



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



Pablo Jackson Rodrigues Silva

Poliedros de Platão com Animações em PDF

Cuiabá/ MT - 2024

Pablo Jackson Rodrigues Silva

## Poliedros de Platão com Animações em PDF

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – **Profmat**, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Área de concentração: Ciências e Humanidades para Educação Básica.

Linha de pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi  
Orientador

Cuiabá - MT  
2024

### Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586p Silva, Pablo Jackson Rodrigues.  
Poliedros de Platão com Animações em PDF [recurso eletrônico] / Pablo Jackson Rodrigues Silva. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 66 f., il. color., pdf). -- 2024.

Orientador: Reinaldo de Marchi.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2024.

Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.

Inclui bibliografia.

1. geometria espacial.. 2. relação de Euler.. 3. poliedros regulares. 4. sequência didática.. I. Marchi, Reinaldo de, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM [NOME DO PPG]

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: POLIEDROS DE PLATÃO COM ANIMAÇÕES EM PDF

AUTOR: MESTRANDO PABLO JACKSON RODRIGUES SILVA

Dissertação defendida e aprovada em 6 de setembro de 2024.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Prof. Dr. Reinaldo de Marchi** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Anna Lígia Oenning Soares** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Prof. Dr. Edgar Nascimento** (Membro externo)

Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso - Campus Cáceres

Cuiabá, 06/09/2024.



Documento assinado eletronicamente por **REINALDO DE MARCHI**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 06/09/2024, às 12:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edgar Nascimento**, **Usuário Externo**, em 06/09/2024, às 12:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **ANNA LIGIA OENNING SOARES**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 06/09/2024, às 15:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **7145855** e o código CRC **44970D14**.



## DEDICATÓRIA

*A Deus pela dádiva da vida, a minha esposa Dyéssica por me apoiar em todos os momentos, a meu filho Davi por me dar forças sempre. A meus pais, exemplos de perseverança e dedicação.*

# Agradecimentos

---

A Deus por este trabalho.

A minha esposa Dyéssica Zenki, minha parceira na caminhada, que me apoiou durante todo o processo.

Ao meu filho Davi Henrique que tinha apenas 2 meses de vida quando ingressei no programa de pós-graduação.

Aos meus pais, Adebarde e Valdenir pela dedicação, amor e compreensão, e por sempre me apoiarem e por acreditarem em mim. Agradeço a Deus por ter vocês.

A meu orientador Prof. Dr. Reinaldo Marchi, pela sua dedicação, disposição e por ter aceitado o convite de me orientar neste trabalho. Obrigado.

A Universidade do Estado de Mato Grosso e ao PROFMAT, pela oportunidade de estudar e alcançar esta etapa em minha vida.

Aos meus colegas de curso pelos momentos de dedicação aos estudos que passamos juntos.

Enfim agradeço a todos que sempre me apoiaram e me deram forças durante o percurso.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,  
mas lutei para que o melhor fosse feito. Não  
sou o que deveria ser, mas Graças a Deus,  
não sou o que era antes”.

*Marthin Luther King.*

# Resumo

---

Esta dissertação de mestrado propõe um estudo detalhado dos poliedros de Platão, explorando suas propriedades geométricas e proporcionando uma experiência nova com o auxílio de algumas animações. O objetivo é apresentar esses sólidos de forma que facilitem a aprendizagem investigativa e a compreensão deles através de interação digital. O trabalho inicia com uma revisão da literatura e alguns aspectos gerais sobre a interação da humanidade com a Geometria, oferecendo um embasamento teórico e contextualização curricular. Em seguida, realiza-se uma apresentação do que é um poliedro e suas propriedades, onde algumas questões são levantadas como quais características os definem e outras. A pesquisa inclui algumas figuras interativas como recursos para uma melhor interpretação da Geometria Espacial. Além disso, são identificados os poliedros platônicos e apresentado suas propriedades e características com detalhes que enriquecem e promovem uma melhor apreciação desses objetos de estudo. Por fim, a dissertação apresenta conclusões e recomendações para o ensino de Geometria Espacial no ensino médio e alguns anexos com algumas construções que foram desenvolvidas no trabalho, visando contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática no contexto atual.

**Palavras chave:** geometria espacial; relação de Euler; poliedros regulares; sequência didática.

# Abstract

---

This master's thesis proposes a detailed study of the Platonic solids, exploring their geometric properties and offering a novel experience with the aid of animations. The aim is to present these solids in a way that facilitates investigative learning and enhances understanding through digital interaction. The work begins with a literature review and an overview of humanity's interaction with Geometry, providing a theoretical foundation and curricular context. Next, it presents what a polyhedron is and its properties, raising questions such as what characteristics define them, among others. The research includes interactive figures as resources for a better interpretation of Spatial Geometry. Furthermore, the Platonic solids are identified, and their properties and characteristics are presented in detail, enriching and promoting a deeper appreciation of these objects of study. Finally, the dissertation presents conclusions and recommendations for teaching Spatial Geometry in high school, along with appendices containing some constructions developed during the work, aiming to contribute to the improvement of mathematics teaching and learning in the current context.

**Keywords:** Spatial Geometry; Euler's relation; regular polyhedra; didactic sequence.

# Lista de Figuras

---

|      |                                                                      |    |
|------|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Sólidos de Platão . . . . .                                          | 8  |
| 1.2  | Figura contida no livro Harmonices Mundi . . . . .                   | 9  |
| 1.3  | Ilustração dos Sólidos de Platão segundo Kepler . . . . .            | 10 |
| 1.4  | Pirâmides egípcias localizadas no Complexo de Gizé . . . . .         | 11 |
| 1.5  | Obras de Hélio Oiticica . . . . .                                    | 12 |
| 1.6  | Parque de Bagno . . . . .                                            | 12 |
| 1.7  | Poliedros de Platão Mágicos . . . . .                                | 13 |
| 1.8  | Trabalhos de Amílcar de Castro . . . . .                             | 13 |
| 2.1  | Exemplos animados de poliedros . . . . .                             | 15 |
| 2.2  | Polígono convexo e polígono não convexo . . . . .                    | 15 |
| 2.3  | Vértices, arestas e faces de um cubo e um pirâmide . . . . .         | 16 |
| 2.4  | Prisma reto e prisma oblíquo . . . . .                               | 17 |
| 2.5  | Pirâmide quadrangular oblíqua e pirâmide quadrangular reta . . . . . | 18 |
| 2.6  | Dado no formato de hexágono . . . . .                                | 19 |
| 2.7  | Octógono com forma de um prisma octogonal . . . . .                  | 19 |
| 2.8  | Prisma em três tetraedros de mesmo volume . . . . .                  | 20 |
| 2.11 | Pirâmide . . . . .                                                   | 21 |
| 2.9  | Prisma hexagonal . . . . .                                           | 22 |
| 2.10 | Hexaedro regular . . . . .                                           | 22 |
| 3.1  | Tetraedro regular . . . . .                                          | 29 |
| 3.2  | Altura de um Tetraedro . . . . .                                     | 30 |
| 3.3  | Hexaedro regular . . . . .                                           | 32 |
| 3.4  | Octaedro regular . . . . .                                           | 33 |
| 3.5  | Octaedro regular apoiado no plano . . . . .                          | 34 |
| 3.6  | Pirâmide que compõe o octaedro . . . . .                             | 35 |
| 3.7  | Pirâmide que compõe o octaedro . . . . .                             | 35 |
| 3.8  | Dodecaedro regular . . . . .                                         | 37 |

|      |                                                                     |    |
|------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 3.9  | Pentágono regular de lado $a$                                       | 37 |
| 3.10 | Decomposição de um dodecaedro                                       | 38 |
| 3.11 | Decomposição de um dos seis sólidos                                 | 39 |
| 3.12 | Esfera inscrita em um dodecaedro                                    | 40 |
| 3.13 | Relação do ângulo entre as faces, apótema e raio da esfera inscrita | 41 |
| 3.14 | Icosaedro regular                                                   | 42 |
| 3.15 | Pentágono seccional associado ao icosaedro                          | 44 |
| 3.16 | Relação entre $k$ , $h$ e $\theta$                                  | 44 |
| 3.17 | Esfera circunscrita a um icosaedro                                  | 45 |
| 3.18 | Decomposição de um icosaedro em 20 tetraedros                       | 46 |
| 3.19 | Sólidos de Platão com mesmo volume                                  | 48 |
| 3.20 | Sólidos de Platão com mesma altura                                  | 49 |

# Sumário

---

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                              | <b>1</b>  |
| <b>1 Geometria e Educação Matemática: Conexões Históricas e Contemporâneas</b> | <b>4</b>  |
| 1.1 O Desafio do Ensino de Matemática na Era Digital . . . . .                 | 4         |
| 1.2 A Geometria ao Longo da História . . . . .                                 | 7         |
| 1.3 A Geometria na Ciência, Arte e Cultura . . . . .                           | 10        |
| <b>2 Poliedros</b>                                                             | <b>14</b> |
| 2.1 Definição e Componentes de um Poliedro . . . . .                           | 14        |
| 2.2 Prismas e Pirâmides . . . . .                                              | 16        |
| 2.3 Relação de Euler . . . . .                                                 | 21        |
| 2.4 Poliedros de Platão . . . . .                                              | 25        |
| <b>3 Poliedros Regulares</b>                                                   | <b>29</b> |
| 3.1 Tetraedro Regular . . . . .                                                | 29        |
| 3.2 Hexaedro Regular . . . . .                                                 | 32        |
| 3.3 Octaedro Regular . . . . .                                                 | 33        |
| 3.4 Dodecaedro Regular . . . . .                                               | 37        |
| 3.5 Icosaedro Regular . . . . .                                                | 42        |
| 3.6 Arestas que produzem mesmo volume ou mesma altura . . . . .                | 48        |
| <b>Conclusão</b>                                                               | <b>50</b> |
| <b>Apêndice</b>                                                                | <b>51</b> |



# Introdução

---

O mundo a nossa volta é constituído, segunda a nossa percepção, por três dimensões, usualmente associadas à altura, à largura e profundidade, conceitos fundamentais da Geometria Espacial. Quando observamos um objeto em um livro ou revista impresso em uma folha bidimensional, o que se tem é uma representação semiótica desse objeto e não o próprio objeto, impossibilitando uma percepção clara das três dimensões que o constituem. Por esse e outros motivos, os alunos têm dificuldade de compreender/visualizar as propriedades geométricas no espaço e distinguir formas planas de espaciais. Logo, ao apresentar conceitos da geometria espacial é bom ter em mente uma abordagem que possibilite diferentes experiências nas quais estas serão precursoras da aprendizagem deste estudante. Assim, consideramos importante uma proposta de ensino de sólidos geométricos que permita que o leitor possa interagir com o conhecimento de forma simples e se possível lúdica, pois o processo de ensino/aprendizagem quando não fundamentado, se perde com facilidade. Em 14 de Dezembro de 2018, foi homologada a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que tem por objetivo ser a balizadora da qualidade da educação por meio do estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes do Brasil ao longo da Educação Básica. A BNCC estabeleceu dez competências básicas, dentre elas duas serão tomadas como ponto de partida deste trabalho, as quais dizem:

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2018, p.9).

A partir dessas duas competências citadas, analisamos o que a BNCC traz como proposta nas etapas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias, duas competências específicas nortearão este trabalho, respectivamente são elas:

Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 267 e p. 531).

Ainda no documento supracitado é ressaltada a importância da geometria no currículo escolar, enfatizando a necessidade de desenvolver competências como a compreensão e aplicação das propriedades dos objetos geométricos, a resolução de problemas envolvendo relações espaciais e a análise de formas tridimensionais. Segundo Barbosa (2003) a geometria espacial desempenha um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo e na formação integral dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades visuais, espaciais e de raciocínio abstrato. Na visão da autora, o ensino tradicional de alguns conceitos é incompreensível para certos alunos que ainda não se apropriaram de algumas características de natureza tridimensional: Nesse contexto, a utilização da geometria dinâmica, especialmente com o software GeoGebra, surge como uma alternativa promissora para tornar o ensino da geometria espacial mais envolvente e eficaz. Alves e Soares (2003) nos diz que, a geometria dinâmica possibilita a manipulação interativa de objetos geométricos (através do arrastamento dos elementos geométricos) e a observação instantânea das mudanças correspondentes, permitindo aos alunos explorar visualmente as propriedades e relações geométricas de forma intuitiva. Isso não apenas torna o processo de aprendizado mais atrativo, como também permite que se apropriem melhor de conceitos do simples ao mais complexo, como ângulos, sólidos, poliedros, interseções de planos e sólidos, entre outros.

Em vista disso, a presente dissertação de mestrado tem como objetivo de proporcionar uma experiência nova com o leitor em seus estudos acerca dos poliedros, bem como as representações que temos deles no cotidiano, estabelecemos como objetivo geral de nosso trabalho proporcionar aos alunos o conhecimento da existência de somente cinco classes de poliedros de Platão, por meio de demonstração formal e trabalho prático de construção desses poliedros. Para isso, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- demonstrar a relação de Euler;

- demonstrar a existência de somente cinco classes de poliedros de Platão;
- proporcionar uma leitura interativa com a planificação desses sólidos geométricos.

Para fins de organização de nosso trabalho, estabelecemos três capítulos. O trabalho inicia com algumas considerações sobre a geometria, oferecendo um embasamento teórico e contextualização curricular. Apresentamos algumas retrospectivas históricas na interação da humanidade com a geometria onde são citadas obras como “Os Elementos” de Euclides entre outras. Em seguida, realiza-se uma apresentação do que é um poliedro e suas propriedades e quais características os definem, incluindo a demonstração da Relação de Euler, demonstração da existência de somente cinco poliedros platônicos e explicitação dos poliedros regulares. A pesquisa inclui algumas figuras interativas como recursos para uma melhor interpretação da Geometria Espacial. Além disso, são identificados os poliedros platônicos e apresentado suas propriedades e características com detalhes que enriquecem e promovem uma melhor apreciação desses objetos de estudo.

---

# Geometria e Educação Matemática: Conexões Históricas e Contemporâneas

---

## 1.1 O Desafio do Ensino de Matemática na Era Digital

Ensinar Matemática hoje em dia é um grande desafio para os educadores que lidam com jovens e adolescentes. Enquanto a disciplina demanda compreensão e aplicação de conceitos abstratos e encadeamentos lógicos, esses alunos estão cada vez mais imersos no mundo tecnológico, incluindo smartphones, tablets, computadores e video games, os quais muitas vezes despertam mais interesse do que os conteúdos escolares. Diante desse cenário, torna-se imperativo conciliar a experiência dos alunos com a tecnologia e os conteúdos ensinados em sala de aula.

Com o auxílio de softwares educacionais, é possível formar alunos que desenvolvam um pensamento crítico, capazes de analisar o desempenho desses programas, refletir sobre os resultados e formular suas próprias conjecturas. Eles podem analisar a variação da reta e descrever problemas cotidianos na forma de funções, algo que poucos alunos conseguem fazer. Esse processo é fundamental para a construção do conhecimento, uma vez que a aprendizagem é contínua. O professor não deve simplesmente entregar o conteúdo pronto ao aluno; deve incentivá-lo a compreender o porquê de certos conceitos. Sobre esse aspecto, Huete (2006, p. 24) observa:

Aprender conteúdos matemáticos que possam ser proveitosos, como as operações numéricas ou a medida, não é uma garantia de uma posterior aplicação adequada. Uma aprendizagem significativa obriga o aluno a observar, perguntar, formular hipóteses, relacionar conhecimentos novos com os que já possuem tirar conclusões lógicas a partir dos dados obtidos. Enfim, exige que construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relati-

vas ao conhecimento matemático. É importante distinguir esses elementos se quisermos conhecer o entendimento que os sujeitos têm da matemática.

Nos últimos anos, a Educação Matemática tem ganhado destaque nos meios acadêmicos, com o objetivo de reduzir a distância entre a teoria e a prática no ensino dos conteúdos matemáticos. Entre as diversas tendências, a aplicação da Informática no ensino tem se destacado, proporcionando dinâmicas de manipulação de dados e uma compreensão mais profunda dos conceitos por parte dos alunos. Dentro desse contexto, encontramos uma variedade de metodologias e abordagens que permitem o ensino da matemática de forma prática e eficaz. Apesar das várias ferramentas disponíveis para esse fim, é essencial destacar que o sucesso na utilização dessas ferramentas como meio de promover a aprendizagem depende do domínio tanto dos conteúdos quanto das próprias ferramentas pelos educadores.

Em seu livro ‘Teoria das Inteligências Múltiplas’ (1983), Gardner afirma que existem diferentes tipos de inteligências, todas igualmente importantes, portanto o professor pode mostrar para os alunos que existem outras áreas, assim como a Matemática, que o aluno pode mostrar interesse como, Arte, Música, entre outras. E essas áreas podem estar vinculadas com a Matemática de certa forma. O desempenho da atividade que será aplicada com o auxílio dos computadores, fica sob responsabilidade do professor, pois sabemos que alunos quando se deparam com internet disponível ou uma construção legal no software tende a ficar alvoroçados e isso pode fazer com que a atividade perca seu foco. Telma Souza Gracias (2000, pg. 10) frisa que:

[...] O professor é o responsável direto pelo uso do computador na sala de aula e as possibilidades de trabalho dependerão do seu desempenho. Embora a presença do computador na sala de aula possa promover um encantamento inicial e motivação nos alunos, esse clima logo acabará se o professor não desenvolver um plano de atividades que os tire da passividade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) ressaltam a importância de uma abordagem que promova uma aprendizagem significativa. Essas diretrizes e padrões garantem que a integração entre o conhecimento e a aprendizagem seja mais bem-sucedida quando acompanhada de uma sequência didática claramente definida em seus objetivos.

Neste cenário, a integração das Tecnologias Digitais à Educação Matemática pode oferecer alternativas valiosas na busca por métodos eficazes de ensino da matemática, fornecendo ferramentas que facilitam a manipulação dinâmica dos conceitos. Embora muitos alunos sintam entusiasmo ao frequentar o laboratório de informática e ao experimentar abordagens distintas, é comum que esses recursos não sejam plenamente utilizados. Quando isso ocorre, a falta de uma sequência didática claramente definida pode comprometer a construção do conhecimento. Diante desse desafio, cabe ao professor buscar recursos complementares que enriqueçam suas práticas pedagógicas. É crucial que o

professor se adapte ao ambiente em que ele e seus alunos estão inseridos, o que requer constante reinvenção, adaptação e apropriação de novos métodos e práticas. O objetivo é promover uma aprendizagem não apenas memorística, mas genuinamente significativa, capacitando os alunos a aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo de suas trajetórias educacionais.

Para que o professor possa aplicar atividades de maneira eficaz, é indispensável que ele realize o mapeamento dos conhecimentos prévios dos alunos. Sem essa informação, é pouco provável que ele consiga integrar os conteúdos de forma significativa. Por exemplo, se um aluno esqueceu certas propriedades de um conteúdo específico, é necessário lembrá-las para construir uma ponte entre o conhecimento antigo e o novo. Sem essa intervenção, a aprendizagem não será significativa, pois os alunos podem estudar métodos e definições com os quais não têm afinidade ou sobre os quais possuem definições equivocadas.

Cabe ao professor identificar essas dificuldades e trabalhá-las com cuidado. É importante permitir que o aluno chegue a suas próprias conclusões, pois o professor, como intermediador entre o ensino e a aprendizagem, deve instigar a opinião do aluno. Se o professor simplesmente der a resposta ou corrigir o erro antes que o aluno tenha terminado a resolução, este ficará condicionado e, de certa forma, dependente daquela ajuda. Portanto, é fundamental que o aluno dê o pontapé inicial, identificando onde está o erro. A partir daí, o professor pode intervir, explicando por que aquele caminho estava errado e apresentando uma nova forma de resolução, ou mostrando que o erro ocorreu devido a uma falta de atenção na resolução. É um equívoco pensar que a resolução de exercícios não constitui aprendizagem quando na verdade, todo momento é propício para a aprendizagem. ALMOULOU (2007, p. 133) nos diz:

Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade ou falta de conhecimento; esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto frequentemente encontrado; mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto [...].

Em nosso trabalho, escolhemos abordar um tema clássico: os sólidos de Platão e essa abordagem utilizará tecnologias que tivemos que aprender para incorporar neste trabalho. Por exemplo, através do aplicativo Geogebra, criamos animações que foram integradas ao arquivo PDF utilizando o LaTeX, seguindo a mesma abordagem de qualidade encontrada no excelente material sobre a Torre de Hanói publicado pela SBM. Nos apêndices, fornecemos descrições detalhadas dos procedimentos e códigos que utilizamos.

## 1.2 A Geometria ao Longo da História

A geometria é uma das mais antigas áreas da matemática, com origens que remontam a civilizações antigas em todo o mundo. No Egito Antigo, foram usados conceitos geométricos em construções e medidas de terras. Na Mesopotâmia, sumérios e babilônios desenvolveram sistemas geométricos para construções e comércio. Na Grécia Antiga, matemáticos como Euclides estabeleceram os fundamentos da geometria euclidiana com os Elementos. Na China e na Índia antigas, a geometria estava ligada à agrimensura e à arquitetura. Ao longo dos séculos, a geometria evoluiu, influenciando campos como física, engenharia, arte e arquitetura. LIMA (2009, p. 02) apresenta:

Etimologicamente, geometria quer dizer medida da terra. Esta denominação grega é justificada pelo historiador Heródoto (século quinto A.C.), que atribuiu aos egípcios a origem dessa ciência. Segundo ele, o imposto que pagavam os proprietários de terra no Egito era diretamente proporcional à área de cada lote. As cheias do rio Nilo muitas vezes faziam desaparecer parte das terras dos agricultores. Então os cobradores de imposto do faraó tinham que recalcular cada área a fim de que a cobrança fosse ajustada. Também era preciso, para efeitos de comércio, que se soubesse calcular o volume de cada depósito de grão.

Os livros da coleção Os Elementos, do grego Euclides, escritos por volta de 300 a.C. em Alexandria, Egito, constituem uma obra de treze livros que compila o conhecimento matemático da época. Esses escritos abordam diversos temas, incluindo geometria plana, números, proporções, grandezas incommensuráveis e geometria espacial. Reconhecidos pela abordagem lógica e dedutiva, os Elementos estabeleceram os fundamentos da demonstração rigorosa e do raciocínio lógico na matemática. Sua influência perdura ao longo da história, moldando a pedagogia matemática e introduzindo termos e conceitos ainda presentes nos estudos contemporâneos.

A geometria espacial desempenha um papel crucial no desenvolvimento humano desde tempos antigos. Esta área da matemática, que explora formas e relações no espaço tridimensional, foi fundamental para as civilizações antigas na concepção e construção de monumentos, edifícios e estruturas. Desde as pirâmides do Egito Antigo até os templos gregos e as catedrais medievais, a geometria espacial foi empregada para criar obras impressionantes em termos de durabilidade e estética."Além disso, a geometria espacial teve aplicações práticas em diversas áreas, incluindo a navegação marítima, engenharia civil e arquitetura. Antigos astrônomos a utilizavam para calcular órbitas planetárias e prever eclipses, enquanto engenheiros a empregavam para projetar pontes, aquedutos e sistemas de irrigação, evidenciando seu papel multifacetado e fundamental ao longo da história da humanidade.

Anterior a Euclides, um filósofo grego chamado Platão escreveu por volta de 360 a.C. uma obra filosófica que aborda temas como cosmologia, física e teoria das formas, intitulada *Timeu*, sendo uma das obras mais influentes de Platão. No diálogo *Timeu*, Platão discute as formas geométricas e sua relação com a construção do universo, conforme apresentado por Timeu, um personagem fictício. Platão atribuiu a construção do universo a um demiurgo, ou artesão divino, que criou o cosmos com base em princípios geométricos e matemáticos. Platão descreve cinco sólidos regulares, atualmente conhecidos como os "sólidos platônicos", que são poliedros convexos onde todas as faces são polígonos regulares idênticos e os mesmos números de faces se encontram em cada vértice. Os sólidos platônicos são:

**Tetraedro:** Um poliedro com quatro faces triangulares idênticas;

**Hexaedro:** Um poliedro com seis faces quadradas idênticas;

**Octaedro:** Um poliedro com oito faces triangulares idênticas;

**Dodecaedro:** Um poliedro com doze faces pentagonais idênticas;

**Icosaedro:** Um poliedro com vinte faces triangulares idênticas.

Platão atribui significados metafísicos e cosmológicos a esses sólidos, sugerindo que eles representam os elementos básicos do universo. Por exemplo, Platão associa o tetraedro ao fogo, o hexaedro à terra, o octaedro ao ar, o icosaedro à água e o dodecaedro às "formas da mente" ou ao cosmos como um todo. Embora "*Timeu*" seja uma obra filosófica e não um tratado matemático, a discussão de Platão sobre os sólidos regulares influenciou significativamente o desenvolvimento da geometria e da matemática ao longo dos séculos.

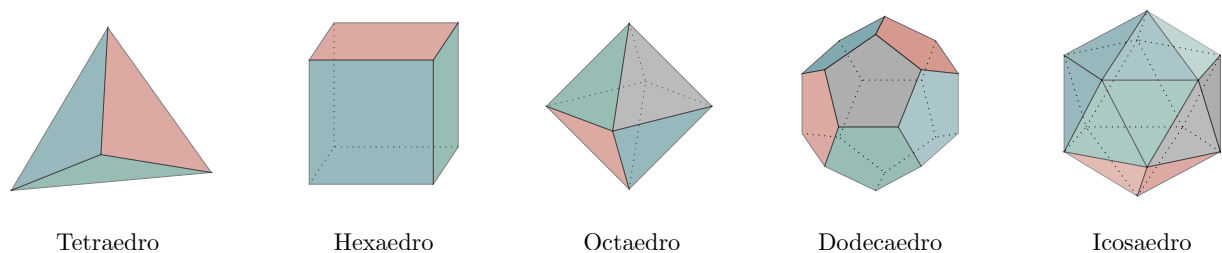


Figura 1.1: Sólidos de Platão

Curiosamente só existem esses cinco poliedros regulares, conforme apresentado por Platão e apresentados na Figura 1.1. Além de Platão, outros matemáticos também contribuíram para a demonstração de que existem exatamente cinco poliedros regulares, como Euclides em sua obra.

Avançando no tempo, temos a figura de Johannes Kepler, um matemático e astrônomo alemão que viveu no final do século XVI e início do século XVII. Embora seja



mais conhecido por suas leis do movimento planetário e suas contribuições para a astronomia, Kepler também teve interesse nos sólidos platônicos, os cinco poliedros regulares identificados por Platão na Antiguidade.

Kepler estava intrigado com as relações entre os sólidos platônicos e as órbitas dos planetas. Em sua obra "Harmonices Mundi" (Harmonia do Mundo), publicada em 1619, Kepler explorou essas conexões, buscando uma harmonia geométrica entre as formas dos sólidos platônicos e as distâncias médias dos planetas ao Sol (veja a Figura 1.2. Ele associou cada um dos sólidos platônicos com uma das órbitas planetárias, tentando encontrar uma justificativa para a distância dos planetas do Sol com base nessas formas geométricas.

Por exemplo, Kepler associou o dodecaedro, um dos sólidos platônicos, com a órbita de Marte. Ele propôs que a distância média de Marte ao Sol poderia ser determinada pela circunferência de um círculo inscrito em um dodecaedro.

Embora essas associações tenham sido mais especulativas do que rigorosamente matemáticas, o trabalho de Kepler sobre os sólidos platônicos e suas relações com o cosmos reflete sua abordagem holística e filosófica para a astronomia e a geometria. Suas ideias influenciaram o pensamento posterior sobre a harmonia e a ordem do universo.

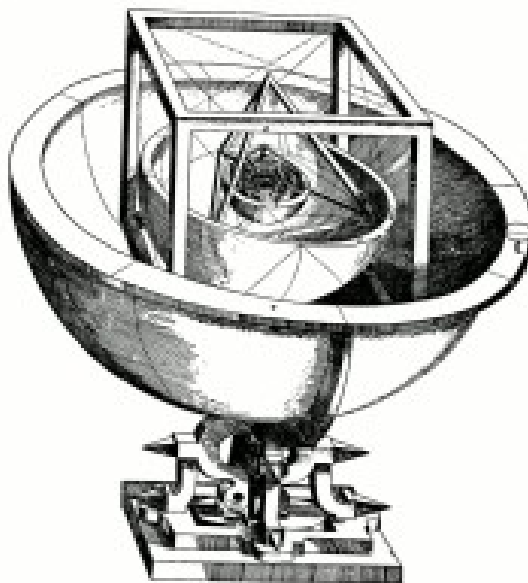


Figura 1.2: Figura contida no livro Harmonices Mundi

Aqui temos nossa primeira ilustração na Figura 1.3 de uma animação dentro de um pdf para dar a ideia do movimento dos sólidos de Platão segundo o pensamento de Kepler.

Figura 1.3: Ilustração dos Sólidos de Platão segundo Kepler

Leonhard Euler apresentou em 1758 uma importante fórmula na teoria dos poliedros, conhecida hoje como relação de Euler. A fórmula estabelece uma relação entre o número de vértices ( $V$ ), o número de arestas ( $A$ ) e o número de faces ( $F$ ) de um poliedro convexo e afirma que

$$V - A + F = 2.$$

Essa relação se aplica a qualquer poliedro convexo, como cubos, prismas, pirâmides, dodecaedros, entre outros. Observamos que os relatos históricos apontam que a demonstração de Euler era falha.

A relação de Euler é útil não apenas para poliedros convencionais, mas também é aplicável em muitos outros contextos da matemática, como teoria dos grafos e topologia. Ela descreve uma relação fundamental entre as principais características geométricas de um poliedro e é amplamente estudada e aplicada em diversos campos. Como essa relação, foi possível dar uma nova demonstração da existência de apenas cinco poliedros regulares.

## 1.3 A Geometria na Ciência, Arte e Cultura

A geometria espacial continua a desempenhar um papel crucial em diversas áreas, como engenharia, física, computação gráfica e medicina, onde é utilizada na modelagem de órgãos e tecidos para diagnóstico e tratamento. Ao longo da história, essa disciplina tem sido uma ferramenta essencial para a compreensão e transformação do mundo ao nosso redor. Sua presença na arte, na cultura e nas construções civis revela a profunda interseção entre a matemática e a expressão criativa, mostrando como a geometria não



Figura 1.4: Pirâmides egípcias localizadas no Complexo de Gizé

apenas estrutura, mas também inspira e possibilita novas formas de expressão e inovação.

Um exemplo notável de geometria espacial aplicada à arquitetura são as Pirâmides de Gizé (Figura 1.4), situadas na margem oeste do rio Nilo, perto do Cairo, no Egito. Construídas durante a quarta dinastia do Antigo Egito, por volta de 2580 a.C., essas estruturas icônicas incluem as pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos. A maior delas, a Pirâmide de Quéops, é considerada uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo, exemplificando como a geometria espacial foi utilizada para criar formas arquitetônicas grandiosas e duradouras, que são ao mesmo tempo um feito de engenharia e uma expressão artística.

Desde as pirâmides do Egito até as instalações contemporâneas, as formas geométricas continuam a inspirar artistas e a encantar o público, mostrando que a verdadeira beleza reside no equilíbrio harmonioso entre forma, função e imaginação.

Artistas brasileiros têm se aventurado em diversas correntes artísticas ao longo dos anos, constantemente desafiando as concepções tradicionais de arte e demonstrando como a geometria pode se integrar harmoniosamente ao processo criativo. Um exemplo notável e, muitas vezes, pouco explorado é o trabalho de Hélio Oiticica, particularmente sua série "Metaesquemas" (1957-1958). Nessa série de pinturas, Oiticica explora a geometria de maneira dinâmica e inovadora, desafiando convenções e ampliando os limites da expressão artística (veja a Figura 1.5)). Ele utiliza quadrados e retângulos em composições assimétricas e vibrantes, desafiando a rigidez da geometria tradicional. O que torna essa obra particularmente interessante do ponto de vista geométrico é a maneira como ele manipula a forma e o espaço para criar uma sensação de movimento e transformação, algo que raramente é abordado em pesquisas sobre a interseção entre geometria e arte.

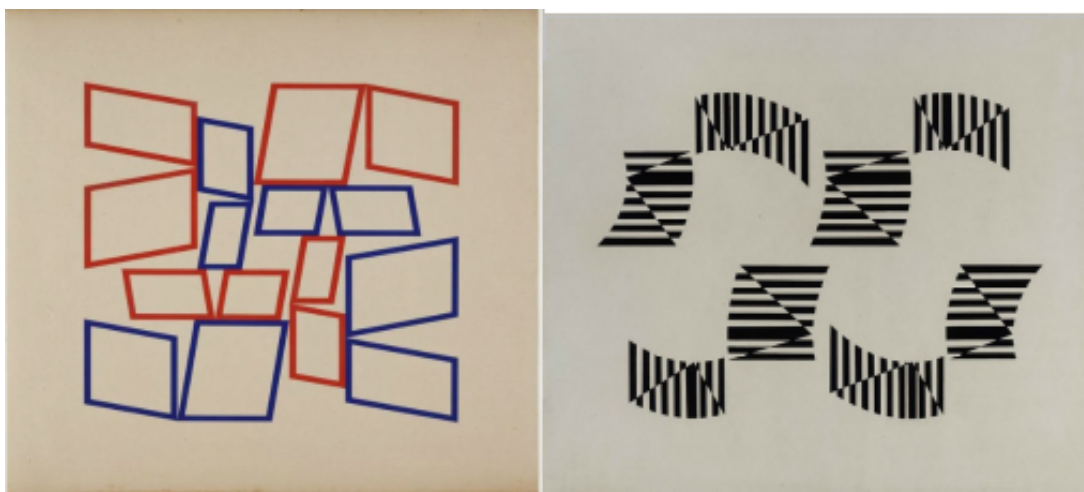


Figura 1.5: Obras de Hélio Oiticica

Ao invés de seguir a “cartilha” da geometria euclidiana, onde as formas são estáticas e rígidas, Oiticica cria composições que parecem estar em constante mutação, refletindo a ideia de que a geometria pode ser fluida e expressiva. Algumas de suas obras estão expostas no Museu de Arte Moderna do Rio de Janeiro (MAM-RJ), pois o artista tinha uma boa relação com o museu, o que justifica suas obras serem parte do acervo.

Os sólidos de Platão são referências também na arte. O artista plástico Ekkehard Neumann recriou essas formas em chapa de aço, conforme ilustrado na Figura 1.6. Os objetos são agrupados de forma livre, sem pedestais, ao longo da margem do lago no Steinfurter Bagno na Alemanha.



Figura 1.6: Parque de Bagno

O parque é um exemplo de natureza projetada de acordo com as regras e ideias humanas. Os sólidos platônicos ilustram como esse design é impulsionado pelo desejo de compreender as leis do mundo e do cosmos, classificar os fenômenos e, por sua vez, entendê-los. O desejo de orientação em um ambiente complexo é compartilhado pela geometria, arte, filosofia e arquitetura paisagística, e é claramente ilustrado por esta escultura.



O Cubo de Rubik, também conhecido como Cubo Mágico, é um quebra-cabeça tridimensional e que foi criado pelo arquiteto húngaro Ernő Rubik em 1974. Este intrigante jogo ganhou uma enorme fama globalmente. Além do Cubo de Rubik original, uma série de variações foram desenvolvidas, algumas inspiradas nos sólidos platônicos, conforme Figura 1.7. Dois desse sólidos mágicos receberam nomes específicos: o tetraedro, apelidado de Pyraminx, e o dodecaedro, conhecido como Megaminx. Na figura abaixo, podemos observar algumas dessas peças.



Figura 1.7: Poliedros de Platão Mágicos

Outro artista brasileiro que explorava as formas geométricas em suas expressões artísticas é Amílcar de Castro (1920–2002) nascido em Paraisópolis, interior de Minas Gerais, ele foi um importante artista, escultor e designer gráfico conhecido por suas contribuições ao movimento modernista brasileiro, suas obras possuíam uma abordagem mais orgânica e expressiva.



Figura 1.8: Trabalhos de Amílcar de Castro

Amílcar de Castro via nas curvas uma forma de transcender a rigidez das formas geométricas tradicionais, trazendo fluidez e dinamismo para suas obras, trabalhando com o aço ele explorava a delicadeza das curvas, dobrando e torcendo o metal estrategicamente, transformando superfícies planas em sólidos geométricos que se movimentam no espaço, conforme pode ser visto na Figura 1.8. Essa habilidade de moldar o espaço com curvas refletia sua profunda compreensão da geometria espacial, onde a simplicidade se desdobrava em complexidade, criando uma interação viva entre forma e espaço. Em suma, suas esculturas são monumentos da geometria espacial como linguagem artística e sua influência continua a ser sentida no cenário da arte contemporânea brasileira.

---

# Poliedros

---

Os estudos sobre poliedros e suas definições remontam a séculos de discussões. Alguns autores os definem como um conjunto de figuras geométricas, enquanto outros os consideram sólidos delimitados no espaço por essas figuras. Há também aqueles que adotam ambas as definições. Segundo LIMA (2006), ao apresentar um conceito, é fundamental estabelecer uma definição adequada ao nível de estudo pretendido. Como esse trabalho foi idealizado de maneira que seja compreensível até para estudantes do ensino médio, devemos ter cautela ao definir o objeto de estudo.

Definir poliedros simplesmente como sólidos geométricos formados por um número finito de faces (partes de planos distintos) pode servir como uma introdução intuitiva, mas não é uma definição precisa. No entanto, isso não impede que possamos inicialmente apresentar um conceito mais geral e refiná-lo ao longo das aulas. A Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), amplamente reconhecida como uma referência para as práticas docentes, frequentemente utiliza essa abordagem: introduz conceitos de maneira intuitiva antes de aprofundá-los, como ocorre no ensino do cálculo de volume.

## 2.1 Definição e Componentes de um Poliedro

Considerando uma abordagem desse objeto de estudo que possa, mesmo que de forma provisória, oferecer um ponto de entrada à geometria espacial, podemos utilizar a definição de poliedros proposta por LIMA (2006):

**Definição 2.1.** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*

Na Figura 2.1, temos dois exemplos animados de poliedros segundo essa definição geral. Aqui é importante notar que a maneira em que juntamos os polígonos para formar os poliedros nos permite figuras como estas.

Figura 2.1: Exemplos animados de poliedros

Embora essa definição seja adequada para uma introdução ao conceito, ela se torna imprecisa à medida que algumas características são apresentadas, sendo necessária uma definição que permita maior generalidade. Neste estudo, focaremos nos poliedros convexos, que são formados apenas por polígonos convexos.

Para tratar sobre a convexidade de superfícies e espaços, usaremos brevemente o que LIMA (2006, pag. 233) nos diz:

**Definição 2.2.** *Um poliedro é convexo se o conjunto de todos os seus pontos interiores for convexo. Isso significa que, para qualquer par de pontos dentro do poliedro, o segmento de reta que os conecta estará inteiramente contido dentro do poliedro. Em termos mais gerais, um conjunto  $C$  no plano ou no espaço é dito convexo quando, para quaisquer dois pontos de  $C$ , o segmento de reta que os une está completamente contido em  $C$ .*

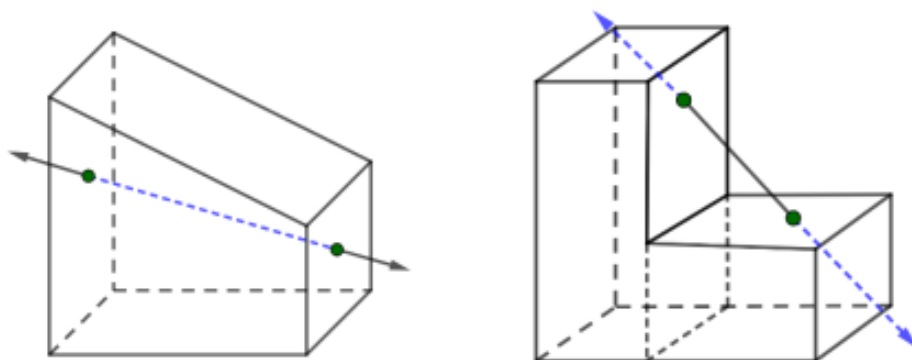


Figura 2.2: Polígono convexo e polígono não convexo

Dessa forma, uma vez que definimos o que é poliedro convexo, retomamos a necessidade de darmos mais rigor a definição ao objeto de estudo, buscamos em diversas obras de nomes conhecidos entre os leitores tais como Gelson Iezzi, Elon Lages e outros, suas visões do que seria um poliedro e após analisarmos uma a uma, optamos por utilizar a definição apresentada a seguir, pois ela nos permite grandes generalizações, é precisa e de fácil interpretação. Dessa forma, segundo MACHADO (1988), para definir um poliedro convexo consideramos  $n$  polígonos convexos que satisfazem as três condições seguintes:

**Definição 2.3.** *Para caracterizar um poliedro convexo consideramos  $n$  polígonos, com  $n \geq 4$ , que satisfazem as três condições:*

- (I) *não há dois destes polígonos no mesmo plano;*
- (II) *cada lado de um dos polígonos é comum a dois e apenas dois dos polígonos;*
- (III) *o plano de cada polígono deixa todos os demais polígonos num mesmo semiespaço.*  
(condição de convexidade)

Passamos agora a apresentar alguns objetos que estão associados a um poliedro que são: faces, arestas, vértices e ângulos. Considere um poliedro qualquer. As arestas de um poliedro são os segmentos de reta que delimitam a borda onde duas faces se encontram. Os vértices são os pontos onde três ou mais arestas se encontram. As faces são as superfícies planas que formam os lados do poliedro, delimitando sua estrutura tridimensional. A figura 2.3 a seguir ilustra esses elementos para um cubo e um tetraedro.

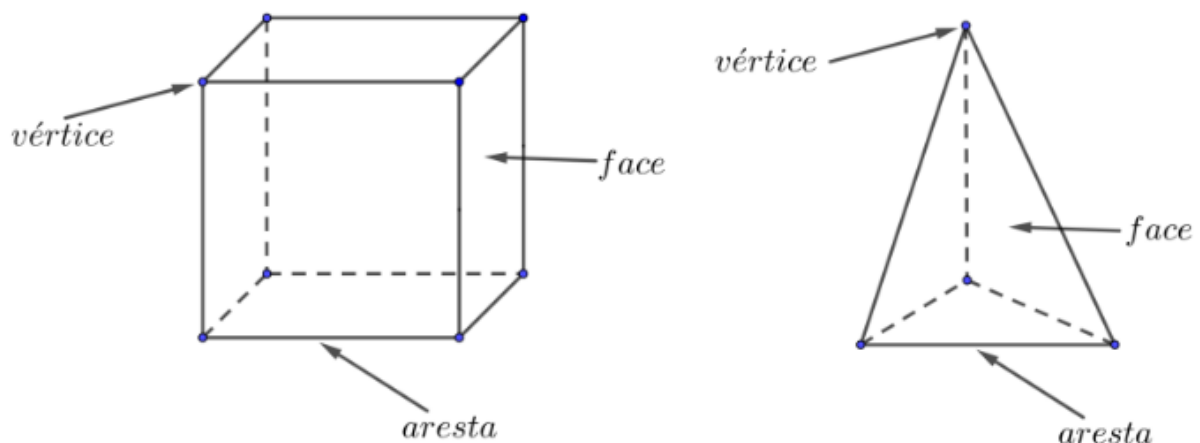


Figura 2.3: Vértices, arestas e faces de um cubo e um pirâmide

## 2.2 Prismas e Pirâmides

No que segue, apresentamos alguns tipos elementares de poliedros convexos. Entre eles, destacam-se os prismas e as pirâmides. Prismas são poliedros que possuem duas



bases paralelas e congruentes, com faces laterais que são paralelogramos (Figura 2.4). As pirâmides têm uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um ponto comum, o vértice (Figura 2.5). Cada tipo possui características geométricas específicas que definem sua forma e propriedades, sendo fundamentais para o estudo da geometria tridimensional.

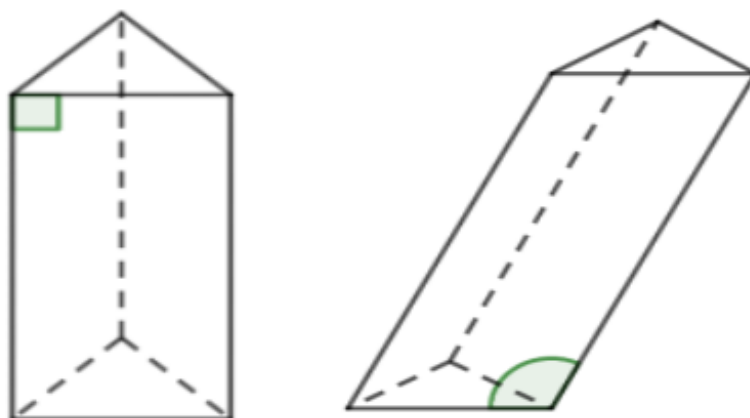


Figura 2.4: Prisma reto e prisma oblíquo

Esse tipo de poliedro é utilizado regularmente como reservatórios pela sua rigidez e praticidade de construção já que usualmente são paralelepípedos (todas faces retangulares), para calcular a capacidade volumétrica de um prisma utilizamos o princípio de Cavalieri, que geralmente é apresentado nas seções de geometria espacial dos livros de matemática na educação básica. LIMA (2006) na pág. 256 nos traz esse axioma da seguinte forma:

**Axioma 2.1** (Princípio de Cavalieri). *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

O Princípio de Cavalieri é um poderoso conceito que simplifica o cálculo de volumes e permite comparações entre sólidos aparentemente diferentes. Ele se baseia na ideia de que o volume de um sólido pode ser determinado a partir das áreas de suas seções transversais, desde que essas áreas sejam equivalentes em cada nível.

Sabendo que o volume de um paralelepípedo de área de base  $A_b$  e altura  $h$  é dado por

$$V = A_b h.$$

Para um prisma de mesma altura  $h$ , traçamos uma seção transversal que terá área  $A$ . Naturalmente, é possível obter um retângulo cuja área seja  $A$ . Portanto, usando o axioma, segue que o volume do prisma também será  $V = Ah$ .

As pirâmides, por sua vez, têm uma única base e todas as outras faces são triângulos que se encontram em um único vértice localizado em um plano não coincidente ao plano da base, chamado ápice ou vértice da pirâmide. Um exemplo comum é a pirâmide quadrangular, como as pirâmides do Egito, que têm uma base quadrada e quatro faces triangulares. A nomenclatura das pirâmides e prismas está relacionada ao número de lados da base: um prisma hexagonal, por exemplo, tem uma base em forma de hexágono, enquanto uma pirâmide pentagonal tem uma base em forma de pentágono, essa terminologia ajuda a descrever com precisão suas características geométricas, facilitando sua identificação e estudo.

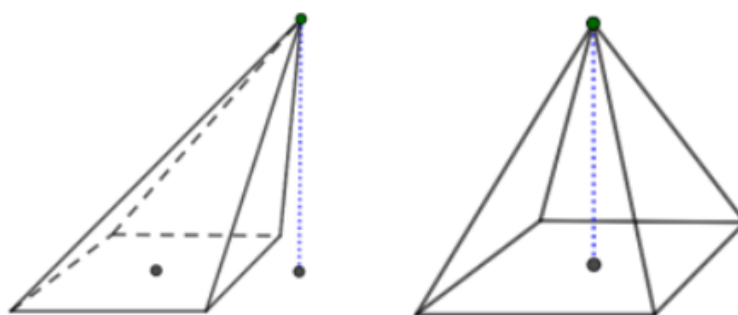


Figura 2.5: Pirâmide quadrangular oblíqua e pirâmide quadrangular reta

Analogamente ao prisma, é possível ter uma pirâmide quadrada reta e uma pirâmide quadrada oblíqua, embora a oblíqua seja menos comum nos exemplos cotidianos. Uma pirâmide quadrangular oblíqua é aquela em que a projeção ortogonal do vértice (o ponto onde todas as faces triangulares se encontram) no plano da base, não coincide com o centro da base quadrada. Isso faz com que o segmento de reta que liga diretamente o vértice ao centro da base não seja perpendicular à base, resultando em uma pirâmide inclinada. Por outro lado, uma pirâmide quadrangular reta tem o vértice diretamente acima do centro da base, o que resulta em um segmento de reta entre o vértice e o centro da base, ortogonal à base.

Alguns sólidos geométricos são facilmente identificáveis em nosso dia a dia. Um prisma retangular, por exemplo, pode ser visto em caixas de sapatos, enquanto uma pirâmide triangular pode ser encontrada em estruturas arquitetônicas como telhados. Por exemplo, temos o dado de 6 lados (Figura 2.6)), também conhecido como dado cúbico ou dado comum, é um objeto utilizado em muitos jogos de mesa e atividades lúdicas. Ele é um dos tipos mais populares de dados e é construído de maneira que cada uma das seis faces é marcada com um número de pontos de 1 a 6.



Figura 2.6: Dado no formato de hexágono

Um ringue octogonal, também conhecido como octógono, é uma estrutura geométrica que possui oito lados e oito ângulos. Este formato é popularmente conhecido no mundo dos esportes de combate, especialmente no MMA (Mixed Martial Arts), onde o ringue de competição tem forma octogonal, conforme ilustrado na Figura 2.7.

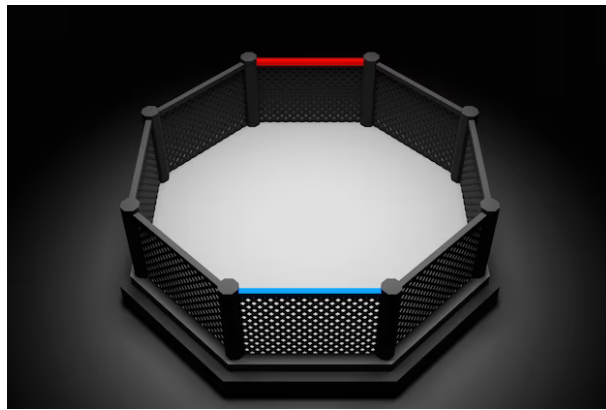


Figura 2.7: Octógono com forma de um prisma octogonal

Vamos agora estabelecer a fórmula do volume de uma pirâmide de base triangular.

**Proposição 2.1.** *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da sua base pela sua altura.*

*Demonstração.* Dado a pirâmide triangular  $E - ABC$ , sendo  $E$  seu vértice e  $ABC$  sua base. Denotando o volume dessa pirâmide por  $V$ , área da base  $b$  e altura  $h$ . Queremos provar que:

$$V = \frac{1}{3}bh$$

Na base  $ABC$ , podemos construir um prisma  $ABC - DEF$ . Através de  $AE$  e  $EF$  passamos um plano  $AEF$ . Dessa forma, o prisma é composto por três pirâmides triangulares  $E - ABC$  em azul,  $E - ADF$  em verde e  $E - ACF$  em laranja, conforme a animação a seguir (Figura ):

Figura 2.8: Prisma em três tetraedros de mesmo volume

Observamos que as pirâmides  $E - ADF$  e  $E - ACF$  têm a mesma altura e bases  $ADF$  e  $ACF$  congruentes. Dai, podemos concluir que essas pirâmides duas pirâmides possuem o mesmo volume.

Além disso, temos que a pirâmide  $E - ACF$  pode ser vista como a pirâmide  $A - CEF$ , ou seja, com vértice  $A$  e base  $CEF$ . Também é possível perceber que a pirâmide  $E - ABC$  pode ser vista como a pirâmide  $A - BCE$  que tem a mesma altura que a pirâmide  $A - CEF$  e tem a base  $BCE$  congruente à base  $CEF$ . Portanto as pirâmides  $E - ACF$  e  $E - ABC$  possuem o mesmo volume.

Uma vez que o prisma  $ABC - DEF$  fica dividido em três pirâmides de mesmo volume, segue que o volume de qualquer uma dessas pirâmides é a terça parte do volume do prisma. Em particular, o volume da pirâmide  $E - ABC$  é um terço do prisma  $ABC - DEF$ . Mas o volume de  $ABC - DEF$  é  $bh$ .

Portanto, temos finalmente que

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

□

## 2.3 Relação de Euler

As relações que se estabelecem vinculando suas arestas, vértices e faces citadas anteriormente servem como um prelúdio da relação que o ponto principal desta seção. Essa relação é chamada de Relação de Euler <sup>1</sup> seu enunciado por sua beleza e assertividade costuma fascinar os alunos da educação básica, pois Euler propõe que independentemente da quantidade de vértices, arestas ou faces de um poliedro, o valor da equação é sempre constante. Como isso é possível?

O teorema de Euler, que relaciona o número de vértices ( $V$ ), arestas ( $A$ ) e faces ( $F$ ) de um poliedro convexo ( $V - A + F = 2$ ), foi inicialmente formulado por Leonhard Euler em 1758. Embora Euler tenha enunciado o teorema, ele não forneceu uma prova rigorosa segundo os padrões modernos, em parte porque a definição precisa de poliedro não estava bem estabelecida na época.

Durante muitos anos, diversas tentativas foram feitas para provar rigorosamente o teorema de Euler. Uma dessas tentativas foi realizada por Augustin-Louis Cauchy, que forneceu uma prova em 1811. No entanto, mesmo Cauchy enfrentou dificuldades devido à falta de uma definição precisa de poliedro.

A compreensão completa e a prova rigorosa do teorema de Euler só foram alcançadas com o desenvolvimento da topologia no final do século XIX e início do século XX, quando matemáticos como Henri Poincaré começaram a estudar propriedades topológicas de superfícies de maneira mais formalizada.

Portanto, a resolução adequada do teorema de Euler e a definição rigorosa de poliedros vieram com o avanço da matemática, especialmente na teoria dos números e na topologia, décadas após a formulação inicial do teorema por Euler.

Observe as Figuras 2.9, 2.10 e 2.11 a seguir, que são exemplos de poliedros convexos:

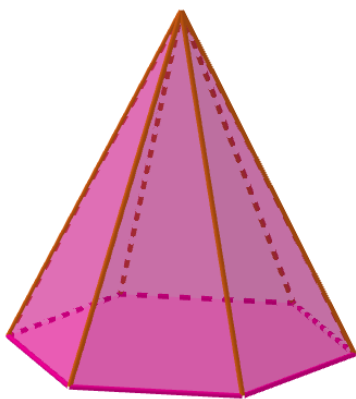


Figura 2.11: Pirâmide

Neste caso, temos uma pirâmide hexagonal. Suas faces são compostas por um hexágono na base e seis triângulos laterais, totalizando 7 faces. A pirâmide possui 12 arestas e 7 vértices. Temos que

$$V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2.$$

---

<sup>1</sup>Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático e físico suíço, amplamente considerado um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos. Ele fez contribuições significativas em diversos campos da matemática, incluindo a teoria dos números, a topologia, a geometria e o cálculo.

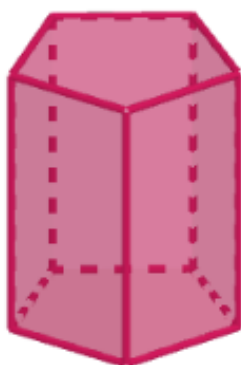


Figura 2.9: Prisma hexagonal

Nesta figura, temos um prisma hexagonal. Suas faces são compostas por dois hexágonos e seis retângulos, totalizando 8 faces. A quantidade de arestas é 18 e o número total de vértices é 12. Temos que

$$V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2.$$

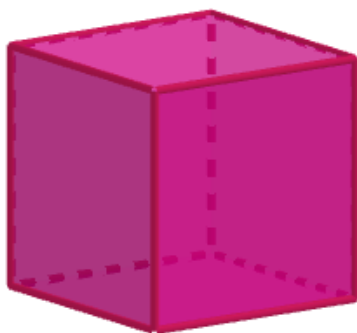


Figura 2.10: Hexaedro regular

Aqui temos um hexaedro regular, também conhecido como cubo. Suas faces são compostas por 6 quadrados, e ele possui 12 arestas e 8 vértices. Temos que

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Esses exemplos ilustram a famosa relação de Euler para poliedros convexos, apresentada no teorema a seguir.

**Teorema 2.1.** *Dado um poliedro convexo com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces, tem-se*

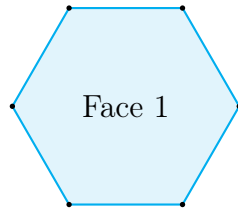
$$V - A + F = 2$$

A prova desse teorema pode ser feita de algumas formas, mas o que se encontra geralmente são provas realizadas pelo Princípio de Indução Matemática, porém apesar de ser uma ferramenta que um aluno do ensino médio poderia facilmente dominar e compreender, muitos deles não a conhecem por não fazer parte da ementa exigida pela BNCC. No entanto, iremos trazer uma demonstração simplificada que implicitamente traz o conceito recursivo que até um aluno sem muito conhecimento matemático poderia ficar convencido de que a prova apresentada satisfaz o teorema em questão. Mesmo assim, caso haja a curiosidade por parte do leitor de uma demonstração alternativa, pode verificá-la em Dolce e Pompeo (2013) Fundamentos Da Matemática Elementar - Volume 10 - pág. 122.

Iremos montar um determinado poliedro  $P$  através do processo de “colar” cada

face desse poliedro e em cada etapa dessa iremos verificar a relação descrita acima.

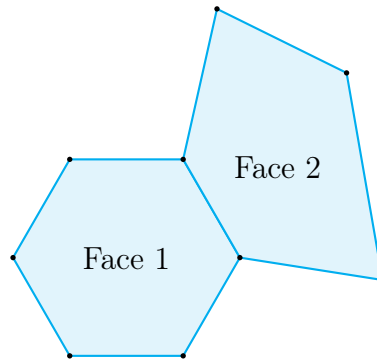
*Demonstração.* Considere uma face inicial com uma quantidade  $m \geq 3$  de vértices. Esta face terá exatamente  $m$  arestas. Assim, temos:



Neste caso, temos que  $V = m$ ,  $A = m$  e  $F = 1$ , resultando em

$$V - A + F = m - m + 1 = 1.$$

Agora iremos juntar a Face 2 a uma das arestas da Face 1. Ao realizarmos esse procedimento, a quantidade de faces do poliedro em construção aumenta em 1 unidade. Considere que a Face 2 é composta por  $n$  vértices e  $n$  arestas. Quando unimos as duas faces, o total de arestas adicionadas ao poliedro será  $n - 1$ , uma a menos, pois uma aresta de cada face será compartilhada. O total de vértices será  $n - 2$ , ou seja, dois a menos, pois a aresta em comum será limitada por dois vértices coincidentes. Assim, temos:

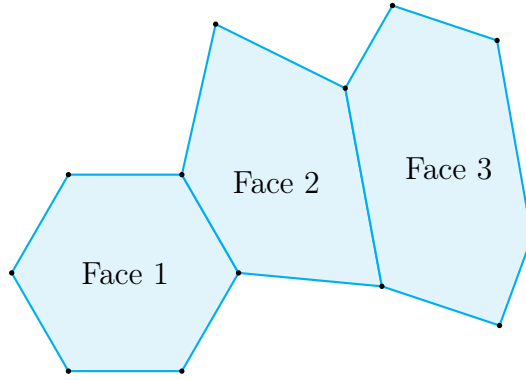


Daí, temos que  $V = m + (n - 2)$ ,  $A = m + (n - 1)$  e  $F = 2$ , contabilizando

$$V - A + F = m + n - 2 - (m + n - 1) + 2 = 1.$$

Para o passo seguinte, temos duas possibilidades:

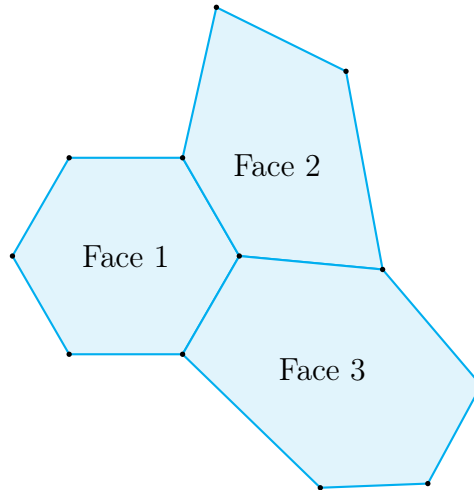
Primeira Possibilidade: A Face 3 é unida a apenas uma das faces (Face 1 ou Face 2), por exemplo, como na figura a seguir:



Nessa configuração, suponha que a terceira face tenha  $p$  arestas e, consequentemente,  $p$  vértices. De forma análoga ao caso anterior, quando unirmos as três faces, duas a duas, ao poliedro será adicionado  $p - 1$  arestas,  $p - 2$  vértices e 1 face. Neste novo esque, a nova contagem nos fornece  $V = m + (n - 2) + (p - 2) = m + n + p - 4$ ,  $A = m + (n - 1) + (p - 1) = m + n + p - 2$  e  $F = 3$ . Logo,

$$V - A + F = m + n + p - 4 - (m + n + p - 2) + 3 = 1.$$

Segunda Possibilidade: A Face 3 é unida as duas faces simultaneamente (Face 1 e Face 2).



Para este caso, considere novamente a terceira face com  $p$  arestas e  $p$  vértices. Diferentemente do caso anterior, as faces não estarão unidas duas a duas, mas sim as três simultaneamente. Dessa forma, ao poliedro do passo anterior, será adicionado  $p - 2$  arestas,  $p - 3$  vértices e 1 face. A nova contagem torna-se  $V = m + (n - 2) + (p - 3) = m + n + p - 5$ ,  $A = m + (n - 1) + (p - 2) = m + n + p - 3$  e  $F = 3$  e assim obtemos novamente:

$$V - A + F = m + n + p - 5 - (m + n + p - 3) + 3 = 1$$

Observe que, independentemente da maneira como a próxima face for "colada" nas outras,



a relação permanece a mesma, ou seja, igual a 1. É seguro afirmar que isso sempre acontece, pois o que se percebe é que, em qualquer caso, o número de arestas acrescentadas é sempre uma unidade a mais que o número de vértices acrescentados ao poliedro.

Esse resultado se mantém até a penúltima face. Assim, a relação  $V - A + F$  será constante e igual a 1. No entanto, ao grudarmos a última face, não se acrescentam vértices nem arestas ao poliedro, pois estas estarão todas sobrepostas às arestas já presentes. Entretanto, acrescentamos uma unidade à quantidade de faces. Dessa maneira, sempre que colarmos a última face do poliedro, que tem um número finito de faces por definição, obteremos a seguinte relação:

$$V - A + F = 2.$$

□

## 2.4 Poliedros de Platão

Os poliedros regulares fazem parte do grupo especial de poliedros que, além de cumprirem as regras gerais, estes também possuem outras particularidades. Particularidades essas que os fazem de certa forma especiais, pois na matemática as congruências geométricas, as especificidades e as simetrias classificam objetos principalmente por sua aparência “agradável aos olhos”.

Alguns poliedros regulares eram conhecidos dos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura. No Livro Elementos de Euclides, livro este que embasa uma construção gigantesca no âmbito da Geometria, há um início de tratamento matemático desses sólidos, conhecidos como sólidos de Platão <sup>2</sup>, pois ao que se sabe Platão foi o primeiro a enunciar que existem 05(cinco) poliedros regulares e somente cinco.

Vale ressaltar que neste trabalho estamos tratando apenas dos casos de poliedros convexos, pois dependendo da definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, ou infinitos. Assim, para o primeiro caso devemos considerar que poliedro regular é todo poliedro convexo onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes, neste caso existirão apenas cinco poliedros regulares, os chamados “Poliedros de Platão”; no segundo caso, devemos considerar que poliedro regular é todo poliedro onde suas faces são polígonos regulares congruentes e seus vértices são congruentes, para este caso existirão nove poliedros regulares: os cinco de Platão e os quatro de Kepler-Poinsot. Porém se considerarmos poliedro regular sendo todo poliedro onde os vértices e as arestas são congruentes, então existem, além dos nove anteriores, os infinitos poliedros de Arquimedes (Arquimedianos, prismas e anti-prismas). Abaixo

---

<sup>2</sup>Platão (c. 427-347 a.C.) foi um filósofo grego, discípulo de Sócrates e mestre de Aristóteles. Ele fundou a Academia em Atenas, uma das primeiras instituições de ensino superior do mundo ocidental. Platão é conhecido por suas obras filosóficas que abordam temas como a justiça, a ética, a política, e a teoria do conhecimento.

seguem duas definições de poliedros regulares que utilizaremos nesse trabalho, a primeira para DANTE (2005) página 432 e a segunda de LIMA (2006) página 241.

**Definição 2.4.** *Um poliedro é denominado poliedro de Platão se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:*

- i) Todas as faces têm o mesmo número de arestas;*
- ii) Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas;*
- iii) Vale a relação de Euler:  $V - A + F = 2$ .*

**Definição 2.5.** *Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.*

A demonstração abaixo foi baseada no livro de Dante página 431.

**Teorema 2.2.** *Existem cinco e somente cinco poliedros regulares.*

*Demonstração.* Para provar que existem apenas cinco poliedros regulares, vamos usar as seguintes notações:

- $V$ : representa o número de vértices;
- $A$ : é o número de arestas;
- $F$ : é o número de faces;
- $n$ : corresponde ao número de lados de cada face (ou seja, cada face é um polígono regular com  $n$  lados);
- $p$ : é número de faces que se encontram em cada vértice.

Considere um poliedro com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices. Suponha que cada face possui  $n$  arestas e que cada vértice conecta  $p$  arestas. Para que o poliedro seja válido, é necessário que  $n \geq 3$ , onde  $n$  pertence ao conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ). Além disso, é preciso que  $p \geq 3$ , com  $p$  também pertencendo a  $\mathbb{N}$ .

Agora, imagine um poliedro cujas faces foram separadas e dispostas sobre um plano. Se quisermos determinar a soma do número de lados de todos os polígonos dispostos no plano, uma maneira seria multiplicar o número de faces triangulares por 3, o número de faces quadrangulares por 4, o número de faces pentagonais por 5, e assim por diante, somando depois os valores obtidos parcialmente.

É importante destacar que essa contagem não corresponde ao total de arestas do poliedro, pois é necessário considerar que cada aresta é compartilhada por duas faces adjacentes. Portanto, a contagem do número de lados dos polígonos que formam um

poliedro corresponde ao dobro da quantidade de arestas desse poliedro. Logo, seja  $nF$  o número de arestas das faces do poliedro, temos:

$$nF = 2A$$

Outra observação que pode ser feita é que como todos os ângulos poliédricos devem ter o mesmo número de arestas, e cada aresta está entre dois, e somente dois, ângulos, então:

$$pV = 2A$$

Escrevendo  $A$  e  $V$  em função de  $F$ , obtemos

$$A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo estas expressões na relação de Euler, segue que

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

Multiplicando todos os termos por  $2p$  para eliminar os denominadores e colocando  $F$  em evidência, temos

$$F(2n - np + 2p) = 4.$$

Dessa maneira, podemos escrever

$$F = \frac{4p}{2n - np + 2p}$$

Naturalmente devemos ter  $2n - np + 2p > 0$ , ou equivalentemente

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Como  $p \geq 3$ , por transitividade, concluímos que  $\frac{2n}{n-2} > 3$ . Daí,

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \iff 2n > 3n - 6 \iff n < 6$$

Dessa forma, concluímos que o número  $n$  de lados dos polígonos de qualquer poliedro regular deve ser menor do que 6, restando apenas as possibilidades  $n = 3$ ,  $n = 4$  e  $n = 5$ . Para  $n = 3$ , ou seja, as faces são triangulares, temos que a expressão de  $F$  em função de  $p$  torna-se:

$$F = \frac{4p}{6-p}.$$

Devemos ter  $3 \leq p < 6$ , ou seja,  $p = 3$ ,  $p = 4$  ou  $p = 5$ . Substituindo essas possibilidades,

seguem as descrições dos poliedros com faces triangulares obtidos.

- Quando  $n = 3$  e  $p = 3$ , temos que  $F = \frac{4 \cdot 3}{6 - 3} = \frac{12}{3} = 4$ , resultando em um **tetraedro**.
- Quando  $n = 3$  e  $p = 4$ , temos que  $F = \frac{4 \cdot 4}{6 - 4} = \frac{16}{2} = 8$ , que é um **octaedro**.
- Quando  $n = 3$  e  $p = 5$ , calculamos  $F = \frac{4 \cdot 5}{6 - 5} = \frac{20}{1} = 20$ , e nesse caso temos um **icosaedro**.

Se  $n = 4$ , ou seja, as faces são quadrados, temos que a expressão de  $F$  em função de  $p$  é:

$$F = \frac{4p}{8 - 2p} = \frac{2p}{4 - p}.$$

Nessa situação único valor possível para  $p$  é 3:

- Quando  $n = 4$  e  $p = 3$ , temos que  $F = \frac{2 \cdot 3}{4 - 3} = \frac{6}{1} = 6$ , e isso representa um **hexaedro**.

Finalmente para  $n = 5$ , a única opção para  $p$  será 3 e assim finalizamos com a figura do dodecaedro.

- Quando  $n = 5$  e  $p = 3$ , temos que  $F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3} = \frac{12}{10 - 15 + 6} = \frac{12}{1} = 12$ , que representa o **dodecaedro**.

□

No Capítulo 3 faremos uma descrição detalhada com algumas propriedades desses cinco sólidos regulares.

## Poliedros Regulares

### 3.1 Tetraedro Regular

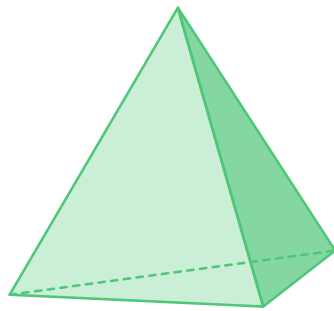


Figura 3.1: Tetraedro regular

O tetraedro regular (Figura 3.1)) é uma pirâmide triangular que se destaca pela sua simetria e é conhecida pelos platônicos como o símbolo do elemento fogo. Composto por quatro triângulos equiláteros, ele possui 4 vértices, 4 faces e 6 arestas. Daí, temos que

$$V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2.$$

- a) **Área da Base:** Desde que a base de um tetraedro de lado  $a$  será um triângulo equilátero de base  $a$  e altura  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , temos que a área da base  $A_b$  é dada por:

$$A_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

- b) **Área da Superfície:** Para o tetraedro, temos que a área  $A_t$  da superfície é formada por quatro triângulos com área  $A_b$ . Assim, temos que:

$$A_t = 4 \cdot A_b = a^2\sqrt{3}.$$

- c) **Altura do Tetraedro:** A altura  $H_t$  de um tetraedro corresponde à distância do plano da sua base até o vértice oposto.

De fato, considerando a Figura 3.2, temos que a altura  $H_t$  é cateto do triângulo retângulo  $AOV$ , de hipotenusa  $AV = a$ . Já sabemos que  $AD = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  e sendo  $O$  o baricentro do triângulo  $ABC$ , segue que o cateto mede  $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ .

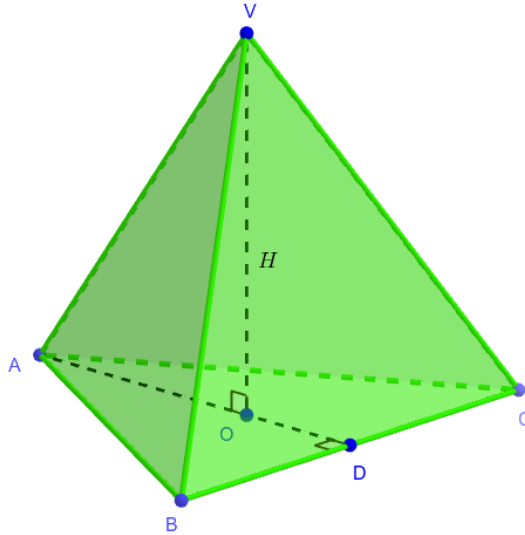


Figura 3.2: Altura de um Tetraedro

Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que

$$AV^2 = AO^2 + OV^2$$

$$a^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}a \right)^2 + H_t^2$$

Isolando  $H_t$ , temos

$$H^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

Portanto a altura  $H_t$  do tetraedro é dado por

$$H_t = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

- d) **Volume:** Desde que um tetraedro regular de lado  $a$  é uma pirâmide de base triangular, segue da Proposição 2.1 que seu volume  $V_t$  é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H_t,$$

sendo  $A_b$  é a área da base da pirâmide e  $H_t$  é a altura calculada anteriormente. Dessa forma, obtemos:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

e) **Ângulo entre faces:** O ângulo entre duas qualquer duas faces consecutivas pode ser calculado observando novamente a Figura 3.2, sendo que o ângulo  $\theta$  procurado corresponde ao ângulo  $\hat{O}DV$  no triângulo retângulo  $ODV$ . Já sabemos que  $OV = H_t = \frac{\sqrt{6}}{3}a$  e novamente pela propriedade do baricentro, segue que  $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ . Assim,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{OV}{OD} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

Portanto  $\theta = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}) \approx 70,53^\circ$ .

A seguir, temos uma animação que ilustra a planificação de um tetraedro. Essa animação foi criada no software Geogebra no ícone  Planificação

Usando a planificação gerada, observar um fato interessante conhecido como Relação de Euler para regiões planas. Denotando por  $V_p$ ,  $A_p$  e  $F_p$  a quantidade de vértices, arestas e faces da figura planificada, fazendo a contagem desses elementos, obtemos  $V_p = 6$ ,  $A_p = 9$  e  $F_p = 4$ . Disso resulta que

$$V_p - A_p + F_p = 6 - 9 + 4 = 1.$$

## 3.2 Hexaedro Regular

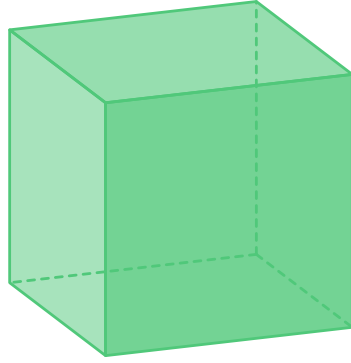


Figura 3.3: Hexaedro regular

O hexaedro (Figura 3.3)) é um tipo de prisma quadrangular reto, onde a medida de sua altura coincide com as medidas das arestas de cada uma das suas faces. O hexaedro também é chamado de cubo. Segundo Platão, o hexaedro é o representante do elemento terra, formado por 12 arestas, 8 vértices e 6 faces todas no formato quadrangular. Dessa forma, obtemos

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

- a) **Área da Base:** Sendo que a base de um hexaedro regular é um quadrado de lado  $a$ , temos que a área da base é dada por

$$A_b = a \cdot a = a^2.$$

- b) **Área da Superfície:** Temos que a área  $A_h$  da superfície de um hexaedro regular equivale a 6 vezes a área da base. Assim:

$$A_h = 6 \cdot A_b = 6a^2.$$

- c) **Altura do Hexaedro:** Para um hexaedro regular de lado  $a$ , temos que a altura  $H_h$  coincide com essa medida de lado  $a$ , isto é,  $H_h = a$ .

- d) **Volume:** Sendo um hexaedro um prisma de base quadrada de lado e altura  $a$ , temos que seu volume  $V_h$  é calculado diretamente pela fórmula:

$$V_h = A_b \cdot a = a^2 \cdot a = a^3.$$

- e) **Ângulo entre faces:** Uma vez que os lados de um hexaedro regular que se encontram são dois a dois perpendiculares, segue que o ângulo  $\theta$  entre seus lados é  $\theta = 90^\circ$ .



Agora vamos ver a planificação animada de um cubo.

Dessa planificação do hexaedro, obtemos a seguinte contagem desses elementos:  $V_p = 14$ ,  $A_p = 19$  e  $F_p = 6$ . Verificamos a seguinte relação,

$$V_p - A_p + F_p = 14 - 19 + 6 = 1.$$

### 3.3 Octaedro Regular

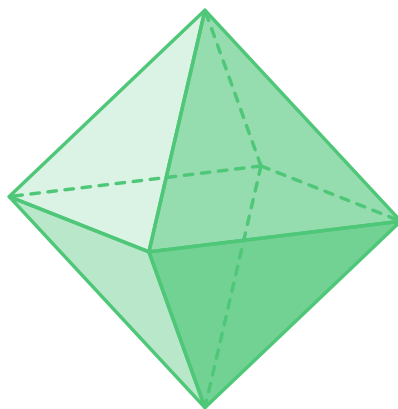


Figura 3.4: Octaedro regular

O octaedro regular (Figura 3.4) pode ser visivelmente interpretado como uma junção de duas pirâmides quadrangulares sobrepostas de forma que compartilham de uma mesma base e com faces laterais todas idênticas. De acordo com Platão, o octaedro é o representante do elemento ar. Esse sólido platônico é formado por 12 arestas, 6 vértices e 8 faces que possuem o formato de um triângulo equilátero. Assim, verificamos a relação de Euler nesse caso:

$$V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2.$$

- a) **Área da Base:** Posicionando o octaedro em um plano, vamos considerar a sua base como sendo um de seus lados. Com isso, temos que a base será um triângulo equilátero de lado  $a$  e sua área é

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

- b) **Área da Superfície:** A área  $A_o$  da superfície de um octaedro regular equivale a 8 vezes a área da base. Logo:

$$A_o = 8 \cdot A_b = 8 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2.$$

- c) **Altura do Octaedro:** Para um octaedro regular de lado  $a$ , posicionada conforme a Figura 3.5, vamos considerar a sua altura  $H_o$  como sendo a distância entre duas faces paralelas.

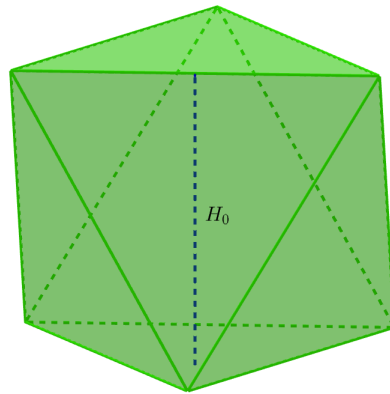


Figura 3.5: Octaedro regular apoiado no plano

Um fato interessante é que o ângulo diedral do tetraedro é suplementar ao ângulo diedral do octaedro, que será calculado mais adiante no item e. Isso implica que a altura  $H_o$  coincide com a altura  $H_t$  do tetraedro. Daí,

$$H_o = H_t = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

- d) **Volume:** Para calcular o volume de um octaedro regular, vamos considerar a partição do octaedro em duas pirâmides de base quadrada, com uma delas representada como na Figura 3.6.

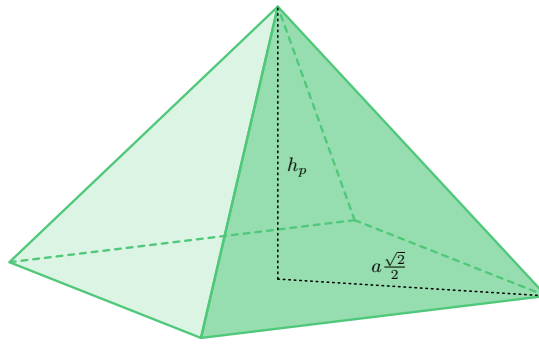


Figura 3.6: Pirâmide que compõe o octaedro

O volume  $V_p$  de uma pirâmide é dado por

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \text{área da base} \cdot \text{altura}.$$

A base da pirâmide é um quadrado de área  $a^2$  e a altura  $h_p = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Essa fórmula de altura se justifica pelo fato de que  $2h_p$  representa a diagonal de um quadrado de lado  $a$ .

Dessa forma, temos que

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3.$$

Finalmente, temos que o volume do octaedro é

$$V_o = 2 \cdot V_p = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3.$$

- e) **Ângulo entre faces:** Para encontrar o ângulo entre as faces de um octaedro regular, vamos recorrer à Figura 3.7:

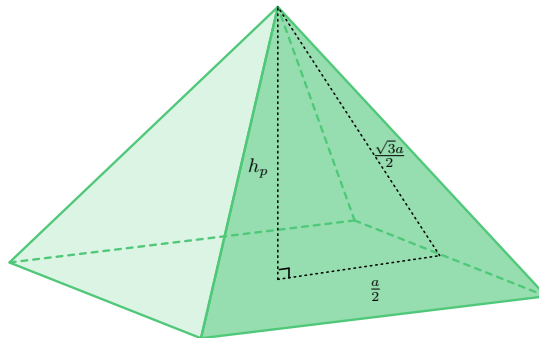


Figura 3.7: Pirâmide que compõe o octaedro

Vamos calcular o ângulo  $\theta_p$  que corresponde ao ângulo entre a base da pirâmide e um de seus lados. Pelo triângulo retângulo em destaque, segue que

$$\cos(\theta_p) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

e dessa forma, concluímos que  $\theta_p = \arccos(1/\sqrt{3})$ . O ângulo  $\theta$  entre as faces do octaedro corresponde ao dobro de  $\theta_p$ , ou seja,

$$\theta = 2\theta_p = 2 \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 109,47^\circ.$$

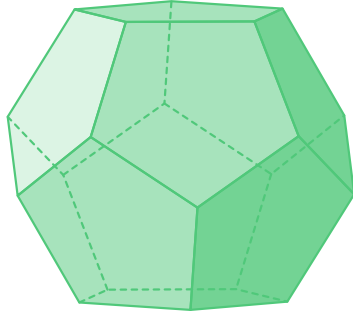
É importante destacar que o ângulo formado por faces do octaedro que formam a pirâmide é de  $90^\circ$ .

Agora vamos à ilustração da planificação de um tetraedro.

Usando a planificação do octaedro, a contagem de seus elementos resulta em  $V_p = 10$ ,  $A_p = 17$  e  $F_p = 8$ , que verifica a relação de Euler no plano:

$$V_p - A_p + F_p = 10 - 17 + 8 = 1.$$

### 3.4 Dodecaedro Regular



Conhecido como o mais harmonioso e soberano dos sólidos Platônicos, o dodecaedro (Figura 3.8)) na concepção de Platão, não representa nenhum dos elementos naturais, representa o universo. Este é constituído por 12 faces pentagonais, possui 30 arestas e 20 vértices. Logo,

$$V - A + F = 20 - 30 + 12 = 2.$$

Figura 3.8: Dodecaedro regular

- a) **Área da Base:** Sendo que a base de um dodecaedro regular é um pentágono regular de lado  $a$ , vamos denotar alguns elementos importantes que nos ajudarão a determinar a sua área, conforme Figura 3.9

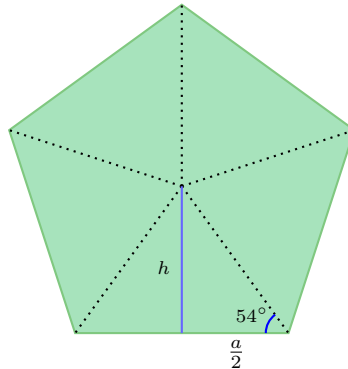


Figura 3.9: Pentágono regular de lado  $a$

Usando a definição de tangente de um ângulo, obtemos que

$$\operatorname{tg}(54^\circ) = \frac{h}{\frac{a}{2}} \implies h = \frac{a}{2} \operatorname{tg}(54^\circ).$$

Como o pentágono é composto de 5 triângulos idênticos, cada um com área dada por

$$A_b = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{5}{2} \cdot a \cdot \frac{5a}{2} \operatorname{tg}(54^\circ) = \frac{5a^2}{4} \operatorname{tg}(54^\circ).$$

Além disso, temos da trigonometria que

$$\operatorname{tg}(54^\circ) = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5},$$

o que nos permite expressar  $A_b$  por

$$A_b = \frac{5a^2}{4} \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

- b) **Área da Superfície:** Para o cálculo da área  $A_d$  superficial de um dodecaedro regular, temos que  $A_d$  equivale a 12 vezes a área da base. Assim:

$$A_d = 12 \cdot A_b = 12 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

- c) **Volume:** Para calcular o volume  $V_d$  de um dodecaedro regular com aresta  $a$ , vamos considerar a decomposição do dodecaedro em um cubo, cujas arestas são as diagonais dos pentágonos das faces, e por outros 6 sólidos, conforme a Figura 3.10.

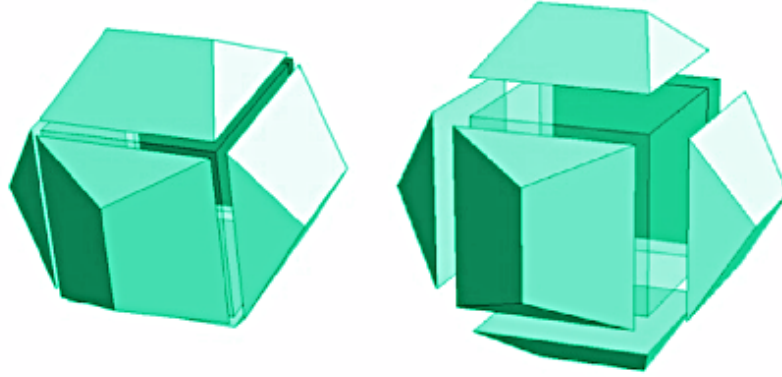


Figura 3.10: Decomposição de um dodecaedro

Vamos denotar a aresta do cubo por  $d$ . É conhecido que a diagonal  $d$  de um pentágono regular com aresta  $a$  é dada por:

$$d = a \cdot \phi,$$

onde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é o conhecido número de ouro. O volume do cubo é então:

$$V_{\text{cubo}} = d^3 = (a \cdot \phi)^3 = a^3 \cdot \phi^3$$

Para calcular o volume de cada um desses outros seis sólidos, vamos fazer uma nova decomposição como ilustra a Figura 3.11:

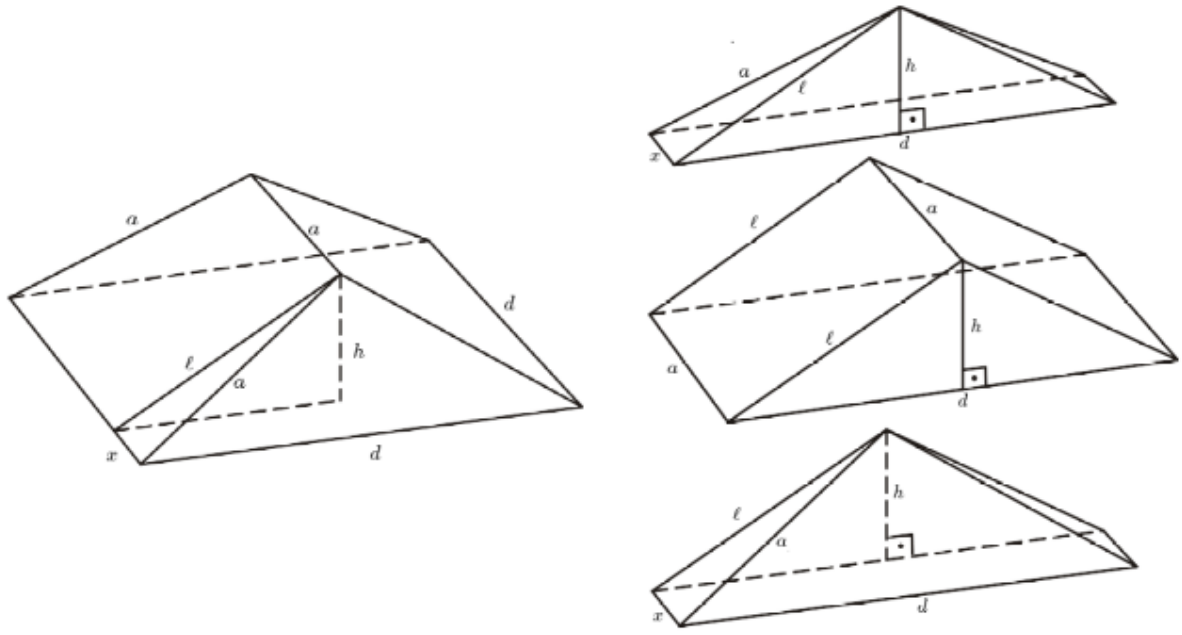


Figura 3.11: Decomposição de um dos seis sólidos

Como o sólido tem base quadrada  $d$  e usando indicação das medidas, é imediato observar que  $d = a + 2x$  e portanto  $x = \frac{d-a}{2}$ . Pelo Teorema de Pitágoras, temos que  $a^2 = x^2 + l^2$  e  $l^2 = h^2 + (d/2)^2$ . Daí

$$a^2 = \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 + l^2 \quad \text{e} \quad l^2 = h^2 + \frac{d^2}{4}.$$

Substituindo a segunda expressão com  $l^2$  na primeira equação e isolando  $h^2$ , obtemos:

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{d(d-a)}{2} = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\phi(\phi-1) = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}a^2,$$

onde usamos o fato que  $d = a\phi$  e  $\phi^2 - \phi = 1$ . Portanto, concluímos que

$$h = \frac{a}{2}.$$

Isso nos permite calcular o volume do prisma da decomposição e também das duas pirâmides de base quadrada. Portanto, o volume do dodecaedro é dado por:

$$\begin{aligned} V_d &= V_{\text{cubo}} + 6(V_{\text{prisma}} + 2V_{\text{pirâmide}}) = a^3\phi^3 + 6\left(\frac{1}{2}dah + 2\frac{1}{3}xdh\right) \\ &= a^3\phi^3 + 3a\phi\frac{a}{2}a + 4\frac{a}{2}(\phi-1)\phi a\frac{a}{2} = a^3\phi^3 + \frac{3}{2}a^3\phi + a^3, \end{aligned}$$

sendo que usamos o fato de que  $\phi^2 = \phi + 1$ . Isso também implica que

$$\phi^3 = \phi^2 \phi = (\phi + 1)\phi = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1.$$

Assim,

$$V_d = \left( \phi^3 + \frac{3}{2}\phi + 1 \right) a^3 = \frac{7\phi + 4}{2} a^3.$$

Portanto o volume total do dodecaedro regular é:

$$V_d = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3$$

- d) **Altura:** Vamos considerar a altura  $H_d$  de um dodecaedro como sendo a distância entre dois lados paralelos. Essa distância coincide com o diâmetro da esfera inscrita no dodecaedro, conforme ilustra a Figura 3.12:

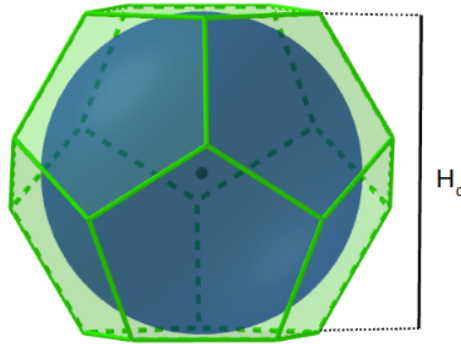


Figura 3.12: Esfera inscrita em um dodecaedro

Denotando por  $r$  o raio dessa esfera inscrita, temos que  $H_d = 2r$ . Podemos decompor o dodecaedro em 12 pirâmide de base pentagonal e altura  $r$ , obtendo a relação entre volumes:

$$V_d = 12 \cdot V_p,$$

onde  $V_p$  denota o volume de uma dessas pirâmides. Daí,

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot \frac{H_d}{2} = \frac{a^2}{24} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot H_d.$$

Logo,

$$\frac{a^2}{2} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot H_d = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3.$$

Isolando  $H_d$ , segue que

$$H_d = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}} a.$$



Racionalizando e simplificando expressão, obtemos finalmente que

$$H_d = \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{10}a$$

- e) **Ângulo entre faces:** Denotando o ângulo entre as faces por  $\theta$ , o raio da esfera inscrita por  $r$  e o apótema da face por  $ap$ , temos que essas grandezas estão relacionadas no triângulo retângulo da Figura 3.13 a seguir:

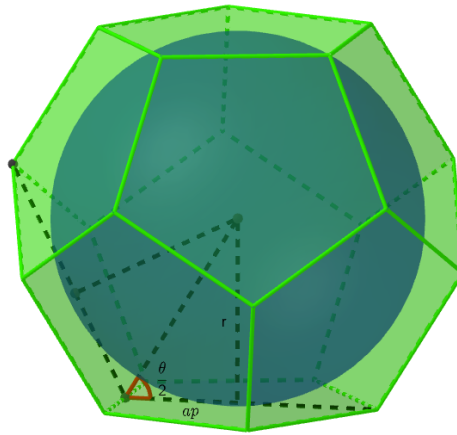


Figura 3.13: Relação do ângulo entre as faces, apótema e raio da esfera inscrita

Pelo item anterior, sabemos que  $r = \frac{H_d}{2}$  e o apótema  $ap$  é

$$ap = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}a.$$

Dessa forma, pela relação de tangente no triângulo retângulo em destaque, temos que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{ap} = \frac{\frac{a}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{\frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}.$$

Daí,

$$\theta = 2 \arctg\left(\frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}\right) \approx 116,6^\circ.$$

Agora vamos ver a planificação do dodecaedro produzida no Geogebra.

Através dessa planificação, obtemos a seguinte contagem dos elementos:  $V_p = 38$ ,  $A_p = 49$  e  $F_p = 12$ . Verificamos a seguinte relação,

$$V_p - A_p + F_p = 38 - 49 + 12 = 1.$$

### 3.5 Icosaedro Regular



O icosaedro regular (Figura 3.14) também possui uma relação com os elementos segundo Platão, este seria o representante do elemento água, o icosaedro é um sólido formado por 30 arestas, 12 vértices e 20 faces no formato de um triângulo equilátero. O icosaedro é o poliedro regular com o maior número de faces possíveis, isso claro levando em consideração apenas a definição de Platão de Poliedros regulares. Assim, nenhum outro poliedro com mais de 20 faces poderá ser regular. Temos que a contagem dos elementos do icosaedro implica que

Figura 3.14: Icosaedro regular

$$V - A + F = 12 - 30 + 20 = 2.$$

- a) **Área da Base:** Posicionando o icosaedro em um plano, vamos considerar a sua base como sendo um de seus lados. Com isso, temos que a base será um triângulo equilátero de lado  $a$  e sua área é

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

- b) **Área da Superfície:** Por ser formado por 20 triângulos equiláteros e congruentes, podemos encontrar a área  $A_i$  da superfície de um icosaedro regular multiplicando a área de um dos triângulos das faces por 20. Considere um icosaedro regular de arestas medindo  $a$ .

$$A_i = 20 \cdot A_b = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}a^2.$$

- c) **Ângulo entre as faces:** Para determinar o ângulo entre duas faces de um icosaedro regular, podemos usar um método geométrico baseado na simetria do poliedro. Vamos considerar um plano que passa por três vértices adjacentes do icosaedro. Esse plano cortará o icosaedro de maneira que a secção plana forme um pentágono regular, porque cada vértice do icosaedro é adjacente a cinco outros vértices. Observe a animação a seguir:

O pentagono regular dessa seção está destacado no Figura 3.15, sendo que o ângulo entre suas arestas adjacentes é  $108^\circ$  e seus lados medem  $a$ .

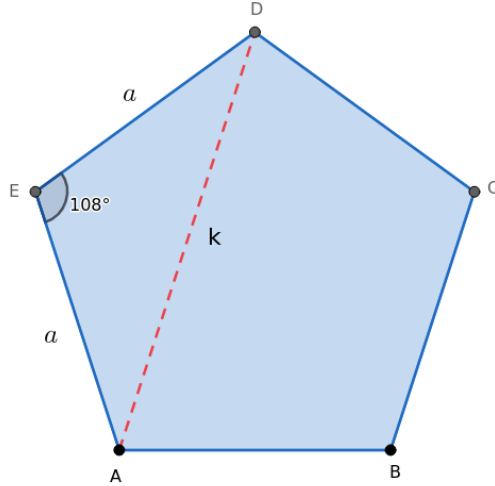


Figura 3.15: Pentágono seccional associado ao icosaedro

Podemos encontrar a medida do segmento  $AD$  utilizando a Lei dos Cossenos:

$$k^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(108^\circ) = 2a^2 (1 - \cos(108^\circ)).$$

Usando o fato de que  $\cos(108^\circ) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ , obtemos

$$k^2 = a^2 \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Agora, vamos encontrar as alturas dos triângulos  $DEG$  e  $AEG$ , que possuem a mesma base  $EG$ . Como as faces do icosaedro são triângulos equiláteros, a altura  $h$  desses triângulos é dada por:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Nos resta descobrir a medida do ângulo  $\theta$ , que é o ângulo entre duas faces adjacentes do icosaedro, conforme a imagem a seguir:

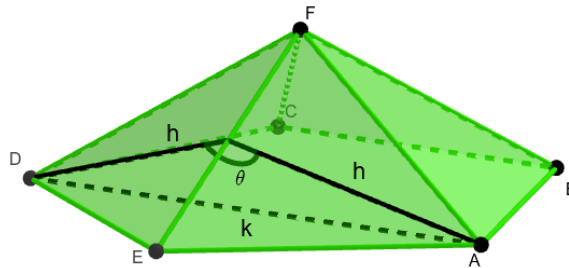


Figura 3.16: Relação entre  $k$ ,  $h$  e  $\theta$

Aplicando a Lei dos Cossenos:

$$k^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \theta = 2h^2(1 - \cos \theta)$$

Substituindo os valores de  $k^2$  e  $h^2$ , segue que

$$a^2 \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{3}{2} a^2 (1 - \cos \theta).$$

Com as devidas simplificações, temos que

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Finalmente, o ângulo  $\theta$  entre duas faces adjacentes do icosaedro é dado por:

$$\theta = \arccos \left( \frac{-\sqrt{5}}{3} \right) \approx 138,2^\circ$$

- d) **Altura:** Primeiramente precisamos calcular o raio da esfera circunscrita ao icosaedro, conforme a Figura 3.17:

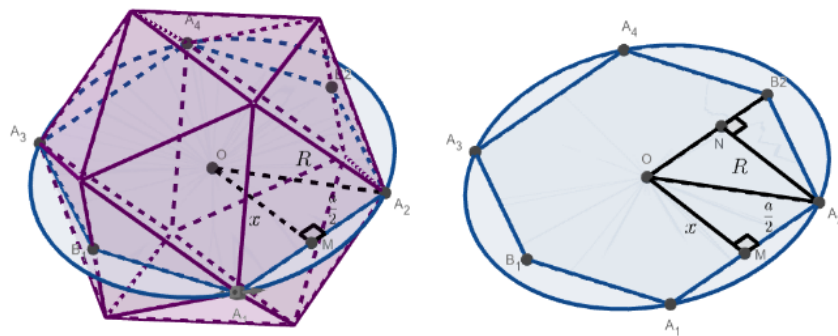


Figura 3.17: Esfera circunscrita a um icosaedro

O plano que passa pelo centro dessa esfera e por dois pontos do icosaedro determina um polígono (não regular) conforme mostrado na figura. Para determinar o valor da medida  $x$ , observamos que pela simetria do icosaedro,  $OB_2 = x$ ,  $NB_2 = x - a/2$  e  $A_2B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que

$$x^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 \implies 2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

Logo  $x = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})$ . Denotando por  $R$  o raio da esfera e aplicando novamente o Teorema de Pitágoras agora no triângulo  $OMA_2$ , segue que

$$R^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} \cdot 2(5 + \sqrt{5})$$

Extraindo a raiz quadrada, finalmente encontramos a expressão

$$R = \frac{a}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}.$$

Para calcular a altura  $H_i$  do icosaedro, que equivale a  $2r$ , sendo  $r$  o raio da esfera inscrita e  $y$  como na Figura 3.18, vamos usar o Teorema de Pitágoras e concluir que

$$r^2 + y^2 = R^2 \implies r^2 = R^2 - y^2.$$

Daí,

$$r^2 = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{144}(42 + 18\sqrt{5}).$$

Com um pouco de manipulação dessa expressão, obtemos que

$$H_i = 2r = 2 \frac{\sqrt{3}a}{12}(3 + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{3}a}{6}(3 + \sqrt{5})$$

- e) **Volume:** Um icosaedro regular pode ser decomposto em 20 tetraedros congruentes não regulares. Cada um desses tetraedros tem uma base que é uma das faces do icosaedro (um triângulo equilátero de lado  $a$ ), e o vértice oposto a esta base é o centro do icosaedro. Dessa forma, o volume  $V_i$  do icosaedro será equivalente a 20 vezes o volume  $V$  desse tetraedro que possui arestas da base medindo  $a$  e arestas das faces medindo  $s$ . Veja a Figura 3.18 que ilustra essa decomposição:

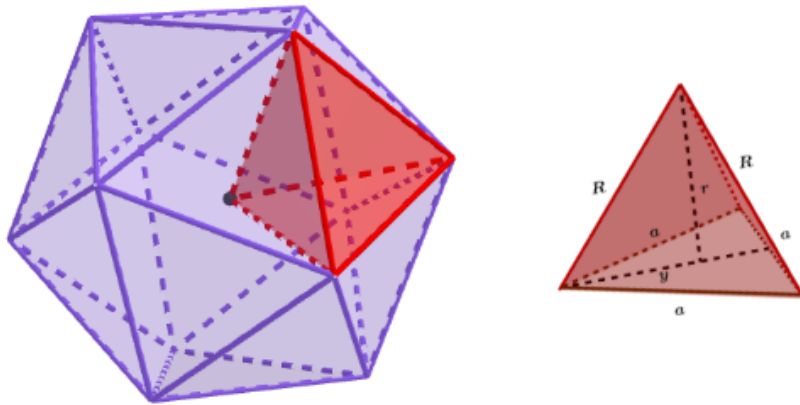


Figura 3.18: Decomposição de um icosaedro em 20 tetraedros

Já sabemos que a área da base desse tetraedro é dado por

$$A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Observando que a altura desse tetraedro é  $H_i/2$ , segue o volume do icosaedro pode ser expresso por

$$V_i = 20 \cdot V = 20 \cdot \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{H_i}{2} = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5}).$$

Portanto

$$V_i = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5}).$$

Finalmente chegamos na aminação a planificação do icosaedro:

Através dessa planificação, obtemos a seguinte contagem dos elementos:  $V_p = 22$ ,  $A_p = 41$  e  $F_p = 20$ . Verificamos a seguinte relação,

$$V_p - A_p + F_p = 22 - 41 + 20 = 1.$$

### 3.6 Arestas que produzem mesmo volume ou mesma altura

Nessa seção vamos obter as medidas que os sólidos de platão devem ter para que resultem em mesmo volume e em sequência, mesma altura. Das seções anteriores, vimos que todos os sólidos de Platão possuem volume e altura dados por expressões do tipo  $V = k \cdot a^3$  e  $H = l \cdot a$ , respectivamente. Em resumo, temos os seguintes resultados:

Tabela 3.1: Volume e altura dos sólidos de Platão com aresta  $a$

| Sólido     | Volume                           | Altura                                  |
|------------|----------------------------------|-----------------------------------------|
| Tetraedro  | $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$         | $\frac{\sqrt{6}}{3}a$                   |
| Cubo       | $a^3$                            | $a$                                     |
| Octaedro   | $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$          | $\frac{\sqrt{6}}{3}a$                   |
| Dodecaedro | $\frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$ | $\frac{1}{10}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}a$ |
| Icosaedro  | $\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$  | $\frac{\sqrt{3}}{6}(3 + \sqrt{5})a$     |

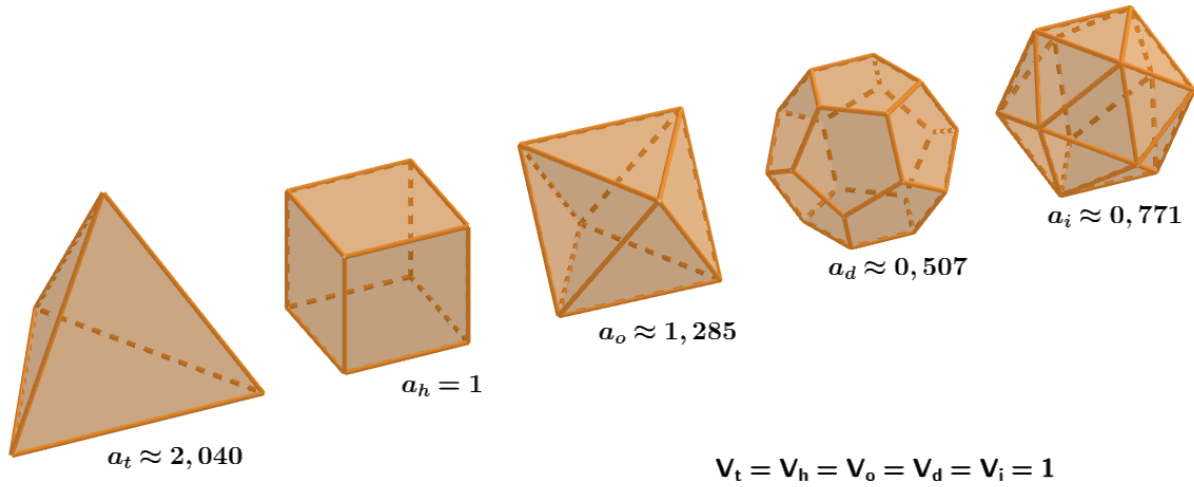


Figura 3.19: Sólidos de Platão com mesmo volume

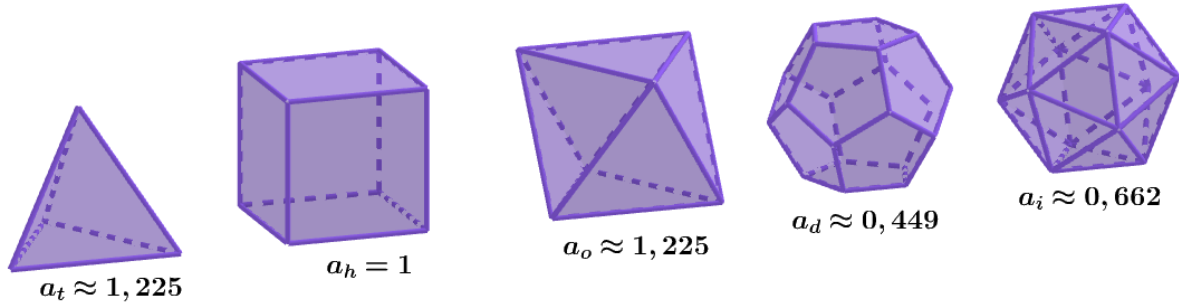
Nesta Figura 3.19, são apresentados os cinco sólidos de Platão, ajustados para terem volumes iguais. A escala dos comprimentos de aresta de cada sólido foi modificada para garantir que todos os volumes sejam  $V_t = V_h = V_o = V_d = V_i = 1$ , onde:

- $a_t \approx 2,040$  é o comprimento da aresta do tetraedro;
- $a_h = 1$  é o comprimento da aresta do cubo (hexaedro);
- $a_o \approx 1,285$  é o comprimento da aresta do octaedro;
- $a_d \approx 0,507$  é o comprimento da aresta do dodecaedro;



- $a_i \approx 0,771$  é o comprimento da aresta do icosaedro.

Apesar das diferenças nas formas geométricas, esses sólidos possuem volumes idênticos, ilustrando a relação entre a geometria e o volume nos sólidos de Platão. O ajuste das arestas é essencial para que, independentemente do tipo de sólido, o espaço tridimensional que eles ocupam seja o mesmo.



$$H_t = H_h = H_o = H_d = H_i = 1$$

Figura 3.20: Sólidos de Platão com mesma altura

Para a Figura 3.20, são apresentados os cinco sólidos de Platão que devem ter a mesma altura, digamos, todas iguais a 1. Daí, as igualdades  $H_t = H_h = H_o = H_d = H_i = 1$  implicam que:

- $a_t \approx 1,225$  é o comprimento da aresta do tetraedro;
- $a_h = 1$  é o comprimento da aresta do cubo (hexaedro);
- $a_o \approx 1,225$  é o comprimento da aresta do octaedro;
- $a_d \approx 0,449$  é o comprimento da aresta do dodecaedro;
- $a_i \approx 0,662$  é o comprimento da aresta do icosaedro.

Vale observar que sempre o tetraedro e o octaedro possuem mesma altura no caso em que possuem mesma aresta.

# Conclusão

---

Atualmente, um dos principais temas de debate entre educadores é a busca por métodos inovadores que auxiliem as práticas e os recursos pedagógicos, com o intuito de despertar a criatividade e o interesse dos alunos, facilitando a construção do conhecimento e a aplicação de conceitos matemáticos nas resoluções de problemas com uma abordagem que visa promover um aprendizado mais humanista e significativo.

Neste sentido, acreditamos que a presente dissertação apresenta uma visão ampla sobre os poliedros de Platão, destacando não apenas suas propriedades matemáticas, mas também seu valor pedagógico, explorando detalhadamente as características dos sólidos regulares e sua importância na história da geometria. Dessa forma, esperamos ter proporcionado ao leitor uma compreensão clara e apreciativa desses fascinantes objetos geométricos, pois esses poliedros são ferramentas poderosas para a educação matemática, com isso esse material desenvolvido serve como um recurso essencial para professores e alunos de graduação, permitindo uma abordagem inovadora e visualmente enriquecedora no ensino da geometria, integrando esses sólidos nas práticas de sala de aula os educadores poderão estimular o interesse dos alunos pela matemática e promover uma compreensão mais intuitiva dos conceitos espaciais. Entendemos que este trabalho não apenas valoriza a contribuição de Platão na matemática, mas também contribui significativamente para a prática pedagógica atual, inspirando novas gerações a explorar e apreciar a beleza da Geometria.

# Apêndice

---

## Instruções para Inserir Animações em PDFs

A inserção de uma animação em um documento  $\text{\LaTeX}$  é feita a partir de uma sequência de imagens numeradas (por exemplo, `frame1.png`, `frame2.png`, etc.). Todas as imagens devem estar no mesmo formato (por exemplo, todas `.png` ou `.jpg`).

No preâmbulo do seu documento  $\text{\LaTeX}$ , é necessário incluir o pacote `animate` com o comando `\usepackage{animate}`.

No ponto do documento onde deseja inserir a animação, utilize o comando `\animategraphics`. A sintaxe básica é a seguinte:

```
\animategraphics[<opções>]{<fps>}{<nome do arquivo>}{<número inicial>}{<número final>}
```

As principais opções disponíveis são:

**loop:** Faz a animação repetir continuamente.

**autoplay:** Faz a animação iniciar automaticamente.

**controls:** Adiciona controles de reprodução.

Os parâmetros da sintaxe são:

**fps:** Número de frames por segundo.

**nome do arquivo:** Nome base do arquivo de imagem, sem o número e a extensão.

**número inicial:** Número do primeiro frame.

**número final:** Número do último frame.

Para animações geradas por alguns programas, como o GeoGebra, é possível convertê-las diretamente em formato GIF para figuras planas. No entanto, animações 3D criadas no GeoGebra ainda não possuem uma opção nativa para conversão em GIF.

A solução encontrada foi utilizar um programa de gravação de tela que permita salvar diretamente em GIF. No Linux, usamos o programa Peek para esse propósito, que pode ser utilizado para gravar qualquer animação exibida na tela. No Windows, existem aplicativos semelhantes, como o Camtasia, que também oferecem essa funcionalidade.

Tendo a animação em formato GIF, é possível gerar os frames associados utilizando o comando `ffmpeg -i figura.gif figura_%d.png` no terminal do Linux. Um site muito útil, que oferece diversos recursos para manipulação de GIFs, é o *EZGIF*, disponível no endereço <https://ezgif.com>.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] ALVES, George. S.; SOARES, Adriana. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: IX WORKSHOP EM INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9., 2003. São Paulo: USP. 2003. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wie/article/download/786/772>. Acesso em: 21 nov. 2023.
- [2] ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.
- [3] AZAMBUJA FILHO, Zoroastro. Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática. n. 3, p. 15-17, 1983.
- [4] BARBOSA, Paula. M. O Estudo da Geometria. In: BENJAMIN CONSTANT, 25., 2003. Rio de Janeiro: IBC. 2003. Disponível em: <https://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/546/261>. Acesso em: 18 jun. 2024.
- [5] BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica, 2001.
- [6] BRASIL. Ministério da educação e cultura. Base Nacional Curricular Comum: Educação é a Base. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 19 jun. 2024.
- [7] CARVALHO, Paulo C. P. *Introdução a Geometria Espacial*. 4ª edição, Rio de Janeiro, 2005.
- [8] DANTE, Luiz R. *Matemática, volume único*. 1. ed., São Paulo: Ática, 2005. 818p.
- [9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. *Fundamentos de matemática elementar: Geometria espacial, volume 10*. 7ª edição, São Paulo: Atual, 2013.

- [10] FRAZÃO, Diva. *Platão: filósofo grego da antiguidade*. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/platao/>. Acesso em: 21 fev. 2024.
- [11] LIMA, Elon L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.
- [12] LIMA, Elon L. *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2*. 6ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [13] LIMA, Elon L. *Medida e Forma em Geometria – comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [14] LOREZATO, Sergio. *Educação Infantil e percepção matemática*. Campinas: Autores Associados, 2008.
- [15] MACHADO, Antônio dos S. *Matemática Temas e Metas- Volume 4 – Áreas e Volumes*. São Paulo: Atual, 1988.
- [16] PENTEADO, Mirian; BORBA, Marcelo C.; SILVA, Heloisa da; GRACIAS, Telma. *A Informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Editora Olho d'água, 2000.
- [17] Platão; LOPES, Rodolfo (tradução). *Timeu e Crítias*. Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos da Universidade de Coimbra, 2011.