



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO CASTANHAL  
PPG EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FABRICIO DA SILVA FERREIRA

**GEOGEBRA E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS:** Avaliação de uma  
Metodologia Sequencial de Ensino

CASTANHAL  
2024

FABRICIO DA SILVA FERREIRA

**GEOGEBRA E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS:** Avaliação de uma  
Metodologia Sequencial de Ensino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA – PROFMAT, do Campus Castanhal, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em MATEMÁTICA.  
Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: MSc. Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Junior

CASTANHAL  
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

D111g da Silva Ferreira, Fabricio.  
GEOGEBRA E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS :  
Avaliação de uma Metodologia Sequencial de Ensino / Fabricio da  
Silva Ferreira. — 2024.  
91 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Augusto Lacerda Lopes de Carvalho  
Junior

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação  
em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2024.

1. Volume de sólidos geométricos. 2. Software Geogebra.  
3. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. I.  
Título.

CDD 510.28553

---

FABRICIO DA SILVA FERREIRA

**GEOGEBRA E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS:** Avaliação de uma  
Metodologia Sequencial de Ensino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-IMPA), do Campus universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática. Sob a orientação do Prof. MSc. Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Junior.  
Área de concentração: Ensino de Matemática

Data da apresentação: 12 de agosto de 2024

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. MSc. Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Junior  
Professor Orientador (Presidente/PROFMAT)

---

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva  
Membro Titular Interno (PROFMAT)

---

Prof. Dr. Anderson Portal Ferreira  
Membro Titular Externo (IFPA)

Data da avaliação: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Conceito: \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, cuja graça tem me fortalecido e permitido alcançar meus objetivos, tornando este momento possível.

Manifesto minha profunda gratidão à minha mãe, Valdeni da Silva Ferreira. Este momento é dedicado a ela em retribuição pelo seu esforço que sempre teve e por me dar o direcionamento correto ao longo da vida.

À minha avó, Maria da Silva Ferreira, que, apesar de não estar mais entre nós, continua a me acompanhar e proteger de onde estiver.

Com grande apreço, agradeço aos meus amigos de curso, que me apoiaram ao longo desta jornada. Espero ter retribuído de forma equivalente.

Finalmente, expresso minha gratidão a todos os professores que contribuíram para minha formação, especialmente ao Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Junior, por me acolher neste projeto e me orientar durante sua execução.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”*  
*Isaac Newton*

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é analisar os efeitos de uma metodologia de ensino voltada para o estudo dos volumes de sólidos geométricos, utilizando o software GeoGebra como ferramenta complementar. A pesquisa envolve uma sequência estruturada de atividades projetadas para dar suporte aos alunos na compreensão dos conceitos relacionados ao volume de sólidos geométricos convexos, bem como no desenvolvimento das fórmulas utilizadas para calcular o volume desses sólidos. O estudo foi realizado em uma escola pública da zona rural do município de Maracanã, no estado do Pará, com alunos do 9º ano. Essa turma foi escolhida porque a escola oferecia apenas turmas de ensino fundamental, e a matriz curricular da classe selecionada estava mais alinhada ao conteúdo. Para avaliar a eficácia da metodologia proposta, os alunos participaram de uma sequência de atividades pedagógicas e realizaram testes antes e após a implementação da metodologia, com o objetivo de medir tanto o progresso quanto o processo de ensino-aprendizagem. Os resultados dessas avaliações foram analisados para acompanhar o desenvolvimento dos participantes e examinar os efeitos e impactos da abordagem proposta. A análise busca não apenas avaliar a eficiência da metodologia, mas também destacar como o uso do GeoGebra pode melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos abordados e ajudar no domínio das fórmulas relacionadas aos volumes dos sólidos geométricos. A pesquisa indica que a aplicação da sequência de ensino contribuiu significativamente para a aprendizagem dos alunos sobre o tema abordado. Em última instância, este trabalho visa aprimorar as práticas de ensino nessa área específica da matemática, oferecendo contribuições importantes e suporte para educadores e pesquisadores interessados no desenvolvimento de métodos de ensino diversificados e inovadores.

**Palavras-chaves:** Volume de sólidos geométricos. Software Geogebra. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação.

## ABSTRACT

The main objective of this work is to analyze the effects of a teaching methodology focused on the study of the volumes of geometric solids, using GeoGebra software as a complementary tool. The research involves a structured sequence of activities designed to support students in understanding the concepts related to the volume of convex geometric solids, as well as in the development of the formulas used to calculate the volume of these solids. The study was conducted at a public school in the rural area of the municipality of Maracanã, in the state of Pará, with 9th-grade students. This group was selected because the school only offered elementary-level classes, and the curriculum of the chosen class was better aligned with the content. To assess the effectiveness of the proposed methodology, students participated in a sequence of instructional activities and took tests before and after the implementation of the methodology, with the aim of measuring both their progress and the teaching-learning process. The results of these assessments were analyzed to track the participants' development and examine the effects and impacts of the proposed approach. The analysis aims not only to evaluate the efficiency of the methodology but also to highlight how the use of GeoGebra can improve the understanding of the mathematical concepts covered and help in mastering the formulas related to the volumes of geometric solids. The research indicates that the implementation of the teaching sequence significantly contributed to the students' learning of the topic. Ultimately, this work aims to enhance teaching practices in this specific area of mathematics, offering important reflections and support to educators and researchers interested in developing diverse and innovative teaching methods.

**Keywords:** Volume of geometric solids. Software Geogebra. Digital Information and Communication Technologies.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: O Princípio de Cavalieri para Sólidos Tridimensionais.....	30
Figura 2: Volume do prisma.....	32
Figura 3 – Secção paralela à base de um tetraedro.....	33
Figura 4 – Equivalência de tetraedros .....	35
Figura 5 – Decomposição de um prisma triangular .....	36
Figura 6 – Volume de uma pirâmide qualquer.....	37
Figura 7 – Volume do cilindro .....	38
Figura 8 – Volume do cone.....	39
Figura 9 – Volume da esfera .....	41
Figura 10: A Escola de Aplicação.....	42
Figura 11: Participantes da Pesquisa.....	43
Figura 12: Articulação I .....	48
Figura 13: Articulação II.....	50
Figura 14: Articulação III.....	51
Figura 15: Articulação IV .....	52
Figura 16: Articulação V.....	53
Figura 17: Articulação VI .....	54
Figura 18: Articulação VII .....	55
Figura 19: Questão 2 - Aluno 4.....	64
Figura 20: Questão 2 - Aluno 7.....	64
Figura 21: Questão 2 - Aluno 9.....	64
Figura 22: Questão 5 - Aluno 10.....	64
Figura 23: Questão 5 - Aluno 2 (Resposta Incorreta) .....	66
Figura 24: Questão 5 - Aluno 10 (Resposta Incorreta) .....	66
Figura 25: Questão 5 - Aluno 6 (Resposta parcialmente correta) .....	66
Figura 26: Questão 5 - Aluno 7 (Resposta parcialmente correta) .....	67
Figura 27: Questão 5 - Aluno 3 (Resposta correta).....	67
Figura 28: Questão 5 - Aluno 5 (Resposta correta).....	67
Figura 29: Questão 7 - Aluno 7 (Resposta incorreta).....	67
Figura 30: Questão 7 - Aluno 1 (Resposta parcialmente correta) .....	68
Figura 31: Questão 7 - Aluno 9 (Resposta correta).....	68
Figura 32: Questão 10 - Aluno 4 (Resposta incorreta).....	70
Figura 33: Questão 10 - Aluno 7 (Resposta correta).....	70

Figura 34: Questão 12 - Aluno 7 (Resposta incorreta).....	70
Figura 35: Questão 12 - Aluno 4 (Resposta correta).....	70
Figura 36: Questão 15 - Aluno 9 (Resposta incorreta).....	72
Figura 37: Questão 15 - Aluno 5 (Resposta correta).....	72
Figura 38: Questão 17 - Aluno 9 (Resposta incorreta).....	72
Figura 39: Questão 17 - Aluno 5 (Resposta parcialmente correta) .....	72
Figura 40: Questão 17 - Aluno 9 (Resposta correta).....	73
Figura 41: Questão 20 - Aluno 10 (Resposta incorreta).....	75
Figura 42: Questão 20 - Aluno 7 (Resposta correta).....	75
Figura 43: Questão 22 - Aluno 10 (Resposta incorreta).....	75
Figura 44: Questão 22 - Aluno 7 (Resposta parcialmente correta) .....	76
Figura 45: Questão 22 - Aluno 9 (Resposta correta).....	76
Figura 46: Questão 25 - Aluno 5 (Resposta incorreta).....	77
Figura 47: Questão 25 - Aluno 1 (Resposta correta).....	78
Figura 48: Questão 27 - Aluno 6 (Resposta incorreta).....	78
Figura 49: Questão 27 - Aluno 5 (Resposta parcialmente correta) .....	78
Figura 50: Questão 30 - Aluno 2 (Resposta incorreta).....	80
Figura 51: Questão 30 - Aluno 7 (Resposta correta).....	80
Figura 52: Questão 32 - Aluno 2 (Resposta incorreta).....	80
Figura 53: Questão 32 – Aluno 1 (Resposta parcialmente correta).....	81
Figura 54: Questão 32 - Aluno 5 (Resposta correta).....	81

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Cronograma de Aplicação.....	46
Quadro 2: Frequência Durante a Aplicação .....	46
Quadro 3: Bloco 1 - Primeira Aplicação.....	58
Quadro 4: Bloco 2 - Primeira Aplicação.....	58
Quadro 5: Bloco 3 - Primeira Aplicação.....	59
Quadro 6: Bloco 4 - Primeira Aplicação.....	59
Quadro 7: Bloco 5 - Primeira Aplicação.....	60
Quadro 8: Bloco 6 - Primeira Aplicação.....	61
Quadro 9: Bloco 7 - Primeira Aplicação.....	62
Quadro 10: Bloco 1 - Segunda Aplicação.....	63
Quadro 11: Bloco 2 - Segunda Aplicação.....	65
Quadro 12: Bloco 3 - Segunda Aplicação.....	69
Quadro 13: Bloco 4 - Segunda Aplicação.....	71
Quadro 14: Bloco 5 - Segunda Aplicação.....	74
Quadro 15: Bloco 6 - Segunda Aplicação.....	77
Quadro 16: Bloco 7 - Segunda Aplicação.....	79

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Síntese Bloco 2 .....	82
Gráfico 2: Síntese Bloco 3 .....	83
Gráfico 3: Síntese Bloco 4 .....	84
Gráfico 4: Síntese Bloco 5 .....	85
Gráfico 5: Síntese Bloco 6 .....	86
Gráfico 6: Síntese Bloco 7 .....	87

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	14
1.1. PROBLEMATIZAÇÃO.....	15
1.2. JUSTIFICATIVA.....	16
1.3. OBJETIVOS .....	16
1.4. CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO .....	17
1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	17
2. SOBRE TECNOLOGIA E A UTILIZAÇÃO COMO FERRAMENTA EDUCACIONAL .....	19
2.1. DEFINIÇÕES DE TECNOLOGIA.....	19
2.2. A TECNOLOGIA NO MEIO EDUCACIONAL .....	21
2.3. A TECNOLOGIA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES .....	26
3. VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS CONVEXOS.....	29
3.1. ESTUDOS SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS .....	29
3.2. BONAVENTURA CAVALIERI E A GEOMETRIA .....	29
3.2.1. O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA VOLUMES.....	30
3.3. VOLUME DO PRISMA .....	32
3.4. VOLUME DA PIRÂMIDE.....	33
3.4.1. SECÇÃO PARALELA À BASE DE UM TETRAEDRO.....	33
3.5. EQUIVALÊNCIA DE TETRAEDROS.....	34
3.5.1. DECOMPOSIÇÃO DE UM PRISMA TRIANGULAR.....	36
3.5.2. VOLUME DO TETRAEDRO .....	37
3.5.3. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER .....	37
3.6. VOLUME DO CILINDRO .....	38
3.7. VOLUME DO CONE .....	39
3.8. VOLUME DA ESFERA .....	40
4. METODOLOGIA .....	42
4.1. CARACTERIZAÇÃO DO LÓCUS DE PESQUISA .....	42

4.2.	PARTICIPANTES DA PESQUISA .....	43
4.3.	INSTRUMENTOS PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÃO .....	43
4.4.	PROCEDIMENTO PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÃO .....	44
5.	CRONOGRAMA .....	46
6.	PROPOSTA SEQUENCIAL DE ENSINO .....	48
	Articulação I.....	48
	Articulação II .....	50
	Articulação III .....	51
	Articulação IV .....	52
	Articulação V .....	53
	Articulação VI.....	54
	Articulação VII.....	55
7.	RESULTADO E ANÁLISES .....	57
8.	CONSIDERAÇÕES.....	89
	REFERÊNCIAS .....	92
	APÊNDICE A – Pré-Teste e Pós-Teste .....	96
	APÊNDICE B – Link para download das articulações criadas no software GeoGebra utilizadas na sequência de ensino proposta. ....	100
	APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO .....	101

## 1. INTRODUÇÃO

De acordo com [Ferreira \(2020\)](#), a tecnologia, em constante evolução, desempenha um papel crucial na sociedade contemporânea, adaptando-se às necessidades e demandas que mudam constantemente. Desde tempos remotos, quando instrumentos simples auxiliavam nas atividades diárias, a tecnologia tem avançado exponencialmente, entrelaçando-se com a história e a evolução da humanidade. Em todas as esferas da vida, sua influência é profunda e diversificada. No ambiente de trabalho, automatiza tarefas repetitivas, permitindo que o potencial humano seja direcionado para atividades mais criativas e estratégicas. Na saúde, viabiliza diagnósticos precisos e tratamentos inovadores, contribuindo para a melhoria do bem-estar e até mesmo para a preservação de vidas. Na educação, facilita o acesso ao conhecimento e promove o aprendizado contínuo, democratizando a informação.

De acordo com [Santos \(1996\)](#), A Terceira Revolução Industrial, também conhecida como Revolução Técnico-Científico-Informacional, marcou um ponto crucial na história, impulsionando avanços sem precedentes. Nessa era, as Tecnologias de Comunicação e Informação (TICs) assumiram um papel central, redefinindo a maneira como nos comunicamos, trabalhamos e aprendemos. Mais do que meras ferramentas, as TICs formam um sistema interdependente que permeia todos os aspectos da vida moderna. Autores como [Imbernón \(2010\)](#) destacam sua capacidade transformadora em diversos setores, desde o comércio até a pesquisa científica. Com o passar do tempo, as próprias TICs evoluíram e de acordo com [Kenski \(2009\)](#), um novo ramo de tecnologias de informação surgiu, conhecido como Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), essa ramificação engloba as tecnologias mais atuais que utilizam da internet como principal fonte de acesso de dados, processamento de informação e armazenamento. As TDICs são semelhantes as TICs, porém têm a capacidade de acessar a internet. As TICs por sua vez funcionam de forma mais analógica, sem necessitar de internet para ter seu funcionamento completo.

As TICs e as TDICs desempenham um papel vital na sociedade contemporânea, abrangendo uma ampla gama de recursos tecnológicos. Definidas como ferramentas para o tratamento e comunicação da informação, elas incluem hardware, software e sistemas de telecomunicações. Autores como [Vieira \(2011\)](#) e [Moran \(2012\)](#) oferecem diferentes perspectivas sobre as TICs, destacando sua importância na facilitação da comunicação e na realização de objetivos comuns. Estes temas serão abordados ao longo desta pesquisa. Enquanto [Kenski \(2009\)](#) e [Valente \(2013\)](#) abordam as TDICs como um novo ramo dentro das tecnologias de informação e comunicação, as quais são mais voltadas as informações por meio da internet.

Outrossim, a presença da tecnologia na educação é evidente ao longo da história. Desde dispositivos mecânicos até ferramentas digitais, a tecnologia tem sido utilizada para melhorar o processo de ensino-aprendizagem em vários âmbitos, assim como na área da matemática. Com o advento da tecnologia digital, as ferramentas educacionais se modernizaram significativamente, e hoje dispomos de dispositivos como calculadoras que auxiliam na solução de tarefas complexas, além de muitos outros dispositivos que surgem constantemente simplificando tarefas complexas em diversas áreas do conhecimento matemático, isto ilustra muito bem como a tecnologia continua a transformar e aprimorar a educação.

### 1.1. PROBLEMATIZAÇÃO

Este trabalho da continuidade ao trabalho elaborado por [Ferreira \(2020\)](#) intitulado O ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA COM O SOFTWARE GEOGEBRA FRENTE A PRÁTICA DOCENTE, o qual desenvolveu proposta sequencial de estudos para o volume de sólidos geométricos com o intuito de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem deste tema, visto que, de acordo com [Oliveira \(2015\)](#), alguns alunos apresentam ansiedade matemática, que desencadeiam reações psicossomáticas. Certos alunos manifestam reações emocionais adversas durante o processo de aprendizagem da matemática, as quais incluem pensamentos autodepreciativos e sensações de confusão mental, além de respostas fisiológicas como transpiração excessiva, tontura e dores de cabeça. Além disto, outros fatores como falta de fundamentos, que significa a falta de conhecimentos básicos relacionados a matemática, a percepção de dificuldades, que ocorre quando o aluno superestima o problema e não se sente seguro em resolvê-lo, entre alguns outros fatores podem desenvolver nos alunos aversão à disciplina de matemática, o ensino-aprendizagem da disciplina através da memorização de fórmulas, sem um aprofundamento adequado, pode resultar na aplicação mecânica e superficial para a resolução de problemas, sem entendimento completo do significado dos valores obtidos. Além disto, nas metodologias tradicionais de ensino, é comum utilizar o quadro para projetar representações bidimensionais de sólidos, o que pode dificultar a visualização precisa do objeto em análise. Essa abordagem pode resultar em lacunas na compreensão do aluno e dificultar o desenvolvimento do raciocínio espacial necessário para a completa compreensão do conteúdo. Portanto, a questão central desta pesquisa é como uso de software de matemática dinâmica favorece o estudo de volumes de sólidos geométricos, proporcionando compreensão de conceitos e fórmulas usadas nesse ramo da matemática?



## 1.2. JUSTIFICATIVA

Conforme [Ribeiro e Souza \(2016\)](#), a utilização do software de matemática dinâmica GeoGebra pode contribuir significativamente ao estudo de matemática, inclusive para volume de sólidos geométricos, auxiliando na construção e o entendimento das fórmulas pertinentes a esse campo matemático. O software proporciona uma abordagem visual e interativa, permitindo ao mediador explorar, junto aos alunos, as propriedades dos sólidos e manipular suas representações tridimensionais de forma dinâmica. Isso possibilita uma compreensão intuitiva e profunda dos conceitos, ao contrário das representações bidimensionais estáticas utilizadas em métodos tradicionais. Além disso, o GeoGebra permite a visualização instantânea dos resultados das fórmulas, tornando o processo de aprendizagem eficiente e envolvente.

Por isso, acreditamos que a utilização de estratégias como o software GeoGebra pode tornar as aulas mais dinâmicas, o que implica numa participação ativa do aluno e, de fato, auxiliar na promoção de um ensino centralizado no educando, o que é fundamental para facilitar a aprendizagem significativa. Com isso, espera-se um favorecimento do ambiente de aprendizagem, por agregar valor ao processo de ensino e possibilitar uma maior predisposição do aluno para aprender ([Ribeiro e Souza, 2016](#)).

Além do mais, ainda com base em [Ribeiro e Souza \(2016\)](#), o software GeoGebra proporciona a criação de sólidos tridimensionais virtuais que podem ser visualizados em diversas perspectivas, eliminando a necessidade de os alunos criarem mentalmente a imagem do objeto. Isso reduz interpretações equivocadas e contribui para a compreensão do objeto em estudo, quando comparado à projeção bidimensional estática feita no quadro, por exemplo.

## 1.3. OBJETIVOS

A trabalho tem como objetivo geral analisar os efeitos da proposta sequencial de ensino para o estudo do volume de sólidos geométricos a estudantes da educação básica utilizando o software GeoGebra. Para isso, os objetivos específicos são:

- Apresentar uma proposta sequencial de ensino que aborda os fundamentos teóricos relacionados ao cálculo de volumes de sólidos geométricos e propriedades relevantes com auxílio do software.
- Aplicar proposta sequencial de ensino a estudantes do 9º ano do ensino fundamental, avaliando a eficácia da abordagem proposta por meio da análise da compreensão dos alunos e aplicação dos conceitos aprendidos através de um caderno de questões relacionados ao tema.

#### 1.4. CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Este trabalho tem como expectativa contribuir para o avanço do ensino do volume de sólidos geométricos ao propor o uso do software GeoGebra, estimulando outros educadores a incorporarem as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) em suas práticas pedagógicas. Pretende-se tornar o estudo significativo, dinâmico e interessante para os alunos, além de fornecer subsídios para pesquisas futuras nesse campo. A pesquisa foi aplicada em uma escola da zona rural, com poucos recursos digitais disponíveis para a utilização dos alunos. Devido a isso, a metodologia utilizada foi expositiva, sem a interação dos alunos com o software utilizado, o aplicador da pesquisa apresentou as articulações usadas na proposta sequencial de ensino e manipulou-as durante a apresentação. De acordo com [Ferreira \(2020\)](#), o desenvolvimento da sequência de ensino junto aos alunos permite a compreensão de conceitos além dos utilizados para o cálculo do volume de sólidos geométricos, pois utiliza-se nos desenvolvimentos das articulações muitos conceitos de geometria analítica associados ao software Geogebra. Sugere-se, quando possível, que os alunos façam não só as articulações presentes no [APÊNDICE B](#), mas também que possam desenvolver novas articulações para explorar as constatações desenvolvidas durante a aplicação da proposta sequencial de ensino.

#### 1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho obedece a seguinte organização: os capítulos 2 e 3, fazem parte do embasamento teórico; o capítulo 4 trata da metodologia de pesquisa; no capítulo 5 tem-se o cronograma da aplicação da pesquisa; o capítulo 6 apresenta a sequência de ensino proposta; durante o capítulo 7 aborda-se o resultado da aplicação da proposta de ensino e logo após este, no capítulo 9, tem-se as considerações finais. Cujos resumos seguem: No capítulo 2 apresenta-se uma pesquisa bibliográfica, que apresenta a opinião de alguns autores sobre tecnologias, Tecnologias de Informação e Comunicação e a diferença dessa com a Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, assim como importantes ações e documentos que fomentam a utilização das TICs no processo educacional. Durante o capítulo 3, expõe-se o conhecimento formalizado nos livros matemáticos a respeito do cálculo de volume de alguns sólidos geométricos, afim de embasar o que será apresentado com a proposta de ensino sugerida no presente trabalho. No capítulo 4 apresentam-se as características do local de pesquisa, a descrição dos estudantes que participaram da aplicação e o material utilizado para a coleta e elaboração dos dados analisados neste trabalho. O capítulo 5 apresenta o cronograma de aplicação da pesquisa e a frequência dos alunos envolvidos nas aulas mediadas com o auxílio

da sequência de ensino proposta nesta pesquisa. O capítulo 6 apresenta a sequência de ensino elaborada por [Ferreira \(2020\)](#) e o objetivo de cada uma das articulações desenvolvidas com a utilização do software GeoGebra. Durante o capítulo 7, analisa-se os resultados obtidos através da resposta que os alunos deram aos cadernos de questões aplicados sobre o tema antes e depois da aplicação da sequência de ensino. E por fim, no capítulo 8, faz-se as considerações finais, onde se revisita o trabalho com a finalidade de concluir o cumprimento do objetivo de apresentar e validar uma proposta sequencial de ensino para o volume de sólidos geométricos a estudantes da educação básica utilizando o software GeoGebra de [Ferreira \(2020\)](#).

## 2. SOBRE TECNOLOGIA E A UTILIZAÇÃO COMO FERRAMENTA EDUCACIONAL

Neste capítulo serão abordados alguns conceitos de tecnologia, desde seu sentido epistemológico. A tecnologia sempre esteve como uma ferramenta de auxílio e suporte para a espécie humana e em diversos aspectos, e no âmbito educacional não é diferente, então traz-se um breve histórico da evolução das tecnologias utilizadas como recurso educacional e a evolução destas tecnologias até se tornarem o que conhecemos atualmente como TICs e TDICs. Será exposto também eventos importantes que ocorreram no Brasil envolvendo políticas públicas e órgãos governamentais que contribuíram e fomentaram a utilização de tecnologias digitais como ferramenta de auxílio educacional e como essas políticas influenciaram na formação de professores ao longo do tempo.

### 2.1. DEFINIÇÕES DE TECNOLOGIA

Quando se menciona tecnologia, é comum que as pessoas automaticamente associem essa palavra a computadores, smartphones e tablets de última geração. No entanto, é importante destacar que a tecnologia vai além desses dispositivos. Etimologicamente, a origem da palavra tecnologia remonta ao grego "téchne", que significa "técnica, arte, ofício", junto ao sufixo "lógos", que denota "estudo, tratado". Nesse contexto, pode ser compreendida como o estudo das técnicas, englobando os termos específicos das ciências, artes e ofícios, assim como a análise de utensílios e métodos industriais, [Nascente \(1988\)](#).

Além disso, de acordo com [Kenski \(2009\)](#), conforme o Dicionário de Filosofia de [Abbagnano \(1992\)](#), a tecnologia é definida como o estudo dos processos técnicos específicos de uma determinada área de produção industrial ou de múltiplos setores. [Kenski \(2009\)](#) também afirma que a tecnologia abrange o conjunto de conhecimentos e princípios científicos aplicados no planejamento, construção e uso de equipamentos em atividades específicas. Segundo a autora, as maneiras, métodos ou habilidades especiais utilizadas para lidar com cada tipo de tecnologia, a fim de realizar ou criar algo, são denominadas técnicas. No entanto, no cenário atual, algumas ferramentas que eram consideradas tecnologias no passado perderam seu prestígio em comparação com as novas tecnologias, embora, essencialmente, ainda sejam formas de tecnologia, mesmo que tenham perdido reconhecimento.

A interseção entre tecnologia e educação é afetada pela convicção previamente mencionada. Ao abordar o uso de tecnologia nas salas de aula, normalmente nos referimos a tecnologias contemporâneas, como computadores e projetores. Entretanto, a relação entre

tecnologia e educação remonta a períodos muito mais distantes. Conforme evidenciado por pesquisas, como aquelas conduzidas na Biblioteca da Universidade de Kansas pelos jornalistas Benjamin Innes e Charles Wilson em seu artigo "The Learning Machines" (As Máquinas do Aprendizado), publicado no *The New York Times* em 19 de setembro de 2010 por [Wilson, Orellana e Meek \(2010\)](#), a educação tem sido influenciada por tecnologias desde 1650. Ferramentas como o Horn-Book, um pedaço de madeira com o alfabeto gravado, e o Ferule, conhecido no Brasil como Palmatória, um objeto semelhante a um espeto usado para indicar letras no Horn-Book, datam entre 1850 e 1870. Esses dispositivos eram empregados tanto para auxiliar no desenvolvimento da leitura quanto para aplicar castigos físicos aos alunos que não obtinham sucesso nas lições, refletindo as características da educação punitiva daquela época.

À medida que a evolução tecnológica avançava, os recursos tecnológicos utilizados em sala de aula para apoiar o processo de ensino e aprendizagem também progrediam. Em 1870, surgiu a Magic Lantern, uma máquina precursora do projetor de slides contemporâneo. Vinte anos depois, apareceu a School Slate, conhecida no Brasil como Ardósia, um fino pedaço de material plano e rígido, como a rocha, usado para escrita. No mesmo período, foi introduzido o Chalkboard, popularmente conhecido como quadro negro, no Brasil. Em 1900, encerrou-se a era das criações com a produção do lápis. Todas essas ferramentas mencionadas anteriormente compartilham características similares com as TICs. Desde então até os dias atuais, as inovações foram refinadas com a incorporação de tecnologias contemporâneas às ferramentas já existentes.

Um aspecto marcante desse progresso histórico das TICs no contexto educacional reside na análise da incorporação desses instrumentos como recursos auxiliares para professores e alunos ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Isso sugere que as tecnologias existentes hoje e as futuras inovações também desempenharão papéis fundamentais na dinâmica entre professor, aluno e conhecimento.

Atualmente o conceito de TICs foi reformulado, autores como [Kenski \(2009\)](#) utilizam o termo Tecnologias Digitais da Comunicação e da Informação (TDICs) para descrever as tecnologias digitais que estão interligadas por meio de uma rede. As tecnologias estão em constante evolução e novas categorizações foram criadas para distinguir certas tecnologias, o conceito mais atual em relação ao tema, TDICs tornou-se uma ramificação das TICs. As diferenças entre os conceitos é que as TICs são tecnologias usadas para transmissão de informações que não tem acesso direto a internet para disseminação dos dados, enquanto as TDICs são tecnologias mais atuais de compartilhamento de informações que podem acessar a internet para disseminar informações. Sendo assim pode-se afirmar que esse termo é

comumente utilizado para se referir às tecnologias que utilizam dados digitais e processamento digital para criar, armazenar, transmitir e gerenciar informações.

No Brasil há uma plataforma educacional que oferece soluções de ensino para escolas, incluindo sistemas de ensino, conteúdos pedagógicos, tecnologias educacionais e serviços de apoio, conhecida como SAE Digital. A sigla SAE significa Saber; Agir; Evoluir. E a proposta do SAE Digital é integrar o uso de materiais didáticos com tecnologias digitais para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem. De acordo com o SAE, tem-se a seguinte definição para TDIC:

TDIC são tecnologias que têm o computador e a Internet como instrumentos principais e se diferenciam das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pela presença do digital, sendo uma evolução delas, que por sua vez utilizam recursos de tecnologia para o processamento de informações, incluindo softwares, hardwares, tecnologias de comunicação e serviços relacionados, mas não de maneira digital exclusivamente (SAE DIGITAL, 2003).

E como é comum no meio técnico científico informacional, de acordo com Santos (1996), as novas tecnologias, quando mais eficazes, acabam substituindo tecnologias mais antigas e o cenário tecnológico atual caminha nesta direção, uma vez que os novos dispositivos digitais estão cada vez mais dependentes de conexão com a internet e sistemas de informações que antes eram vistos unicamente em meios de comunicação sem acesso à internet estão passando a se adaptar e disponibilizar-se através da internet.

## 2.2. A TECNOLOGIA NO MEIO EDUCACIONAL

É importante mencionar que alguns autores e eventos citados abaixo tratam especificamente das TICs, entretanto, como foi visto anteriormente ambas têm basicamente a mesma função diferenciando-se apenas em relação a como a informação pode ser acessada, processada e armazenada por essas ferramentas, logo, tanto o uso das TICs quanto o uso das TDICs podem ser defendidos através dos argumentos abaixo, tendo em vista que as TDICs são basicamente atualizações das TICs de acordo com Kenski (2009).

Posto isto, assim como a tecnologia, a sociedade também passou por uma evolução ao longo dos anos, especialmente na forma como interage com os meios tecnológicos. Segundo Passero, Engster e Dazzi (2016), as pessoas nascidas entre 1980 e 1990 foram pioneiras na interação entre seres humanos e máquinas, testemunhando o desenvolvimento do avanço tecnológico e da globalização. Enquanto isso, as gerações atualmente envolvidas na educação básica e ingressando no ensino superior cresceram imersas em tecnologias desde os primeiros anos de vida. Essa disparidade tem um impacto direto na relação entre esses grupos e na maneira

como eles se relacionam com a tecnologia. Enquanto os mais jovens naturalmente possuem maior fluência tecnológica, o primeiro grupo está passando por uma adaptação às ferramentas tecnológicas. É importante notar que nem todos participaram desse processo de forma uniforme, devido às diferentes condições sociais e geográficas. Países desenvolvidos não experimentaram o mesmo nível de desenvolvimento tecnológico que os países em desenvolvimento.

A disseminação das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) alterou significativamente as dinâmicas sociais. Apesar do interesse dos alunos por tecnologias e dos esforços governamentais para promover a informática educativa, há desafios em integrar efetivamente as TICs na prática pedagógica. Ao analisar a interação entre a sociedade e a tecnologia no ambiente escolar, é possível identificar uma variedade de dispositivos tecnológicos presentes em muitas instituições, tanto na infraestrutura e operações das escolas quanto nas instalações físicas e ferramentas destinadas a apoiar as operações técnicas e administrativas. No entanto, a incorporação dessas tecnologias na prática pedagógica demanda uma avaliação cuidadosa e minuciosa.

Conforme destacado por [Borba e Penteadó \(2010\)](#), a discussão sobre as tecnologias de informação e comunicação teve início no Brasil durante o I Seminário Nacional de Informática Educativa, realizado em 1981. Nesse congresso, que contou com a participação de educadores de diversos estados brasileiros, foram elaboradas medidas para promover a integração das TICs como ferramentas educacionais. A partir dessas iniciativas, projetos como o COMputadores na EDUcação (Educom) e o Programa Nacional de Informática na Educação (Proninfe) foram criados. No ano de 1983, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), em parceria com a Secretaria Especial de Informática (Educom), estabeleceu a meta de formar polos em cinco universidades para realizar pesquisas sobre as diversas aplicações dos computadores na educação. Esses polos desenvolveram trabalhos pioneiros em informática educativa, explorando suas implicações no ensino das disciplinas da educação básica.

Outra iniciativa promovida pelo Educom foi o projeto Formar, que visava oferecer cursos de especialização para indivíduos de diversos estados. O propósito era capacitá-los como multiplicadores em suas regiões, buscando expandir o uso de computadores como ferramentas educacionais. Isso resultou na criação dos Centros de Informática Educacional (CIEDs). Em 1989, foi estabelecido o Proninfe, com a finalidade de disponibilizar os projetos anteriores para as comunidades e estabelecer centros e laboratórios de capacitação para os educadores.

Os três projetos mencionados anteriormente serviram como base para o programa governamental implementado em 1997. Nesse ano, a Secretaria de Educação a Distância (SEED) estabeleceu o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO). Este

programa foi criado com o intuito de promover e apoiar o uso das tecnologias de informática no ensino fundamental e médio em todo o Brasil.

Está previsto a utilização das tecnologias da comunicação e informação nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Alguns pontos destacados sobre a utilização destas tecnologias no meio educacional está a necessidade de adequação das escolas públicas para a implementação dos recursos computacionais. A importância da instrumentação das tecnologias como uma demanda social presente e futura. os PCNs reconhecem a importância das novas tecnologias para o desenvolvimento do país, assim é fundamental conhecer e saber utilizar as novas tecnologias, isso envolve aprender os procedimentos para seu uso e, sobretudo, desenvolver habilidades ligadas ao gerenciamento da informação. Além disso os PCNs dizem que:

As tecnologias da comunicação e informação podem ser utilizadas para realizar formas artísticas; exercitar habilidades matemáticas; apreciar e conhecer textos produzidos por outros; imaginar, sentir, observar, perceber e se comunicar; pesquisar informações curiosas etc., atendendo a objetivos de aprendizagem ou puramente por prazer, diversão e entretenimento. Por isso, na medida do possível, é importante que os alunos possam fazer uso dos computadores tendo propósitos próprios, fora do horário de aula ou quando terminarem a proposta feita pelo professor (BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais/1997).

Além disso, a utilização de tecnologias de informação e comunicação favorece o ensino aprendizado à distância em diferentes lugares por diferentes meios, permitindo a modernização dos espaços escolares. A aplicação das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como instrumento na prática docente é considerada em documentos normativos oficiais para a educação básica no Brasil. A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, Lei nº 9.394/1996), por exemplo, incorpora em suas Competências Gerais da Educação Básica duas responsabilidades que incluem o uso das TICs no desenvolvimento educacional do aluno.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visualmotora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, Lei nº 9.394/1996).

A quarta Competência Geral da Educação Básica destaca a importância da utilização das linguagens como meios de expressão e comunicação no processo de ensino e aprendizagem, enfatizando o aproveitamento da linguagem digital proporcionada pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). A quinta competência explora de maneira mais explícita a



relevância da interpretação das tecnologias digitais em todos os contextos da comunicação social, colocando o indivíduo como protagonista do processo e promovendo a conquista da autonomia por meio desse entendimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece conhecimentos, competências e habilidades com o objetivo de garantir que todos os estudantes desenvolvam suas capacidades ao longo da educação básica. Alinhada aos princípios éticos, políticos e estéticos delineados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN), a BNCC se junta aos propósitos que orientam a educação no Brasil, buscando a formação integral do ser humano e a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Isso assegura os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, conforme estabelecido pelo Plano Nacional de Educação (PNE). Portanto, destaca-se e justifica-se a relevância da incorporação das inovações tecnológicas no processo de formação completa dos indivíduos, conforme preconizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB).

Além disso, existem outros meios legais de incentivo às Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como ferramentas de ensino e aprendizagem, como o projeto de lei N.º 9.165, de 2017. Este projeto reconhece a importância da internet e tecnologias digitais na educação pública, buscando estimular o acesso à internet de qualidade nas escolas e promover a ampliação do uso desses recursos de maneira regulamentada, alinhada à estratégia 7.15 do Plano Nacional de Educação, aprovado pela Lei n.º 13.005, de 25 de junho de 2014. O objetivo principal é apoiar a universalização do acesso à internet em alta velocidade e impulsionar o uso pedagógico de tecnologias digitais na educação básica.

Reforçando o que foi mencionado anteriormente, é evidente que as tecnologias digitais estão vinculadas à educação e são contempladas em documentos oficiais que regulamentam o sistema educacional brasileiro. Naturalmente, o professor possui autonomia no processo didático, tendo a prerrogativa de escolher as estratégias que empregará para o desenvolvimento das atividades, atuando como mediador do conhecimento. As diretrizes, leis e projetos de leis abordados neste estudo, relacionados às tecnologias de informação e comunicação, respaldam esse princípio, conferindo ao educador a liberdade de conduzir sua prática docente da maneira que julgar mais adequada.

Naturalmente, devido à exposição e interação com a tecnologia, é possível observar uma discrepância no domínio entre professores e alunos. É importante destacar que essa informação não pode ser generalizada, uma vez que existem professores mais velhos que possuem uma boa relação com as tecnologias, assim como há alunos que não demonstram grande fluência em meios digitais. No entanto, é bastante comum que os alunos apresentem um domínio

relativamente maior das tecnologias digitais quando comparados aos seus professores. Isso ocorre devido ao avanço tecnológico e à crescente presença desses recursos no cotidiano, o que leva as crianças a desenvolverem uma aptidão "natural" para o uso desses dispositivos desde os primeiros anos de vida. Por outro lado, os professores, por terem nascido alguns anos antes desse avanço tecnológico, passam por um processo de adaptação aos meios digitais em uma idade mais avançada. Isso contrasta com as crianças que, desde os primeiros anos de vida, já estão familiarizadas com o uso das ferramentas eletrônicas. Assim, a relação dos professores com as inovações tecnológicas torna-se mais desafiadora e demanda um aperfeiçoamento mais intensivo para melhorar essa interação.

Conforme [Marc \(2001\)](#), os alunos contemporâneos são identificados como "Nativos Digitais". Essa geração é marcada por adotar uma linguagem nova, caracterizada pelo acesso rápido à informação e pela realização de diversas atividades simultâneas, utilizando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como principal ferramenta. Já os professores mais experientes são denominados por [Marc \(2001\)](#) como "Imigrantes Digitais", apresentando características da era pré-digital. Essa disparidade nas "linguagens" cria um desafio significativo para a educação, uma vez que os professores utilizam uma linguagem considerada ultrapassada para ensinar uma geração que se comunica por meio de uma linguagem completamente nova e instantânea.

Em razão dessa discrepância, a incorporação das TICs na sala de aula não é amplamente difundida. Muitas vezes, essa utilização se restringe à produção de documentos para propósitos didáticos, ao uso de projetores para apresentações de slides, à exibição de vídeos e a outras tarefas básicas. No entanto, existem muitos outros recursos que podem ser explorados na prática educacional, visando a intensificação e busca de alternativas para o ensino, podendo ser aplicável também no âmbito da educação matemática.

Segundo a perspectiva de [Marc \(2001\)](#), ocorreu uma mudança radical nos alunos, sendo que as gerações atuais não compartilham as mesmas características para as quais o nosso sistema educacional foi originalmente concebido. Dessa forma, as gerações atuais, desde a fase maternal até a faculdade, são as primeiras a vivenciarem um crescimento imerso nas novas tecnologias digitais.

Pesquisa mais recentes como a de [Silva e Parreira Júnior \(2023\)](#) também afirmam que a utilização das tecnologias como ferramenta de auxílio no processo de ensino e aprendizagem são potencialmente favoráveis.

Na educação, as TICs podem ser vistas como potencializadoras do processo de ensino trazendo a possibilidade de aquisição de conhecimento por parte dos alunos e

contribuem para uma melhor comunicação entre os indivíduos sendo eles, neste cenário, professores e alunos, a fim de tornar o processo de aprendizagem mais fácil e significativo (Silva; Parreira Júnior, 2023).

Lima (2023) defende a utilização das tecnologias como ferramenta didática, com ressalvas, e trazem os seguintes argumentos:

[...] as tecnologias proporcionam o domínio de novas habilidades e entendimentos, mas sempre considerando que existirão alguns problemas que podem estar associados à inclusão de novas tecnologias a frente dos alunos e professores em sala de aula diariamente auxiliando no conteúdo escolar, tornando-se um desafio para ambos principalmente para os professores que tem que saber lidar com toda essa metodologia diferenciada juntando o tradicional com o renovado e levando um melhor conhecimento do ensino-aprendizagem para os alunos (Lima, 2023).

De acordo com Silva, Carlesso e Ghisleni (2022), as tecnologias estão se tornando cada vez mais integradas ao contexto educacional e oferecem diversas formas de suporte ao aprendizado. Elas permitem que os alunos acessem uma quantidade maior de informações, promovendo o compartilhamento de diferentes conteúdos e a colaboração entre colegas. Além disso, segundo os autores, as tecnologias introduzem novas metodologias de ensino, como a aprendizagem baseada em problemas, que podem ser mais eficazes para os alunos. Dessa maneira, os estudantes podem avançar no seu próprio ritmo e obter uma compreensão mais profunda em suas áreas de estudo.

Segundo Gonçalves e Maissait (2023), as tecnologias oferecem uma ampla gama de benefícios, como a capacidade de aprimorar o processo de aprendizado, tornando-o mais envolvente e eficaz. Elas possibilitam o acesso a diversos recursos educacionais, permitindo a personalização do ensino conforme as necessidades individuais dos estudantes e desenvolvendo habilidades relevantes para o século XXI. No entanto, a incorporação constante de tecnologia na educação não é isenta de desafios. Os educadores enfrentam a necessidade de equilibrar métodos de ensino tradicionais com abordagens mais modernas, o que requer a adaptação a um novo ambiente de ensino e a compreensão de como integrar efetivamente a tecnologia. Além disso, a inclusão de tecnologia pode apresentar obstáculos em termos de acessibilidade, segurança cibernética e equidade no acesso a recursos digitais. Portanto, os professores desempenham um papel fundamental na mediação entre o tradicional e o inovador.

### 2.3. A TECNOLOGIA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Segundo Prado e Valente (2003), é prática comum incluir, no processo de formação de professores, disciplinas que abordam a utilização de tecnologias como recursos auxiliares nas aulas de matemática. Essas disciplinas costumam explorar tanto os fundamentos educacionais

(teoria) quanto os aspectos práticos relacionados à tecnologia. Contudo, [Ferreira \(2020\)](#) diz ter notado, em sua graduação, que essas aulas não foram suficientes para gerar mudanças substanciais na sua prática pedagógica. Para alcançar uma transformação efetiva, a teoria e a prática não devem ser tratadas separadamente. O domínio técnico e pedagógico deve ser complementar, e o aspecto tecnológico deve ser visto como uma solução para superar obstáculos pedagógicos. Em outras palavras, compreender as mecânicas de um software pode ser crucial para criar situações que promovam análises como parte de um problema. Além disso, é essencial reconhecer as limitações do programa e compreender suas potencialidades, utilizando-o como uma ferramenta eficaz no apoio educacional.

De acordo com [Prado e Valente \(2003\)](#), além do que foi mencionado anteriormente, é essencial que o professor passe por um processo de contextualização. Nesse contexto, o docente deve habilmente converter todo o conhecimento adquirido durante sua formação inicial ou em cursos de aprimoramento em situações práticas adequadas para serem aplicadas no ambiente da educação básica. Este processo pode se revelar desafiador, exigindo do professor uma adaptação significativa e uma abordagem cuidadosa para integrar efetivamente os conhecimentos teóricos na prática educacional do dia a dia.

[Valente \(2013\)](#), destaca que os professores devem desempenhar o papel de facilitadores no processo de ensino, abandonando a posição de detentores exclusivos do conhecimento. Em vez disso, eles devem agir como motivadores, encorajando os alunos a buscar ativamente o aprendizado. É crucial que os professores tenham discernimento sobre quando e como utilizar o computador para estimular a aprendizagem, desempenhando assim um papel ativo e eficaz no processo educacional.

Diante disso, conforme argumentado pelas autoras, é essencial que os cursos de formação de professores incorporem as tecnologias de informação e comunicação como ferramentas de apoio à educação. Dessa forma, esses cursos podem ampliar as oportunidades de atuação dos professores em sala de aula, intensificando o processo de aprendizagem. Essa abordagem visa a adaptação aos padrões da sociedade contemporânea e às características específicas do público-alvo, transformando o professor em um mediador eficaz no ensino da matemática.

[Nascimento e Dias \(2015\)](#) discutem as implicações da formação de professores e a carga pessoal, afirmando que os educadores que não possuem afinidade com determinados temas e enfrentam dificuldades em consolidar esse conhecimento durante sua formação tendem a apresentar fragilidades relacionadas à temática em questão. Essa fragilidade impacta diretamente na transposição didática, exercendo, conseqüentemente, influência na formação

dos alunos futuros. No contexto da utilização de tecnologias educacionais, professores que se sentem inseguros em relação ao uso desses dispositivos tendem a restringir o acesso de seus alunos, prejudicando assim essa prática educativa.

### 3. VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS CONVEXOS

Abaixo serão apresentados alguns argumentos matemáticos que foram norteadores para a construção da sequência de ensino desenvolvida por [Ferreira \(2020\)](#) que está sendo aplicada nesta dissertação. A demonstração dos princípios que deram base para o desenvolvimento das fórmulas e as fórmulas utilizadas para calcular o volume dos sólidos apresentados na sequência estão expressamente provadas com base em literaturas matemáticas a qual o autor se baseou para desenvolver a sequência e servirão como suporte para efeito de comprovação das deduções que foram feitas através da utilização do software GeoGebra na aplicação da sequência de ensino.

#### 3.1. ESTUDOS SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste capítulo, serão apresentados alguns fundamentos matemáticos que justificam as equações empregadas na determinação do volume de figuras tridimensionais. Estes fundamentos se baseiam primordialmente na obra “Geometria” de Antonio Caminha Muniz Neto, publicado pela SBM em 2013, [Muniz \(2013\)](#). Que é utilizado como material que da base ao curso de geometria do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), além de oferecer um breve panorama sobre as contribuições de Bonaventura Cavaliere à geometria espacial, conforme documentado por [Primo \(2013\)](#). Os avanços matemáticos estabelecidos por Cavaliere fornecem um arcabouço teórico relevante para este estudo. Tais argumentos serão posteriormente corroborados por experimentações conduzidas com o auxílio do software GeoGebra, como parte integrante deste trabalho de pesquisa.

#### 3.2. BONAVENTURA CAVALIERI E A GEOMETRIA

De acordo com [Primo \(2013\)](#), Bonaventura Cavaliere, nascido em Milão por volta de 1598, era membro da ordem religiosa dos Jesuados. Em 1616, mudou-se para Pisa, onde estudou filosofia e teologia e teve contato com o padre Benedito Castelli (1577 - 1644), que o apresentou a Galileu Galilei (1564 - 1642). Cavaliere tornou-se discípulo de Galileu e, em 1629, foi nomeado professor em Bolonha, permanecendo no cargo até sua morte em 1647. Cavaliere foi um erudito religioso com interesse em matemática, contribuindo com diversos estudos em áreas como geometria, trigonometria e astronomia. Ele também desempenhou um papel significativo na introdução do conhecimento sobre logaritmos na Europa.

No ano de 1635, Bonaventura Cavaliere apresentou sua obra mais proeminente, intitulada "Geometria Indivisibilibus Continuorum". Neste trabalho, ele introduziu o método

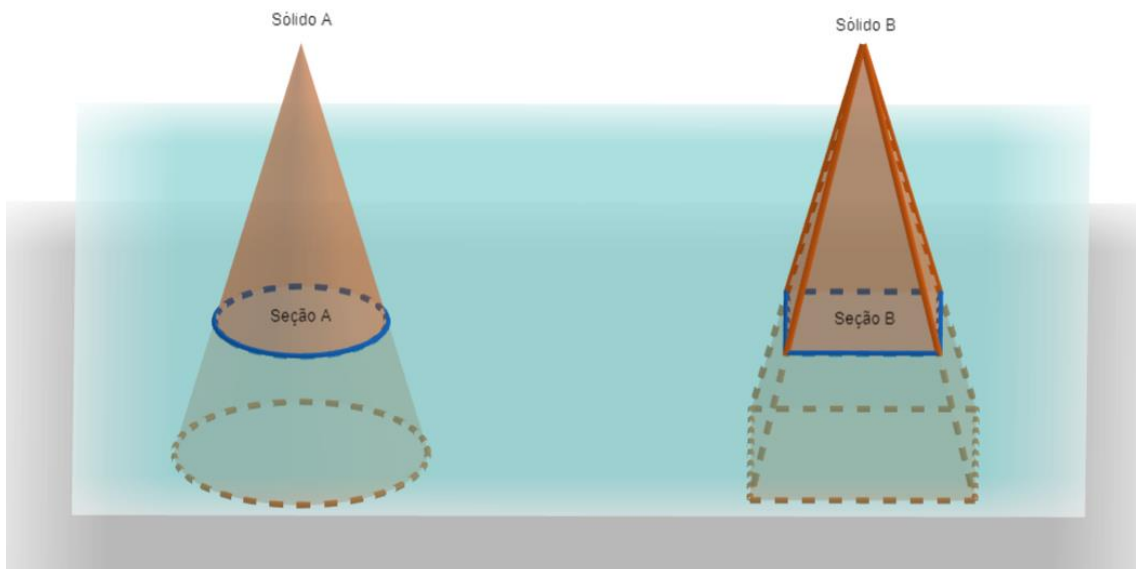
dos indivisíveis, uma técnica utilizada para calcular áreas e volumes de figuras e sólidos geométricos. O argumento de Cavalieri, conforme descrito por Boyer (1996), baseia-se em ideias sugeridas por Oresme, Kepler e Galileu. Ele propõe que uma área possa ser representada por segmentos, ou "indivisíveis", e que um volume possa ser compreendido como a composição de áreas que são volumes indivisíveis.

Cavalieri não definiu explicitamente o termo "indivisível". Segundo Eves (1995), uma interpretação plausível é que um indivisível de um plano seja uma corda desse plano, enquanto um indivisível de um sólido seja uma secção plana do mesmo. Assim, um plano seria composto por infinitas cordas paralelas, e um sólido seria formado por infinitas seções planas paralelas. Essas concepções desenvolvidas por Cavalieri deram origem a dois princípios fundamentais, conhecidos como os Princípios de Cavalieri, um para o cálculo de áreas e outro para o cálculo de volumes.

### 3.2.1. O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA VOLUMES

Considere dois sólidos  $A$  e  $B$  apoiados em um plano  $\alpha$ . Se qualquer plano horizontal, ao plano  $\alpha$ , secciona  $A$  e  $B$  segundo figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes  $V(A)$  e  $V(B)$  são essa constante.

Figura 1: O Princípio de Cavalieri para Sólidos Tridimensionais



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

O Princípio de Cavalieri simplifica o cálculo de volumes de sólidos geométricos ao relacioná-lo com o cálculo de áreas de figuras geométricas. Este princípio afirma que se dois sólidos são seccionados por um mesmo plano paralelo ao plano de base e possuem a mesma altura, então a razão entre as áreas das seções correspondentes é constante. Portanto, a razão

entre os volumes dos sólidos é igual a essa constante. Em outras palavras, se as áreas correspondentes são idênticas, os sólidos têm volumes iguais.

Conforme mencionado anteriormente, em 1635, Bonaventura Francesco Cavaliere publicou o livro "Geometria Indivisibilibus Continuum", que incluía dois princípios: um relacionado à área de figuras planas e outro voltado ao cálculo de volumes de sólidos geométricos. Embora esses princípios sejam amplamente aceitos como axiomas na educação básica, é importante destacar que, na realidade, ambos são teoremas que podem ser demonstrados por meio do cálculo de integrais. É interessante notar que, embora esses conceitos sejam abordados intuitivamente no currículo educacional do Ensino Básico, não há uma inclusão explícita do conteúdo relacionado às integrais. Como resultado, torna-se impraticável introduzir tais abordagens para suscitar argumentos entre os alunos da educação básica.

A seguir, apresentaremos uma demonstração na forma de teorema para validar cientificamente o Princípio de Cavaliere no que diz respeito ao cálculo de volumes. O princípio de Cavaliere, essencialmente, afirma que uma integral múltipla pode ser calculada por meio de várias integrais simples repetidas. Conforme destacado por [Paterlini \(2010\)](#), a prova deste teorema é uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais.

Consideramos um sistema de coordenadas tridimensional  $Oxyz$ , onde  $P$  é um sólido finito delimitado pelos planos  $z = 0$  e  $z = c > 0$ , e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo  $y = f(x, z)$  e  $x = g(y, z)$ . Para cada valor de  $t$  tal que  $0 \leq t \leq c$ , definimos  $P_t$  como a interseção de  $P$  com o plano  $z = t$ .

Seja  $Q$  outro sólido finito delimitado pelos planos  $z = 0$  e  $z = c > 0$ , e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo  $y = f(x, z)$  e  $x = g(y, z)$ . Para cada valor de  $t$  tal que  $0 \leq t \leq c$ , definimos  $Q_t$  como a interseção de  $Q$  com o plano  $z = t$ . Suponhamos que exista  $k > 0$  tal que  $a(P_t) = k \cdot a(Q_t)$  para todo  $t$ . Então  $v(P) = k \cdot v(Q)$ .

Demonstração.

Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned} v(P) &= \iiint_P dx dy dz = \int_0^c \left[ \iint_{P_z} dx dy \right] dz \\ &= \int_0^c a(P_z) dz \end{aligned}$$



$$= \int_0^c k \cdot a(Q_z) dz$$

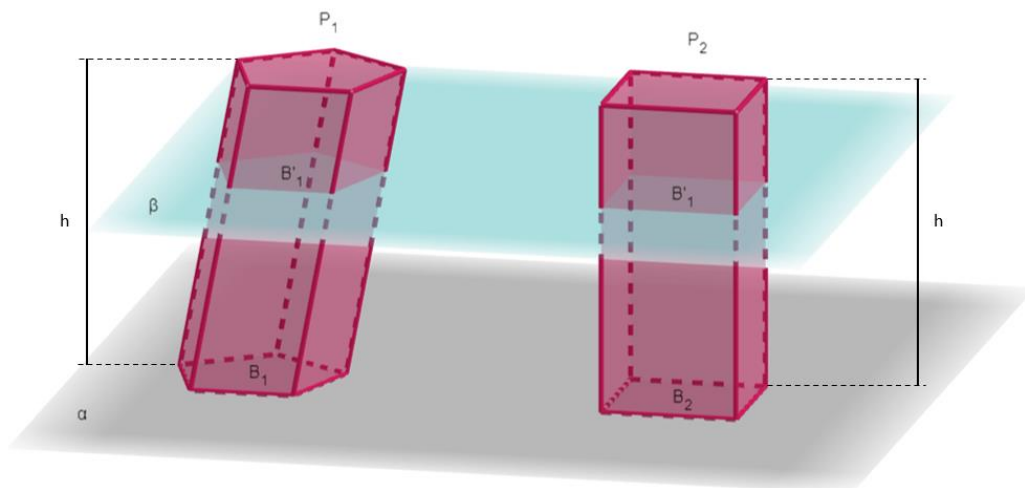
$$= k \int_0^c a(Q_z) dz = \dots = k \cdot v(Q).$$

Demonstrando assim o teorema.

### 3.3. VOLUME DO PRISMA

Consideramos um prisma  $P_1$  com altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$ , juntamente com um paralelepípedo retângulo também de altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$ . É importante ressaltar que ambos os sólidos possuem bases congruentes e equivalentes.

Figura 2: Volume do prisma.



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Vamos supor, sem limitação da generalidade, que os dois sólidos têm suas bases situadas em um mesmo plano  $\alpha$  e estão contidos em um dos semiespaços determinados por  $\alpha$ . Outro plano paralelo ao plano  $\alpha$  intersecta tanto  $P_1$  quanto  $P_2$ , e as seções resultantes (denotadas como  $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente) possuem áreas idênticas, uma vez que são congruentes às respectivas áreas das bases.

Portanto, de acordo com o Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do prisma  $P_1$  é igual ao volume do paralelepípedo  $P_2$ .

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

Dado que o volume do paralelepípedo  $P_2$  é calculado como o produto da área da base  $B_2$  pela altura  $h$ , ou seja,  $V_{P_2} = B_2 \cdot h$ , que também pode ser expresso como  $V_{P_2} = B \cdot h$ , podemos inferir que o volume do prisma  $P_1$  é igual a  $B \cdot h$ , em resumo.

Conclui-se então que o volume de um prisma é determinado pelo produto da área da base pela altura do prisma.

$$V_{Prisma} = B \cdot h$$

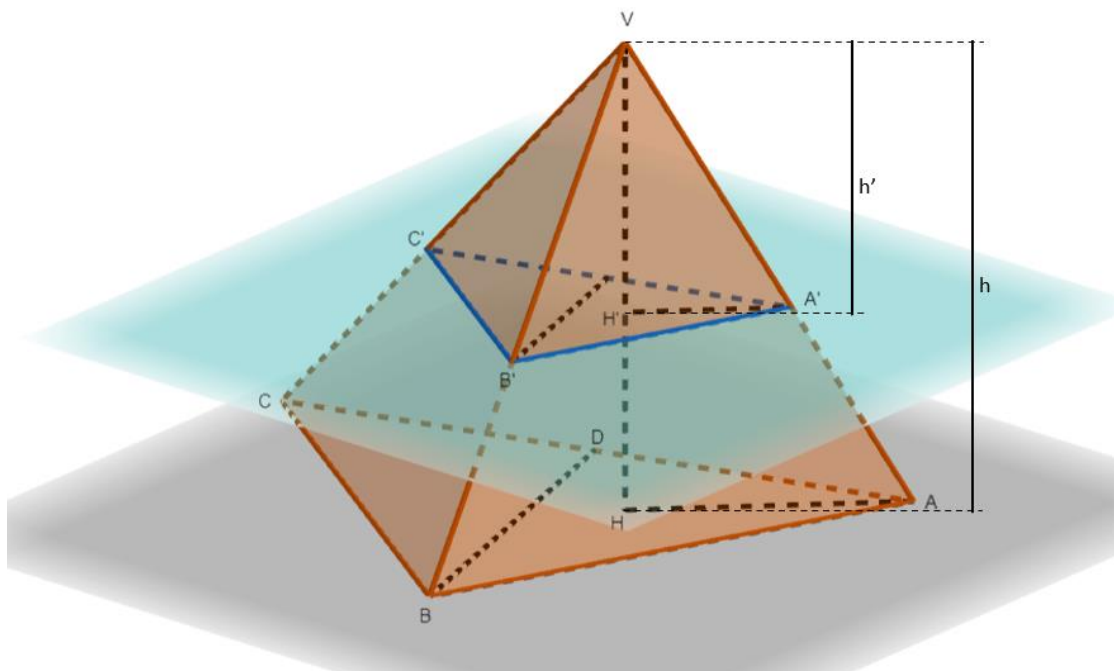
### 3.4. VOLUME DA PIRÂMIDE

Para estabelecer um método geral para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer, precisa-se estabelecer algumas subdivisões para analisar o comportamento desse sólido em determinadas situações e construir as relações necessárias para finalmente constituir uma fórmula.

#### 3.4.1. SECÇÃO PARALELA À BASE DE UM TETRAEDRO

Quando uma pirâmide triangular (também conhecida como tetraedro) é cortada por um plano paralelo à sua base:

Figura 3 – Secção paralela à base de um tetraedro



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

a) As arestas laterais e a altura da pirâmide triangular são divididas na mesma proporção quando esta é cortada por um plano paralelo à sua base.

De fato, as retas  $\overleftrightarrow{A'H'}$  e  $\overleftrightarrow{AH}$  são paralelas, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro. Consequentemente, os triângulos  $VH'A'$  e  $VHA$  são semelhantes, o que implica:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

b) As seções resultantes e a base da pirâmide são formadas por triângulos que possuem proporções semelhantes.

De fato, os ângulos formados na secção ( $\Delta A'B'C'$ ) e os ângulos na base ( $\Delta ABC$ ) são congruentes, uma vez que possuem lados paralelos correspondentes. Isso implica que a secção  $A'B'C'$  e a base  $ABC$  são triângulos semelhantes. A razão de semelhança entre eles é dada por  $\frac{h'}{h}$ , como segue:

$$\Delta VA'B' \sim \Delta VAB \Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

Consequentemente, os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  são semelhantes, com a razão de semelhança sendo  $\frac{h'}{h}$ .

c) A razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distancia ao vértice.

De fato, considerando  $B'D'$  e  $BD$  como as duas alturas correspondentes da secção e da base, respectivamente, temos:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}$$

Logo,

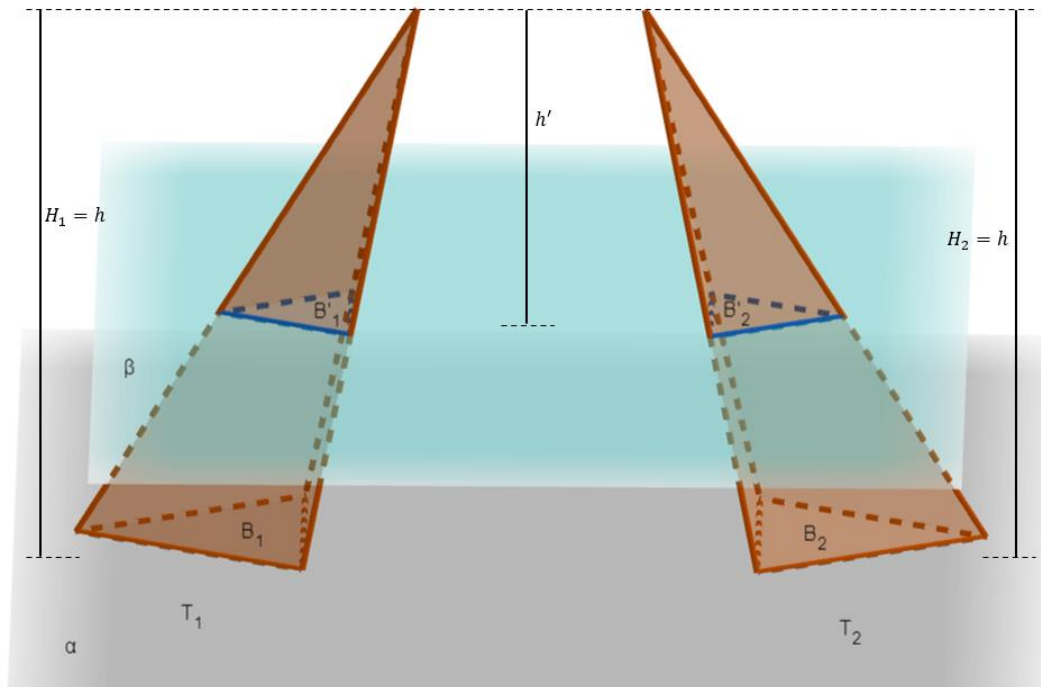
$$\begin{aligned} \frac{\text{Área}(\Delta A'B'C')}{\text{Área}(\Delta ABC)} &= \frac{\frac{1}{2}(A'C') \cdot (B'D')}{\frac{1}{2}(AC) \cdot BD} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{\text{Área}(\Delta A'B'C')}{\text{Área}(\Delta ABC)} \\ &= \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \end{aligned}$$

### 3.5. EQUIVALÊNCIA DE TETRAEDROS

Dois pirâmides triangulares, também conhecidas como tetraedros, com áreas de base iguais (ou seja, bases equivalentes) e alturas idênticas, possuem volumes idênticos, ou seja, são equivalentes. Denotando as duas pirâmides como  $T_1$  e  $T_2$ , suas áreas de base como  $B_1$  e  $B_2$ , e suas alturas como  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, podemos expressar essa hipótese da seguinte forma:

$$B_1 = B_2 \text{ e } H_1 = H_2 = h.$$

Figura 4 – Equivalência de tetraedros



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que as bases equivalentes estão localizadas em um plano  $\alpha$ , enquanto os vértices estão contidos em um mesmo semiespaço determinado por  $\alpha$ . Ao considerarmos um plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$  e situado a uma distância  $h'$  dos vértices, podemos observar que esse plano divide as pirâmides  $T_1$  e  $T_2$  em seções com áreas  $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente. Temos então:

$$\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Assim como,

$$\frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Isto implica em,

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}$$

Sendo  $B_1 = B_2$ , do resultado acima tem-se  $B'_1 = B'_2$

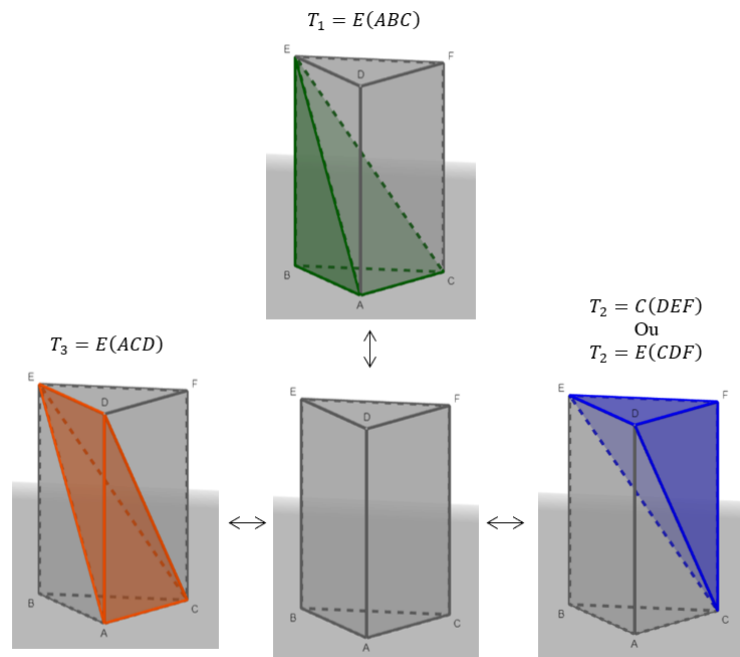
Se as seções têm áreas iguais ( $B'_1 = B'_2$ ), de acordo com o Princípio de Cavalieri, as pirâmides  $T_1$  e  $T_2$  possuem volumes iguais (ou seja, são equivalentes), ou seja,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ .

### 3.5.1. DECOMPOSIÇÃO DE UM PRISMA TRIANGULAR

Qualquer prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares, também conhecidas como tetraedros, que são equivalentes entre si, ou seja, possuem volumes iguais.

Considere o prisma triangular  $ABCDEF$ . Ao cortar esse prisma pelo plano determinado por  $A$ ,  $C$ , e  $E$ .

Figura 5 – Decomposição de um prisma triangular



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Obtemos o tetraedro  $T_1 = E(ABC)$  e a pirâmide triangular  $E = (ACFD)$ . Posteriormente, ao cortar a pirâmide  $E = (ACFD)$  pelo plano determinado por  $C$ ,  $D$ , e  $E$ , obtemos o tetraedro  $T_2 = C(DEF)$  ou  $T_2 = E(CDF)$  e  $T_3 = E(ACD)$ .

Assim, temos que:

$$\text{Prisma } ABCDEF = T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow V_{\text{Prisma}} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}$$

As pirâmides  $T_1 = E(ABC)$  e  $T_2 = C(DEF)$  compartilham o mesmo volume, pois possuem bases congruentes ( $ABC$  e  $DEF$ ) e a mesma altura (a do prisma). Portanto,  $V_{T_1} = V_{T_2}$

Além disso, as pirâmides  $T_2 = E(CDF)$  e  $T_3 = E(ACD)$  compartilham o mesmo volume, pois têm bases congruentes ( $CDF$  e  $ACD$ ) e a mesma altura (a distância de  $E$  ao plano  $ACD$ ). Assim,  $V_{T_2} = V_{T_3}$ .

Portanto, a partir das relações anteriores, concluímos que  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$

### 3.5.2. VOLUME DO TETRAEDRO

Considerando  $B$  como a área da base e  $h$  como a medida da altura do prisma do exemplo anterior, observamos que  $B$  é a área da base e  $h$  é a altura do tetraedro  $T_1$ .

Com base no teorema anterior e assumindo que  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$ , temos que:

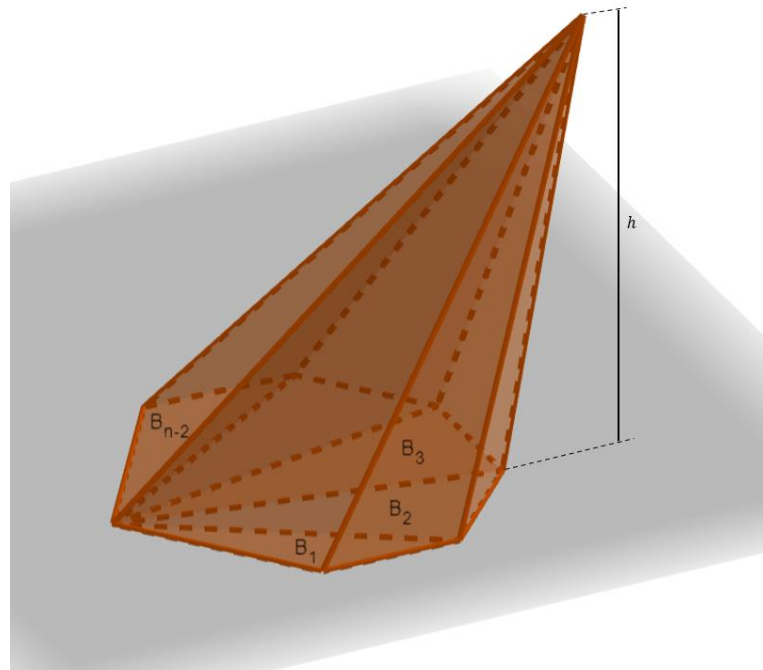
$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} \Rightarrow V_{Prisma} \Rightarrow 3 \cdot V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3} B \cdot h$$

Assim, concluímos que o volume do tetraedro é um terço da área da base multiplicada pela altura do prisma.

### 3.5.3. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

Considerando  $B$  como a área da base e  $h$  como a altura de uma pirâmide qualquer, observamos que esta pirâmide pode ser representada como a soma de  $(n - 2)$  tetraedros.

Figura 6 – Volume de uma pirâmide qualquer



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

$$\begin{aligned} V &= V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_n} = V_{T_{n-2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{3} B_1 \cdot h + \frac{1}{3} B_2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3} B_{n-2} \cdot h \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{3} \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{n-2}) \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} B \cdot h \end{aligned}$$

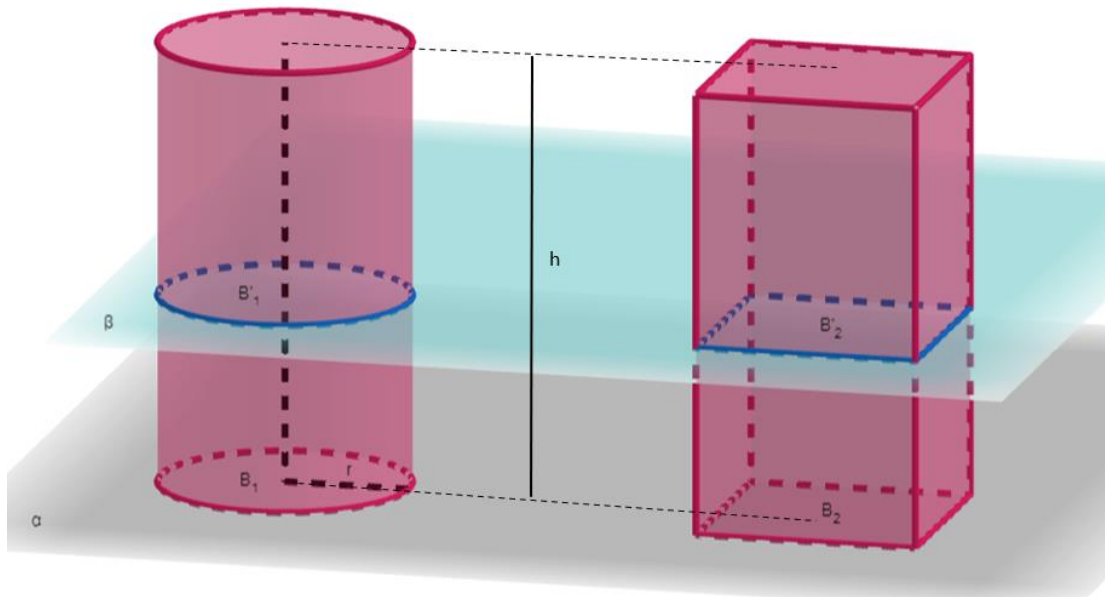
Conclui-se que o volume de uma pirâmide pode ser determinado como um terço do produto da área da base pela medida da altura.

### 3.6. VOLUME DO CILINDRO

Consideramos um cilindro com altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$ , juntamente com um prisma com altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$  (o cilindro e o prisma possuem alturas congruentes e bases equivalentes).

Supomos que ambos os sólidos tenham suas bases situadas em um mesmo plano  $\alpha$  e estejam contidos em um dos semiespaços determinados por  $\alpha$ .

Figura 7 – Volume do cilindro



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que intersecta o cilindro, também intersecta o prisma, e as seções resultantes ( $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente) possuem áreas iguais, pois são congruentes às suas respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B) \implies B'_1 = B'_2$$

Portanto, de acordo com o Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

$$Volume_{cilindro} = Volume_{prisma}$$

O volume do prisma é expresso como  $Volume_{prisma} = B_2 \cdot h$ , ou seja,  $V_{prisma} = B \cdot h$ , onde  $B$  representa a área da base e  $h$  a altura. Consequentemente, temos que o volume do cilindro é  $Volume_{cilindro} = B_1 \cdot h$ , ou de forma concisa:  $V_{cilindro} = B \cdot h$ .

Conclui-se que o volume do cilindro é determinado pelo produto da área da base pela medida da altura. Se a área da base do Cilindro é dada por  $B = \pi \cdot r^2$ , então temos:

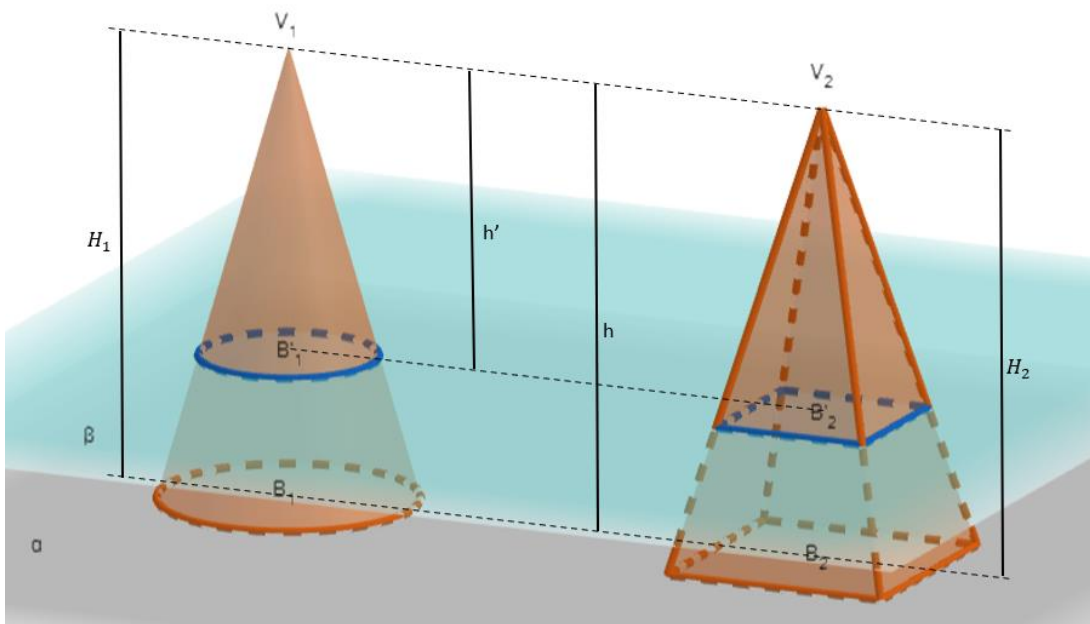
$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

### 3.7. VOLUME DO CONE

Consideramos um cone com altura  $H_1 = h$  e área da base  $B_1 = b$ , juntamente com um tetraedro com altura  $H_2 = h$  e área da base  $B_2 = b$  (o cone e o tetraedro possuem alturas congruentes e bases equivalentes).

Supomos que ambos os sólidos tenham suas bases situadas em um mesmo plano  $\alpha$ , e que os vértices estejam localizados em um mesmo semiespaço determinado por  $\alpha$ .

Figura 8 – Volume do cone



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Qualquer plano secante  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices, que intersecta o cone, também intersecta o tetraedro. As áreas das seções resultantes  $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente, são equivalentes. Isto pode ser explicado tendo em vista que:

$$\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Assim como,

$$\frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Assim,

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}$$

Como  $B_1 = B_2 = B$ , vem que  $B'_1 = B'_2$ .



Portanto, de acordo com o Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do cone é igual ao volume do tetraedro.

$$Volume_{Cone} = Volume_{Tetraedro}$$

Como,

$$Volume_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h$$

Ou seja,

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Dai,

$$Volume_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Resumidamente,

$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Sabe-se que  $B = \pi \cdot r^2$ , conclui-se que:

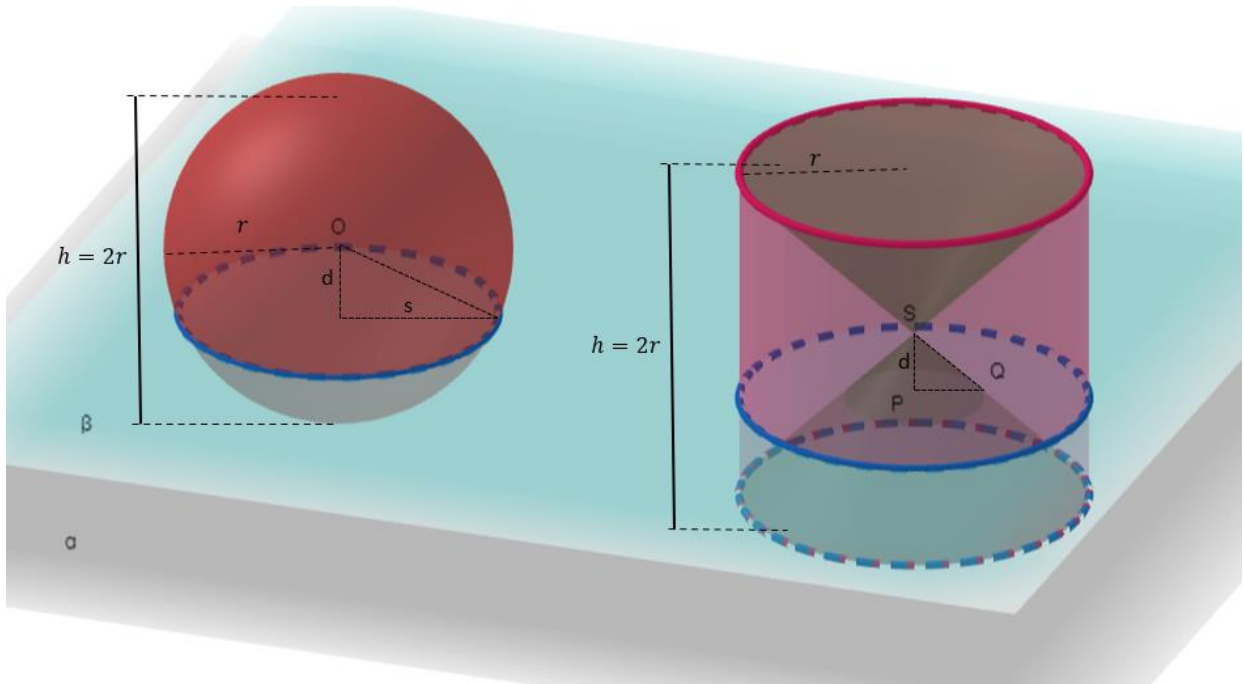
$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

### 3.8. VOLUME DA ESFERA

Consideramos um cilindro equilátero com raio da base  $r$  (sendo a altura  $2r$ ) e seja  $S$  o ponto médio da altura do cilindro que passa pelo eixo meridiano do cilindro. Toma-se dois cones, cada um com a base formada pela base do cilindro e com vértice comum pertencente ao ponto  $S$ , a região delimitada por esses dois cones forma um sólido chamado clepsidra. O espaço dentro do cilindro e fora dos dois cones é denominado sólido  $X$  (também conhecido como anticlépsidra).

Agora, considera-se uma esfera com raio  $r$  e o sólido  $X$  descrito acima.

Figura 9 – Volume da esfera



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Supõem-se que a esfera seja tangente a um plano  $\alpha$ , que o cilindro (que gerou o sólido  $X$ ) tenha sua base em  $\alpha$ , e que ambos os sólidos, a esfera e o sólido  $X$ , estejam situados em um mesmo semiespaço determinado por  $\alpha$ . Qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$  e a uma distância  $d$  do centro da esfera (e do vértice do sólido  $X$ ), também corta o sólido  $X$ .

Temos que a área da seção da esfera (um círculo) é  $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$ , e a área da seção no sólido  $X$  (uma coroa circular) é  $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$ . As áreas das seções na esfera e no sólido  $X$  são iguais; portanto, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido  $X$  possuem volumes iguais.

$$Volume_{Esfera} = Volume_{Sólido X}$$

Mas:

$$Volume_{Sólido X} = V_{Cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

Resumindo,

$$Volume_{Sólido X} = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$Volume_{Sólido X} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ou seja,

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

#### 4. METODOLOGIA

A pesquisa realizou-se da seguinte maneira:

- i. Desenvolveu-se um **pré-teste** o qual foi aplicado no primeiro dia de intervenção com os participantes da pesquisa.
- ii. Nos próximos três dias aplicou-se a sequência de ensino através do software GeoGebra com a mediação do autor desta pesquisa e após a finalização desta sequência.
- iii. O **pós-teste** foi aplicado novamente para verificar a evolução dos alunos comparando o resultado obtido em relação a primeira e a segunda aplicação do teste.

##### 4.1. CARACTERIZAÇÃO DO LÓCUS DE PESQUISA

Figura 10: A Escola de Aplicação



Fonte: autor

A aplicação foi realizada em uma escola da zona rural do município de Maracanã. A sede do município de Maracanã está situada à margem esquerda do rio do mesmo nome, na zona fisiográfica do Salgado e fica a 171,8 km da capital, Belém-PA, o município atualmente tem cerca de 807.628 km<sup>2</sup> de extensão e a maioria de suas escolas que estão localizadas fora da sede do município e são de pequeno porte.

A escola a qual foi utilizada para aplicação desta proposta fica a 33,4 km da sede do município de Maracanã, e está localizada na PA-127, km15 em um local denominado Vila União. A escola atende em dois horários, matutino e vespertino, separando o nível fundamental anos iniciais, que estuda durante a manhã e o horário da tarde é reservado aos alunos do ensino fundamental anos finais.

O público desta escola geralmente mora em comunidades próximas a escola e estudam até o 5º ano em suas comunidades em escola de multisseriadas. Por estar localizada em uma região rural, os sinais de internet, telefone e outros sistemas semelhantes são de difícil acesso

tanto pela escola quanto pelos alunos e durante a pandemia de COVID-19 as aulas na região foram feitas de forma remota.

#### 4.2. PARTICIPANTES DA PESQUISA

Figura 11: Participantes da Pesquisa



Fonte: autor

Os participantes da pesquisa são estudantes do 9º ano do ensino fundamental frequentes no ano de 2023, nesta turma haviam 11 alunos matriculados e frequentando as aulas regularmente, 5 alunos eram moradores da vila em que a escola está localizada e os demais alunos eram moradores de diversas regiões diferentes dos arredores da Vila União, os quais utilizavam transporte público escolar para chegar à escola.

Os participantes da pesquisa foram tomados dessa turma que continha 11 estudantes, no entanto, um desses alunos não aceitou participar da pesquisa, então colaboraram para este trabalho 10 alunos que serão enumerados de 1 a 10 para preservar suas identidades e assim serão identificados a partir desse momento.

#### 4.3. INSTRUMENTOS PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÃO

O método utilizado para a produção das informações se baseia na Engenharia Didática. Na tradição francesa, o desenvolvimento e a conclusão de uma Engenharia Didática são processos prolongados, especialmente quando há um foco significativo na aprendizagem dos alunos. A Engenharia Didática se preocupa com a aplicação prática dos métodos didáticos em

sala de aula, organizados em forma de sequências de ensino Artigue (2009). O processo inclui fases como análise preliminar, planejamento a priori, experimentação, e análise posterior, e envolve a validação interna e externa do material desenvolvido Laborde (1997). A Engenharia Didática é uma abordagem que busca criar e avaliar métodos de ensino e aprendizagem com base em princípios teóricos e práticas experimentais. De acordo com Perrin-Glorian e Bellemain (2019), o desafio não é apenas definir e implementar os princípios teóricos que orientam a engenharia didática, mas também adaptar esses princípios às condições reais de ensino enfrentadas pelos professores.

Desse modo, foi aplicado um pré-teste diagnóstico, disponível no APÊNDICE A, para os 10 participantes da pesquisa. Este questionário continha 32 questões, sendo composto de questões objetivas sem múltipla escolha e por questões objetivas com múltipla escolha para os alunos marcarem. As questões eram sobre geometria espacial e o volume de sólidos, o intuito era avaliar o conhecimento que estes alunos tinham a respeito do assunto.

#### 4.4. PROCEDIMENTO PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÃO

Com a autorização da direção escolar, do corpo técnico e pedagógico, o primeiro dia de intervenção deu-se através da aplicação do pré-teste à turma, a lista de questões foi entregue a cada um dos 10 alunos. Foi solicitado que eles resolvessem todas as questões de acordo com seus conhecimentos prévios sobre o assunto, não houve mediação entre alunos e o responsável pela pesquisa. O objetivo deste teste era realizar uma avaliação diagnóstica para verificar os conhecimentos atuais dos participantes sobre as questões apresentadas no questionário diagnóstico e utilizar esses resultados para avaliar se obteriam evolução ao final da aplicação da proposta sequencial de ensino comparando os resultados obtidos no primeiro dia de aplicação com um teste final que seria aplicado ao final da intervenção. Todos os alunos resolveram individualmente, sem auxílio de materiais externos, apenas com o conhecimento que traziam consigo.

No segundo, terceiro e quarto dia de aplicação, foram utilizadas as articulações desenvolvidas para esta proposta sequencial de ensino sugerida pelo trabalho. As intervenções foram expositivas, com a utilização de computador e projetor multimídia para fazer a exposição aos alunos. As aulas tiveram duração de 4 horas durante os 3 dias.

No quinto e último dia, foi aplicado novamente um pós-teste contendo as mesmas questões que resolveram no primeiro dia de aplicação, com a finalidade de avaliar o desempenho que os alunos tiveram comparado ao que teriam tido quando resolveram o pré-teste pela primeira vez. Desta forma, seria possível avaliar se a intervenção, através da

sequência de ensino proposta, teve alguma eficácia no ensino e aprendizagem do volume de sólidos geométricos.

## 5. CRONOGRAMA

A seguir serão apresentadas informações referentes ao cronograma de aplicação, contendo as datas de aplicação, descrição das ações durante a intervenção e a duração destas aplicações. Além disto apresenta-se a lista de frequência dos participantes da pesquisa de acordo com os dias da aplicação da pesquisa.

Quadro 1: Cronograma de Aplicação

Cronograma de aplicação		
Dia	Ação	Duração
11/12/23	Aplicação do questionário	40 minutos
12/12/23	Aplicação da sequência de ensino	4 horas
13/12/23	Aplicação da sequência de ensino	4 horas
14/12/23	Aplicação da sequência de ensino	4 horas
15/12/23	Aplicação do questionário	2 horas e 30 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa

A aplicação do questionário diagnóstico durou o tempo necessário para que os alunos conseguissem resolvê-los por completo, a aplicação da sequência de ensino foi realizada em três dias com duração de 4 horas cada intervenção. No primeiro dia de intervenção com a sequência de ensino, foi utilizada a articulação I e a articulação II. No segundo dia de aplicação da sequência as articulações utilizadas foram a III, IV e V, e para finalizar a sequência, foram utilizadas as articulações VI e VII. No dia seguinte foi aplicado novamente o questionário e o tempo de aplicação foi dado de acordo com o necessário para que os alunos o respondessem completamente.

Quadro 2: Frequência Durante a Aplicação

Frequência durante a aplicação					
	11/12/23	12/12/23	13/12/23	14/12/23	15/12/23
Aluno 1	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 2	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 3	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 4	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 5	Presente	Presente	Ausente	Presente	Presente
Aluno 6	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 7	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 8	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 9	Presente	Presente	Presente	Presente	Presente
Aluno 10	Presente	Presente	Ausente	Presente	Presente

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa

Os alunos foram bem participativos em relação a frequência, somente dois dos participantes tiveram 80% de frequência, os demais todos frequentaram em 100% das aulas.

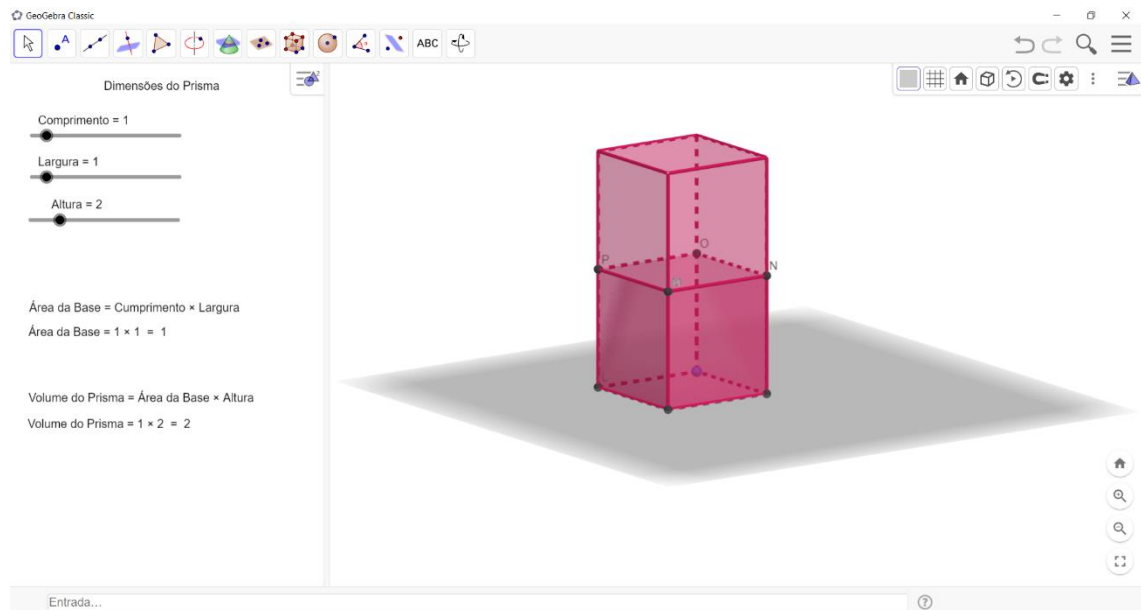


## 6. PROPOSTA SEQUENCIAL DE ENSINO

A intervenções na educação básica, especificamente no ensino de fórmulas geométricas, enfrenta desafios significativos devido à limitação da matriz curricular, que não incorpora determinados conteúdos necessários para análises detalhadas. Esses conteúdos geralmente são reservados para o ensino superior. Ao lidar com alunos do ensino básico, muitas vezes é necessário aceitar certos conhecimentos como verdadeiros, resultando em uma consolidação superficial do raciocínio lógico-matemático subjacente às fórmulas utilizadas, especialmente em geometria espacial. Diante desse cenário, a sequência didática proposta busca oferecer uma abordagem alternativa para o ensino da geometria espacial, visando uma compreensão mais lógica e interativa, apoiada por construções articuladas por meio do software GeoGebra Clássico. Os arquivos mencionados estão disponíveis para download no link indicado no [APÊNDICE B](#) deste trabalho científico.

### Articulação I

Figura 12: Articulação I



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

A abordagem à geometria espacial se inicia com a utilização do arquivo "Volume do Prisma.ggb". A unidade fundamental para o cálculo de volume é mensurada por meio de uma unidade cúbica que corresponde a uma medida específica. Pode ser estabelecida esta medida utilizando esta articulação, pois ela possibilita a criação e manipulação de um sólido com comprimento, largura e altura determinada pelo usuário, podendo-se gerar cubos e prismas, além da possibilidade de inscrever unidades cúbicas em outros sólidos. Isto possibilita a análise

das principais características do cálculo de volume de um cubo e de um prisma quadrangular, explorando a relação entre a área da base e a altura do prisma. Optar por começar com esse sólido se revela mais viável no contexto didático. Nesse contexto, o volume de um prisma quadrangular, por exemplo, denota a quantidade de uma unidade cúbica que o sólido é capaz de conter em seu interior. Os sólidos são medidos por unidades que são um cubo. Assim, o volume desse cubo é 1. Se sua aresta medir 1 cm (um centímetro), seu volume será 1 cm<sup>3</sup> (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1 m, seu volume será 1 m<sup>3</sup>. (Dolce, Pompeo, 2002, p.153)

Essa primeira articulação tem como propósito institucionalizar a fórmula para o cálculo de volume de um cubo, expressa como:

$$V_{cubo} = a^3,$$

Sendo,

$V_{cubo} \rightarrow$  volume do cubo

$a \rightarrow$  Aresta do cubo.

E a fórmula para calcular o volume de um prisma, definida como:

$$V_{prisma} = A_b \cdot h,$$

Sendo,

$V_{prisma} \rightarrow$  volume do prisma

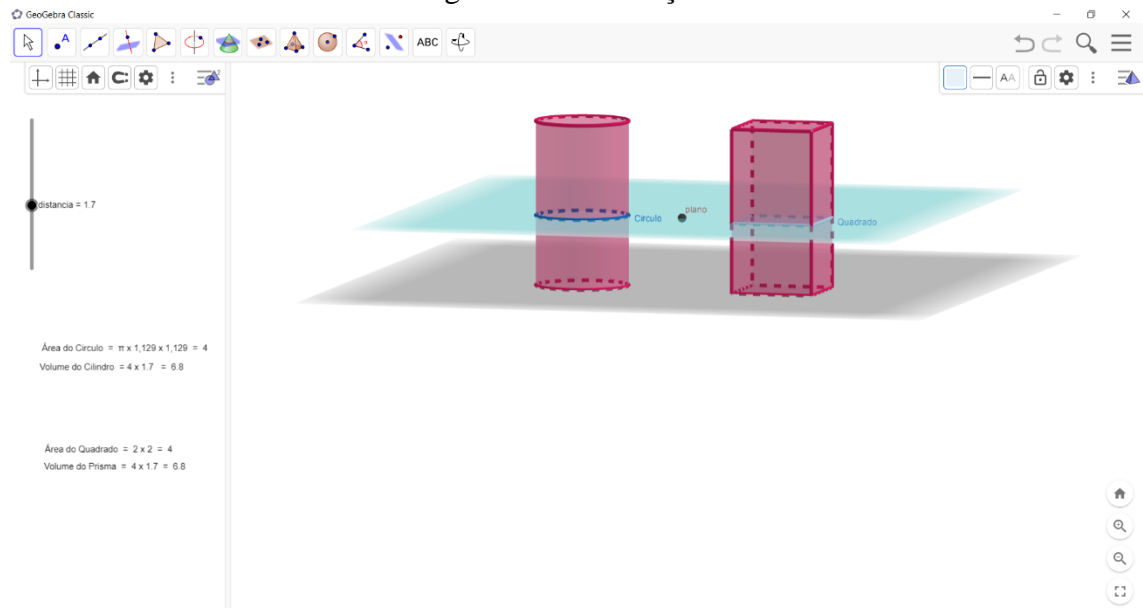
$A_b \rightarrow$  Área da base

$h \rightarrow$  Altura.

Ao generalizar a área da base, torna-se possível desenvolver a fórmula de volume para outros tipos de prismas. Além disso, essa abordagem promove a compreensão da definição geral de volume.

## Articulação II

Figura 13: Articulação II



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Na segunda fase da abordagem, faz-se uso do arquivo "Volume do Cilindro.ggb". Após estabelecer a relação anterior, explora-se o volume de um sólido com bases circulares, o que pode suscitar dificuldades de interpretação pelos alunos. Como discutido previamente, o volume é calculado em termos de quantos cubos de 1 unidade cabem no interior do sólido. Contudo, a presença de bases arredondadas no cilindro dificulta o posicionamento perfeito desses cubos. Para superar esse desafio, recorre-se ao Princípio de Cavalieri, que demonstra que um prisma de base retangular com a mesma área da base e altura equivalente a um cilindro possui o mesmo volume. Assim, ao calcular o volume de um cilindro, utiliza-se a mesma relação para o volume de um prisma, adaptando-a à área da base do cilindro. Isso pressupõe que os alunos possuam conhecimentos prévios adquiridos em estudos de geometria plana, permitindo concluir que:

$$V_{cilindro} = A_b \cdot h,$$

Sendo,

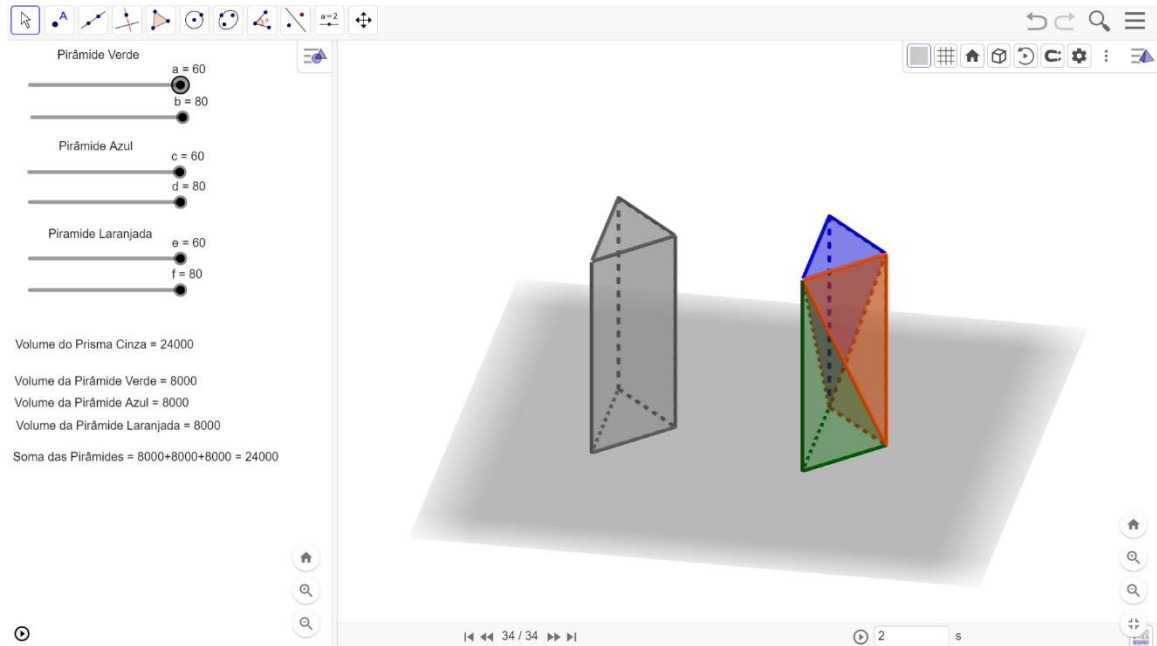
$V_{cilindro} \rightarrow$  volume do cilindro

$A_b \rightarrow$  Área da base ( $\pi r^2$ )

$h \rightarrow$  Altura.

## Articulação III

Figura 14: Articulação III

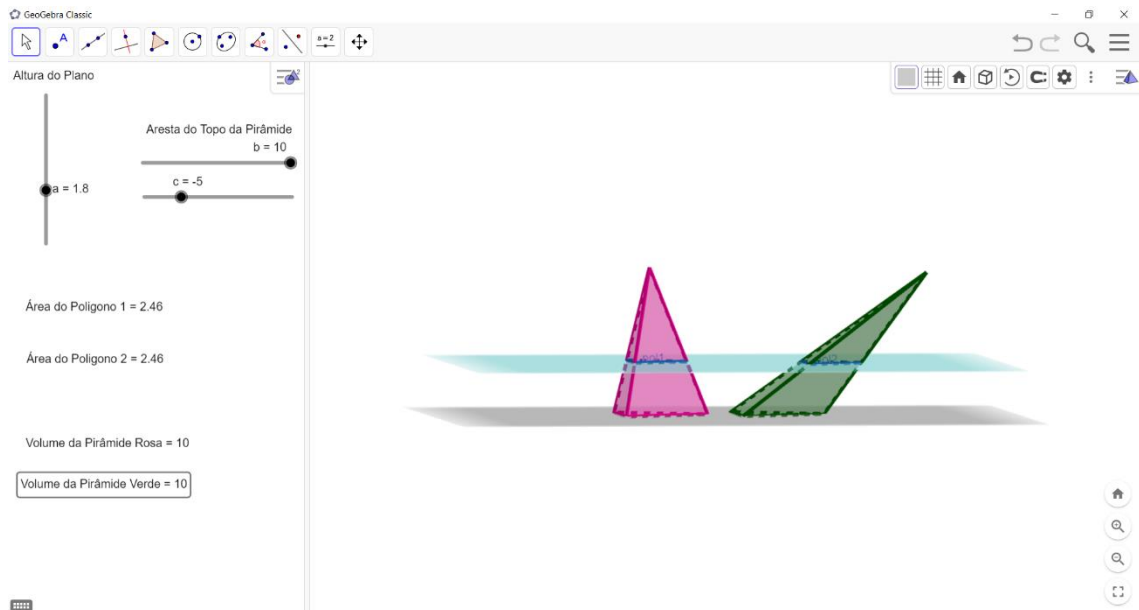


Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Na terceira etapa da articulação, utiliza-se o arquivo "Volume da Pirâmide - 1.ggb", que possibilita analisar a relação de volume em uma pirâmide. Observa-se que uma pirâmide de base triangular pode ser inscrita três vezes em um prisma triangular, e o volume de uma dessas pirâmides é equivalente a um terço do volume total do prisma. No entanto, é crucial notar que essas três pirâmides não são geometricamente idênticas, embora compartilhem o mesmo volume.

## Articulação IV

Figura 15: Articulação IV



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Para aprofundar a compreensão da relação anterior, recorre-se ao arquivo "Volume da Pirâmide - 2.ggb". Por meio desse recurso, é possível examinar com mais detalhes uma propriedade crucial para o cálculo de volume, a altura. A investigação compara pirâmides com arestas da base fixas, todas com a mesma área da base, mas com a capacidade de reposicionar o vértice por meio de controles deslizantes, mantendo a coordenada do eixo Z constante. Esse experimento destaca que a altura de um sólido é medida em relação ao plano da base e é ortogonal a esse plano. Assim, sólidos retos e oblíquos compartilham a mesma altura se a distância entre o vértice superior e a área da base tiverem a mesma medida, os volumes são iguais.

Até o momento, a análise se restringiu a pirâmides de base triangular, estabelecendo que seu volume pode ser definido como:

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} A_b \cdot h,$$

Sendo,

$V_{piramide}$  → volume da piramide de base triangular

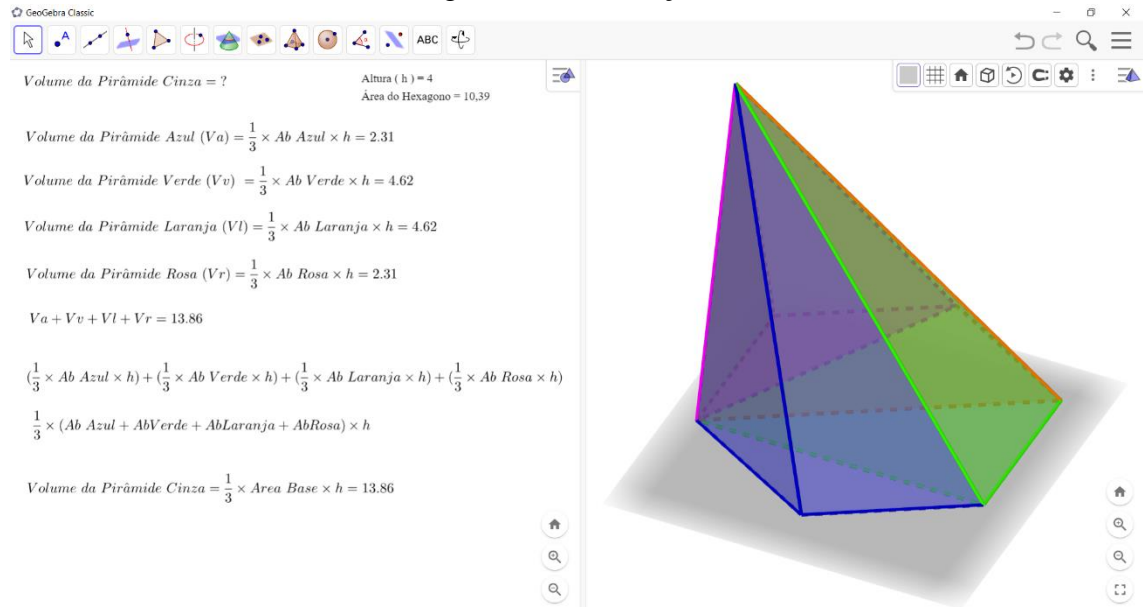
$A_b$  → Área da base triangular

$h$  → Altura.

No entanto, é importante notar que uma pirâmide pode ter várias formas de base. Para dar conta deste detalhe, temos a articulação a seguir.

## Articulação V

Figura 16: Articulação V



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Para generalizar essa relação, recorre-se ao arquivo "Volume da Pirâmide - 3.ggb", onde uma pirâmide de base hexagonal é decomposta em quatro pirâmides de base triangular. Dado que a área da base de uma pirâmide foi previamente estabelecida, pode-se afirmar que a soma dos volumes das quatro pirâmides equivale ao volume total da pirâmide hexagonal. Portanto, ao somar o volume de todas as pirâmides, verifica-se que a relação anterior,  $V_{piramide} = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ , é válida para qualquer pirâmide. Logo:

$$V_{piramide} = \frac{1}{3} A_b \cdot h,$$

Sendo,

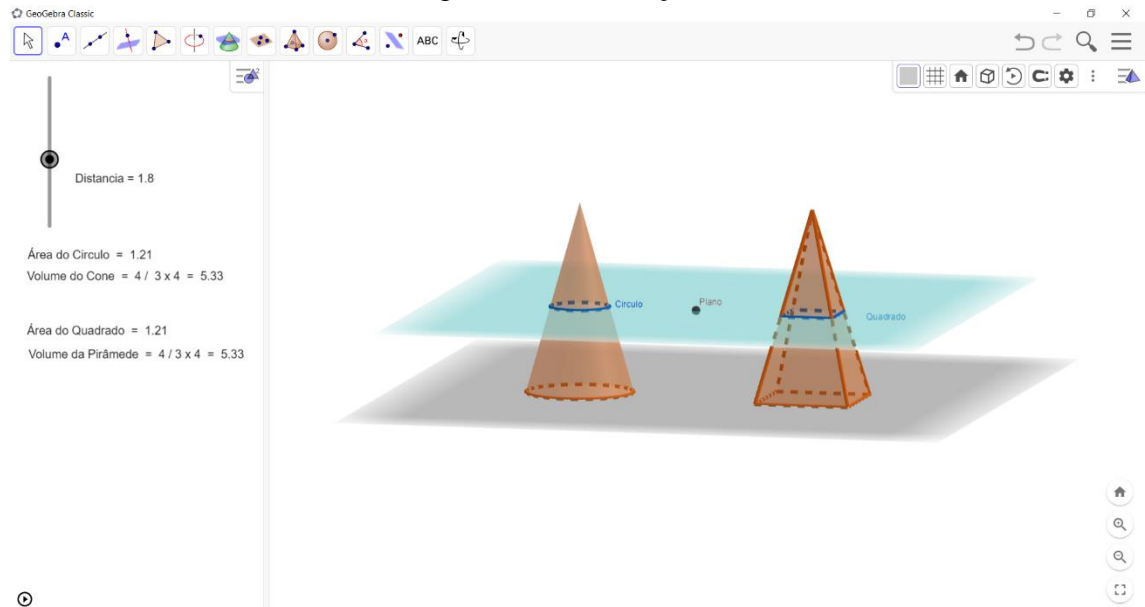
$V_{piramide} \rightarrow$  volume da piramide qualquer

$A_b \rightarrow$  Área da base

$h \rightarrow$  Altura.

## Articulação VI

Figura 17: Articulação VI



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Na subsequente apresentação, recorre-se ao arquivo "Volume do Cone.ggb" para estabelecer a fórmula utilizada para calcular o volume de um cone, recorreremos a utilização do Princípio de Cavalieri novamente, aplicado ao volume de um cone. Esse projeto fundamenta-se na relação entre dois sólidos com a mesma base e altura, especificamente um cone e uma pirâmide. Conclui-se, de acordo com o princípio mencionado, que os volumes desses sólidos são equivalentes, assim por transitividade o volume de um cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} A_b \cdot h,$$

Sendo,

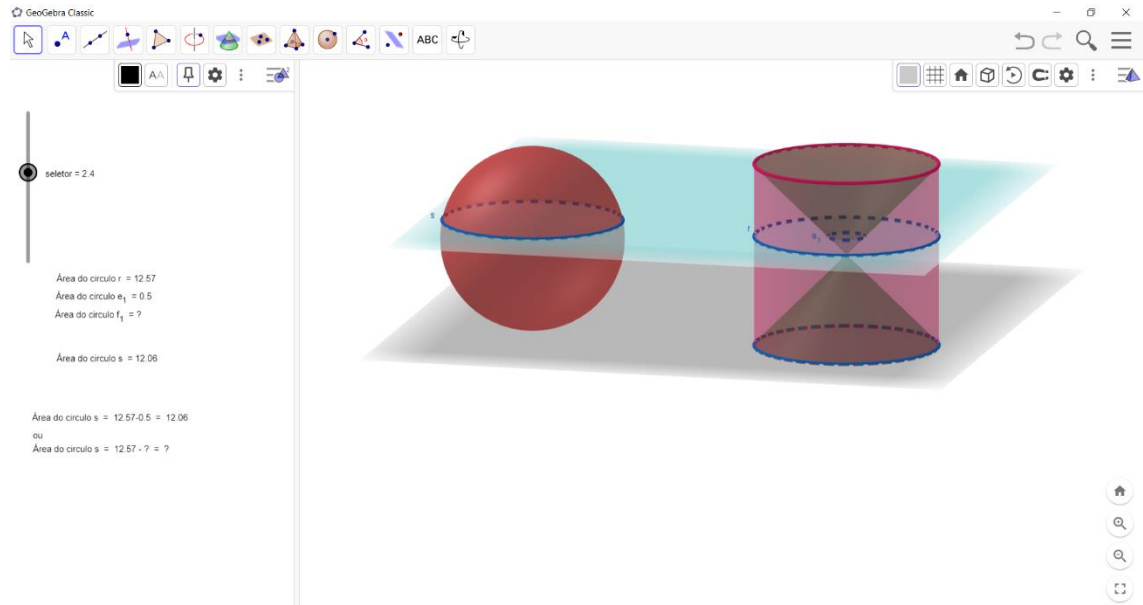
$V_{cone} \rightarrow$  volume do cone

$A_b \rightarrow$  Área da base

$h \rightarrow$  Altura.

## Articulação VII

Figura 18: Articulação VII



Fonte: elaborado pelo autor, a partir do software GeoGebra

Na etapa final da sequência de ensino, utiliza-se o arquivo "Volume da Esfera.ggb" para examinar o volume de uma esfera empregando o Princípio de Cavalieri. Manuseando-se uma esfera com um raio específico e um cilindro com o raio da base igual ao raio da esfera e altura equivalente a duas vezes o raio da esfera, tendo inscrito nesse cilindro dois cones que compartilham a base superior e inferior deste cilindro e tem alturas igual ao raio da esfera, de modo que os vértices de cada cone se interseccionam no mesmo ponto. O sólido resultante pela subtração do volume dos cones e o volume do cilindro é denominado anticlépsidra e, de acordo com o Princípio de Cavalieri, possui o mesmo volume que a esfera. Por transitividade a fórmula para o volume da anticlépsidra pode ser utilizada para calcular o volume da esfera. Considerando que  $V_{cilindro} = A_b \cdot h$  e  $V_{cone} = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ , utilizando a fórmula de acordo com as informações presentes na articulação, pode-se calcular o volume da anticlépsidra e encontrar a fórmula para o volume da esfera. Como ver-se abaixo:

Supondo que o raio da esfera seja  $r$ , pode-se dizer sobre o cilindro as seguintes definições,

$$A_b = \pi r^2$$

$$h = 2r.$$

Logo, volume é dado por  $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V_{cilindro} = 2\pi r^3$ .

Do mesmo modo, os cones terão as seguintes configurações para o problema,

$$A_b = \pi r^2$$



$$h = r.$$

Logo, volume é dado por  $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^3$ .

Sendo assim, o volume da anticlépsidra é dado por:

$$V_{anticlépsidra} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$$

$$V_{anticlépsidra} = 2\pi r^3 - 2\frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_{anticlépsidra} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V_{anticlépsidra} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

portanto, o volume da esfera de raio  $r$  é dado pela fórmula:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Note que, ao seguir para uma nova articulação, utiliza-se como ferramenta para desenvolver um novo conhecimento, mecanismos produzidos nas articulações anteriores, desta maneira, busca-se criar uma linha de raciocínio sequencial na concretização das fórmulas utilizadas para calcular o volume de cada sólido geométrico trabalhado, esta relação proporcionada intencionalmente tem o intuito de dar significado e profundidade as maneiras de calcular o volume dos sólidos geométricos, busca desvencilhar-se da prática de decorar as variáveis presentes nas fórmulas, ao invés disto, proporciona que o discente atribua um significado para cada uma das variáveis presentes nas fórmulas, o motivo destas variáveis estarem presentes no cálculo, compreenda o propósito dessas variáveis nos cálculos e adquira autonomia para desenvolver as fórmulas, promovendo assim uma aprofundamento sobre o assunto e garantindo o entendimento mais completo sobre a lógica matemática por trás destes mecanismos utilizados como algoritmo de resolução de volume dos sólidos geométricos.

## 7. RESULTADO E ANÁLISES

A avaliação diagnóstica presente no **APÊNDICE A**, foi desenvolvido para verificar a eficácia da sequência de ensino apresentada anteriormente, este questionário foi desenvolvido em sete blocos, cada bloco com interesses específicos de avaliação. O bloco 1, que vai das questões de 1 a 2, tem o objetivo de constatar a experiência prévia de cada aluno com o conteúdo de abordagem da proposta. A primeira questão do bloco um, buscava saber se o aluno já havia estudado geometria espacial antes, o aluno deveria marcar sim ou não. A segunda questão do bloco 1, era objetiva sem múltipla escolha, e pedia para que o aluno escrevesse o que ele soubesse sobre o que é o volume de sólidos geométricos.

Do bloco 2 ao 7, cada um destes agrupamentos apresenta 5 perguntas, o bloco 2 aborda sobre o cubo, o bloco 3 investiga os conhecimentos a respeito do prisma, o bloco 4 trata-se do cilindro, o bloco 5 avalia sobre pirâmide e os blocos 6 e 7 ajudam a sondar sobre cone e esfera, respectivamente. As questões presentes em cada bloco têm a mesma função. A primeira questão do bloco tem o intuito de saber se o aluno conhece o sólido através do seu substantivo, ou seja, se o aluno reconhece um sólido através do nome deste sólido, o aluno deveria marcar sim ou não. A segunda questão do bloco tem a função de saber se o aluno já conhece a fórmula utilizada para calcular o volume de cada um dos sólidos trabalhados na sequência, está também apresentava suas alternativas para o aluno marcar, sim ou não. A terceira questão de cada bloco pede para que o aluno escreva a fórmula utilizada para calcular o volume do sólido caso o aluno saiba a fórmula, essa questão era objetiva sem múltipla escolha, o aluno deveria escrever a fórmula no espaço destinado a resposta. A quarta questão do bloco pergunta se o aluno sabe calcular o volume de cada sólido, ou seja, se ele sabe utilizar a fórmula, o aluno deveria marcar sim ou não. E por último, a quinta questão de cada bloco solicita para que o aluno calcule o volume do sólido apresentado na questão, sendo objetiva sem múltipla escolha e o aluno deveria fazer o cálculo no espaço reservado a resposta.

As respostas do teste foram sistematicamente registradas em uma tabela, com os blocos de perguntas claramente separados. Cada aluno ocupa uma linha da tabela e tem suas respostas individuais separadas em colunas correspondentes às questões presentes em cada bloco da tabela do questionário da primeira aplicação, as respostas discursivas aparecerão nas tabelas como “Resposta correta”, “Resposta incorreta”, “Resposta parcialmente correta” e “Em branco”, de acordo com a resposta obtida no questionário. As respostas parcialmente corretas correspondem ao caso em que o aluno usa a fórmula corretamente, mas erra na aritmética da solução ou quando o aluno escreve o conceito parcialmente correto ou ainda se o aluno comete

algum equívoco na estrutura da fórmula mais realizando os cálculos ele reordena as variáveis e chega ao resultado correto. Esses dados obtidos na avaliação dos questionários são fundamentais para análise e compreensão das percepções e conhecimentos dos participantes em relação aos objetivos de cada conjunto de questão. Estas informações estão apresentadas abaixo.

Quadro 3: Bloco 1 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário		
Bloco 1 – Experiencia prévia do aluno		
	Resposta da questão 1	Resposta da questão 2
Aluno 1	Não	Em branco
Aluno 2	Não	Em branco
Aluno 3	Não	Em branco
Aluno 4	Não	Em branco
Aluno 5	Não	Em branco
Aluno 6	Não	Em branco
Aluno 7	Não	Em branco
Aluno 8	Não	Em branco
Aluno 9	Não	Em branco
Aluno 10	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Com isso, de acordo com as respostas obtidas no bloco 1, verifica-se que 100% dos alunos que participaram da pesquisa não haviam estudado geometria espacial anteriormente. Além disso, a segunda questão, que solicitava que eles escrevessem a respeito do que sabiam sobre o volume de sólidos geométricos, foi deixada em branco por todos eles, deixando claro que não tinham muita relação com o conteúdo.

Quadro 4: Bloco 2 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 2 - Conhecimentos sobre Cubo					
	Resposta da questão 3	Resposta da questão 4	Resposta da questão 5	Resposta da questão 6	Resposta da questão 7
Aluno 1	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 8	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Ao avaliar as respostas obtidas no bloco 2, percebe-se que 90% dos alunos associam o sólido geométrico ao nome dado a ele, apenas um aluno não reconhecia o cubo pelo seu substantivo, porém, nenhum deles sabia a fórmula utilizada para calcular o volume deste sólido, sendo assim, nenhum deles escreveu esta fórmula, conseqüentemente não sabiam calcular o volume de um cubo e não foram capazes de calcular o volume do cubo presente no bloco 2.

Quadro 5: Bloco 3 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 3 - Conhecimentos sobre Prisma					
	Resposta da questão 8	Resposta da questão 9	Resposta da questão 10	Resposta da questão 11	Resposta da questão 12
Aluno 1	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 8	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Não	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Quando se tratou do prisma, nenhum aluno conhecia o sólido através do nome, nenhum deles também conhecia a fórmula para calcular o volume de um prisma, conseqüentemente não souberam reproduzir a fórmula, não sabiam calcular o volume de um prisma e não encontraram o volume do prisma apresentado no bloco.

Quadro 6: Bloco 4 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 4 - Conhecimentos sobre Cilindro					
	Resposta da questão 13	Resposta da questão 14	Resposta da questão 15	Resposta da questão 16	Resposta da questão 17
Aluno 1	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Sim	Não	Em branco	Sim	Resposta incorreta
Aluno 8	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Não	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Sobre o cilindro, de acordo com as respostas obtidas no bloco 4, 60% dos alunos afirmavam reconhecer um cilindro através do seu nome, porém nenhum deles sabia a fórmula que poderia ser utilizada para encontrar o volume deste sólido, desse modo todos deixaram o espaço para apresentar a fórmula em branco, quando perguntado se sabiam calcular o volume de um cilindro, o Aluno 7 respondeu que sim em seu questionário, e tentou calcular o volume do cilindro apresentado na questão seguinte, porém, o que ele fez foi multiplicar o raio da base pela altura e dividir por dois, portanto, não obteve êxito em seus cálculos. Então conclui-se que nenhum aluno conhecia a fórmula para o volume do cilindro sendo assim, não conseguiram encontrar a resposta quando solicitados a calcular o volume de um cilindro presente neste bloco.

Quadro 7: Bloco 5 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 5 - Conhecimentos sobre Pirâmide					
	Resposta da questão 18	Resposta da questão 19	Resposta da questão 20	Resposta da questão 21	Resposta da questão 22
Aluno 1	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 8	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Baseando-se nas respostas entregues pelos alunos, pode-se dizer que todos conheciam uma pirâmide pelo seu nome, porém, nenhum deles sabia a fórmula para calcular seu volume, não sabiam calcular o volume de uma pirâmide, deixaram em branco as questões que perguntavam a fórmula do volume de uma pirâmide e não calcularam o volume do sólido presente neste conjunto de questões.

Quadro 8: Bloco 6 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 6 - Conhecimentos sobre Cone					
	Resposta da questão 23	Resposta da questão 24	Resposta da questão 25	Resposta da questão 26	Resposta da questão 27
Aluno 1	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Sim	Não	Em branco	Sim	Resposta incorreta
Aluno 8	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Considerando as respostas fornecidas pelos alunos, é possível afirmar que todos tinham conhecimento do objeto cone. No entanto, nenhum deles estava familiarizado com a fórmula necessária para calcular o volume desse sólido, resultando na omissão da resposta ao deixarem o espaço destinado à apresentação da fórmula em branco. O curioso é que o Aluno 7, afirmou que sabia calcular o volume do cone em seu questionário e tentou realizar o cálculo na questão subsequente. No entanto, ele realizou o cálculo de forma semelhante ao que havia feito no bloco 4, multiplicou o raio da base pela altura e dividiu por dois, levando-o ao resultado incorreto. Isso leva à conclusão de que nenhum aluno estava familiarizado com a fórmula correta para o volume do cilindro, impedindo-os de encontrar a resposta quando solicitados a calcular o volume de um cone neste bloco.

Quadro 9: Bloco 7 - Primeira Aplicação

Primeira Aplicação do Questionário					
Bloco 7 - Conhecimentos sobre Esfera					
	Resposta da questão 28	Resposta da questão 29	Resposta da questão 30	Resposta da questão 31	Resposta da questão 32
Aluno 1	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 4	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Sim	Em branco	Não	Em branco
Aluno 6	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 7	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 8	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 9	Não	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 10	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

De acordo com as respostas obtidas no bloco 7, 70% dos alunos afirmaram reconhecer uma esfera, ao analisar a segunda pergunta deste bloco, o Aluno 5 é o único que respondeu saber calcular o volume de uma esfera, porém ele não escreveu a fórmula na questão seguinte e nem mesmo respondeu o volume da esfera presente no fim do questionário, baseando-se nas respostas seguintes deste aluno no bloco 7, não é possível afirmar que o mesmo possui tais habilidades para calcular o volume de uma esfera, porém, como este afirma que não estudou previamente o conteúdo, e não sabia a fórmula para o volume dos sólidos anteriores, possivelmente este aluno confundiu-se em sua resposta. Então, pode-se concluir para este bloco que nenhum dos alunos apresentou a fórmula para o volume de uma esfera e não foram capazes de calcular o volume da esfera presente no questionário.

Baseando-se nos dados coletados após a primeira aplicação, pode-se afirmar que os alunos não detinham habilidades importantes para o cálculo do volume de sólidos geométricos e também não tinham muita familiaridade com o conteúdo de geometria espacial, os sólidos mais associados a monumentos e objetos do dia a dia como pirâmide e cone eram do conhecimento dos entrevistados, porém, nomes menos utilizados no dia a dia como prisma e cilindro eram desconhecidos pelos alunos, ou pelo menos, os objetos não eram associados ao nome técnico daquela forma.

Após a aplicação da avaliação diagnóstica, os alunos foram submetidos a três encontros os quais tiveram contato com a proposta sequencial de ensino apresentada por esta pesquisa, a sequência serviu para auxiliar na exploração do assunto sobre cálculo de volume dos sólidos geométricos. Durante esses encontros, conceitos básicos de volume de sólidos geométricos foram apresentados a eles, assim como a elaboração das fórmulas que poderiam ser utilizadas

para calcular o volume de cada um dos sólidos presentes na sequência de ensino. O responsável pela pesquisa manipulava as articulações e os alunos percebiam através da manipulação dos objetos via software e contribuíam na produção das fórmulas, posteriormente faziam anotações em seus materiais próprios para avançar para a próxima articulação. Ao final da sequência de ensino os alunos participaram de um outro encontro onde foi aplicado novamente o mesmo questionário a fim de comparar se havia tido evolução após participarem das aulas com a utilização da sequência de ensino proposta. Os alunos realizaram a tarefa e os resultados serão apresentados abaixo.

Os dados serão apresentados novamente em tabelas divididas em seções, conforme visto sobre a primeira aplicação. Assim como na primeira análise, as respostas discursivas aparecerão nas tabelas como “Resposta correta”, “Resposta incorreta”, “Resposta parcialmente correta” e “Em branco”, de acordo com a resposta obtida no questionário, as respostas parcialmente corretas corresponde ao caso em que o aluno usa a fórmula corretamente, mas erra na aritmética da solução ou quando o aluno escreve o conceito parcialmente correto ou ainda se o aluno comete algum equívoco na estrutura da fórmula mais realizando os cálculos ele reordena as variáveis e chega ao resultado correto. Posteriormente, essas questões serão comentadas logo após o fim da apresentação dos dados em forma de tabela.

Quadro 10: Bloco 1 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário		
Bloco 1 – Experiência prévia do aluno		
	Resposta da questão 1	Resposta da questão 2
Aluno 1	Sim	Resposta correta
Aluno 2	Sim	Resposta correta
Aluno 3	Sim	Resposta correta
Aluno 4	Sim	Resposta correta
Aluno 5	Sim	Resposta correta
Aluno 6	Sim	Resposta correta
Aluno 7	Sim	Resposta correta
Aluno 8	Sim	Resposta correta
Aluno 9	Sim	Resposta correta
Aluno 10	Sim	Resposta correta

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Ao analisar as respostas obtidas no bloco 1 após a intervenção com a sequência de ensino, percebe-se uma considerável evolução, obviamente a primeira questão todos responderam positivamente, pois o objetivo da questão era saber se já haviam estudado geometria espacial antes, e como havia tido aulas sobre o assunto naquele período, todos responderam que sim. Ademais, a segunda questão deste bloco pedia aos alunos que



escrevessem um pequeno conceito sobre o que era o volume dos sólidos geométricos, e diferente da primeira resposta ao bloco um, onde todos deixaram em branco, desta vez todos responderam de forma satisfatória e coerente ao tema. Veja alguns exemplos abaixo.

Figura 19: Questão 2 - Aluno 4

2) Escreva o que você sabe sobre volume de sólidos geométricos?  
 O volume é a parte interna de um  
 Sólido geométrico

Fonte: Autor

Figura 20: Questão 2 - Aluno 7

2) Escreva o que você sabe sobre volume de sólidos geométricos?  
 O volume é o espaço que cada  
 uma das figuras geométricas  
 ocupam.

Fonte: Autor

Figura 21: Questão 2 - Aluno 9

2) Escreva o que você sabe sobre volume de sólidos geométricos?  
 Volume é tudo aquilo que cabe dentro de uma figura.

Fonte: Autor

Figura 22: Questão 5 - Aluno 10

2) Escreva o que você sabe sobre volume de sólidos geométricos?  
 É o estudo de objetos geométricos no espaço ou  
 seja em um universo tridimensional

Fonte: Autor

As imagens acima são respostas obtidas para a questão 2, como já foi dito anteriormente o objetivo da questão era saber o que os alunos entendiam sobre o conceito de volume de sólidos geométricos, nota-se que as respostas foram adequadas, de maneira mais rigorosa deveria ser feita a diferenciação entre objeto tridimensional e figura geométrica, alguns alunos chamam os objetos tridimensionais de figuras e esta nomenclatura é utilizada para com mais precisão para objetos bidimensionais, apesar disso as respostas são consideradas corretas para esta análise.

Quadro 11: Bloco 2 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 2 - Conhecimentos sobre Cubo					
	Resposta da questão 3	Resposta da questão 4	Resposta da questão 5	Resposta da questão 6	Resposta da questão 7
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 2	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 4	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 6	Sim	Sim	Resposta parcialmente correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta parcialmente correta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 10	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta parcialmente correta

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Sobre o bloco 2, na segunda aplicação do caderno de questões, obteve-se também uma evolução notável, de acordo com as respostas obtidas, todos os alunos afirmam reconhecer o sólido pelo seu nome e a fórmula utilizada para calcular o seu volume, ao apresentar a fórmula na questão seguinte, 20% dos alunos se equivocaram ao apresentar a fórmula, outros 20% apresentaram a fórmula com alguns pequenos problemas e 60% apresentaram a fórmula corretamente. Quando questionados se saberiam utilizara a fórmula para encontrar o volume de um cubo, todos foram confiantes em suas respostas, afirmando serem capaz de realizar esta tarefa, mesmo aqueles que disseram não saber a fórmula, e ao calcular o volume do cubo na

questão seguinte, apenas 1 aluno não resolveu corretamente, 80% dos alunos responderam parcialmente correto e 10% responderam corretamente.

Veremos alguns exemplos de respostas obtidas corretamente, parcialmente corretas e incorretas e será comentado aspectos importantes observados sobre elas logo em seguida.

Figura 23: Questão 5 - Aluno 2 (Resposta Incorreta)

5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

$$A_b = a \cdot a^3$$

Fonte: Autor

Nota-se pela imagem acima que o aluno não compreendeu muito bem a relação entre as arestas para concluir a fórmula utilizada para o cálculo corretamente. Por isso a resposta foi dada como incorreta na correção.

Figura 24: Questão 5 - Aluno 10 (Resposta Incorreta)

5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

$$V = \text{Volume do cubo} \quad a = \text{altura}$$

Fonte: Autor

Outro aluno que também não conseguiu construir a resposta de acordo com o esperado foi o aluno de número 10, o aluno apresenta uma tentativa de esquematizar a resposta, mas acaba não criando algo que faça sentido do ponto de vista matemático para o cálculo de volume de um cubo.

Figura 25: Questão 5 - Aluno 6 (Resposta parcialmente correta)

5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

$$V = A_b \cdot h^3$$

Fonte: Autor

Ainda sobre a questão 5, o aluno 6 quase chegou a uma relação matemática plausível para o cálculo do volume de um cubo, porém, aparentemente esse aluno fez uma mescla das possibilidades das fórmulas e acabou se atrapalhando, esta resposta foi considerada parcialmente correta pois vê-se uma compreensão parcial do que foi apresentado com a sequência de ensino.

Figura 26: Questão 5 - Aluno 7 (Resposta parcialmente correta)

- 5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

$$V = Ab \cdot h \text{ ou } V = a^3$$

Fonte: Autor

O aluno 7 por sua vez, apresentou duas possibilidades para o cálculo do volume de um cubo, uma correta e outra em que a relação entre as arestas não foi muito bem representada, este é mais um exemplo de resposta parcialmente correta.

Figura 27: Questão 5 - Aluno 3 (Resposta correta)

- 5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

$$V = b \cdot h$$

Fonte: Autor

Acima vê-se uma resposta considerada correta onde o aluno constrói a fórmula para calcular o volume de um cubo através da relação entre a área da base e altura do sólido.

Figura 28: Questão 5 - Aluno 5 (Resposta correta)

- 5) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

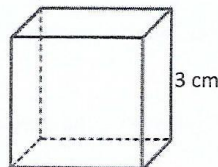
$$V = a^3$$

Fonte: Autor

Esta outra resposta também considerada correta, mostra que o aluno escreve a fórmula para calcular o volume de um cubo através da relação entre as arestas.

Figura 29: Questão 7 - Aluno 7 (Resposta incorreta)

- 7) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cubo abaixo?



$$\begin{aligned} V &= a^2 \\ V &= 3^2 \\ V &= 3 \cdot 3 \\ V &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3 + 3 + 3 \\ &\underline{9} \cdot 3 \\ &12 \end{aligned}$$

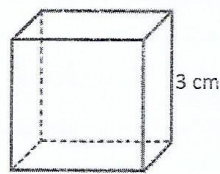
Fonte: Autor

Ao analisar a resposta dada pelo aluno 7 para a 7ª questão, onde deveria ser calculado o volume de um cubo, nota-se que o aluno cometeu alguns erros. Este aluno tinha apresentado duas fórmulas para calcular o volume de um cubo como visto na

Figura 26, e acabou escolhendo a fórmula errada para fazer o cálculo da questão. Além disso, percebe-se que este aluno teve dificuldade até mesmo para calcular de acordo com a formal apresentada por ele. Deixando evidente a falta de habilidades relacionadas a álgebra.

Figura 30: Questão 7 - Aluno 1 (Resposta parcialmente correta)

7) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cubo abaixo?



$$V = a \cdot a \quad Ab = a^2$$

$$V = 3 \cdot 3$$

$$V = 9 \cdot 3$$

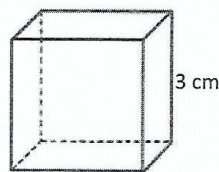
$$V = 27 \text{ cm}^3$$

Fonte: Autor

Algo interessante foi observado na resposta apresentada pelo Aluno 1 em relação a 7ª questão. Percebe-se que o aluno acertou a resposta apesar de ter cometido alguns deslizes ao esquematizar sua estratégia de resolução. Percebeu-se que o aluno compreendeu o processo do cálculo do volume, em que há uma relação entre a área da base e a altura do sólido, mas representou a fórmula para o volume de forma equivocada, o aluno calcula a área da base separadamente e substitui este valor na fórmula do volume como se estivesse relacionado a uma aresta. O aluno cometeu este erro mesmo tendo apresentado a fórmula corretamente na Questão 5. Por esse motivo a questão foi dada como parcialmente correta para a análise dos resultados deste trabalho.

Figura 31: Questão 7 - Aluno 9 (Resposta correta)

7) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cubo abaixo?



$$V = a^3$$

$$V = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$V = 27 \text{ cm}^3$$

Fonte: Autor

Observa-se acima a resposta do Aluno 9 que calculou o volume do cubo, destaca-se que as unidades de medida de volume não foram trabalhadas durante a intervenção e que o aluno colocou a unidade incorreta em seu cálculo, tendo em vista que o foco da análise foi o cálculo, esta resposta foi correta.

Quadro 12: Bloco 3 - Segunda Aplicação

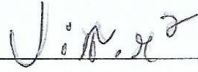
Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 3 - Conhecimentos sobre Prisma					
	Resposta da questão 8	Resposta da questão 9	Resposta da questão 10	Resposta da questão 11	Resposta da questão 12
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 2	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 4	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta correta
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 6	Sim	Não	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 10	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta correta

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

No bloco 3, as respostas analisadas mostram que, 100% dos alunos afirmam reconhecer o sólido em questão e 90% afirmam saber a fórmula utilizada para calcular o volume de prisma. Quando solicitado que escrevessem a fórmula para chegar ao volume deste sólido, apenas 60% dos participantes informaram corretamente a fórmula, o que é intrigante é que apesar desse índice, todos se julgaram capazes de calcular o volume de um prisma na questão seguinte e posteriormente, quando precisavam calcular o volume de um prisma, 60% dos alunos responderam corretamente, parece óbvio já que 60% sabiam a fórmula, mas quando se analisa com atenção, vê-se que não são os mesmos alunos que sabiam a fórmula que estão nestes 60%. Dois alunos que não apresentaram a fórmula corretamente resolveram a questão corretamente e dos 60% que sabiam a fórmula, 6 alunos, 2 responderam parcialmente corretos, ou seja, do total de alunos, 20% responderam parcialmente corretos e o restante, 20%, infelizmente responderam incorretamente. Abaixo será apresentado alguns exemplos destes índices.



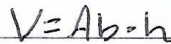
Figura 32: Questão 10 - Aluno 4 (Resposta incorreta)



Fonte: Autor

O aluno 4 apresentou a fórmula para o cálculo do volume de um prisma de forma equivocada, possivelmente se confundiu com a fórmula para calcular a área de um círculo. Este é um exemplo de resposta foi considerada incorreta.

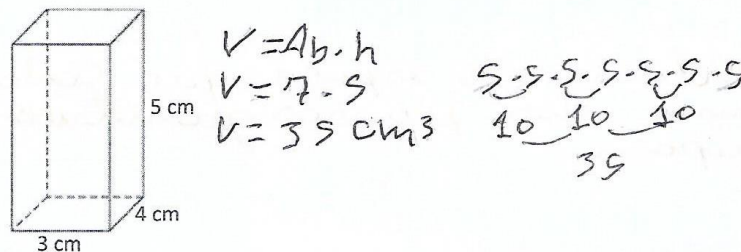
Figura 33: Questão 10 - Aluno 7 (Resposta correta)



Fonte: Autor

A resposta acima apresentada pelo Aluno 7 está de acordo com o que seria esperado para o cálculo de volume de um prisma e foi considerada correta.

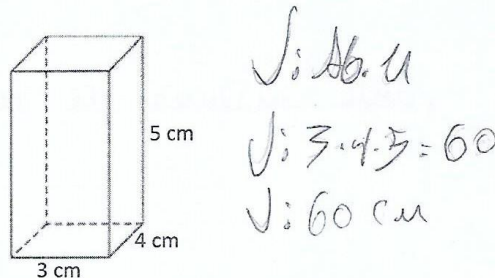
Figura 34: Questão 12 - Aluno 7 (Resposta incorreta)



Fonte: Autor

Porém, o Aluno 7 que tinha dado uma fórmula adequada para o cálculo do volume do prisma, acabou não conseguindo utilizá-la corretamente, percebe-se que ocorreu um erro relacionado aos cálculos apresentados pelo aluno o que o levou ao resultado incorreto.

Figura 35: Questão 12 - Aluno 4 (Resposta correta)



Fonte: Autor

O Aluno 4 que havia dado a fórmula errado anteriormente quando teve que calcular o volume do prisma conseguiu resolver adequadamente inclusive apresentando a fórmula, apenas não representou corretamente o sinal de igualdade no início da fórmula. Observa-se que independente de ter fixado uma fórmula, o aluno pode ter relacionado o que viu durante a sequência de ensino e conseguido fazer a relação corretamente durante o cálculo.

Quadro 13: Bloco 4 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 4 - Conhecimentos sobre Cilindro					
	Resposta da questão 13	Resposta da questão 14	Resposta da questão 15	Resposta da questão 16	Resposta da questão 17
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 2	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 4	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 6	Sim	Não	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 10	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Neste bloco de questões, obtive-se os seguintes resultados, todos os alunos afirmam reconhecer o sólido, mas apenas 70% diz saber a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume dele, dos alunos que afirmaram saber a fórmula, um aluno apresenta a fórmula erroneamente assim como um aluno que afirmou não saber a fórmula, totalizando 20% que não responderam corretamente, então apenas 60% do total de alunos apresentam a fórmula satisfatoriamente. 20% deixaram em branco. apesar dos resultados anteriores, 80% se considerava capaz de encontrar o volume de um cilindro. No entanto, apenas 50% foi realmente capaz de resolver esse problema, 10% resolveram parcialmente correto, 20% resolveram incorretamente e outros 20% deixaram a última questão em branco. veja alguns exemplos do que foi analisado.



Figura 36: Questão 15 - Aluno 9 (Resposta incorreta)

15) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cilindro.

$$V = \frac{1}{3} Ab \cdot h$$

Fonte: Autor

Percebesse que o aluno confundiu a formula para calcular o volume do cilindro com a fórmula para calcular volume de pirâmide ou cone. Por isso foi considerada errada para esta questão.

Figura 37: Questão 15 - Aluno 5 (Resposta correta)

15) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cilindro.

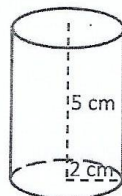
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Fonte: Autor

O Aluno 15 por sua vez, representou corretamente a fórmula que poderia ser utilizada para calcular o volume de um cilindro. Esse é um exemplo de resposta obtida corretamente.

Figura 38: Questão 17 - Aluno 9 (Resposta incorreta)

17) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cilindro abaixo?



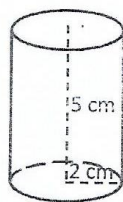
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Ab = H \\ V &= \frac{1}{3} 2 \cdot 5 \\ V &= \frac{1}{3} \cdot 10 \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{1} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Fonte: Autor

A resposta acima é um exemplo de questão respondida incorretamente, o Aluno 9, assim como o Aluno 6, escreveram as fórmulas com um pequeno erro, levando-os a utiliza-las em seguida e calculando errado o volume do cilindro.

Figura 39: Questão 17 - Aluno 5 (Resposta parcialmente correta)

17) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cilindro abaixo?



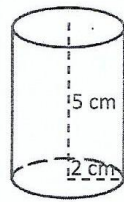
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \\ V &= \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \\ V &= \pi \cdot 15 \cdot 4 \pi \\ V &= \pi \cdot 60 \pi \\ \pi 60 \end{aligned}$$

Fonte: Autor

A resposta acima, dada pelo Aluno 5, mostra que o aluno representou a fórmula corretamente, substituiu os valores adequadamente na fórmula, mas teve problema ao realizar os cálculos. Esta resposta foi considerada parcialmente correta pois o aluno apresentou entendimento sobre o conteúdo, entretanto cometeu um erro de aritmética no momento de resolver.

Figura 40: Questão 17 - Aluno 9 (Resposta correta)

17) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cilindro abaixo?



$$\begin{aligned}V &= \pi \cdot r^2 \cdot h \\V &= \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \\V &= \pi \cdot 4 \cdot 5 \\V &= 20\pi\end{aligned}$$

Fonte: Autor

A resposta vista na imagem acima mostra a resposta do Aluno 9, o qual respondeu corretamente aplicando a fórmula desenvolvida de acordo com a sequência de ensino.

Quadro 14: Bloco 5 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 5 - Conhecimentos sobre Pirâmide					
	Resposta da questão 18	Resposta da questão 19	Resposta da questão 20	Resposta da questão 21	Resposta da questão 22
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 2	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 4	Sim	Sim	Resposta correta	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta correta
Aluno 6	Sim	Não	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 10	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta parcialmente correta

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

O bloco 5 teve os seguintes resultados após a segunda aplicação do caderno de questões, todos os alunos afirmam reconhecer o sólido em questão no tópico, 90% afirma saber a fórmula que pode ser usada para encontrar o volume de uma pirâmide, entretanto, somente 70% realmente escreveram a fórmula corretamente na questão seguinte. Apesar disso, 90% disse saber calcular o volume de uma pirâmide, sendo que o aluno que afirmou não saber calcular o volume escreveu a fórmula corretamente na questão anterior. Este mesmo aluno deixou a questão seguinte em branco e outro aluno respondeu incorretamente. Dos demais alunos 7 encontraram corretamente o volume da pirâmide e um aluno respondeu parcialmente correto. Em porcentagem, 70% responderam corretamente, 10% responderam parcialmente correto, 10% responderam incorretamente e 10% deixaram em branco. veja a seguir algumas respostas dadas pelos alunos comentadas.

Figura 41: Questão 20 - Aluno 10 (Resposta incorreta)

20) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma pirâmide.

$$Ab = \text{Área da Base} = V = \text{Volume da pirâmide}, h = \text{altura}$$

Fonte: Autor

A resposta dada pelo Aluno 10 para a 20ª questão mostra que foi apresentado as variáveis que fazem parte da fórmula, porém a sistematização do cálculo não foi representada, então este é um exemplo de resposta incorreta.

Figura 42: Questão 20 - Aluno 7 (Resposta correta)

20) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma pirâmide.

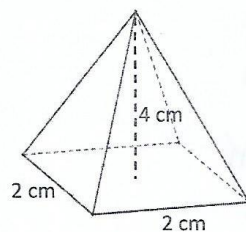
$$V = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h$$

Fonte: Autor

O Aluno 7 por sua vez, representou adequadamente a fórmula, de acordo com o que se pode utilizar para calcular o volume de uma pirâmide. Portanto, considerou-se correta.

Figura 43: Questão 22 - Aluno 10 (Resposta incorreta)

22) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da pirâmide abaixo?



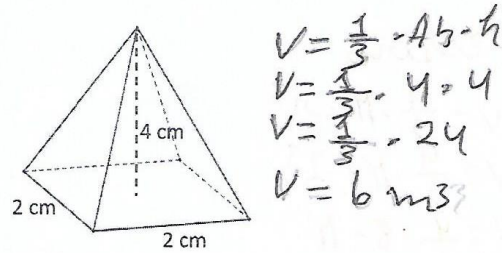
$$\begin{aligned} Ab &= b \cdot h \\ Ab &= 4 \cdot 2 = 8 \\ Ab &= \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 \\ V &= \frac{16}{3} = 5,33 \end{aligned}$$

Fonte: Autor

Observa-se que a resposta acima chega ao resultado correto para o volume da pirâmide, entretanto, percebe-se que o aluno não assimilou adequadamente as relações utilizadas para chegar ao volume de uma pirâmide, este caso isolado o aluno conseguiu chegar ao resultado esperado, mas se o objeto apresentasse dimensões diferentes, a resposta certamente não estaria correta, pois o aluno não relacionou a área da base com suas medidas e cometeu o mesmo erro com a altura, percebe-se que o aluno retomou algumas propriedades no meio do cálculo, apesar de não ter apresentado no início da fórmula, a divisão por  $1/3$ , talvez por ter visto as propriedades durante a sequência de ensino. Esta resposta foi analisada como incorreta para efeito de análise dos dados obtidos.

Figura 44: Questão 22 - Aluno 7 (Resposta parcialmente correta)

22) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da pirâmide abaixo?

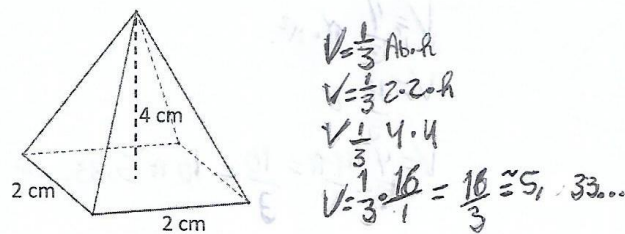


Fonte: Autor

Apesar de ter apresentado a fórmula corretamente o Aluno 7 não conseguiu realizar os cálculos adequadamente, chegando ao resultado errado para o volume da pirâmide, nota-se que ele substituiu corretamente os valores na fórmula, mas houve uma falha na realização das contas. Esta resposta está incorreta para a análise.

Figura 45: Questão 22 - Aluno 9 (Resposta correta)

22) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da pirâmide abaixo?



Fonte: Autor

O Aluno 9 utilizou muito bem a fórmula para calcular o volume de pirâmides, realizou todos os cálculos com maestria e chegou ao resultado esperado para esta questão, logo está é um exemplo de resposta correta para a análise.

Quadro 15: Bloco 6 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 6 - Conhecimentos sobre Cone					
	Resposta da questão 23	Resposta da questão 24	Resposta da questão 25	Resposta da questão 26	Resposta da questão 27
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 2	Sim	Não	Em branco	Não	Em branco
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 4	Sim	Sim	Resposta incorreta	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 6	Sim	Não	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta correta	Não	Em branco
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 10	Sim	Sim	Resposta incorreta	Não	Em branco

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

No penúltimo bloco, as respostas obtidas mostram que 100% dos alunos afirmam reconhecer o sólido abordado, 80% dizem saber a fórmula utilizada para calcular o volume de um cone, porém, somente 50% apresentaram corretamente a fórmula na questão seguinte, enquanto 40% responderam incorretamente, os 10% restante deixaram a resposta em branco. 60% dizem conseguir calcular o volume de uma pirâmide, o restante afirma não saber. Para este bloco nenhum aluno chegou à resposta correta. 40% respondem parcialmente correto, 20% responderam incorretamente e outros 40% deixaram a resposta em branco. veja abaixo algumas respostas comentadas.

Figura 46: Questão 25 - Aluno 5 (Resposta incorreta)

25) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de um cone.

$$Ab \cdot \pi \cdot r^2$$

Fonte: Autor

Nota-se que o Aluno 5 confundiu-se no momento de representar a fórmula para calcular o volume de um cone, a relação não foi realizada corretamente e o aluno aparentemente representou duas vezes a área da base e não relacionou o volume do sólido com a sua altura. Portanto esta resposta está incorreta para fim de análise dos resultados.

Figura 47: Questão 25 - Aluno 1 (Resposta correta)

25) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o

volume de um cone.

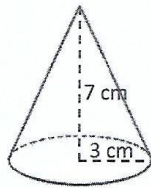
$$V = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h$$

Fonte: Autor

O Aluno 1, por sua vez, representou a fórmula de maneira adequada, conforme a utilizada para calcular o volume de um cone. Assim, a resposta foi considerada correta.

Figura 48: Questão 27 - Aluno 6 (Resposta incorreta)

27) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cone abaixo?



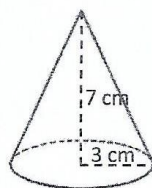
$$\begin{aligned} V &= Ab \cdot h \\ V &= 7^2 \cdot 3 \\ V &= 21 \cdot 3 \\ V &= 93 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Fonte: Autor

Um exemplo de resposta incorreta foi dado pelo Aluno 6, o qual apresentou a fórmula errada e acabou calculando errado o volume de um cone.

Figura 49: Questão 27 - Aluno 5 (Resposta parcialmente correta)

27) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume do cone abaixo?



$$\begin{aligned} Ab &= \pi \cdot b^2 \\ Ab &= \pi \cdot 3^2 \\ Ab &= 9 \cdot \pi \\ V &= \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \pi \cdot 7 \\ V &= 63 \end{aligned}$$

$$V = \frac{63}{3} = 20,28$$

Fonte: Autor

Apesar de não ter representado a fórmula corretamente na questão anterior, percebe-se que o Aluno 5 conseguiu desenvolver bem o cálculo do volume de um cone, mesmo apresentando algumas falhas em seus cálculos nota-se que as propriedades exploradas nas articulações foram resgatadas no desenvolvimento da solução, esta resposta é um exemplo de questão parcialmente correta onde o aluno apresenta ter entendimento dos conceitos, mas falha ao realizar os cálculos. Os demais alunos que responderam parcialmente correto apresentaram



a fórmula corretamente, contudo não realizaram os cálculos adequadamente. Não foram obtidas respostas corretas para este bloco.

Quadro 16: Bloco 7 - Segunda Aplicação

Segunda Aplicação do Questionário					
Bloco 7 - Conhecimentos sobre Esfera					
	Resposta da questão 28	Resposta da questão 29	Resposta da questão 30	Resposta da questão 31	Resposta da questão 32
Aluno 1	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 2	Sim	Sim	Resposta incorreta	Não	Resposta incorreta
Aluno 3	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta parcialmente correta
Aluno 4	Sim	Sim	Resposta incorreta	Não	Em branco
Aluno 5	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 6	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 7	Sim	Sim	Resposta correta	Sim	Resposta correta
Aluno 8	Sim	Sim	Resposta correta	Não	Em branco
Aluno 9	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta
Aluno 10	Sim	Sim	Resposta incorreta	Sim	Resposta incorreta

Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

No último bloco, 100% dos alunos responderam as duas primeiras questões de forma positiva, afirmando conhecerem uma esfera e dizendo saber a fórmula usada para calcular o volume da esfera. Entretanto, 50% soube apresentar a fórmula corretamente e os outros 50% não foram capazes de fazer o mesmo. Do total de alunos, 70% disseram ser capazes de calcular o volume da esfera. Porém, ao fazer isso, somente 20% realmente desenvolveu a resposta corretamente, outros 20% responderam parcialmente correto, 40% responderam incorretamente e os demais 20% deixaram a questão em branco.

Um dos alunos que deixou a prova em branco soube apresentar a fórmula corretamente, porém afirmou não saber calcular o volume. Enquanto dois alunos que apresentaram a fórmula corretamente e disseram saber calcular o volume e chegaram a respostas parcialmente corretas.



Figura 50: Questão 30 - Aluno 2 (Resposta incorreta)

30) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma esfera.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2$$

Fonte: Autor

Verifica-se que o Aluno 2 apresentou a fórmula com uma pequena falha, pois para o volume de uma esfera o raio deve ser elevado ao cubo, então este é um exemplo de resposta incorreta.

Figura 51: Questão 30 - Aluno 7 (Resposta correta)

30) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma esfera.

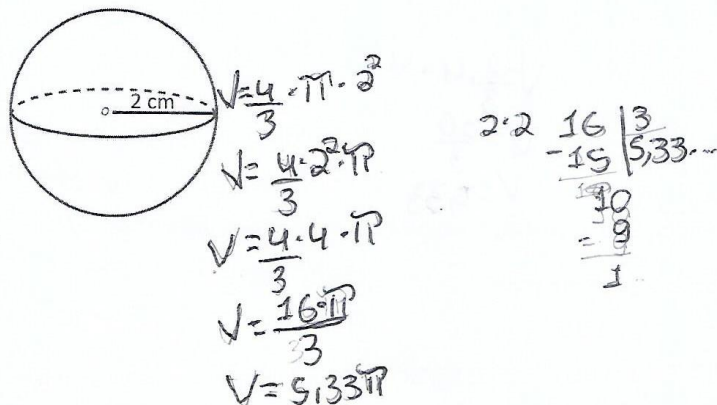
$$\frac{4}{3} \pi r^3$$

Fonte: Autor

O Aluno 7 por outro lado, representou adequadamente a fórmula, todos os termos necessários para os cálculos foram relacionados, apesar do aluno não ter utilizado uma representação para o volume e o sinal de igualdade para a fórmula, considerou-se correta a resposta.

Figura 52: Questão 32 - Aluno 2 (Resposta incorreta)

32) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da esfera abaixo?



The diagram shows a sphere with a radius of 2 cm. To the right of the sphere, the student has written several incorrect formulas for the volume of a sphere:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^2$$

$$V = \frac{4 \cdot 2^2 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 4 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{16 \cdot \pi}{3}$$

$$V = 5,33\pi$$

To the right of these formulas, there is a long division calculation:

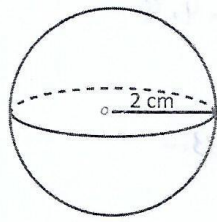
$$2 \cdot 2 \quad 16 \overline{) 3} \\ \underline{-15} \quad 1 \\ \underline{-3} \quad 0 \\ \underline{-0} \quad 0 \\ \underline{-0} \quad 0 \\ 0$$

Fonte: Autor

Como o Aluno 2 representou a fórmula errada, seu resultado final para o volume de uma esfera também está incorreto.

Figura 53: Questão 32 – Aluno 1 (Resposta parcialmente correta)

32) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da esfera abaixo?



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \pi^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot 6 \cdot \pi$$

$$V = \frac{24}{3}$$

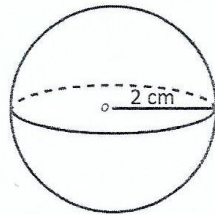
$$V = 12\pi$$

Fonte: Autor

Embora o Aluno 3 tenha apresentado a fórmula corretamente, ele não conseguiu realizar os cálculos de forma adequada, chegando a um resultado incorreto para o volume da esfera. Observa-se que os valores foram substituídos corretamente na fórmula, mas houve um erro na execução dos cálculos. Portanto, essa resposta está incorreta.

Figura 54: Questão 32 - Aluno 5 (Resposta correta)

32) Se a resposta anterior for "Sim", responda. Qual o volume da esfera abaixo?



$$V = \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot \pi$$

$$V = \frac{32}{3}$$

$$V = 10,67$$

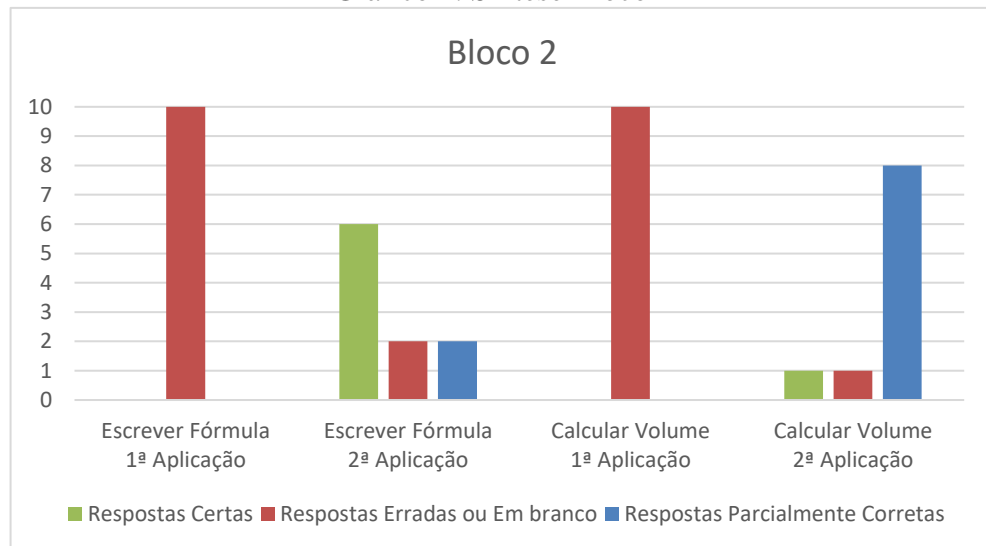
Fonte: Autor

O Aluno 5 utilizou a fórmula para calcular o volume da esfera de maneira eficiente, realizou todos os cálculos corretamente e obteve o resultado esperado para a questão. Portanto, essa é um exemplo de resposta correta.

Serão apresentados a seguir, em formato de gráficos de colunas, a comparação dos resultados obtidos na aplicação da avaliação diagnóstica e no questionário final, contendo o comparativo sobre as questões discursivas dos blocos de 2 a 7, as quais os alunos deveriam escrever a fórmula utilizada para calcular o volume de um determinado sólido e a questão que o discente deveria calcular o volume do sólido determinado. O Bloco 1 não será apresentado através de gráfico por se tratar de questões subjetivas e que tinham o intuito apenas de diagnosticar se os alunos haviam estudado geometria espacial antes e se sabiam o conceito básico de volume de sólidos geométricos, esses dados foram apresentados nas tabelas acima e

mostram a evolução dos alunos, por conter de poucas questões no bloco, é possível fazer a verificação sem muita dificuldade. Os demais blocos por compreender mais itens a serem respondidos, optou-se por fazer as tabelas para melhorar a comparação principalmente em relação a um dos objetivos centrais da proposta sequencial de ensino que é o aprendizado do cálculo do volume dos sólidos geométricos e a construção das fórmulas utilizadas para isso.

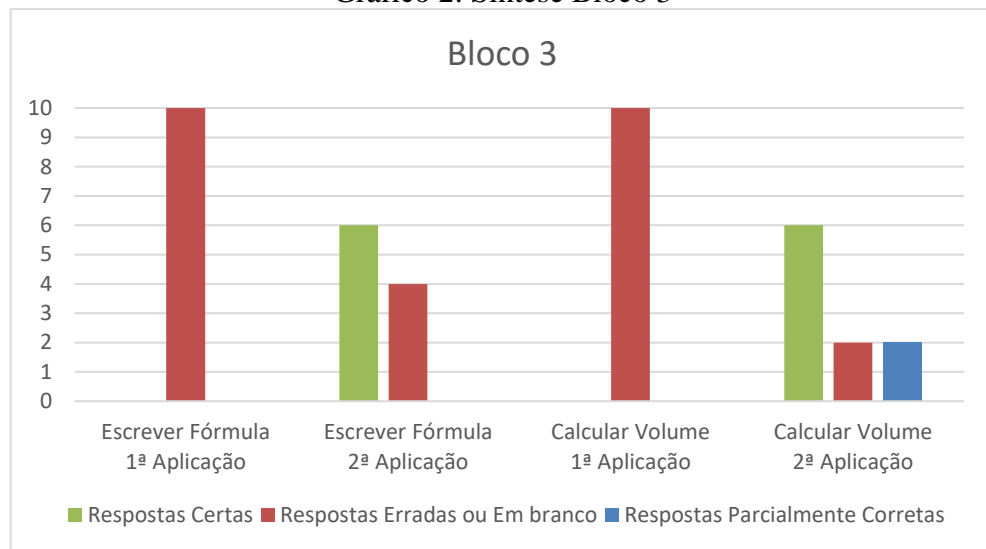
Gráfico 1: Síntese Bloco 2



Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

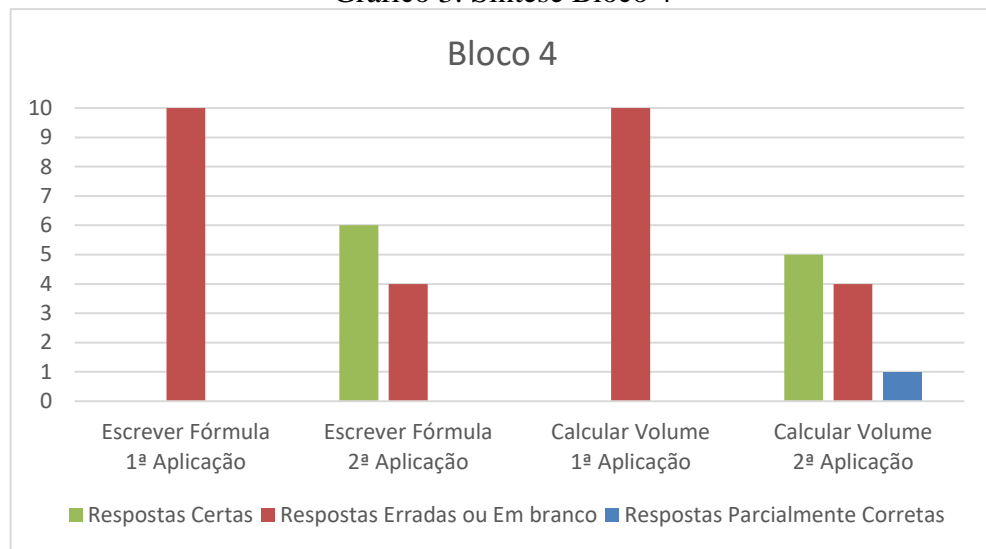
O gráfico acima mostra que da aplicação do **pré-teste** para a aplicação do **pós-teste** houve um avanço significativo na significação da fórmula utilizada para calcular o volume de um cubo, entretanto, a aplicação foi correta desta fórmula foi baixa, apenas um aluno calculou corretamente, enquanto os demais não conseguiram o mesmo feito, a grande maioria apresentou falha durante os cálculos, 8 participantes dos 9 que não responderam corretamente tiveram esta falha.

Gráfico 2: Síntese Bloco 3



O gráfico supracitado mostra a evolução dos participantes em relação ao volume de um prisma, percebe-se que a apresentação da fórmula obteve o mesmo número de resposta corretas que a questão com o mesmo objetivo do bloco anterior, enquanto a utilização da fórmula para calcular o volume apresentou resultados muito melhor comparado ao bloco anterior apesar da relação construída para ambos os sólidos serem parecidas, de acordo com a análise dos cadernos, percebeu-se que o motivo para esses resultados decorreu da potenciação que muitos utilizaram na fórmula do volume do cubo a qual acabaram resolvendo errado e levando um alto índice de questões parcialmente corretas para o cálculo do sólido apresentado no Bloco 2, enquanto para o Bloco 3, por construírem a fórmula utilizando-se somente da operação de multiplicação, os alunos apresentaram maior domínio desta e chegaram a resultados corretos com maior frequência.

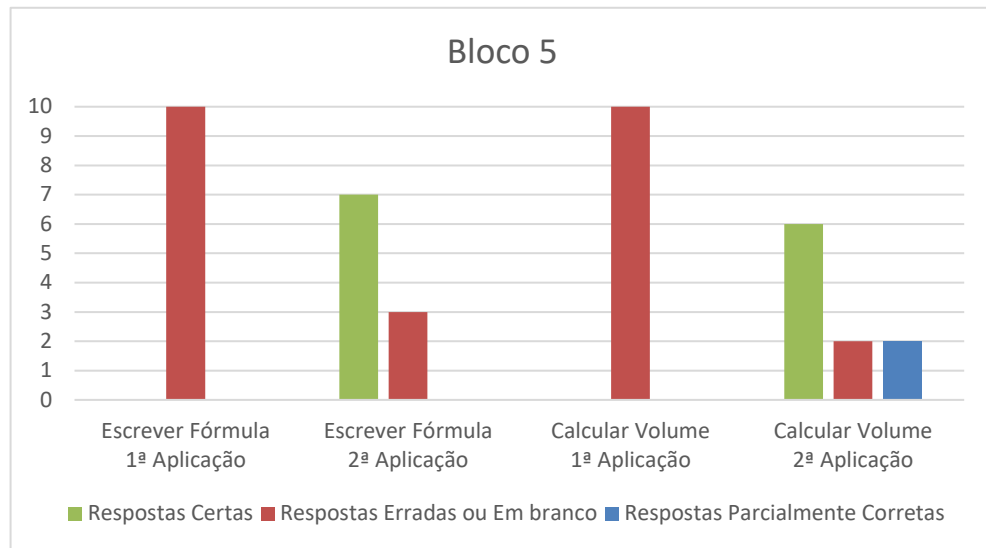
Gráfico 3: Síntese Bloco 4



Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

O gráfico visto acima apresenta o quantitativo de resposta corretas, incorretas e parcialmente corretas para o cálculo de volume de cilindros, nota-se que a fórmula foi representada corretamente por 6 participantes, um avanço considerável levando em conta que na aplicação do **pré-teste** nenhum aluno conhecia a fórmula para calcular o volume deste sólido. A aplicação da fórmula também mostra um avanço significativo comparada a primeira aplicação do teste com a segunda, 5 participantes das pesquisas resolveram corretamente a questão, encontrando o volume do cilindro apresentado no bloco na aplicação do **pós-teste**, visto que nenhum aluno respondeu esta questão na primeira aplicação, este avanço foi significativo.

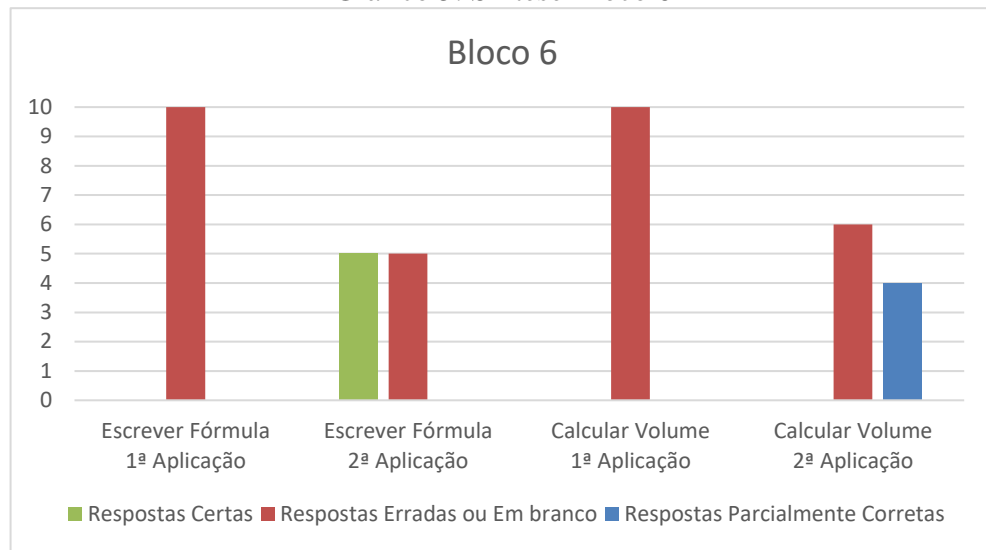
Gráfico 4: Síntese Bloco 5



Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Como observa-se na tabela acima, o Bloco 5 foi o qual apresentou os melhores resultados, com o maior número de resposta corretas nas duas questões apresentadas nos gráficos. É possível observar que os alunos não conheciam uma fórmula para calcular o volume de uma pirâmide assim como não calcular o volume desse sólido. Após a aplicação da proposta sequencial de ensino desenvolvida por [Ferreira \(2020\)](#), observou-se através da aplicação do [pós-teste](#) que 7 dos participantes da pesquisa apresentaram a fórmula corretamente, e durante o cálculo do volume 6 participantes calcularam de forma adequada, nota-se também que 2 participantes responderam parcialmente correto.

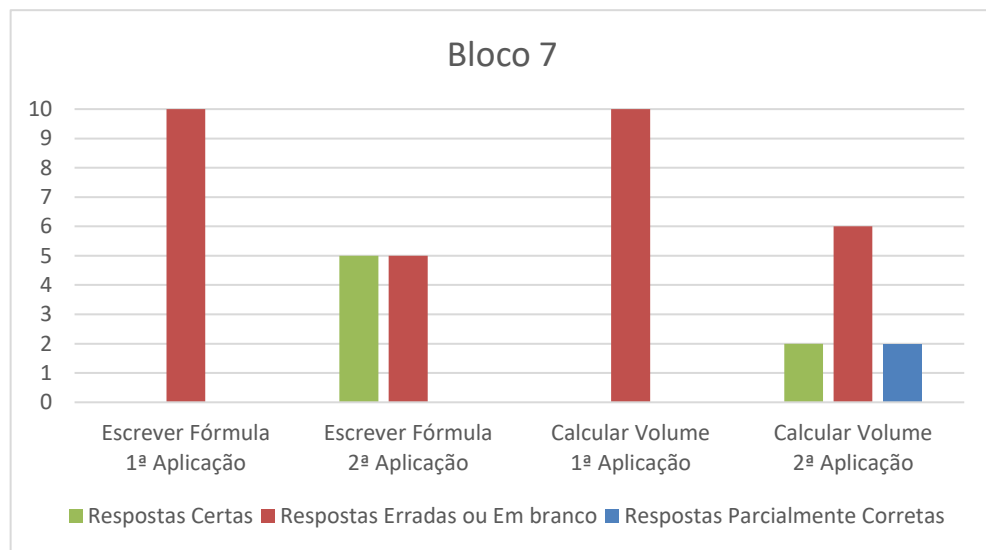
Gráfico 5: Síntese Bloco 6



Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

O Bloco 6, como visto na síntese apresentada no gráfico acima, teve um desempenho baixo quando se trata do cálculo do volume do cone, apesar de 5 participantes da pesquisa terem apresentado a fórmula corretamente, nenhum aluno conseguiu chegar a resposta correta para o volume do sólido estudado neste bloco, apenas 4 participantes apresentaram respostas parcialmente corretas no pós-teste, os quais usaram a fórmula corretamente, substituíram os valores correspondentes na fórmula de forma correta, mas apresentaram falhas durante o cálculo, assim como no Bloco 2, o grande problema observado durante a análise das respostas apresentadas pelos alunos foi a dificuldade em calcular potencias corretamente, o que levou os alunos a resultados incorretos.

Gráfico 6: Síntese Bloco 7



Fonte: Autor, com base nos dados da pesquisa

Para a o último bloco, o gráfico acima mostra que houve um avanço moderado, 5 participantes apresentaram a fórmula corretamente no pós-teste, enquanto na aplicação do pré-teste nenhum dos alunos compreendia este conhecimento. Em relação ao cálculo do volume da esfera, o gráfico expõe que na aplicação do pré-teste os alunos não sabiam calcular o volume deste objeto, e após a aplicação da proposta sequencial de ensino apresentada nesta pesquisa com base em Ferreira (2020), dois alunos conseguiram calcular corretamente e outros dois alunos apresentaram respostas parcialmente corretas, estas respostas não obtiveram êxito por apresentarem falhas durante o cálculo, os alunos começaram a calcular corretamente, mas apresentaram dificuldades em realizar os cálculos, principalmente na potenciação.

Ao analisar os gráficos acima, pode-se visualizar que os alunos não sabiam as fórmulas nem sabiam calcular o volume dos sólidos quando realizaram o pré-teste, este fato foi perceptível para todos os blocos, como visto nos quadros que apresentam os dados obtidos na aplicação do pré-teste, os alunos conheciam pouco sobre o conteúdo, e o que sabiam era superficial sobre o tema. Ao comparar com a segunda aplicação, os dois campos analisados nos gráficos acima, mostram um avanço significativo em relação ao conhecimento teórico de volume, os alunos passaram a desenvolver as fórmulas solicitadas na maioria dos casos, e alguns conseguiram calcular com precisão o volume dos sólidos. Apesar disso, ainda é possível notar que alguns alunos não conseguiram apresentar as fórmulas e que também não foram capaz de calcular o volume dos sólidos, sobre esses casos foi perceptível, com base na correção dos testes, que a maior dificuldade era realizar os cálculos, foi observado que alunos que sabiam as fórmulas acabavam não chegando ao resultado correto na maioria das vezes por realizar as contas de forma equivocada, um problema muito mais relacionado a aritmética e operações



básicas do que a geometria espacial de fato. Em nenhum bloco o número de alunos que não representaram as fórmulas ou apresentaram incorretamente superou o número de alunos que apresentaram as fórmulas corretamente, apesar disso, nos blocos 2, 6 e 7 observa-se que o número de alunos que conseguiram acertar as questões foi bem menor do que a quantidade que as errou, deixaram em branco ou os alunos que acertaram a questão parcialmente, de certa forma as articulações ajudaram os alunos, mas uma dificuldade além da geometria fez com que o rendimento não fosse maior do que o observado.

## 8. CONSIDERAÇÕES

Baseado no que foi exposto, observa-se que a tecnologia e a educação avançam de forma interdependente. As escolas reconhecem a importância que têm na formação dos indivíduos e na sua integração à sociedade contemporânea, buscando constantemente alternativas para a informática educativa e a incorporação das TICs e TDICs por meio de documentos oficiais e outras iniciativas. Contudo, existem muitos desafios para a implementação dessas tecnologias. Ao longo do tempo, diversos projetos e centros dedicados à disseminação da informática educativa foram criados para promover o uso dessas ferramentas. Estudos como este propõem a utilização das tecnologias como instrumentos educacionais, contribuindo para a expansão dessas práticas. [Ferreira \(2020\)](#). Propôs uma sugestão para dar suporte ao estudo do volume dos sólidos geométricos, onde os educadores utilizam tecnologias digitais para auxiliar na transposição dos conteúdos. Entretanto, o método proposto, embora faça uso de tecnologias, não exige que os alunos dominem os softwares utilizados, tampouco que a escola disponibilize muitos computadores. Com apenas um computador e um projetor, o professor pode aplicar a metodologia de ensino sugerida. Além disso, essa abordagem oferece uma exploração aprofundada do conteúdo estudado e organiza esses conhecimentos em uma sequência lógica, visando promover a compreensão das relações entre as fórmulas usadas para calcular volumes dos principais sólidos geométricos. O intuito é reduzir a ênfase na memorização e valorizar as relações matemáticas, apresentando os estudos de forma dinâmica para abranger um público maior.

A aplicação deste trabalho condiz com a realidade observada no local de aplicação, como [Ferreira \(2020\)](#) menciona, a aplicação de forma mais satisfatória seria aquela em que o aluno desenvolve as articulações usadas na proposta sequencial de ensino juntamente com o professor. Esta prática ofereceria maior interação com as articulações, uma vez que o aluno participaria desde o início da construção da proposta sequencial de ensino. Para isso a escola deveria dar suporte com as ferramentas necessária e o mediador deveria ter o domínio necessário para utilizar o software GeoGebra na construção de cada articulação. A dificuldade na aplicação mais adequada para este trabalho foi a parte estrutural da escola, a qual não tem laboratório de informática então a aplicação limitou-se a apresentação da sequência proposta por [Ferreira \(2020\)](#).

Em relação a proposta sequencial de ensino, tendo em vista que a intenção era pôr a prova a sequência criada por [Ferreira \(2020\)](#), optou-se por manter a originalidade das articulações e não desenvolver articulações extras, uma vez que, teoricamente essas seriam as

articulações mínimas necessárias para iniciar e finalizar a abordagem de volumes de sólidos geométricos de maneira sequencial e lógica, de acordo com [Ferreira \(2020\)](#), e caso houvesse a necessidade cada mediador poderia elaborar articulações extras.

Além disto, a intervenção com a sequência de ensino deu-se durante três dias. Para um trabalho mais consistente em um ambiente regular de ensino, sugere-se a criação de mais articulações, caso o professor sinta a necessidade, assim como trabalhar mais exercícios para que os alunos atestem o que estão observando, uma vez que eles não tenham como desenvolver as articulações e manipulá-las. Em casos onde os alunos tenham as ferramentas para produzir as articulações, o exercício pode ser realizado com a utilização do software, solicitando para que o aluno desenvolva novas articulações ou perceba o que acontece com o volume dos sólidos manipulando-os.

Esta pesquisa mostrou que a proposta sequencial de ensino obteve êxito em auxiliar os colaboradores no estudo dos sólidos geométricos apesar de alguns alunos mesmo depois da intervenção com a proposta sequencial de ensino ainda apresentar dificuldade em realizar o cálculo do volume de determinados sólidos. Como o objetivo geral da pesquisa é apresentar e validar uma proposta sequencial de ensino para o volume de sólidos geométricos à estudantes da educação básica utilizando o software GeoGebra, pode-se afirmar que este objetivo foi alcançado, pois nota-se que a metodologia tem potencial para dar suporte ao ensino e aprendizagem do volume de sólidos geométricos, entretanto, é importante ressaltar que as limitações apresentadas no ambiente de aplicação podem influenciar no desempenho e eficácia da aplicação. Em particular para esta pesquisa, o local de aplicação não disponibilizava de muitos recursos e equipamentos disponíveis para que os alunos tivessem maior interação com as articulações ou até mesmo desenvolvesse as articulações que seriam utilizadas na proposta sequencial de ensino. Esta disponibilidade que possibilitaria a interatividade dos alunos é importante segundo [Ferreira \(2020\)](#), para que o aluno possa desenvolver ainda mais os conceitos e explorar com mais liberdade o que as articulações permitem observar. Além do mais, os resultados obtidos após a aplicação dos testes evidenciam a fragilidade de alguns colaboradores em relação as operações básicas da matemática, o que afetou consideravelmente os resultados apresentados pela pesquisa. Esse fato mostra que apesar da sequência contribuir para o aprendizado dos conceitos relacionados ao assunto abordado pela proposta sequencial de ensino, é importante durante esta intervenção propor atividades aos alunos para que eles ponham em prática o que está sendo desenvolvido com a finalidade de observar os resultados e direcioná-los à superação de possíveis dificuldades. Tais atividades podem ser propostas utilizando as articulações, como por exemplo, sugerir que o aluno consiga calcular qual o

volume de um determinado sólido especificando suas medidas e deixar que os alunos desenvolvam seus métodos para chegar a este resultado, e posteriormente comprovar se o resultado obtido corresponde ao apresentado pelo Software.

Com o resultado obtido através do [pré-teste](#) e do [pós-teste](#) aplicação da proposta sequencial de ensino, verificou-se resultados positivos, pois o grupo que participou da pesquisa não havia estudado sobre o conteúdo anteriormente, como pode ser visto através das respostas obtidas no bloco 1 do exame diagnóstico. Pode-se observar também que os alunos não conheciam nenhuma fórmula utilizada para calcular o volume de sólidos geométricos e muito menos conseguiam calcular o volume dos sólidos apresentados. Após 3 dias de intervenção os resultados obtidos mostram que os blocos 2, 3, 4 e 5 apresentaram uma maior evolução em comparação aos blocos 6 e 7, os quais a quantidade de respostas corretas obtidas, em relação ao cálculo do volume mais especificamente, não foram altas. Porém, considerando que todos os alunos deixaram estas respostas em branco na aplicação do [pré-teste](#), a evolução é evidente.

A proposta sequencial de ensino serve como uma referência, demonstrando a possibilidade de abordar o conteúdo utilizando o software como ferramenta didática. Não se trata de um manual a ser seguido rigidamente, cada docente deve fazer adaptações conforme seus objetivos e o perfil do público-alvo.

Esta pesquisa não tem o intuito de substituir metodologias anteriores, busca-se na verdade dar uma opção a mais para os mediadores utilizando de tecnologias para buscar o interesse dos alunos e ajudá-los na compreensão aprofundada sobre um assunto muito importante no campo matemático, em consonância com o que se pede em diretrizes relacionadas ao uso de tecnologias educacionais.

Como possibilidade de estudos futuros tem-se a aplicação da proposta sequencial de ensino de forma interativa, promovendo a construção das articulações juntamente com os colaboradores para analisar se esta prática favorece ainda mais o ensino aprendido do volume de sólidos geométricos. Além disso, é evidente que há a necessidade de integrar a aplicação atividades práticas. O Software Geogebra disponibiliza a opção de desenvolver atividades interativas que podem ser acessadas e disponibilizadas entre usuários, para que os conceitos possam ser postos a prova e assim os alunos mostraram se estão compreendendo de fato o que está sendo estudado, e o mediador terá a possibilidade de dar ênfase nas dificuldades apresentadas e desenvolver meios de saná-las. Outrossim, pode-se realizar estudos semelhantes em diferentes regiões ou com diferentes grupos demográficos, isto pode ajudar a verificar se os resultados são consistentes em outros contextos.

## REFERÊNCIAS

Abbagnano, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. 2ª ed. Editora Mestre Jou, São Paulo, 1992.

Artigue, Michèle. **Didactical design in mathematics education. Nordic research in mathematics education**. Brill, p. 5-16, 2009.

Boyer, C.B.. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnologia. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/docman/junho-2013-pdf/13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf>>. Acesso em: 29 jan. 2024.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm)>. Acesso em: 29 jan. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)** – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>>. Acesso em 09 jun. 2024.

De Alencar Oliveira, Angelita. **Ansiedade à matemática em alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental no colégio estadual Jardim Tiradentes: um estudo comparativo**. revista educação e cultura em debate, 2015.

De Carvalho Borba, Marcelo; Penteadó, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

Dolce; Pompeo. **Fundamentos da Matemática Elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. São Paulo: Saraiva S.A. 2002.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, S.P: Unicamp, 1995.

Ferreira, Fabricio. **O Ensino De Sólidos Geométricos: Uma Proposta Com O Software Geogebra Frente A Prática Docente**. Igarapé-açu, Pa. UEPA, 2020

Gonçalves, Jéssica; Maissat, Jaqueline. **Aprimorando O Ensino Da Multiplicação Com Tecnologia Digital: Uma Abordagem Com O Google Apresentações**. In. Anais Do Viii Workshop De Tec., Ling. E Míd. Na Educ., Uberlândia, v. 8, 2023

Imbernón, Francisco. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 7. Ed. São Paulo: Cortez, 2010.

Kenski, Vani. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. Campinas, SP: Papyrus, 2009.

Laborde, Colette. **Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques em classe**. Défis et tentatives. Didaskalia, 19(10), p.97- 112, 1997.

Lima, Marília Freires de. **A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino-aprendizagem**. Revista Educação Pública, v. 21, nº 23. 2023.

Marc, Prensky. **Digital Natives Digital Immigrants**. In: PRENSKY, Marc. On the Horizon. NCB University Press, Vol. 9. 2001.

Moran, José Manuel, MASSETTO, Marcos T., BEHRENS Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediações pedagógicas**. Campinas, SP. Papyrus, 2012.

Muniz, Neto. **Geometria**. SBM (Coleção PROFMAT), 2013.

Nascente, Antenor. **Dicionário de Língua Portuguesa da Academia Brasileira de Letras**. Rio de Janeiro, Bloch Ed, 1988.

Nascimento, L. M.; Dias, S. C.. **O Conhecimento de Professores em Formação Inicial num Curso de Pedagogia da Universidade do Estado do Pará Sobre os Números Decimais**. Belém: Universidade do Estado do Pará. 2015.

Passero, Guilherme; Engster, Nélia; Dazzi, Rudimar. **Uma revisão sobre o uso das TICs na educação da Geração Z**. Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 14, n. 2, 2016.

Paterlini, Roberto. **Os “Teoremas” de Cavalieri**. Extensão de artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, n. 72. 2010.

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne; Bellemain, Paula Moreira Baltar. **L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres**.

Caminhos da Educação Matemática em Revista (On-line), v. 9, n. 1, 2019–ISSN 2358-4750, p. 45-82, 2019.

Prado, Maria Elisabette Brisola Brito; Valente, José Armando. **A formação na ação do professor: uma abordagem na e para uma nova prática pedagógica.** In: VALENTE, J. A. (org.). Formação de Educadores para o Uso da informática na Escola. Campinas: UNICAMP/NIED, 2003.

Primo, Márcio Eduardo. **O Princípio de Cavaliere para Cálculo de Volumes no Ensino Médio:** algumas possibilidades. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora: PROFMAT, 2013.

Ribeiro, Tiago; Souza, Divanízia. **A Utilização do Software Geogebra Como Ferramenta Pedagógica na Construção de Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (Ueps).** ReviSeM. 2016.

SAE DIGITAL. TDIC no Ambiente Escolar – Como implementar? 2023. Disponível em: <<https://sae.digital/tdic-no-ambiente-escolar/>>, acesso em jun. 2024.

Santos, Milton. **Por uma geografia nova.** Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

Silva, Girleide Maria da. **Um Estudo Sobre O Uso Do Geogebra Na Aprendizagem De Geometria Analítica No Ensino Médio.** Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: PPGPE, 2016.

Silva; Carlesso; Ghisleni. **Tecnologias Digitais na Educação: Contribuições para o processo de aprendizagem.** Revista Estudos Aplicados em Educação - REAe, v. 7 nº. 14. 2023.

Silva; Parreira Júnior. **Desenvolvimento de avaliações utilizando software de autoria como objeto de aprendizagem.** Periódico de Pesquisa e TCC do IFTM Campus Uberlândia Centro, v. 5. 2023.

Valente, José Armando. **Integração currículo e tecnologia digitais de informação e comunicação: a passagem do currículo da era do lápis e papel para o currículo da era digital, a novas tecnologias e os desafios para uma educação humanizadora.** ed. 1, Biblos Editora, 2013.

Vieira, Rosângela Souza. **O papel das tecnologias da informação e comunicação na educação:** um estudo sobre a percepção do professor/aluno. Formoso - BA: Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), 2011.

Wilson; Orellana; Meek. **The New York Times: The Learning Machines**. Disponível em:

<https://archive.nytimes.com/www.nytimes.com/interactive/2010/09/19/magazine/classroom-technology.html>. Acesso em 09 jan. 2024.



APÊNDICE A – Pré-Teste e Pós-Teste

1) Você já estudou geometria espacial anteriormente?

( ) Sim      ( ) Não

2) Escreva o que você sabe sobre volume de sólidos geométricos?

---

---

---

3) Você sabe o que é um cubo?

( ) Sim      ( ) Não

4) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de um cubo?

( ) Sim      ( ) Não

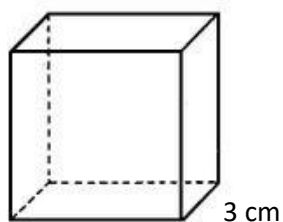
5) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cubo.

---

6) Você sabe calcular o volume de um cubo?

( ) Sim      ( ) Não

7) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume do cubo abaixo?



8) Você sabe o que é um prisma?

( ) Sim      ( ) Não

9) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de um prisma?

( ) Sim      ( ) Não

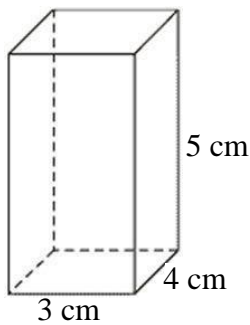
10) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do prisma.

---

11) Você sabe calcular o volume de um prisma?

Sim       Não

12) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume do prisma abaixo?



13) Você sabe o que é um cilindro?

Sim       Não

14) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de um cilindro?

Sim       Não

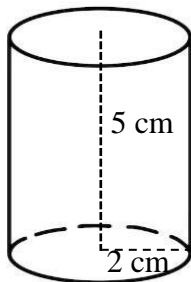
15) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume do cilindro.

---

16) Você sabe calcular o volume de um cilindro?

Sim       Não

17) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume do cilindro abaixo?



18) Você sabe o que é uma pirâmide?

Sim       Não

19) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de uma pirâmide?

Sim       Não

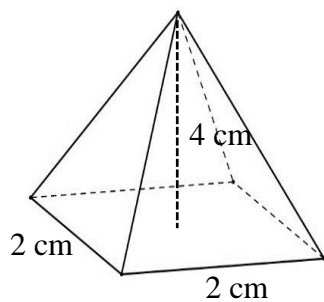
20) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma pirâmide.

---

21) Você sabe calcular o volume de uma pirâmide?

Sim       Não

22) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume da pirâmide abaixo?



23) Você sabe o que é um cone?

Sim       Não

24) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de um cone?

Sim       Não

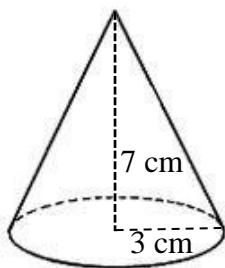
25) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de um cone.

---

26) Você sabe calcular o volume de um cone?

Sim       Não

27) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume do cone abaixo?



28) Você sabe o que é uma esfera?

Sim       Não

29) Você sabe a fórmula que pode ser utilizada para calcular o volume de uma esfera?

Sim       Não

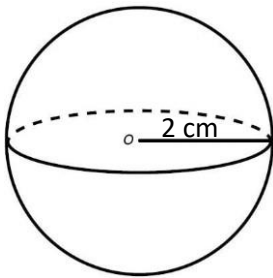
30) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Escreva abaixo a fórmula para o volume de uma esfera.

---

31) Você sabe calcular o volume de uma esfera?

Sim       Não

32) Se a resposta anterior for “Sim”, responda. Qual o volume da esfera abaixo?



APÊNDICE B – Link para download das articulações criadas no software GeoGebra utilizadas na sequência de ensino proposta.

Os arquivos estão disponíveis em uma pasta do drive de acesso livre para todos os usuários cadastrados ou não na plataforma. Disponível através do link:

<https://drive.google.com/open?id=1KDEJryaAGlEmxGU9HySsN3Y-zNnEypTH>

## APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada GEOGEBRA E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: Avaliação de uma Metodologia Sequencial de Ensino, sob a responsabilidade do pesquisador Fabricio da Silva Ferreira e Orientandos pelo Professor Me. Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Junior, vinculados a UFPA.

Nesta pesquisa nós estamos buscando saber qual a sua relação com a informática educativa e fazer uma proposta sequencial de ensino envolvendo o software GeoGebra como uma proposta de ensino para sólidos geométricos. A sua colaboração será participar de aulas mediadas através da proposta sequencial de ensino e realizar alguns testes. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não envolve nenhum risco. Os benefícios serão de natureza acadêmica.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o discente Fabricio da Silva Ferreira.

---

Assinatura do responsável pela pesquisa

Eu, \_\_\_\_\_ aceito participar da pesquisa citada a cima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

---

Assinatura dos pais ou responsáveis do colaborador da pesquisa