário de T1 em 2033 é $S(9) = s(9) \cdot A$. O salário de T2 em 2034 é $s(4) \cdot s(5) \cdot A$. Como os salários são iguais, temos que a função s satisfaz a propriedade $s(9) = s(4+5) = s(4) \cdot s(5)$.
- O salário de T1 em 2039 é $S(15) = s(15) \cdot A$. O salário de T2 em 2039 é $s(10) \cdot s(5) \cdot A$. Como os salários são iguais, temos que a função s satisfaz a propriedade $s(15) = s(10+5) = s(10) \cdot s(5)$.
- Podemos verificar que $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$, para todos os números naturais n e m. Além disso temos que $s(0) = 1$.

Questão 5.2 Supondo que os trabalhadores T1 e T2 (da questão anterior) se aposentaram em momentos distintos, onde nenhum dos dois foi contemplado com 100% do benefício previdenciário. Determine qual o ano de aposentadoria de cada um dos trabalhadores, sabendo que:

(a) O último salário recebido pelo trabalhador T1 foi R$5.760,94.

(b) O último salário recebido pelo trabalhador T2 foi R$9.606,18.

Sugestão ao professor: Aqui o professor pode fazer uma breve apresentação da função exponencial e da função logaritmo, chamando a atenção de um fato importante. Tendo uma função s que satisfaz $s(0) = 1$ e tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, vale que

$$s(n+m) = s(n) \cdot s(m); \tag{6.1}$$

se estendemos a função s de maneira a estar definida em $\mathbb{R}$, conservando a propriedade (6.1), mas agora para todo $n, m \in \mathbb{R}$, vamos obter **a função exponencial**. Este fato foi provado no teorema de caracterização da função exponencial, ver teorema 3.4.

Por outro lado, na hora de falar da função logaritmo, pode chamar a atenção à questão 5.2 onde a função aparece como a inversa da exponencial.

<u>Aula 6</u>: Utilizar o aplicativo GeoGebra para relacionar a variação salarial de um trabalhador e o gráfico da função exponencial.

Objetivo: Baseando-se nas informações acumuladas nas aulas anteriores, utilizar o geogebra para demonstrar, através do comportamento da variação salarial de um trabalhador, o comportamento do gráfico da função exponencial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 6.1 Utilizando as informações das aulas anteriores, vamos inserir os valores encontrados no programa GeoGebra e responder algumas questões.

(a) Vamos usar a função Sequência (expressão, variável, valor inicial, valor final) do Geogebra. Podemos colocar os dados da seguinte forma:

   (i) Na primeira linha definiremos a função $s(n) = 1,066^n$ (ver figura 19), que representa o ganho de cada real do salário de um trabalhador, ver Questões 4.1 e 4.2.

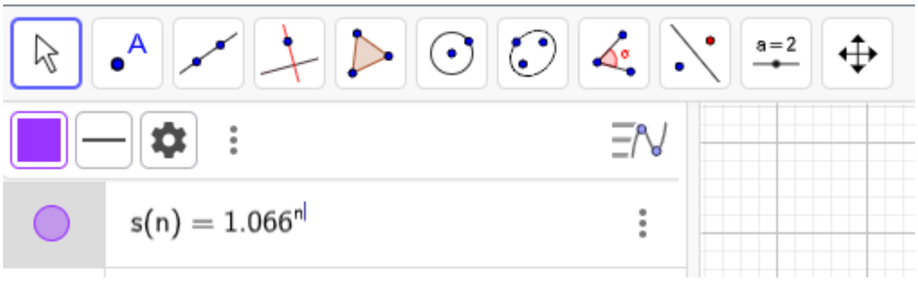


Figura 19 – Atividade em geogebra (a)

(ii) Na segunda linha, utilizaremos o comando Sequência$((n, s(n)), n, 0, 20)$, ou seja, no primeiro lugar da função colocamos o par ordenado $(n, s(n))$; no segundo lugar a variável que estamos usando (n neste caso); no terceiro lugar o valor inicial da variável n (0 neste caso) e no quarto lugar a valor final da variável. Ver figura 20.

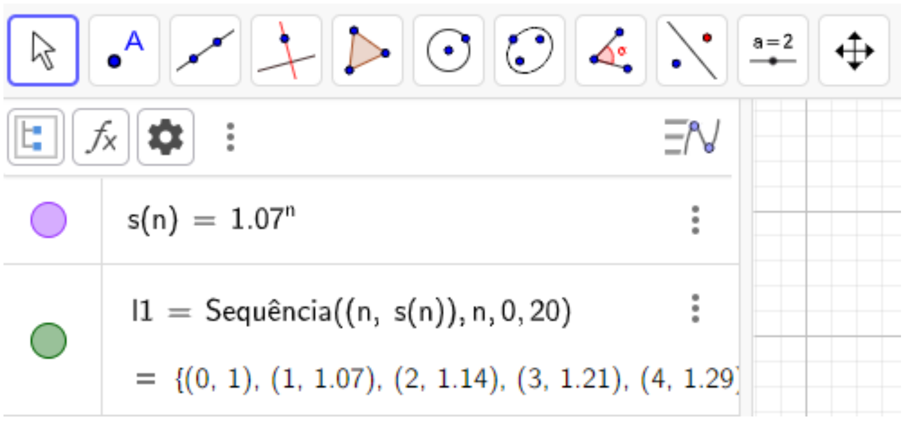


Figura 20 – Atividade em geogebra (b)

(iii) A seguir, podemos mudar somente o valor final da variável n. Podemos fazer para valor final igual a 40 e 200

- Sequência$((n, s(n)), n, 0, 40)$
- Sequência$((n, s(n)), n, 0, 200)$.

(iv) Faça um zoom out no gráfico obtido no final do item anterior, de maneira a que, pelo menos, o início do gráfico tenha aparência de uma curva contínua.

(b) A partir da imagem observada, qual o comportamento da curva quando inserimos valores maiores no último item da função Sequência?

(c) Em grupo, discuta como o comportamento da função está presente em outros problemas do cotidiano.

Sugestão ao professor: No final desta atividade, podem ser apresentados para os alunos os gráficos das funções exponenciais. Aproveitando ainda a função Sequência do Geogebra, podem ser feitos outros exemplos de gráficos, mudando somente a função $s(n)$. É um momento adequado para mostrar que o crescimento ou decrescimento das funções exponenciais depende só da base que aparece em $s(n)$. A função cresce quando a base é maior do que 1 e decresce quando é menor do que 1.

4ª etapa: Cálculo dos descontos e benefícios

Aula 7 : Cálculo do desconto previdenciário e determinação da aposentadoria de um trabalhador.

Objetivo: Apresentar ao aluno conceitos básicos do sistema trabalhista e previdenciário brasileiro e aprofundamento dos conceitos matemáticos acerca da função exponencial. Além de trabalhar o desenvolvimento de habilidades com ferramentas digitais de criação de tabelas.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet, ou computador com alguma folha de cálculos instalada.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Sugestão ao professor: Nesta aula utilizaremos ferramentas digitais para a criação de tabelas (libreoffice, openoffice, excel, planilhas do google, etc). O passo a passo a seguir foi feito no aplicativo planilhas do google. Dentro do passo a passo são indicados alguns valores como taxas e valores iniciais de salários. Esses números devem ser ajustados para a realidade onde a atividade for desenvolvida. As informações obtidas na Questão 3.1 podem ser utilizadas como base para adequação das planilhas à realidade onde a atividade está sendo realizada.

Passo 1: Criar um arquivo novo (figura 21)

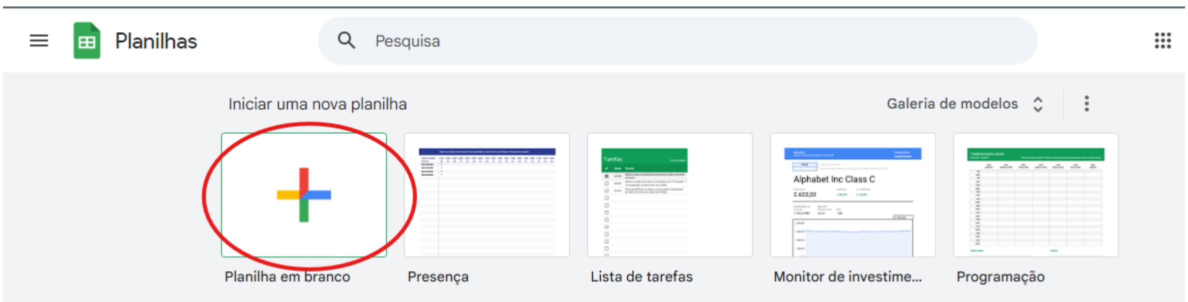


Figura 21 – Abrindo arquino novo em planilhas de google

Passo 2: Criar duas páginas. A página 1 com nome CPREV (Cálculos previdenciários) e a página 2 com nome INV (Investimentos). Para criar páginas novas, basta clicar no sinal + (figura 22). Nesta etapa só vamos trabalhar com a página 1. A página 2 vai ser usada na próxima etapa.

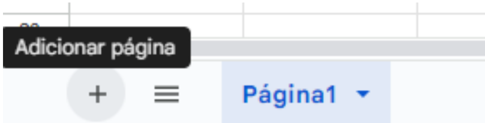


Figura 22 – Criando páginas novas

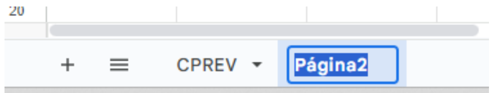


Figura 23 – Renomeando páginas

Para renomear as páginas basta clicar duas vezes sobre a aba da página desejada e colocar o novo nome (figura 23).

Passo 3: Criar três tabelas (Evolução salarial, Desconto mensal e Evolução do teto do INSS). Vamos explicar com detalhe como criar a primeira tabela.

Na célula A1, inserir o nome da primeira tabela. Na célula A2, inserir o ano de inicio do cálculo e na célula B2, inserir o valor do salário inicial (ver figura 24). Vamos usar o valor R$2824, que é aproximadamente o salário médio gonçalense, segundo (IBGE, 2024). Este valor pode ser trocado para corresponder ao contexto dos alunos que realizam as atividades.

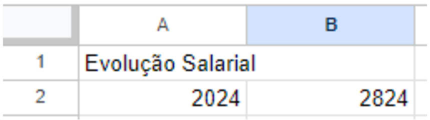


Figura 24 – Criando uma tabela

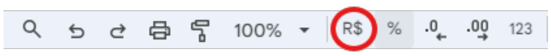


Figura 25 – O símbolo R$ aos salários

Como a coluna B representa valores monetários, com a célula B2 selecionada clique no botão R$ (figura 25).

Passo 4: Inserir fórmulas para atualização dos valores iniciais. Com a célula A3 selecionada, digite "=A2+1"(sem as aspas). Este comando atualizará o valor referente ao ano. Ver figura 26.

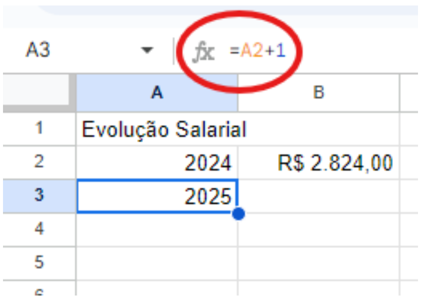


Figura 26 – Inserindo fórmula para criar a coluna A

Para atualizar todos os valores referentes aos anos, basta clicar, segurar e arrastar para baixo o círculo que aparece abaixo da célula A3, quando selecionada (figuras 27 e 28).

Figura 27 – Gerando a coluna A (a)

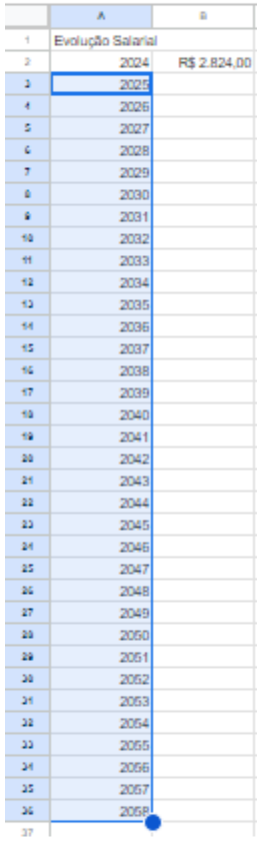


Figura 28 – Gerando a coluna A (b)

Para os valores referentes ao salário, com a célula B3 selecionada, digitamos "=B2*1,0697". O valor 1,0697 é referente a atualização salarial de acordo com a inflação média auferida, de aproximadamente 6,97%. Ver figura 29.

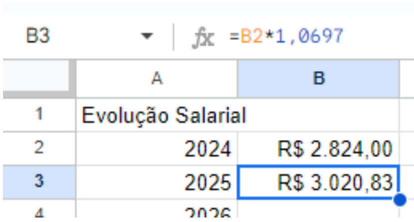
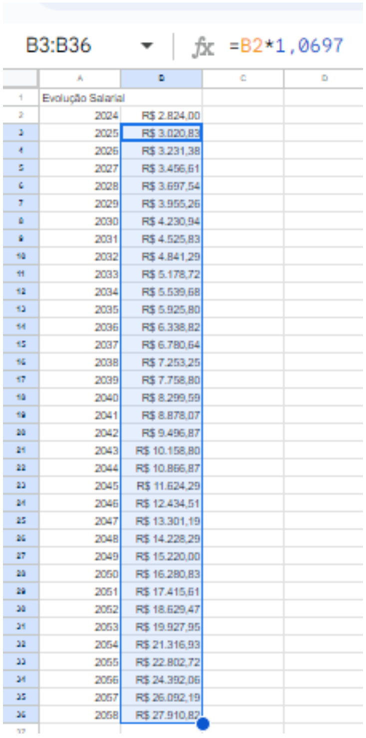


Figura 29 – Inserindo fórmula para criar a coluna B

Agora, basta repetir o processo de clicar, segurar e arrastar para obter todos os valores atualizados de acordo com o ano desejado. O resultado aparece na figura 30.

Para produzir as outras tabelas, basta repetir o processo com atenção ao digitar as fórmulas de acordo com as células de referência. Nas colunas D e E vai aparecer a tabela de Desconto mensal e nas colunas G e H vai a tabela de Evolução do teto do INSS. Vamos esclarecer alguns pontos en relação a estas tabelas

Passo 5: Para que as três tabelas apresentem atualização anual padronizada, precisamos fazer o seguinte



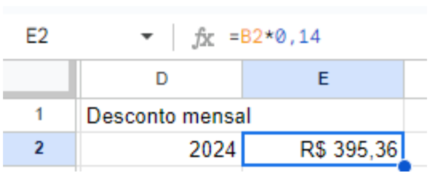
B3:B36 | fx =B2*1,0697

	A	B	C	D
1	Evolução Salarial			
2	2024	R$ 2.824,00		
3	2025	R$ 3.020,83		
4	2026	R$ 3.231,38		
5	2027	R$ 3.456,61		
6	2028	R$ 3.697,54		
7	2029	R$ 3.955,26		
8	2030	R$ 4.230,94		
9	2031	R$ 4.525,83		
10	2032	R$ 4.841,29		
11	2033	R$ 5.178,72		
12	2034	R$ 5.539,68		
13	2035	R$ 5.925,80		
14	2036	R$ 6.338,82		
15	2037	R$ 6.780,64		
16	2038	R$ 7.253,25		
17	2039	R$ 7.758,80		
18	2040	R$ 8.299,59		
19	2041	R$ 8.878,07		
20	2042	R$ 9.496,87		
21	2043	R$ 10.158,80		
22	2044	R$ 10.866,87		
23	2045	R$ 11.624,29		
24	2046	R$ 12.434,51		
25	2047	R$ 13.301,19		
26	2048	R$ 14.228,29		
27	2049	R$ 15.220,00		
28	2050	R$ 16.280,83		
29	2051	R$ 17.415,61		
30	2052	R$ 18.629,47		
31	2053	R$ 19.927,95		
32	2054	R$ 21.316,93		
33	2055	R$ 22.802,72		
34	2056	R$ 24.392,06		
35	2057	R$ 26.092,19		
36	2058	R$ 27.910,82		

Figura 30 – Tabela da evolução salarial pronta

- Nas células D2 e G2, inserir o código "=A2".
- Na célula D3 inserir o código "=D2+1"e na célula G3, inserir o código "=G2+1"
- Repetir o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul (análogo ao feito nas figuras 27 e 28)

Passo 6: Para vincular os valores referentes a evolução salarial com a tabela referente aos descontos, iremos inserir na célula E2 o código "=B2*0,14"(0,14 representa o desconto de 14% referente a contribuição para a previdência). Ver figura 31. Agora repetimos o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Em alguns programas, após a inserção do primeiro código, aparece uma sugestão de preenchimento da coluna.



E2 | fx =B2*0,14

	D	E
1	Desconto mensal	
2	2024	R$ 395,36

Figura 31 – Inserindo fórmula para criar a coluna E

Passo 7: O processo de criação da tabela evolução do teto do INSS é igual ao processo de criação da tabela evolução salarial. Hoje, o valor máximo pago pela previdência social é de R$7786,02, esse valor é atualizado pelo INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor). Este índice apresentou valor acumulado médio de 3,7% ao ano, nos últimos 10 anos. Vamos admitir estes valores como parâmetros iniciais para a criação da última tabela. O resultado final está na figura 32.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Evolução salarial			Desconto mensal			Evolução do teto do INNSS	
2	**2024**	**R$ 2.824,00**		**2024**	R$ 395,36		2024	R$ 7.786,02
3	2025	R$ 3.020,83		2025	R$ 422,92		2025	R$ 8.074,10
4	2026	R$ 3.231,38		2026	R$ 452,39		2026	R$ 8.372,84
5	2027	R$ 3.456,61		2027	R$ 483,93		2027	R$ 8.682,64
6	2028	R$ 3.697,54		2028	R$ 517,66		2028	R$ 9.003,90
7	2029	R$ 3.955,26		2029	R$ 553,74		2029	R$ 9.337,04
8	2030	R$ 4.230,94		2030	R$ 592,33		2030	R$ 9.682,51
9	2031	R$ 4.525,83		2031	R$ 633,62		2031	R$ 10.040,77
10	2032	R$ 4.841,29		2032	R$ 677,78		2032	R$ 10.412,27
11	2033	R$ 5.178,72		2033	R$ 725,02		2033	R$ 10.797,53
12	2034	R$ 5.539,68		2034	R$ 775,56		2034	R$ 11.197,04
13	2035	R$ 5.925,80		2035	R$ 829,61		2035	R$ 11.611,33
14	2036	R$ 6.338,82		2036	R$ 887,44		2036	R$ 12.040,95
15	2037	R$ 6.780,64		2037	R$ 949,29		2037	R$ 12.486,46
16	2038	R$ 7.253,25		2038	R$ 1.015,45		2038	R$ 12.948,46
17	2039	R$ 7.758,80		2039	R$ 1.086,23		2039	R$ 13.427,55
18	2040	R$ 8.299,59		2040	R$ 1.161,94		2040	R$ 13.924,37
19	2041	R$ 8.878,07		2041	R$ 1.242,93		2041	R$ 14.439,57
20	2042	R$ 9.496,87		2042	R$ 1.329,56		2042	R$ 14.973,84
21	2043	R$ 10.158,80		2043	R$ 1.422,23		2043	R$ 15.527,87
22	2044	R$ 10.866,87		2044	R$ 1.521,36		2044	R$ 16.102,40
23	2045	R$ 11.624,29		2045	R$ 1.627,40		2045	R$ 16.698,19
24	2046	R$ 12.434,51		2046	R$ 1.740,83		2046	R$ 17.316,02
25	2047	R$ 13.301,19		2047	R$ 1.862,17		2047	R$ 17.956,72
26	2048	R$ 14.228,29		2048	R$ 1.991,96		2048	R$ 18.621,11
27	2049	R$ 15.220,00		2049	R$ 2.130,80		2049	R$ 19.310,10
28	2050	R$ 16.280,83		2050	R$ 2.279,32		2050	R$ 20.024,57
29	2051	R$ 17.415,61		2051	R$ 2.438,18		2051	R$ 20.765,48
30	2052	R$ 18.629,47		2052	R$ 2.608,13		2052	R$ 21.533,80
31	2053	R$ 19.927,95		2053	R$ 2.789,91		2053	R$ 22.330,55
32	2054	R$ 21.316,93		2054	R$ 2.984,37		2054	R$ 23.156,78
33	2055	R$ 22.802,72		2055	R$ 3.192,38		2055	R$ 24.013,58
34	2056	R$ 24.392,06		2056	R$ 3.414,89		2056	R$ 24.902,09
35	2057	R$ 26.092,19		2057	R$ 3.652,91		2057	R$ 25.823,46
36	2058	R$ 27.910,82		2058	R$ 3.907,51		2058	R$ 26.778,93

Figura 32 – Página 1 com as 3 tabelas

Questão 7.1 A tabela construída no programa de criação de planilhas, representa a evolução salarial de uma trabalhadora que iniciou sua jornada profissional em janeiro de 2024, até o momento da sua aposentadoria (considerando os dados do último censo de 2022). Considerando que essa mulher trabalha sob o regime de CLT em São Gonçalo e seu desconto previdenciário é de 14%, determine:

(a) O desconto mensal, em reais, feito nos anos de 2024, 2027, 2032, 2042 e 2056.

(b) O salário líquido (valor recebido após os descontos) em cada um dos anos citados no item a).

(c) O desconto anual feito em cada ano do item a).

(d) O montante total descontado dos salários recebidos nos anos do item a).

Questão 7.2 Como visto na questão anterior, o trabalhador brasileiro que atua sob o regime de CLT, é descontado de 7,5% a 14% em seu salário. O valor descontado é direcionado ao INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), dando direito ao trabalhador a inúmeros benefícios, de acordo com a respectiva carência. Entre esses benefícios está a aposentadoria. A aposentadoria por tempo de contribuição garante um benefício igual a 60% da média dos salários recebidos, caso o trabalhador tenha contribuído durante, no mínimo, 15 anos quando mulher e 20 anos quando homem. A esse percentual, acrescentasse 2% para cada ano trabalhado além do mínimo.

A partir destas informações do texto e das aulas anteriores, determine o valor do benefício de aposentadoria recebido por uma trabalhadora gonçalense:

(a) Que trabalhou 15 anos.

(b) Que trabalhou 18 anos.

(c) Que trabalhou 23 anos.

(d) Que trabalhou 33 anos.

Questão 7.3 Suponhamos que a tabela usada nas questões anteriores representa a evolução salarial de uma trabalhadora gonçalense. A partir dessas informações, responda:

(a) Qual a média de todos os salários recebidos pela trabalhadora de acordo com a tabela apresentada na questão 7.1, supondo que esta trabalhadora se aposentou no ano 2053?

(b) Qual o valor da aposentadoria dessa trabalhadora?

(c) Qual a diferença entre o valor determinado no item b) e o teto do INSS, no ano de sua aposentadoria? Qual a diferença percentual?

(d) O que podemos concluir analisando os resultados obtidos e os comparando com o último salário recebido pela trabalhadora antes de se aposentar (R$19927,55.)? Discuta com seu grupo e faça um breve relato, a partir da discussão, sobre o impacto da aposentadoria sobre o estilo de vida de um trabalhador.

Observação: A tabela leva em consideração um trabalhador em regime CLT, que pretende aposentar-se com 100% do valor referente ao seu benefício. Realize também os cálculos para um trabalhador homem, levando em consideração a necessidade de completar a tabela com mais 5 anos de trabalho.

5ª etapa: Comparação do benefício da aposentadoria com outros investimentos

<u>Aula 8</u> : Alternativas financeiras para além da aposentadoria.

Objetivo: Levar para a realidade do aluno alternativas financeiras além da aposentadoria e através de cálculos matemáticos realizar comparações entre essas alternativas.

Material utilizado: Lista impressa e computadores com acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Para esta atividade criaremos outras três tabelas. Investimento I (BOVA11), Investimento II (IVVB11) e Investimento III (Tesouro renda+ 2060). Esta parte de criação das tabelas só deve ser feita depois do aluno entender qual é o procedimento para calcular manualmente o que é pedido na questão. Veja a sugestão para o professor no final da questão desta aula.

Passo 1: A partir da tabela criada para o desenvolvimento das questões da aula 7, chamamos (renomeamos) a página 2 de INV.

Passo 2: Na página INV criamos três tabelas: Investimento I, Investimento II e Investimento III. Ver figura 33.

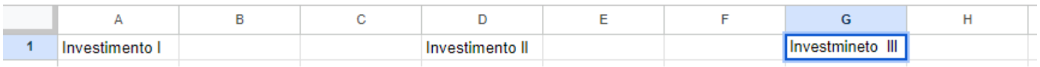


Figura 33 – Criando as 3 tabelas dos investimentos

Passo 3: Como os investimentos estão relacionados ao mesmo intervalo de tempo da evolução salarial, iremos relacionar os anos de rendimentos dos investimentos com os anos de atividade do trabalhador. Logo, iremos estabelecer uma relação entre as páginas 1 e 2, produzidas no arquivo. Para isso, nas células A2, D2 e G2, insira o código "=CPREV!A2". A partir desse código, ao alterarmos o ano inicial na tabela evolução salarial (na página 1), todas as outras tabelas (das duas páginas) se atualizarão também. Ver figura 34.

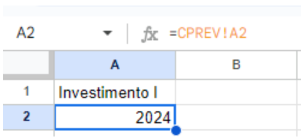
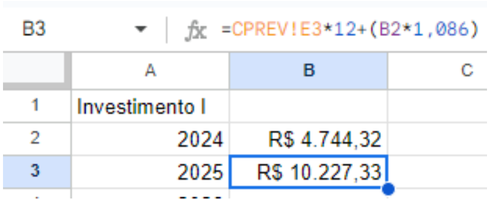


Figura 34 – Relacionando a coluna A das duas páginas

Passo 4: Com a célula A3 selecionada digite o código "=A2+1". Em seguida, repita o processo visto anteriormente de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Isto foi feito na página CPREV, veja as figuras 26, 27 e 28. Repita o processo nas outras tabelas, reproduzindo o código de acordo com a coluna correspondente. Isto siginifica, repetir o processo nas colunas D e G.

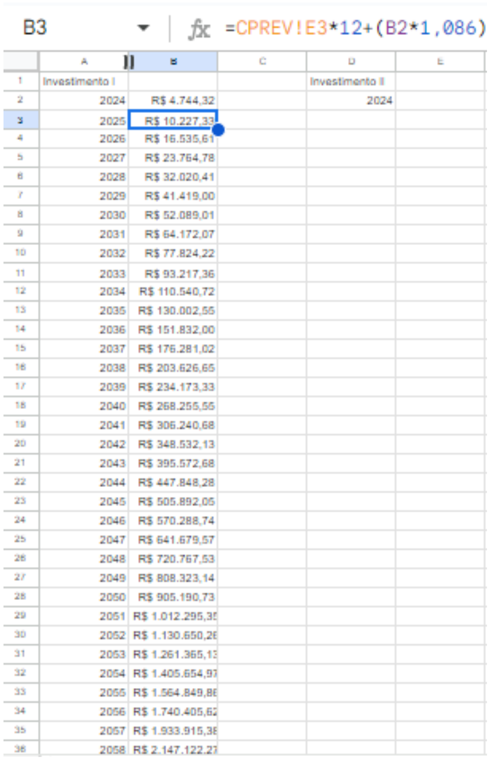
Passo 5: Agora vamos atrelar os valores referente a tabela desconto mensal, com as tabelas de investimentos. Para simplificar o cálculo, iremos adotar como padrão, a atualização dos valores de maneira anual. Para isso, com a célula B2 selecionada, vamos inserir o código "=CPREV!E2*12". A seguir, com a célula B3 selecionada, vamos inserir o código "=CPREV!E3*12+(B2*(1+α))". Novamente, repita o processo de clicar, segurar e arrastar. Nas figuras 35 e 36 mostramos este passo para $\alpha = \frac{8,6}{100}$.



B3 =CPREV!E3*12+(B2*1,086)

	A	B	C
1	Investimento I		
2	2024	R$ 4.744,32	
3	2025	R$ 10.227,33	

Figura 35 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (a)



B3 =CPREV!E3*12+(B2*1,086)

	A	B	C	D	E
1	Investimento I			Investimento II	
2	2024	R$ 4.744,32		2024	
3	2025	R$ 10.227,33			
4	2026	R$ 16.535,61			
5	2027	R$ 23.764,78			
6	2028	R$ 32.020,41			
7	2029	R$ 41.419,00			
8	2030	R$ 52.089,01			
9	2031	R$ 64.172,07			
10	2032	R$ 77.824,22			
11	2033	R$ 93.217,36			
12	2034	R$ 110.540,72			
13	2035	R$ 130.002,55			
14	2036	R$ 151.832,00			
15	2037	R$ 176.281,02			
16	2038	R$ 203.626,65			
17	2039	R$ 234.173,33			
18	2040	R$ 268.255,55			
19	2041	R$ 306.240,68			
20	2042	R$ 348.532,13			
21	2043	R$ 395.572,68			
22	2044	R$ 447.848,28			
23	2045	R$ 505.892,05			
24	2046	R$ 570.288,74			
25	2047	R$ 641.679,57			
26	2048	R$ 720.767,53			
27	2049	R$ 808.323,14			
28	2050	R$ 905.190,73			
29	2051	R$ 1.012.295,35			
30	2052	R$ 1.130.650,26			
31	2053	R$ 1.261.365,13			
32	2054	R$ 1.405.654,97			
33	2055	R$ 1.564.849,86			
34	2056	R$ 1.740.405,62			
35	2057	R$ 1.933.915,38			
36	2058	R$ 2.147.122,27			

Figura 36 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (b)

As outras tabelas referentes aos investimentos seguem a mesma lógica. As colunas a serem modificadas são E e H. É importante ter cuidado na hora de usar os dados da página CPREV. Da mesma maneira que fizemos no Investimento I; para Investimento II e Investimento III, vamos usar a coluna E da página CPREV. A mudança fundamental para cada investimento vai ser no α que é usado no passo 5.

Observação: Para determinar a rentabilidade do título TESOURO RENDA+, pesquise na internet o valor médio do IPCA nos últimos 10 anos.

Como dito anteriormente, vamos considerar três produtos diferentes.

(i) Vamos considerar que o Ibovespa apresentou uma valorização média de 8,6% a.a. O fundo ETF BOVA11, replica a rentabilidade do índice Ibovespa.

(ii) O fundo S&P 500 apresentou valorização média de aproximadamente 16,7% a.a., O ETF IVVB11 replica a rentabilidade do índice S&P500.

(iii) A figura 37 representa um dos títulos públicos do tesouro nacional. Este título foi criado em 30 de janeiro de 2023 com o intuito de tornar-se uma alternativa para o planejamento da aposentadoria. Este é um produto financeiro dito de renda fixa, logo, ele tem sua rentabilidade atrelada a um índice da economia brasileira (IPCA - Índice de Preços ao Consumidor Amplo).

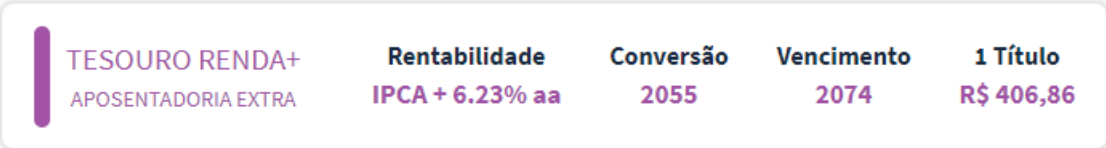


Figura 37 – Rentabilidade do título Renda+

Questão 8.1 Suponha que uma trabalhadora gonçalense aplique o mesmo valor descontado de seu salário em um dos investimentos descritos anteriormente. Para simplificar os cálculos, vamos assumir que os valores descontados ao longo de cada ano vão ser investidos no final de cada ano. Também vamos trabalhar com a rentabilidade anual dos investimentos.

(a) Construa as tabelas representando o montante acumulado nos investimentos realizados durante a vida laboral desta trabalhadora.

(b) De acordo com as informações da aula anterior, na questão 7.3, são estabelecidos valores para o benefício de aposentadoria. A partir das tabelas construídas, determine o tempo que o montante acumulado no momento da aposentadoria para cada investimento, é capaz de equalizar o valor do benefício da aposentadoria com o último salário recebido.

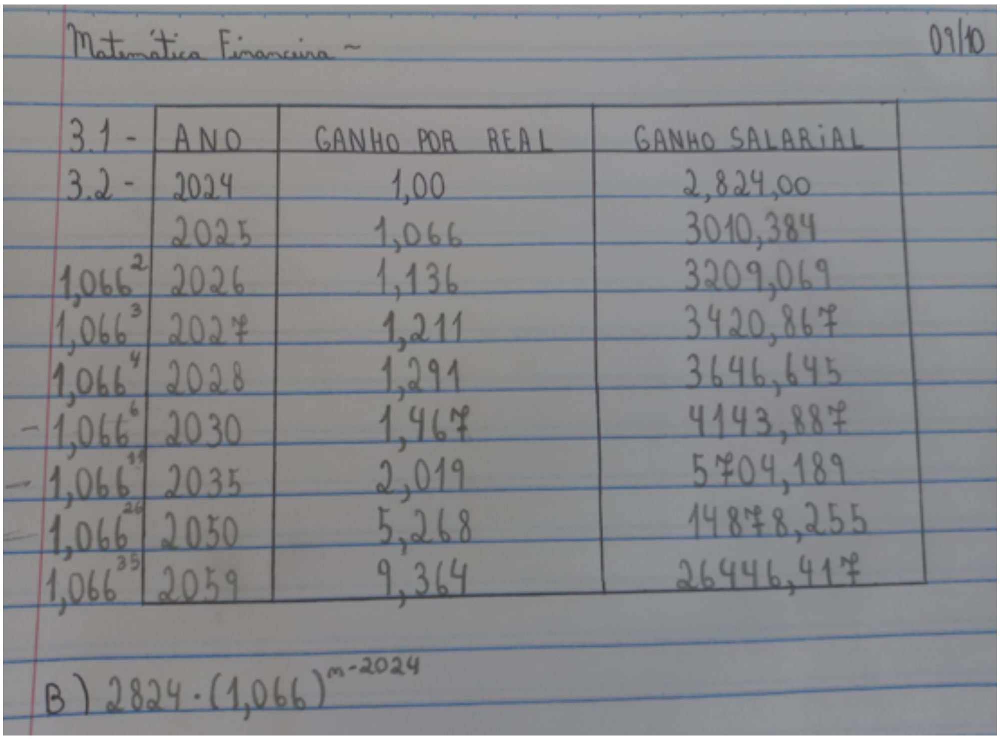
(c) Ainda de acordo com a questão 7.3, por quanto tempo o montante acumulado no momento da aposentadoria precisaria ficar investido no investimento I, para alcançar o mesmo montante do investimento II? E o investimento III?

Sugestão ao professor: Nesta aula, é interessante permitir ao aluno realizar os cálculos referentes aos anos iniciais dos investimentos, com o objetivo do aluno compreender o cálculo e como se dá a evolução dos valores. Após realizar pelo menos o cálculo referente aos três primeiros anos, o aluno deve ser capaz de generalizar (talvez com a ajuda do professor) o cálculo para qualquer ano. Alcançando tal resultado, o professor junto aos alunos deve iniciar a construção das tabelas referentes aos investimentos.

6.5 Resultados e desafios

Durante o desenrolar das aulas foi perceptível a dificuldade apresentada pelos alunos em relação aos conceitos básicos. Devido aos resquícios da pandemia, muitos alunos ainda apresentam dificuldade para o cálculo das potências, onde acabam realizando o produto entre base e expoente das potências. Erro este, recorrente entre um número elevado de alunos. Porém, mesmo com os desafios observados, foi possível perceber que os alunos se mostraram dispostos e interessados a adquirir o conhecimento proposto nas atividades.

Abaixo temos dois exemplos de resultados obtidos durante a realização da aula 4. Na figura 38 temos o resultado correto das questões e na figura 39, vemos o erro recorrente que foi mencionado.



Matemática Financeira ~ 09/10

3.1 -	ANO	GANHO POR REAL	GANHO SALARIAL
3.2 -	2024	1,00	2,824,00
	2025	1,066	3010,384
$1{,}066^2$	2026	1,136	3209,069
$1{,}066^3$	2027	1,211	3420,867
$1{,}066^4$	2028	1,291	3646,645
$1{,}066^6$	2030	1,467	4143,887
$1{,}066^{11}$	2035	2,019	5704,189
$1{,}066^{26}$	2050	5,268	14878,255
$1{,}066^{35}$	2059	9,364	26446,417

B) $2824 \cdot (1{,}066)^{m-2024}$

Figura 38 – Respostas de alunos na trilha, (a)

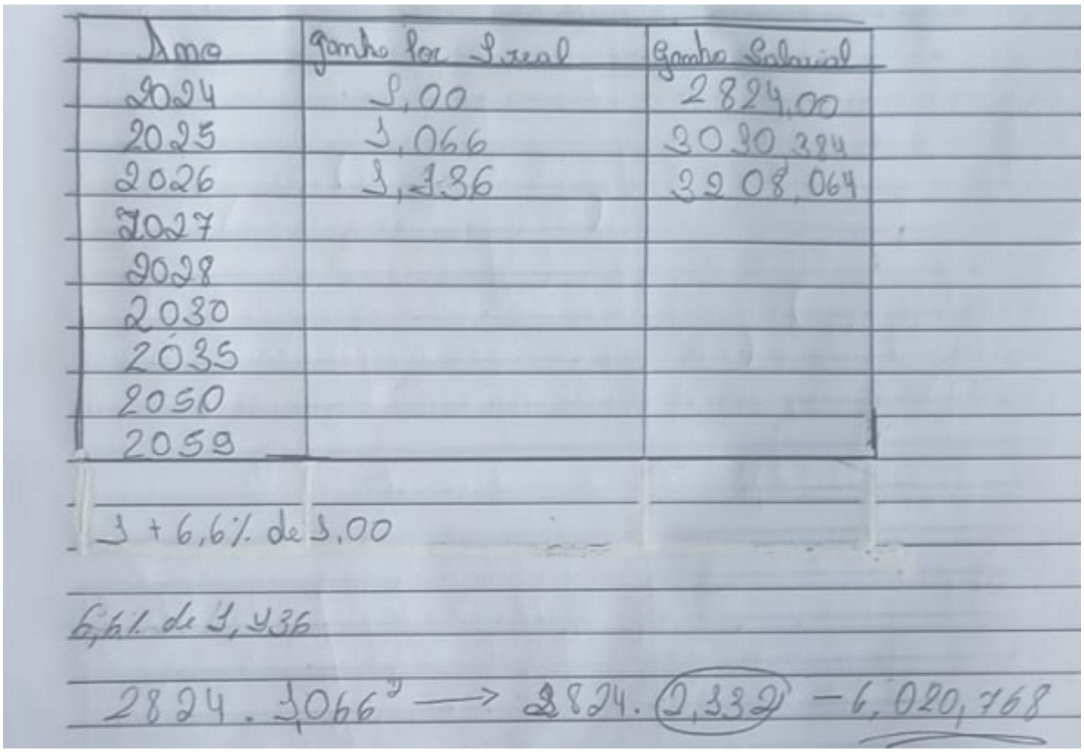


Figura 39 – Respostas de alunos na trilha, (b)

Podemos concluir que o professor, ao propor as atividades, deve estar familiarizado com a turma. Pois, desta maneira, o professor será capaz de adaptar as atividades de preparação, desenvolvidas na aula 1, de acordo com as necessidades dos alunos.

APÊNDICE A – Materiais da trilha

A.1 Formulário de avaliação

Para mensurar o nível de entendimento antes e depois da realização das atividades junto aos alunos, criamos um formulário abordando o nível de compreensão sobre funções, a importância da temática abordada nas atividades para o futuro, etc. Podemos observar alguns resultados obtidos com a primeira aplicação do formulário na seção A.3 deste apêndice.

Ainda sobre a metodologia de avaliação dos resultados obtidos, o formulário foi criado e submetido aos alunos através da plataforma google forms. Tendo em vista o fácil acesso a internet através dos celulares, esta via de distribuição do questionário se mostrou mais eficaz e satisfatória. No caso de maior dificuldade de utilização de meios eletrônicos, torna-se ideal a impressão deste formulário.

A seguir estão os links dos formulários que elaboramos e usamos junto com a trilha

Link do formulário a ser aplicado antes da realização das atividades.

https://forms.gle/22tR8L7hLcMY89kd9

Link do formulário a ser aplicado depois da realização das atividades.

https://forms.gle/CG5ahkfHQKwcinMX6

Objetivo:

Este formulário tem como objetivo principal avaliar o nível de conhecimento e compreensão dos alunos sobre os temas de funções, especialmente as funções exponenciais, e sua relação com o planejamento financeiro e profissional. Além disso, busca-se analisar a evolução desse conhecimento ao longo das atividades propostas. O formulário foi aplicado com as turmas 2002 e 2013 do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier, em São Gonçalo.

Público-alvo:

A trilha pedagógica tem como publico-alvo alunos do (2º ano) ensino médio. Pelo fato do estudo das funções ser formalizado no ensino médio, torna-se interessante o desenvolvimento das atividades propostas nesta etapa escolar. Vale ressaltar que a trilha pode ser usada também com alunos do ensino fundamental, com o objetivo de introduzir as funções exponencial e logarítmica.

As atividades deste produto educacional foram aplicadas a alunos do 2º ano do ensino médio (turmas 2002 e 2013) do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier.

Metodologia:

O formulário será aplicado em duas etapas:

- Antes das atividades: Para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre os temas abordados.
- Após as atividades: Para avaliar a evolução do aprendizado e a efetividade das atividades propostas.

O formulário é composto por 10 questões fechadas, com respostas em escala Likert de 5 pontos, variando de 1 (muito pouco ou ruim) a 5 (muito bom ou excelente). Essa escala permite quantificar o nível de concordância dos alunos com cada afirmação, facilitando a análise dos dados. Acrescentamos mais duas questões ao formulário a ser preenchido após a realização das atividades.

Conteúdo das Questões:

As questões abordam os seguintes temas:

(a) Conhecimento sobre funções: Avalia o entendimento dos alunos sobre o conceito de função, sua representação gráfica e a identificação de diferentes tipos de funções.

(b) Compreensão sobre funções exponenciais e logarítmica: Verifica o conhecimento dos alunos sobre o crescimento das funções e sua aplicação em situações reais.

(c) Importância do planejamento financeiro: Avalia a percepção dos alunos sobre a importância de planejar o futuro financeiro e a relação entre o estudo de funções e a compreensão de conceitos como juros compostos.

(d) Planejamento profissional: Verifica a consciência dos alunos sobre a importância de planejar a carreira e a relação entre o estudo de matemática e o desenvolvimento profissional.

(e) Avaliação do ensino: Coleta a opinião dos alunos sobre a forma como o conteúdo de funções é ensinado e a necessidade de maior aplicação dos conceitos no dia a dia.

Questões:

Sobre o estudo de funções

1. Qual o seu nível de conhecimento sobre o conceito de função em matemática?.
2. Você consegue identificar diferentes tipos de funções (linear, quadrática, exponencial, etc.) em gráficos e equações?
3. Como você avalia sua compreensão sobre o crescimento das funções exponencial e logarítmica e suas aplicações no mundo real?

Sobre o Planejamento Financeiro e Profissional

4. Qual a importância que você atribui ao planejamento financeiro para o seu futuro?
5. Você considera que o estudo de funções exponenciais pode te ajudar a entender melhor conceitos como juros compostos e crescimento populacional?
6. Acredita que o planejamento profissional é fundamental para alcançar seus objetivos de carreira?
7. Você já pensou em como será sua vida financeira após a aposentadoria?
8. Qual a importância de começar a planejar sua aposentadoria ainda jovem?

Sobre o Ensino de Matemática

9. Como você avalia a forma como o conteúdo de funções é ensinado em sua escola?
10. Você acha que o ensino de matemática deveria dar mais ênfase à aplicação dos conceitos no dia a dia?

E finalmente tem uma questão onde o aluno pode escrever livremente sobre a sua experiência na aprendizagem do assunto tratado.

11. A partir dos seu conhecimentos iniciais acerca de funções, funções exponenciais e logarítmica, planejamento financeiro e profissional, faça um breve relato das suas experiências antes da realização das atividades propostas.

Após a realização das atividades o formulário será novamente submetido aos alunos a fim de observar o impacto das atividades da trilha pedagógica na relação dos alunos com as funções exponenciais e na relação com o ensino de matemática. Além das perguntas já respondidas no inicio da aplicação das atividades, acrescentamos 2 questões a fim de observar possíveis resultados obtidos. As perguntas são:

12. Após o desenvolvimento das atividades, você se sente mais preparado para ingressar no mercado de trabalho?

13. As atividades propostas geraram alguma forma de debate, sobre a temática previdenciária, fora do ambiente escolar? Se sim, faça um breve relato:

A.2 Tabelas usadas na trilha pedagógica

Tabela usada nas questões 4.1 e 4.2

Tabela 4 – Evolução salarial

Ano	**Aumento por real**	**Aumento salarial**

Tabela usada nas questões 5.1 e 5.2

Tabela 5 – Comparação de salários de 2 trabalhadores

Ano	**Salário trabalhador 1 (T1)**	**Salário trabalhador 2 (T2)**

A.3 Resultados do formulário

Mostramos a seguir alguns dos resultados obtidos na aplicação do questionário aos alunos do 2º ano do ensino médio (turmas 2002 e 2013) do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier.

Em relação ao conhecimento sobre funções em geral, identificação de gráficos, compreensão de situações onde as funções aparecem no cotidiano, a maioria dos alunos marcou as opções 1 e 2, significando que o conhecimento é muito pouco ou pouco. Ver figuras 40 e 41.

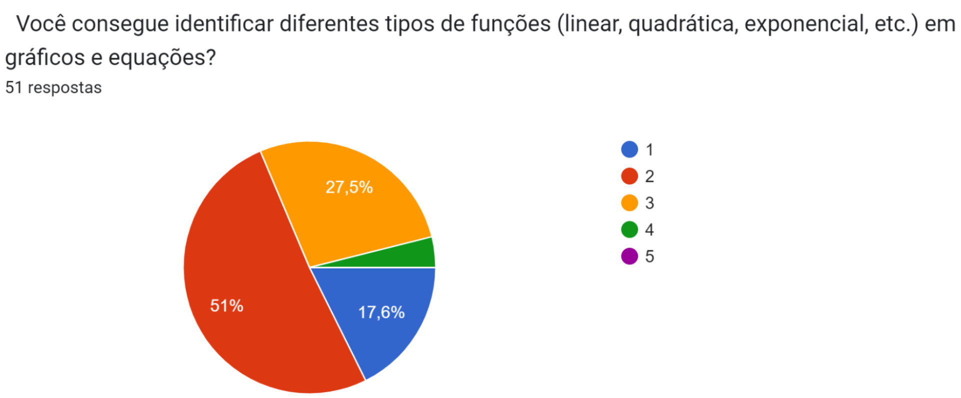


Figura 40 – Resposta à questão 2. do formulário

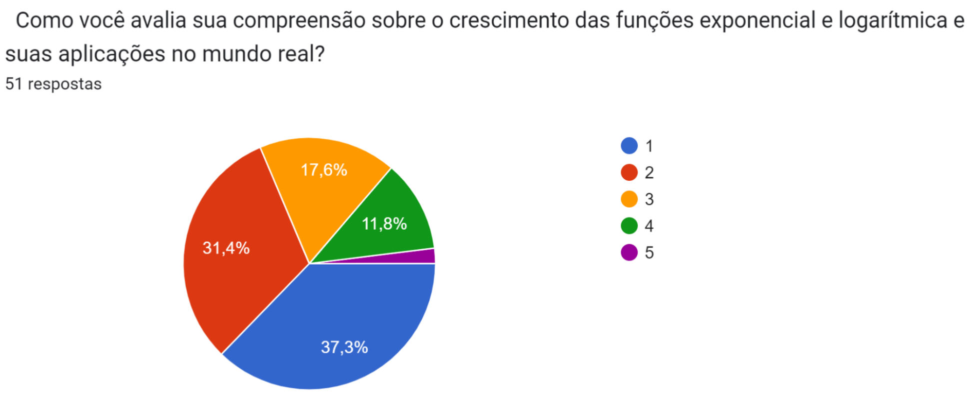


Figura 41 – Resposta à questão 3. do formulário

Em relação à importância do planejamento financeiro e de ele começar a ser feito ainda jovem, a maioria marcou a opção 5. Assim, a maior parte dos alunos considera o assunto muito importante. Ver figuras 42 e 43. Da mesma maneira, a maior parte dos alunos considera muito importante que a aplicação da matemática no cotidiano seja tratada na sala de aula. Ver figura 44.

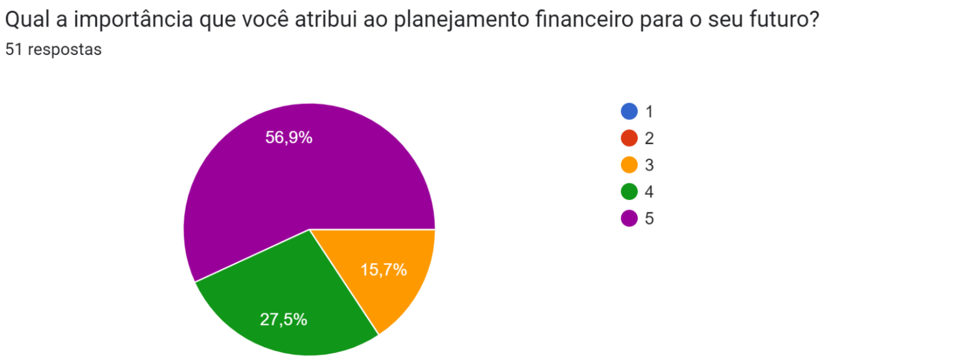


Figura 42 – Resposta à questão 4. do formulário

Na pergunta 11 do formulário, que pede ao aluno um breve relato de sua experiência em relação à aprendizagem dos assuntos tratados, antes da aplicação das atividades propostas, incluimos algumas das respostas nas figuras 45 e 46.

Qual a importância de começar a planejar sua aposentadoria ainda jovem?
51 respostas

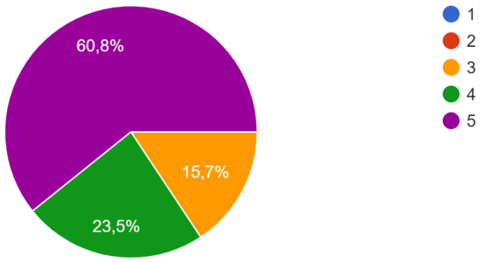


Figura 43 – Resposta à questão 8. do formulário

Você acha que o ensino de matemática deveria dar mais ênfase à aplicação dos conceitos no dia a dia?
51 respostas

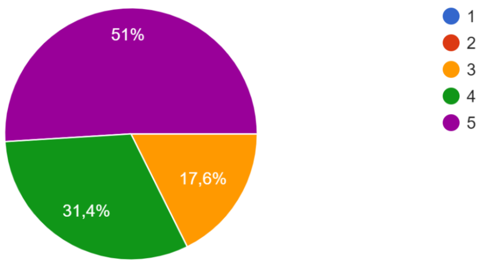


Figura 44 – Resposta à questão 10. do formulário

eu tinha um conhecimento básico sobre funções e suas aplicações. Compreendia que funções relacionam variáveis e que funções exponenciais e logarítmicas são essenciais para modelar crescimento e decrescimento. No planejamento financeiro, sabia que essas funções ajudam a calcular juros compostos e avaliar investimentos. Em termos de planejamento profissional, entendia a importância de usar essas ferramentas para prever tendências e tomar decisões informadas.

Figura 45 – Resposta à questão 11. do formulário, (a)

São matérias importantes que, com o ensino adequado, geram vantagens para o futuro. Infelizmente acredito que, em sua maioria, não é tão importante para os alunos normalmente, e que depende de como os professores ensinarão.

São matérias essenciais para o desenvolvimento intelectual de todo ser humano, isso se forem ensinadas e usadas corretamente.
Infelizmente, o ensino precário nas escolas e a falta de interesse dos alunos, não nos permite evoluir como deveríamos.

Figura 46 – Resposta à questão 11. do formulário, (b)

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. *Matemática interligada*. 1. ed.: Scipione, 2020. Citado 1 vez nas páginas 35, 37, 39.

BANCO BMG. *7 bons motivos para investir o seu dinheiro*. Blog. 2022. Disponível em: https://www.bancobmg.com.br/blog/investimentos/7-bons-motivos-para-investir-o-seu-dinheiro/. Acesso em: 4 set. 2024. Citado 1 vez na página 45.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed.: Contexto, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17.

BOLSA DO BRASIL. *ETF de renda variável*. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/etf-de-renda-variavel.htm. Acesso em: 6 set. 2024. Citado 1 vez na página 46.

BONA, André. *Finanças na vida real: pague as dívidas, conquiste seus sonhos e garanta uma boa aposentadoria (edição especial com material educacional)*. 2. ed.: LeYa Brasil, 2023. Citado 1 vez na página 45.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUZA, Paulo Roberto Câmara de. *Prisma matemática*. 1. ed.: FTD, 2020. Citado 1 vez nas páginas 35–37, 39.

BRASIL. *Base nacional comum curricular (BNCC)*. Governo Federal. Ministério da Educação. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/matematica-e-suas-tecnologias-no-ensino-medio-competencias-especificas-e-habilidades. Citado 0 vez nas páginas 20, 25.

BRASIL. *Constituição da República Federativa do Brasil*. Governo Federal. Congresso Nacional. 1988. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=CON&numero=&ano=1988&ato=b79QTWE1EeFpWTb1a. Citado 1 vez na página 40.

BRASIL. *Emenda constitucional 103, de 12 de novembro de 2019*. Governo Federal. Congresso Nacional. 2019. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=EMC&numero=103&ano=2019&ato=db4k3Yq1keZpWT94f. Citado 1 vez na página 40.

BRASIL. *Lei 8213 de 24 de julho de 1991*. Governo Federal. Congresso Nacional. 1991. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=8213&ano=1991&ato=9ecETSE9UMFpWT829. Citado 1 vez na página 40.

BRASIL. *Lei 9394 de 20 de dezembro de 1996*. Governo Federal. Congresso Nacional. 1996. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=9394&ano=1996&ato=3f5o3Y61UMJpWT25a. Citado 1 vez na página 48.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Matemática em contextos*. 1. ed.: Ática, 2020. Citado 1 vez nas páginas 34, 36, 39.

DWECK, Carol S. *Mindset: A nova psicologia do sucesso*. Objetiva, 2006. Citado 1 vez na página 14.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. 17. ed.: Paz e terra, 1987. Citado 1 vez na página 14.

GLOBO, O. *Reforma da previdência: entenda a proposta ponto a ponto*. Jornal O Globo. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/06/13/reforma-da-previdencia-entenda-a-proposta-ponto-a-ponto2.ghtml. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 1 vez na página 40.

GLOBO, O. *Reforma da previdência: Senado conclui votação da 'PEC paralela'*. Jornal O Globo. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/politica/noticia/2019/11/19/reforma-da-previdencia-senado-conclui-votacao-da-pec-paralela-em-primeiro-turno.ghtml. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 1 vez na página 40.

IBGE. *Portal Cidades do IBGE*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57, 61.

JUSBRASIL. *Cálculo do salário de benefício após a reforma da previdência*. Jusbrasil. 2019. Disponível em: https://www.jusbrasil.com.br/artigos/calculo-do-salario-de-beneficio-apos-a-reforma-da-previdencia/791765727#:~:text=Atualmente%2C%20este%20c%C3%A1lculo%20passa%20a,cada%20ano%20contribu%C3%ADdo%20a%20mai. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 1 vez na página 40.

LIMA, Elon Lages. Números e funções reais. In: COLEÇÃO PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 26, 32.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. In: COLEÇÃO do professor de matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 1 vez na página 26.

SCHLEICHER, Andreas. *Classe Mundial: Como construir um sistema educacional do século XXI*. OECD Publishing, 2019. Citado 1 vez na página 14.

SEEDUC-RJ. *Currículo referencial do estado do Rio de Janeiro, ensino médio*. Secretaria de Educação, RJ. 2022. Disponível em: https://novoensinomedio.educacao.rj.gov.br/pdfs/curriculo.pdf. Citado 2 vezes na página 23.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Multiversos matemática*. 1. ed.: FTD, 2020. Citado 1 vez nas páginas 34, 36, 39.

STATUSINVEST. *O que é IBOVESPA?* Disponível em: https://statusinvest.com.br/indices/ibovespa. Acesso em: 6 set. 2024. Citado 1 vez na página 46.

APÊNDICE B – Recurso educacional

Mauricio Celso de Oliveira Junior

Cálculo previdenciário, aposentadoria e funções: uma trilha pedagógica para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando modelagem matemática

Universidade Federal Fluminense – UFF

Orientador: Javier Solano

Niterói, RJ

2024

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Este recurso educacional é um produto da dissertação de mestrado intitulada "*Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais*"(DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024) e como o seu nome deixa claro consiste em uma trilha pedagógica. Segundo o Centro de Educação Tecnológica do Amazonas (CETAM), entendesse a trilha pedagógica como "...uma abordagem estruturada e sequencial para o processo de ensino e aprendizagem. Ela busca organizar conteúdos, atividades e avaliações de maneira lógica e coerente, facilitando a aquisição de conhecimentos e habilidades pelos alunos. O objetivo principal é proporcionar um caminho claro e eficiente para o desenvolvimento das competências necessárias, respeitando o ritmo e o estilo de aprendizagem de cada indivíduo." A trilha pedagógica tem como características importantes, a sequencialidade (pois as atividades são planejadas de forma gradual), a coêrencia (as atividades estão alinhadas com os objetivos de aprendizagem) e a diversidade (são usados recursos e estratégias necessários para as diferentes formas de aprender).

Afim de criar um modelo para o ensino das funções exponencial e logarítmica para alunos do ensino médio, as atividades foram elaboradas a partir dos cálculos previdenciários brasileiros. As atividades pertencentes à trilha abordaram o processo de evolução salarial de um trabalhador, desconto previdenciário, cálculo do benefício de aposentadoria, alternativas de investimentos, etc. A ideia de abordar a temática previdenciária surge da necessidade de relacionar o conteúdo aprendido em sala de aula com a realidade fora do ambiente escolar.

De acordo com a lei LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996 (Lei de diretrizes e bases da educação nacional - LDB) (BRASIL, 1996), que afirma o caráter abrangente da educação:

> Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.
>
> § 2º A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social."

E ainda,

> "Art. 3º O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: X - valorização da experiência extra-escolar; XI - vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais."

Acreditamos que a trilha elaborada atende os preceitos estabelecidos na LDB, trazendo pertinência ao estudo e preparando o discente para a vida profissional.

2 Objetivos e proposta das atividades

O nosso objetivo é introduzir conceitos matemáticos a través de situações problema que fazem parte da vida prática dos alunos. Diferentemente da abordagem feita nos livros, em geral, que estabelece relações entre as famílias de funções e uma grande variedade de problemas pequenos independentes e não relacionados, no trabalho apresentamos as funções exponenciais e logarítmicas usando um único assunto como fio condutor, a aposentadoria. Através de uma trilha pedagógica, que integra a modelagem matemática ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas, propomos atividades por meio das quais o aprendizado é contextualizado, estabelecendo uma conexão entre conceitos matemáticos e situações da vida real. Usando problemas relacionados ao mercado de trabalho, como contribuições para a previdência social, estimativas de salários e investimentos financeiros, esta sequência de atividades, além de levar os alunos a compreenderem alguns conceitos fundamentais das funções, também apresenta idéias financeiras de grande pertinência para a vida dos alunos após o ensino médio e ingresso no mercado de trabalho. Portanto, estamos desenvolvendo o conhecimento em duas frentes, o conhecimento matemático e o conhecimento do funcionamento do mercado de trabalho e sistema de aposentadoria brasileiro.

Em alguns pontos da trilha pedagógica, promovemos e explicamos o uso de ferramentas digitais para o desenvolvimento das atividades. Desta forma, o aluno vai ter contato com estas ferramentas, vai começar a entender como podem ser usadas, e ainda mais importante, vai compreender a importância e utilidade que estas ferramentas podem ter na resolução tanto das atividades sugeridas na trilha como de outros problemas que podem aparecer na sua vida.

A trilha pedagógica elaborada como produto educacional deste trabalho tem como proposta relacionar diversos tópicos do ensino de matemática, a fim de levar o aluno a acumular repertório e, assim, compreender as funções e como estas se apresentam em seu cotidiano.

As atividades foram dispostas em aulas, de pelo menos uma hora e quarenta minutos (2 tempos de 50 minutos), sendo realizadas em grupos. Destacamos que o público alvo das atividades propostas nesta trilha pedagógica são alunos do ensino médio. Este fato ocorre pois é no ensino médio onde o estudo de funções é formalizado e estes alunos já se encontram na iminência do ingresso no mercado de trabalho. Porém, qualquer aluno com familiaridade em porcentagem, médias e potenciação, pode realizar as atividades. A trilha pode ser usada para que o aluno tenha o primeiro contato com as funções exponenciais e logarítmicas.

Dividimos as atividades em cinco etapas: etapa preparatória, apresentação do problema, cálculo do aumento do salário, cálculo dos descontos e benefícios e comparação dos benefícios da aposentadoria com outros investimentos. No início temos uma revisão sobre o cálculo de porcentagem, médias e potências. Na sequência, os mesmos tópicos desenvolvidos na aula anterior são relacionados ao mundo do trabalho. Adiante, é proposta uma pesquisa sobre assuntos que serão pertinentes nas próximas aulas. Continuando, nas três aulas seguintes concentram-se em levar o aluno a definir a função exponencial, verificar sua propriedade fundamental, estabelecer sua relação com os logaritmos e, com uso do Geogebra, observar o comportamento do seu gráfico. Por fim, nas duas últimas aulas, com auxílio de programas de criação de planilhas, demonstraremos com maior profundidade o funcionamento do cálculo previdenciário brasileiro, determinaremos valores de aposentadorias para um trabalhador hipotético e verificaremos como o ato de investir com foco na aposentadoria pode fazer grande diferença na manutenção da qualidade de vida do trabalhador.

No capítulo 4 da dissertação de mestrado Profmat (DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024), tem mais informações, usadas na trilha, sobre aposentadoria e investimentos.

3 Sugestões, avaliação e material usado

3.1 Sugestões ao professor

Toda a sequência didática foi estruturada num formato progressivo, de maneira que o conhecimento seja adquirido de maneira cumulativa. Pensamos que a sequência deve ser seguida na ordem estabelecida, a fim de que, após cada atividade, o aluno adquira os conhecimentos necessários para atividades posteriores.

Todo o planejamento das atividades foi feito considerando que o aluno deve ser o protagonista principal. Consideramos que o sucesso das atividades depende de que seja o aluno quem faz as aproximações às respostas, os erros e as descobertas. Por isso, é importante que o professor permita que o aluno desenvolva as atividades, que motive ao aluno para que se torne mais autônomo no percurso das atividades. O professor precisa estar próximo dos alunos no decorrer das aulas, mas sem interferir ativamente no processo de desenvolvimento das atividades. É válido estabelecer grupos de trabalho durante todo o percurso da trilha, permitindo que os próprios alunos estabeleçam uma rotina de trabalho. É importante que o professor perceba se há algum “problema”que está impedindo o avanço das atividades e proponha possíveis caminhos para resolver o problema, sem dar respostas prontas, permitindo ao aluno dar continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Para garantir melhor aproveitamento da realização das atividades, disponibilizamos o link das tabelas eletrónicas que serão desenvolvidas e utilizadas nas questões das aulas 7 e 8.

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1QRFFFbaUdBFn-YxpIZeHGYF5R62b-6tJtXbX7Yf4iEA/edit?usp=sharing

No produto educacional, algumas das atividades propostas contam com sugestões ao professor, a fim de dar suporte a este durante sua prática docente. As atividades foram elaboradas pensando em guiar passo a passo ao aluno para adquirir o conhecimento pretendido. Em algumas atividades da trilha pedagógica, apresentamos orientações explícitas ao aluno, com o objetivo de guiar ele na realização de alguma etapa da atividade, que (achamos) poderia gerar mais confusão.

3.2 Formulário de avaliação

Para mensurar o nível de entendimento antes e depois da realização das atividades junto aos alunos, criamos um formulário abordando o nível de compreensão sobre funções, a importância da temática abordada nas atividades para o futuro, etc.

O formulário foi criado e submetido aos alunos através da plataforma google forms. Tendo em vista o fácil acesso a internet através dos celulares, esta via de distribuição do questionário se mostrou mais eficaz e satisfatória. No caso de maior dificuldade de utilização de meios eletrônicos, torna-se ideal a impressão deste formulário.

A seguir estão os links dos formulários que elaboramos e usamos junto com a trilha

Link do formulário a ser aplicado antes da realização das atividades.

https://forms.gle/22tR8L7hLcMY89kd9

Link do formulário a ser aplicado depois da realização das atividades.

https://forms.gle/CG5ahkfHQKwcinMX6

Objetivo:

Avaliar o nível de conhecimento e compreensão dos alunos das turmas 2002 e 2013 do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier sobre os temas de funções, especialmente as funções exponenciais, e sua relação com o planejamento financeiro e profissional. Além disso, busca-se analisar a evolução desse conhecimento ao longo das atividades propostas.

Público-alvo:

A trilha pedagógica desenvolvida como produto educacional por este trabalho de conclusão de curso, tem como publico-alvo alunos do ensino médio. Pelo fato do estudo das funções ser formalizado no ensino médio, torna-se interessante o desenvolvimento das atividades propostas nesta etapa escolar. Vale resaltar que a trilha pode ser usada também com alunos do ensino fundamental, com o objetivo de introduzir as funções exponencial e logarítmica.

As atividades deste produto educacional foram aplicadas a alunos do 2º ano do ensino médio (turmas 2002 e 2013) do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier.

Metodologia:

O formulário será aplicado em duas etapas:

- Antes das atividades: Para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre os temas abordados.
- Após as atividades: Para avaliar a evolução do aprendizado e a efetividade das atividades propostas.

O formulário é composto por 10 questões fechadas, com respostas em escala Likert de 5 pontos, variando de 1 (muito pouco ou ruim) a 5 (muito bom ou excelente).

Essa escala permite quantificar o nível de concordância dos alunos com cada afirmação, facilitando a análise dos dados. Acrescentamos mais duas questões ao formulário a ser preenchido após a realização das atividades.

Conteúdo das Questões:

As questões abordam os seguintes temas:

(a) Conhecimento sobre funções: Avalia o entendimento dos alunos sobre o conceito de função, sua representação gráfica e a identificação de diferentes tipos de funções.

(b) Compreensão sobre funções exponenciais e logarítmica: Verifica o conhecimento dos alunos sobre o crescimento das funções e sua aplicação em situações reais.

(c) Importância do planejamento financeiro: Avalia a percepção dos alunos sobre a importância de planejar o futuro financeiro e a relação entre o estudo de funções e a compreensão de conceitos como juros compostos.

(d) Planejamento profissional: Verifica a consciência dos alunos sobre a importância de planejar a carreira e a relação entre o estudo de matemática e o desenvolvimento profissional.

(e) Avaliação do ensino: Coleta a opinião dos alunos sobre a forma como o conteúdo de funções é ensinado e a necessidade de maior aplicação dos conceitos no dia a dia.

Questões:

Sobre o estudo de funções

1. Qual o seu nível de conhecimento sobre o conceito de função em matemática?.
2. Você consegue identificar diferentes tipos de funções (linear, quadrática, exponencial, etc.) em gráficos e equações?
3. Como você avalia sua compreensão sobre o crescimento das funções exponencial e logarítmica e suas aplicações no mundo real?

Sobre o Planejamento Financeiro e Profissional

4. Qual a importância que você atribui ao planejamento financeiro para o seu futuro?
5. Você considera que o estudo de funções exponenciais pode te ajudar a entender melhor conceitos como juros compostos e crescimento populacional?

6. Acredita que o planejamento profissional é fundamental para alcançar seus objetivos de carreira?

7. Você já pensou em como será sua vida financeira após a aposentadoria?

8. Qual a importância de começar a planejar sua aposentadoria ainda jovem?

Sobre o Ensino de Matemática

9. Como você avalia a forma como o conteúdo de funções é ensinado em sua escola?

10. Você acha que o ensino de matemática deveria dar mais ênfase à aplicação dos conceitos no dia a dia?

E finalmente tem uma questão onde o aluno pode escrever livremente sobre a sua experiência na aprendizagem do assunto tratado.

11. A partir dos seu conhecimentos iniciais acerca de funções, funções exponenciais e logarítmica, planejamento financeiro e profissional, faça um breve relato das suas experiências antes da realização das atividades propostas.

Após a realização das atividades o formulário será novamente submetido aos alunos a fim de observar o impacto das atividades da trilha pedagógica na relação dos alunos com as funções exponenciais e na relação com o ensino de matemática. Além das perguntas já respondidas no inicio da aplicação das atividades, acrescentamos 2 questões a fim de observar possíveis resultados obtidos. As perguntas são:

12. Após o desenvolvimento das atividades, você se sente mais preparado para ingressar no mercado de trabalho?

13. As atividades propostas geraram alguma forma de debate, sobre a temática previdenciária, fora do ambiente escolar? Se sim, faça um breve relato.

3.3 Tabelas usadas na trilha pedagógica

Tabela usada nas questões 4.1 e 4.2

Tabela 1 – Evolução salarial

Ano	**Aumento por real**	**Aumento salarial**

Tabela usada nas questões 5.1 e 5.2

Tabela 2 – Comparação de salários de 2 trabalhadores

Ano	**Salário trabalhador 1 (T1)**	**Salário trabalhador 2 (T2)**

4 A trilha pedagógica

4.1 1ª etapa: Preparação

4.1.1 Aula 1: Cálculo de porcentagem, médias e potenciação

Objetivo: Revisar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 1.1 Calcule as porcentagens abaixo:

(a) 10% de 200

(b) 15% de 300

(c) 22% de 80

(d) 17% de 90

(e) 25% de 1200

(f) 12,5% de 900

(g) 9,7% de 800

(h) 13,4% de 152

(i) 22,8% de 2546

Questão 1.2 A imagem na figura 1 representa o preço da banana numa feira de rua. Sobre o preço inicial da banana, responda:

Figura 1 – Figura da questão 1.2.

(a) Qual será o preço da banana após um aumento de 10% ?

(b) Qual será o preço da banana após um desconto de 15%, em relação ao preço obtido no item a)?

(c) Se a banana passar a ser vendida a 9,20, qual será o percentual de aumento aplicado ao seu preço inicial?

(d) Se a banana passar a ser vendida a 6,40, qual será o percentual de desconto aplicado, em relação ao valor obtido no item b)?

Questão 1.3 Determine a média aritmética dos valores representados abaixo:

(a) 23, 45, 73, 78, 94

(b) 100, 328, 452, 581, 973, 325

(c) 1248, 4284, 3124

Questão 1.4 Leia os problemas abaixo e responda:

(a) Na prova para um cargo na enfermaria do hospital, uma candidata fez 6 pontos na prova de conhecimentos específicos, 4 pontos em conhecimentos gerais e 5 pontos em Português. Determine a média ponderada das notas dessa candidata sabendo que os respectivos pesos são 5, 3 e 2.

(b) Sabendo que um aluno obteve as notas 8, 9, 6 e 8 e que essas notas têm, respectivamente, os pesos 2, 2, 3 e 3, calcule a sua média.

(c) A idade média dos meninos atendidos em uma clínica pediátrica foi 6 anos e das meninas, 8. O número de meninos era 25 e o de meninas, 30. Então, qual a idade média das crianças atendidas?

(d) Na farmácia de um hospital universitário foi feita uma inspeção no lote de determinado remédio em comprimidos. Foram encontradas:

- 2 embalagens com 6 comprimidos;
- 4 embalagens com 7 comprimidos;
- 4 embalagens com 5 comprimidos;
- 3 embalagens com 8 comprimidos.

Qual foi a média ponderada de comprimidos por embalagem?

Questão 1.5 Calcule as potências:

(a) 2^3 (b) 5^4 (c) 8^0 (d) 10^3 (e) 7^2 (f) 8^1

Sugestão ao professor: Esta aula de revisão consiste em atividades relativamente simples pois os alunos das turmas onde as mesmas foram aplicadas, carregavam muitas dificuldades dos anos anteriores por conta da pandemia. Os assuntos tratados nas questões são os que consideramos fundamentais para o aluno conseguir encarar as seguintes atividades. A aula foi pensada para ser desenvolvida inteiramente pelos alunos, mas pode ser facilmente adequada pelo professor de acordo com as capacidades dos alunos que realizarão as atividades. Por exemplo, fica a critério do professor a realização de uma exposição da matéria, feita prévia (ou posterior) ao desenvolvimento das atividades propostas nesta aula.

4.2 2ª etapa: Apresentação do problema

4.2.1 Aula 2: Aplicação dos conceitos de porcentagem, médias e potenciação no contexto do mercado de trabalho.

Objetivo: Aplicar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação, revistos na aula anterior, utilizando termos e objetos relacionados ao mercado de trabalho.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 2.1 A figura 2 é o contracheque de um professor da rede estadual de ensino.

Neste contracheque, podemos observar que esse professor tem valores a receber e valores a descontar do seu salário. Um desses descontos (8994 - RIOPREVIDÊNCIA FINANC - ATIVOS) é referente a sua previdência, ou seja, é destinado a sua aposentadoria. Agora, sobre esse contracheque, responda:

(a) Qual o percentual de desconto em relação ao salário do professor? Considere 3315,41 como base de cálculo.

(b) Ao receber um aumento de 20% sobre sua base de cálculo, qual seria seu novo valor?

(c) Após o aumento do item anterior, qual seria o valor do desconto previdenciário, mantida a mesma proporção?

Questão 2.2 Consideremos a tabela 3, que descreve a evolução salarial de uma certa

GOVERNO DO ESTADO
RIO DE JANEIRO

Secretaria de Estado de Planejamento e Gestão
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
CNPJ Nº: 42.498.659/0001-60 Comprovante de Pagamento - 10/2023

CPF	PIS/PASEP	Nome			
[redacted]	[redacted]	[redacted]			
IdFunc	Nascimento	Nº Dep. IR	Nº Dep. Sal. Família	Folha	FolhaRef
[redacted]	[redacted]	0	0	1	Mensal

Vínculo	Tipo de Vínculo	Origem/Matrícula
1	EFETIVO	

Cargo Efetivo	Ref.
PROFESSOR DOCENTE I - 30 HORAS	C03
Cargo Comissionado	Ref.
***	***

Data Exercício/Início	UA/Setor	Lotação
14/08/2023	[redacted]	[redacted]

Banco - Agência - Conta	Data Aposentadoria	Fundamentação Legal
[redacted]	***	***

Discriminação	Competência	Vantagens	Descontos	Informações Adicionais
0001 - VENCIMENTO	01/10/2023	R$ 2.647,30	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0207 - PISO MAGISTERIO	01/10/2023	R$ 668,11	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0709 - AUXÍLIO TRANSPORTE	01/10/2023	R$ 359,10	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
0725 - AUXÍLIO ALIMENTAÇÃO	01/11/2023	R$ 449,10	R$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
8994 - RIOPREVIDÊNCIA FINANC - ATIVOS	01/10/2023	R$ 0,00	R$ 464,16	
8999 - IMPOSTO DE RENDA	01/10/2023	R$ 0,00	R$ 57,29	

Total de Ganhos	Total de Descontos	Total Líquido
R$ 4.123,61	R$ 521,45	R$ 3.602,16

Valor FGTS	Base Cálculo FGTS	Base Cálculo Previdência	Base Cálculo IRPF
R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 3.315,41	R$ 2.851,25

Código de Autenticação: [redacted]
Para autenticar este contracheque, por favor entre no site abaixo e digite o código de autenticação.
http://www.servidor.rj.gov.br/ Acessando a opção validação de contracheque
Data e hora de emissão: 05/01/2024 00:17:28

Figura 2 – Contracheque de um trabalhador.

trabalhadora durante 20 anos.

(a) Com base na tabela 3, determine a média dos salários recebidos pela trabalhadora.

(b) Determine 70% e 80% da média dos salários recebidos pela trabalhadora.

Sugestão ao professor: Ao final das atividades, é fundamental que os alunos compreendam que os cálculos presentes na questão 2.2 são a base para a definição do valor da aposentadoria. Para tanto, é interessante iniciar uma discussão sobre os resultados obtidos. Essa reflexão pode contribuir para uma maior conscientização sobre a importância de planejar a aposentadoria e os desafios que muitos trabalhadores enfrentam nesta nova fase da vida.

Tabela 3 – Evolução salarial de uma trabalhadora

Ano	**Salário**	**Ano**	**Salário**
1°	R$ 900,00	11°	R$ 1465,96
2°	R$ 945,00	12°	R$ 1539,25
3°	R$ 992,25	13°	R$ 1616,21
4°	R$ 1041,86	14°	R$ 1697,02
5°	R$ 1093,95	15°	R$ 1781,87
6°	R$ 1148,64	16°	R$ 1870,96
7°	R$ 1206,07	17°	R$ 1964,50
8°	R$ 1266,37	18°	R$ 2062,72
9°	R$ 1329,68	19°	R$ 2165,85
10°	R$ 1396,16	20°	R$ 2274,14

4.2.2 Aula 3: Pesquisa sobre a realidade salarial da região e estudo dirigido a partir das informações obtidas na pesquisa.

Objetivo: Situar os alunos sobre a realidade salarial da região onde vivem e aplicar os conceitos aprendidos nas atividades anteriores dentro das suas realidades geográficas.

Material utilizado: Acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 3.1 Dividindo a turma em grupos de 4 até 8 alunos, perfazendo um total de até 6 grupos, proponha a seguinte pesquisa:

(a) Como é calculado o valor da aposentadoria?

(b) Qual o valor descontado do salário destinado a aposentadoria?

(c) Qual a idade mínima para a aposentadoria?

(d) Qual a expectativa de vida média do brasileiro? E dos habitantes da sua região?

(e) Qual o salário médio da região onde você vive?

(f) Em comparação com o salário médio brasileiro, o salário da sua região é maior, menor ou igual? Se a média salarial for diferente da nacional, qual a proporção dessa diferença?

Sugestão ao professor: A realização desta atividade pode ser diversificada, sendo executada como apresentação de seminários, pesquisa, resumo, mapa mental ou outros instrumentos propostos. Parece importante que os alunos possam pesquisar, fora da aula, informações sobre as questões propostas.

4.3 3ª etapa: Cálculo do aumento do salário

4.3.1 Aula 4: Atividades utilizando os conceitos aprendidos para determinar o aumento de salário de um trabalhador.

Para determinar o salário do trabalhador, estamos usando uma função exponencial.

Objetivo: Através do cálculo de atualização salarial de um trabalhador, concluir que precisamos calcular os valores de uma determinada função exponencial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 1 que está na seção 3.3.

Questão 4.1 Um trabalhador inicia sua vida profissional em 2024. O governo atual propôs um aumento do salário mínimo de 6,6%. Considerando que este aumento se torna fixo, ou seja, todos os anos trabalhados após 2024 apresentarão o mesmo aumento no salário mínimo.

Por cada real que o trabalhador recebe em 2024,

(a) Quanto vai receber em 2025?

(b) E em 2026?

(c) E em 2027?

(d) E em 2028?

(e) E em 2030?

(f) E em 2035?

(g) E em 2050?

(h) E em 2059?

Questão 4.2 Assumindo que um trabalhador brasileiro médio e um trabalhador gonçalense médio iniciam sua vida profissional em 2024 e que os salários serão reajustados a uma taxa fixa de 6,6% ao ano, responda.

(a) Qual vai ser o salário de cada trabalhador em 2025? Em 2030? Em 2035? Em 2059?

(b) Poderia escrever uma fórmula simples para representar a evolução salarial deste trabalhador? Qual será o salário do trabalhador no ano de 2024+n?

Observação: Como resultado da pesquisa da aula anterior, os alunos devem ter achado uma fonte para saber os salários médios brasileiro e gonçalense. Uma fonte confiável é o site do IBGE, ver (IBGE, 2024).

Sugestão ao professor: A fim de responder às questões 4.1 e 4.2, é ideal a criação de uma tabela com três colunas específicas. A primeira delas seria preenchida com os anos e as demais seriam utilizadas para calcular o aumento percentual por cada real ganho, e a outra para registrar o valor total do aumento salarial em cada ano (ver tabela 1).

No item b) da questão 4.2, é esperado que o aluno chegue à seguinte função:

$$S(n) = A \cdot (1 + 6,6/100)^n \text{ onde } A \text{ é o salário em 2024.}$$

Vamos usar a notação $s(n) = (1 + 6,6/100)^n$. Isso significa que $S(n) = A \cdot s(n)$.

4.3.2 Aula 5: Propriedade $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$ e relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$.

Objetivo: Através da comparação salarial entre dois trabalhadores, levar o aluno a deduzir e compreender a propriedade $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$ e apresentar ao aluno a relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$, necessária para determinar o tempo decorrido até cada trabalhador alcançar determinado patamar salarial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 2 que está na seção 3.3.

$\boxed{\textbf{Questão 5.1}}$ Vamos assumir que o valor do **salário mínimo** a partir de 2024, vai ser determinado pelo aumento fixo de 6,6% a cada ano. Agora, suponha dois trabalhadores (T1 e T2) ganhando o salário mínimo. Um deles (T1) começou a sua vida laboral em 2024 e o outro (T2) em 2029. Determine:

(a) Qual vai ser o salário inicial de cada um dos trabalhadores?

(b) Qual o salário dos trabalhadores em 2033?

(c) E qual o salário deles em em 2039?

Dica: Utilize o raciocínio da questão 4.1. Segundo o (IBGE, 2024), o salário mínimo de 2024 é R$1412.

Observações: Pelo enunciado da questão, é "esperado"que o aluno entenda que o salário de T1 e T2 coincide em todos os anos em que os dois estão trabalhando simultaneamente. No segundo momento, usando a fórmula de $s(n)$ e o que já sabe sobre os salários de T1 e T2, o objetivo é que o aluno chegue a concluir a propriedade $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$. As seguintes conclusões fazem parte da argumentação necessária para resolver a atividade.

- O salário de T1 em 2024 é A. O salário de T2 em 2029 é $S(5) = s(5) \cdot A$.
- O salário de T1 em 2033 é $S(9) = s(9) \cdot A$. O salário de T2 em 2034 é $s(4) \cdot s(5) \cdot A$. Como os salários são iguais, temos que a função s satisfaz a propriedade $s(9) = s(4+5) = s(4) \cdot s(5)$.
- O salário de T1 em 2039 é $S(15) = s(15) \cdot A$. O salário de T2 em 2039 é $s(10) \cdot s(5) \cdot A$. Como os salários são iguais, temos que a função s satisfaz a propriedade $s(15) = s(10+5) = s(10) \cdot s(5)$.
- Podemos verificar que $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$, para todos os números naturais n e m. Além disso temos que $s(0) = 1$.

$\boxed{\textbf{Questão 5.2}}$ Supondo que os trabalhadores T1 e T2 (da questão anterior) se aposentaram em momentos distintos, onde nenhum dos dois foi contemplado com 100% do benefício previdenciário. Determine qual o ano de aposentadoria de cada um dos trabalhadores, sabendo que:

(a) O último salário recebido pelo trabalhador T1 foi R$5.760,94.

(b) O último salário recebido pelo trabalhador T2 foi R$9.606,18.

Sugestão ao professor: Aqui o professor pode fazer uma breve apresentação da função exponencial e da função logaritmo, chamando a atenção de um fato importante. Tendo uma função s que satisfaz $s(0) = 1$ e tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, vale que

$$s(n+m) = s(n) \cdot s(m); \tag{4.1}$$

se estendemos a função s de maneira a estar definida em $\mathbb{R}$, conservando a propriedade (4.1), mas agora para todo $n, m \in \mathbb{R}$, vamos obter **a função exponencial**. Este é o conteúdo do teorema de caracterização da função exponencial, ver (LIMA, 2014) ou (LIMA et al., 2006), ou ainda (DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024), teorema 3.4.

Por outro lado, na hora de falar da função logaritmo, pode chamar a atenção à questão 5.2 onde a função aparece como a inversa da exponencial.

4.3.3 Aula 6: Uso do geogebra para relacionar evolução salarial e o gráfico da exponencial

Objetivo: Baseando-se nas informações acumuladas nas aulas anteriores, utilizar o geogebra para demonstrar, através do comportamento da variação salarial de um trabalhador, o comportamento do gráfico da função exponencial.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Questão 6.1 Utilizando as informações das aulas anteriores, vamos inserir os valores encontrados no programa GeoGebra e responder algumas questões.

(a) Vamos usar a função Sequência (expressão, variável, valor inicial, valor final) do Geogebra. Podemos colocar os dados da seguinte forma:

  (i) Na primeira linha definiremos a função $s(n) = 1,066^n$ (ver figura 3), que representa o ganho de cada real do salário de um trabalhador, ver Questões 4.1 e 4.2.

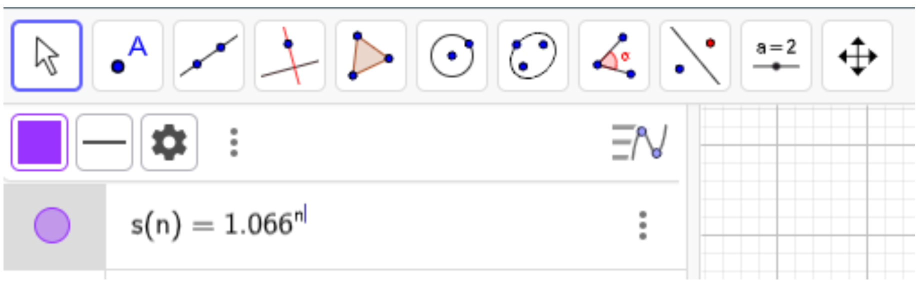


Figura 3 – Atividade em geogebra (a)

  (ii) Na segunda linha, utilizaremos o comando Sequência$((n, s(n)), n, 0, 20)$, ou seja, no primeiro lugar da função colocamos o par ordenado $(n, s(n))$; no segundo lugar a variável que estamos usando (n neste caso); no terceiro lugar o valor inicial da variável n (0 neste caso) e no quarto lugar a valor final da variável. Ver figura 4.

  (iii) A seguir, podemos mudar somente o valor final da variável n. Podemos fazer para valor final igual a 40 e 200

  - Sequência$((n, s(n)), n, 0, 40)$
  - Sequência$((n, s(n)), n, 0, 200)$.

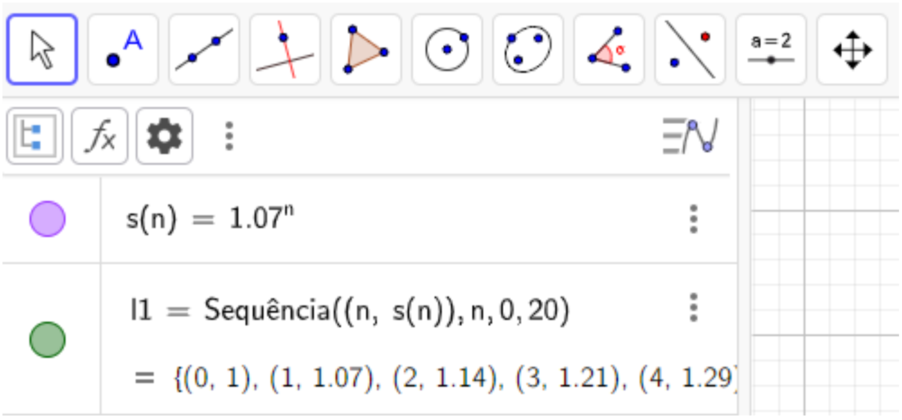


Figura 4 – Atividade em geogebra (b)

(iv) Faça um zoom out no gráfico obtido no final do item anterior, de maneira a que, pelo menos, o início do gráfico tenha aparência de uma curva contínua.

(b) A partir da imagem observada, qual o comportamento da curva quando inserimos valores maiores no último item da função Sequência?

(c) Em grupo, discuta como o comportamento da função está presente em outros problemas do cotidiano.

Sugestão ao professor: No final desta atividade, podem ser apresentados para os alunos os gráficos das funções exponenciais. Aproveitando ainda a função Sequência do Geogebra, podem ser feitos outros exemplos de gráficos, mudando somente a função $s(n)$. É um momento adequado para mostrar que o crescimento ou decrescimento das funções exponenciais depende só da base que aparece em $s(n)$. A função cresce quando a base é maior do que 1 e decresce quando é menor do que 1.

4.4 4ª etapa: Cálculo dos descontos e benefícios

4.4.1 Aula 7: Cálculo do desconto previdenciário e determinação da aposentadoria de um trabalhador.

Objetivo: Apresentar ao aluno conceitos básicos do sistema trabalhista e previdenciário brasileiro e aprofundamento dos conceitos matemáticos acerca da função exponencial. Além de trabalhar o desenvolvimento de habilidades com ferramentas digitais de criação de tabelas.

Material utilizado: lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet, ou computador com alguma folha de cálculos instalada.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Sugestão ao professor: Nesta aula utilizaremos ferramentas digitais para a criação de tabelas (libreoffice, openoffice, excel, planilhas do google, etc). O passo a passo a seguir foi feito no aplicativo planilhas do google. Dentro do passo a passo são indicados alguns valores como taxas e valores iniciais de salários. Esses números devem ser ajustados para a realidade onde a atividade for desenvolvida. As informações obtidas na Questão 3.1 podem ser utilizadas como base para adequação das planilhas à realidade onde a atividade está sendo realizada.

Passo 1: Criar um arquivo novo (figura 5)

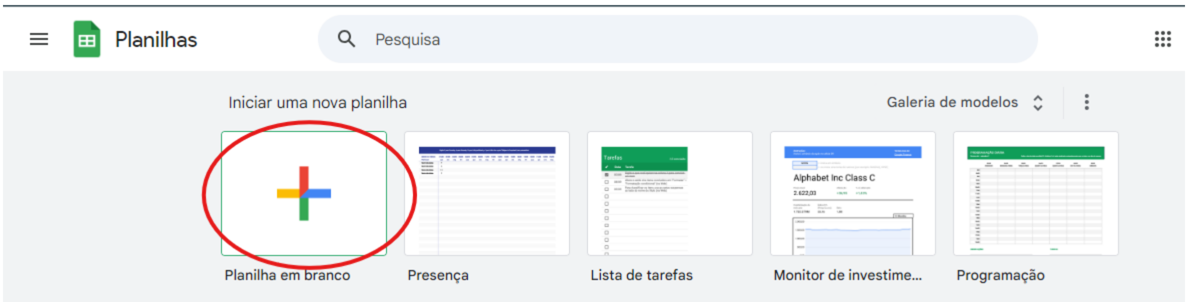


Figura 5 – Abrindo arquino novo em planilhas de google

Passo 2: Criar duas páginas. A página 1 com nome CPREV (Cálculos previdenciários) e a página 2 com nome INV (Investimentos). Para criar páginas novas, basta clicar no sinal + (figura 6). Nesta etapa só vamos trabalhar com a página 1. A página 2 vai ser usada na próxima etapa.

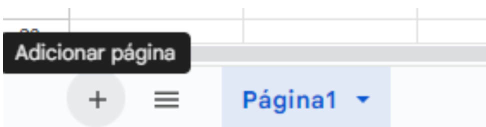


Figura 6 – Criando páginas novas

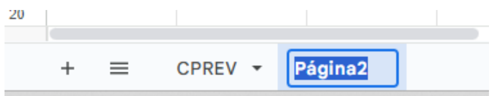
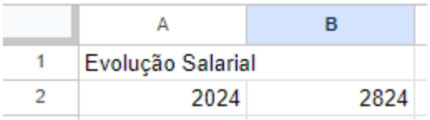


Figura 7 – Renomeando páginas

Para renomear as páginas basta clicar duas vezes sobre a aba da página desejada e colocar o novo nome (figura 7).

Passo 3: Criar três tabelas (Evolução salarial, Desconto mensal e Evolução do teto do INSS). Vamos explicar com detalhe como criar a primeira tabela.

Na célula A1, inserir o nome da primeira tabela. Na célula A2, inserir o ano de inicio do cálculo e na célula B2, inserir o valor do salário inicial (ver figura 8). Vamos usar o valor R$2824, que é aproximadamente o salário médio gonçalense, segundo (IBGE, 2024). Este valor pode ser trocado para corresponder ao contexto dos alunos que realizam as atividades.



	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	2824

Figura 8 – Criando uma tabela

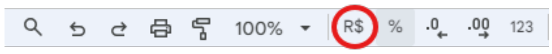
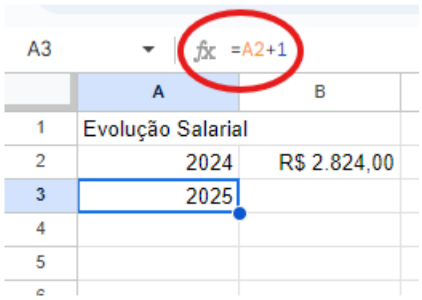


Figura 9 – O símbolo R$ aos salários

Como a coluna B representa valores monetários, com a célula B2 selecionada clique no botão R$ (figura 9).

Passo 4: Inserir fórmulas para atualização dos valores iniciais. Com a célula A3 selecionada, digite "=A2+1"(sem as aspas). Este comando atualizará o valor referente ao ano. Ver figura 10.



	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	R$ 2.824,00
3	2025	
4		
5		

Figura 10 – Inserindo fórmula para criar a coluna A

Para atualizar todos os valores referentes aos anos, basta clicar, segurar e arrastar para baixo o círculo que aparece abaixo da célula A3, quando selecionada (figuras 11 e 12).

Para os valores referentes ao salário, com a célula B3 selecionada, digitamos "=B2*1,0697". O valor 1,0697 é referente a atualização salarial de acordo com a inflação média auferida, de aproximadamente 6,97%. Ver figura 13.

Agora, basta repetir o processo de clicar, segurar e arrastar para obter todos os valores atualizados de acordo com o ano desejado. O resultado aparece na figura 14.

Para produzir as outras tabelas, basta repetir o processo com atenção ao digitar as fórmulas de acordo com as células de referência. Nas colunas D e E vai aparecer a tabela de Desconto mensal e nas colunas G e H vai a tabela de Evolução do teto do INSS. Vamos esclarecer alguns pontos en relação a estas tabelas

Passo 5: Para que as três tabelas apresentem atualização anual padronizada, precisamos fazer o seguinte

- Nas células D2 e G2, inserir o código "=A2".
- Na célula D3 inserir o código "=D2+1"e na célula G3, inserir o código "=G2+1"

Figura 11 – Gerando a coluna A (a)

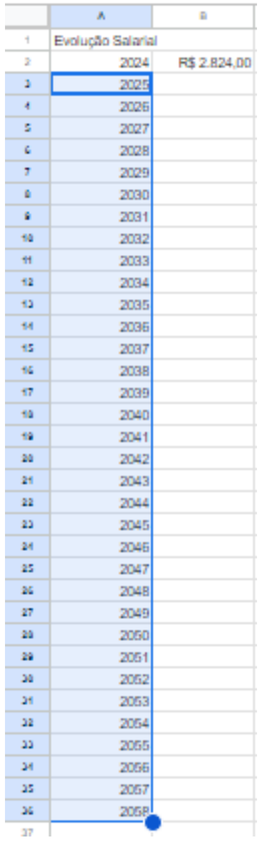


Figura 12 – Gerando a coluna A (b)

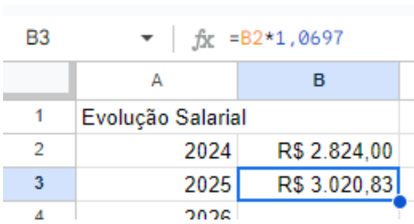
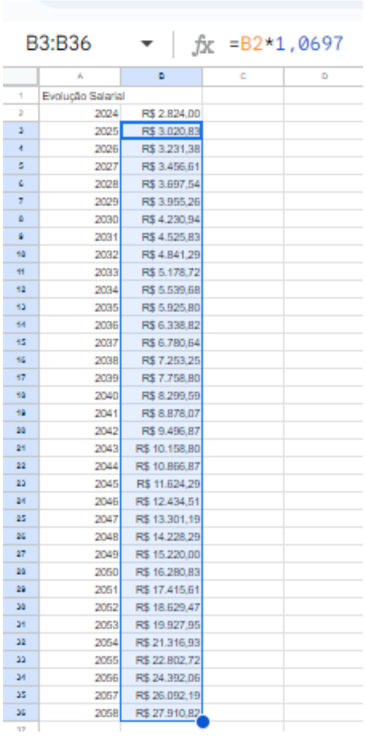


Figura 13 – Inserindo fórmula para criar a coluna B

- Repetir o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul (análogo ao feito nas figuras 11 e 12)

Passo 6: Para vincular os valores referentes a evolução salarial com a tabela referente aos descontos, iremos inserir na célula E2 o código “=B2*0,14”(0,14 representa o desconto de 14% referente a contribuição para a previdência). Ver figura 15. Agora repetimos o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Em alguns programas, após a inserção do primeiro código, aparece uma sugestão de preenchimento da coluna.

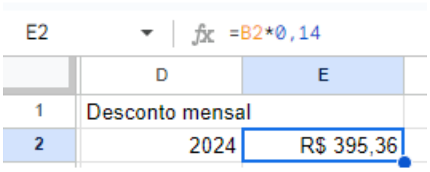
Passo 7: O processo de criação da tabela evolução do teto do INSS é igual ao processo de criação da tabela evolução salarial. Hoje, o valor máximo pago pela previdência social é de R$7786,02, esse valor é atualizado pelo INPC (Índice Nacional de Preços ao



B3:B36 fx =B2*1,0697

	A	B	C	D
1	Evolução Salarial			
2	2024	R$ 2.824,00		
3	2025	R$ 3.020,83		
4	2026	R$ 3.231,38		
5	2027	R$ 3.456,61		
6	2028	R$ 3.697,54		
7	2029	R$ 3.955,26		
8	2030	R$ 4.230,94		
9	2031	R$ 4.525,83		
10	2032	R$ 4.841,29		
11	2033	R$ 5.178,72		
12	2034	R$ 5.539,68		
13	2035	R$ 5.925,80		
14	2036	R$ 6.338,82		
15	2037	R$ 6.780,64		
16	2038	R$ 7.253,25		
17	2039	R$ 7.758,80		
18	2040	R$ 8.299,59		
19	2041	R$ 8.878,07		
20	2042	R$ 9.496,87		
21	2043	R$ 10.158,80		
22	2044	R$ 10.866,87		
23	2045	R$ 11.624,29		
24	2046	R$ 12.434,51		
25	2047	R$ 13.301,19		
26	2048	R$ 14.228,29		
27	2049	R$ 15.220,00		
28	2050	R$ 16.280,83		
29	2051	R$ 17.415,61		
30	2052	R$ 18.629,47		
31	2053	R$ 19.927,95		
32	2054	R$ 21.316,93		
33	2055	R$ 22.802,72		
34	2056	R$ 24.392,06		
35	2057	R$ 26.092,19		
36	2058	R$ 27.910,82		

Figura 14 – Tabela da evolução salarial pronta



E2 fx =B2*0,14

	D	E
1	Desconto mensal	
2	2024	R$ 395,36

Figura 15 – Inserindo fórmula para criar a coluna E

Consumidor). Este índice apresentou valor acumulado médio de 3,7% ao ano, nos últimos 10 anos. Vamos admitir estes valores como parâmetros iniciais para a criação da última tabela. O resultado final está na figura 16.

Questão 7.1 A tabela construída no programa de criação de planilhas, representa a evolução salarial de uma trabalhadora que iniciou sua jornada profissional em janeiro de 2024, até o momento da sua aposentadoria (considerando os dados do último censo de 2022). Considerando que essa mulher trabalha sob o regime de CLT em São Gonçalo e seu desconto previdenciário é de 14%, determine:

(a) O desconto mensal, em reais, feito nos anos de 2024, 2027, 2032, 2042 e 2056.

(b) O salário líquido (valor recebido após os descontos) em cada um dos anos citados no item a).

(c) O desconto anual feito em cada ano do item a).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Evolução salarial			Desconto mensal			Evolução do teto do INNSS	
2	**2024**	**R$ 2.824,00**		**2024**	R$ 395,36		2024	R$ 7.786,02
3	2025	R$ 3.020,83		2025	R$ 422,92		2025	R$ 8.074,10
4	2026	R$ 3.231,38		2026	R$ 452,39		2026	R$ 8.372,84
5	2027	R$ 3.456,61		2027	R$ 483,93		2027	R$ 8.682,64
6	2028	R$ 3.697,54		2028	R$ 517,66		2028	R$ 9.003,90
7	2029	R$ 3.955,26		2029	R$ 553,74		2029	R$ 9.337,04
8	2030	R$ 4.230,94		2030	R$ 592,33		2030	R$ 9.682,51
9	2031	R$ 4.525,83		2031	R$ 633,62		2031	R$ 10.040,77
10	2032	R$ 4.841,29		2032	R$ 677,78		2032	R$ 10.412,27
11	2033	R$ 5.178,72		2033	R$ 725,02		2033	R$ 10.797,53
12	2034	R$ 5.539,68		2034	R$ 775,56		2034	R$ 11.197,04
13	2035	R$ 5.925,80		2035	R$ 829,61		2035	R$ 11.611,33
14	2036	R$ 6.338,82		2036	R$ 887,44		2036	R$ 12.040,95
15	2037	R$ 6.780,64		2037	R$ 949,29		2037	R$ 12.486,46
16	2038	R$ 7.253,25		2038	R$ 1.015,45		2038	R$ 12.948,46
17	2039	R$ 7.758,80		2039	R$ 1.086,23		2039	R$ 13.427,55
18	2040	R$ 8.299,59		2040	R$ 1.161,94		2040	R$ 13.924,37
19	2041	R$ 8.878,07		2041	R$ 1.242,93		2041	R$ 14.439,57
20	2042	R$ 9.496,87		2042	R$ 1.329,56		2042	R$ 14.973,84
21	2043	R$ 10.158,80		2043	R$ 1.422,23		2043	R$ 15.527,87
22	2044	R$ 10.866,87		2044	R$ 1.521,36		2044	R$ 16.102,40
23	2045	R$ 11.624,29		2045	R$ 1.627,40		2045	R$ 16.698,19
24	2046	R$ 12.434,51		2046	R$ 1.740,83		2046	R$ 17.316,02
25	2047	R$ 13.301,19		2047	R$ 1.862,17		2047	R$ 17.956,72
26	2048	R$ 14.228,29		2048	R$ 1.991,96		2048	R$ 18.621,11
27	2049	R$ 15.220,00		2049	R$ 2.130,80		2049	R$ 19.310,10
28	2050	R$ 16.280,83		2050	R$ 2.279,32		2050	R$ 20.024,57
29	2051	R$ 17.415,61		2051	R$ 2.438,18		2051	R$ 20.765,48
30	2052	R$ 18.629,47		2052	R$ 2.608,13		2052	R$ 21.533,80
31	2053	R$ 19.927,95		2053	R$ 2.789,91		2053	R$ 22.330,55
32	2054	R$ 21.316,93		2054	R$ 2.984,37		2054	R$ 23.156,78
33	2055	R$ 22.802,72		2055	R$ 3.192,38		2055	R$ 24.013,58
34	2056	R$ 24.392,06		2056	R$ 3.414,89		2056	R$ 24.902,09
35	2057	R$ 26.092,19		2057	R$ 3.652,91		2057	R$ 25.823,46
36	2058	R$ 27.910,82		2058	R$ 3.907,51		2058	R$ 26.778,93

Figura 16 – Página 1 com as 3 tabelas

(d) O montante total descontado dos salários recebidos nos anos do item a).

Questão 7.2 Como visto na questão anterior, o trabalhador brasileiro que atua sob o regime de CLT, é descontado de 7,5% a 14% em seu salário. O valor descontado é direcionado ao INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), dando direito ao trabalhador a inúmeros benefícios, de acordo com a respectiva carência. Entre esses benefícios está a aposentadoria. A aposentadoria por tempo de contribuição garante um benefício igual a 60% da média dos salários recebidos, caso o trabalhador tenha contribuído durante, no mínimo, 15 anos quando mulher e 20 anos quando homem. A esse percentual, acrescentasse 2% para cada ano trabalhado além do mínimo.

A partir destas informações do texto e das aulas anteriores, determine o valor do benefício de aposentadoria recebido por uma trabalhadora gonçalense:

(a) Que trabalhou 15 anos.

(b) Que trabalhou 18 anos.

(c) Que trabalhou 23 anos.

(d) Que trabalhou 33 anos.

Questão 7.3 Suponhamos que a tabela usada nas questões anteriores representa a evolução salarial de uma trabalhadora gonçalense. A partir dessas informações, responda:

(a) Qual a média de todos os salários recebidos pela trabalhadora de acordo com a tabela apresentada na questão 7.1, supondo que esta trabalhadora aposentou se no ano 2053?

(b) Qual o valor da aposentadoria dessa trabalhadora?

(c) Qual a diferença entre o valor determinado no item b) e o teto do INSS, no ano de sua aposentadoria? Qual a diferença percentual?

(d) O que podemos concluir analisando os resultados obtidos e os comparando com o último salário recebido pela trabalhadora antes de se aposentar (R$19927,55.)? Discuta com seu grupo e faça um breve relato, a partir da discussão, sobre o impacto da aposentadoria sobre o estilo de vida de um trabalhador.

Observação: A tabela leva em consideração um trabalhador em regime CLT, que pretende aposentar-se com 100% do valor referente ao seu benefício. Realize também os cálculos para um trabalhador homem, levando em consideração a necessidade de completar a tabela com mais 5 anos de trabalho.

4.5 5ª etapa: Comparação do benefício da aposentadoria com outros investimentos

4.5.1 Aula 8: Alternativas financeiras para além da aposentadoria.

Objetivo: Levar para a realidade do aluno alternativas financeiras além da aposentadoria e através de cálculos matemáticos realizar comparações entre essas alternativas.

Material utilizado: Lista impressa e computadores com acesso a internet.

Aula(s) necessária(s): 1hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Para esta atividade criaremos outras três tabelas. Investimento I (BOVA11), Investimento II (IVVB11) e Investimento III (Tesouro renda+ 2060). Esta parte de criação das tabelas só deve ser feita depois do aluno entender qual é o procedimento para calcular manualmente o que é pedido na questão. Veja a sugestão para o professor no final da questão desta aula.

Passo 1: A partir da tabela criada para o desenvolvimento das questões da aula 7, chamamos (renomeamos) a página 2 de INV.

Passo 2: Na página INV criamos três tabelas: Investimento I, Investimento II e Investimento III. Ver figura 17.

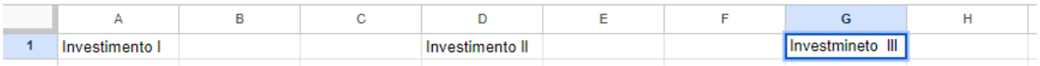


Figura 17 – Criando as 3 tabelas dos investimentos

Passo 3: Como os investimentos estão relacionados ao mesmo intervalo de tempo da evolução salarial, iremos relacionar os anos de rendimentos dos investimentos com os anos de atividade do trabalhador. Logo, iremos estabelecer uma relação entre as páginas 1 e 2, produzidas no arquivo. Para isso, nas células A2, D2 e G2, insira o código "=CPREV!A2". A partir desse código, ao alterarmos o ano inicial na tabela evolução salarial (na página 1), todas as outras tabelas (das duas páginas) se atualizarão também. Ver figura 18.

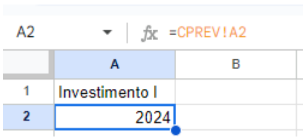


Figura 18 – Relacionando a coluna A das duas páginas

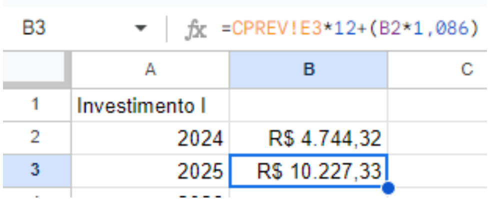
Passo 4: Com a célula A3 selecionada digite o código "=A2+1". Em seguida, repita o processo visto anteriormente de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Isto foi feito na página CPREV, veja as figuras 10, 11 e 12. Repita o processo nas outras tabelas, reproduzindo o código de acordo com a coluna correspondente. Isto siginifica, repetir o processo nas colunas D e G.

Passo 5: Agora vamos atrelar os valores referente a tabela desconto mensal, com as tabelas de investimentos. Para simplificar o cálculo, iremos adotar como padrão, a atualização dos valores de maneira anual. Para isso, com a célula B2 selecionada, vamos inserir o código "=CPREV!E2*12". A seguir, com a célula B3 selecionada, vamos inserir o código "=CPREV!E3*12+(B2*(1+α))". Novamente, repita o processo de clicar, segurar e arrastar. Nas figuras 19 e 20 mostramos este passo para $\alpha = \frac{8{,}6}{100}$.

As outras tabelas referentes aos investimentos seguem a mesma lógica. As colunas a serem modificadas são E e H. É importante ter cuidado na hora de usar os dados da página CPREV. Da mesma maneira que fizemos no Investimento I; para Investimento II e Investimento III, vamos usar a coluna E da página CPREV. A mudança fundamental para cada investimento vai ser no α que é usado no passo 5.

Observação: Para determinar a rentabilidade do título TESOURO RENDA+, pesquise na internet o valor médio do IPCA nos últimos 10 anos.

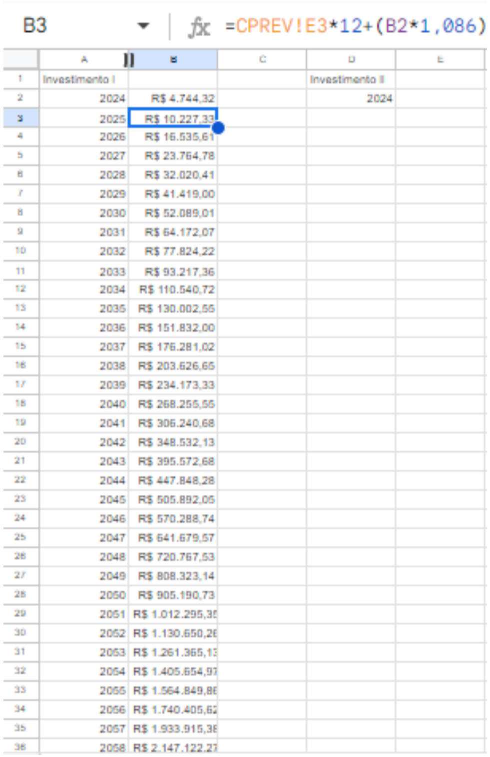
Como dito anteriormente, vamos considerar três produtos diferentes.



B3 | fx =CPREV!E3*12+(B2*1,086)

	A	B	C
1	Investimento I		
2	2024	R$ 4.744,32	
3	2025	R$ 10.227,33	

Figura 19 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (a)



B3 | fx =CPREV!E3*12+(B2*1,086)

	A	B	C	D	E
1	Investimento I			Investimento II	
2	2024	R$ 4.744,32		2024	
3	2025	R$ 10.227,33			
4	2026	R$ 16.535,61			
5	2027	R$ 23.764,78			
6	2028	R$ 32.020,41			
7	2029	R$ 41.419,00			
8	2030	R$ 52.089,01			
9	2031	R$ 64.172,07			
10	2032	R$ 77.824,22			
11	2033	R$ 93.217,36			
12	2034	R$ 110.540,72			
13	2035	R$ 130.002,55			
14	2036	R$ 151.832,00			
15	2037	R$ 176.281,02			
16	2038	R$ 203.626,65			
17	2039	R$ 234.173,33			
18	2040	R$ 268.255,55			
19	2041	R$ 306.240,68			
20	2042	R$ 348.532,13			
21	2043	R$ 395.572,68			
22	2044	R$ 447.848,28			
23	2045	R$ 505.892,05			
24	2046	R$ 570.288,74			
25	2047	R$ 641.679,57			
26	2048	R$ 720.767,53			
27	2049	R$ 808.323,14			
28	2050	R$ 905.190,73			
29	2051	R$ 1.012.295,3			
30	2052	R$ 1.130.650,2			
31	2053	R$ 1.261.365,1			
32	2054	R$ 1.405.654,9			
33	2055	R$ 1.564.849,8			
34	2056	R$ 1.740.405,6			
35	2057	R$ 1.933.915,3			
36	2058	R$ 2.147.122,2			

Figura 20 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (b)

(i) Vamos considerar que o Ibovespa apresentou uma valorização média de 8,6% a.a. O fundo ETF BOVA11, replica a rentabilidade do índice Ibovespa.

(ii) O fundo S&P 500 apresentou valorização média de aproximadamente 16,7% a.a., O ETF IVVB11 replica a rentabilidade do índice S&P500.

(iii) A figura 21 representa um dos títulos públicos do tesouro nacional. Este título foi criado em 30 de janeiro de 2023 com o intuito de tornar-se uma alternativa para o planejamento da aposentadoria. Este é um produto financeiro dito de renda fixa, logo, ele tem sua rentabilidade atrelada a um índice da economia brasileira (IPCA - Índice de Preços ao Consumidor Amplo).

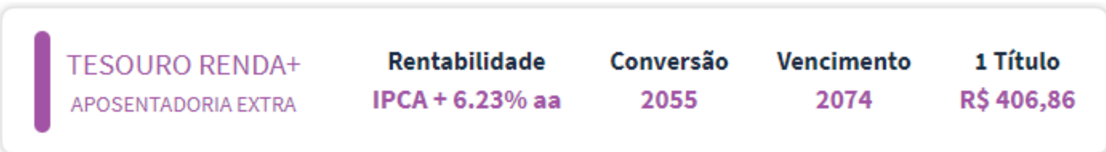


Figura 21 – Rentabilidade do título Renda+

Questão 8.1 Suponha que uma trabalhadora gonçalense aplique o mesmo valor descontado de seu salário em um dos investimentos descritos anteriormente. Para simplificar os cálculos, vamos assumir que os valores descontados ao longo de cada ano vão ser investidos no final de cada ano. Também vamos trabalhar com a rentabilidade anual dos investimentos.

(a) Construa as tabelas representando o montante acumulado nos investimentos realizados durante a vida laboral desta trabalhadora.

(b) De acordo com as informações da aula anterior, na questão 7.3, são estabelecidos valores para o benefício de aposentadoria. A partir das tabelas construídas, determine o tempo que o montante acumulado no momento da aposentadoria para cada investimento, é capaz de equalizar o valor do benefício da aposentadoria com o último salário recebido.

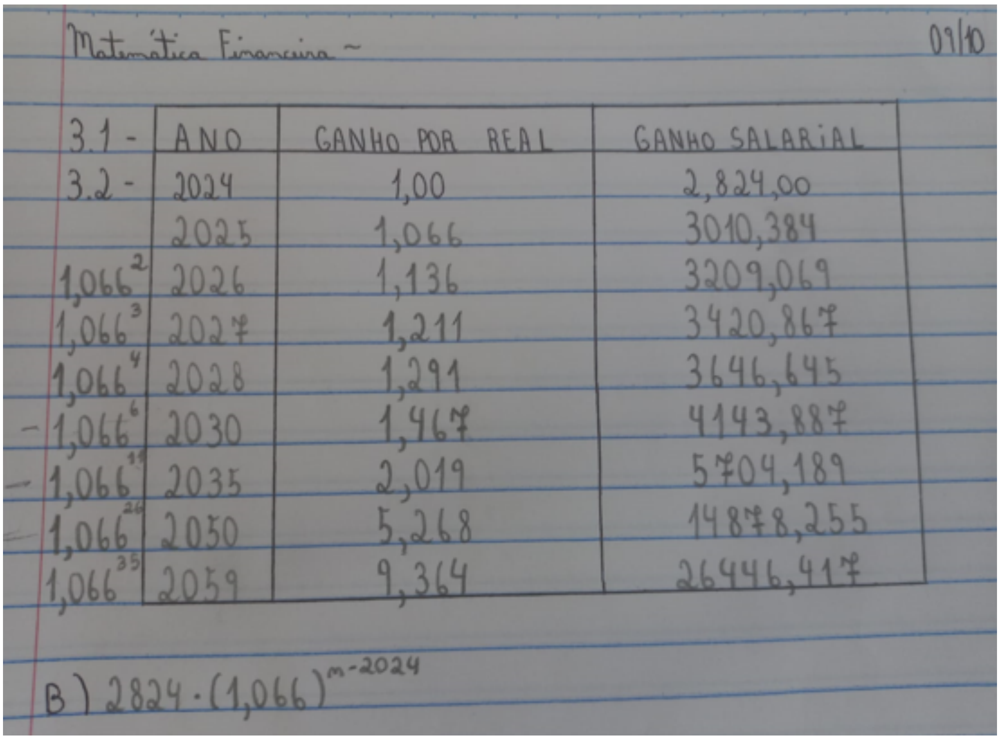
(c) Ainda de acordo com a questão 7.3, por quanto tempo o montante acumulado no momento da aposentadoria precisaria ficar investido no investimento I, para alcançar o mesmo montante do investimento II? E o investimento III?

Sugestão ao professor: Nesta aula, é interessante permitir ao aluno realizar os cálculos referentes aos anos iniciais dos investimentos, com o objetivo do aluno compreender o cálculo e como se dá a evolução dos valores. Após realizar pelo menos o cálculo referente aos três primeiros anos, o aluno deve ser capaz de generalizar (talvez com a ajuda do professor) o cálculo para qualquer ano. Alcançando tal resultado, o professor junto aos alunos deve iniciar a construção das tabelas referentes aos investimentos.

5 Resultados e desafios.

Durante o desenrolar das aulas foi perceptível a dificuldade apresentada pelos alunos em relação aos conceitos básicos. Devido aos resquícios da pandemia, muitos alunos ainda apresentam dificuldade para o cálculo das potências, onde acabam realizando o produto entre base e expoente das potências. Erro este, recorrente entre um número elevado de alunos. Porém, mesmo com os desafios observados, foi possível perceber que os alunos se mostraram dispostos e interessados a adquirir o conhecimento proposto nas atividades.

Abaixo temos dois exemplos de resultados obtidos durante a realização da aula 4. Na figura 22 temos o resultado correto das questões e na figura 23, vemos o erro recorrente que foi mencionado.



Matemática Financeira ~ 09/10

3.1 -	ANO	GANHO POR REAL	GANHO SALARIAL
3.2 -	2024	1,00	2,824,00
	2025	1,066	3010,384
$1,066^2$	2026	1,136	3209,069
$1,066^3$	2027	1,211	3420,867
$1,066^4$	2028	1,291	3646,645
$1,066^6$	2030	1,467	4143,887
$1,066^{11}$	2035	2,019	5704,189
$1,066^{26}$	2050	5,268	14878,255
$1,066^{35}$	2059	9,364	26446,417

B) $2824 \cdot (1,066)^{m-2024}$

Figura 22 – Respostas de alunos na trilha, (a)

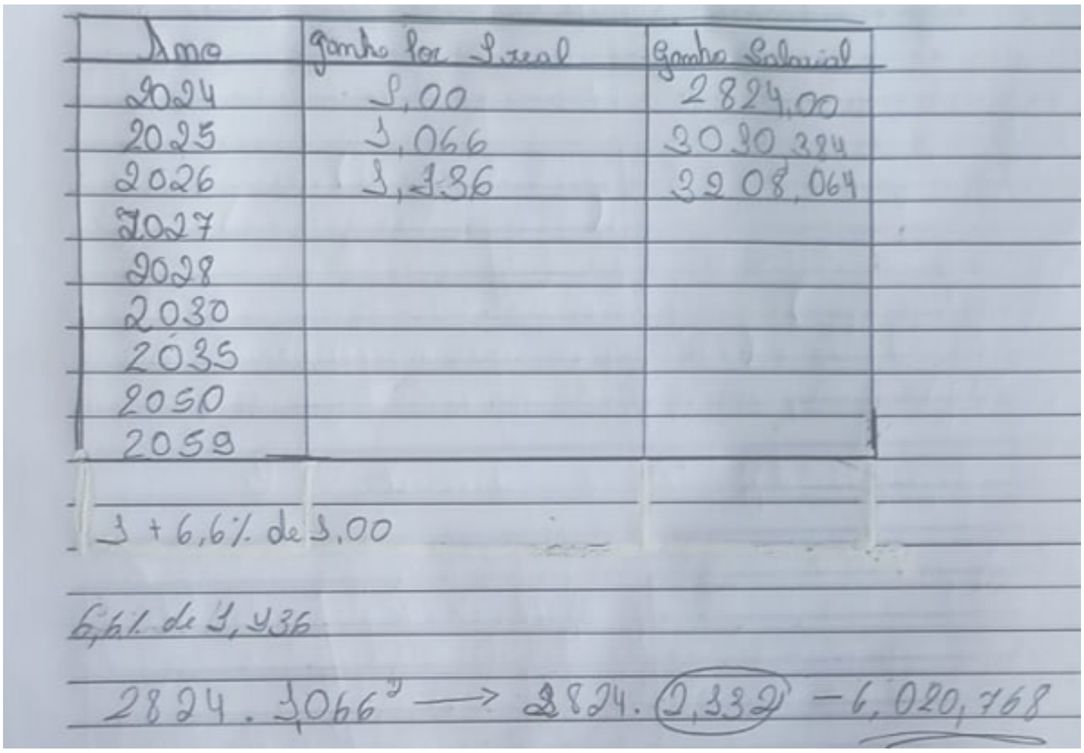


Figura 23 – Respostas de alunos na trilha, (b)

Podemos concluir que o professor, ao propor as atividades, deve estar familiarizado com a turma. Pois, desta maneira, o professor será capaz de adaptar as atividades de preparação, desenvolvidas na aula 1, de acordo com as necessidades dos alunos.

Referências

BRASIL. *Lei 9394 de 20 de dezembro de 1996*. Governo Federal. Congresso Nacional. 1996. Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=9394&ano=1996&ato=3f5o3Y61UMJpWT25a. Citado 1 vez na página 5.

DE OLIVEIRA JUNIOR, Mauricio Celso. *Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais*. 2024. Dissertação Profmat, Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional – Universidade Federal Fluminense. Citado 3 vezes nas páginas 5, 7, 20.

IBGE. *Portal Cidades do IBGE*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23.

LIMA, Elon Lages. Números e funções reais. In: COLEÇÃO PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado 1 vez na página 20.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. In: COLEÇÃO do professor de matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 1 vez na página 20.