



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS BLUMENAU  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT

Marco Aurelio Pereira Costa

**Explorando Contrações Com Uma Abordagem Visual Para o Teorema do Ponto  
Fixo de Banach**

Blumenau  
2024

Marco Aurelio Pereira Costa

**Explorando Contrações Com Uma Abordagem Visual Para o Teorema do Ponto  
Fixo de Banach**

Dissertação de mestrado submetido ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Orientador: Prof. Roger Behling, Dr.

Blumenau  
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Costa, Marco Aurelio Pereira  
Explorando Contrações Com Uma Abordagem Visual Para o  
Teorema do Ponto Fixo de Banach / Marco Aurelio Pereira  
Costa ; orientador, Roger Behling, 2024.  
42 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teorema do Ponto Fixo. 3. Banach. 4.  
Sobreposição de Imagens. 5. Contrações. I. Behling, Roger.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT. III. Título.

Marco Aurelio Pereira Costa

**Explorando Contrações Com Uma Abordagem Visual Para o Teorema do Ponto  
Fixo de Banach**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca  
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Roger Behling, Dr.  
Instituição UFSC-Blumenau

Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.  
Instituição UFSC-Blumenau

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.  
Instituição UFSC-Blumenau

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi  
julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

Coordenação do Programa de  
Pós-Graduação

---

Prof. Roger Behling, Dr.  
Orientador

Blumenau, 2024.

Este trabalho é dedicado à minha amada esposa  
Danieli dos Santos Costa.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus pela dádiva da vida, pois sem Ele eu nada sou, e por me conceder a capacidade de concluir este curso.

À minha mãe, Marlene, e ao meu padrasto, Manoel, que sempre agiu e age como um verdadeiro pai para mim e avô para meus filhos.

À minha esposa, Danieli, e aos meus filhos, Jonathan, Murilo e Vinicius, pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

Aos meus colegas do Profmat da UFSC Blumenau — Carol, Elton, Evandir, João, Jonathan, Matheus, Natã, Renee e Tony — por todos os momentos de troca e aprendizado.

Aos meus professores da UFSC Blumenau, por nos guiarem rumo ao êxito.

E ao meu orientador, Professor Roger Behling, por me apresentar esse belíssimo teorema.

*“É muito melhor conquistar a sabedoria do que o ouro puro.  
É mais proveitoso obter o entendimento do que a prata mais valiosa.”  
(Provérbios 16:16 - KJA)*

## RESUMO

Este trabalho aborda o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como teorema do ponto fixo de contração. É apresentada uma demonstração detalhada do teorema, fundamentada nas propriedades das métricas e das contrações. Após essa abordagem clássica, explora-se uma aplicação bastante interessante em que se busca achar pontos em comum entre uma imagem e uma redução dela. O que garante a existência e unicidade de um ponto de interseção, denominado Ponto Fixo, entre uma contração da imagem sobreposta a original é justamente o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Esta aplicação ilustra o teorema de maneira prática, simples e intuitiva. Além disso, é possível encontrar o respectivo ponto fixo algoritmicamente. Por fim, é proposto uma sequência didática focada em transformações geométricas, integrando conceitos do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Esta sequência didática visa proporcionar uma compreensão visual das transformações geométricas através da lente das contrações e pontos fixos, tornando o aprendizado mais acessível e interessante para os alunos. Esta dissertação, portanto, não só demonstra a robustez teórica do Teorema do Ponto Fixo de Banach, mas também evidencia sua aplicabilidade em diversos campos da matemática e seu potencial didático.

**Palavras-chave:** Teorema do Ponto Fixo de Banach. Sobreposição de Imagens. Contrações.

## ABSTRACT

This work addresses the Banach Fixed-Point Theorem, also known as the contraction mapping theorem. Initially, a detailed proof of the theorem is presented, based on the properties of metrics and contractions. After this classical approach, we explore a very interesting application in which we seek a common point between an image and a reduction of it. What guarantees the existence and uniqueness of an intersection point, called fixed point, between a contraction of the image superimposed on the original one is precisely Banach Fixed-Point Theorem. This application illustrates the theorem in a practical, simple and intuitive way. Furthermore, it is possible to find the respective fixed point algorithmically. Finally, a didactic sequence focused on geometric transformations is proposed, integrating concepts of the Banach Fixed-Point Theorem. This teaching sequence aims to provide a visual understanding of geometric transformations through the lens of contractions and fixed points, making learning more accessible and interesting for students. This dissertation, therefore, not only demonstrates the theoretical robustness of Banach Fixed-Point Theorem, but also highlights its applicability in different fields of mathematics and its didactic potential.

**Keywords:** Banach Fixed-Point Theorem. Superposition. Contraction.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico . . . . .	17
Figura 2 – Celebration Stefan Banach. . . . .	21
Figura 3 – Monumento dos matemáticos poloneses Stefan Banach e Otton Nikodym. . . . .	22
Figura 4 – Celebration Stefan Banach. . . . .	23
Figura 5 – Gráfico . . . . .	26
Figura 6 – 5 iterações Celebration Stefan Banach em papel milimetrado . . . . .	27
Figura 7 – Monumento Banach. . . . .	27
Figura 8 – Sobreposição com Contração Inclinada do Celebration Stefan Banach em papel milimetrado . . . . .	29
Figura 9 – Brasão da UFSC . . . . .	32
Figura 10 – Logotipo do IMPA . . . . .	34
Figura 11 – Passeio de Balão . . . . .	35

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores obtidos a partir da figura 4 . . . . .	24
Tabela 2 – Valores obtidos das iterações . . . . .	26
Tabela 3 – Valores obtidos da figura 7 . . . . .	27
Tabela 4 – Dados após 12 iterações (figura 7) . . . . .	28
Tabela 5 – Valores obtidos da figura 8 . . . . .	29
Tabela 6 – Dados de 41 iterações (figura 8) . . . . .	30
Tabela 7 – Valores das coordenadas da Figura 9 . . . . .	31
Tabela 8 – Dados de 24 iterações (figura 9) . . . . .	33
Tabela 9 – Dados após 12 iterações (figura 10). . . . .	33
Tabela 10 – Dados após 10 iterações (figura 11) . . . . .	34

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAL PRELIMINAR</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS . . . . .	13
2.2	NOÇÕES DE CONTRAÇÃO E PONTO FIXO . . . . .	15
<b>3</b>	<b>TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH</b> . . . . .	<b>18</b>
3.1	DEMONSTRAÇÃO . . . . .	18
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH</b> . . . . .	<b>21</b>
4.1	PRIMEIRO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	23
4.2	SEGUNDO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	26
4.3	TERCEIRO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	29
4.4	QUARTO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	30
4.5	QUINTO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	31
4.6	SEXTO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS . . . . .	32
<b>5</b>	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b> . . . . .	<b>36</b>
5.1	SUGESTÃO DE AULA . . . . .	36
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>40</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>41</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Se o leitor escolher qualquer imagem e reduzi-la, seja de forma proporcional ou não, para posteriormente sobrepor a redução à imagem original, um ponto de interseção único será gerado. Isso pode parecer incrível e quase impossível de acreditar que funcione para qualquer imagem, no entanto, a matemática comprova esse fenômeno. O primeiro encontro com essa ideia ocorreu durante uma aula de Fundamentos do Cálculo no segundo ano do mestrado, ministrado pelo professor Roger Behling. Este trabalho visa, entre outros objetivos, demonstrar ao leitor como esse fato é possível.

Os tópicos do capítulo 2 serão utilizados de forma direta na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach apresentado no capítulo seguinte, que estabelece, sob certas condições necessárias, a existência e unicidade de ponto fixo para contrações em Espaços Métricos Completos.

O capítulo 4 inclui uma aplicação visual que ilustra como o Teorema do Ponto Fixo de Banach pode ser usado para encontrar o ponto de interseção de duas imagens, em que uma é contração da outra. Este exemplo prático ajuda a solidificar a compreensão do teorema através de uma visualização concreta.

Por fim, no último capítulo, a dissertação oferece uma sequência didática detalhada sobre transformações geométricas, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach como uma ferramenta pedagógica para ensinar conceitos de contrações e pontos fixos no contexto de transformações geométricas. Esta sequência didática é destinada a professores do ensino médio que desejam integrar conceitos avançados de matemática em suas aulas de forma acessível e interativa.

Em suma, esta dissertação não apenas explora o Teorema do Ponto Fixo de Banach e uma demonstração dele, mas também destaca suas aplicações teóricas e práticas, oferecendo recursos didáticos para a Educação Matemática.

## 2 MATERIAL PRELIMINAR

Os tópicos abordados neste capítulo tem como objetivo fundamentar a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será apresentado no Capítulo 3. Serão abordados tópicos fundamentais, como Espaços Métricos e Sequência de Cauchy, que servirão de base para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

### 2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Os espaços métricos são uma estrutura fundamental na Matemática que descreve as propriedades de proximidade e distância em um conjunto. Eles são definidos por um conjunto  $M$  e uma função métrica  $d$ , que associa pares de elementos de  $M$  a números reais não negativos, satisfazendo propriedades específicas. A métrica  $d$  mede a distância entre dois pontos no espaço métrico (veja Bazán, Pereira e Souza Fernandez (2023)). Se  $M$  é um conjunto não vazio e se  $a, b \in M$ , dizer que  $a$  está próximo de  $b$  significa afirmar que a distância entre  $a$  e  $b$  é pequena. Espaços métricos têm uma ampla variedade de aplicações em Matemática, Física, Ciência da Computação e outras áreas. Eles são essenciais para o estudo da Topologia, Análise Matemática, Teoria da Medida, algoritmos de busca e Otimização, entre outros campos.

... O conhecimento da teoria dos espaços métricos é fundamental para compreender o funcionamento de diversos métodos numéricos (por exemplo, a fim de resolver equações diferenciais) bem como em Análise Matemática. O Teorema do Ponto Fixo de Banach, por exemplo, essencial para se demonstrar a existência e unicidade da solução de problemas de valor inicial, faz uso de conceitos métricos como o de “completude”. Em toda a Matemática, especialmente nos ramos da Geometria, Topologia e da Análise, o conhecimento da teoria dos espaços métricos é uma ferramenta essencial. (BERNI, 2021)

Formalmente, tem-se a definição.

**Definição 1.** Diz-se que  $d$  é uma métrica definida em um conjunto não vazio  $M$  quando for uma função real com domínio  $M \times M$  atendendo às seguintes propriedades para todos os elementos  $x, y, z \in M$ ,

1. Não-negatividade:  $d(x, y) \geq 0$ ;
2. Identidade dos indiscerníveis:  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
3. Simetria:  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4. Desigualdade triangular:  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (HÖNIG, 1976).

Nesse caso diz-se que  $M$  é um espaço métrico com métrica  $d$ .

Serão apresentados conceitos para o entendimento do que vem a ser um Espaço Métrico Completo, já que este aparece como hipótese no Teorema do Ponto Fixo de Banach. A reta Real com sua métrica usual (valor absoluto) é um exemplo de Espaço Métrico Completo (LIMA, 2020) e (BERNI, 2021). Para construir esse conceito, é preciso definir convergência de sequências em um espaço métrico.

### Convergência de sequências

**Definição 2.** *Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $(M, d)$  converge a um ponto  $\bar{x} \in M$ , ou dita convergente a esse ponto, se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $N$  tal que, para todos os valores  $n \geq N$ , a distância entre  $x_n$  e  $\bar{x}$  é menor que  $\varepsilon$ , ou seja,  $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$ . Nesse caso, usa-se também a notação de limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

### Sequência de Cauchy

Apresenta-se agora a definição de sequência de Cauchy.

**Definição 3.** *Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $(M, d)$  é uma sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $N$  tal que, para todos  $n, m \geq N$ , vale*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

*Em outras palavras*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

As definições sobre convergência de sequências e sequências de Cauchy permitirão estabelecer uma apresentação formal de Espaços Métricos Completos. Mas, antes de chegar nessa definição, nota-se que não é difícil mostrar que toda sequência convergente deve ser de Cauchy. No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Isso dependerá do espaço métrico. Se houver a validade da recíproca, usa-se o termo completude do espaço.

### Definição de Espaços Métricos Completos

**Definição 4.** *Um espaço métrico  $(M, d)$  é dito completo se toda sequência de Cauchy desse espaço for convergente.*

Um exemplo de espaço métrico que não é completo é o conjunto dos números racionais munido da métrica induzida pelo valor absoluto. É possível construir sequências de Cauchy racionais que não convergem a um racional. Um fato bastante conhecido é que os espaços Euclidianos são completos. Essa afirmação é posta abaixo em forma de lema.

**Lema 1.**  $(x_n)$  é uma sequência convergente em  $\mathbb{R}^n$  se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

No resultado anterior não foi dito em qual métrica o espaço  $\mathbb{R}^n$  é completo. A razão para isso, é que métricas em espaços de dimensão finita são equivalentes, e portanto qualquer métrica no  $\mathbb{R}^n$  o deixa completo. Para detalhes sobre equivalência de distâncias e noção de dimensão finita em espaços vetoriais, direcionamos o leitor à referência (LIMA, 2020).

## 2.2 NOÇÕES DE CONTRAÇÃO E PONTO FIXO

O Teorema do Ponto Fixo de Banach estabelece condições sob as quais uma função em um espaço métrico completo possui o que se chama de ponto fixo. O teorema pede que a tal função seja uma contração.

### Contração

**Definição 5.** Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e considere uma função  $f : M \rightarrow M$ . A aplicação  $f$  é dita ser uma contração se existir uma constante  $c$  que pertence ao intervalo  $[0, 1)$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M. \quad (1)$$

Para ilustrar, seguem dois exemplos de contrações.

Exemplo - Função linear com coeficiente angular menor que 1:

Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{2}x$ . Veja que a diferença  $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}|x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ . Portanto,  $f$  é uma função contrativa com constante de contração  $c = \frac{1}{2}$ .

Exemplo - Considere a função trigonométrica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ .

É possível verificar que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sin\left(\frac{x}{4}\right) - \sin\left(\frac{y}{4}\right) \right|.$$

Agora, tomando a fórmula do seno da diferença, tem-se que

$$|f(x) - f(y)| = \left| 2 \cos\left(\frac{x+y}{8}\right) \sin\left(\frac{x-y}{8}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{8}\right) \right|.$$

É conhecido que  $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Assim

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \left| \frac{x-y}{8} \right| = \frac{1}{4}|x-y|.$$

Portanto, verifica-se que  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$ , confirmando que a função é contrativa com constante de contração  $c = \frac{1}{4}$ .

Contrações são exemplos particulares de funções contínuas. Para deduzir isso, reveja a definição de continuidade.

**Definição 6.** *Sejam  $M, d$  um espaço métrico. Diz-se que  $f : M \rightarrow M$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, é possível obter  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implique  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ . (LIMA, 2020)*

Sem entrar em detalhes, apenas observa-se aqui que a continuidade definida acima equivale ao seguinte. Pode-se dizer que  $f$  é contínua em  $a \in M$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  para toda sequência  $(x_n)$  em  $M$  convergente a  $a$ . Esse fato será usado em um detalhe na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Lema 2.** *Se  $(M, d)$  é espaço métrico e  $f : M \rightarrow M$  é uma contração, então  $f$  é contínua, ou seja, é contínua em cada ponto  $a \in M$ .*

*Demonstração.* Dado um  $\varepsilon > 0$  na definição de continuidade e tomando em conta que a constante de contração  $c$  está no intervalo  $[0, 1)$ , é fácil ver que basta tomar  $\delta = \varepsilon$ . De fato, obtem-se  $d(f(x), f(a)) \leq cd(x, a) \leq d(x, a) < \delta = \varepsilon$ . ■

## Ponto Fixo

Seja  $M$  um conjunto não vazio, um ponto  $\hat{x}$  que pertence a  $M$  é dito ponto fixo de uma função  $f : M \rightarrow M$  se  $f(\hat{x}) = \hat{x}$ . O conceito de ponto fixo pode parecer simples, entretanto há uma infinidade de problemas, na Física e na Matemática Aplicada, que exigem a determinação de pontos fixos. Para ilustrar, tome, por exemplo,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = x^2 - 3x$ . Para determinar o conjunto de pontos fixos dessa  $f$  deve-se resolver

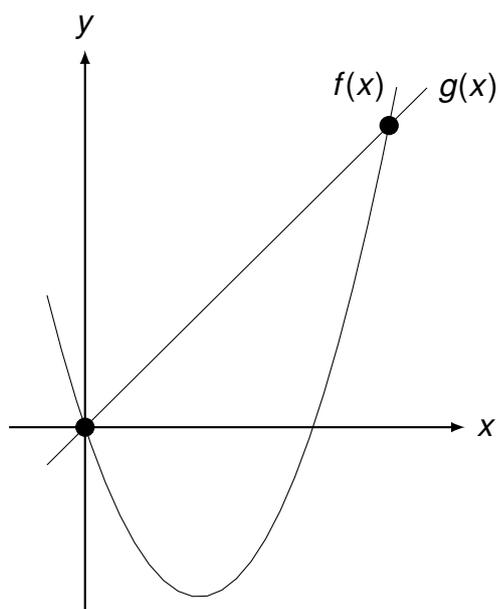
$$x^2 - 3x = x.$$

Subtrai-se  $x$  em ambos os membros da igualdade.

$$x^2 - 4x = 0.$$

Colocando a variável  $x$  em evidência, obtem-se dois números cujo produto é zero,  $x \cdot (x - 4) = 0$ , conclui-se que essa função possui dois pontos fixos, que são 0 e 4. Veja que no gráfico da Figura 1, a parábola da função quadrática  $f(x) = x^2 - 3x$  e a reta da função identidade  $g(x) = x$  se interceptam em dois pontos. As abscissas desses pontos são precisamente os pontos fixos da função  $f$  do exemplo.

Figura 1 – Gráfico



### 3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

O **Teorema do Ponto Fixo de Banach**, também conhecido como Teorema das Contrações (KREYSZIG, 1991), é um resultado fundamental na teoria dos Espaços Métricos Completos. É assim nomeado em homenagem ao matemático Stefan Banach (1892-1945). Banach, matemático polonês, nasceu em circunstâncias complexas, cresceu em Cracóvia e estudou Engenharia, mas depois se interessou por Matemática devido a um encontro crucial com o matemático Hugo Steinhaus. Logo começou a fazer contribuições notáveis à Análise Funcional. Banach fundou a Análise Funcional moderna e introduziu conceitos importantes, como o espaço de Banach e a álgebra de Banach. Ele provou teoremas fundamentais, como o Teorema de Hahn-Banach, e também explorou paradoxos notáveis, como o Paradoxo de Banach-Tarski. Sua carreira acadêmica floresceu em Lwów, onde manteve conexões com matemáticos soviéticos. No entanto, durante a Segunda Guerra Mundial, ele enfrentou dificuldades sob a ocupação nazista e morreu em 1945 de câncer de pulmão. Banach deixou um legado duradouro na matemática (O'CONNOR J J; ROBERTSON, 2000). Em Kaluza (1996) encontra-se uma biografia completa de Banach.

#### 3.1 DEMONSTRAÇÃO

Enuncia-se a seguir o **Teorema do Ponto Fixo de Banach**. Além de enunciá-lo, demonstra-se o teorema e parte da demonstração tem como base o material preliminar do capítulo anterior.

**Teorema 1.** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $f : M \rightarrow M$  uma contração, i.e., existe uma constante real  $c \in [0, 1)$ , tal que para todo  $x, y \in M$  tem-se*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

*Então,  $f$  possui um único ponto fixo em  $M$ , ou seja, existe um único  $\hat{x} \in M$  tal que  $f(\hat{x}) = \hat{x}$ .*

*Demonstração.* A primeira parte da demonstração trata da existência. Seja  $x_0$  um ponto arbitrário pertencente a  $M$ . Com ele, de forma iterada, constrói-se a sequência  $(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dada por

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) \\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
x_3 &= f(x_2) = f(f(x_0)) = f^3(x_0) \\
&\vdots \\
x_k &= f(x_{k-1}) = f^k(x_0).
\end{aligned} \tag{2}$$

A ideia agora é mostrar que  $(x_k)$  é uma sequência de Cauchy. Para isso, comece tomando a distância entre  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , em que  $k \geq 1$ . Levando em consideração (1) e (2), segue que

$$\begin{aligned}
d(x_{k+1}, x_k) &= d(f(x_k), f(x_{k-1})) \\
&\leq c \cdot d(x_k, x_{k-1}) \\
&= c \cdot d(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \\
&\leq c^2 \cdot d(x_{k-1}, x_{k-2}) \\
&\vdots \\
&\leq c^k \cdot d(x_1, x_0).
\end{aligned} \tag{3}$$

Sejam  $m, n$  inteiros positivos tais que  $m > n$ . Utilizando a desigualdade triangular de forma recorrente, obtem-se

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_m) \\
&\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_m, x_{n+2}) \\
&\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+3}, x_{n+2}) + d(x_m, x_{n+3}) \\
&\vdots \\
&\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+3}, x_{n+2}) + d(x_{n+4}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_m, x_{m-1}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (3),

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &\leq c^n \cdot d(x_1, x_0); \\
d(x_{n+2}, x_{n+1}) &\leq c^{n+1} \cdot d(x_1, x_0); \\
&\vdots \\
d(x_m, x_{m-1}) &\leq c^{m-1} \cdot d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq c^n \cdot d(x_1, x_0) + c^{n+1} \cdot d(x_1, x_0) + \cdots + c^{m-1} \cdot d(x_1, x_0) \\
&= (c^n + \cdots + c^{m-1}) \cdot d(x_1, x_0) \\
&= c^n (1 + \cdots + c^{m-1-n}) \cdot d(x_1, x_0) \\
&= c^n \cdot \frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} \cdot d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Como  $c \in [0, 1)$  tem-se  $1 - c^{m-n} \leq 1$ . Então,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_1, x_0). \quad (4)$$

Em (4), ao tomar o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , conclui-se que  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ . Dessa forma,  $(x_k)$  é sequência de Cauchy e como  $M$  é completo, tem-se que  $(x_k)$  é convergente a um ponto  $\hat{x} \in M$ . A argumentação segue agora em direção a provar que  $\hat{x}$  é ponto fixo de  $f$ . Esse fato decorre da convergência de  $(x_k)$  a  $\hat{x}$  aliada a continuidade de  $f$  (lembre que contrações são contínuas), como mostram as manipulações a seguir

$$\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\hat{x})$$

A primeira igualdade segue da convergência de  $(x_k)$  e a segunda da construção dessa sequência dada em (2). A última igualdade é consequência da continuidade de  $f$  no ponto  $\hat{x}$ .

Analisa-se agora a unicidade enunciada no teorema. Suponha que  $\bar{x}$  e  $\tilde{x}$  sejam pontos fixos de  $f$ , isto é,  $\bar{x} = f(\bar{x})$  e  $\tilde{x} = f(\tilde{x})$ . Logo,  $d(f(\bar{x}), f(\tilde{x})) = d(\bar{x}, \tilde{x})$ , o que, junto a  $f$  ser contração, rende

$$d(\bar{x}, \tilde{x}) = d(f(\bar{x}), f(\tilde{x})) \leq c \cdot d(\bar{x}, \tilde{x}).$$

Ou seja,  $(1 - c) \cdot d(\bar{x}, \tilde{x}) \leq 0$ . Como  $1 - c > 0$  e  $d(\bar{x}, \tilde{x}) \geq 0$ , conclui-se que  $d(\bar{x}, \tilde{x}) = 0$  e segue que  $\bar{x} = \tilde{x}$ . ■

#### 4 APLICAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

O Teorema do Ponto Fixo de Banach tem vastas aplicações em diversas disciplinas, por exemplo, em Análise Funcional. De acordo com Agarwal, Jleli e Samet (2018) "esta teoria tem muitas aplicações, principalmente, em Biologia, Química, Economia, Teoria dos Jogos, Teoria da Otimização, Física e outras (tradução do autor)". É importante salientar que o Teorema do Ponto Fixo de Banach serve de base para demonstrar teoremas centrais em Análise como o Teorema da Função Implícita, Teorema da Função Inversa e Teorema de Picard.

Neste capítulo é apresentada uma abordagem visual do teorema que consiste em, a partir de uma imagem retangular, reduzi-la e sobrepor as duas imagens, de modo que a imagem menor esteja completamente sobre a maior, e então encontrar um ponto em comum entre elas. Estas ações serão chamadas neste capítulo de *aplicação geométrica, aplicação ou experiência*.

Apesar de não ter-se encontrado material como o apresentado abaixo, nem o autor nem seu orientador reivindicam sua invenção.

A Figura 2 é um cativante Doodle do Google, lançado em 22 de julho de 2022. Esse doodle representa uma homenagem ímpar a Banach, celebrando o dia que, em 1922, ele tornou-se oficialmente professor. A Figura 3 é o Monumento dos matemáticos poloneses Stefan Banach e Otton Nikodym, localizado na Cracóvia, Polônia, este monumento foi projetado por Stefan Dousa. As Figuras 2 e 3 foram estrategicamente impressas em papel milimetrado para aprimorar a visualização do experimento, facilitando as análises matemáticas necessárias e propiciando uma compreensão mais intuitiva do conteúdo. As outras imagens usadas nas aplicações foram os logotipos do Impa, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, e da UFSC, Universidade Federal de Santa Catarina, e uma foto de arquivo pessoal do autor.

Figura 2 – Celebration Stefan Banach.



Fonte: <https://doodles.google/doodle/celebrating-stefan-banach>.

Figura 3 – Monumento dos matemáticos poloneses Stefan Banach e Otton Nikodym.



Fonte: <https://wikipedia.org>.

As experiências descritas aqui são imagens retangulares,  $w \times h$ , com vértices  $P = (0,0)$ ,  $Q = (w,0)$ ,  $R = (w,h)$  e  $S = (0,h)$ . Quando essas imagens são contraídas, elas formam outra imagem com vértices  $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ ,  $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ ,  $\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$  e  $\tilde{S} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ . Após a sobreposição, é necessário verificar se a imagem reduzida está completamente contida na original. Isso acontece quando  $\tilde{p}_1, \tilde{q}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1 \in [0, w]$  e  $\tilde{p}_2, \tilde{q}_2, \tilde{r}_2, \tilde{s}_2 \in [0, h]$ , o que implica que  $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S} \in M$ .

Para começar é necessário determinar a função  $f : M \rightarrow M$ , que atenda aos requisitos da *aplicação geométrica*. Como  $M$  é um conjunto de vetores, fazer operações com matrizes específicas atende aos objetivos, conforme está orientado em Lima e Carvalho (2002) e Steinbruch e Winterle (1987).

A função  $f$  procurada é, então, do tipo:

$$f(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

A matriz  $A$  desejada poderia ser obtida usando as razões trigonométricas no triângulo retângulo formado entre as duas imagens. No entanto, é preferível usar outra técnica, que consiste em mapear os pontos dos vértices para encontrar a matriz que realizará a transformação geométrica.

Destacam-se alguns pontos importantes. Nas *experiências* relatadas neste artigo, considera-se que há convergência quando os dígitos se mantêm constantes por três casas decimais. Além disso, ao longo do capítulo, aparecerão muitos pares ordenados compostos por números decimais, e, por essa razão, optou-se por utilizar o ponto (.) como separador entre a parte inteira e a decimal.

## 4.1 PRIMEIRO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS

Há duas imagens sobrepostas na Figura 4, em que a menor é contração da maior e está transladada e rotacionada. Então, seja  $M = [0,28] \times [0,20]$  a maior <sup>1</sup>.

Figura 4 – Celebration Stefan Banach.



Fonte: <https://doodles.google/doodle/celebrating-stefan-banach>.

Estabelecendo o vértice inferior esquerdo de  $M$  como a origem  $P = (0,0)$ , os demais vértices são dados por  $Q = (28,0)$ ,  $R = (28,20)$  e  $S = (0,20)$ . Após a contração, os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são mapeados, respectivamente, para  $\tilde{P} = (10,2)$ ,  $\tilde{Q} = (22.2, 9)$ ,  $\tilde{R} = (17.2, 17.7)$  e  $\tilde{S} = (4.9, 10.7)$ . A matriz  $A_{2 \times 2}$  é responsável por determinar tanto a contração quanto a rotação da imagem, enquanto  $(b_1, b_2)$  são as coordenadas de  $\tilde{P}$ .

Observe que

$$f(0,0) = (10,2);$$

$$f(28,0) = (22.2, 9); \quad (6)$$

$$f(28,20) = (17.2, 17.7);$$

$$f(0,20) = (4.9, 10.7). \quad (7)$$

Os valores conhecidos devem ser substituídos em (5). Por conveniência, serão usados também (6) e (7) para calcular os elementos da matriz.

De (6),

$$f(28,0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> Considere  $M$  toda área milimetrada do papel.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 22.2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 22.2 - 10 \\ 9 - 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 28 \\ a_{21} \cdot 28 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12.2 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{12.2}{28} = 0.436 \\ a_{21} &= \frac{7}{28} = 0.250. \end{aligned}$$

De (7),

$$f(0, 20) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9 \\ 10.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4.9 \\ 10.7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4.9 - 10 \\ 10.7 - 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12} \cdot 20 \\ a_{22} \cdot 20 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5.1 \\ 8.7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{-5.1}{20} = -0.255 \\ a_{22} &= \frac{8.7}{20} = 0.435. \end{aligned}$$

Na Tabela 1 estão todos os dados obtidos acima. Agora estes dados serão aplicados a equação (5).

Tabela 1 – Valores obtidos a partir da figura 4

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	TRANSLAÇÃO $(b_1, b_2)$
0.436	-0.255	0.250	0.435	(10, 2)

Fonte: Autor.

Então a função é

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Tomando  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  como primeira iteração.

$$(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(x_2, y_2) = f(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.847 \\ 5.370 \end{pmatrix}$$

$$(x_3, y_3) = f(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13.847 \\ 5.370 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.664 \\ 7.798 \end{pmatrix}$$

$$(x_4, y_4) = f(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14.664 \\ 7.798 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.401 \\ 9.058 \end{pmatrix}$$

$$(x_5, y_5) = f(x_4, y_4) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14.401 \\ 9.058 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.965 \\ 9.540 \end{pmatrix}.$$

A partir da décima quarta iteração, chega-se ao ponto de interseção.

$$(x_{14}, y_{14}) = f(x_{13}, y_{13}) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13.435 \\ 9.483 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.435 \\ 9.484 \end{pmatrix}$$

$$(x_{15}, y_{15}) = f(x_{14}, y_{14}) = \begin{pmatrix} 0.436 & -0.255 \\ 0.250 & 0.435 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13.435 \\ 9.484 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(x_{15}, y_{15}) = \begin{pmatrix} 13.435 \\ 9.484 \end{pmatrix}.$$

A Tabela 2 apresenta os resultados das iterações até a convergência, que acontece a partir da décima quarta iteração.

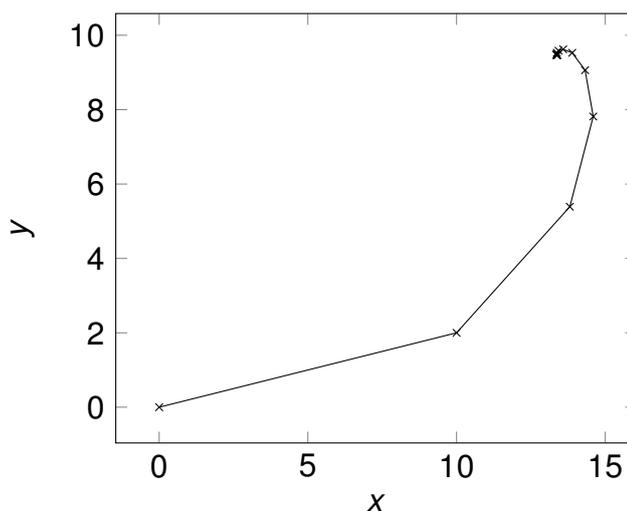
No gráfico fornecido na Figura 5, é possível observar o comportamento da função. Note que as distâncias entre os pontos diminuem a cada iteração até alcançar o ponto de convergência. A Figura 6 mostra cinco iterações consecutivas da mesma experiência, evidenciando que a medida que as imagens são contraídas e aplicadas sobre a anterior com as mesmas condições, as contrações convergem para o ponto de interesse.

Tabela 2 – Valores obtidos das iterações

Nº Iterações	x	y
1	10.000	2.000
2	13.847	5.370
3	14.664	7.798
4	14.401	9.058
5	13.965	9.540
6	13.652	9.641
7	13.490	9.607
8	13.428	9.551
9	13.415	9.512
10	13.420	9.491
11	13.427	9.484
12	13.432	9.482
13	13.435	9.483
14	13.435	9.484
15	13.435	9.484
16	13.435	9.484

Fonte: Autor.

Figura 5 – Gráfico



Fonte: Autor.

#### 4.2 SEGUNDO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS

Nesta aplicação, foi utilizada uma outra imagem, impressa em papel milimetrado<sup>2</sup>, com diferentes valores. A contração, neste caso, não foi proporcional, ou seja, a redução horizontal e vertical ocorreram com taxas percentuais distintas (40% na largura e 30% na altura). A Figura 7, que ilustra essa *aplicação geométrica*, também exibe algumas linhas que se cruzam, sendo o ponto de interseção o local do ponto fixo.

Na Tabela 3 estão apresentados todos os dados obtidos a partir desta aplicação, que são necessários para a determinação do ponto fixo. Os vértices  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  da

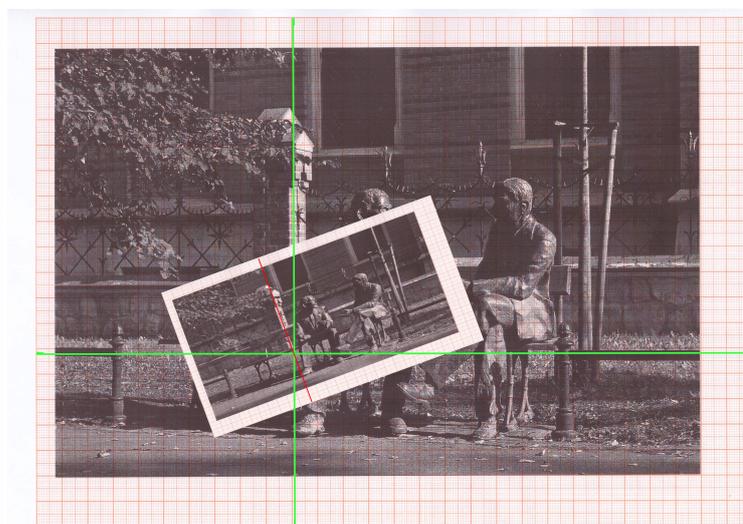
<sup>2</sup> Considere  $M$  como o papel milimetrado completo.

Figura 6 – 5 iterações Celebration Stefan Banach em papel milimetrado .



Fonte: <https://doodles.google/doodle/celebrating-stefan-banach>.

Figura 7 – Monumento Banach.



Fonte: [pt.wikipedia.org](http://pt.wikipedia.org)

imagem original são mapeados, respectivamente, nos pontos  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{R}$  e  $\tilde{S}$ .

Tabela 3 – Valores obtidos da figura 7

$\tilde{P}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{R}$	$\tilde{S}$	TRANSLAÇÃO $(b_1, b_2)$
(7, 3.5)	(17.6, 7.3)	(15.4, 12.9)	(4.9, 9.2)	(7, 3.5)

Fonte: Autor.

A função da segunda aplicação é

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0.3786 & -0.1050 \\ 0.1357 & 0.2850 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

como pode ser visto na Tabela 4 a convergência é obtida na décima iteração, considerando três casas decimais, o que mostra que nessa situação a convergência acontece muito rápido.

Tabela 4 – Dados após 12 iterações (figura 7)

Nº iterações	x	y
1	7.000	3.500
2	9.283	5.448
3	9.942	6.312
4	10.101	6.648
5	10.126	6.766
6	10.123	6.802
7	10.118	6.813
8	10.115	6.815
9	10.114	6.815
10	10.113	6.815
11	10.113	6.815
12	10.113	6.815

Fonte: Autor.

### 4.3 TERCEIRO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS

Nesta aplicação elementar, além das transformações geométricas anteriores, foi aplicada uma transformação de cisalhamento, que provoca uma inclinação na imagem, como mostrado na Figura 8. O cruzamento das linhas azul e vermelha representa o ponto de convergência, que é o ponto fixo da transformação.

Figura 8 – Sobreposição com Contração Inclínada do Celebration Stefan Banach em papel milimetrado .



Fonte: <https://doodles.google/doodle/celebrating-stefan-banach>.

Os dados necessários para determinar a função desta aplicação estão na Tabela 5. Neste caso, os vértices da imagem original  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são transformados em  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{R}$  e  $\tilde{S}$ , respectivamente, conforme os valores abaixo:

Tabela 5 – Valores obtidos da figura 8

$\tilde{P}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{R}$	$\tilde{S}$	TRANSLAÇÃO $(b_1, b_2)$
(5, 2)	(23.2, 5.4)	(25.6, 19.4)	(7.4, 15.9)	(5, 2)

Fonte: Autor.

Os dados da Tabela 5 foram usados para determinar a função da aplicação, que é expressa pela equação:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0.6500 & 0.1200 \\ 0.1214 & 0.6950 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Na equação (10), está a função utilizada para determinar o ponto fixo. Mesmo usando apenas três casas decimais, a convergência ocorre após a quadragésima iteração, como mostrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Dados de 41 iterações (figura 8)

Nº Iterações	x	y
1	5.000	2.000
2	8.490	3.997
3	10.998	5.809
4	12.846	7.373
5	14.235	8.684
6	15.295	9.764
7	16.113	10.643
8	16.751	11.353
9	17.250	11.925
10	17.644	12.382
11	17.954	12.748
12	18.200	13.040
13	18.395	13.273
14	18.549	13.458
15	18.672	13.606
16	18.770	13.723
17	18.847	13.817
18	18.909	13.891
19	18.958	13.951
20	18.996	13.998
21	19.027	14.035
22	19.052	14.065
23	19.072	14.089
24	19.087	14.107
25	19.100	14.122
26	19.109	14.134
27	19.117	14.144
28	19.123	14.151
29	19.128	14.157
30	19.132	14.162
31	19.135	14.166
32	19.138	14.169
33	19.140	14.171
34	19.141	14.173
35	19.143	14.175
36	19.144	14.176
37	19.145	14.177
38	19.145	14.178
39	19.146	14.178
40	19.146	14.179
41	19.146	14.179

Fonte: Autor.

#### 4.4 QUARTO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS

Nesta aplicação, o software de matemática GeoGebra foi utilizado como ferramenta auxiliar, principalmente para marcar os vértices das imagens e fornecer suas coordenadas. Como mostrado na Figura 9, a experiência foi realizada sobre o brasão da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Os vértices da imagem original estão indicados por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , enquanto os vértices da imagem contraída são  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ . Assim como nas aplicações anteriores, é necessário determinar os elementos

da matriz  $A$  para compor a função de transformação.

As coordenadas dos vértices da figura original e da contração são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores das coordenadas da Figura 9

$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
(0, 0)	(7.39, 0)	(7.39, 10.19)	(0, 10.19)	(3.08, 3.13)	(7.39, 4.27)	(5.75, 10.19)	(1.51, 9.02)

Fonte: Autor.

Conforme apresentados na Tabela 7, as coordenadas dos vértices permitem estabelecer as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= (3.08, 3.13); \\ f(7.39, 0) &= (7.39, 4.27); \\ f(7.39, 10.19) &= (5.75, 10.19); \\ f(0, 10.19) &= (1.51, 9.02). \end{aligned}$$

Com base nesses dados, as igualdades acima conduzem à equação (11). As taxas de contração vertical e horizontal da imagem original foram ambas de aproximadamente 60%. Utilizando cálculos com três casas decimais, a convergência é alcançada na vigésima segunda iteração, conforme mostrado na Tabela 8.

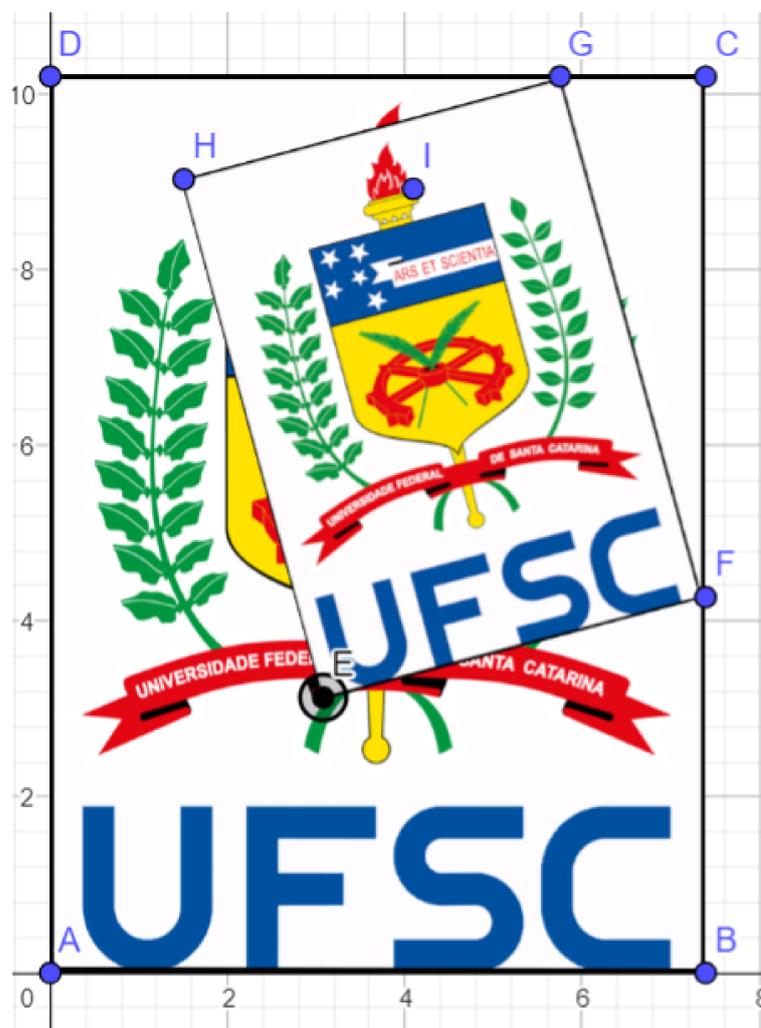
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5832 & -0.1541 \\ 0.1541 & 0.5780 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.08 \\ 3.13 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

#### 4.5 QUINTO EXEMPLO DE SOBREPOSIÇÃO DE IMAGENS

A Figura 10 exibe o logotipo do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Após a aplicação da contração sobre a imagem original, o fundo foi removido para que ficasse transparente, permitindo uma melhor visualização do ponto de interseção entre as duas imagens. Esse ponto de interseção, denotado por  $I = (13.257, 3.764)$ , representa o resultado da convergência das iterações aplicadas. A Tabela 9 apresenta as sucessivas iterações até que a convergência seja alcançada.

É importante notar que a contração da imagem preserva a estrutura da mesma, reduzindo suas dimensões para aproximadamente 30%, sem alterar significativamente sua geometria. O processo iterativo utilizado, conforme descrito pela equação (12), demonstra a eficiência da técnica na sobreposição de imagens, que converge rapidamente para o ponto de interseção, evidenciando a precisão dos cálculos matriciais aplicados.

Figura 9 – Brasão da UFSC



Fonte: <https://identidade.ufsc.br/versoes-do-brasao-para-fundos-claros>

A transformação utilizada para mapear as coordenadas da imagem original até sua versão contraída é dada pela seguinte equação linear

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0.1932 & 0.2327 \\ -0.2282 & 0.1939 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.86 \\ 6.06 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

A tabela 9 apresenta os valores das coordenadas  $x$  e  $y$  após 12 iterações, mostrando o processo de aproximação do ponto de interseção.

#### 4.6 SEXTO EXEMPLO DE SOBREPÓSICÃO DE IMAGENS

Nesta última aplicação, foi utilizada uma imagem do arquivo pessoal do autor, conforme mostra a Figura 11. A imagem, após ser contraída, foi intencionalmente rotacionada em  $90^\circ$ , de modo a ilustrar a sobreposição com transformação geométrica.

Tabela 8 – Dados de 24 iterações (figura 9)

Nº Iterações	x	y
1	3.080	3.130
2	4.394	5.414
3	4.809	6.937
4	4.816	7.882
5	4.674	8.429
6	4.507	8.723
7	4.365	8.867
8	4.259	8.929
9	4.189	8.948
10	4.144	8.948
11	4.118	8.942
12	4.104	8.934
13	4.097	8.927
14	4.094	8.922
15	4.093	8.919
16	4.093	8.917
17	4.093	8.915
18	4.094	8.915
19	4.094	8.914
20	4.094	8.914
21	4.094	8.914
22	4.095	8.914
23	4.095	8.914
24	4.095	8.914

Fonte: Autor.

Tabela 9 – Dados após 12 iterações (figura 10).

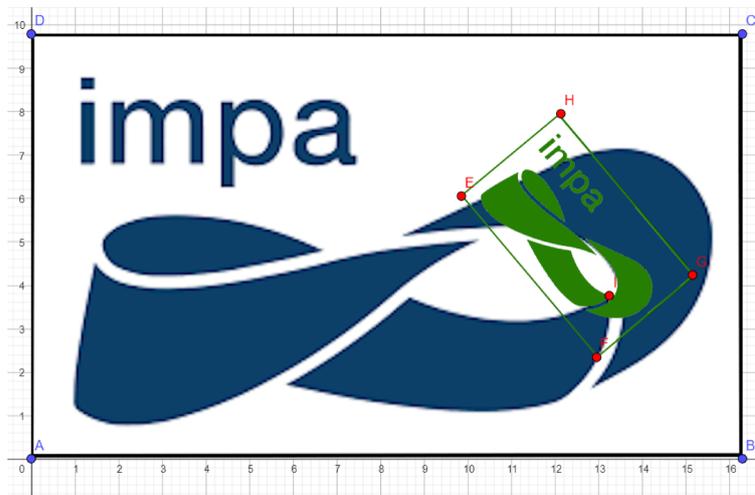
Nº Iterações	x	y
1	9.860	6.060
2	13.145	4.985
3	13.520	4.026
4	13.368	3.755
5	13.276	3.737
6	13.254	3.755
7	13.254	3.763
8	13.256	3.765
9	13.257	3.765
10	13.257	3.764
11	13.257	3.764
12	13.257	3.764

Fonte: Autor.

Como observado nos exemplos anteriores de sobreposição de imagens, a convergência é rapidamente alcançada. A Tabela 10 apresenta todas as iterações realizadas até atingir o ponto final da transformação. A equação que descreve essa experiência é dada por (13). A taxa de contração da imagem original foi de aproximadamente 30%, similar ao exemplo anterior.

A transformação aplicada pode ser descrita pela seguinte equação:

Figura 10 – Logotipo do IMPA



Fonte: <https://cdnportaldabmep.impa.br/img/logo/logo-impa.svg>

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.299 \\ 0.299 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.28 \\ 6.74 \end{pmatrix} \quad (13)$$

A Tabela 10 mostra os valores das coordenadas  $x$  e  $y$  após 10 iterações, evidenciando a convergência rápida do processo.

Tabela 10 – Dados após 10 iterações (figura 11)

Nº iterações	$x$	$y$
1	5.280	6.740
2	3.264	8.321
3	2.791	7.717
4	2.972	7.576
5	3.014	7.630
6	2.998	7.642
7	2.994	7.638
8	2.995	7.636
9	2.996	7.637
10	2.996	7.637

Fonte: Autor.

Como pode ser observado na tabela, a convergência para o ponto  $I = (2.996, 7.637)$  é alcançada rapidamente, confirmando a precisão do método aplicado. Esse exemplo destaca a eficiência das técnicas de contração em aplicações envolvendo sobreposição de imagens.

As experiências visuais apresentadas neste capítulo, mostram de forma clara o conceito de ponto fixo e destacam como o Teorema pode ser aplicado em situações geométricas. O processo de iterações sucessivas exemplifica a eficiência do Teorema, que sempre leva a uma solução única. Isso mostra sua importância, tanto em proble-

Figura 11 – Passeio de Balão



Fonte: Arquivo Pessoal

mas práticos quanto teóricos, reforçando sua relevância em várias áreas da Ciência e Matemática.

## 5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo apresenta uma sequência didática sobre transformações geométricas e a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach em imagens sobrepostas. Esta sequência contém 5 aulas de 45 minutos, estruturadas conforme o exemplo de Guedes (2019):

1. Organização da turma
2. Introdução
3. Desenvolvimento
4. Conclusão

### 5.1 SUGESTÃO DE AULA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

**Série sugerida: 2ª Série do Ensino Médio**

TEMA: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

**Autor: Marco Aurelio Pereira Costa**

**Professor: Dr. Roger Behling**

HABILIDADE DA BNCC

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BRASIL, 2018).

CONHECIMENTO PRÉVIO

- Operações com Matrizes, Razões Trigonométricas, Sistemas Lineares e Plano Cartesiano.

TEMPO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

- 5 aulas de 45 minutos

## OBJETIVOS DA AULA

- Compreender e aplicar transformações geométricas: translação, rotação, e escala.
- Entender o conceito de ponto fixo de uma função e sua aplicação em transformações geométricas.

## MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Papel milimetrado
- Régua
- Calculadora
- Lápis de cor
- Computador com software Geogebra (se disponível)
- Projetor ou quadro branco

## ESTRUTURA DAS AULAS

### **Aula 1: Introdução às Transformações Geométricas**

1. Organização (5 minutos)
2. Introdução (10 minutos)
  - Apresentação dos conceitos de transformações geométricas: translação, rotação, e homotetia.
  - Explicação do uso de matrizes para representar figuras geométricas.
3. Desenvolvimento (20 minutos)
  - Atividade prática: criação de figuras geométricas e realização de translações utilizando matrizes.
4. Conclusão (10 minutos)
  - Recapitulação dos conceitos.
  - Tarefa de casa: pesquisar exemplos de translação no cotidiano.

### **Aula 2: Rotação de Figuras**

1. Organização (5 minutos)
2. Introdução (5 minutos)
  - Discussão sobre as pesquisas dos alunos.

3. Desenvolvimento (25 minutos)
  - Explicação da matriz de rotação.
  - Atividade prática: rotacionar figuras geométricas utilizando seno e cosseno.
4. Conclusão (10 minutos)
  - Recapitulação dos conceitos.
  - Tarefa de casa: aplicar translação e rotação na mesma figura.

### **Aula 3: Homotetia e Escala**

1. Organização (5 minutos)
2. Introdução (5 minutos)
  - Discussão sobre a tarefa de casa.
3. Desenvolvimento (25 minutos)
  - Explicação do conceito de homotetia (escala) e ampliação/redução de figuras.
  - Atividade prática: ampliar e reduzir figuras utilizando a matriz de escala.
4. Conclusão (10 minutos)
  - Recapitulação dos conceitos.
  - Tarefa de casa: aplicar translação, rotação e homotetia na mesma figura.

### **Aula 4: Imagens Sobrepostas**

1. Organização (5 minutos)
2. Introdução (7 minutos)
  - Explicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua aplicação em transformações geométricas.
3. Desenvolvimento (30 minutos)
  - Atividade prática: encontrar o ponto fixo em uma figura utilizando iterações de transformações geométricas.
4. Conclusão (3 minutos)

### **Aula 5: Aplicação do Teorema do Ponto Fixo**

1. Organização (5 minutos)
2. Introdução (5 minutos)
3. Desenvolvimento (30 minutos)
  - Continuação da atividade prática da aula anterior: determinação do ponto fixo através de sucessivas iterações.
4. Conclusão (5 minutos)

### **AVALIAÇÃO**

A avaliação será feita por meio das atividades práticas realizadas em sala, onde o professor verificará o domínio dos conceitos de transformações geométricas e a aplicação correta do Teorema do Ponto Fixo.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, explorou-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach, desde sua demonstração formal até uma aplicação geométrica bastante visual envolvendo contrações de imagens. Ao aplicar o teorema para determinar o ponto de interseção entre duas imagens, demonstrou-se como conceitos teóricos podem ser aplicados em contextos concretos e visualmente intuitivos. Esta abordagem não apenas reforçou a compreensão teórica, mas também ilustrou a utilidade prática do teorema.

A sequência didática desenvolvida sobre transformações geométricas exemplifica o potencial didático do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Integrar conceitos de pontos fixos e contrações em atividades educacionais proporciona uma abordagem mais dinâmica e visual para o ensino da matemática, facilitando o aprendizado e incentivando o interesse dos alunos.

A importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach é clara, tanto pela sua base teórica sólida quanto pelas suas aplicações práticas. Ao concluir esta dissertação, fica evidente que o teorema além de ser um conceito importante na Análise Matemática, também é uma ferramenta útil com aplicações em várias áreas. Os métodos teóricos e a sequência apresentados neste trabalho servem como base para novas pesquisas e práticas pedagógicas, contribuindo para o desenvolvimento da matemática e do seu ensino.

### Sugestão de Estudos Futuros

Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se a utilização da Decomposição em Valores Singulares (SVD) para determinar, de forma precisa, os parâmetros de contração e rotação em transformações de imagens. A aplicação do SVD permitiria uma análise mais refinada das propriedades geométricas envolvidas nas transformações, complementando os estudos sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e suas aplicações visuais.

## REFERÊNCIAS

AGARWAL, Praveen; JLELI, Mohamed; SAMET, Bessem. Fixed point theory in metric spaces. **Recent Advances and Applications**, Springer, v. 10, 2018.

BAZÁN, Aldo; PEREIRA, Alex Farah; SOUZA FERNANDEZ, Cecília de. Introdução aos espaços de Banach. **34º Colóquio Brasileiro de Matemática**, 2023.

BERNI, Jean Cerqueira. **Espaços Métricos**. 2021. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~jeancb/EM2021.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 17 jul. 2024.

GUEDES, Prof. Dr. Ivan Claudio. **O que é sequência didática?** 2019. Disponível em: <https://www.icguedes.pro.br/sequencia-didatica-passo-a-passo/>. Acesso em: 17 jul. 2024.

HÖNIG, Chaim S. **Aplicações da topologia à análise**. [S.l.]: Impa, 1976.

KALUZA, Roman. **The Life of Stefan Banach**. [S.l.]: Birkhause, Boston, 1996. v. 1.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2020. v. 4.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios. **Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro**, 2002.

O'CONNOR J J; ROBERTSON, E F. **Stefan Banach**. 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach>. Acesso em: 21 nov. 2023.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987.