

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



TACIANA BARBOSA DE MACÊDO PORTES

JOGOS E APLICATIVOS DIGITAIS PARA O ENSINO
DE GEOMETRIA

BELO HORIZONTE
2024

TACIANA BARBOSA DE MACÊDO PORTES

**JOGOS E APLICATIVOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE
GEOMETRIA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador

Carlos Magno Martins Cosme

Banca Examinadora

Carlos Magno Martins Cosme

Flaulles Boone Bergamaschi

Jane Lage Bretas

Dênis Emanuel da Costa Vargas

BELO HORIZONTE
2024

P849j Portes, Taciana Barbosa de Macêdo
Jogos e aplicativos digitais para o ensino de geometria / Taciana Barbosa de Macêdo Portes. – 2024.
93 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Carlos Magno Martins Cosme.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 2. Jogos educativos – Teses.
3. Software de aplicação – Teses. 4. Jogos digitais e aprendizagem – Teses.
I. Cosme, Carlos Magno Martins. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

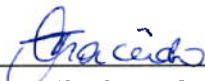
CDD 519.3

TACIANA BARBOSA DE MACÊDO PORTES

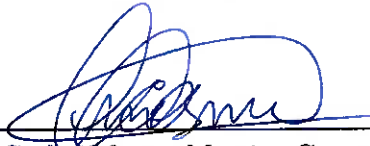
**JOGOS E APLICATIVOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE
GEOMETRIA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 30 de agosto de 2024.



Taciana Barbosa de Macêdo Portes
(Autor)



Carlos Magno Martins Cosme
(Orientador)

BELO HORIZONTE
2024

Aos meus colegas professores, cuja dedicação ao ensino e resiliência diante dos desafios diários são fontes de inspiração e admiração.

Agradecimentos

À minha família pelo amor e apoio de sempre.

Ao meu marido, por estar ao meu lado, compreender minhas ausências, trazer conforto e incentivo até mesmo quando pensei em desistir.

Aos meus amigos por entenderem meu esforço e se fazerem presentes mesmo que distantes.

À minha coordenação e direção pela empatia e percepção da importância que esta formação tem para mim.

Ao meu orientador por sua disponibilidade, paciência, incentivo e força em seguir com o projeto, dando suporte para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

O ensino de Geometria com uso de jogos e materiais concretos é uma estratégia didática que visa estimular o interesse e o raciocínio dos alunos, bem como desenvolver habilidades espaciais, geométricas e lógicas. Se lançarmos um olhar na história do desenvolvimento da Matemática, desde os gregos com as construções com régua e compasso e chineses com o tangram, vemos exemplos de uso dessa abordagem, mostrando como diferentes civilizações e culturas contribuíram para o seu desenvolvimento e aplicação. Com o desenvolvimento tecnológico e acesso ao universo digital, essa estratégia é alavancada por *softwares* elaborados com a finalidade de serem ferramentas úteis e importantes no processo de ensino e aprendizagem. Adentrando no ensino de Geometria, foco da nossa dissertação, temos o GeoGebra, aplicativo mais conhecido no ensino de Matemática de modo geral. Desde seu lançamento, ele vem sendo constantemente aprimorado, incorporando novas funcionalidades e tem sido empregado cada vez mais em sala de aula. No entanto, buscando ampliar as possibilidades, realizamos uma busca na *internet* empregando as palavras “jogos digitais Geometria” e termos afins e percebemos uma variedade de aplicativos, jogos e plataformas que, em princípio, poderiam ser ferramentas para o ensino de Geometria. Nessa lista, temos desde as versões digitais do tangram até as construções digitais com régua e compasso, dentre tantas outras possibilidades. Neste trabalho pretendemos mapear aplicativos, jogos digitais e até plataformas disponíveis na *internet* que sejam úteis para o ensino de Geometria e catalogá-los, trazendo uma breve descrição do funcionamento de cada um, como possibilidades de aplicabilidade em sala de aula com a série sugerida e conteúdo a ser abordado. Algumas dessas ferramentas, inclusive, são atribuídas para outros fins e, aqui, trouxemos uma abordagem exploratória no ensino de Geometria. Adicionalmente, será eleito um dos aplicativos apresentados para uma avaliação pormenorizada, culminando com a proposição de abordagens práticas em sala de aula com a sua utilização e construções diversas.

Palavras-chave: Geometria. Ensino. Jogos digitais. Aplicativos.

Abstract

Teaching Geometry using games and concrete materials is a teaching strategy that aims to stimulate students' interest and reasoning, as well as developing spatial, geometric and logical skills. If we take a look at the history of the development of Mathematics, from the Greeks with ruler and compass constructions to the Chinese with tangram, we see examples of the use of this approach, showing how different civilizations and cultures contributed to its development and application. With technological development and access to the digital universe, this strategy is boosted by software designed to be useful and important tools in the teaching and learning process. Entering the teaching of Geometry, the focus of our dissertation, we have GeoGebra, the best-known application for teaching Mathematics in general. Since its launch, it has been constantly improved, incorporating new features and has been increasingly used in the classroom. However, seeking to expand the possibilities, we carried out an internet search using the words "Geometry digital games" and related terms and noticed a variety of applications, games and platforms that, in principle, could be tools for teaching Geometry. In this list, we have everything from digital versions of the tangram to digital constructions with ruler and compass, among many other possibilities. In this work we intend to map applications, digital games and even platforms available on the internet that are useful for teaching Geometry and catalog them, providing a brief description of how each one works, as well as possibilities for applicability in the classroom with the suggested group and content to be covered. Some of these tools are even used for other purposes and, here, we bring an exploratory approach to teaching Geometry. Additionally, one of the applications presented will be chosen for a detailed evaluation, culminating in the proposition of practical approaches in the classroom with its use and different constructions.

Keywords: Geometry. Teaching. Digital games. Digital applications.

Lista de Abreviaturas

Abreviaturas utilizadas neste trabalho:

1. BNCC - Base Nacional Comum Curricular
2. CEFET-MG - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
3. TDIC - Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
4. App (APP) - Aplicativo

Lista de Figuras

3.1	Logo do aplicativo Mestre do Tangram.	23
3.2	Interface Mestre do Tangram.	24
3.3	Logo do aplicativo Geoboard.	25
3.4	Tela inicial do aplicativo Geoboard.	26
3.5	Logo do aplicativo Pythagorea.	27
3.6	Tela de Aplicação do Aplicativo Pythagorea.	28
3.7	Logo do aplicativo Geometryx.	29
3.8	Interface do aplicativo Geometryx.	30
3.9	Logo do Simulador PhET Colorado.	30
3.10	Tela de Aplicação do PhET Colorado.	31
3.11	Logo do aplicativo Quebra-cabeça Geométrico.	32
3.12	Interface do aplicativo Quebra-cabeça Geométrico.	33
3.13	Logo do aplicativo Sólidos RA Realidade Aumentada.	33
3.14	Tela inicial do aplicativo Sólidos RA.	34
3.15	Logo do aplicativo Geometry Nets Helper.	35
3.16	Interface do aplicativo Geometry Nets Helper.	36
3.17	Logo do aplicativo GeoCon.	37
3.18	Interface do aplicativo GeoCon.	38
3.19	Logo do aplicativo Pattern Shapes.	38
3.20	Tela inicial do aplicativo Pattern Shapes.	39
3.21	Logo do aplicativo Geometry Pad.	40
3.22	Interface do aplicativo Geometry Pad.	41
3.23	Logo do aplicativo ICrosss.	41
3.24	Interface do aplicativo ICrosss.	42
3.25	Logo do aplicativo Smart Protractor.	43
3.26	Interface do aplicativo Smart Protractor.	44
3.27	Logo do aplicativo XSection.	44
3.28	Interface do aplicativo XSection.	45
3.29	Logo do aplicativo Euclidea.	46
3.30	Interface do aplicativo Euclidea.	47
3.31	Logo da plataforma Mathigon.	48
3.32	Logo da plataforma Polypad.	49
3.33	Interface do aplicativo Polypad.	49
3.34	Logo do aplicativo Factris.	50
3.35	Interface do aplicativo Factris.	50
3.36	Logo da plataforma Sweet Home 3D.	51
3.37	Interface do aplicativo Sweet Home 3D.	52
3.38	Logo do aplicativo SketchUp.	53

3.39	Interface do aplicativo SketchUp.	54
4.1	Tela inicial do SketchUp	58
4.2	Área de trabalho do SketchUp	62
5.1	Construções elementares	67
5.2	Feixe de paralelas cortadas por duas transversais	70
5.3	Construção Teorema de Tales via SketchUp	71
5.4	Construção de segmentos	72
5.5	Construção de segmentos paralelos e equidistantes	73
5.6	Construção de móvel abaixo da escada - Parte 1	74
5.7	Construção de móvel abaixo da escada - Parte 2	74
5.8	Construção de móvel abaixo da escada - Parte 3	75
5.9	Construção de móvel abaixo da escada - Parte 4	75
5.10	Construção de triângulo sobre dois segmentos paralelos (A)	78
5.11	Construção de triângulo sobre dois segmentos paralelos (B)	78
5.12	Figuras planas com áreas congruentes	80
5.13	Sólidos retos com área das bases congruentes	80
5.14	Verificando a medida do volume - Prisma reto de base retangular	81
5.15	Verificando a medida do volume - Prisma reto de base triangular	81
5.16	Tornando um sólido oblíquo	82
5.17	Verificando a medida do volume - Prisma retangular	82
5.18	Verificando a medida do volume - Prisma triangular	83
5.19	Seccionando os sólidos	83
5.20	Comparando as áreas seccionadas	84
5.21	Imagem presente na questão do ENEM - Atomium.	85
5.22	Imagem presente na questão do ENEM - Projeções Atomium	86
5.23	Alternativa A	87
5.24	Alternativa B	87
5.25	Alternativa C	87
5.26	Alternativa E	88

Lista de Tabelas

2.1	Resultado da Pesquisa Isolada no Banco de Dissertações PROFMAT - 2013 a 2024.	19
2.2	Resultado da Pesquisa no Banco de Dissertações	20
3.1	Tabela com informações sobre o app Mestre do Tangram.	24
3.2	Tabela com informações sobre o app Geoboard	26
3.3	Tabela com informações sobre o app Pythagorea	27
3.4	Tabela com informações sobre o app Geometryx	29
3.5	Tabela com informações sobre o app PhET Colorado	31
3.6	Tabela com informações sobre o app Quebra-cabeça Geométrico	32
3.7	Tabela com informações sobre o app Sólidos RA	34
3.8	Tabela com informações sobre o app Geometry Nets Helper	35
3.9	Tabela com informações sobre o app GeoCon	37
3.10	Tabela com informações sobre o app Pattern Shapes	39
3.11	Tabela com informações sobre o app Geometry Pad	40
3.12	Tabela com informações sobre o app ICrosss	42
3.13	Tabela com informações sobre o app Smart Protractor	43
3.14	Tabela com informações sobre o app XSection	44
3.15	Tabela com informações sobre o app Euclidea	46
3.16	Tabela com informações sobre a plataforma Mathigon	48
3.17	Tabela com informações sobre o app Sweet Home 3D	52
3.18	Tabela com informações sobre o app SketchUp	53

Sumário

1	Introdução	13
2	Práticas Pedagógicas e Ferramentas Digitais	15
3	Jogos e Aplicativos Digitais	22
3.1	Mestre do Tangram	23
3.1.1	Interface e Funcionalidades	24
3.2	Geoboard	25
3.2.1	Interface e Funcionalidades	25
3.3	Pythagorea	26
3.3.1	Interface e Funcionalidades	27
3.4	Geometryx	28
3.4.1	Interface e Funcionalidades	29
3.5	PhET Colorado	30
3.5.1	Interface e Funcionalidades	30
3.6	Quebra-cabeça Geométrico	31
3.6.1	Interface e Funcionalidades	32
3.7	Sólidos RA Realidade Aumentada	33
3.7.1	Interface e Funcionalidades	33
3.8	Geometry Nets Helper	35
3.8.1	Interface e Funcionalidades	36
3.9	GeoCon	37
3.9.1	Interface e Funcionalidades	37
3.10	Pattern Shapes	38
3.10.1	Interface e Funcionalidades	39
3.11	Geometry Pad	40
3.11.1	Interface e Funcionalidades	40
3.12	ICrosss	41
3.12.1	Interface e Funcionalidades	42
3.13	Smart Protractor	43
3.13.1	Interface e Funcionalidades	43
3.14	XSection	44
3.14.1	Interface e Funcionalidades	45
3.15	Euclidean	46
3.15.1	Interface e Funcionalidades	46
3.16	Mathigon	48
3.16.1	Interface e Funcionalidades	48
3.16.2	Polypad	49

3.16.3	Factris	50
3.17	Sweet Home 3D	51
3.17.1	Interface e Funcionalidades	51
3.18	SketchUp	53
3.18.1	Interface e Funcionalidades	53
4	Explorando o SketchUp	55
4.1	Introdução	55
4.2	Primeiros Passos com o SketchUp	58
4.3	Ferramentas Práticas Para o Professor	60
4.4	Utilização na Geometria	65
5	Aplicações do SketchUp em Sala de Aula	66
5.1	Atividade Inicial: Construções Elementares com o SketchUp	66
5.2	Teorema de Tales e Aplicações	69
5.2.1	Orientações para Construção	70
5.2.2	Divisão de um Segmento de Reta em Partes Iguais	71
5.2.3	Construindo Móveis e Prateleiras	73
5.2.4	O que mais pode ser explorado?	76
5.3	Paralelismo, Áreas e Volumes	76
5.3.1	Paralelismo e Áreas	76
5.3.2	Paralelismo e Volumes	79
5.4	Vistas e Projeção Ortogonal	84
6	Considerações Finais	89
	Referências	91

1 Introdução

O ensino de Geometria com uso de jogos e aplicativos digitais é uma forma de estimular o interesse e a aprendizagem dos alunos sobre os conceitos geométricos. Esses elementos, quando bem escolhidos e tendo atividades elaboradas apropriadamente para sua utilização, podem permitir que os alunos explorem, manipulem, visualizem e resolvam os mais variados problemas envolvendo Geometria. Alguns estudos no âmbito do PROFMAT abordam esse tipo de estratégia de ensino, como é o caso dos trabalhos de Souza Filho [1], Fonseca [2], Rodrigues [3] e Cosme [4], tendo este último abordado o tema em uma turma de alunos do PROFMAT. Ele levantou a questão da utilização dessas ferramentas para a formação do professor de Matemática, para modelar e resolver problemas, validando estratégias e resultados, como previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [5].

Entendendo que o ensino de Geometria na educação básica tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, mas que muitas vezes é deixado de lado em detrimento do ensino de Álgebra [6], consideramos que a utilização de jogos e aplicativos digitais podem favorecer o desenvolvimento de tais habilidades, permitindo uma maior visibilidade e consciência da necessidade de utilização dessas tecnologias em sala de aula. Cabe observar ainda que a inclusão de jogos e aplicativos pode ser realizada em diferentes níveis de ensino, da Educação Infantil até o Ensino Médio, desde que devidamente adaptada às necessidades e aos objetivos de cada faixa etária e de cada conteúdo curricular.

Uma importante tarefa a ser cumprida é a identificação de jogos e aplicativos, ou pelo menos um recorte representativo, que possam ser empregados em sala de aula. Mais que listá-los, cabe detalhar seu funcionamento, que temas podem ser estudados com sua utilização, em que série e nível de ensino, dentre outras coisas. Tão relevante quanto, outra questão a ser abordada nesta pesquisa é a elaboração das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula com a utilização dessa estratégia. Estamos passando por muitas mudanças no ambiente educacional frente a uma geração conectada digitalmente e precisamos acompanhar essas mudanças, fazer adaptações nos métodos de ensino, nos reinventar. Dito isso, apresentaremos algumas ferramentas digitais como um suporte

de exploração, visualização e compreensão do conteúdo e nossa motivação é ampliar as possibilidades do professor em sala de aula, no trato da Geometria.

São três os objetivos deste trabalho:

1. Realizar um levantamento e categorização de aplicativos, jogos e plataformas digitais disponíveis na *internet*, que possam ser utilizados como ferramentas de ensino de Geometria.
2. Eleger um desses aplicativos para uma descrição detalhada, tanto do ponto de vista de como utilizá-lo, quanto de quais temas de Geometria podem ser explorados através deles.
3. Propor um conjunto de atividades pedagógicas, apoiadas na utilização desse aplicativo, para o ensino de Geometria.

Como metodologia de pesquisa, inicialmente será feito um levantamento bibliográfico sobre a utilização de *softwares*, jogos e aplicativos digitais para o ensino de Geometria, dando preferência aos trabalhos produzidos no âmbito do PROFMAT. Na sequência, através de busca direta na *internet* e em repositórios como *Google Play*, serão identificados jogos e aplicativos úteis para o ensino de Geometria e feita a sua categorização quanto aos temas que podem ser explorados através deles. Na etapa seguinte, um desses entes será descrito detalhadamente quanto à forma de utilização e aplicabilidade prática para o ensino. Por fim, esse aplicativo será o foco principal da proposição de um conjunto de atividades pedagógicas para o ensino de Geometria.

No que segue, essa dissertação se organiza da seguinte forma: no Capítulo 2, Práticas Pedagógicas e Ferramentas Digitais, apresentaremos algumas ideias e contribuições relacionadas à educação e tecnologia; no Capítulo 3, Jogos e Aplicativos Digitais, trabalharemos com aplicativos e outras plataformas digitais, apresentando alguns deles, suas interfaces e funcionalidades. Na sequência, temos o Capítulo 4, Explorando o SketchUp, com um panorama do *software*, acesso e algumas ferramentas disponíveis. No Capítulo 5, Aplicações do SketchUp em Sala de Aula, apresentaremos propostas de aplicabilidade do aplicativo em sala de aula e, no Capítulo 6, Considerações Finais, faremos um fechamento da dissertação, com nossas observações ao longo do processo de pesquisa e escrita.

2 Práticas Pedagógicas e Ferramentas Digitais

As práticas pedagógicas e o processo de ensino e aprendizagem estão passando por transformações em todo o mundo devido ao desenvolvimento e a presença cada vez maior das tecnologias na sociedade como um todo e, principalmente, na educação. Em meio à constante evolução tecnológica, é possível perceber uma mudança na dinâmica da sala de aula, com alunos que são familiarizados com os meios digitais, especialmente celulares e aplicativos, desde cedo. Em função disso, julgamos importante explorar alternativas que extrapolem o tradicional, visando trazer o interesse e a participação desses alunos. Todo esse processo de transformação vem sendo acompanhado, discutido e estudado por um grande número de pesquisadores, a fim de compreendê-lo e aprimorar as estratégias de ensino que surgem da utilização dessas ferramentas.

Seymour Papert (1928-2016) [7] era educador, matemático e pesquisador sul-africano. Ele é reconhecido como uma figura fundamental no campo da educação e tecnologia, notadamente por suas contribuições significativas no desenvolvimento da teoria construcionista e na promoção do uso de computadores na educação. Papert acreditava que as tecnologias poderiam servir como poderosas ferramentas, partindo do pressuposto que as crianças aprendem melhor quando estão envolvidas em artes práticas e construtivas, em vez de serem meramente receptoras de informações. Ele introduziu e popularizou a ideia de pensamento computacional para trabalhar a resolução de problemas por meio da aplicação de conceitos fundamentais da computação.

O pensamento computacional é uma abordagem de resolução de problemas que envolve a aplicação de conceitos e processos usados na ciência da computação. As atividades desenvolvidas nesse sentido contribuem na construção do pensamento lógico, bem como no desenvolvimento do raciocínio por meio dos quatro pilares principais:

- Decomposição, quebrando um problema em partes menores e mais gerenciáveis;
- Reconhecimento de padrões, identificando semelhanças e diferenças;
- Abstração de um problema, focando nos detalhes essenciais e ignorando o que é

irrelevante;

- Algoritmos, desenvolvendo uma sequência de passos para resolver o problema.

Um exemplo disso é a linguagem LOGO, que utiliza uma abordagem gráfica com uma tartaruga que desenha na tela, desenvolvida por Papert para crianças, de modo que elas possam aprender conceitos matemáticos e computacionais de maneira lúdica e visual.

Estando em meio a uma geração cercada por recursos tecnológicos, nomeados por Marc Prensky (2001) [8] como “nativos digitais”, algumas práticas são remodeladas e adaptadas na tentativa de aguçar o interesse e participação do aluno durante as aulas. Prensky utilizou essa expressão para descrever a geração que cresceu imersa na tecnologia digital, contrastando com os “imigrantes digitais”, que são as gerações mais antigas que precisaram se adaptar a essas tecnologias já existentes. Desde então, o conceito tem sido utilizado para descrever aqueles que nasceram após a popularização da tecnologia digital, especialmente a *internet* e os dispositivos eletrônicos. Seu trabalho sugere que a educação deve evoluir para incorporar as ferramentas computacionais, aproveitando as vantagens que elas oferecem. Além disso, Prensky reforça a importância de preparar os estudantes para o futuro, desenvolvendo competências como pensamento crítico, resolução de problemas, colaboração e alfabetização digital, destacando a necessidade de compreender e integrar a cultura digital dos alunos no ambiente educacional, o que inclui o uso de mídias sociais, aplicativos e outras formas de comunicação digital que são parte do cotidiano desses alunos.

David Paul Ausubel (1918-2008) [9], psicólogo norte-americano conhecido por suas contribuições no campo da psicologia educacional, desenvolveu a teoria da aprendizagem significativa, que baseia-se na premissa de que o novo conhecimento é construído com base no conhecimento prévio, de modo que a aprendizagem é mais eficaz quando novos conceitos e informações são integrados ao que o aluno já sabe, formando uma rede de conhecimento interconectada. A aprendizagem significativa acontece quando uma nova ideia se conecta aos conhecimentos prévios do aluno em um contexto relevante, oferecido pelo professor. Durante esse processo, o aluno amplia e atualiza suas informações anteriores, atribuindo novos significados ao que já sabe. Para que a aprendizagem significativa ocorra, é essencial que o professor adote materiais e estratégias criativas e que o aluno esteja disposto a aprender.

De acordo com as ideias de Prensky sobre os nativos digitais, já imersos em tecnologias desde cedo, e de Ausubel, que enfatiza a importância de utilizar o conhecimento prévio dos alunos como base para novas aprendizagens, é fundamental reconhecer que os alunos chegam à sala de aula com um conhecimento prévio significativo sobre o uso de dispositivos digitais. Assim, é importante que os professores adotem metodologias que

aproveitem e expandam esse conhecimento pré-existente, integrando tecnologias digitais de forma eficaz para enriquecer o processo educacional e tornar o aprendizado mais significativo e contextualizado para os alunos.

Junto ao pensamento computacional, consideramos pertinente abordar também a gamificação e as Tecnologias Digitais de Informação (TDIC) que, a nosso ver são importantes e contribuem de maneira significativa nos processos de ensino e aprendizagem. A gamificação envolve pensar e agir como em um jogo, mas aplicado também a contextos fora do universo dos jogos. Seu objetivo é engajar pessoas, motivar ações, promover o aprendizado e resolver problemas. Ela vai além do uso simples de mecânicas de jogos, utilizando esses elementos para resolver problemas, motivar e engajar um público específico. Não se trata necessariamente de participar de um jogo, mas sim de empregar os componentes mais eficazes das mecânicas, dinâmicas e estéticas dos jogos para obter os mesmos benefícios proporcionados pela experiência de jogar [10]. Já as TDIC referem-se às ferramentas e recursos tecnológicos que facilitam a comunicação, o acesso à informação e a realização de atividades diversas. Vale lembrar que o foco não deve estar na tecnologia em si, mas no fato de as TDIC terem criado novas possibilidades de expressão e de comunicação, que podem contribuir para o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas [11]. Quando combinadas, a gamificação e as TDIC podem transformar processos, uma vez que promovem o acesso a diversos recursos didáticos que vão desde identificação de padrões, jogos e até plataformas de aprendizagem. Estudantes e educadores se deparam com uma oportunidade no processo de ensino e aprendizagem nas variadas áreas de conhecimento, ampliando o alcance e a profundidade do conteúdo a ser explorado.

Todas essas ideias são incorporadas e reforçadas na BNCC, que prevê o uso desse tipo de estratégia como ferramenta de ensino e aprendizagem. Além disso, o uso de tecnologias digitais na educação visa desenvolver competências essenciais do século XXI, promovendo práticas pedagógicas dinâmicas e interativas, possibilitando um melhor aprendizado por meio da construção e manipulação de objetos no mundo digital, o que é refletido na BNCC ao incentivar o uso de recursos tecnológicos para promover a experimentação, a criação e a preparação dos alunos para desafios futuros.

Nesse processo de integração tecnológica no ensino de Matemática, alguns aplicativos e *softwares* se destacaram como pioneiros e influenciadores. Entre eles, temos o SuperLogo, linguagem de programação desenvolvida com base na linguagem Logo [12] e o GeoGebra [13], amplamente adotados no ambiente escolar para tornar o aprendizado matemático mais acessível e interessante.

O SuperLogo foi criado como uma versão aprimorada e adaptada da linguagem

Logo para o contexto brasileiro, utilizado para ensinar programação e lógica para crianças e adolescentes, mas com um enfoque adaptado às necessidades e ao currículo educacional brasileiro. Consideramos aqui, a versão SuperLogo 3.0, que é a linguagem de programação original adaptada para o português pelo Núcleo de Informática Educativa à Educação (NIED) da Unicamp ¹. Utilizando comandos simples, os alunos podem programar a “tartaruga” para desenhar formas geométricas, explorar conceitos de Geometria e desenvolver habilidades de pensamento lógico e algorítmico. Apesar de ser uma ferramenta antiga, o SuperLogo continua a ser uma introdução importante tanto na programação, quanto na Geometria. Segundo Papert (1985, p. 215), o ambiente LOGO “[...] enriquece e facilita a interação entre todos os participantes e oferece oportunidades para relações de ensino mais articuladas, efetivas e honestas”.

Outro aplicativo importante no campo do ensino de Matemática é o *software* GeoGebra, criado em 2001, e que desde então vem ganhando destaque, sendo estudado e aplicado em sala de aula, em diversos contextos. Trata-se de uma ferramenta educacional dinâmica e interativa que integra conceitos de Geometria, Álgebra, cálculo e outras disciplinas relacionadas à Matemática. É uma escolha popular entre educadores, o que pode ser inferido, por exemplo, pela quantidade de dissertações do PROFMAT que abordam a utilização do GeoGebra em sala de aula. Tais trabalhos exploram as diversas características positivas do GeoGebra, como o ambiente gráfico intuitivo e versátil, que possibilitam visualizar os conceitos geométricos, relacionando-os com a Álgebra, Geometria Analítica, etc.

O destaque do nosso estudo será dado ao ensino de Geometria e, uma das vantagens do GeoGebra, é sua capacidade de proporcionar uma abordagem prática ao ensino dessa disciplina. Por meio da manipulação de objetos geométricos, pode-se observar como alterações nas figuras afetam diretamente suas representações algébricas, facilitando a compreensão de relações matemáticas complexas. Ele oferece também recursos como construção dinâmica de figuras, visualização de gráficos, resolução de equações e representações geométricas tridimensionais.

Realizamos uma catalogação de trabalhos que envolvem Geometria, associada a outros filtros para verificar o quantitativo de dissertações, bem como as abordagens dadas no contexto de Geometria na busca e análise de estratégias didáticas para estimular o interesse e o raciocínio dos alunos, bem como desenvolver habilidades espaciais, geométricas e lógicas com uso de recursos digitais.

A fim de corroborar nossa afirmação sobre o alcance do GeoGebra como ferramenta

¹<https://www.nied.unicamp.br/projeto/super-logo/>

para o ensino de Matemática, ao pesquisar, em julho de 2024², no repositório de dissertações do PROFMAT os trabalhos envolvendo o uso do GeoGebra e utilizando apenas “GeoGebra” como palavra-chave da busca, foram encontradas 438 dissertações. Dessas, atrelando o filtro “Geometria” ou “geométrico(a)” no título das dissertações, fazendo remissão a sólidos geométricos, figuras geométricas, pensamento geométrico, construções geométricas, lugar geométrico e afins, foram encontrados 134 registros contendo essas palavras-chave, cujas abordagens estão distribuídas em Geometria Plana, Espacial ou Analítica, nesses mais de 10 anos de registros no repositório.

Buscando, de maneira isolada, filtros que tenham relação com o nosso trabalho, encontramos os resultados dispostos na Tabela 2.1, de acordo com as palavras-chave:

Tabela 2.1: Resultado da Pesquisa Isolada no Banco de Dissertações PROFMAT - 2013 a 2024.

Filtro	Número de dissertações encontradas
GeoGebra	438
Aplicativo	64
<i>Software</i>	230
Plataforma	23
Pensamento Computacional	22
Dispositivos	6
TDIC	3
Gamificação	17

Fonte: *A autora, 2024.*

Já em relação às dissertações envolvendo o estudo da Geometria, utilizamos como filtro o termo “*geometri*”, a fim de cercar um maior número de trabalhos que contemplam o assunto, como “Pensamento Geométrico”, “Construções Geométricas”, “Figuras Geométricas”, “Sólidos Geométricos”, “Lugar Geométrico”, “Geometria Plana”, “Geometria Espacial”, “Ensino de Geometria”, entre outros, encontrando 713 dissertações. Adentrando no ensino de Geometria e, buscando dar um refinamento na pesquisa, associando às plataformas digitais, pensamento computacional e gamificação, foram atrelados novos filtros, com os resultados mostrados na Tabela 2.2.

²Foi realizada uma pesquisa preliminar em outubro de 2023 e optamos por atualizá-la e refiná-la.

Tabela 2.2: Resultado da Pesquisa no Banco de Dissertações

Filtro 1	Filtro 2	Número de dissertações encontradas
GeoGebra	“ <i>geometri</i> ”	134
Aplicativo	“ <i>geometri</i> ”	12
<i>Software</i>	“ <i>geometri</i> ”	58
Pensamento Computacional	“ <i>geometri</i> ”	1
Dispositivos	“ <i>geometri</i> ”	1
Gamificação	“ <i>geometri</i> ”	3
Gamificação	Ensino	13
TDIC	Aprendizagem	1

Fonte: A autora, 2024.

Concluimos de nossas buscas que é notório que o GeoGebra é uma ferramenta amplamente estudada no âmbito do PROFMAT. Mas observamos também que outras possibilidades têm sido consideradas, abordando a utilização de jogos e aplicativos digitais diversificados. Neste sentido, identificamos alguns trabalhos que merecem menção.

- Catálogo de Aplicativos: uma proposta de utilização de aplicativos móveis no ensino de Geometria nos oitavo e nono anos do Ensino Fundamental, Thaís Gomes Rosa da Silva [14], Colégio Pedro II.
- O Pensamento Computacional como Metodologia de Ensino da Geometria Espacial, Marcelle Dutra França Fernandes [15], UENF.
- A Integração das TDIC à Educação Matemática: Um estudo sobre o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas no ensino e aprendizagem de Matemática, Cristina Schmitt [16], IFSP.
- Metodologias Ativas e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC): Uma proposta de intervenção na aprendizagem com o auxílio do programa Socrative, Marcos Nascimento Sanches [17], UFRB.
- A Gamificação Aliada à Tecnologia no Ensino Brasileiro de Matemática, Helder Cruz Fernandes [18], UFCA.
- A Gamificação como uma Estratégia de Aprendizagem: Construções Geométricas Utilizando o Aplicativo Euclidea, Julieta Ferronato [19], UFFS.
- Gamificação Voltada para o Ensino de Geometria Plana: a Busca do Pergaminho Perdido de Euclides, Pablo Henrique dos Santos Souza [20], UFAL.
- SketchUp - Uma Ferramenta Útil para o Ensino da Matemática Aplicada em Projetos, Ana Carolina Ribeiro Ramos [21], UFBA.

Esses e outros trabalhos têm sua contribuição e importância a respeito do uso de dispositivos

tecnológicos em sala de aula.

A familiarização com *softwares* específicos, como o GeoGebra e outros aplicativos digitais dedicados à Geometria, não apenas fortalece as habilidades matemáticas, mas também prepara os estudantes para a utilização das ferramentas digitais em diversos contextos, visualizando, explorando e interpretando as informações ali apresentadas. Apesar de o uso de ferramentas tecnológicas ser pauta de várias discussões na área docente, a pesquisa mostra que o compilado de dissertações apresenta um conjunto muito pequeno, sendo um tema ainda pouco explorado.

Esta dissertação propõe uma busca e análise sobre jogos e aplicativos digitais dedicados ao ensino de Geometria no ensino regular, visando não apenas diversificar as abordagens pedagógicas, mas também potencializar o engajamento e a compreensão dos estudantes. O objetivo é adentrar nesse universo de possibilidades além do GeoGebra, sob novas perspectivas para o ensino da Geometria, promovendo uma experiência educacional dinâmica e alinhada às demandas atuais.

3 Jogos e Aplicativos Digitais

Em nosso entendimento, o uso de aplicativos e outras plataformas digitais no ensino de Geometria oferece aos professores e estudantes uma maneira interativa e mais envolvente no processo de ensino e aprendizagem. No campo da Geometria, sua utilização permite, entre outros fatores:

- Visualização e manipulação das formas geométricas em 2D e 3D de maneira interativa. Eles podem girar, ampliar e reduzir as formas para obter uma compreensão mais profunda de suas propriedades e relações.
- Exploração de propriedades, já que muitas vezes incluem ferramentas interativas que permitem a visualização e exploração das formas geométricas, como medir ângulos, comprimentos de segmentos, áreas e volumes, contribuindo para a compreensão de conceitos como congruência, semelhança e proporção.
- Resolução de problemas, simulações e modelagem, apresentando problemas que podem ser resolvidos usando conceitos geométricos. Eles podem variar em dificuldade e abordar uma variedade de tópicos, desde Geometria Básica até Geometria Analítica e trigonometria. Há aqueles que permitem também a criação e manipulação de modelos geométricos para simular situações do mundo real, podendo ajudar a conectar os conceitos geométricos mais abstratos com aplicações práticas, como arquitetura, engenharia e design.
- Desafios com níveis a serem alcançados, permitindo que os alunos progridam em seu próprio ritmo e recebam feedback imediato sobre seu desempenho. Isso pode ajudar a manter os alunos motivados e engajados em seu aprendizado.

Além disso, os aplicativos podem ser acessíveis em uma variedade de dispositivos, incluindo computadores, *tablets* e *smartphones*, podendo ser usados em sala de aula, em casa ou em qualquer lugar com acesso à *internet*. De maneira geral, os aplicativos têm o potencial de tornar o ensino e aprendizado da Geometria mais dinâmico, acessível, eficaz e envolvente.

De acordo com Cosme [4], o intuito dessa discussão sobre o uso de aplicativos diversos é dar a outros professores de Geometria um *insight* de como introduzir uma

abordagem no ensino de Geometria, seja ela ministrada no ensino básico, superior ou, até mesmo, na pós-graduação para formação de professores de Matemática.

Nesse contexto, nos debruçamos em busca de aplicativos que podem agregar ao ensino da Geometria e apresentaremos algumas possibilidades. Em nossas propostas, consideramos um cenário escolar com laboratório de informática, disponibilidade de aparelhos digitais (computadores, *tablets* e / ou *notebooks*) e rede de *internet* para implementação de novas abordagens. Optamos por trazer as informações que julgamos essenciais para que o leitor interessado no assunto possa encontrar o aplicativo, suas aplicações em sala de aula, série a ser utilizado, etc.

3.1 Mestre do Tangram

Figura 3.1: Logo do aplicativo Mestre do Tangram.



Fonte: *Mestre do Tangram*, 2024.

O Tangram é um quebra-cabeça geométrico de origem chinesa, formado por 7 peças: 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. As peças são chamadas de “tans” que devem ser rearranjadas para formar determinadas figuras. O objetivo do jogo é formar uma figura específica usando todas as sete peças do jogo, sem sobrepô-las.

Existem várias versões de apps disponíveis com a mesma função, a depender da compatibilidade do dispositivo, incluindo uma variedade de quebra-cabeças desafiadores, dos mais simples aos mais complexos, oferecendo aos jogadores uma gama de níveis de dificuldade para escolher. Aqui, vamos apresentar um pouco sobre o aplicativo Mestre do Tangram [22].

Tabela 3.1: Tabela com informações sobre o app Mestre do Tangram.

Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/xSUQP
Desenvolvedor	Little Bear Productions
Lançamento	2016
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	Existem jogos afins que também podem ser explorados como o “Tangram king”, “Tangram - Quebra-cabeça” e outros, que possuem objetivos similares e estão disponíveis para baixar via IOS.
Objetivo	Formar uma figura específica usando todas as sete peças do jogo, sem sobrepô-las.

Fonte: A autora, 2024.

3.1.1 Interface e Funcionalidades

Ao abrir o aplicativo, pode-se escolher o modo que se deseja jogar (modo normal ou modo mestre), bem como a categoria do jogo (chinês clássico, arte tangram ou europeu clássico).

Figura 3.2: Interface Mestre do Tangram.

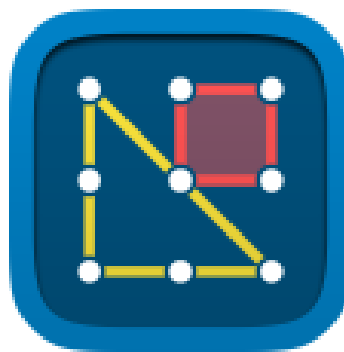
Fonte: Mestre do Tangram, 2024.

O aplicativo apresenta uma ampla seleção de quebra-cabeças Tangram tradicionais,

onde os jogadores devem usar as sete peças geométricas para formar uma figura específica. Estes quebra-cabeças variam em dificuldade, garantindo que haja algo para todos os níveis de habilidade. Ele pode ser utilizado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e nos Anos Finais do Ensino Fundamental como, por exemplo, na abordagem de polígonos, áreas, perímetros, simetria e transformações geométricas.

3.2 Geoboard

Figura 3.3: Logo do aplicativo Geoboard.



Fonte: *Geoboard*, 2024.

Tradicionalmente, o Geoboard é um brinquedo composto por uma placa, geralmente de madeira, com vários pinos colocados em linhas retas, formando uma grade ou uma matriz. Os pinos são igualmente espaçados e são usados para prender elásticos coloridos ou cordões formando diferentes figuras geométricas.

Visando explorar novos ambientes, foi criada a versão digital do brinquedo: ele simula um geoplano virtual, uma ferramenta que contribui para a visualização e manipulação das formas geométricas de maneira interativa.

O Geoboard [23] permite que os usuários criem formas geométricas, como quadrados, retângulos, triângulos e outros polígonos, usando elásticos virtuais colocados em uma malha. O aplicativo oferece uma interface intuitiva e fácil de usar, permitindo que os usuários criem e manipulem formas geométricas usando elásticos virtuais em um quadro de grade. Nele, é possível esticar, girar e manipular esses elásticos para formar diferentes figuras geométricas e explorar seus elementos e outros conceitos como perímetro, área, simetria e muito mais.

3.2.1 Interface e Funcionalidades

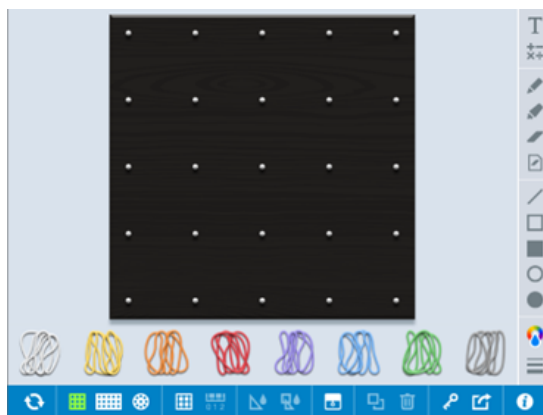
Ao abrir o aplicativo, surge uma grade virtual onde já se pode começar a fazer construções geométricas. É possível selecionar diferentes tipos de elásticos, representados

Tabela 3.2: Tabela com informações sobre o app Geoboard

Informações	
Acesso	https://encr.pw/aovID
Desenvolvedor	The Math Learning Center/Clarity Innovations
Lançamento	2010
Custo	Gratuito
Compatível com	- Versão web
Observação	Possibilidade de encontrar nas plataformas Android e IOS, dependendo da variação do aplicativo.
Objetivo	Usar o geoplano para formar segmentos de retas, polígonos e explorar formas, áreas, perímetros, dentre outras possibilidades, estabelecendo relações e comparações entre as construções.

Fonte: A autora, 2024.

por emaranhados de linhas coloridas abaixo da grade. Cada elástico pode ser arrastado e colocado na grade para formar as figuras desejadas e manipulá-las de várias maneiras.

Figura 3.4: Tela inicial do aplicativo Geoboard.

Fonte: Geoboard, 2024.

O aplicativo pode ser usado na Geometria Plana, explorando conceitos como segmentos de reta, polígonos com seus elementos e propriedades, perímetro, área, ângulos, padrões, simetria, congruência, semelhança entre figuras e transformações geométricas. O Geoboard pode ser usado também para explorar uma variedade de conceitos matemáticos, como frações, proporções, proporções áureas, entre outros, permeando conteúdos trabalhados amplamente abordados no Ensino Fundamental Anos Finais.

3.3 Pythagorea

Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego que viveu no século 6 aC. Um dos fatos geométricos mais famosos leva seu nome: o Teorema de Pitágoras. Esse

Figura 3.5: Logo do aplicativo Pythagorea.

Fonte: *Pythagorea*, 2024.

teorema afirma que, em um triângulo retângulo, a área do quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma das áreas dos quadrados dos outros dois lados, chamados de catetos. Ao jogar Pythagorea [24], você frequentemente encontra ângulos retos e confia no Teorema de Pitágoras para comparar comprimentos de segmentos e distâncias entre pontos.

Pythagorea é um aplicativo que permite estudar e explorar a Geometria em uma malha quadriculada. Ele ajuda a entender ideias e propriedades importantes da Geometria euclidiana, por meio de comandos dados pelo app a serem executados pelo jogador, possibilitando realizar construções a partir de conceitos geométricos.

Tabela 3.3: Tabela com informações sobre o app Pythagorea

Informações	
Acesso	https://acesse.one/0KEqO
Desenvolvedor	Horis International Limited
Lançamento	2016
Custo	Gratuito
Compatível com	Android e IOS
Observação	Há também a versão Pythagorea 60°, uma continuação do Pythagorea, porém em uma grade triangular, com novas propostas e desafios.
Objetivo	Usar a grade quadrada para fazer construções a partir de conceitos geométricos, obedecendo aos comandos dados pelo app, que envolve retas paralelas, pontos médios e outros objetos.

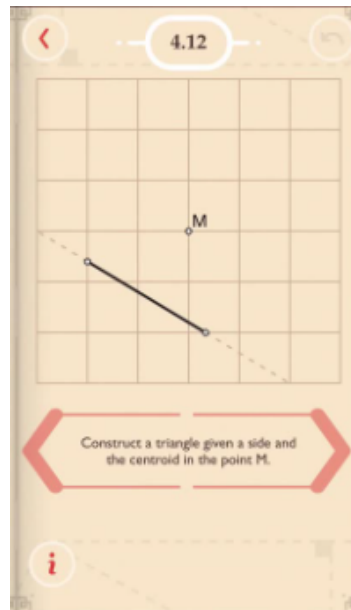
Fonte: *A autora*, 2024.

3.3.1 Interface e Funcionalidades

O jogo não possui instrumentos sofisticados. Você pode construir apenas linhas retas, segmentos e definir pontos nas interseções de linhas, de acordo com o comando estabelecido. Ao abrir o aplicativo, surge a tela com três botões: estatísticas (com os níveis já resolvidos, pacotes concluídos e tempo no jogo), jogar e configurações (como

jogar, idioma, reiniciar o progresso, entre outros). Ao clicar em “jogar”, surgem 28 opções de grandes temas relacionados à Geometria. Em cada item clicado, há vários desafios para verificar seus conhecimentos e estratégias de resolução. Muitos níveis podem ser resolvidos usando apenas sua intuição geométrica ou encontrando leis naturais, regularidade e simetria. Se você esqueceu uma definição, pode retomá-la imediatamente, no glossário

Figura 3.6: Tela de Aplicação do Aplicativo Pythagorea.



Fonte: *Pythagorea*, 2024.

do aplicativo para resolver um problema proposto. Para isso, basta clicar no botão Informações, representado por “i”.

O aplicativo pode ser usado em Geometria Plana, explorando conceitos como comprimento, distância e área, retas paralelas e perpendiculares, ângulos e triângulos, bissetrizes, medianas, ângulos e perpendiculares, Teorema de Pitágoras, círculos e tangentes, paralelogramos, quadrados, losangos, retângulos e trapézios, simetria, reflexão e rotação, presentes em todas as séries do Ensino Fundamental Anos Finais.

3.4 Geometryx

Geometryx [25] é um aplicativo simples e moderno. Ele calcula medidas de comprimento, área e volume de forma precisa e, quando necessário, informa quais dados devem ser inseridos para que os cálculos tenham sentido matemático e geométrico. Nele, é possível visualizar a forma geométrica, seja ela plana ou espacial, bem como suas principais fórmulas e equações geométricas para resolver diversos tipos de problemas e tarefas relacionadas à Geometria. A ferramenta pode ser utilizada como suporte na resolução de atividades e

Figura 3.7: Logo do aplicativo Geometryx.



Fonte: *Geometryx*, 2024.

desafios geométricos.

Tabela 3.4: Tabela com informações sobre o app Geometryx

Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/rA9M0
Desenvolvedor	Famobix
Lançamento	2017
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	Basicamente calculadora e fórmulas relacionadas a figuras planas e espaciais. Existem outros aplicativos, como Geometry 2.0, que exercem a mesma função.
Objetivo	Calcular os mais importantes valores e parâmetros de figuras planas e de sólidos geométricos.

Fonte: *A autora*, 2024.

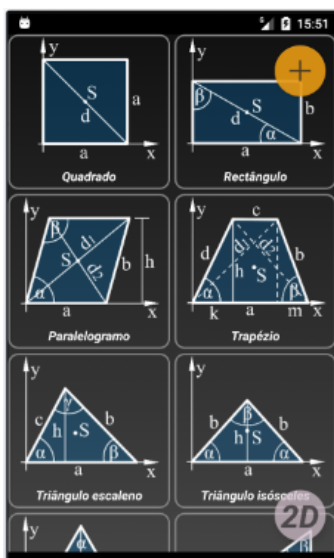
3.4.1 Interface e Funcionalidades

Logo ao abrir o aplicativo, surgem várias formas geométricas em duas dimensões, seguidas das formas de três dimensões. É possível favoritar uma ou mais formas, bem como salvar e / ou compartilhar determinada alteração realizada. Nas configurações é possível também definir o idioma, a precisão dos resultados, unidades utilizadas e outros.

Para usar a ferramenta, basta clicar na forma geométrica desejada e inserir as informações indicadas que os cálculos são realizados automaticamente. O aplicativo é bem intuitivo e fácil de manusear.

A ferramenta pode ser utilizada nos mais diversos campos da Geometria Plana e espacial, aplicada aos elementos que compõem a figura, perímetro, área, coordenadas cartesianas, volume (no caso dos sólidos), bem como explorar suas fórmulas e particularidades, tanto no Ensino Fundamental Anos Finais quanto no Ensino Médio.

Figura 3.8: Interface do aplicativo Geometryx.



Fonte: *Geometryx*, 2024.

3.5 PhET Colorado

Figura 3.9: Logo do Simulador PhET Colorado.



Fonte: *PhET Colorado*, 2024.

PhET Interactive Simulations, conhecido como PhET Colorado [26], é uma plataforma com simulações interativas nas áreas de Ciências e Matemática, desenvolvida pela Universidade do Colorado em Boulder, nos Estados Unidos, que oferece uma vasta coleção de simulações interativas para o ensino de disciplinas, como Física, Química, Biologia, Matemática, dentre outras. No contexto do ensino de Geometria, no PhET Colorado as simulações disponíveis permitem aos alunos explorar conceitos geométricos de maneira prática e interativa.

3.5.1 Interface e Funcionalidades

No campo da Geometria, há simulações envolvendo quadriláteros e áreas de figuras planas. Basta digitar no campo de pesquisa da plataforma a palavra-chave desejada e clicar no simulador.

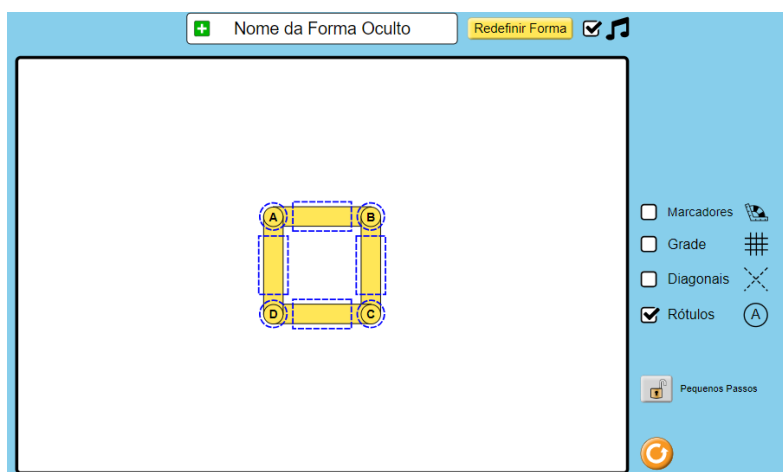
O simulador "Quadrilátero", por exemplo, permite movimentar os vértices, de modo a criar novos quadriláteros, explorar seus ângulos, diagonais e tipo de quadrilátero.

Tabela 3.5: Tabela com informações sobre o app PhET Colorado

Informações	
Acesso	https://encr.pw/wQmXm
Desenvolvedor	University of Colorado Boulder
Lançamento	2016
Custo	Pago
Compatível com	Android e IOS
Observação	O app é pago, mas existe um <i>software</i> com simuladores PHET com vários conteúdos da Matemática e outras áreas disponível de forma gratuita, via link indicado.
Objetivo	Fazer simulações e abstrair conceitos.

Fonte: A autora, 2024.

Figura 3.10: Tela de Aplicação do PhET Colorado.



Fonte: PhET Colorado, 2024.

A plataforma pode ser explorada no estudo de quadriláteros e seus elementos e áreas de figuras planas, sendo abordados nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental e podendo ser retomados nas séries seguintes.

3.6 Quebra-cabeça Geométrico

Os quebra-cabeças geométricos proporcionam uma maneira lúdica de visualizar diferentes formas geométricas, permitindo que os alunos observem e desenvolvam uma compreensão mais profunda das características e propriedades que essas figuras possuem, como número de lados, ângulos e simetrias.

Figura 3.11: Logo do aplicativo Quebra-cabeça Geométrico.



Fonte: *Quebra-cabeça Geométrico, 2024.*

Tabela 3.6: Tabela com informações sobre o app Quebra-cabeça Geométrico

Informações	
Acesso	https://acesse.one/MCvP4
Desenvolvedor	WiseApp Brain Game
Lançamento	2022
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	No início, os quebra-cabeças podem parecer simples, mas à medida que vai desbloqueando os níveis, torna-se mais desafiador.
Objetivo	Arrastar os blocos de polígonos indicados para caber no espaço vazio.

Fonte: *A autora, 2024.*

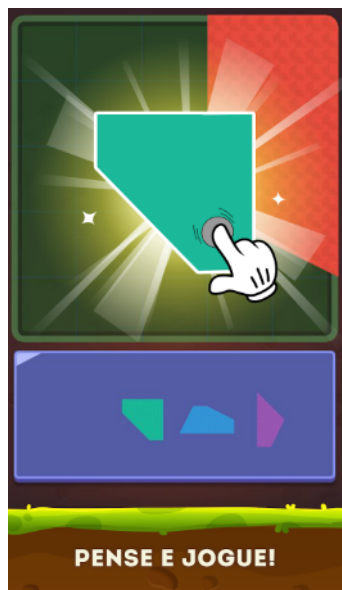
3.6.1 Interface e Funcionalidades

O aplicativo Quebra-cabeça Geométrico [27] possui interface simples e intuitiva. São dispostas as peças e um campo de trabalho à frente, um espaço em que as peças devem ser encaixadas. Este campo deve ser preenchido com peças e formas, de modo a completar todo o espaço disponível.

Aos poucos os níveis são desbloqueados e novos desafios são lançados, com formas geométricas em diferentes números bem como formas diferentes, dependendo do nível do jogo. Tais objetos podem ser manipulados apenas colocando-os corretamente no campo de jogo.

O jogo é interessante no ensino introdutório de polígonos, nas séries iniciais do Ensino Fundamental e até no 6º ano, explorando seus formatos, número de lados, nomenclaturas e ângulos, por exemplo.

Figura 3.12: Interface do aplicativo Quebra-cabeça Geométrico.



Fonte: *Quebra-cabeça Geométrico*, 2024.

3.7 Sólidos RA Realidade Aumentada

A realidade aumentada (RA) oferece uma abordagem inovadora para o estudo de sólidos geométricos, facilitando a visualização de figuras tridimensionais, tornando o aprendizado mais interativo e imersivo. Além disso, permite que os alunos compreendam os conceitos de uma maneira mais visual, prática e envolvente.

Figura 3.13: Logo do aplicativo Sólidos RA Realidade Aumentada.



Fonte: *Sólidos RA*, 2024.

A aprendizagem experiencial e prática proporcionada pela realidade aumentada tem sido associada a uma melhor memorização e retenção de informações. Os alunos tendem a lembrar-se mais facilmente dos conceitos aprendidos a partir da interação com os objetos bem como a observação com base na manipulação desses objetos.

3.7.1 Interface e Funcionalidades

O Sólidos RA [28] possui cinco módulos: visualização, planificação, criação, modelagem e geoplano. Dessa forma, é possível visualizar, interagir, alterar medidas, rotacionar e

Tabela 3.7: Tabela com informações sobre o app Sólidos RA

Informações	
Acesso	https://acesse.one/Md4B6
Desenvolvedor	Lucas.Dev
Lançamento	2021
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	É necessário baixar e imprimir o material com os QR codes usados pelo Sólidos RA na tela de informações do aplicativo. Outro aplicativo é o Geometria RA (GeometriaR), cujas funcionalidades são similares ao apresentado.
Objetivo	Possibilitar a visualização e manipulação de sólidos geométricos a partir da leitura de QR codes, usando a realidade aumentada.

Fonte: A autora, 2024.

redimensionar objetos. Há também um ambiente para criar sua própria cena de realidade aumentada a partir de sólidos como cubo e outros prismas, esfera, cone, cilindro e pirâmide.

Figura 3.14: Tela inicial do aplicativo Sólidos RA.



Fonte: Sólidos RA, 2024.

Há, ainda, a possibilidade de modelar figuras geométricas desde figuras bidimensionais, como polígonos e circunferências, a objetos tridimensionais, como pirâmides e cones. por meio do link <https://l1nk.dev/CJYqd> é possível baixar o material de apoio com os

QR codes para utilização do aplicativo.

O aplicativo pode ser utilizado no Ensino Fundamental Anos Finais e no Ensino Médio, no estudo da Geometria Espacial, explorando faces, vértices, arestas, áreas, volumes e outras propriedades dos sólidos geométricos.

3.8 Geometry Nets Helper

Figura 3.15: Logo do aplicativo Geometry Nets Helper.



Fonte: *Geometry Nets Helper*, 2024.

O cubo é um dos sólidos mais básicos e conhecidos da Geometria Espacial. Possuindo seis faces quadradas congruentes, ele tem também um alto grau de simetria rotacional e de reflexão.

Esse tipo de sólido é comumente encontrado na vida cotidiana, em objetos como dados de jogos, blocos de construção e embalagens. Sua simplicidade e simetria tornam o cubo um objeto útil em muitas aplicações práticas e também servem como um importante conceito introdutório na Geometria tridimensional. Este elemento, dentre outros, pode ser muito bem explorado pelo aplicativo Geometry Nets Helper [29].

Tabela 3.8: Tabela com informações sobre o app Geometry Nets Helper

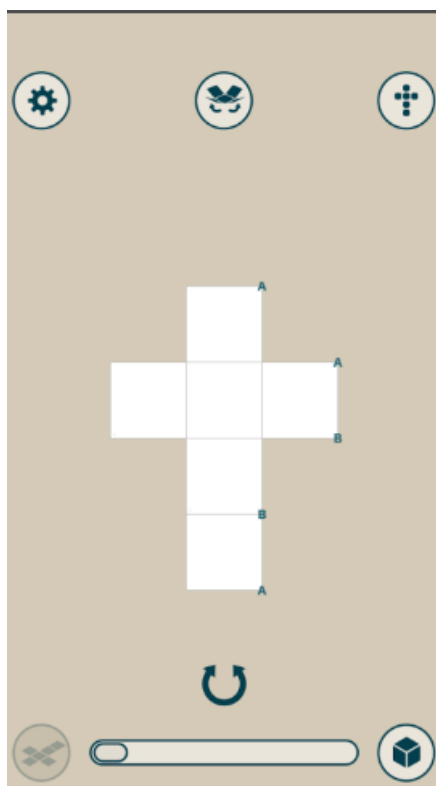
Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/hx18T
Desenvolvedor	Digital Gene
Lançamento	2019
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	Aplicativo contempla apenas o cubo.
Objetivo	Permitir visualizar as diversas planificações de um cubo e suas faces.

Fonte: *A autora*, 2024.

3.8.1 Interface e Funcionalidades

O aplicativo permite visualizar um cubo a partir de sua planificação até sua montagem. Ele mostra o cubo mudando gradualmente, passando de uma planificação para um sólido. O espectador pode entender onde as superfícies, lados e pontos se conectam, bem como identificar faces opostas e adjacentes, podendo customizar suas faces com diversas opções de cores e símbolos (alguns desenhos, letras e números). Para isso, basta clicar na face desejada que abre uma gama de opções para utilização.

Figura 3.16: Interface do aplicativo Geometry Nets Helper.



Fonte: *Geometry Nets Helper*, 2024.

Além disso, vale salientar que o aplicativo apresenta 11 planificações disponíveis para montagem do cubo e todas elas podem ser rotacionadas, refletidas e montadas de forma mais lenta ou mais rápida para facilitar a visualização desse sólido. A partir daí, vários problemas podem ser criados e testados.

O aplicativo pode ser usado no ensino introdutório de Geometria Espacial, explorando faces, vértices, arestas, planificações, bem como apresentando as rotações, vistas de um objeto, faces opostas, problemas de lógica e jogos, tanto no Ensino Fundamental Anos Finais quanto no Ensino Médio.

3.9 GeoCon

Figura 3.17: Logo do aplicativo GeoCon.



Fonte: *GeoCon*, 2024.

O uso de circunferências como suporte em construções geométricas é uma prática comum e versátil já que oferecem várias propriedades úteis e possibilidades para a construção de estruturas complexas. A partir da circunferência, é possível construir ponto médio, dividir em partes iguais, construir figuras equiláteras, ângulos diversos. Aqui, ela entra também dando suporte e possibilitando novas construções.

Tabela 3.9: Tabela com informações sobre o app GeoCon

Informações	
Acesso	https://acesse.one/BRREL
Desenvolvedor	Oleh Yudin
Lançamento	2014
Custo	Gratuito
Compatível com	IOS
Observação	Versões inglês, japonês e russo.
Objetivo	Fazer construções no campo da Geometria Plana

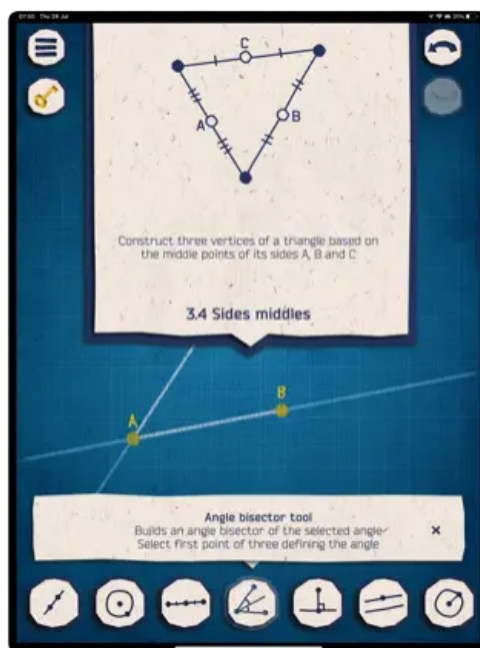
Fonte: *A autora*, 2024.

3.9.1 Interface e Funcionalidades

O aplicativo GeoCon [30] permite resolver tarefas de construção de modo a descobrir novos níveis, reunir conquistas, competir com amigos e aumentar as habilidades de raciocínio matemático e compreensão.

As etapas fáceis do tutorial ensinarão as construções geométricas básicas: definir e mover pontos, construir linhas e círculos, criar pontos de interseção. Além do modo de jogo, há o modo prática, em que todas as ferramentas de construção estão disponíveis. É possível usar o Modo Prática para estudar as ferramentas de construção e resolver as próprias ideias antes de entrar no Modo de Jogo.

Figura 3.18: Interface do aplicativo GeoCon.



Fonte: *GeoCon*, 2024.

GeoCon pode ser explorado no ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, trabalhando as construções geométricas básicas como ponto médio, bissetriz, paralelas, perpendiculares, a partir de segmentos de retas, circunferências e triângulos.

3.10 Pattern Shapes

Figura 3.19: Logo do aplicativo Pattern Shapes.



Fonte: *Pattern Shapes*, 2024.

Pattern Shapes [31] é uma ferramenta para explorar uma variedade de tópicos matemáticos. Os alunos usam formas geométricas para explorar Geometria e frações, criar seus próprios designs ou preencher contornos. À medida que trabalham com formas, os alunos pensam em ângulos, investigam a simetria e compõem e decompõem formas maiores.

Tabela 3.10: Tabela com informações sobre o app Pattern Shapes

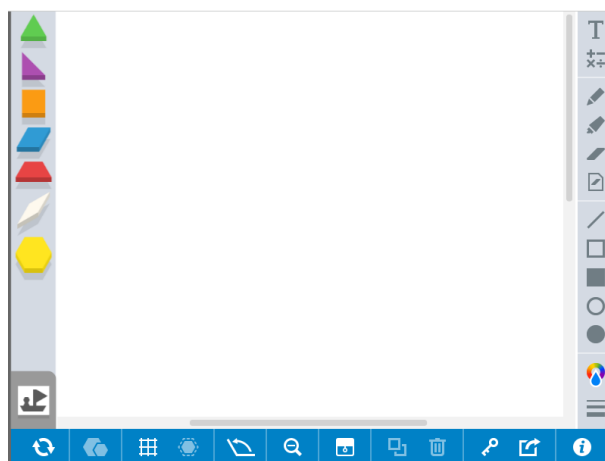
Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/eXWsp
Desenvolvedor	The Math Learning Center/Clarity Innovations
Lançamento	2021
Custo	Gratuito
Compatível com	IOS
Observação	App em inglês. Possibilidade de usar na versão web (https://l1nq.com/RPiCV)
Objetivo	Usar formas geométricas para explorar seus elementos, ângulos, simetria, composição e decomposição de novas figuras.

Fonte: A autora, 2024.

3.10.1 Interface e Funcionalidades

O manuseio das ferramentas é bem intuitivo. Há formas geométricas padrões que basta tocar ou arrastar para adicionar à área de trabalho. As formas podem ser rotacionadas da maneira que preferir utilizá-las, assim como é possível inserir malhas na tela, contorno de figuras para encaixe das formas geométricas, transferidor para medir ângulos, dentre outras possibilidades.

Figura 3.20: Tela inicial do aplicativo Pattern Shapes.



Fonte: *Pattern Shapes*, 2024.

A plataforma pode ser utilizada no ensino de Geometria Plana, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, trabalhando as formas geométricas e seus elementos, ângulos, simetria, composição e decomposição de novas figuras e semelhança entre figuras, por exemplo.

3.11 Geometry Pad

Figura 3.21: Logo do aplicativo Geometry Pad.



Fonte: *Geometry Pad*, 2024.

Na busca por criar, explorar e identificar as propriedades das formas geométricas, apresentamos o aplicativo Geometry Pad [32], com ferramentas que possibilitam uma análise completa e profunda envolvendo vários conceitos estudados em Geometria.

Tabela 3.11: Tabela com informações sobre o app Geometry Pad

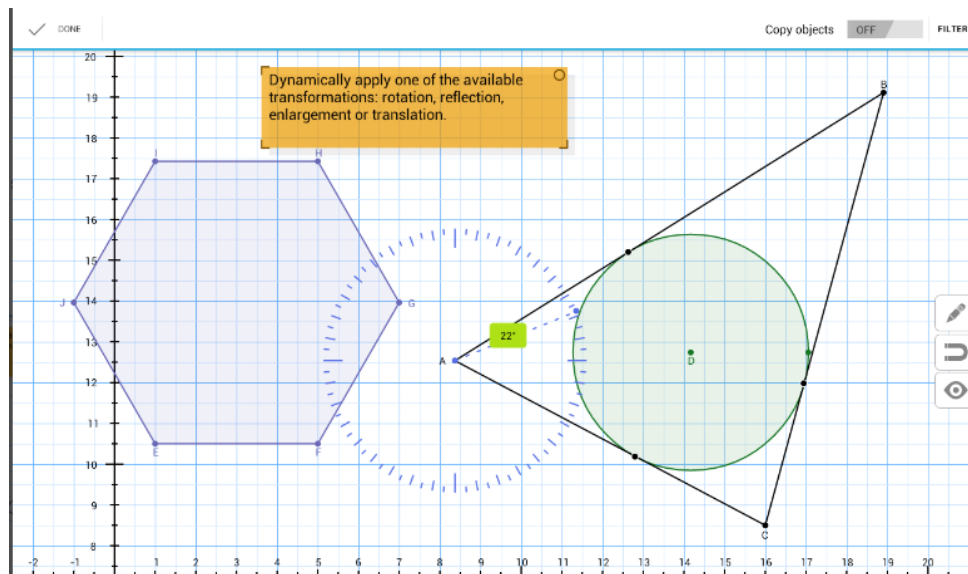
Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/bKD4G
Desenvolvedor	Bytes Arithmetic LLC
Lançamento	2021
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	App em inglês.
Objetivo	Criar formas geométricas fundamentais, explorar e alterar suas propriedades e calcular métricas.

Fonte: *A autora*, 2024.

3.11.1 Interface e Funcionalidades

O aplicativo tem como interface uma malha com sistema de coordenadas cartesianas e oferece uma gama de possibilidades no estudo da Geometria. Ao clicar no lápis de edição à direita, surgem opções para inserir na tela. Trata-se de ferramentas que vão desde a criação de triângulos, quadriláteros e outros polígonos e seus elementos (mediana, altura, bissetriz...), como maneiras adicionais de criar uma elipse, bússola para traçar arcos com centro e raio facilmente ajustáveis, transferidores para medir ângulos. Existe a possibilidade também de desenhar e fazer anotações à mão livre, inserir imagens, anotações de texto, rótulos de medidas, dentre outros.

Figura 3.22: Interface do aplicativo Geometry Pad.



Fonte: *Geometry Pad/Autora, 2024.*

No ensino de Geometria, o aplicativo pode ser utilizado tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, passando por todas as séries desses segmentos, a depender do conteúdo desejado. Pode ser explorado ponto, ângulos, retas e segmentos de retas, raio, segmento, bissetriz, perpendicular, tangente, triângulo, quadrilátero e outros polígonos, arco, setor, círculo, elipse, reflexão, ampliação, translação, semelhança entre figuras, perímetros e áreas, por exemplo.

3.12 ICrosss

Figura 3.23: Logo do aplicativo ICrosss.



Fonte: *ICrosss, 2024.*

O poliedro é uma figura geométrica tridimensional composta por faces planas, onde cada face é um polígono. Eles são uma parte fundamental da Geometria tridimensional e têm uma vasta gama de aplicações em diversas áreas, incluindo arquitetura, design, engenharia e ciência. O aplicativo ICrosss é um suporte no estudo dos poliedros, uma vez que possibilita a visualização e exploração da figura espacial.

Tabela 3.12: Tabela com informações sobre o app ICrosss

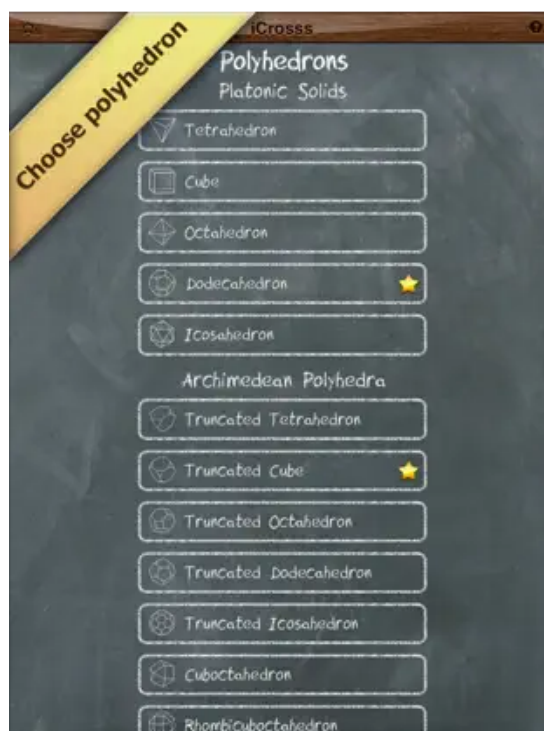
Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/77uxK
Desenvolvedor	Oleh Yudin
Lançamento	2011
Custo	Pago
Compatível com	IOS
Observação	App em inglês. Há outros aplicativos similares, também pagos, como Poliedro e Poliedros Vol.1 e Vol.2 e Polyhedra 3D.
Objetivo	Explorar os poliedros e suas propriedades.

Fonte: A autora, 2024.

3.12.1 Interface e Funcionalidades

O ICrosss [33] permite construir uma seção transversal em um poliedro: o plano pode ser definido por três pontos nas faces do poliedro. É possível também rotacioná-los em qualquer direção, observando os sólidos e suas propriedades. O aplicativo possui poliedros regulares (sólidos platônicos), pirâmides, prismas e outros sólidos.

Figura 3.24: Interface do aplicativo ICrosss.



Fonte: ICrosss, 2024.

O aplicativo é uma opção para trabalhar a Geometria Espacial no Ensino Médio, explorando os poliedros e suas propriedades.

3.13 Smart Protractor

Figura 3.25: Logo do aplicativo Smart Protractor.



Fonte: *Smart Protractor*, 2024.

Que tal um transferidor interativo? O aplicativo permite fazer medições instantâneas de ângulos em imagens e objetos a partir da câmera do celular ou *tablet*.

Tabela 3.13: Tabela com informações sobre o app Smart Protractor

Informações	
Acesso	https://acesse.one/qS7nB
Desenvolvedor	Smart Tools co.
Lançamento	2010
Custo	Gratuito
Compatível com	Android
Observação	Há outros aplicativos similares, como várias versões de Protractor, a depender do desenvolvedor.
Objetivo	Medir ângulos e inclinações.

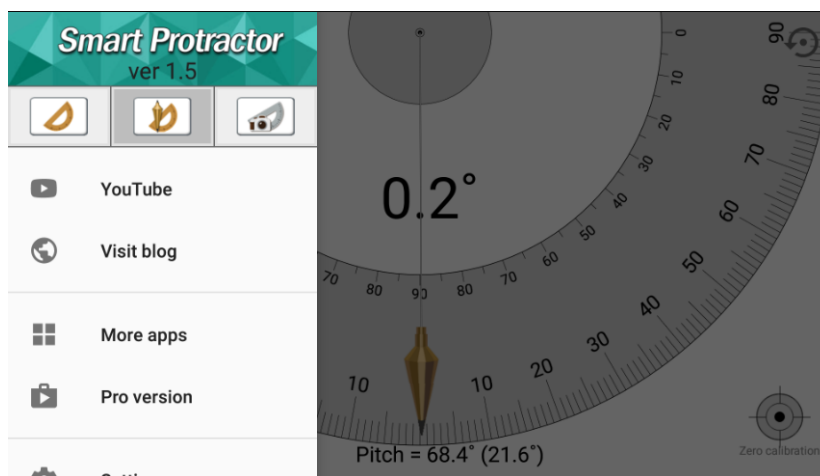
Fonte: *A autora*, 2024.

3.13.1 Interface e Funcionalidades

O aplicativo Smart Protractor [34] é um transferidor interativo que mede o ângulo e a inclinação de um objeto, seja movendo o aparelho celular ou *tablet*, seja manuseando o ângulo com os dedos. Ele possui três modos de transporte: modo de toque para o ângulo, modo prumo para a inclinação e modo da câmera para goniômetro (instrumento que mede um ângulo ou permite que um objeto seja girado para uma posição angular precisa), inclinômetro, utilizando a visão da câmera. Basta clicar no canto superior esquerdo e selecionar a opção desejada.

O aplicativo pode ser uma ótima ferramenta do estudo da Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, como suporte no trato de ângulos e inclinação de objetos e formas geométricas, seja ela plana ou espacial.

Figura 3.26: Interface do aplicativo Smart Protractor.



Fonte: *Smart Protractor*, 2024.

3.14 XSection

Figura 3.27: Logo do aplicativo XSection.



Fonte: *XSection*, 2024.

Estudar e visualizar as representações 2D em sólidos geométricos não é tarefa muito fácil. O uso de aplicativos e *softwares* como suporte contribui para um melhor entendimento e visualização no campo da Geometria Espacial e suas propriedades.

Tabela 3.14: Tabela com informações sobre o app XSection

Informações	
Acesso	https://l1nk.dev/Swcc1
Desenvolvedor	Horis International Limited
Lançamento	2019
Custo	Gratuito
Compatível com	Android e IOS
Observação	Em inglês. Não houve atualização desde o lançamento.
Objetivo	Perceber representações 2D em figuras 3D.

Fonte: *A autora*, 2024.

3.14.1 Interface e Funcionalidades

O XSection [35] é um treinador de solução de problemas de “Geometria sólida”. Ele ensina como perceber a representação 2D de poliedros, linhas e planos do espaço euclidiano 3D. Todos os problemas podem ser resolvidos sem cálculos complexos. O aplicativo contém os fatos teóricos e explicações necessários. Se você esqueceu uma definição, pode encontrá-la instantaneamente no glossário do aplicativo.

Figura 3.28: Interface do aplicativo XSection.



Fonte: XSection, 2024.

O aplicativo é dividido em três categorias: *basics*, *tutorials* e *practice*. Significa que são explorados os fundamentos básicos, tutoriais e a prática. Em todas essas categorias, o jogador deve interagir à medida que as instruções são dadas. Aqui, há dicas, glossário e várias outras informações que podem auxiliar no manuseio do aplicativo, seja qual for o nível em que ele está.

No campo da Geometria, o aplicativo permite explorar informações e traçados da Geometria Plana dentro do universo da Geometria Espacial, suas construções e propriedades, como diagonais de poliedros, seções transversais, projeções e outros traçados, sendo uma ferramenta interessante para o estudo mais aprofundado da Geometria sólida no Ensino Médio.

3.15 Euclidea

Figura 3.29: Logo do aplicativo Euclidea.



Fonte: *Euclidea*, 2024.

As construções geométricas com o uso de régua e compasso têm uma longa história e são uma parte fundamental no desenvolvimento e estudo da Geometria. Essas ferramentas simples permitem criar figuras geométricas precisas e explorar diversas propriedades dos objetos geométricos. Com uma régua e um compasso é possível realizar uma variedade de construções geométricas básicas.

Quando se trata de construções geométricas com auxílio de ferramentas digitais, cria-se um ambiente que oferece vantagens adicionais, como a capacidade de desfazer e refazer ações, explorar construções complexas de forma rápida e precisa, e até mesmo visualizar animações que demonstram as propriedades geométricas em ação, além da capacidade de explorar construções em diferentes configurações e escalas. Um exemplo disso é por meio do aplicativo Euclidea [36].

Tabela 3.15: Tabela com informações sobre o app Euclidea

Informações	
Acesso	https://www.euclidea.xyz/en/
Desenvolvedor	Horis International Limited
Lançamento	2016
Custo	Gratuito
Compatível com	Android e IOS
Observação	Em inglês. Há a possibilidade de usar o aplicativo também na versão web.
Objetivo	Criar construções geométricas planas usando régua e compasso.

Fonte: *A autora*, 2024.

3.15.1 Interface e Funcionalidades

Euclidea leva os usuários a explorar os princípios fundamentais da Geometria através de uma série de desafios interativos.

Figura 3.30: Interface do aplicativo Euclidea.



Fonte: *Euclidea*, 2024.

O aplicativo apresenta uma variedade de tarefas, cada uma projetada para ensinar um conceito específico de forma clara e envolvente. Os usuários são desafiados a construir figuras geométricas planas usando apenas um conjunto de ferramentas específicas, como régua e compasso, em um espaço virtual.

Uma das características marcantes do Euclidea é sua abordagem para o ensino da Geometria. Os desafios começam com conceitos básicos e avançam para problemas mais complexos, permitindo que os usuários construam seu conhecimento passo a passo. Além disso, o aplicativo oferece dicas e orientações úteis para ajudar a superar obstáculos.

O aplicativo pode ser utilizado tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, no estudo de Geometria Plana, com bissetrizes, retas, segmentos de retas, ângulos, perpendiculares, etc. Além disso, desafios envolvendo tangentes internas/externas, hexágonos regulares e seção áurea, por exemplo, desenvolvendo uma experiência em construção euclidiana.

3.16 Mathigon

Figura 3.31: Logo da plataforma Mathigon.



Fonte: *Mathigon, 2024*.

O Mathigon [37] é uma plataforma educacional que oferece uma abordagem interativa no ensino de Geometria (e outros conteúdos) por meio de uma coleção de manipuladores digitais interativos, cursos, atividades e lições.

Tabela 3.16: Tabela com informações sobre a plataforma Mathigon

Informações	
Acesso	https://pt.mathigon.org/
Desenvolvedor	Philipp Legner
Lançamento	2012
Custo	Gratuito
Compatível com	- Navegador Web
Observação	Plataforma de código aberto, o que significa que seu desenvolvimento é colaborativo e aberto à contribuição da comunidade com conteúdo, recursos e melhorias.
Objetivo	Fazer manipulações, explorar padrões, ferramentas e atividades diversificadas no campo da Matemática.

Fonte: *A autora, 2024*.

3.16.1 Interface e Funcionalidades

A plataforma oferece uma série de possibilidades no campo da Geometria e outras áreas da Matemática e segue como sugestão explorá-las para conhecer as ferramentas disponíveis nessa plataforma. Seguem alguns exemplos:

- O “Origami Matemático” apresenta, por meio de dobraduras, a construção de sólidos platônicos, arquimedianos, estrelas e compostos a partir da junção de poliedros, bem como outros origamis. Junto a eles, há também opção de leitura de axiomas, aplicações de origami e polígonos e poliedros.

- A opção “Simetria” possibilita uma leitura e visualização de transformações e simetria em plantas, animais e nas construções.

Além delas, vale explorar outras aplicações na Matemática para além da Geometria. Por hora, vamos nos ater a aprofundar um pouco duas opções presentes em Mathigon, explorando o ensino de Geometria: Polypad e Factris.

3.16.2 Polypad

Figura 3.32: Logo da plataforma Polypad.



Fonte: *Polypad*, 2024.

Polypad é uma coleção de manipuladores digitais interativos para professores e alunos. Ele está presente na plataforma Mathigon, via web.

Ao abrir um Polypad vazio, basta arrastar os blocos da barra lateral para a tela. Ao selecionar um bloco, procure o ícone na barra de ação ou abra o Guia Exemplos na barra lateral para navegar por uma grande coleção de exemplos de Polypads. Quando conectado, esses exemplos aparecerão em uma pasta da sua biblioteca, a partir de um login realizado previamente. Os alunos podem começar sem precisar criar uma conta ou fazer login. No entanto, são necessárias contas gratuitas para que os alunos salvem seus trabalhos, voltem mais tarde e continuem trabalhando ou compartilhem seus trabalhos.

Figura 3.33: Interface do aplicativo Polypad.



Fonte: *Polypad/Autora*, 2024.

A cada escolha arrastada para a tela, ao clicar em "?", surge uma aba com o tutorial para essa aplicação, de modo a explorar a forma escolhida sob várias maneiras.

O Polypad permite trabalhar a Geometria Plana e a Espacial, explorando seus elementos e especificidades. O aplicativo pode ser abordado tanto no Ensino Fundamental Anos Finais, quanto no Ensino Médio, com polígonos seus elementos e propriedades, ângulos, simetrias, construções geométricas, sólidos nas formas planificadas e montadas, com seus elementos e propriedades, rotações e translações, medições de perímetros, áreas, volumes, entre outros, a depender da abordagem trazida pelo professor.

3.16.3 Factris

Figura 3.34: Logo do aplicativo Factris.

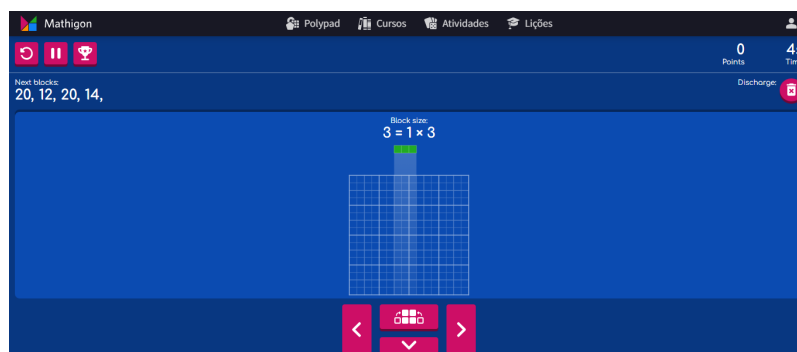


Fonte: *Factris*, 2024.

Um jogo bastante conhecido, criado em 1984, é o Tetris. Trata-se de um quebra-cabeça, criado pelo programador russo Alexey Pajitnov, em que peças de diferentes formatos, chamadas de tetromínós, descem em uma grade. O jogador deve girar e mover essas peças para encaixá-las e formar linhas completas sem lacunas. Quando uma linha é completada, ela desaparece, e o jogador ganha pontos. O objetivo é evitar que as peças alcancem o topo da grade, pois isso resultaria no fim do jogo.

Com semelhança na forma de jogar, temos o Factris, presente na plataforma Mathigon. Factris é um jogo que consiste em empilhar retângulos que descem a tela de forma que completem linhas horizontais.

Figura 3.35: Interface do aplicativo Factris.



Fonte: *Factris*, 2024.

As peças podem ser redimensionadas, alterando as medidas inteiras dos lados, desde que mantenham a mesma área inicial. Quando uma linha se forma, ela se desintegra, as camadas superiores descem, e o jogador ganha pontos. Quando a pilha de peças chega ao topo da tela, a partida se encerra - *Game over!*

Do ponto de vista da Geometria, é possível explorar a ideia de áreas e perímetros de retângulos e comparação de retângulos diferentes com áreas iguais, a depender das dimensões que ele possuir. De maneira mais ampla, no campo da Matemática, podem ser trabalhadas a aritmética simples, divisibilidade e fatoração dentro do mesmo jogo. Dessa forma, o jogo é indicado em sala de aula nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental.

3.17 Sweet Home 3D

Figura 3.36: Logo da plataforma Sweet Home 3D.



Fonte: *Sweet Home 3D*, 2024.

A Matemática desempenha um papel fundamental na construção civil em várias áreas, desde o planejamento inicial até a execução e manutenção de projetos. A aplicação dos conceitos matemáticos é essencial para garantir a precisão, eficiência e segurança em todos os estágios de um projeto de construção. Nesse sentido, é possível utilizar o aplicativo Sweet Home 3D [38], contemplando a construção civil atrelada ao ensino de Geometria.

3.17.1 Interface e Funcionalidades

Sweet Home 3D é uma aplicação de design interior que ajuda colocar mobílias em uma casa projetada em um plano 2D, com uma visualização em 3D. Enquanto desenha a casa em 2D, é possível visualizar simultaneamente a construção em 3D, a partir do ponto de vista aéreo, ou navegar dentro da casa a partir do ponto de vista de um visitante virtual.

Ao acessar o programa, há a possibilidade de escolher uma demonstração do espaço em que se quer trabalhar e, a partir dele, o ambiente de trabalho que é dividido em 4 regiões: uma contendo as pastas com diversos objetos que podem ser inseridos na construção, outra contendo a visão bidimensional, outra contendo a lista de objetos e itens presentes

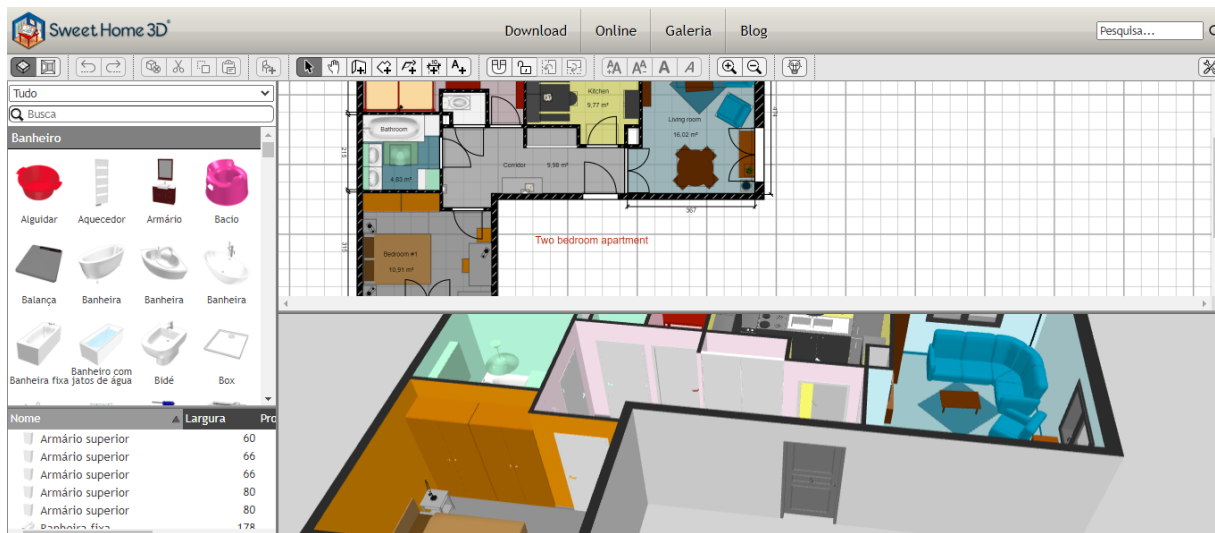
Tabela 3.17: Tabela com informações sobre o app Sweet Home 3D

Informações	
Acesso	https://www.sweethome3d.com/pt/
Desenvolvedor	Emmanuel Puybaret
Lançamento	2005
Custo	Gratuito
Compatível com	Windows, macOS, Linux
Observação	Há a possibilidade de usar o aplicativo também na versão web.
Objetivo	Visualizar plantas baixas, ângulos, proporções, manipulação de formas geométricas, perímetros, áreas e volumes, em 2D e 3D, no campo da construção civil e design de interiores.

Fonte: A autora, 2024.

na construção e uma outra mostrando a visão tridimensional. Para conhecer a fundo o aplicativo e suas funcionalidades, a dissertação [39] “Apostila sobre a Matemática na Construção Civil com o uso do Sweet Home 3D”, explora o aplicativo sob várias abordagens no campo da Geometria.

Figura 3.37: Interface do aplicativo Sweet Home 3D.



Fonte: Sweet Home 3D, 2024.

No ensino de Geometria, o aplicativo possibilita trabalhar tanto a formas planas quanto as espaciais, podendo explorar as propriedades de polígonos, circunferências e círculos, o estudo de perímetros, áreas e volumes, além de proporção e escala, ângulos, simetrias e formas geométricas, tanto nas séries finais do Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

3.18 SketchUp

Figura 3.38: Logo do aplicativo SketchUp.



Fonte: *SketchUp*, 2024.

Uma outra ferramenta que pode ser considerada no ensino de Geometria é o aplicativo SketchUp [40], que possui ferramentas fáceis de manusear, oferecendo uma abordagem prática, intuitiva, além de facilitar a visualização e entendimento de conceitos e propriedades.

Tabela 3.18: Tabela com informações sobre o app SketchUp

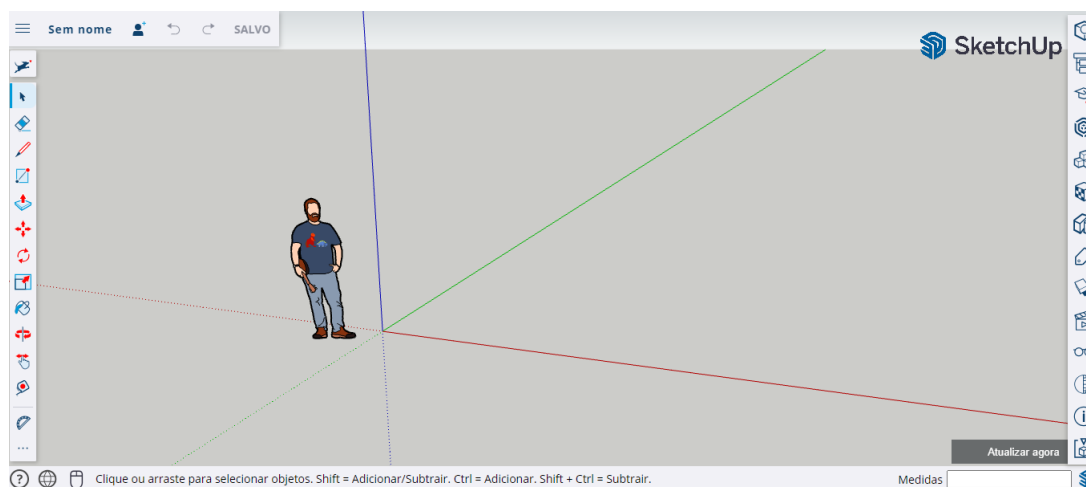
Informações	
Acesso	https://app.sketchup.com/app
Desenvolvedor	Trimble Navigation (desde 2012)
Lançamento	2000
Custo	Versão gratuita e versão paga
Compatível com	Windows e macOS
Observação	Gratuito com contas do G-Suite for Education ou do Microsoft Education.
Objetivo	Visualizar plantas baixas, ângulos, proporções, manipulação de formas geométricas, perímetros, áreas e volumes, em 2D e 3D, no campo da construção civil, arquitetura, design de interiores e paisagismo.

Fonte: *A autora*, 2024.

3.18.1 Interface e Funcionalidades

O SketchUp é conhecido por sua versatilidade e facilidade de uso. Ele permite que os usuários criem modelos tridimensionais de forma rápida e intuitiva, seja criando figuras 2D e transformando em 3D ou importando imagens para fazer a modelagem. Além disso, o SketchUp possui uma grande biblioteca de extensões e *plugins* que expandem ainda mais suas funcionalidades, permitindo aos usuários personalizar o *software* de acordo com suas necessidades específicas.

Figura 3.39: Interface do aplicativo SketchUp.



Fonte: *SketchUp*, 2024.

No ensino de Geometria, o aplicativo pode ser usado no estudo de perímetros, áreas, volumes, ângulos, semelhanças entre figuras, além de proporção, simetrias, paralelismo, formas geométricas e suas propriedades e mais, tanto nas séries finais do Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

Considerando as possibilidades de aplicabilidade nos diversos conteúdos da Geometria, o SketchUp foi o aplicativo escolhido por nós para aprofundamento e proposta de atividade para a sala de aula, como veremos no próximo capítulo, onde também procuraremos justificar nossa escolha.

4 Explorando o SketchUp

4.1 Introdução

O SketchUp é um *software* de modelagem 3D lançado em 2000 e utilizado em diversas áreas, como arquitetura, design de interiores, engenharia civil, paisagismo, entre outras. Brad Schell e Joe Esch, fundadores da empresa, criaram o *software* com o objetivo de desenvolver uma ferramenta acessível e intuitiva para modelagem 3D. Pouco depois, a primeira iteração do SketchUp foi lançada em Boulder, Colorado. Seu desenvolvedor atualmente é a Trimble Navigation, com sua tecnologia que visa facilitar e melhorar o ambiente do SketchUp, desenvolvendo e mantendo o *software* até hoje. Essa e outras informações estão disponíveis na página do SketchUp, em [SketchUp - Nossa História](#)¹.

Em termos de compatibilidade, o SketchUp é disponível para Windows e MacOS. Existem diferentes versões do *software*, incluindo desde o SketchUp Pro, que é a versão paga com recursos avançados destinados a profissionais, até o SketchUp Free, na versão web gratuita. Para acessar o SketchUp for Web você precisa de uma Trimble Identity (Trimble ID). Trimble ID é a funcionalidade de login usada para acesso rápido e seguro ao SketchUp e a todos os outros produtos Trimble. Também pode ser usado uma conta Google para o acesso.

Embora não seja uma ferramenta diretamente voltada para o ensino de Matemática, percebemos potencialidades no aplicativo, com ferramentas interessantes e que podem ser exploradas no ambiente escolar. Aqui, vamos explorar um pouco do SketchUp, levando-o para a sala, em aulas de Geometria. Apresentaremos as ferramentas básicas para que o professor possa utilizá-lo em suas aulas, sob diversos contextos da Geometria, bem como uma proposta de atividades detalhadas com o uso do aplicativo.

Achamos interessante trazer esse aplicativo por se tratar de uma ferramenta de modelagem, um *software* próprio para a criação de modelos em 3D para desenvolvimento de projetos e não propriamente um aplicativo voltado para o ensino, mas que pode muito bem ser aplicado em sala de aula pela variedade de ferramentas e possibilidades no ensino

¹<https://www.sketchup.com/pt-br/our-story>

de geometria. Em nossa visão, utilizar um *software* cujo propósito seja, a princípio, alheio a sala de aula de Matemática, voltado para a área de arquitetura, construção civil, design moveleiro, etc, enriquece o aprendizado matemático dos estudantes, pois os proporciona um contato com reais aplicações da Geometria. Além disso, é importante apresentar conceitos abordados em sala aplicados em contextos cotidianos, o famoso “Onde eu vou usar isso na minha vida?” que os professores tanto escutam. Conceitos básicos e fundamentais, como as noções de paralelismo, perpendicularismo, simetrias, dentre outros, podem ser explorados no contexto da sua aplicação prática. Além disso, o apelo da novidade, do inusitado, do “fora da caixa”, proporcionado pela ferramenta computacional, funciona como um motivador para o aprendizado e contextualização do que é ensinado ao aluno, aos olhos das novas tecnologias. Tudo isso, a nosso ver, vai ao encontro do que é preconizado nas diretrizes para o ensino de Matemática na BNCC, documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, presentes na BNCC (2018, p. 267), é:

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Diversas são as habilidades que envolvem o uso de tecnologias no ensino de Geometria, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio:

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e / ou tecnologias digitais.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área

de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.


(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Ainda sobre a BNCC, na área da Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental.

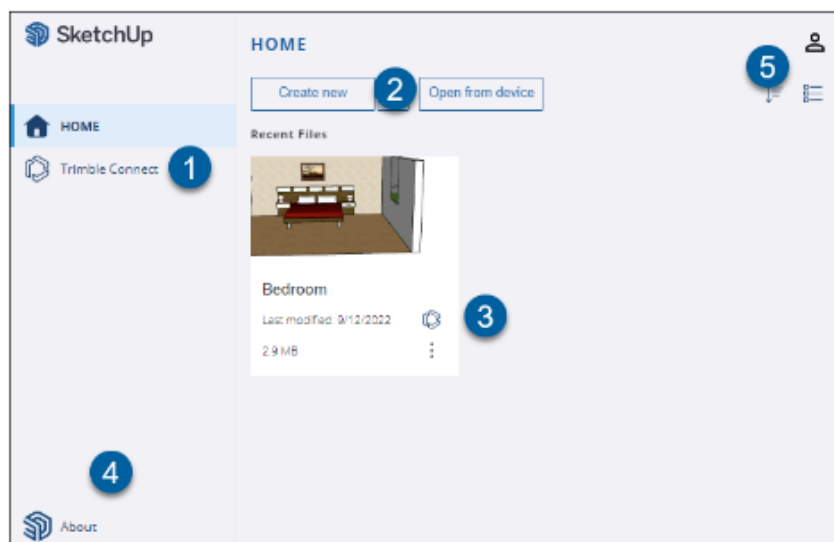
4.2 Primeiros Passos com o SketchUp

Em nossa apresentação, nos ateremos ao SketchUp for Web, versão gratuita do app. Muitas orientações e descrições aqui apresentadas foram extraídas do próprio aplicativo, como mostrar instruções de acesso (abrir e salvar), configurações e funcionalidades.

Para acessar a versão web do aplicativo SketchUp, na barra de pesquisa da *internet*, digite sketchup.com/pt-br/products/sketchup-for-web. No campo superior direito, clique em  e acesse o aplicativo. Aqui você pode criar uma conta ou acessar a partir do seu e-mail. Após acessar a conta, clique em “Comece a modelar”, localizado no canto inferior esquerdo da tela. Clique em “Criar novo” e surgirá a tela de trabalho para realizar as construções.

Ao abrir o SketchUp for Web pela primeira vez, teremos a tela inicial, conforme Figura 4.1.

Figura 4.1: Tela inicial do SketchUp



Fonte: *SketchUp*, 2024.

Na tela, temos acesso às seguintes opções:

1. Acesse o *Trimble Connect*.
2. Crie um novo modelo ou importe um modelo salvo localmente.
3. Escolha em uma lista de modelos abertos recentemente.
4. Consulte as informações sobre o SketchUp.
5. Acesse as informações da sua conta Trimble.

Depois de abrir um modelo, a interface de modelagem do SketchUp for Web contém todas as ferramentas e opções necessárias para criar modelos 3D impressionantes.

O Menu Principal contém diversas opções que ajudam a gerenciar o modelo escolhido:

- Início - Retorna à tela inicial.
- Novo – Cria um novo arquivo de modelo.
- Abrir – Abre um arquivo de modelo existente.
- Salvar como – Salva seu modelo.
- Importar – Importa outros arquivos ou imagens para o seu modelo.
- Exportar – Exporta seu modelo para outros formatos.
- Download - Baixa seu modelo usando um formato específico.
- Configurações do aplicativo – abre a janela Configurações.
- Adicionar localização - Use o serviço Adicionar localização para adicionar imagens de localização geográfica e data ao seu modelo.
- Imprimir - Imprima ou crie um arquivo.pdf do seu modelo.

Abrindo arquivos

Ao iniciar o SketchUp for Web, você terá algumas maneiras de abrir modelos nos quais trabalhou anteriormente. A seção “Arquivos Recentes” da página inicial do SketchUp for Web contém qualquer modelo aberto recentemente que ainda exista no cache do seu navegador. Para abrir um arquivo na seção, basta clicar no bloco do arquivo. **Observação:** ao limpar o cache do seu navegador ou usar outro navegador ou dispositivo para acessar o SketchUp for Web, a seção de arquivos recentes ficará vazia.

O SketchUp for Web salva seu modelo no *Trimble Connect* por padrão. Para abrir arquivos, selecione *Trimble Connect* no lado esquerdo da página inicial; escolha o projeto no qual você salvou seu modelo e selecione o modelo que deseja abrir.

Para abrir um arquivo no formato .skp salvo localmente, siga estas etapas: na página inicial do SketchUp for Web, selecione “Abrir” do dispositivo; localize o arquivo que deseja abrir e selecione “Abrir”. Quando você abre um modelo baixado, o SketchUp for Web o trata como um arquivo temporário até que você o salve manualmente.

Salvando arquivos

Depois de criar um modelo, salve-o seguindo estas etapas: Selecione “Sem título” ou “Salvar” na barra de menu. A janela *Trimble Connect* aparecerá. Escolha em qual projeto você deseja salvar seu modelo, dê um nome a ele e selecione “Salvar aqui”.

Quando o SketchUp for Web salva automaticamente um modelo, ele também cria um backup local, armazenado no cache do navegador. Os arquivos de backup recuperados são carregados como novos modelos, não associados ao arquivo original salvo no *Trimble Connect*. É possível usar “Salvar como” para substituir o arquivo no *Trimble Connect*.

Cada vez que um modelo é salvo - e sempre que o SketchUp for Web salva automaticamente - o *Trimble Connect* cria uma nova versão dele. Para acessar o histórico de revisões de um modelo, navegue até esse modelo na guia “Início” ou no *Trimble Connect*. Abra o menu de opções de arquivo e selecione “Histórico”. Uma barra lateral mostrando cada versão antiga salva do seu modelo aparecerá no lado direito da página inicial. Ao passar o mouse sobre uma das versões mais antigas salvas, aparecerá um ícone que permite abrir a versão mais antiga desse modelo no SketchUp for Web.

Ao revisar esta versão mais antiga de um modelo, quaisquer alterações feitas serão temporárias até que sejam salvas manualmente. Ao salvar o modelo, é possível optar por restaurar esta versão do modelo como a versão atual ou salvar esta versão como uma cópia.

É possível também compartilhar o projeto (apenas com modelos publicados no *Trimble Connect*). O recurso de compartilhamento por link gera um endereço somente para visualização que você pode compartilhar com outras pessoas. Seus colaboradores podem abrir e ver o modelo no SketchUp para Web sem precisar fazer login ou instalar quaisquer aplicativos.

4.3 Ferramentas Práticas Para o Professor


O aplicativo SketchUp oferece uma série de ferramentas que podem ser utilizadas no trato de Geometria. Várias dessas ferramentas podem ser úteis para professores que desejam utilizar o aplicativo. A partir das funcionalidades dessas ferramentas, cabe ao professor fazer adaptações que julgar necessárias no uso do app para a sua sala de aula. Vamos começar a conhecer agora, de forma mais ampla, as possibilidades dadas pelo app e, na sequência, faremos uma apresentação um pouco mais detalhada de algumas ferramentas disponíveis no aplicativo.

- Manipulação de formas geométricas: há uma variedade de ferramentas para desenhar formas geométricas, como círculos e polígonos. Essas ferramentas são úteis para demonstrar conceitos fundamentais de Geometria, como áreas, perímetros, semelhanças e outras relações entre formas. Adicionalmente, pode-se facilmente construir sólidos diversos a partir desses elementos planos.
- Ferramentas de edição: permitem que os usuários modifiquem e manipulem as formas que criaram. É possível mover, girar, dimensionar e inclinar objetos, favorecendo o trabalho com transformações geométricas, simetrias, rotações, reflexões, entre outros.
- Medidas e dimensões precisas, análise de distâncias e ângulos: há ferramentas para medir distâncias, ângulos e outras propriedades das formas criadas. Com elas, é possível especificar medidas precisas ao desenhar formas para trabalhar

comprimentos, áreas, perímetros, volumes e ângulos, além de congruência, semelhança e até trigonometria, por exemplo.

- Ferramentas de texto e anotação: permite adicionar texto e anotações aos modelos, o que pode ser útil para explicar conceitos geométricos, destacar características importantes ou fornecer instruções aos alunos.
- Biblioteca de componentes e modelos 3D: há uma biblioteca de componentes e modelos 3D disponíveis para uso, podendo encontrar modelos prontos de objetos geométricos, edifícios, estruturas e muito mais para enriquecer suas aulas e demonstrações.
- Exportação de modelos: Os modelos criados podem ser exportados para diferentes formatos de arquivo, o que facilita o compartilhamento com os alunos ou a integração com outras ferramentas e plataformas educacionais.

As ferramentas do SketchUp são os recursos utilizados para criar os blocos de estrutura que compõem os modelos e recebem o nome de entidades. São elas: as linhas (ou arestas), as faces, os círculos, os arcos, os grupos e componentes, as dimensões, as superfícies, os textos, dentre outros. São ferramentas úteis para serem aplicadas em projetos, e será com elas que desenvolveremos as nossas sugestões de atividades. Apresentaremos algumas delas a seguir como sugestão para aplicação em sala de aula.

A tela de trabalho possui um sistema de coordenadas. As linhas vermelha (Eixo x), verde (Eixo y) e azul (Eixo z) são os eixos e representam as três dimensões para a criação dos projetos com o uso das ferramentas de modelagem . As cores dos eixos favorecem o mecanismo de orientação no aplicativo: o plano que contém os eixos vermelho e verde é o plano de solo e o eixo azul é perpendicular ao plano de solo. Ainda na área de trabalho, um campo importante é a caixa de medidas, situada na parte inferior direita da tela. Além disso, vamos apresentar algumas ferramentas presentes na área de trabalho do aplicativo que podem ser úteis no ensino de Geometria, conforme Figura 4.2.

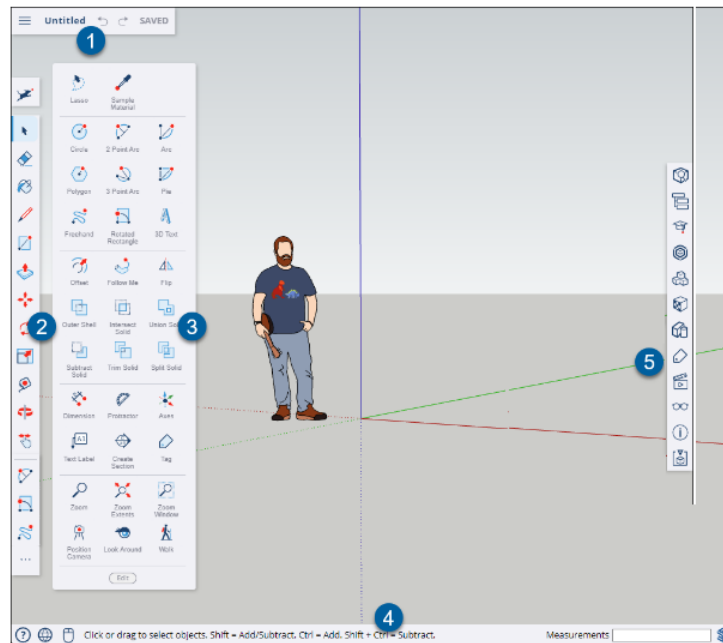


Seleção: Seleciona um ou mais objetos. Ao dar um clique no objeto desejado, seleciona apenas aquela opção (seja uma linha ou uma face). Ao dar dois cliques, seleciona a face e as linhas que a compõe - no caso de dois cliques em uma linha, seleciona a linha e as faces que possuem essa linha em comum. Ao dar três cliques, seleciona tudo o que estiver conectado ao objeto que foi clicado.



Borracha - Apaga objetos da área de desenho. Permite também ocultar arestas de sólidos geométricos. Para isso, basta selecionar a aresta, clicar com o botão direito do mouse e escolher a opção “Ocultar”.

Figura 4.2: Área de trabalho do SketchUp



Fonte: *SketchUp*, 2024.



Tinta - Ferramenta de pintura de uma área. Ao clicar nesse ícone, surge uma aba denominada “Materiais”, onde é possível escolher cor e textura desejada para a construção.



Linha - Para desenhar um segmento, basta clicar em um ponto da tela e mover o mouse para a direção desejada. Outra alternativa é, depois de selecionar o ponto inicial e fixar com o mouse a direção desejada, digitar o comprimento desejado na caixa de entrada de dados, localizada no canto inferior direito da tela e apertar “Enter” no teclado. Nas demais construções que necessitarem de medidas específicas (seja lado, raio, ângulo ou qualquer outra medida), esse caminho pode ser reaplicado.



Círculo - Constrói o círculo a partir do seu centro e raio. A partir de observações a respeito dessa construção, percebemos que, na verdade, a construção nos leva a polígonos com muitos lados e, à medida que aumentamos o número de lados, mais a figura se aproxima de uma circunferência.



Arcos - São ferramentas de construção de arcos de circunferência.



Pizza - Construção de setor circular.



Retângulo - Para determinar os tamanhos dos lados, basta digitar as dimensões separadas por vírgula.



Retângulo giratório - Desenha retângulos sob um ângulo determinado.



Polígono - Para definir o número de lados do polígono, use a ferramenta “Seleção” e clique em um dos segmentos que formam os lados desse polígono para selecionar seu contorno. Com o contorno selecionado, clique com o botão direito do mouse, selecione “Informações da entidade” e abrirá uma aba com informações. No campo “Segmentos”, digite o número de lados desejado. É possível aproveitar para definir também o raio da circunferência circunscrita e conferir o perímetro desse polígono.



Desenho à mão livre - Ao selecionar essa ferramenta, clique e segure o botão do mouse para construir o desenho desejado.



Escala - Redimensiona, estica e encurta a forma selecionada. Para isso, com a ferramenta escolhida, selecione o objeto desejado, clique em um dos pontos verdes e arraste com o mouse para a direção desejada.



Deslocar - Cria linhas das faces equidistantes das linhas das faces iniciais, tanto internamente quanto externamente a essa face. Para essa construção, basta clicar na linha que compõe a face e arrastar o mouse para a direção desejada.



Mover - Esta ferramenta possui uma série de possibilidades, entre elas, o usuário pode mover, manipular, copiar e até fazer a dobra de uma forma. Para isso, basta clicar no botão “Ctrl” e “Alt”, conforme orientação na barra inferior horizontal da tela.



Rotar - Rotaciona um ou mais objetos no plano. Com a ferramenta ativada, surge um transferidor para definir o ponto central e o eixo pelo qual o objeto selecionado fará a rotação.



Fita métrica - Mede a distância entre dois pontos. Para isso, clique no ícone da ferramenta, considere um ponto inicial, clique e arraste o cursor do mouse na direção em que se deseja realizar a medição. O comprimento aparece automaticamente na caixa de medidas o campo “Comprimento”, situado na parte inferior direita da tela. A ferramenta permite também criar linhas guias pontilhadas, paralelas à linha inicialmente marcada.



Dimensões - Caso deseje deixar indicada a medida do comprimento, esta é uma ótima ferramenta, pois cria uma cota com o tamanho do segmento desejado.



Transferidor - Mede ângulos e cria linhas guias com uma inclinação desejada. A medida do ângulo aparecerá na caixa de medidas o campo “Ângulo”, situado na parte inferior direita da tela.



Texto - Para utilizar essa ferramenta, clique no ícone, escolha um ponto no desenho, arraste o cursor para a posição desejada e digite o texto. Se o ponto escolhido no desenho pertencer a uma ou mais linhas, na caixa de digitação do texto aparecerá automaticamente os números que fazem referência às medidas desses segmentos. Se o ponto escolhido pertencer a uma face, o número que aparecerá faz referência à área dessa face.



Cenas - Presente na barra posicionada à direita da tela, essa ferramenta permite visualizar o objeto sob vários pontos de vista, facilitando a abordagem de projeções, por exemplo. Ao clicar no ícone, surge a aba com várias opções. Basta clicar em “Exibições padrão” e escolher o tipo de visualização desejada para o objeto em questão.

Partindo de construções da Geometria Plana, é possível criar objetos da Geometria Espacial. Para isso, dado um objeto em 2D, seguem duas ferramentas que servem como suporte para transformar em 3D:



Empurre/puxe - Usada para empurrar, puxar ou esticar uma forma, dando tridimensionalidade em um objeto bidimensional. Selecionada a ferramenta, clique na face e arraste o mouse na direção desejada.



Siga-me - Usada para extrudar ² uma face ao longo de um trajeto, seja ele reto ou curvo. Para que a ferramenta funcione, é preciso que se crie um perfil (uma forma geométrica fechada) perpendicular ao caminho selecionado. A ferramenta vai criar um sólido cuja seção transversal ao caminho é a forma geométrica dada. Para fazer manualmente, selecione a ferramenta, clique na face a ser extrudada e percorra o cursor do mouse pelo caminho desejado. Para fazer automaticamente, selecione o caminho, clique na ferramenta “Siga-me” e, depois, na face desejada.

Para maiores detalhes sobre o app, o leitor interessado encontrará uma vasta leitura técnica disponível tanto na própria plataforma SketchUp, quanto em buscas na *internet*, além de vídeos tutoriais, como em [SketchUp Online Tutorial para Iniciantes](#) ³, [Como Usar o SketchUp Online](#) ⁴ e [Curso Sketchup - Formas Básicas](#) ⁵. Nós também vamos apresentar alguns exemplos das construções elementares logo à frente.

²Estender ou projetar uma face ao longo de um caminho ou trajetória predefinida. Esse processo permite transformar uma forma bidimensional (2D) em uma forma tridimensional (3D) seguindo um percurso especificado.

³https://www.youtube.com/watch?v=251fLkIN1I0&ab_channel=ModoCriativo

⁴https://www.youtube.com/watch?v=zYzPskc4_mY&ab_channel=DavidsonFelipe

⁵https://www.youtube.com/watch?v=uYseyBXcfvk&ab_channel=BMMaquetes

4.4 Utilização na Geometria

O SketchUp pode ser aplicado em uma variedade de contextos na Geometria, com uma abordagem prática para o ensino e aprendizado dos conceitos. Os alunos podem criar, visualizar e explorar formas geométricas planas, suas propriedades e, a partir delas, criar objetos em três dimensões, o que facilita a compreensão das características dessas formas, como vértices, arestas, faces, diagonais e ângulos. Podem, por exemplo, criar e explorar cubos, pirâmides, cilindros e outros sólidos geométricos para entender suas propriedades e relações.

É possível também demonstrar e explorar transformações geométricas, como rotações, reflexões, translações e dilatações, comprimentos, áreas e volumes. Os alunos podem aplicar essas transformações aos objetos criados no aplicativo e observar como elas afetam as formas e suas características.

Uma outra opção é construir e explorar figuras geométricas mais complexas, como poliedros irregulares, sólidos de revolução e figuras tridimensionais abstratas. Isso permite que eles desenvolvam habilidades de modelagem e compreendam como diferentes formas podem ser combinadas para criar figuras mais elaboradas.

O estudo de relações e propriedades geométricas, como congruência, semelhança, simetria e proporção pode ser explorado através de manipulação de formas e objetos com o SketchUp. Os alunos podem manipular formas e objetos no aplicativo para investigar e verificar essas propriedades de forma visual e interativa.

Os alunos podem utilizar o SketchUp para explorar os princípios geométricos aplicados na arquitetura e design, com a ideia de criar modelos tridimensionais de casas e edifícios, interiores e paisagens. Como exemplos de uso, temos a planificação de espaços, proporções estéticas e integração de elementos geométricos na concepção de projetos. Ele também pode ser usado para modelar e resolver problemas geométricos do mundo real. Por exemplo, os alunos podem projetar e analisar a Geometria de uma sala para otimizar o *layout* dos móveis para entender conceitos como área, volume e proporção. Além disso, há a possibilidade de explorar vistas, com o estudo de projeções ortogonais, perspectivas, entre outros.

5 Aplicações do SketchUp em Sala de Aula

Finalmente, neste capítulo, apresentaremos uma proposta de ensino baseada em quatro sugestões de atividades a serem aplicadas em sala de aula (sendo uma delas introdutória para se familiarizar com a ferramenta), com o intuito de ampliar as possibilidades no ensino de Geometria, fazendo uso do aplicativo SketchUp. São elas:

- **Atividade 1 - Construções elementares com o SketchUp**
- **Atividade 2 - Teorema de Tales e aplicações**
- **Atividade 3 - Paralelismo, áreas e volumes**
- **Atividade 4 - Vistas e projeções ortogonais, tomando como referência uma questão do Enem 2021**

Na sequência, detalharemos cada uma delas, apresentando abordagens e construções para o professor trabalhar em sala de aula ou para realização independente por parte dos alunos.

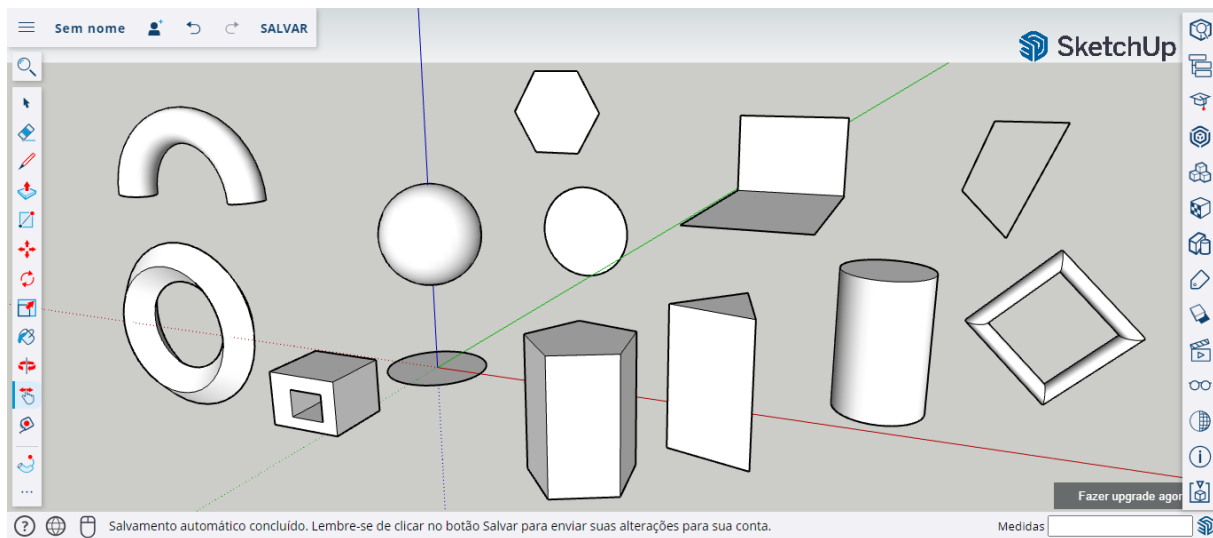
5.1 Atividade Inicial: Construções Elementares com o SketchUp

Esta é uma atividade introdutória que tem como objetivo que tanto o professor quanto o aluno possam conhecer e explorar algumas das ferramentas presentes no aplicativo. Nesse sentido, a proposta é que se destine uma aula de 50 minutos para a manipulação das ferramentas presentes. O professor pode manuear e projetar para os alunos acompanharem ou trabalhar em uma sala de informática o passo a passo para que os próprios alunos realizem as construções.





Vamos considerar a tela do SketchUp como um quadro dinâmico para realizar as construções. Como a proposta é apresentar construções elementares, vamos construir figuras planas e espaciais com o uso de ferramentas do aplicativo, conforme tutorial [Geometria: Construções Elementares via SketchUp](https://youtu.be/PM712Usk9_0)¹, com culminância na Figura 5.1.

¹https://youtu.be/PM712Usk9_0








Figura 5.1: Construções elementares




Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

1. Para construir um polígono regular, selecione a ferramenta . Por padrão, aparecerá um hexágono. Antes de começar a construção, digite o número de lados desejado e pressione “Enter”. O número de lados, bem como o raio da circunferência inscrita nesse polígono pode ser alterado. Para isso, crie o polígono, selecione , clique com o botão direito do mouse e selecione “Informações da entidade”. Ao clicar com o mouse na região interna do polígono, aparecerá informações como a área dessa figura e, ao clicar sobre um dos lados dele, aparecerá informações sobre o perímetro, raio da circunferência inscrita e número de lados desse polígono. Caso deseje alterar o tipo de polígono ou seu tamanho, basta fazer as alterações nessa aba.
2. Para construir um retângulo ou simular um plano, use a ferramenta . A forma padrão desta ferramenta constrói o retângulo a partir de um vértice, devendo o utilizador arrastar o vértice oposto para definir seu tamanho (ou digitar as medidas na caixa de medidas). Outra opção, ativada ao pressionar a tecla “Ctrl”, constrói o retângulo a partir de seu centro.
3. Para construir um polígono qualquer, selecione a ferramenta  e faça sua construção. Para definir a medida de cada um dos lados do polígono, no momento da construção, clique em um ponto da área de trabalho para escolher um ponto inicial, mova o mouse e digite com o teclado o valor desejado. Ao apertar “Enter”, o segmento será criado. Repita o processo até finalizar a criação do polígono. No momento da construção, certifique-se de estar traçando segmentos sob um mesmo












plano; caso contrário, será uma outra forma geométrica que não um polígono.

4. Para construir um círculo, selecione a ferramenta  e defina o raio, clicando e arrastando ou digitando o raio desejado, seguido de “Enter”. Ao dar um zoom na figura construída, é possível perceber que trata-se de um polígono com muitos lados. Para se aproximar mais ainda de um círculo (quanto maior o número de lados de um polígono, mais vai se aproximando de uma circunferência), com a ferramenta  selecione a borda da figura, clique com o botão direito, depois em “Informações da entidade” e aumente o número de lados. O raio também pode ser alterado nessa etapa.
5. Para construir uma esfera, selecione a opção  e construa um círculo sobre o plano da base, definindo um valor para o raio. Para facilitar a construção, use a origem dos eixos como centro. Na sequência, construa um círculo perpendicular ao primeiro, com mesma medida de raio. Com a ferramenta , dê um duplo clique sobre o círculo inicial e, em seguida, com a ferramenta , clique no segundo círculo criado e a esfera será formada.
6. Para construir um prisma ou um cilindro, crie a forma plana que representará a base e, na sequência, utilize a ferramenta , clique na base e arraste para dar a tridimensionalidade à figura.
7. A ferramenta  pode ser usada para criar outras formas tridimensionais, seja reta ou curva. Construa o caminho que será seguido e uma face perpendicular a ele. Nela, desenhe uma forma geométrica fechada que será arrastada ao longo do caminho, formando a nova figura tridimensional. Por exemplo: se o caminho for um quadrado e a forma geométrica for um círculo, ao usarmos a ferramenta, obteremos partes de cilindros ao longo desse quadrado; se o caminho for um círculo e a forma geométrica for um pequeno quadrado, ao usarmos a ferramenta, obteremos um sólido curvo com 4 partes curvas.

São vários os recursos que auxiliam na construção. Por exemplo:

- No momento da construção (círculo, retângulo, etc), ao clicar nas setas do teclado, é possível alternar o plano em que a figura se encontra ou ainda fixar uma das direções coordenadas para o traçado de um segmento.
- Para fazer a conferência das medidas, use a ferramenta . Ela serve para medir comprimentos e também para criar linhas guias, paralelas a uma reta, segmento de reta ou plano preestabelecido. Essas linhas são retas tracejadas que servem como

referência para novas construções e são muito importantes no processo de modelagem das figuras geométricas.

- A ferramenta , permite dar tridimensionalidade em qualquer que seja a forma geométrica fechada. Selecione a ferramenta, clique na forma e arraste com o mouse.
- Com a ferramenta  ativada, é possível selecionar uma ou mais entidades, fazer alterações ou exclusões.
- A ferramenta  serve para mover uma entidade, fazer uma cópia, além de outras funcionalidades. Caso deseje fazer uma cópia de uma entidade já criada, use , para selecionar a entidade e, depois, escolhendo a opção , pressione “Ctrl” e clique no elemento a ser copiado. A cópia será feita e poderá ser posicionada onde desejar.
- Ao selecionar a ferramenta , é possível rotacionar a área construída sob diversas vistas.
- Explore novas construções, use as ferramentas já apresentadas em outro capítulo, como , , ,  e outras, experimente usar diferentes planos e possibilidades.
- Para inserir cotas de medidas, use a ferramenta .

5.2 Teorema de Tales e Aplicações

Esta é uma proposta para turmas de 9º ano, que busca explorar o tema da proporcionalidade usando o SketchUp. Levando para a sala de aula, a proposta pode demandar 3 aulas de 50 minutos, a depender da abordagem do professor, com participação dos alunos em um laboratório de informática ou simplesmente observando a construção. Sugerimos que a primeira parte da proposta seja realizada pelo professor como forma de apresentação do teorema e, na sequência, proponha que os alunos façam a construção indicada.

Relembramos aqui o enunciado do Teorema de Tales, cuja demonstração pode ser encontrada no livro Geometria, da Coleção PROFMAT [41].

Teorema 5.1 (Teorema de Tales): Sejam r , s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

5.2.1 Orientações para Construção

Na sequência, teremos um passo a passo com orientações para o professor realizar as construções e apresentá-las em sala.




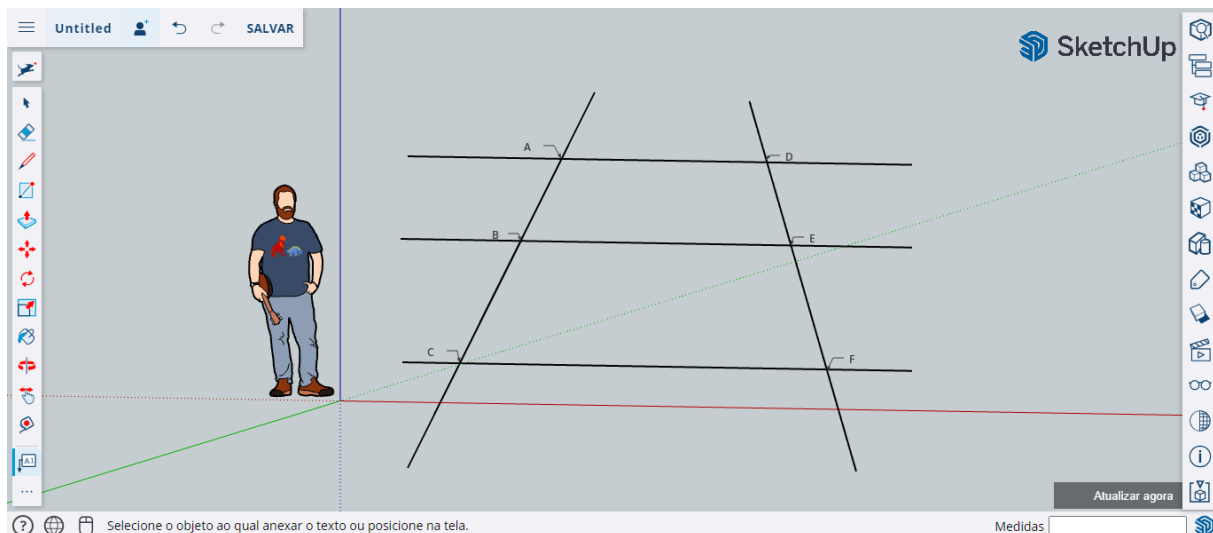
1. Na área de trabalho do SketchUp, clique no ícone “linha” , situado na barra de ferramentas vertical à esquerda, e insira três segmentos de retas paralelos, com distâncias variadas entre si. Você pode usar um dos eixos como referência para sua construção.
2. Trace duas transversais e nomeie os pontos de interseção, como na Figura 5.2. Para nomear os pontos, clique em . Essa ferramenta permite inserção de textos quaisquer na tela. Para que a imagem fique mais limpa, é possível ocultar as setas que indicam cada um dos pontos clicando com o botão direito do mouse - linha guia - oculta. Caso alguma das ferramentas indicadas não esteja visível na barra vertical à esquerda, é só clicar em  que serão mostradas mais opções de ferramentas para escolha.

Figura 5.2: Feixe de paralelas cortadas por duas transversais



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*



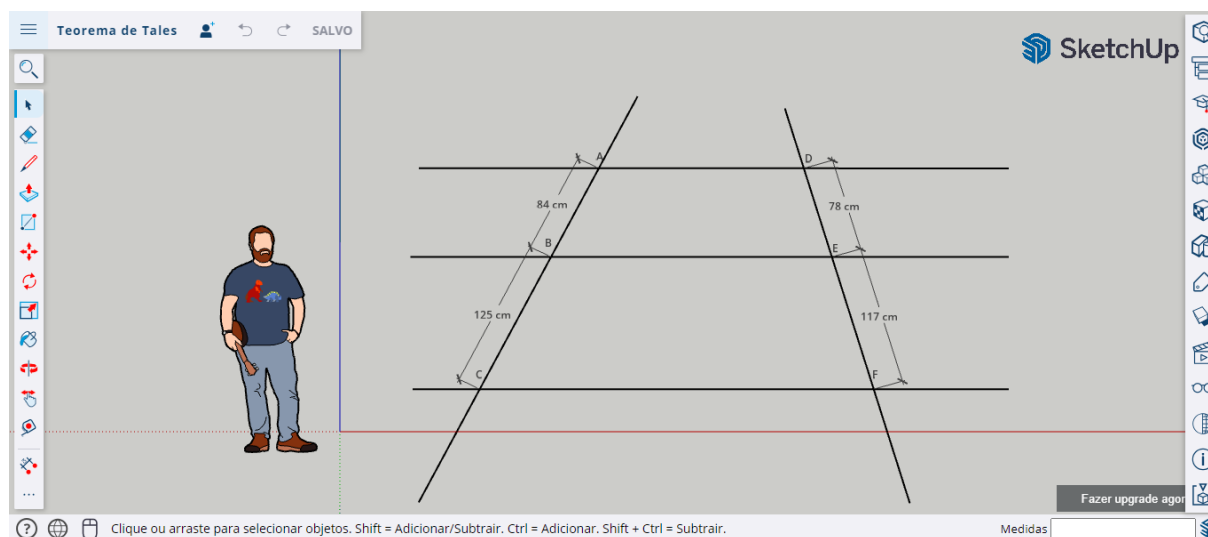
3. Para medir os segmentos formados, já inserindo suas medidas na imagem como na Figura 5.3, use a ferramenta dimensões . Para configurar a unidade de medida desejada, bem como a quantidade de casas decimais, clique em , situado na barra de ferramentas à direita na tela.
4. Faça divisões dos segmentos correspondentes entre as transversais e mostre a proporção entre os pares. Mostre as várias possibilidades de se montar a proporção entre

Figura 5.3: Construção Teorema de Tales via SketchUp



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

os segmentos.

- Estabelecendo a razão entre os segmentos da transversal esquerda e a razão entre os segmentos correspondentes da transversal direita. Exemplos:

$$a) \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$b) \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

$$c) \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

- Estabelecendo a razão entre os segmentos de transversais diferentes que estão entre as mesmas paralelas e a razão entre os segmentos correspondentes que estão entre outras duas (mesmas) paralelas. Exemplos:

$$a) \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$b) \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$


$$c) \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

5. Mostre a proporção com os valores do exemplo construído e finalize formalizando a proporção presente no Teorema de Tales.

5.2.2 Divisão de um Segmento de Reta em Partes Iguais

Deixamos aqui uma sugestão de atividade exploratória para os alunos, de modo que, se possível, seja realizada em um laboratório de informática, partindo do seguinte questionamento: “É possível dividir um segmento de reta em partes iguais mesmo sem saber a medida do comprimento desse segmento?” Mostraremos que sim com os seguintes passos:

1. Inicialmente, vamos desenhar um retângulo na área de trabalho do SketchUp para

simular um plano e trabalharmos em 2 dimensões. Para isso, clique na ferramenta , situada na barra esquerda da tela, e construa seu plano.







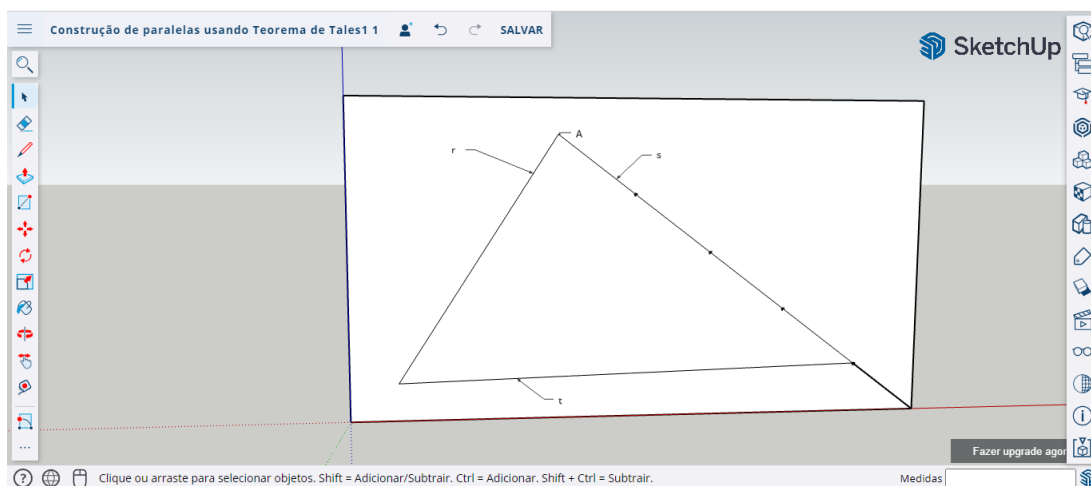
2. Vamos construir 4 segmentos congruentes usando apenas as ferramentas  e :
- Selecione a ferramenta  e trace dois segmentos, r e s , com mesma origem, formando um ângulo agudo com vértice A .
 - Selecione a ferramenta , clique no vértice A , arraste sobre o segmento s , digite um comprimento desejado na barra de medidas e digite “Enter”. Aparecerá uma marca no segmento s , a partir dela, repita o processo criando distâncias iguais sobre esse segmento, até dividi-lo em 4 segmentos de mesma medida. No nosso exemplo, consideramos medida 100 cm.
 - Selecione a ferramenta  e trace um segmento t da última marca criada em s até o final do segmento r , construído anteriormente, conforme Figura 5.4.
 - Selecione a ferramenta , clique no segmento t , deslize o mouse até uma das marcas criadas em s e clique com o mouse novamente para criar uma guia que intercepte essa marca. Repita o processo até se ter 4 guias, todas elas paralelas entre si.

Figura 5.4: Construção de segmentos



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*


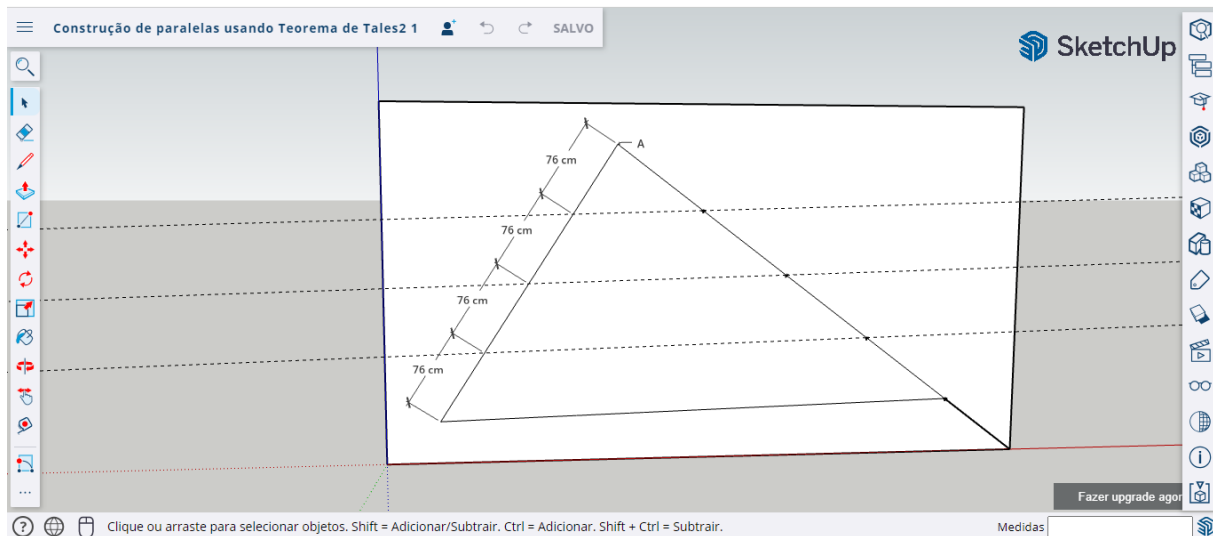
3. Agora, vamos conferir as medidas dos segmentos, usando a ferramenta . Meça as partições de r e confirme se as medidas são congruentes. Para excluir o que não é mais necessário na construção, selecione a parte desejada e delete. Acabamos de construir segmentos paralelos e equidistantes, conforme Figura 5.5.







Figura 5.5: Construção de segmentos paralelos e equidistantes



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

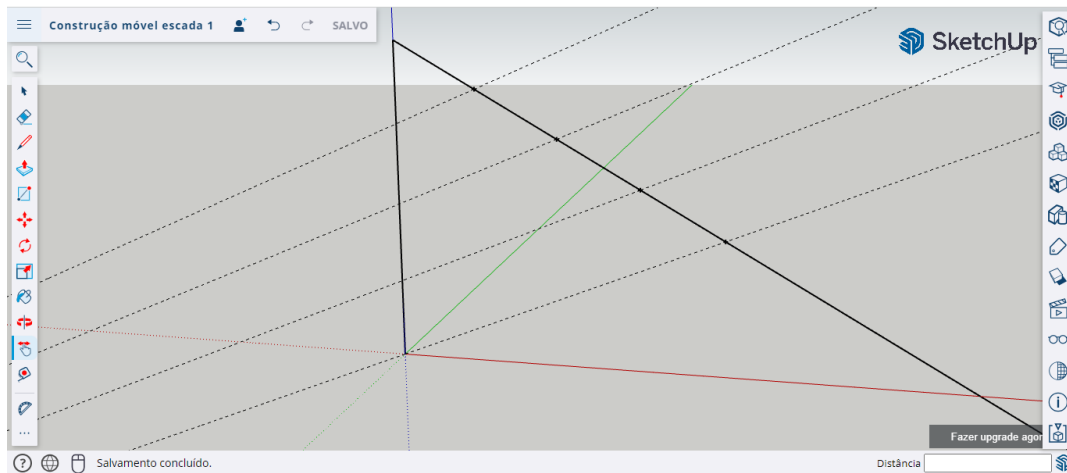
5.2.3 Construindo Móveis e Prateleiras

Sugerimos um desafio aos alunos, a partir das construções realizadas, para que confeccionem um móvel com 3 prateleiras paralelas e equidistantes, para decorar um ambiente. Aqui, vamos dar um exemplo de um móvel a ser encaixado debaixo de uma escada e deixaremos um passo a passo para que o professor possa orientar seu aluno, caso haja alguma dificuldade:

1. Use um dos eixos como referência e construa um segmento de reta sobre esse eixo com a ferramenta  (utilizaremos os eixos perpendiculares vermelho e azul para construir a base e a altura do móvel).
2. Com o auxílio da ferramenta , trace uma reta guia com ângulo 60° em relação ao segmento vertical. Consequentemente, teremos um ângulo de 30° em relação à base.
3. Usando , trace um segmento de reta sobre a linha guia criada, passando pelos eixos considerados. Ele representará a inclinação da escada.
4. Com a ferramenta , faça 4 marcações equidistantes. Para isso, clique no topo do segmento vertical, segure e arraste pelo segmento oblíquo criado. Digite a distância desejada e aperte “Enter” (consideramos aqui 100 cm).
5. Selecione  e crie uma linha guia ligando a base do segmento vertical à última marcação criada no passo anterior. Ainda usando , crie linhas guias paralelas

equidistantes, usando como referência as marcações construídas. Veja a Figura 5.6.

Figura 5.6: Construção de móvel abaixo da escada - Parte 1



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.


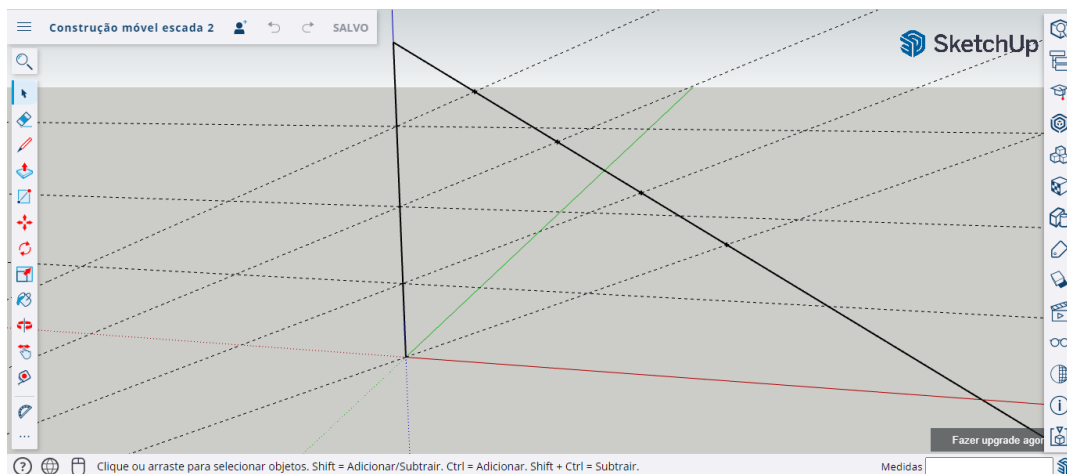


6. Como queremos construir prateleiras, é necessário que as paralelas sejam também paralelas ao eixo horizontal. Para isso, com a ferramenta  selecionada, clique no eixo horizontal e arraste até cada uma das interseções criadas no eixo vertical, construindo paralelas equidistantes, como na Figura 5.7.

Figura 5.7: Construção de móvel abaixo da escada - Parte 2



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

7. Selecione  e trace os segmentos de reta horizontais paralelos. Exclua as linhas guias para que a imagem tome forma e faça a conferência das medidas com a ferramenta .
8. Agora, selecione a área branca e exclua. Para criar a moldura e prateleiras da figura, crie linhas guias paralelas a cada um dos segmentos presentes na construção com a




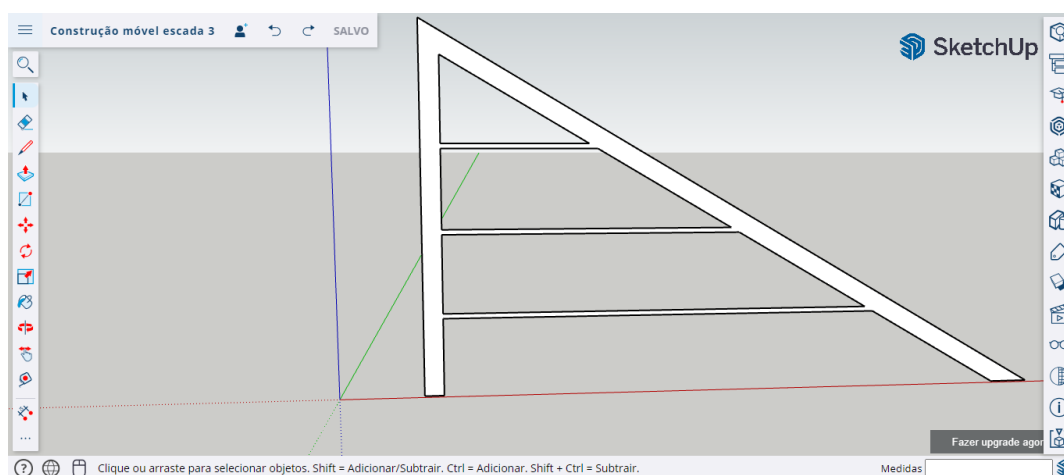
ferramenta . Na moldura, consideramos paralelas de 20 cm e, nas prateleiras, paralelas de 5 cm. Após a construção das linhas guias, trace segmentos de reta  ao longo das construções e apague as partes brancas não desejadas, bem como linhas guias e segmentos existentes na espessura das prateleiras com a ferramenta , conforme Figura 5.8.

Figura 5.8: Construção de móvel abaixo da escada - Parte 3



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*



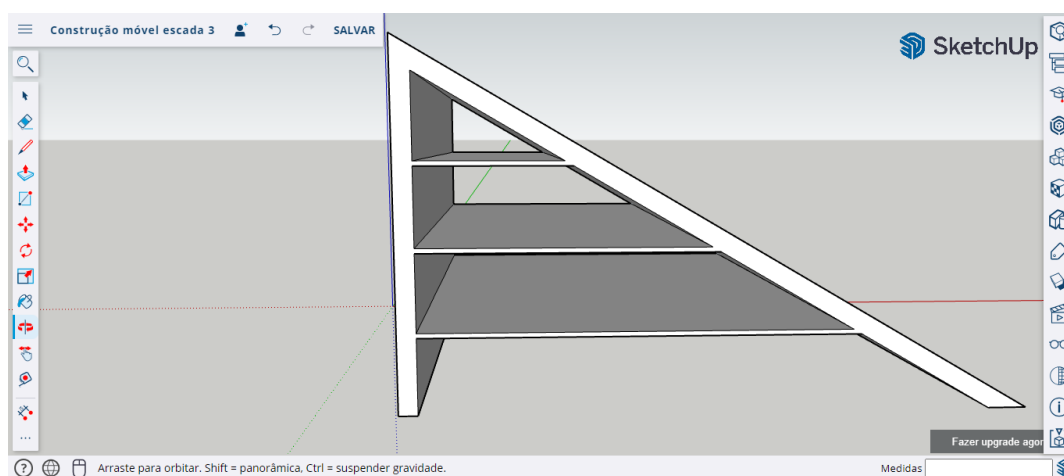
9. Para dar profundidade à figura, selecione a ferramenta  e clique na parte desejada, como pode ser visto na Figura 5.9. Ao selecionar a ferramenta , clique e arraste a área de trabalho, para observar o móvel tomando forma, em 3D.

Figura 5.9: Construção de móvel abaixo da escada - Parte 4



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*

10. Para finalizar a construção, você pode atribuir textura, cor ou outro tipo de material

ao seu móvel, selecionando a ferramenta , à direita da sua tela, e escolhendo a cor ou o material desejado.

5.2.4 O que mais pode ser explorado?

A atividade pode ser realizada em grupos em que cada grupo escolhe uma medida como referência. Variando a medida no segmento de reta auxiliar, o resultado continua o mesmo.

Os grupos podem também usar inclinações diversas em suas construções e perceber que a inclinação do segmento de reta auxiliar com o outro segmento pode ser diferente, mas o resultado se mantém.

Pode ser dada uma razão para ser aplicada na divisão de um segmento (1:2, por exemplo), de modo que o grupo aplique no segmento de reta suporte uma medida e, na sequência, dobre essa medida, por exemplo, e usar a proporcionalidade do Teorema de Tales para conferência, identificando que a razão se mantém na outra transversal.

5.3 Paralelismo, Áreas e Volumes

Várias análises podem ser feitas entre duas retas paralelas ou entre dois segmentos e planos paralelos. Vamos explorar um pouco sobre o estudo de áreas e volumes dispostos entre segmentos paralelos. Por exemplo, triângulos em tamanhos (formas) diferentes podem possuir áreas iguais? Apesar de suas diferenças em termos de orientação ou posição, os triângulos podem possuir áreas iguais. De forma similar, paralelogramos com bases iguais e delimitados pelas mesmas paralelas, também compartilham áreas iguais. Esse princípio se estende ao espaço tridimensional através do Princípio de Cavalieri, que afirma que, se dois sólidos têm a mesma altura e todas as suas seções transversais paralelas e equidistantes às bases possuem áreas iguais, então seus volumes também são iguais, como veremos adiante.

5.3.1 Paralelismo e Áreas

Aqui, utilizaremos a abordagem visual para facilitar a compreensão de que a área de um triângulo é determinada exclusivamente pelas medidas de sua base e de sua altura, independentemente de como ele é posicionado no plano, para turmas a partir do 7º do Ensino Fundamental. A sugestão é que seja disponibilizada uma aula de 50 minutos e que os próprios alunos construam triângulos diversos (sejam eles acutângulos, retângulos ou obtusângulos), sob duas paralelas, investiguem suas áreas e façam seus registros. Acompanhe:







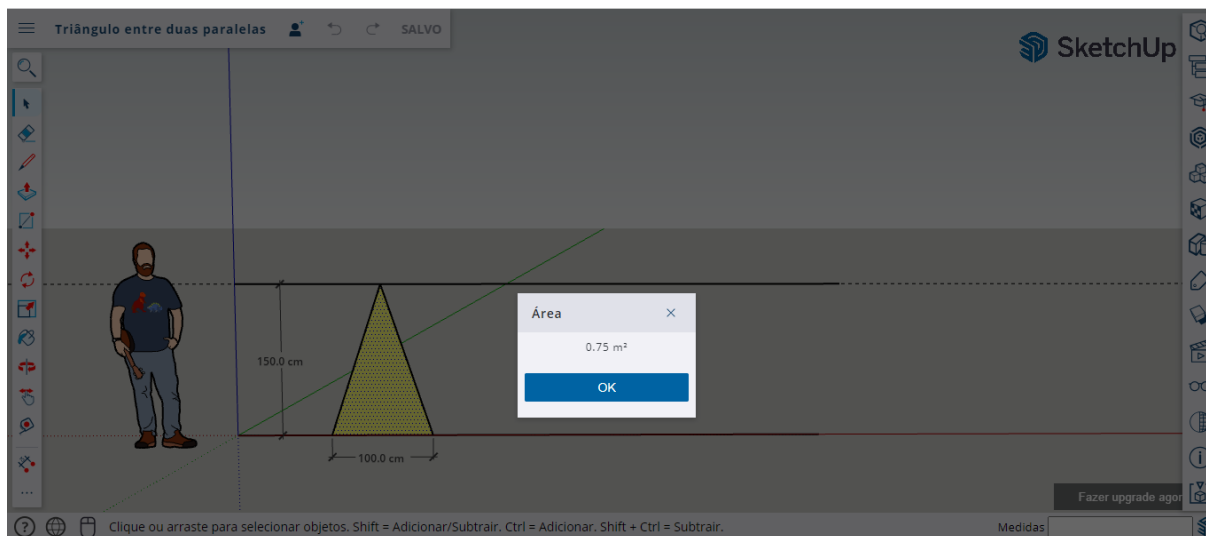
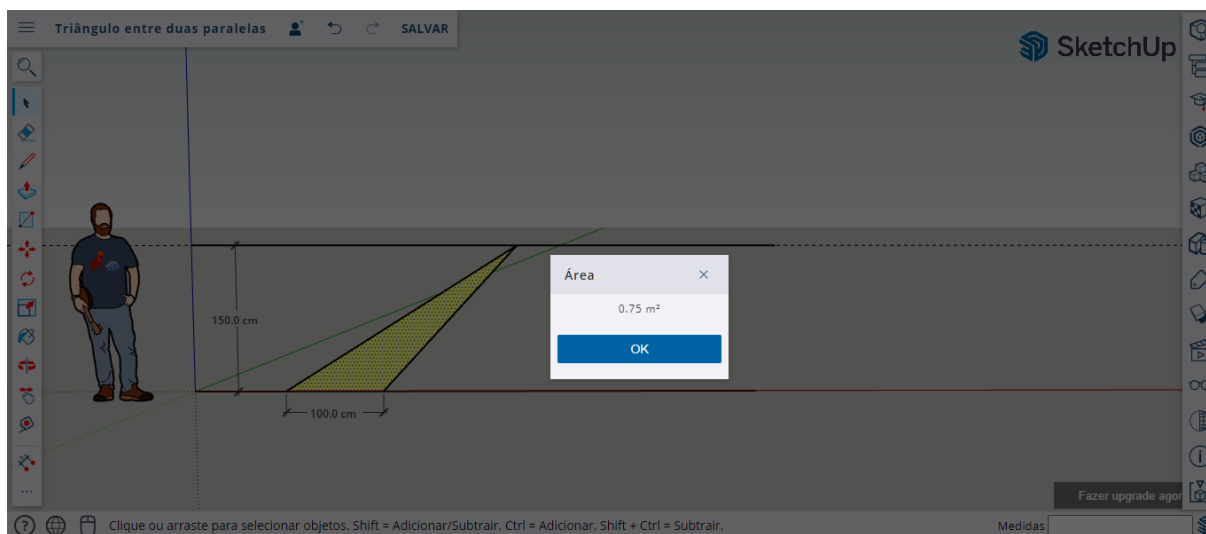
1. Vamos começar construindo dois segmentos de retas paralelos. Usando um dos eixos do plano como base, selecione a ferramenta  e trace um segmento de reta sobre ele.
2. Com a ferramenta , selecione a linha construída e crie uma linha guia, paralela à primeira. Caso prefira, você pode definir a distância desejada, digitando o valor no campo de medidas.
3. Selecione a ferramenta , trace um segmento de reta sobre a linha guia e, na sequência, construa um triângulo cujos vértices estão sobre as paralelas criadas (dois vértices em um segmento de reta e o terceiro vértice sobre a outra paralela).
4. Selecione a ferramenta  e indique as medidas da base do triângulo e a distância entre as paralelas. A área do triângulo formado pode ser encontrada no aplicativo da seguinte forma: selecione a ferramenta  e clique na parte interna do triângulo com o botão direito do mouse. Localize o campo “Área” e, em seguida, “seleção”. Surgirá uma tela com a medida da área do triângulo. Clique em algum lugar da área de construção para tirar a seleção dada ao triângulo.
5. Selecione a ferramenta , clique no vértice oposto à base do triângulo e arraste sobre a paralela, de modo que forme outro triângulo entre essas paralelas. Caso o triângulo esteja selecionado, essa ferramenta irá mover o triângulo todo. Verifique a medida da área do novo triângulo. Repita esse processo, verificando a medida da área dos novos triângulos encontrados. A área sempre será a mesma! Veja as Figuras [5.10](#) e [5.11](#).

Figura 5.10: Construção de triângulo sobre dois segmentos paralelos (A)

Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Figura 5.11: Construção de triângulo sobre dois segmentos paralelos (B)

Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Isso se deve ao fato de que a área de um triângulo só depende da medida da sua base e da medida da sua altura ($A = \frac{b \cdot h}{2}$) e, mesmo com formatos diferentes, as medidas base e altura se mantiveram inalteradas, já que a altura corresponde à distância entre as paralelas que delimitam esses triângulos.

Essa atividade pode ser adaptada para outros polígonos, como retângulos, quadrados e paralelogramos.

5.3.2 Paralelismo e Volumes





Estendendo a aplicação anterior, vamos mostrar o paralelismo aplicado a volumes. Esta é mais uma construção visual para que os próprios alunos realizem suas construções e façam suas observações. Trata-se de uma aula para a 2ª série do Ensino Médio. Aqui, cabe diversificar as possibilidades exploratórias de figuras tridimensionais e verificar as medidas dos volumes dos sólidos construídos. Nesse sentido, o professor pode distribuir a turma em grupos para que cada grupo trabalhe um conjunto de sólidos diferentes. Para a realização da atividade com a construção do trabalho via SketchUp, análise e discussão dos resultados encontrados, sugerimos duas a três aulas de 50 minutos.

Para entender o paralelismo aplicado a sólidos geométricos, vamos explorar os volumes dessas figuras, segundo o Princípio de Cavalieri.

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos A e B , se existe um plano α tal que todo plano β paralelo a α determina secções planas em A e B com áreas iguais, então os volumes de A e B são iguais.

Em outras palavras, o Princípio de Cavalieri assegura que, se os sólidos tiverem secções de mesma área e a mesma altura, então seus volumes serão iguais. Esse princípio pode ser aplicado a sólidos completamente diferentes, desde que possuam a mesma altura e bases formadas por figuras planas que tenham áreas iguais, e que qualquer corte realizado por um mesmo plano paralelo ao plano da base resulte em figuras com áreas de medidas iguais.

Construindo dois sólidos retos com área das bases iguais e verificando os volumes

1. Na tela de trabalho, selecione a ferramenta  e, com um clique sobre um dos eixos do plano, arraste uma guia paralela a ele, contida no plano do solo. Sobre o plano do solo, construa dois polígonos diferentes, mas com áreas iguais (aqui, optamos por um triângulo e um retângulo). Incentive os alunos a discutirem qual seria a melhor estratégia para fazer isso. Na construção, usando a ferramenta , clique sobre a reta guia construída e aperte a tecla de seta para cima do teclado, fixando o plano do solo para a construção. O mesmo artifício pode ser usado para a construção do triângulo, seja usando a ferramenta  ou , como na Figura 5.12. Lembre-se de que as medidas podem ser definidas na barra de medidas no canto inferior direito


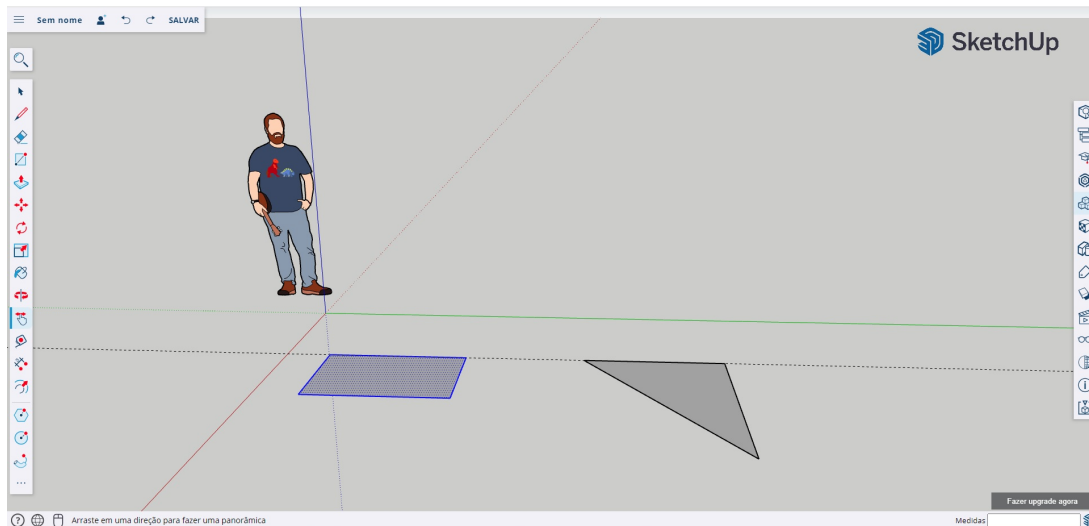
da área de trabalho. Para verificar a medida da área, use a ferramenta , selecione região desejada, clique com o botão direito do mouse e clique, “Área, seleção”.

Figura 5.12: Figuras planas com áreas congruentes



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*


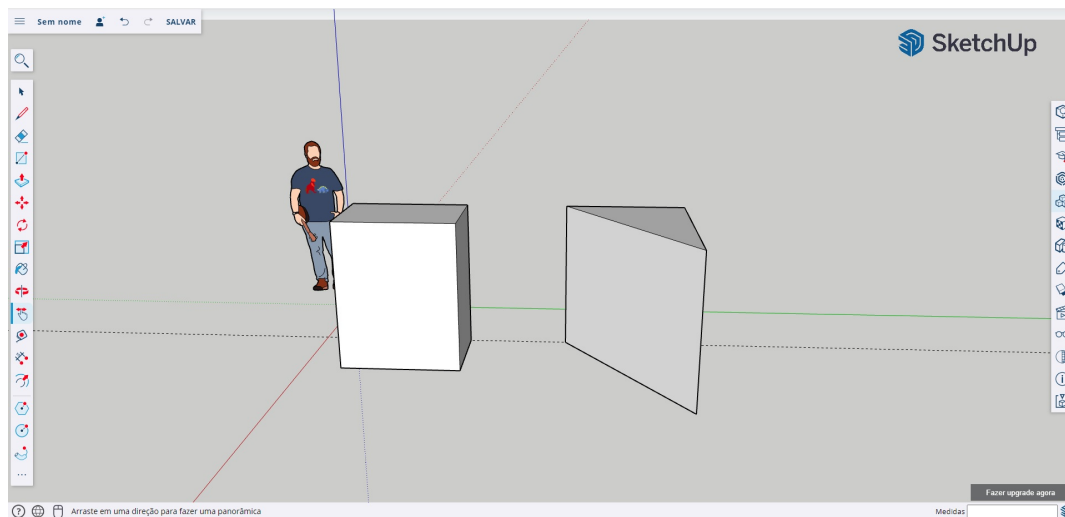

2. Selecione , clique no polígono e digite a medida da altura desejada na barra de medidas. Faça o mesmo com o outro polígono. Veja a Figura 5.13.

Figura 5.13: Sólidos retos com área das bases congruentes

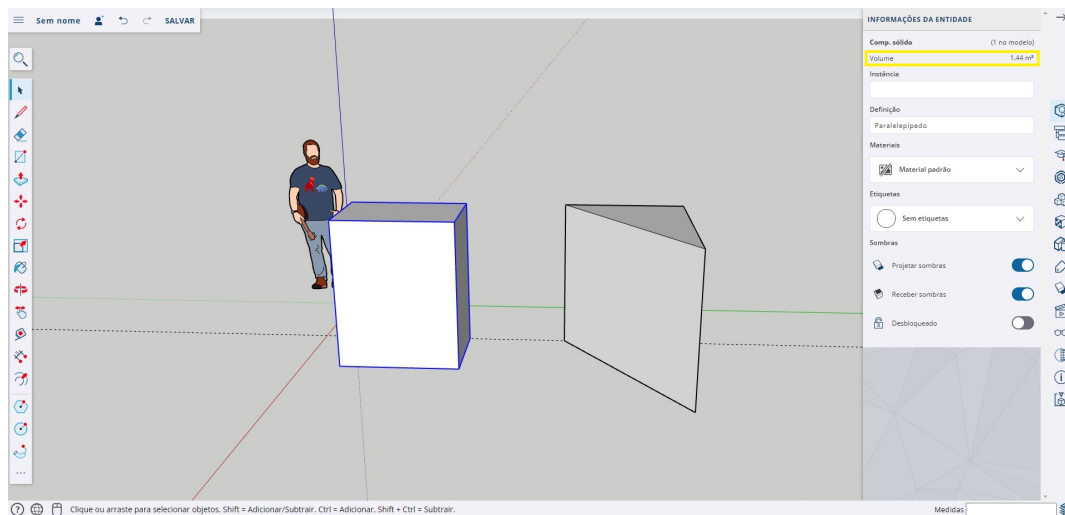


Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*

3. Com a ferramenta  ativada, selecione um dos sólidos clicando e arrastando da esquerda para a direita e de cima para baixo para que o todo o sólido seja selecionado ou com um triplo clique rápido. Na sequência, clique com o botão direito do mouse em “Criar componente” e dê um nome ao seu componente. Faça o mesmo com o outro sólido.

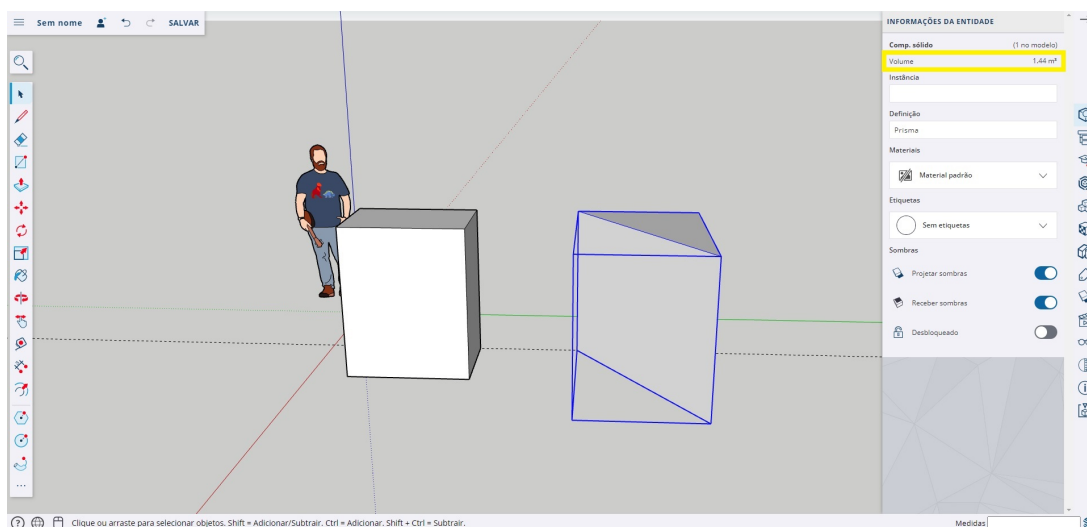
4. Criados os componentes, clique novamente com o botão direito no sólido desejado e clique em “Informações da entidade”. Surgirá uma aba à direita com algumas opções, sendo uma delas, o volume do sólido. Na sequência, clique no outro sólido e compare os volumes obtidos, como nas Figuras 5.14 e 5.15.

Figura 5.14: Verificando a medida do volume - Prisma reto de base retangular



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Figura 5.15: Verificando a medida do volume - Prisma reto de base triangular



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Transformando um sólido reto em oblíquo e verificando os volumes

5. Selecione o topo do prisma (como foi criado um componente para o sólido, precisamos dar vários cliques com o mouse até que a face desejada seja selecionada), escolha a


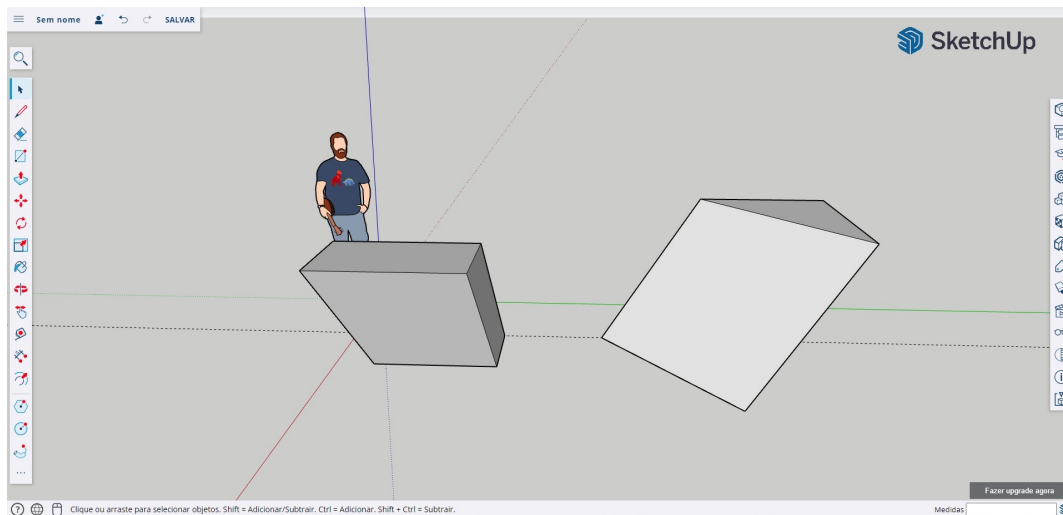
ferramenta , clique na borda do polígono e pressione uma das setas laterais do teclado (direita ou esquerda). Com isso, ao mover o mouse, o movimento do topo selecionado ocorrerá em um plano paralelo à base, preservando a altura do sólido. Esse passo pode ser feito com os dois sólidos, inclusive. Veja Figura 5.16.

Figura 5.16: Tornando um sólido oblíquo



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*


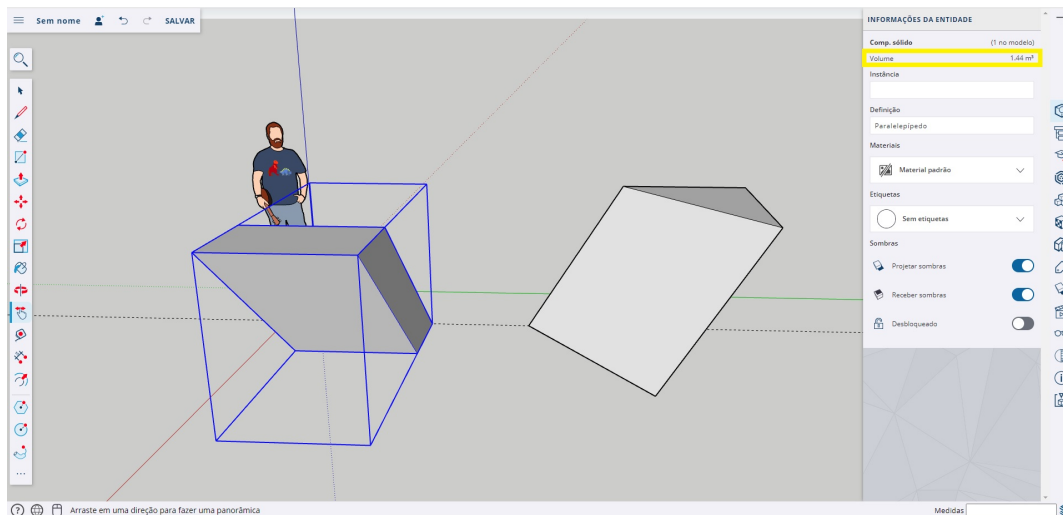
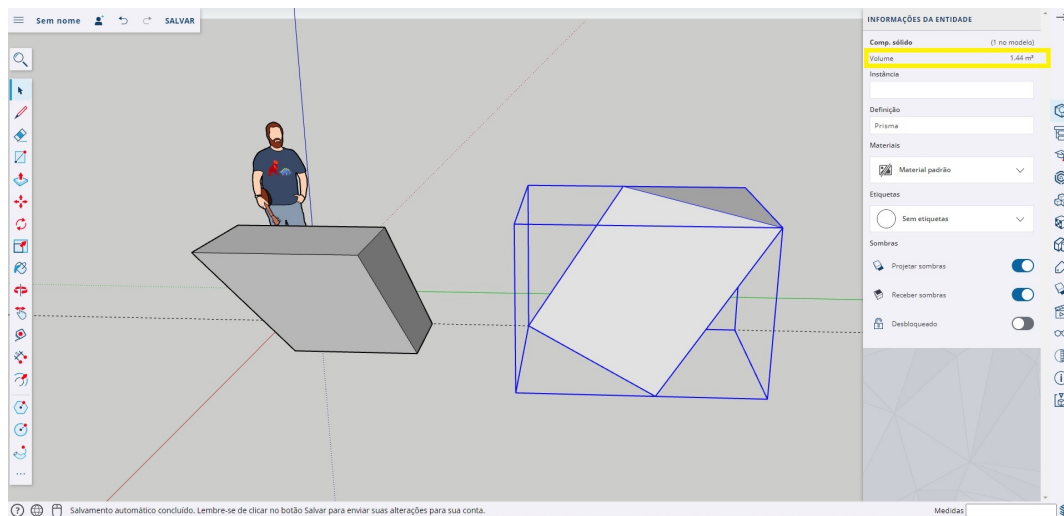
6. Verifique os volumes dos sólidos, agora já com componentes criadas: clique em  e selecione um dos sólidos. Na sequência, clique com o botão direito do mouse no sólido desejado e clique em “Informações da entidade”. Surgirá uma aba à direita com algumas opções, sendo uma delas, o volume do sólido. Na sequência, clique no outro sólido e compare os volumes obtidos, como nas Figuras 5.17 e 5.18.

Figura 5.17: Verificando a medida do volume - Prisma retangular



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*

Figura 5.18: Verificando a medida do volume - Prisma triangular



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Seccionando os sólidos a partir de um plano paralelo à base e identificando o Princípio de Cavalieri


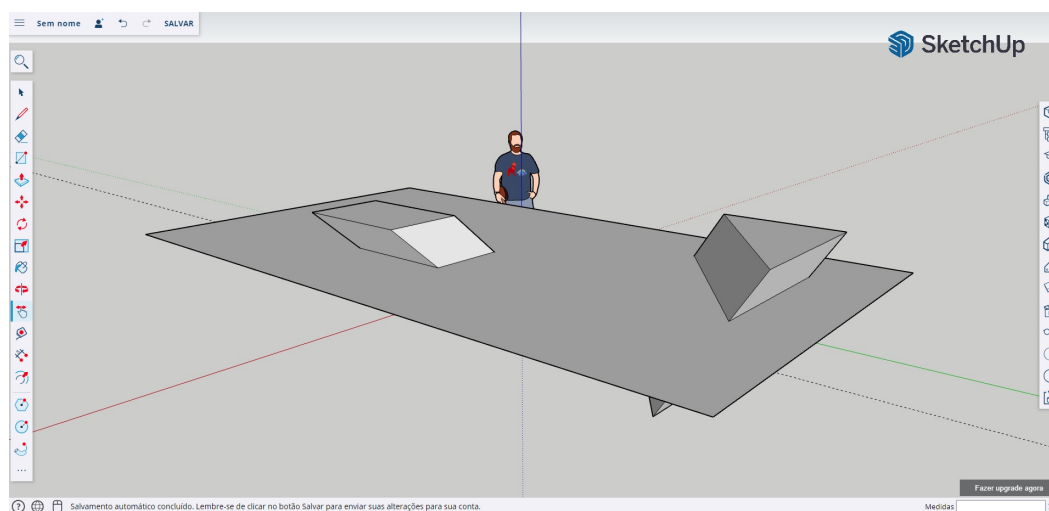
- Escolha a opção , acione a tecla “para cima” e pressione “Ctrl”. Isso permite a construção de um retângulo paralelo ao plano da base, partindo do seu ponto central. Clique sobre um ponto qualquer da aresta de um dos sólidos e dimensione o retângulo para que intersecte completamente os dois sólidos, conforme Figura 5.19.

Figura 5.19: Seccionando os sólidos



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

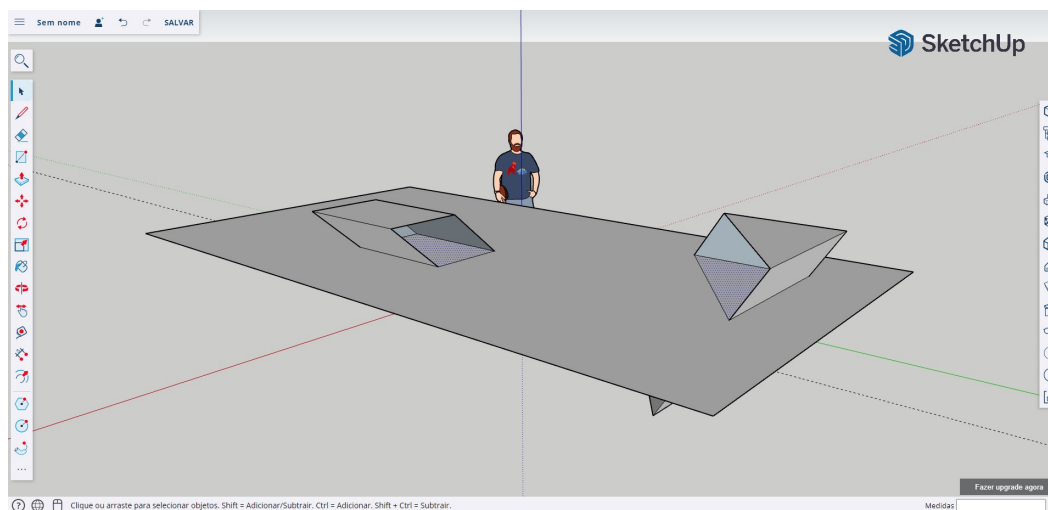
Com base nas construções e observações, retome o Princípio de Cavalieri e desafie os alunos a calcular os volumes das partes seccionadas.

- Com a ferramenta  ativada, selecione o plano criado, clique com o botão direito

do mouse e clique em “Interseccionar faces, Com modelo”. Na sequência, clique no sólido oblíquo e, com o botão direito do mouse, clique em “Desassociar”.

9. Selecione uma face lateral e apague-a, de modo a visualizar a secção no sólido, Figura 5.20. Selecione a secção, clique com o botão direito do mouse e clique em “Área, Seleção”. Compare a área da secção com a área da base desse sólido.

Figura 5.20: Comparando as áreas seccionadas



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*

Sugerimos que o professor peça para que os alunos repitam o procedimento de seccionamento algumas vezes, a fim de verificarem que a área da secção é sempre a mesma. Como quaisquer secções paralelas à base retorna áreas iguais, o volume só depende das áreas das bases e da altura entre elas, independentemente do formato das bases.

5.4 Vistas e Projeção Ortogonal

Podemos observar um objeto tridimensional de várias posições. O desenho que registra o que vemos é conhecido como vista ou projeção desse objeto representado no plano.

As vistas ortogonais são projeções ortogonais de uma peça tridimensional em planos perpendiculares, de modo que se tenha uma visão bidimensional de frente, de lado e de cima da peça, por exemplo. A proposta é destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio e sugerimos uma aula de 50 minutos, de modo que o professor já leve a construção pronta e apresente à sua turma variadas vistas ortogonais de figuras espaciais.

O SketchUp pode ser uma ótima ferramenta para trabalhar vistas e projeções ortogonais, uma vez que possibilita rotacionar por diversos ângulos o objeto construído.

Vamos aproveitar para discutir as vistas de uma construção turística em Bruxelas: Atomium. Professor, sugerimos que apresente a questão aos alunos, deixem que discutam possíveis respostas e finalize apresentando a construção que deixaremos na sequência, via aplicativo, rotacionando-a para que os alunos possam visualizar a resposta sob o ângulo desejado. Aproveite a oportunidade para discutir sob qual perspectiva encontraríamos cada uma das alternativas indicadas na questão.

Considere a seguinte questão retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM):

(ENEM 2021) O Atomium, representado na imagem, é um dos principais pontos turísticos de Bruxelas. Ele foi construído em 1958 para a primeira grande exposição mundial depois da Segunda Guerra Mundial, a Feira Mundial de Bruxelas. Trata-se de uma estrutura metálica construída no formato de um cubo. Essa estrutura está apoiada por um dos vértices sobre uma base paralela ao plano do solo e a diagonal do cubo, contendo esse vértice, é ortogonal ao plano da base. Centradas nos vértices desse cubo, foram construídas oito esferas metálicas, e uma outra esfera foi construída centrada no ponto de interseção das diagonais do cubo. As oito esferas sobre os vértices são interligadas segundo suas arestas, e a esfera central se conecta a elas pelas diagonais do cubo. Todas essas interligações são feitas por tubos cilíndricos que possuem escadas em seu interior, permitindo o deslocamento de pessoas pela parte interna da estrutura. Na diagonal ortogonal à base, o deslocamento é feito por um elevador, que permite o deslocamento entre as esferas da base e a esfera do ponto mais alto, passando pela esfera central. Considere um visitante que se deslocou pelo interior do Atomium sempre em linha reta e seguindo o menor trajeto entre dois vértices, passando por todas as arestas e todas as diagonais do cubo.

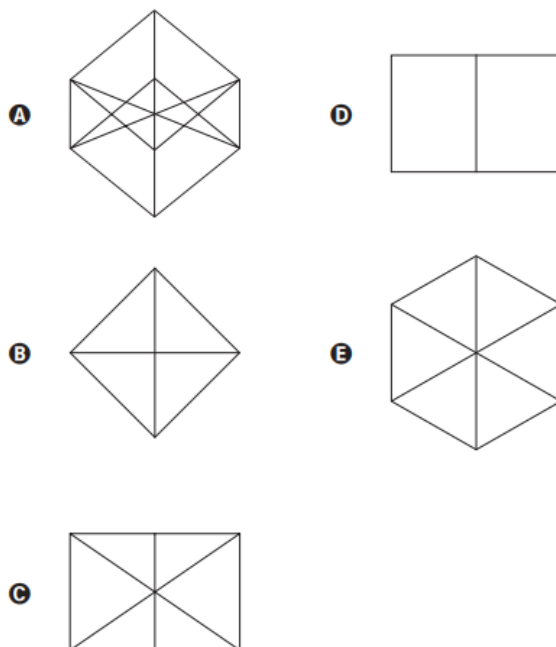
Figura 5.21: Imagem presente na questão do ENEM - Atomium.




Disponível em: <http://trupedatrip.com>. Acesso em: 25 out. 2019.



A projeção ortogonal sobre o plano do solo do trajeto percorrido por esse visitante é representada por

Figura 5.22: Imagem presente na questão do ENEM - Projeções Atomium



Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), 2024. Disponível em: <https://www.enem.inep.gov.br>.

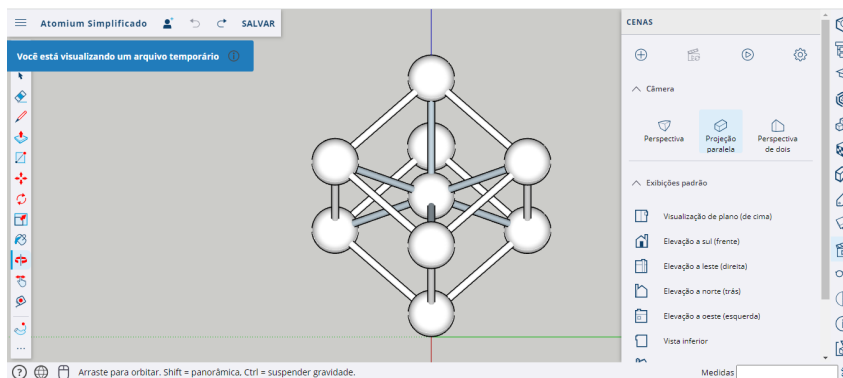
Para facilitar a visualização da projeção ortogonal, vamos apresentar um modelo da Atomium simplificado, via SketchUp. Acesse [Atomium Simplificado²](#) e, com a ferramenta  selecionada, rotacione a figura espacial para que ela seja vista de cima e conclua que a resposta é a alternativa E.

Aproveite a construção e peça que registrem como seria a vista de frente e a de lado, por exemplo, e apresente a imagem rotacionando a forma para que visualizem essas projeções. Questione se as outras alternativas representam algum tipo de projeção ou se alguma delas que não representa projeção. Para facilitar a visualização, clique na ferramenta , situada na barra vertical à direita da tela. Surgirá uma aba com algumas opções. No campo “Câmera”, marque a opção “Projeção paralela” (ela quem vai apresentar as projeções ortogonais). No campo “Exibições padrão”, clique nas opções apresentadas e observe as diversas vistas da Atomium. Caso precise fazer algum ajuste de visualização, use a ferramenta , para ajustar a imagem.

Aproveitando, ainda, a ideia da construção, fica como sugestão propor como trabalho

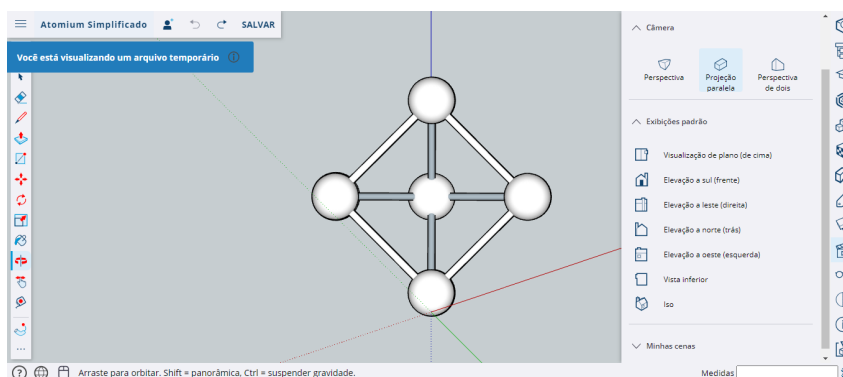
²<http://app.sketchup.com/app?3dwid=20dd3209-c352-4fbe-a05c-cc406fbb79c3>

Figura 5.23: Alternativa A



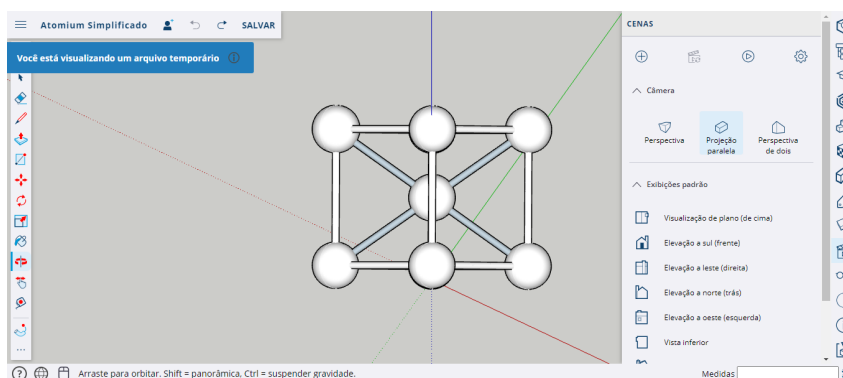
Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Figura 5.24: Alternativa B



Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

Figura 5.25: Alternativa C

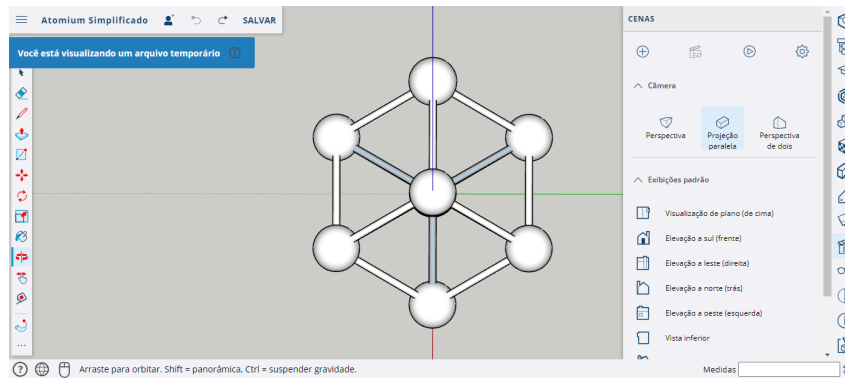


Fonte: SketchUp/Autora, 2024.

exploratório um desafio aos alunos de construção do modelo simplificado da Atomium por partes, separando a turma em 3 grupos:

- 1 grupo constrói as esferas, partindo de dois círculos concêntricos, perpendiculares, usando a ferramenta de “extrudar”, “copiar” e “replicar” nos locais convenientes.
- 1 grupo constrói a “gaiola”, a estrutura composta por cilindros que se conectam criando o formato semelhante às arestas de um cubo.

Figura 5.26: Alternativa E



Fonte: *SketchUp/Autora, 2024.*

- 1 grupo constrói as diagonais, também formadas por cilindros.

Feitas as construções parciais, é o momento de os grupos dialogarem para unificá-las de modo a obter uma única construção, discutindo as possibilidades e os ajustes a serem realizados. A construção do modelo requer o uso de várias ferramentas presentes no SketchUp como criação de componentes, posicionamento, ferramentas de “mostrar/ocultar” componentes, “empurrar/puxar”, entre outros. Aqui, é possível explorar também várias habilidades matemáticas, como construções espaciais, deslocamento, proporção e estratégias de construção. Que tal aproveitar essa ideia para propor um jogo? Essa mesma proposta pode ser adaptada e associada a um jogo no qual os alunos são desafiados a reproduzir monumentos existentes ao redor do mundo ou criar suas próprias construções para trabalhar as vistas e projeções. O professor pode predefinir construções específicas ou deixar em aberto para que os grupos façam suas escolhas, bem como pode separar por regiões brasileiras, por continentes ou mesmo pelo mundo. Cabe a cada grupo apresentar a construção e questionar a projeção desejada aos demais grupos e o professor será mediador, avaliando as propostas e atribuindo a pontuação.

6 Considerações Finais

Observando o cenário em que vivemos na educação, os jovens que recebemos em sala de aula e o acesso à informação, é fato que tecnologia se faz presente nesse espaço, onde os dispositivos eletrônicos trazem muitos estímulos, que podem contribuir de maneira positiva ou negativa, a depender da forma como ele é explorado. A evolução tecnológica transformou o ambiente educacional, criando um contraste entre a geração atual e as gerações anteriores. Analisando essas mudanças, é possível identificar avanços significativos e desafios que acompanham essa transição, o que exige uma adaptação contínua dos métodos de ensino. Esse foi o ponto de partida para a escrita da dissertação, a motivação em buscar ferramentas que aproxime e traga engajamento dos alunos. E, para isso, é importante que o professor se interesse por novas abordagens buscando trazer também esse interesse por parte dos alunos.

Nossa proposta surgiu no intuito de apresentar possibilidades de inserção de tecnologias digitais no ensino de Geometria como um suporte de exploração, visualização e compreensão do conteúdo. O que mostramos até então não é uma forma de romper ou substituir o ensino tradicional, mas sim, trazer novas abordagens, explorar outros recursos pedagógicos para agregar o processo de ensino e aprendizagem. Estamos cientes também de que ainda há muitas barreiras e realidades diversas em cada escola, em cada família, que a desigualdade digital persiste, como falta de aparelhos digitais ou de acesso a uma rede de *internet*, o que se torna um obstáculo para a implementação dessas abordagens. Outro ponto que também merece atenção é ter ciência de que o ambiente digital pode ser uma fonte de distrações constantes, como redes sociais e jogos. Além disso, a sobrecarga de informações pode dificultar a capacidade dos alunos de filtrar e focar no conteúdo relevante. Por isso, é necessário e importante que o professor se informe, estude e saiba orientar e conduzir os alunos na tratativa de uma abordagem didática como essa para que não ocorra distrações ou fugas entre os recursos digitais.

Considerando o cenário de acesso às tecnologias e interesse do professor em trazer esses recursos, apresentamos alguns aplicativos e plataformas para serem incorporadas às aulas de Geometria na educação básica. Vale mencionar que as TDIC e a gamificação estão

transformando a educação, mas também trazem a necessidade de revisão e atualização constantes nas abordagens pedagógicas. O uso de plataformas e jogos digitais no ensino de Geometria representa uma estratégia para enriquecer a aprendizagem dos alunos, alinhando-se com a BNCC. As plataformas e os jogos digitais possibilitam uma abordagem dinâmica e interativa, permitindo que os alunos explorem conceitos geométricos de maneira visual e prática, ao passo que contribui também para o desenvolvimento da capacidade de representação espacial, análise de formas e compreensão de propriedades geométricas.

Iniciamos o projeto com uma busca de referências com abordagens educacionais digitais no ensino de Geometria. A partir daí, foram várias as pesquisas e experimentações em diversos aplicativos e plataformas digitais para apresentar a outros professores da área, desde jogos, simuladores até plataformas de construção, pensando em possibilidades de enriquecer o ensino de Geometria e facilitar o aprendizado do aluno. Finalizamos com a apresentação de uma ferramenta que não é propriamente direcionada para o ensino de Geometria, mas que possui muitas possibilidades exploratórias que podem ser levadas para a sala de aula: o SketchUp, aplicativo voltado para a área de arquitetura, design de interiores e afins. Mesmo sendo uma ferramenta utilizada para outros fins, apresentamos algumas propostas interessantes para serem incorporadas ao ensino de Geometria, deixando inúmeras outras possibilidades a depender do professor e do manuseio com a ferramenta e suas potencialidades.

Nossa proposta foi usar de recursos digitais como ferramenta de ensino para que o aluno tenha disposição e interesse em manipulá-las, favorecendo sua aprendizagem. Junto a isso, com a construção do projeto de escrita, surgiu também uma perspectiva de continuidade desse estudo num futuro próximo, uma expansão da proposta com novos arquivos, novos produtos como uma apostila e / ou vídeos com tutoriais sobre o assunto, buscando apresentar possibilidades ao professor, como uma ampliação de abordagem para a sala de aula. Vale reforçar que é crucial equilibrar o uso dessas ferramentas com métodos tradicionais, garantindo que todos os alunos tenham acesso e desenvolvam um conjunto diversificado de habilidades, preparando-os para um futuro complexo e em constante mudança.

Referências

- 1 SOUZA FILHO, J. R. *Construções Geométricas Utilizando o Aplicativo Euclidea*. 2017. Mestrado em Matemática – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- 2 FONSECA, J. M. S. *Jogos de Computador no Ensino de Matemática*. 2018. Mestrado em Matemática – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, MG.
- 3 RODRIGUES, C. S. *Números Aleatórios e os Jogos de Computador*. 2019. Mestrado em Matemática – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, MG.
- 4 COSME, C. M. M. Experiência Didática com o Aplicativo *Euclidea*. *Professor de Matemática On line*, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, v. 8, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo820>.
- 5 BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular: A Educação é a Base*. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 set. 2023.
- 6 VIDIGAL, C. E. L.; FERREIRA, F. A. Enquadrando Pitágoras: uma experiência de ensino com aluno do 8 ano do Fundamental. *Professor de Matemática On line*, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, v. 9, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo97>.
- 7 PAPERT, S. *et al. Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. SIGCUE Outlook, Association for Computing Machinery*. New York, USA: v. 4, n. 2, p. 13–17. ISSN 0163-5735, 1970.
- 8 PRENSKY, M. *Digital Natives, Digital Immigrants*. Bingley: MCB University Press. Vol. 9. No. 5, 2001. Disponível em: <https://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2024.
- 9 AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.
- 10 BUSARELLO, R. I. *Gamification: princípios e estratégias*. São Paulo: Pimenta Cultural, 2016. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4455428/mod_resource/content/1/Gamification.pdf.
- 11 BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: Uma abordagem teórico-prática*. São Paulo: Pimenta Cultural, 2018. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7722229/mod_resource/content/1/Metodologias-Ativas-para-uma-Educacao-Inovadora-Bacich-e-Moran.pdf.
- 12 PAPERT, S. *LOGO: computadores e educação*. São Paulo: Brasiliense, 1985.

- 13 HOHENWARTER, M. *et al.* *GeoGebra*. 2017. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 14 SILVA, T. G. R. *Catálogo de aplicativos: uma proposta de utilização de aplicativos móveis no ensino de geometria nos oitavo e nono anos do ensino fundamental*. 2019. Mestrado em Matemática – Colégio Pedro II, Rio de Janeiro - RJ.
- 15 FERNANDES, M. D. F. *O Pensamento Computacional como Metodologia de Ensino da Geometria Espacial*. 2023. Mestrado em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes - RJ.
- 16 SCHMITT, C. *A integração das TDIC à educação matemática: Um estudo sobre o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas no ensino e aprendizagem de Matemática*. 2018. Mestrado em Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, SÃO PAULO - SP.
- 17 SANCHES, M. N. *Metodologias Ativas e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs): Uma Proposta de Intervenção na Aprendizagem com o Auxílio do Programa Socrative*. 2018. Mestrado em Matemática – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas - BA.
- 18 FERNANDES, H. C. *A gamificação aliada à tecnologia no ensino brasileiro de matemática*. 2022. Mestrado em Matemática – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte - CE.
- 19 FERRONATO, J. *A gamificação como estratégia de aprendizagem: Construções geométricas utilizando o aplicativo Euclidea*. 2021. Mestrado em Matemática – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó - SC.
- 20 SOUZA, P. H. S. *Gamificação voltada para o ensino de geometria plana: A busca do pergaminho perdido de Euclides*. 2020. Mestrado em Matemática – Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL.
- 21 RAMOS, A. C. R. *SketchUp – Uma ferramenta útil para o ensino da matemática aplicada em projetos*. 2021. Mestrado em Matemática – Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA.
- 22 MESTRE do Tangram. Little Bear Productions. 2016. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.littlebeargames.tangram&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 23 GEOBOARD. The Math Learning Center/Clarity Innovations. 2010. Disponível em: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 24 PYTHAGOREA. Horis International Limited. 2016. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.pythagorea&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 25 GEOMETRYX. Famobix. 2017. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.famobix.geometryx&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 26 PHET Colorado. University of Colorado Boulder. 2016. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/. Acesso em: 5 abr. 2024.

- 27 QUEBRA-CABEÇA Geométrico. WiseApp - Brain Game. 2022. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=club.wiseapp.geometricpuzzle>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 28 SÓLIDOS RA. Lucas.Dev. 2021. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.LuMuGames.SolidosRA&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 29 GEOMETRY Nets Helper. Digital Gene. 2019. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.digitalgene.geometrynets&hl=pt>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 30 GEOCON. Oleh Yudin. 2014. Disponível em: <https://apps.apple.com/br/app/geocon-hd/id919438593>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 31 PATTERN Shapes. The Math Learning Center/Clarity Innovations. 2021. Disponível em: <https://apps.apple.com/us/app/pattern-shapes-by-mlc/id908511013>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 32 GEOMETRY Pad. Bytes Arithmetic LLC. 2021. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.stemonmobile.GeometryPad>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- 33 ICROSSS. Oleh Yudin. 2011. Disponível em: <https://apps.apple.com/us/app/icrosss/id431653759>. Acesso em: 9 abr. 2024.
- 34 SMART Protractor. Smart Tools co. 2010. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=kr.sira.protractor&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 9 abr. 2024.
- 35 XSECTION. Horis International Limited. 2019. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.xsection. Acesso em: 9 abr. 2024.
- 36 EUCLIDEA: Geometric Construction Puzzle. Euclidean. 2014. Disponível em: <https://www.euclidean.xyz/en/>. Acesso em: 5 abr. 2024.
- 37 MATHIGON. Mathigon. 2020. Disponível em: www.mathigon.org. Acesso em: 27 set. 2023.
- 38 SWEET Home 3D. Emmanuel Puybaret. 2005. Disponível em: <https://www.sweethome3d.com/pt/>. Acesso em: 9 abr. 2024.
- 39 JESUS, V. P. DE. *Apostila sobre a matemática na construção civil com o uso do Sweet Home 3D*. 2022. Mestrado em Matemática – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- 40 SKETCHUP. Inc. Trimble. 2000. Disponível em: <https://www.sketchup.com/>. Acesso em: 9 abr. 2024.
- 41 NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT*. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.