UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO / PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL / PROFMAT

PEDRO TÉRCIO FERREIRA DE CASTRO

MÉTODO PO-SHEN LOH: uma nova perspectiva para a resolução de equações quadráticas

São Luís – MA
2024

PEDRO TÉRCIO FERREIRA DE CASTRO

MÉTODO PO-SHEN LOH: uma nova perspectiva para a resolução de equações quadráticas

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geílson Mendes dos Reis

São Luís – MA

2024

Castro, Pedro Tércio Ferreira de.

Método Po-Shen Loh: uma nova perspectiva para resolução de equações quadráticas. / Pedro Tércio Ferreira de Castro. – São Luís (MA), 2024.

82p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -) Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, 2024.

Orientador: Prof. Me. Geilson Mendes dos Reis.

1. Equação Quadrática. 2. Fórmula resolutiva. 3. Método Babilônico. 4. Método de Po-Shen Loh. I.Título.

CDU: 517.9

Elaborado por Luciana de Araújo - CRB 13/445

PEDRO TÉRCIO FERREIRA DE CASTRO

MÉTODO PO-SHEN LOH: uma nova perspectiva para a resolução de equações quadráticas

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 23/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
GEILSON MENDES DOS REIS
Data: 13/09/2024 15:51:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Geílson Mendes dos Reis (Orientador)
Mestre em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Prof. Dr. Sergio Noleto Turibus
Doutor em Engenharia Nuclear
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Documento assinado digitalmente
JOSE SANTANA CAMPOS COSTA
Data: 13/09/2024 16:57:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jose Santana Campos Costa
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

A HaShem, o todo poderoso, e a toda minha família pelo incentivo e compreensão nos momentos de minha ausência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a HaShem[1], pelo dom da vida, por iluminar o meu caminho, renovar as minhas forças e me conceder essa oportunidade, pois a ele tudo pertence, e se cheguei aqui, neste momento, é porque ele permitiu.

Aos meus pais, Pedro Ferreira de Castro (in-memorian) e Otilia Espirito Santo Silva Ferreira (in-memorian) pela educação, apoio moral e pelo carinho que sempre me foi dedicado. A meus irmãos e minhas irmãs, que são minha base e meus apoiadores, o constante e precioso amor a mim dedicado em todos os momentos, agradeço a paciência, a torcida, o orgulho e a confiança de todos vocês.

Agradeço também aos meus professores (PROFMAT – UEMA) e colegas de turma, que me guiaram com sabedoria, desafiaram meu pensamento e me inspiraram a buscar a excelência em cada etapa do TCC. Suas contribuições foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e profissional.

À UEMA – Campus São Luís, pela oportunidade.

Agradecer em especial ao meu orientador Prof. Msc. Geílson Mendes dos Reis, por transmitir conhecimento, experiência, motivação, incentivo, paciência e amizade.

Agradecer em especial a funcionária do Departamento PROFMAT – UEMA, Ananda Santos, pela sua motivação, incentivo, paciência e amizade.

Por fim, quero agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste TCC. Cada palavra de incentivo, cada conselho e cada momento de apoio não passaram despercebidos.

[1] Significando, em português, *O Nome*, é frequentemente usado para designar Deus dentro do judaísmo.

"Se experimentar prazer com a Matemática, não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: uma ocupação favorita, uma ferramenta profissional, a própria profissão, ou uma grande ambição."

George Pólya

RESUMO

Este trabalho de pesquisa aborda o método babilônico, o qual foi redescoberto, e denominado método de Poh-Shen Lo para resolver equações quadráticas. O objetivo deste trabalho é mostrar a praticidade do método redescoberto pelo professor Poh-Shen Lo, a fim de estabelecer se há vantagens no uso didático. Destacando-se por ser uma abordagem simples e intuitiva, o método babilônico, que foi generalizado pelo professor Po-Shen Loh, e proposto como uma abordagem pedagógica. Em geral, o estudo de equações quadráticas é baseado numa quantidade excessiva de fórmulas, todo conteúdo é abordado sem justificativas. Buscou-se destacar a importância da história nas aulas de matemática, relembrando algumas civilizações e matemáticos que contribuíram para a descoberta de fórmulas e métodos de solução prática. A metodologia adotada na pesquisa é predominantemente qualitativa do tipo revisão bibliográfica. Como metodologia, além da pesquisa bibliográfica, este trabalho dedicou-se ao desenvolvimento de um estudo de caso em sala de aula do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da região metropolitana de São Luís - Maranhão, de modo que foram desenvolvidos planos de aula, testes práticos matemáticos e questionários com objetivos de medir não só a diferença na eficácia de ensino dos métodos analisados, mas o nível de satisfação dos alunos ao fazê-los. Além da coleta de dados junto aos alunos/mestrandos das turmas ativas do PROFMAT-UEMA. Por fim, como resultados, verificou-se poucos resultados da turma quando ensinados através do método de Poh-Shen Lo em relação ao de Bhaskara. Percebeu uma considerável baixa autoestima dos alunos em relação ao seu conhecimento matemático e um baixo aproveitamento generalizado. Desta maneira, essa abordagem é importante considerando a atual situação do ensino da Matemática que necessita de outros recursos pedagógicos, além de novas orientações didáticas que possam ser utilizados em sala de aula afim de torná-las mais atrativas e estimulantes para os alunos.

Palavras-chave: Equação Quadrática. Fórmula resolutiva. Método Babilônico. Método de Po-Shen Loh.

ABSTRACT

This research paper addresses the Babylonian method, which was rediscovered and called the Poh-Shen Lo method for solving quadratic equations. The objective of this paper is to show the practicality of the method rediscovered by Professor Poh-Shen Lo, in order to establish whether there are advantages in its didactic use. Standing out for being a simple and intuitive approach, the Babylonian method, which was generalized by Professor Po-Shen Loh, and proposed as a pedagogical approach. In general, the study of quadratic equations is based on an excessive amount of formulas, all content is covered without justifications. The aim was to highlight the importance of history in mathematics classes, recalling some civilizations and mathematicians who contributed to the discovery of formulas and practical solution methods. The methodology adopted in the research is predominantly qualitative, of the bibliographic review type. As a methodology, in addition to bibliographical research, this work was dedicated to the development of a case study in a second-year high school classroom in the metropolitan region of São Luís - Maranhão, so that lesson plans, practical mathematical tests and questionnaires were developed with the objective of measuring not only the difference in the teaching effectiveness of the analyzed methods, but also the level of satisfaction of the students when doing them. In addition to the collection of data from students/master's students of the active PROFMAT-UEMA classes. Finally, as a result, few results were verified in the class when taught through the Poh-Shen Lo method in relation to the Bhaskara method. A considerable low self-esteem of the students in relation to their mathematical knowledge and a generalized low performance were noticed. Thus, this approach is important considering the current situation of Mathematics teaching, which requires other pedagogical resources, in addition to new didactic guidelines that can be used in the classroom in order to make them more attractive and stimulating for the students.

Keywords: Quadratic equation. Resolving formula. Babylonian Method. Po-Shen Loh method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática existe em tudo que estar ao nosso redor, sendo frequentemente utilizada na vida quotidiana para resolver dificuldades. Parte do material ensinado na escola é difícil de compreender e os professores devem elaborar planos de aula únicos, que beneficiem os seus alunos, além de problematizar o material em relação aos acontecimentos do quotidiano. Desta forma, pergunta-se: **É novidade demonstrar a fórmula de resolução de equações quadráticas e usar uma abordagem de ensino tão básica?**

O desafio que nos apresenta, é a solução da equação do segundo grau. Dados os coeficientes a, b e c, que simplificam o cálculo da resposta. Sendo normalmente resolvida usando a fórmula de Bhaskara, que é a seguinte:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Certos assuntos da Matemática Elementar, como adição, subtração, multiplicação, divisão e resolução de problemas, nem sempre são dominadas pelos adolescentes quando iniciam o Ensino Médio. E ainda assim eles lutam com habilidades simples como escrita, leitura e interpretação, o que deveria ajudar o aluno a aprender, pois ao dominá-las, ele seria capaz de compreender mais do que lhe é ensinado.

Como a álgebra é um assunto que muitos estudantes consideram difícil, além de que o estudo de equações é um componente crucial do ensino da mesma. Por se tratar da primeira exposição ao material que crianças e adolescentes têm, um dos motivos e que as letras entre os números sugerem alto nível de dificuldades. Deve-se notar que, embora os alunos possam trabalhar com símbolos matemáticos, ocasionalmente têm dificuldades com a generalização. Junto com o equívoco dos princípios algébricos, há também problemas com a má interpretação dos processos algébricos e, em geral, as pessoas sempre questionam por que tal assunto está sendo estudado.

As estruturas sociais sofreram mudanças significativas nas últimas décadas, acentuando-se depois da pandemia, assim como as ideias sobre o homem e a sociedade, os valores e a tecnologia. O mercado de trabalho também proporcionou e continua a apresentar novas oportunidades, enquanto as instituições de ensino continuam a seguir os mesmos padrões do século anterior. Em última análise, os principais atores, os alunos, perderam o interesse pela escola, uma vez que esta é, para eles, na maioria das vezes, um local de repressão e repetição que não os prepara para a realidades da vida adulta e profissional.

Nosso propósito ao realizar este estudo é fornecer um recurso metodológico para a introdução ou continuação do ensino do conteúdo de equações do segundo grau, que normalmente é ensinado no nono ano do Ensino Fundamental e primeiro do Ensino Médio. Esta técnica foi redescoberta pelo professor Po-Shen Lo. Este último é o caso de estudo que será apresentado.

Além disso, o intuito é despertar o interesse dos alunos, inspirá-los e, ao mesmo tempo, explicar o contexto histórico da matemática, delinear técnicas antigas de resolução e da ideia de equações de segundo grau. Contudo, existem outras abordagens para o ensino de equações de segundo grau além de apenas apresentar a amplamente reconhecida fórmula de Bhaskara. Deste ângulo, Po-Shen Loh, professor da Universidade Carnegie Mellon, redefiniu um método antigo para localizar as raízes de uma equação de segundo grau. Sua abordagem, é fácil de usar e intuitiva, não sendo necessária a memorização de fórmulas.

O presente estudo é classificado como de revisão qualitativa, teórica e bibliográfica, o mestrando optou por realizar a pesquisa em uma escola da rede estadual, que está localizada na região metropolitana de São Luís do Maranhão. Além da coleta de dados junto aos alunos/mestrandos das turmas ativas do PROFMAT-UEMA. Analisando tanto os alunos do Ensino médio, bem como professores atuantes no Ensino Fundamental e/ou Médio.

Neste contexto, levando em consideração essas observações, propõe-se como **objetivo geral**, investigar o método Po-Shen Loh como auxílio no ensino-aprendizagem das equações quadráticas. Para alcançar este objetivo, propõe-se como **objetivos específicos:** explicar o método Po-Shen Loh na resolução das equações quadráticas; aplicar o método Po-Shen Loh na resolução das equações quadráticas; esquematizar o método Po-Shen Loh para resolução das equações quadráticas.

A dissertação está dividida em sete capítulos. O Primeiro Capítulo começa com uma introdução, explicando por que escolhemos o método Po-Shen Loh para realizar este trabalho. Além disso, organizamos o texto. Destacamos os objetivos gerais e específicos do TCC.

No Segundo Capítulo falaremos um pouco sobre metodologias de ensino. Os saberes envolvidos no cotidiano do professor. A necessidade de diversifica quanto as metodologias empregadas no trabalho docente.

O Terceiro Capítulo apresenta um resumo da história das técnicas de resolução de equações quadráticas. Procura-se examinar os primeiros indícios daquilo que pode ser chamado de fórmula, desde os métodos primitivos até sua evolução ao longo do tempo, até a publicação do artigo do professor norte-americano Po-Shen Lo, que promete simplificar drasticamente a forma de resolver equações. Ao utilizar estes métodos, o objetivo é obter uma melhor compreensão das questões enfrentadas no processo de ensino e aprendizagem do tema.

No Quarto Capitulo, descrevemos um pouco da teoria sobre polinômios do segundo grau. Considerações sobre a fórmula de Bhaskara, sua resolução e utilização no ensino fundamental e médio.

No Quinto Capítulo, a fundamentação teórica é abordada, levando-se em consideração o artigo "A Simple Proof of the Quadratic Formula", escrito pelo professor Po-Shen Lo em dezembro de 2019. Neste artigo, a técnica que o professor Lo redescobriu, bem como seu embasamento e inspirações, são examinados minuciosamente.

No Sexto Capítulo, desenvolve-se a proposta para a aplicação do método redescoberto e desenvolvido pelo professor Po-Shen Lo. Para tal, foi criado um estudo comparativo entre o método tradicional e o de Poh-Shen Lo, de modo que foram ministradas duas aulas, apresentando e explicando cada um dos métodos, sendo em seguida aplicado um teste de cada um, nas duas aulas seguintes, respectivas a cada método. Os resultados obtidos nesta pesquisa foram utilizados para discussão da eficiência do método redescoberto pelo professor Lo.

No Sétimo Capitulo, concluímos este Trabalho de Conclusão de Curso apresentando nossas considerações finais sobre o assunto e apresentando as referências bibliográficas que foram usadas para seu desenvolvimento.

2 METODOLOGIAS DE ENSINO

2.1 Saberes docentes

O saber docente é um tema central na formação e prática dos professores, abrangendo uma variedade de conhecimentos essenciais para o exercício da docência. Diversos estudos têm se dedicado a investigar os saberes mobilizados na prática docente, destacando a importância desses saberes tanto no ofício do professor quanto no processo de formação. Esses saberes incluem desde o conhecimento disciplinar e pedagógico até a compreensão do contexto institucional e dos fins educativos (MORAES et al., 2020; BORGÈS, 2001).

Devido ao fato de que a prática pedagógica é composta por saberes e não saberes, a docência é complexa. Isso mostra que os conhecimentos adquiridos são temporários e que os professores precisam refletir e se aprimorar constantemente. A relação entre a experiência docente e a construção dos saberes é fundamental, pois a trajetória de vida dos professores pode influenciar significativamente suas práticas pedagógicas, permitindo uma supervisão constante das intervenções em sala de aula (MARTINY & GOMES-DA-SILVA, 2011; FILHO & RAMOS, 2010).

Além disso, a identidade profissional do professor está intrinsecamente ligada aos saberes que são específicos da docência, sendo esses conhecimentos essenciais para o desenvolvimento de processos reflexivos sobre a prática docente. A formação inicial dos professores é vital porque envolve questões e propostas formativas que abrangem aspectos organizacionais e pessoais da profissão docente. (PIMENTA, 2009; ALMEIDA & BIAJONE, 2007).

A análise de teses e dissertações tem sido uma abordagem comum para investigar os saberes docentes em diferentes áreas do conhecimento. Estudos revelaram a importância dos saberes construídos ao longo das atividades desenvolvidas por programas de iniciação à docência, evidenciando a relevância desses conhecimentos para a prática pedagógica (TANES & WERNER, 2022). Da mesma forma, a análise de conhecimentos e saberes docentes no ensino de disciplinas específicas, forneceu dados valiosos sobre a mobilização desses saberes na prática educativa (INEICHEN et al., 2020)

A relação entre os saberes docentes e a prática pedagógica é um tema recorrente em pesquisas que busca compreender como esses conhecimentos são mobilizados e transformados pelos professores em suas disciplinas em sala de aula. A reflexão sobre os saberes docentes a partir de relatos produzidos por licenciados tem demonstrado como esses saberes são essenciais para a produção de significados e configurações na prática pedagógica (GREGÓRIO et al., 2019).

Em suma, os saberes docentes são fundamentais para a prática pedagógica dos professores, influenciando diretamente a qualidade do ensino e a aprendizagem dos alunos. A reflexão constante sobre esses conhecimentos a partir da experiência da formação inicial e continua e da análise de práticas pedagógicas é essencial para o desenvolvimento profissional dos docentes e para a melhoria da educação como um todo. A investigação e compreensão dos saberes docentes são, portanto, aspectos cruciais para a formação e atuação dos professores em diferentes contextos educacionais.

2.2 A Importância dos Saberes Experienciais na Prática Docente

A valorização dos saberes experienciais dos professores é fundamental para a construção de uma educação de qualidade. Esses saberes, que se desenvolvem na prática diária e nas interações com alunos, colegas e a comunidade escolar, fornecem aos docentes as ferramentas necessárias para enfrentar os desafios do ambiente escolar de maneira eficaz. Essa discussão ressalta a importância do trabalho colaborativo na educação. Nóvoa (NÓVOA, 2022, p.15) destaca que

> "A produção do conhecimento profissional docente não é um gesto individual, mas coletivo, que se faz no interior da profissão." (NÓVOA, 2022, p.15)

Segundo Tardif (TARDIF, 2002), o professor raramente trabalha sozinho, estando sempre em interação com outras pessoas, especialmente os alunos. Sua atividade não é voltada para um objeto ou fenômeno, mas ocorre em uma rede de interações humanas, onde símbolos, valores, sentimentos e atitudes são interpretados e decididos, muitas vezes de forma urgente. Essas interações se dão por meio de discursos, comportamentos e maneiras de ser. Os saberes experienciais fornecem aos professores certezas relativas a seu contexto de trabalho na escola, de modo a facilitar sua integração.

> Os saberes experienciais possuem, portanto, três "objetos": a) as relações e interações que os professores estabelecem e desenvolvem com os demais atores no campo da sua prática; b) as diversas obrigações e normas às quais seu trabalho deve submeter-se; c) a instituição enquanto meio organizado e composto de funções diversificadas (TARDIF, 2002, p. 50).

Esses saberes experienciais desempenham um papel crucial na prática docente. Sendo o primeiro, que trata das relações e interações que os professores estabelecem com alunos, colegas e a comunidade escolar que moldam significativamente a dinâmica da sala de aula e o ambiente de aprendizagem.

Assim, é essencial valorizar os saberes experienciais dos professores para promover uma formação mais prática, contextualizada e alinhada com a realidade da sala de aula, que incentive a criticidade e a tomada de decisões no contexto da sala de aula, e com boas estratégias de ensino, promover um ambiente onde os alunos possam desenvolver uma postura criativa em relação ao processo ensino-aprendizagem. (OLIVEIRA, 2019)

Dessa forma, os professores se sentirão mais preparados e apoiados para enfrentar os desafios do dia a dia escolar, contribuindo para uma educação de qualidade.

> "O docente, ao incentivar a criticidade e a tomada de decisões no contexto da sala de aula, pode incentivar os discentes a assumirem uma postura criativa em relação ao processo ensino-aprendizagem" (MARTINEZ & DOS SANTOS, 2019, p.1643).

2.3 Metodologias de ensino X Estratégias de ensino

No processo educacional, as metodologias de ensino e as estratégias de ensino são fundamentais, cada uma desempenhando um papel específico na aprendizagem dos estudantes. As metodologias de ensino dizem respeito às abordagens abrangentes e globais que regem a instrução do professor, enquanto as estratégias de ensino são ações específicas, para atingir metas educacionais dentro dessas abordagens mais amplas.

Metodologias ativas de ensino são exemplos de uma metodologia que ganhou destaque na educação. Ela se caracteriza pela colocação do aluno no centro do processo da aprendizagem promovendo a participação ativa dos estudantes na construção do saber. Essas metodologias visam envolver os alunos em atividades práticas e significativas que encorajam autonomia, curiosidade e engajamento dos alunos (ARAUJO & RAMOS, 2023; Batista, 2023).

Por outro lado, as estratégias de ensino estão relacionadas com as ações especificadas pelos professores para auxiliar na análise dos estudantes. Estas estratégias podem compreender métodos didáticos, recursos instrucionais, formas de avaliação entre outros. Dentro da perspectiva das táticas de instrução é comum encontrar exposições orais, resolução de problemas técnicos, uso de tecnologias didáticas avançadas, além da aprendizagem baseada em projetos (MANKE, 2023).

> Ensinar *implica, sempre, avaliar* os saberes dos alunos e propor estratégias pertinentes, para que os alunos possam, progressivamente, ir reestruturando e

> ressignificando esquemas e conhecimentos e, assim, diminuir a distância que separa estes dos conteúdos curriculares. (BOGGINO, 2016, p.80)

É importante ressaltar que as metodologias de ensino podem incorporar diversas estratégias de ensino para atingir seus objetivos. Por exemplo, as metodologias ativas podem envolver o aprendizado baseado em equipes, a sala de aula invertida, a resolução de problemas, entre outras abordagens, proporcionando uma gama variada de estratégias para promover a aprendizagem significativa dos alunos (SIEBEL & MENDES, 2021; FERREIRA & RODRIGUES, 2018).

Em síntese, as metodologias de ensino representam abordagens mais amplas e abrangentes que guiam a prática educacional, enquanto as estratégias de ensino são as ações específicas utilizadas para implementar essas abordagens. As metodologias ativas, em particular, destacam-se por colocar o aluno como protagonista do processo de aprendizagem, promovendo a participação ativa, a autonomia e o engajamento dos estudantes.

2.4 A Importância de Diversificar as Metodologias de Ensino de Equações do Segundo Grau

A diversidade nas metodologias de ensino de matemática pode tornar o aprendizado eficaz para todos os estilos e preferências de aprendizagem, aumentar o interesse dos alunos e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos. Fang (FANG, 2024) destaca como as múltiplas abordagens de ensino que dão maior ênfase à participação do aluno, encorajam a iniciativa deles no processo de aprendizagem e aprimoram suas habilidades comunicativas e colaborativas.

Fang (FANG, 2024), em sua pesquisa, constatou que diversificar os métodos de ensino pode aumentar o interesse dos alunos pela aprendizagem e aprofundar sua compreensão e aplicação do conhecimento. O autor também destaca a importância de considerar os diferentes métodos de ensino para diferentes grupos de estudantes, a fim de promover um desenvolvimento mais eficaz.

Miao (MIAO, 2023) considera que as diferentes estratégias de ensino aumentam a interatividade e a atenção da aula e, assim, tornam a aprendizagem mais envolvente e dinâmica para mais desenvolvimento abrangente. A abordagem de ensino variável permite ao professor criar um ambiente de aprendizagem focado nas necessidades individuais dos alunos, melhorando assim seu comprometimento e interesse. Bature (BATURE et al, 2016) observam a importância da inclusão da diversidade em salas de aula de matemática como uma ferramenta para proporcionar uma instrução de alta qualidade.

Sendo assim, é essencial que os docentes se reinventem, desenvolvendo novas competências e metodologias de ensino que valorizem tanto o conhecimento quanto as experiências dos alunos. De acordo com Brighenti (BRIGHENTI, 2015), o processo educativo deve ser orientado por metodologias que possibilitem o alcance eficaz dos objetivos propostos pelos docentes. Essas metodologias precisam ser cuidadosamente planejadas e implementadas, levando em consideração a diversidade de estilos de aprendizagem dos alunos, as demandas do currículo e as especificidades de cada contexto educacional.

A diversificação das metodologias de ensino é essencial para garantir que os alunos compreendam profundamente as equações do segundo grau. Segundo Justino (JUSTINO, 2019), a aplicação de diferentes estratégias pedagógicas pode facilitar o processo de aprendizagem, permitindo que os alunos visualizem e internalizem os conceitos matemáticos de maneiras variadas. Além disso a personalização do aprendizado é essencial para desenvolver um ambiente de aprendizagem estimulante.

Considerando que cada aluno possui características, interesses e ritmos de aprendizado únicos, a personalização possibilita uma resposta mais eficiente a essas necessidades individuais (ALMEIDA et al., 2016; GATTI et al., 2020). Por exemplo, a fórmula de Bhaskara, amplamente utilizada no ensino das equações do segundo grau, é apenas uma das várias maneiras de resolver essas equações. Outras abordagens, como o método de Po-Shen Loh, oferecem alternativas que podem ser mais intuitivas para alguns alunos. Conforme relatado por Laudares e Lachine (LAUDARES & LACHINE, 2000), ao introduzir múltiplas metodologias, os professores podem ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão mais robusta e flexível dos conceitos matemáticos.

Adicionalmente, a formação contínua dos docentes é crucial para a implementação eficaz de metodologias diversificadas. Segundo Popova (POPOYA, 2021), os professores devem ser capacitados para utilizar uma variedade de métodos de ensino e para adaptar suas práticas às necessidades específicas de seus alunos. Investir em desenvolvimento profissional e em oportunidades de aprendizagem para os professores pode ter um impacto significativo na qualidade do ensino e na aprendizagem dos alunos.

Finalmente, é importante considerar a avaliação contínua e reflexiva das metodologias de ensino utilizadas. Moyo (MOYO, 2023) sugere que os professores devem regularmente revisar e ajustar suas estratégias pedagógicas com base nos resultados de aprendizagem. Esta prática de reflexão e ajuste contínuos garante que os métodos de ensino permaneçam eficazes e que os alunos estejam realmente compreendendo e aplicando os conceitos aprendidos.

Portanto, a diversificação das metodologias de ensino é crucial para a eficácia do ensino das equações do segundo grau. Ela permite que os alunos encontrem o método que melhor se adapta ao seu estilo de aprendizagem, aumentando assim sua compreensão e seu interesse pela matemática. Além disso, ao contextualizar o conteúdo e investir na formação contínua dos docentes, é possível criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e eficaz.

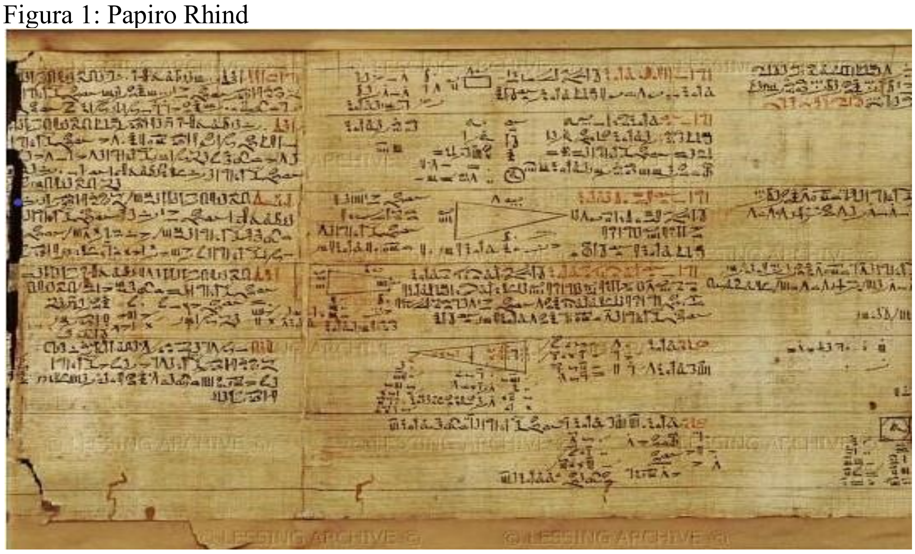
3 ORIGENS HISTORICAS DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU HISTÓRIA

3.1 Os egípcios e as equações quadráticas

Com a invenção da escrita no Egito no período pré-dinástico (cerca de 3.000 a.C.), ocorreu a necessidade da formação de uma classe especial de profissionais alfabetizados, os escribas. Por possuírem tais habilidades de escrita, os escribas assumiam todas as funções do serviço público: manutenção de registros, contabilidade fiscal, gestão de obras públicas (projetos de construção e similares), até mesmo o prosseguimento da guerra através da supervisão de suprimentos militares e folhas de pagamento. Os jovens matriculavam-se em escolas de escribas para aprender o essencial do ofício, que incluía não apenas a leitura e a escrita, mas também os fundamentos da matemática.

Conhecemos alguns textos, que representam a maior parte do que sabemos sobre a matemática egípcia. O conhecimento está presente em três longos documentos na forma de papiros, que provavelmente foram usados como livros didáticos, nas escolas de escribas no passado. O papiro Rhind ou de Ahsem, o mais extenso, sendo um rolo de papiro com cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento, que se encontra no Museu Britânico, sendo uma cópia de um texto dois séculos mais antigo, feito no século XVII (1650 a.C.). Uma extensa tabela de partes fracionárias é fornecida para facilitar a divisão, e as soluções de 84 problemas específicos de geometria e aritmética estão incluídas (BOYER, 1996; EVES, 2004).

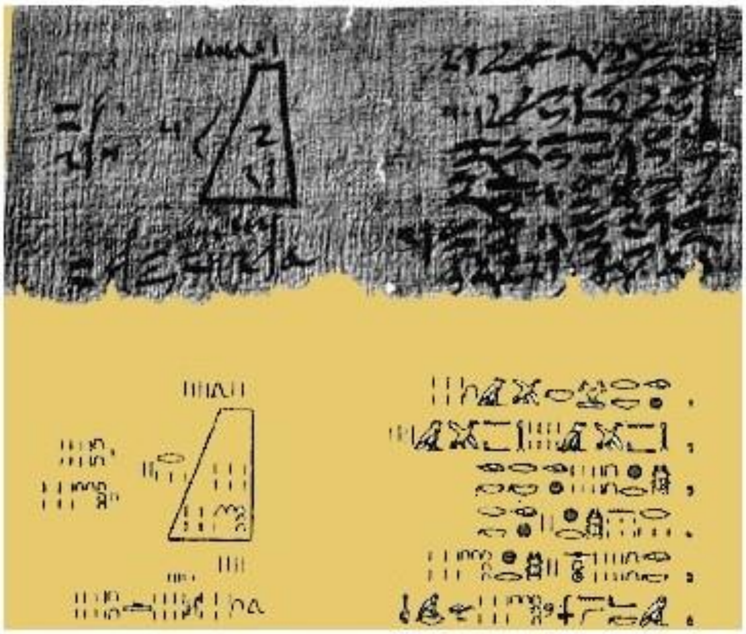
Figura 1: Papiro Rhind



Fonte: https://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/img1F2.jpg

O papiro Golenishchev ou de Moscou (no Museu de Belas Artes de Moscou), datado do século XIX (2000 a.C), apresenta 25 problemas de tipo semelhante. Possui quase o mesmo tamanho do Rhind, porém apenas um quarto da largura, foi escrito por um escriba desconhecido, da decima segunda dinastia. Os problemas presentes no papiro, refletem bem as funções que os escribas desempenhariam, pois tratam de como distribuir cerveja e pão como salários, por exemplo, e como medir as áreas dos campos, bem como os volumes das pirâmides e outros sólidos (BOYER, 1996; EVES, 2004).

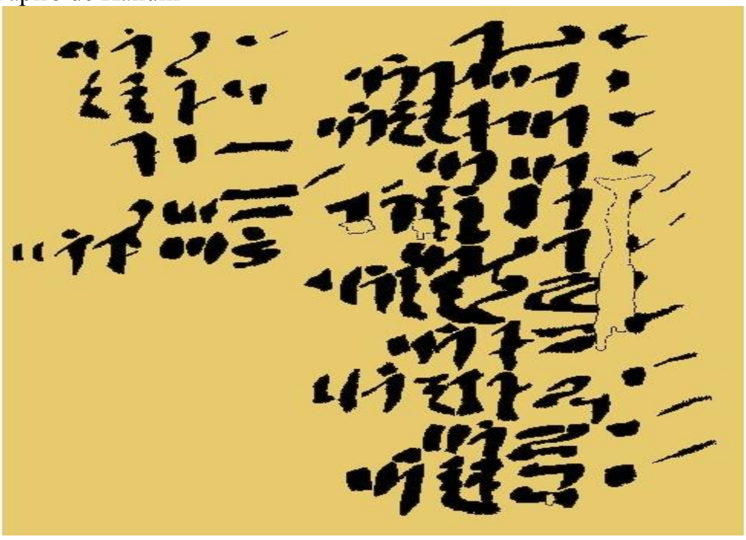
Figura 2: Papiro de Moscou



Fonte: https://www.matematica.br/historia/imagens/ht_moscou.gif

Os egípcios calcularam o valor para $\pi = 3 \cdot {}^{1}/_{6}$, presente no papiro de Ahmes. Sendo usado por outros egípicios, pois verifica-se a sua presença em outro papiro, o Papiro de Kahum. Tal papiro foi escrito em hierático, alguns trechos foram decifrados e traduzidos. Alguns textos se relacionam com à matemática, estando presentes em pelo menos seis desses trechos. O papiro é datado sendo da decima segunda dinastia, onde é calculado o volume de um cilindro, a capacidade é calculada multiplicando sua altura pela área da base, a área da base pode ser encontrada usando a regra de Ahmes.

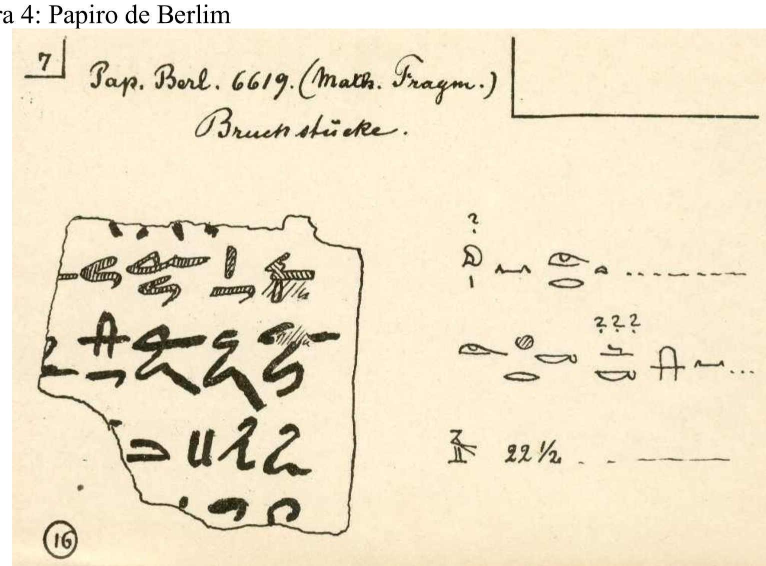
Figura 3: Papiro de Kahum



Fonte:https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/rhind/images/kahun1.gif

Por outro lado, o método da posição falsa também é usado na única equação quadrática existente nos papiros egípcios (KATZ, 2009). No papiro de Berlim, um pequeno fragmento datado aproximadamente da mesma época que os outros papiros. Acredita-se que tenha sido escrito por volta de 1800 a.C. Em 1850, Henry Rhind o comprou na cidade de Luxor. No entanto, devido à sua condição precária, Shack-Shackenburg o examinou cinco décadas depois. O Papiro está atualmente no Museu Staatliche em Berlim. Uma das equações do sistema de equações apresentado neste Papiro é do 1º grau, enquanto a outra é do 2º grau. Assim, uma solução para uma equação de 2o grau é apresentada pela primeira vez na história.

Figura 4: Papiro de Berlim



Fonte: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/rhind/berlin.jpg

Estando formulada da seguinte forma, para os dias atuais:

> "Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1: 3/4$"(EVES, 2004)

Traduzindo para a notação matemática, teremos que encontrar a resolução de duas equações simultaneamente, cujo problema requer a solução do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = {}^{3y}/_{4} \end{cases}$$

A solução foi apresentada pelos egípcios (PEDROSO, 2010), que utilizara o método da falsa posição. Que pode ser resolvida seguindo os passos abaixo:

- **Primeiro passo:** Tomando $y_0 = 4$, teremos $x_0 = 3$.
- **Segundo passo:** Procedendo as substituições.

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

- **Terceiro passo:** Percebemos que o par ordenado $(3, 4)$, não é solução. Devemos multiplicar os dois lados da igualdade por 4, teremmos uma solução

$$4 \cdot (3^2 + 4^2) = 4 \cdot (9 + 16) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 4 \cdot 25 = 100$$

- **Quarto passo:** Como $4 = 2^2$, podemos fazer as seguintes alterações

$$2^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Portanto o par (6, 9) é a solução do sistema.

3.2 Os gregos e as equações quadráticas

Os gregos dividiram a Matemática em Aritmética e Geometria, com um certo rigor filosófico. Mas eles também acreditavam que essas duas disciplinas, tenham surgido de atividades do cotidiano. A Matemática grega se divide, tendo como marco para essa divisão, a morte quase simultânea de Alexandre e Aristóteles. Sendo assim, dividida em Idade Helênica (Heroica) e Idade Helenística (Alexandrina), respectivamente a primeira e segunda tempos da matemática grega (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

Na Idade Helênica temos que destacar alguns nomes, são eles: Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Platão, Aristóteles, dentre outros. Já na Idade Helenística, podemos destacar, Arquimedes de Siracusa, Apolônio de Perga, Eratóstenes de Cirene e muitos outros, como Euclides de Alexandria, devido a sua obra Os Elementos (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

A obra é composta de treze capítulos ou livros. Os seis primeiros livros abordam a geometria plana elementar, examinando as características das figuras retilíneas e do círculo. Os três livros subsequentes tratam da teoria dos números; o Livro X discute os incomensuráveis, enquanto os Livros XI, XII e XIII se concentram na geometria espacial.

Também os gregos resolveram equações quadráticas, usando métodos gráficos e/ou geométricos. Euclides (Proposição 28 - Livro VI, Proposição 29 - Livro VI e Proposição 11 - Livro II) (PEDROSO, 2010) resolveu geometricamente a equação quadrática abaixo,

$$x^2 + ax = a^2$$

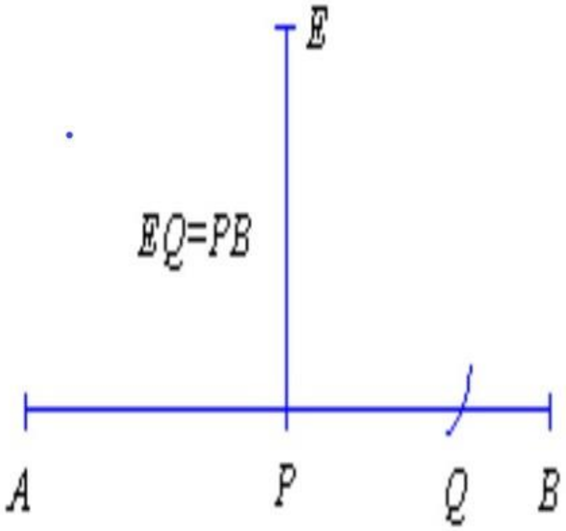
em um de seus livros. O método empregado foi essencialmente um método para completar quadrados.

Euclides fornece construções equivalentes, à resolução de uma equação quadrática geral em seu livro Elementos. Não oferecendo nenhuma solução algébrica. Como exemplo temos o seguinte, que corresponde a resolução da equação quadrática, $x^2 - 10x + 9 = 0$, na forma escrita atualmente.

Exemplo 3.1 (RPM 43 - https://rpm.org.br/cdrpm/43/4.htm):

- **Primeiro passo:** Trace o segmento AB $= 10$. Por P, ponto médio de AB.
- **Segundo passo:** Levante o segmento perpendicular PE $= 10$ (igual à raiz quadrada de 9).
- **Terceiro passo:** Com centro em E e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q.
- **Quarto passo:** A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ.

Figura 5: Construção geométrica da RPM 43



Fonte: https://rpm.org.br/cdrpm/43/images/4.htm10.gif

Com efeito, por construção, a medida do segmento AQ será

$$\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (9)^2}$$

e corresponde à raiz 9 da equação.

3.3 Os chineses e as equações quadráticas

A história da Matemática chinesa revela a contribuição de diversos matemáticos, evidenciada por vários livros escritos na China desde o século I a.C. até o século VII d.C., que fundamentaram o desenvolvimento matemático no Leste Asiático. No entanto, a datação desses livros é difícil de comprovar, com distorções de até mil anos entre documentos. Muitos trabalhos matemáticos posteriores baseiam-se nesses textos, mas as referências nos escritos matemáticos sobreviventes e nas bibliografias dos anais do império chinês mostram que o registro textual apresenta muitas lacunas. As obras mais antigas existentes provavelmente sobreviveram porque se tornaram livros oficiais, ensinados no contexto do sistema civil chinês (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

Um importante tratado astronômico, o Chou Pei Suang Ching, é um dos mais antigos entre os clássicos matemáticos, mas sua data de escrita é imprecisa. Devido a essa incerteza, ele é frequentemente comparado com o Chui-Chang Suan-Shu. Este último é considerado o mais influente livro da matemática chinesa. O Chui-Chang Suan-Shu (ou Nove Capítulos sobre a Arte Matemática) contém algoritmos aritméticos, algébricos e geométricos e apresenta soluções para problemas relacionados à administração civil, como levantamentos agrários, cobrança de impostos, administração pública e trabalhos de engenharia. (BOYER, 1996; BOYER, 2012: EVES, 2004).

Em relação as equações quadráticas nos deparamos com o considerado último e maior matemático chinês Zhu Shijie (BOYER, 2012) ou Chu Shih-chieh (BOYER, 1996), que viveu entre 1280 e 1303 d.C. Este matemático escreveu duas obras importantes, são elas o Suan-hsueh ch'i-meng (Introdução aos estudos matemáticos, 1299) e o Ssu-yüan yü-chien (Precioso espelho dos quatros elementos, 1303). Neste último é descrito um método, denominado fan-fa, para resolução de equações, usado para encontrar raízes quadradas e cúbicas em particular, e para polinômios quadráticos em geral, sendo mais tarde estendido para resolver equações de grau superior e equações com mais de uma incógnita. No Ocidente, foi desenvolvido muito mais tarde (1819), pelo matemático Inglês Willian George Horner, então o algoritmo foi rebatizado por “método de Horner” (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

Exemplo: (BOYER, 1996; BOYER, 2012; PEDROSO, 2010) Resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$

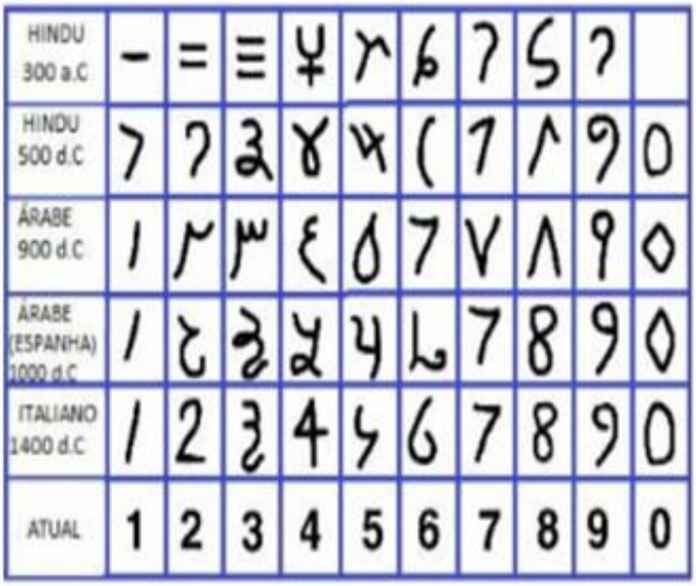
- **Primeiro passo:** Tomando $x_0 = 19$, como uma solução aproximada (uma raiz possível cai entre $x = 19$ e $x = 20$)
- **Segundo passo:** Faziam uso do fan-fa, ou seja, a seguinte substituição $y = x - 19$. Obtendo a equação $y^2 + 290y - 143 = 0$. Sendo $y = 0$ e $y = 1$, soluções para a equação.
- **Terceiro passo:** Trocando-se y^2 por y, era possível obter uma solução aproximada $y = \frac{143}{291}$. Logo, $x = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$.
- **Quarto passo:** Tomando $x_0 = 19{,}49$, como uma nova aproximação, e repetindo-se o processo, faziam uma nova substituição $z = x - 19{,}19$. Obtendo a equação $z^2 + 290{,}98z = 0{,}66$. Portanto, $z = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}022$, sendo $x = 19{,}4922$.

3.4 Os indianos e as equações quadráticas

O moderno sistema de numeração existente entre nós, com a incorporação da representação do zero (um ovo de ganso), nada mais é do que o já utilizado sistema hindu, que não é originalmente do povo indiano, mais sim uma contribuição de vários povos, mas que foram unificados pelos indianos, sendo basicamente uma combinação de três princípios básicos (BOYER, 1996; BOYER, 2012):

1) base decimal;
2) uma notação posicional;
3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais.

Figura 6: Evolução do sistema de numeração



Fonte:https://lirte.pesquisa.ufabc.edu.br/matreematica/wp-content/uploads/sites/5/2021/11/sistema-hindu-arabico-m.png

Um dos mais proeminentes matemáticos indianos, conhecido por Bhaskara. Possuindo duas obras muito importantes, Vija-Ganita, onde é descrito de forma inédita, a afirmação de um tal quociente é infinita. A outra, é o Lilavati, onde encontramos alguns dos problemas matemáticos que são mais agradáveis aos hindus, equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas, geométricas e etc. (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

Os Hindus estabeleceram no passado várias regras, que valem para casos especiais e tipos de equações quadráticas. Tal regra Hindu, nos diz:

> "Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente] do quadrado e adicione a eles um número igual ao quadrado do [coeficiente] original da quantidade desconhecida. [Então extraia a raiz]." (PEDROSO, 2010).

Ou seja, dado

$$ax^2 + bx = c$$

multiplique por $4a$ e some b^2, obtendo

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

Onde,

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Portanto,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 + 4ac}$$

e assim a equação pode ser resolvida.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa-se que é uma derivação, da fórmula quadrática, utilizada atualmente.

3.5 Os árabes e as equações quadráticas

O Islam se expandiu rapidamente, entre o regresso de Maomé a Meca, após seu exílio em Medina em 630 e a conquista muçulmana de terras desde a Espanha até as fronteiras da China em 715. Dentro deste contexto intelectual e a rápida expansão do Islam. Houve a aquisição de material grego, ocorrendo de forma mais rapida, durante o califa de al-Mamun (devido a um sonho com Aristoteles), que construiu um centro de tradução e pesquisa, a Casa da Sabedoria (Bait al-hikma), em Bagdá durante seu reinado (809-833), vindo a se tornar uma nova Alexandria.

A maioria das traduções foi feita, inicialmente do persa para o árabe, e depois, do sanscrito para o grego, mas o ímpeto e o apoio para esta atividade vieram de patronos muçulmanos, como al-Mansur e Harumal-Rachid, incluido entre eles, al-Mamun. Estes incluíam não apenas o califa, mas também indivíduos ricos, como os três irmãos conhecidos como Banu Musa, al Kindi e Thabit ibn Qurra.

Um astrónomo e matemático árabe muito importante, foi Moḥammed ibn Musa al-Khwarizmi, que trabalhou na Casa da Sabedoria, vindo a ser conhecido tardiamente na Europa. Ele introduziu material indiano em seus trabalhos astronômicos e também escreveu um dos primeiros livros explicando a aritmética hindu, que teve uma tradução latina, cujo título era De numero hindorum (Sobre a arte hindu de calcular). Em outra obra, o seu livro mais importante, Al-jar Wa'l muqabalah, ele forneceu uma introdução sistemática à álgebra, incluindo uma teoria de equações quadráticas. Em seu livro, em uma tradução latina de sua Álgebra, al-Khwarizmifaz oferece uma explicação inicial, sobre resoluções de equações quadradas, onde classifica as mesmas em seis tipos, como visto abaixo (BOYER, 1996; BOYER, 2012).

1. Quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$;
2. Quadrados iguais a números: $ax^2 = c$;
3. Raízes iguais a números: $ax = c$;
4. Quadrados e raízes iguais a números: $ax^2 + bx = c$;

5. Quadrados e números iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$;

6. Raízes e números iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

No primeiro livro de álgebra árabe, escrito por Al-Khwarizmi, no século IX d.C., ele resolve equações quadráticas seguinte forma

$$x^2 + ax = b$$

Ele adiciona ${}^1\!/_4\, a^2$ dos dois lados da equação, obtendo,

$$x^2 + ax + {}^1\!/_4\, a^2 = b + {}^1\!/_4\, a^2$$

Logo

$$x + {}^1\!/_2\, a = \sqrt{b + {}^1\!/_4\, a^2}$$

Podendo encontrar o valor para x.

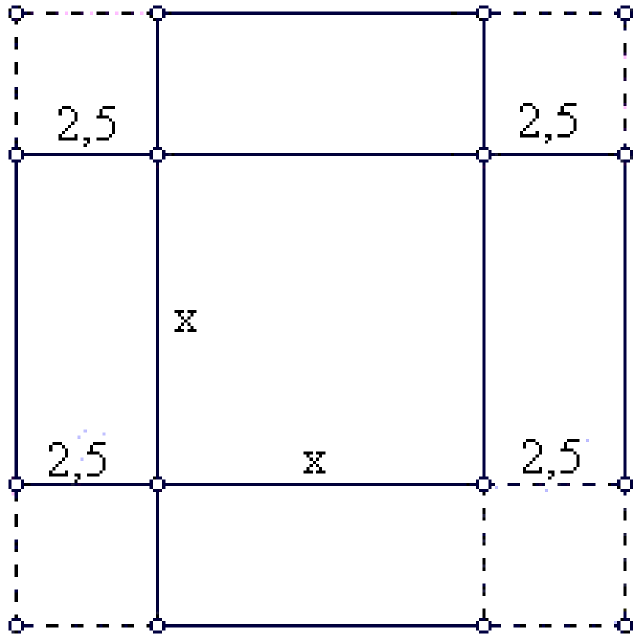
$$x = \sqrt{b + {}^1\!/_4\, a^2} - {}^1\!/_2\, a$$

Uma outra maneira desenvolvida, tendo sido amplamente difundida e utilizada, estando presente na maioria dos livros didáticos, na resolução de equações quadráticas e no ensino das cônicas, é o denominado método de completar quadrados. Abaixo temos um exemplo de como era utilizado tal método, na resolução de equações quadráticas.

Exemplo: Resolva a equação $x^2 + 10x = 39$, utilizando o método de completar quadrados.

- **Primeiro passo:** Inicialmente desenhando um quadrado de lado x.
- **Segundo passo:** Sobre os quatro lados. constrói-se retângulos de largura 2,5 unidades.
- **Terceiro passo:** Completar o quadrado maior, se constrói quatro quadrados menores, nos cantos da figura,
- **Quarto passo:** Cada um com área igual a 6,25 unidades.
- **Quinto passo:** Para "completar o quadrado" somamos 4 vezes 6,25 unidades, ou seja, 25 unidades.
- **Sexto passo:** Obtemos então um quadrado com área total 39 + 25 = 64.
- **Sétimo passo:** Conclui-se que o lado do quadrado maior mede 8 unidades.
- **Oitavo passo:** Subtraindo 2 vezes 2,5 unidades, ou seja, 5 unidades.
- **Nono passo:** Achamos x = 3.

Figura 7: Construção geométrica do exemplo acima.



https://www.matematica.br/historia/imagens/ht_pquadrado.gif

3.6 Os europeus e as equações quadráticas

Até o ano de 1575, os europeus haviam recuperado grande parte das obras matemáticas, não em sua totalidade, da antiguidade. Dominaram e aperfeiçoaram a álgebra desenvolvida no mundo Árabe. E com o final do século dezesseis e a chegada do século dezessete, tivemos o surgimento de uma figura fundamental, François Viète, que nasceu em 1540. Viète exerceu a advocacia, vindo a participar como membro do parlamento da Bretanha. Mais tarde, serviu como conselheiro real dos reis Henrique III e Henrique IV da França. Em seu tempo livre, ele adorava trabalhar em matemática e, em um desses momentos, criou novos métodos. Isso o levou a publicar suas descobertas às suas próprias custas. Em seu livro In artem, iniciou o simbolismo algébrico, onde fazia uso de letras em vez de números para representar quantidades desconhecidas, transformando-as em vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes (BOYER, 1996; BOYER, 2012: EVES, 2004). Assim, o que escrevemos como

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

seria escrito como

$$B\ 5\ in\ A\ quad - C\ plano\ 2\ in\ A + A\ cub\ aequatur\ D\ solido.$$

Descreveremos o método de Viète para a resolução de equações do 2.º grau, conforme encontramos em Amaral (AMARAL-RPM 13: https://rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm, 1988).

Exemplo: Dada uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, deveremos seguir alguns passos para a sua resolução, sendo os seguintes:

Primeiro passo: Tomando $x = u + z$

Segundo passo: Fazendo a devida substituição, obtemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(u+z)^2 + b(u+z) + c = 0 \\ &= a(u^2 + 2uz + z^2) + bu + bz + c = 0 \\ &= au^2 + 2auz + az^2 + bu + bz + c = 0 \\ &= au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0 \end{aligned}$$

Terceiro passo: Fazendo $2az + b = 0$, logo $z = -{}^{b}/_{2a}$.

Quarto passo: Devemos fazer a devida substituição, ou seja

$$au^2 + \left[2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right] \cdot u + \left[a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c\right] = 0$$

$$= au^2 + (0) \cdot u + \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c\right) = 0$$

$$au^2 + \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac)}{4a}\right) = 0$$

Portanto

$$\begin{aligned} au^2 + \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac)}{4a}\right) = 0 &\Leftrightarrow au^2 = \left(\frac{2b^2 - b^2 - 4ac)}{4a}\right) \\ &\Leftrightarrow au^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &\Leftrightarrow u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow u = \frac{\pm(b^2 - 4ac)}{2a} \end{aligned}$$

Quinto passo: Como $x = u + z$. Logo, temos

$$x = \frac{\pm(b^2 - 4ac)}{2a} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o que foi determinado, nada mais é do que a fórmula de Bhaskara.

Ocorreram novas contribuições ao simbolismo algébrico. Como o do matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621), que introduziu os sinais de igualdade (=) e os sinais ($>$) (maior) e ($<$) (menor). Sendo William Oughtred (1574-1660) responsável por um simbolismo, bastante usado, o sinal $\times$ para a multiplicação.

Nas seções iniciais de La Géométrie, Descartes introduziu duas inovações. No lugar da notação de Viète, ele iniciou a prática moderna de denotar variáveis por letras no final do alfabeto (x, y, z) e parâmetros por letras no início do alfabeto (a, b, c) e de usar notação exponencial para indicar potências de x $(x^2, x^3, \ldots)$ (ROQUE, 2012).

Quadro 1: Evolução da notação algébrica da equação quadrática

Viète	Harriot	Descartes
$A\ area$ é $igual\ a$ 50	$AA\ =\ 50$	$x^2 = 50$
A á$rea\ \overline{m}\ A2$ é $igual\ a$ 0	$AA - A2\ =\ 0$	$x^2 + x\ \times 2 = 0$
A á$rea\ \overline{m}\ A5\ \overline{p}$ 6 é $igual\ a$ 0	$AA - A5\ +\ 6\ = 0$	$x^2 - x\ \times 5\ + 6 = 0$
A á$rea\ \overline{m}\ A2\ \overline{p}$ 1 é $igual\ a$ 0	$AA - A2\ +\ 1\ =\ 0$	$x^2 - x\ \times 2 + 1 = 0$
B in A área + C in A + D é igual a 0	$B\ in\ AA\ +\ C\ in\ A\ + + D =\ 0$	$x^2 \times A\ + B\ \times x + C = 0$

Fonte: adaptado Guelli, 2006

4 POLINÔMIOS DE SEGUNDO GRAU

Existe sempre uma solução para equações de primeiro grau, com uma incógnita. A situação é um pouco mais complicada para equações de segundo grau (LIMA et al, 2006).

Definição 1: Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$.

- Um **polinômio de segundo grau** com uma incógnita x é uma expressão da forma
$$p(x) = ax^2 + bx + c$$
- Uma **equação de segundo grau** (também equação quadrada ou equação quadrática) com uma incógnita x é uma expressão da forma
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemplo 1:

- $7x^2 + 2x + 4$ é um polinômio de segundo grau;
- $f(x) = 7x^2 + 2x + 4$ é uma função quadrática;
- $7x^2 + 2x + 4$ é uma equação do segundo grau.

Proposição 1: Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$. Então para a função
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c$$
é válido que:

- o gráfico da função é uma parábola com equação
$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (y = ax^2 + bx + c)$$
- Se $a < 0$, é uma parábola convexa para baixo, se $a > 0$, é uma parábola convexa para cima
- Os pontos zero da função são as soluções da equação
$$ax^2 + bx + c = 0,$$

e encontramos usando o discriminante
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
onde afirma que:

- Se $\Delta > 0$ existem duas raízes reais diferentes;
- Se $\Delta = 0$ existem duas raízes reais iguais;
- Se $\Delta < 0$ não há raízes reais.
- Se $\Delta \geq 0$ as raízes são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esses pontos zero são os pontos de intersecção do gráfico da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c$$

com o eixo x. Se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2$ e temos apenas um ponto de intersecção com o eixo x.

Resumimos essas informações nas tabelas a seguir (tabela de análise de sinais) para a função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c$$

- Se $\Delta > 0$ existem duas raízes reais diferentes $x_1 < x_2$, teremos a seguinte sequência de sinais:

Quadro 2 – Estudo do sinal quando $\Delta > 0$.

$f(x)$		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$, onde $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

Fonte: próprio autor.

- Se $\Delta = 0$ existem duas raízes reais iguais, $x_1 = x_2$, teremos a seguinte sequência de sinais:

Quadro 3 - Estudo do sinal quando $\Delta = 0$.

$f(x)$		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$	$+$	0	$+$
$ax^2 + bx + c$, onde $a < 0$	$-$	0	$-$

Fonte: próprio autor.

- Se $\Delta < 0$ não há raízes reais, teremos a seguinte sequência de sinais:

Quadro 4 – Estudo do sinal quando $\Delta < 0$.

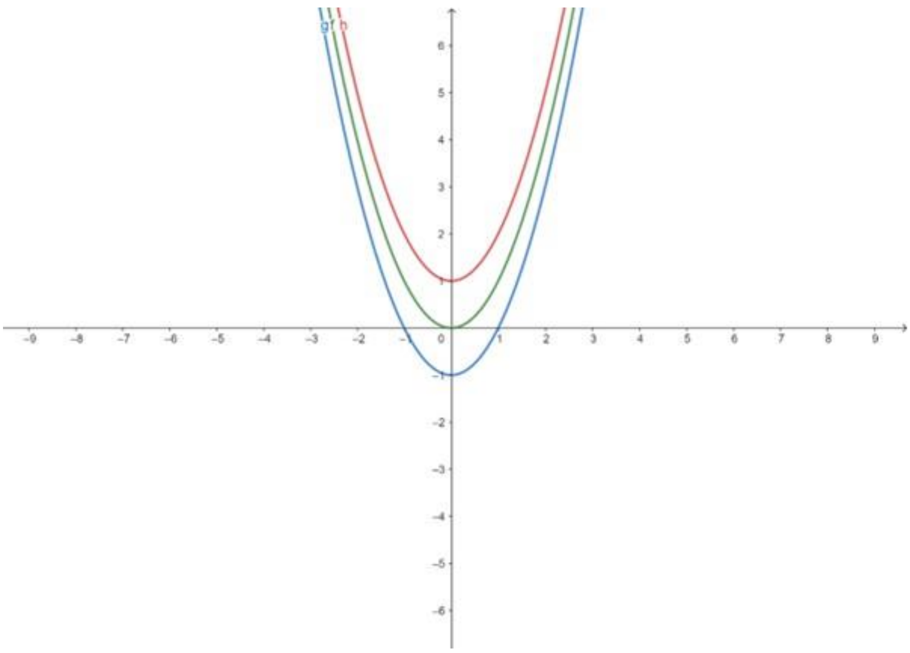
$f(x)$	
$ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$	$+$
$ax^2 + bx + c$, onde $a < 0$	$-$

Fonte: próprio autor.

Exemplo 1: Encontre as raízes funções $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = x^2 + 1$ e faça um gráfico.

Resolução 1: Os zeros de $f(x) = x^2$, são 0 (duas raízes reais iguais), os de $g(x) = x^2 - 1$, são ± 1(duas raízes reais diferentes) e $h(x) = x^2 + 1$, não há raízes reais. Os gráficos das funções correspondentes – nos quais o número de pontos zero pode ser lido diretamente – são os seguintes:

Gráfico 1: Plotagem das equações $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = x^2 + 1$



Fonte: próprio autor, utilizando Geogebra

Exemplo 2: Encontre as soluções da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Resolução 2: O discriminante é $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, existem duas raízes reais diferentes

$$x_1 = \frac{-5+1}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

e

$$x_2 = \frac{-5-1}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Exemplo 3: Faça o estudo do sinal da equação do exemplo anterior:

Resolução 3:

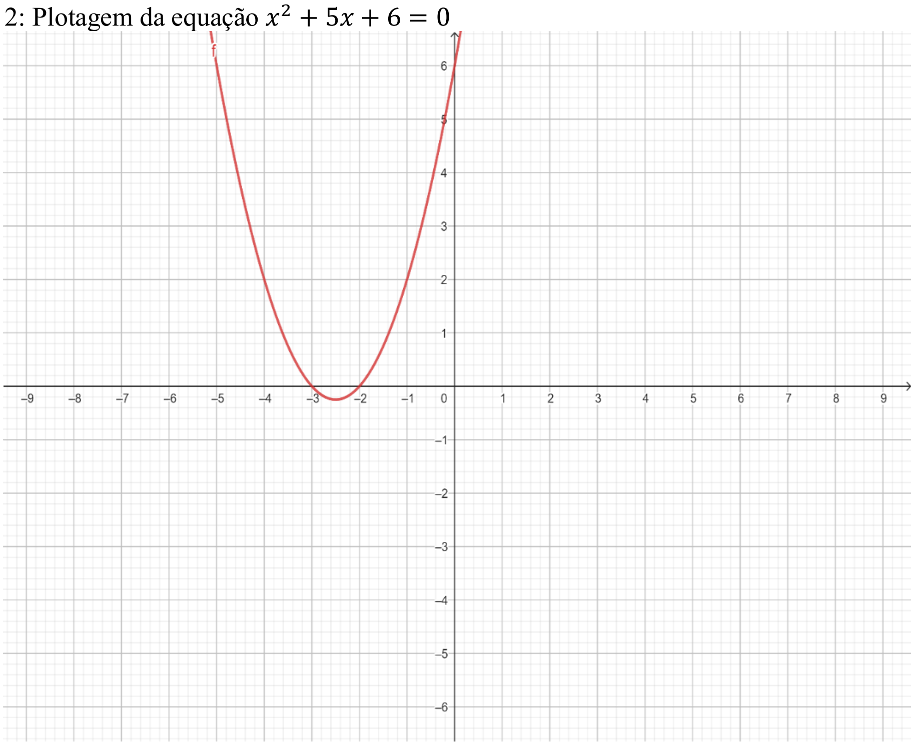
Quadro 5 – Estudo do sinal do exemplo 3.

$f(x)$		-3		-2	
x^2+5x+6, onde $a=1>0$	$+$	0	$-$	0	$+$

Fonte: próprio autor

O gráfico da função correspondente – nos quais o número de pontos zero pode ser lido diretamente – são os seguintes:

Gráfico 2: Plotagem da equação $x^2+5x+6=0$



Fonte: próprio autor, utilizando Geogebra

Proposição 2: Se x_1 e x_2 são as raízes de ax^2+bx+c, então podemos fatorar este polinômio:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Exemplo 4: Fatorar $2x^2+5x+3$.

Resolução 4: O discriminante é $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$, existem duas raízes reais diferentes

$$x_1 = \frac{-5+1}{2\cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

e

$$x_2 = \frac{-5-1}{2\cdot 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Logo, temos:

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x - (-1)]\left[x - \left(-\tfrac{3}{2}\right)\right] = 2(x+1)\left(x + \tfrac{3}{2}\right).$$

Observação 1: Porque

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a[x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1 \cdot x_2] \\ &= a[x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2] \\ &= ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1.x_2. \end{aligned}$$

ao igualar os coeficientes homônimos de x, também descobrimos que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Portanto, não é necessário calcular as próprias raízes se você estiver interessado apenas na soma ou no produto das raízes: ambos podem ser derivados diretamente da equação.

Observação 2: Sobre raízes complexas.

- Se também permitirmos soluções complexas, a formulação correta é que uma equação quadrática sempre tem duas soluções, que possivelmente podem coincidir.
- Assim, o discriminante “especifica” – no sentido de “distingue entre” – o número (e possivelmente o tipo) de raízes de uma equação quadrática.
- Se $a = 1$ chamamos a equação de mônica. Dividindo pôr a podemos escrever cada equação quadrática como $x^2 + bx + c$ e então as fórmulas tornam-se um pouco mais simples:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

4.1 Uma prova da fórmula quadrática

Nem os babilônios e muito menos al-Khwarizmi trabalharam com uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, pois consideravam apenas números positivos, e se a, b e c são positivos, esta equação não tem soluções positivas.

Em 1545, um cientista da Renascença, Girolamo Cardano, misturou soluções de al-Khwarizmi com geometria, para resolver equações quadráticas. Ele permitiu soluções negativas e até raízes quadradas de números negativos que deram origem a números complexos. Em 1637, René Descartes, publicou La Géometrie que continha a Fórmula Quadrática na forma que usamos hoje.

Agora provamos porque a fórmula funciona. Examine atentamente o argumento nas etapas a seguir. Veja como cada equação segue da equação anterior. A ideia é bastante semelhante à usada pelo Babilônios, mas um pouco mais geral. Trabalhamos com a equação $ax^2 + bx + c = 0$, até que o lado esquerdo seja um quadrado perfeito. Então a equação tem a forma $t^2 = k$, que sabemos como resolver para t.

Dada a equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, com a $\neq$ 0. Sabemos $a \neq 0$, porque caso contrário a equação não é uma equação quadrática (LIMA et al, 2006; GUELLI, 2006).

- **Primeiro passo**: Multiplique ambos os lados da equação por

$$\frac{1}{a}$$

Isso faz com que a esquerda termo igual

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

- **Segundo passo 2:** Adicione

    - $-\frac{c}{a}$

em ambos os lados em preparação para completar o quadrado à esquerda lado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

Logo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- **Terceiro passo:** Para completar o quadrado, adicione o quadrado da metade do coeficiente de x a ambos lados.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- **Quarto passo:** O lado esquerdo agora é o quadrado de um binômio.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- **Quinto passo:** Pegue o expoente da fração, para eliminar parênteses no lado direito.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

- **Sexto passo:** Para adicionar as frações do lado direito, encontre um denominador comum.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

- **Setimo passo:** Adicione as frações.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- **Oitavo passo:** Agora a equação tem a forma $t^2 = k$, com

$$t = x + \frac{b}{2a}$$

e

$$k = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

É aqui que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ se torna importante. Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então existem soluções reais. Elas são encontradas tirando as raízes quadradas de ambos os lados.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- **Nono passo:** A raiz quadrada de um quociente é o quociente do raízes quadradas.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Décimo passo:** Isso está começando a parecer a fórmula. Adicione

$$-\frac{b}{2a}$$

a cada lado.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Décimo primeiro passo:** A adição das frações resulta na Fórmula Quadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5 MÉTODO DE PO-SHEN LOH

5.1 A região da mesopotâmia e as equações quadráticas

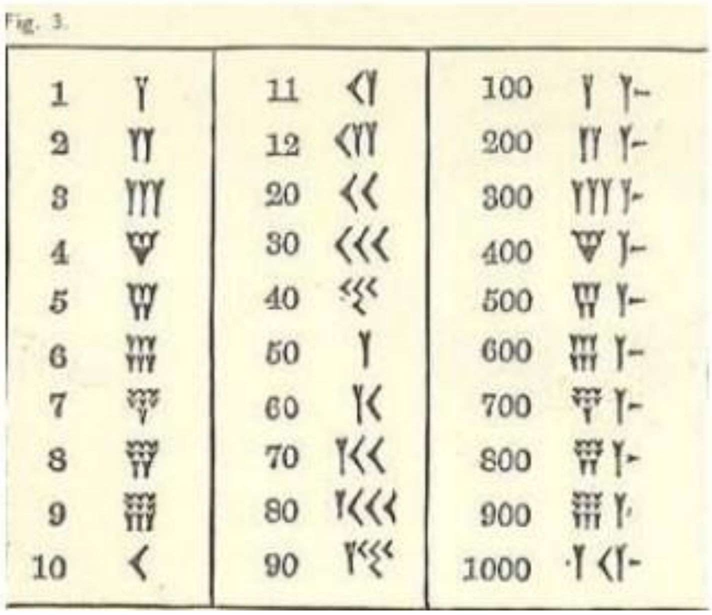
Hoje sabemos que uma civilização mesopotâmica, começou no vale dos rios Tigre e Eufrates, isto se deu provavelmente no quinto milênio a.C., podendo ser um pouco mais antiga que a civilização egípcia. Até a década de 1920, era comum pensar que a matemática começou na Grécia antiga. Na melhor das hipóteses, devido as informações existentes sobre tradições anteriores, como a representação da cultura egípcia no papiro Rhind, forneciam algo anterior, sendo insuficiente. Com o decifrar e interpretar de algumas tabletas de argila da antiga Mesopotâmia, inicialmente por um obscuro professor alemão, Georg Friedrich Grotefend (1775-1853) e um oficial do Exército Anglo-indiana, Henry Creswicke Rawlinson (1810-1895), ocorrendo desta maneira uma mudança nesta impressão, sendo observada a partir de então, com uma nova perspectiva.

Devido à durabilidade das tabletas de argila, em relação aos papiros egípcios, temos muitas evidências dos escribas mesopotâmicos, sendo exemplares que sobreviveram ao tempo, estes fazem parte de bibliotecas universitárias em Columbia, Pennsylvania e Yale, que possuem enormes quantidade de tabletas antigas da Mesopotâmia, inclusives matemáticas . Os espécimes existentes de matemática representam todas as eras principais - os reinos sumérios do terceiro milênio a.C., os regimes acadiano e babilônico (segundo milênio) e os impérios dos assírios (início do primeiro milênio), persas (séculos VI a IV a.C), e gregos (século III a.C. ao século I d.C.). O nível de competência já era elevado já na antiga dinastia babilónica, na época do rei-legislador Hamurabi (aproximadamente no século XVIII a.C.), mas depois disso houve poucos avanços notáveis. A aplicação da matemática à astronomia, entretanto, floresceu durante os períodos persa e selêucida (grego).

Ao contrário dos egípcios, os matemáticos do período da Antiga Babilónia foram muito além dos desafios imediatos das suas funções oficiais de contabilidade. Por exemplo, introduziram um sistema numérico versátil que, tal como o sistema moderno, explorava a noção de valor posicional, e desenvolveram métodos computacionais que tiraram partido deste meio de expressar números, eles resolveram problemas lineares e quadráticos por métodos muito parecidos com os usados hoje em álgebra, seu sucesso com o estudo do que hoje são chamados de triplos numéricos pitagóricos foi um feito notável na teoria dos números. Os escribas que fizeram tais descobertas devem ter acreditado que a matemática merecia ser estudada por si só, e não apenas como uma ferramenta prática.

O antigo sistema de numeração sumério seguia um princípio decimal aditivo (base 10) semelhante ao dos egípcios. Mas o antigo sistema babilônico converteu isso em um sistema de valor posicional com base 60 (sexagesimal). As razões para a escolha de 60 são obscuras, mas uma boa razão matemática pode ter sido a existência de tantos divisores (2, 3, 4 e 5, e alguns múltiplos) da base, o que teria facilitado muito a operação de divisão.

Figura 8: Sistema de numeração sexagesimal babilônico



Fonte: https://mathematicalspace.in/blog/wp-content/uploads/2023/09/SUMERIANBABYLONIAN-MATHEMATICS1-1.jpg

Os babilônios parecem ter desenvolvido um símbolo de espaço reservado que funcionava como um zero, mas seu significado e uso precisos ainda são incertos. As quatro operações aritméticas eram realizadas da mesma forma que no sistema decimal moderno, exceto que o transporte ocorria sempre que a soma atingia 60 em vez de 10. A multiplicação era facilitada por meio de tabelas, uma tabuinha típica lista os múltiplos de um número por 1, 2, 3,…, 19, 20, 30, 40 e 50. Essas tabelas também auxiliavam na divisão, pois os valores que as encabeçavam eram todos recíprocos de números regulares.

5.2 Po-Shen Loh e a redescoberta de uma resolução para equações do segundo grau

Ao longo da história da matemática, civilizações como os egípcios, babilônios e gregos, entre outras, realizaram muitos estudos que foram fundamentais para o desenvolvimento das equações do segundo grau. Considerando a história e a contribuição de grandes matemáticos para os métodos e técnicas de resolução de equações do segundo grau, destacamos o trabalho do matemático Po-Shen Loh, que redescobriu um novo método para resolver essas equações.

Po-Shen Loh é professor de matemática especialista em combinatória na Carnegie Mellon University nos Estados Unidos (EUA), e fundador da plataforma de aprendizagem matemática Expii.com. Loh acumula outras atividades: ele é diretor acadêmico e treina a equipe da USMAA (Olimpíada Internacional de Matemática dos EUA).

Figura 9: Professor Po-Shen Loh

Fonte:
https://www.poshenloh.com/static/media/pocollage.71d62dcc667d3d384835.webp

Ao longo de sua pesquisa em Combinatória, Teoria da Probabilidade e Ciência da Computação, Loh recebeu vários prêmios. Como resultado, ele tem inspirado jovens estudantes a pensar em matemática de maneiras diferentes, como o método que ele criou para resolver equações do segundo grau, elimina o processo de fatoração. Po-Shen Loh conquistou reconhecimento internacional e se tornou uma celebridade entre os entusiastas matemáticos da atualidade.

Em dezembro de 2019, Po-Shen Loh publicou o artigo "A Simple Proof of the Quadratic Formula". O artigo descreve sua notável e simples demonstração da fórmula quadrática e propõe uma forma mais natural de resolver equações do segundo grau. Loh (2019, p.2) destaca que seu objetivo é “[...]popularizar uma abordagem pedagógica alternativa e deliciosa para resolver equações quadráticas, o que é prático para integração em todos os currículos convencionais.”

Loh reinventou de forma independente a parametrização babilônica em termos da média e reconheceu a diferença de quadrados durante uma noite, enquanto treinava alunos para competições de matemática. Ao ensinar fatoração mais tarde, ele percebeu que o mesmo processo funcionava. Isso eliminou a adivinhação e a verificação na fatoração e levou a uma prova direta da fórmula quadrática.

Loh destaca a simplicidade das manipulações e conceitos algébricos em sua demonstração. Ele investigou a literatura inglesa sobre a história da matemática para elaborar e autenticar seu método, consultando traduções de manuscritos antigos e tradições matemáticas que incluíam grandes nomes como Diofanto, Brahmagupta, Yanghui e al-Khwarizmi.

Durante suas revisões, Loh examinou apenas alguns estudos iniciais, mas encontrou falta de continuidade ou evidências. Ele investigou os métodos antigos para resolver problemas quadráticos, mas não encontrou nenhuma descoberta em manuscritos ou livros da época que se aproximasse de seu método surpreendentemente simples para resolver equações do segundo grau.

Assim, Loh constatou que não havia livros ou artigos anteriores que explicassem corretamente seu método e justificassem todas as etapas de forma clara e consistente. Como resultado, ele pôde compartilhar sua abordagem inovadora, proporcionando uma nova e significativa contribuição para a matemática.

5.3 O método de Po-Shen Loh, uma excelente generalização

O método mais recente, redescoberto e publicado em 2019 pelo Professor Po-Shen Loh, visa generalizar a fatoração de uma equação do segundo grau usando a relação entre o produto notável, ou seja, o produto e a soma.

Partindo do pressuposto de que uma equação do segundo grau pode ser representada pela fórmula $x^2 + Bx + C = 0$, basta encontrar dois números com soma $-B$ e produto C. Essses números serão as raizes da equação (LOH, 2019).

Tomando a equação do segundo grau em sua forma geral, $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, podemos simplificá-la usando o coeficiente a para situar os números B e C. Portanto, teremos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Para simplificar, chamamos $-B = b/a$ e $C = c/a$. Assim, a equação pode ser representada como $x^2 + Bx + C = 0$. Conectamos isso à fatoração que satisfaz as ideias iniciais de Po-Shen Loh: a soma de dois números é $-B$ e o produto é C. Para tornar isso mais didática, associamos dois números x_1 e x_2 à soma e ao produto. Rescrevendo a equação, obtemos:

$$x^2 + Bx + C = 0 \Rightarrow x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

Loh observa que para a soma total e para o produto, respectivamente

> "dois números somam $-B$ precisamente cujo produto é C e assim basta encontrar dois números da forma $-\frac{B}{2} \pm z$ que se multiplicam para C, onde z é uma única quantidade desconhecida, porque eles terão automaticamente a média desejada" (LOH, 2019. p. 2).

Como já sabemos, a fórmula resolutiva de Bhaskara é uma generalização da ideia de completar quadrados (método de Fatoração de Expressões Algébricas), e chamaremos o z de parâmetro μ para demonstrar sua aplicabilidade na generalização da fórmula resolutiva de Bhaskara para encontrar a fórmula quadrática descoberta por Po-Shen Loh. Esta é a equação representada algebricamente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Assumindo um desdobramento da fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Desta forma, os dois valores possíveis para x_1 e x_2, que podem ser representados como:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \mu$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \mu$$

Onde:

$$\mu = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Neste ponto, retomaremos o conceito inicial do matemático Po- Shen Loh,

"encontrar dois números cuja soma seja – B e o produto seja C"(LOH, 2019. p. 2).

Chamamos S de soma $x_1 + x_2 = -B$ e de P o produto $x_1 \cdot x_2 = C$. Dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$, usando o Teorema da Decomposição, (IEZZI 2013, p. 105), concluímos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Assim,

$$S = x_1 + x_2 = -B \Rightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

. Representando os números x_1 e x_2 da seguinte forma:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \mu = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} + \mu = S \cdot \frac{1}{2} + \mu = \frac{S}{2} + \mu$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \mu = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} - \mu = S \cdot \frac{1}{2} - \mu = \frac{S}{2} - \mu$$

Encontramos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{S}{2} + \mu\right)\left(\frac{S}{2} - \mu\right) = C \Rightarrow \frac{S^2}{4} - \mu^2 = C \Rightarrow \frac{S^2}{4} - C = \mu^2$$

Assim,

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$$

onde $-B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$. Logo,

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b}{4a^2}^2 - \frac{c}{a}}$$

Po-Shen Loh logo descobre que $x = -\frac{b}{2a} \pm \mu$, é uma abordagem abrangente para resolução de equações e funções quadráticas, quando $a \neq 1$.

A simplificação de todos os coeficientes por a é o que fundamenta e torna possível o coeficiente a igual a 1, utilizando a técnica inicial de colocar os números B e C na forma de uma equação do segundo grau. Assim, o parâmetro μ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b}{4a^2}^2 - \frac{c}{a}} \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c}{1}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

onde μ é o parâmetro modular obtido pela fórmula de Bhaskara por meio de manipulações algébricas. Por fim, queremos destacar que o método demonstrado acima é uma generalização que resulta da fusão da soma pela diferença com a fórmula resolutiva, que é representada por:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \mu$$

para todo $a = 1$ e $\mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Po-Shen Loh explica suas etapas específicas para um método alternativo de resolução de equações quadráticas e a prova da fórmula quadrática. Ele também relembra as contribuições dos povos antigos que iniciaram estudos matemáticos e algébricos para resolver equações do segundo grau.

Assim, entendemos o uso de conceitos e habilidades mais simples e promissoras para encontrar soluções de equações do segundo grau através da abordagem e do caminho matemático apresentados no método de Po-Shen Loh. Uma nova perspectiva e formas de pensar algébricas estão sendo exploradas com esse método. Não é mais um método de resolução, mas sim um método que coloca os alunos em situações reais de aprendizagem para desenvolver seu raciocínio matemático e algébrico, bem como suas habilidades de resolução de problemas do cotidiano.

Exemplo: Resolva as equações do segundo grau, utilizando o método de Po-Shen Loh:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolução: $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$.

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \pm\sqrt{\frac{6^2}{4} - 5} = \pm\sqrt{\frac{36}{4} - 5} = \pm\sqrt{9 - 5} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Podemos calcular o valor para as raízes:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \mu = x = -\frac{(-6)}{2} \pm 2 = 3 \pm 2$$

Logo, temos os valores para as raízes:

$$x_1 = 3 - 2 = 1$$

e

$$x_2 = 3 + 2 = 5$$

Forma prática:

Resolução: Sabemos que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Como $a = 1$, $S = x_1 + x_2 = -\frac{(-6)}{1} = 6$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{1} = 5$. Determinaremos a média aritmética entre as raízes.

$$x_m = \frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Tomando o parâmetro μ, teremos:

$$x_1 = x_m + \mu = 3 + \mu$$

e

$$x_2 = x_m - \mu = 3 - \mu$$

Logo

$$P = x_1 \cdot x_2 = (3 + \mu) \cdot (3 - \mu) = 5$$

Assim

$$\begin{aligned} 9 - \mu^2 = 5 &\Leftrightarrow -\mu^2 = 5 - 9 \\ &\Leftrightarrow -\mu^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow \mu^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \mu = \pm 2 \end{aligned}$$

Desta forma, os valores das raízes são

$$x_1 = 3 + 2 = 5$$

e

$$x_2 = 3 - 2 = 1$$

b) $10x^2 - 11x + 1 = 0$

Resolução: $a = 10 \neq 1$, $b = -11$ e $c = 1$.

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b}{4a^2}^2 - \frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{(-11)}{4 \cdot (10)^2}^2 - \frac{1}{10}} = \pm\sqrt{\frac{121}{4 \cdot 100} - \frac{1}{10}} = \pm\sqrt{\frac{121}{400} - \frac{1}{10}} = \pm\sqrt{\frac{121-40}{400}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{81}{400}} = \pm\frac{9}{20}$$

Podemos calcular o valor para as raízes:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \mu = -\frac{(-11)}{2 \cdot (10)} \pm \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \pm \frac{9}{20}$$

Logo, temos os valores para as raízes:

$$x_1 = \frac{11}{20} - \frac{9}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

e

$$x_2 = \frac{11}{20} + \frac{9}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Forma prática:

Resolução: Sabemos que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Como $a = 10 \neq 1$, $S = x_1 + x_2 = -\frac{(-11)}{10} = \frac{11}{10}$ e $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{10}$. Determinaremos a média aritmética entre as raízes.

$$x_m = \frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{11/10}{2} = \frac{11}{20}$$

Tomando o parâmetro μ, teremos:

$$x_1 = x_m + \mu = \frac{11}{20} + \mu$$

e

$$x_2 = x_m - \mu = \frac{11}{20} - \mu$$

Logo

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{11}{20} + \mu\right) \cdot \left(\frac{11}{20} - \mu\right) = \frac{1}{10}$$

Assim

$$\frac{121}{400} - \mu^2 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow -\mu^2 = \frac{1}{10} - \frac{121}{400}$$

$$\Leftrightarrow -\mu^2 = -\frac{81}{400}$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 = \frac{81}{400}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \pm\frac{9}{20}$$

Desta forma, os valores das raízes são

$$x_1 = \frac{11}{20} - \frac{9}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

e

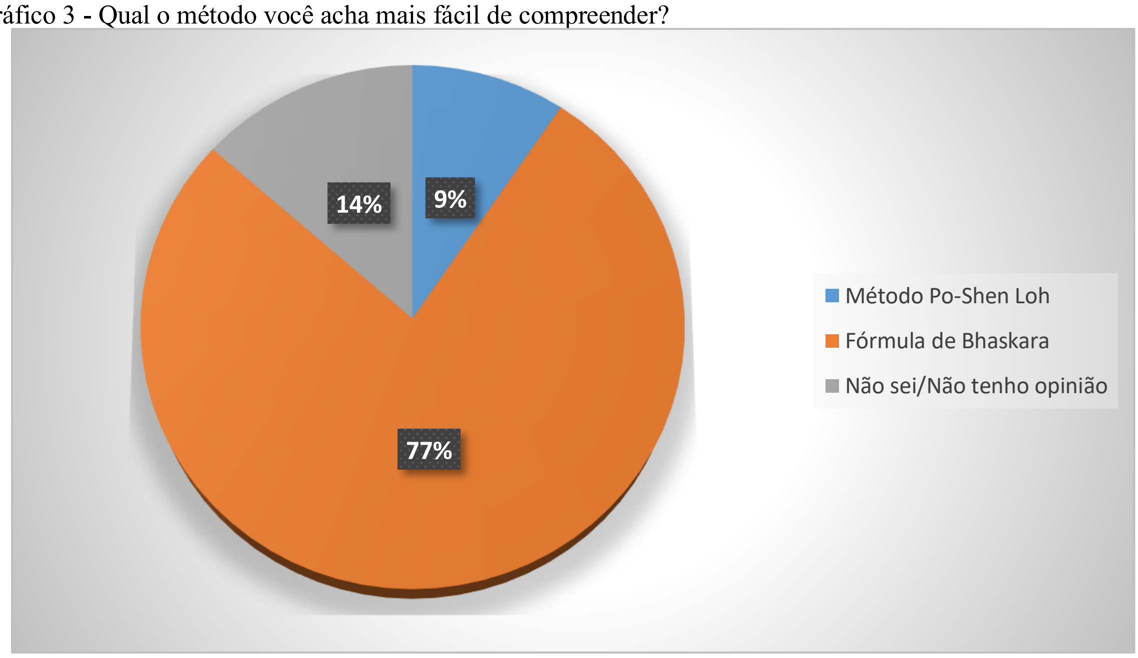
$$x_2 = \frac{11}{20} + \frac{9}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 Questionário Diagnóstico - Alunos

Na questão 1 "Qual o método você acha mais fácil de compreender?", foi explorado as diferentes perspectivas sobre os métodos de ensino e como eles influenciam o processo educacional. Buscou-se identificar quais abordagens são mais acessíveis aos alunos, visando aprimorar o processo educacional. No Gráfico 3, serão apresentados os resultados dessa análise.

Gráfico 3 - Qual o método você acha mais fácil de compreender?

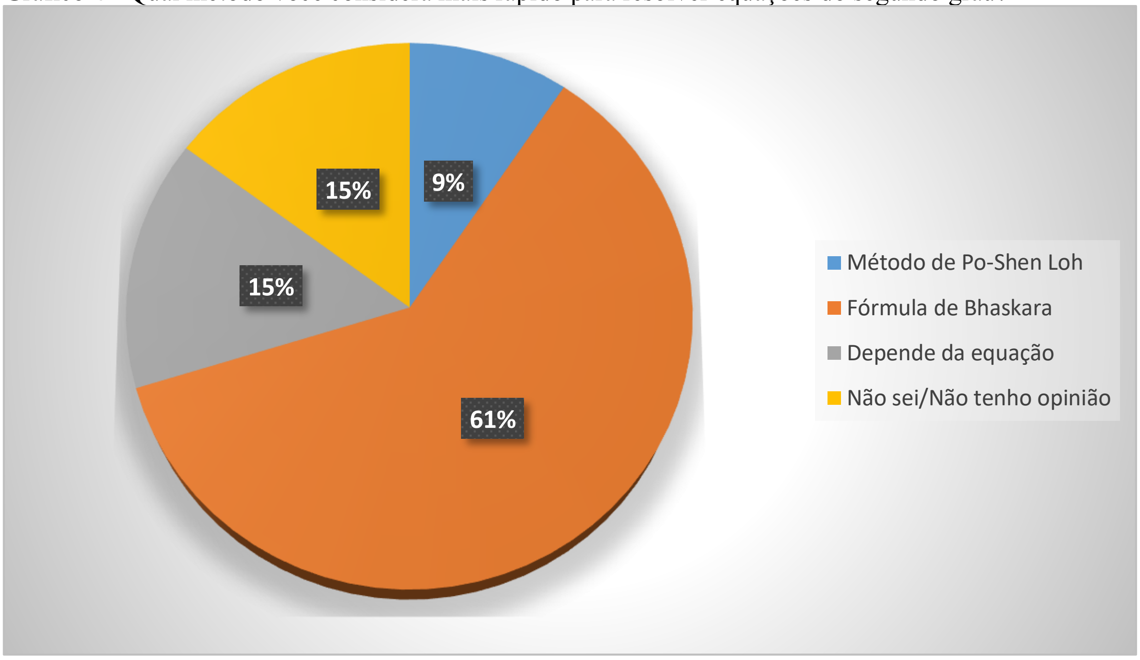


Fonte: o próprio autor

Conforme evidenciado no gráfico acima, a maioria dos alunos percebe o método resolutivo tradicional como mais fácil, refletindo uma preferência estabelecida por essa abordagem. E apenas uma pequena parcela, representada por 14% dos alunos, escolheu o método Po-Shen Loh. Essa preferência pode ser justificada pelo fato de que, conforme Quaranta (QUARANTA, 2013), a fórmula de Bhaskara tem sido utilizada de maneira excessiva e exclusiva no contexto escolar.

Na segunda questão perguntou-se: Qual método você considera mais rápido para resolver equações do segundo grau? Essa indagação foi crucial para compreender as preferências dos alunos em relação às abordagens de resolução de equações. Essa questão visou identificar qual método é percebido como mais eficiente e rápido pelos estudantes.

Gráfico 4 - Qual método você considera mais rápido para resolver equações do segundo grau?



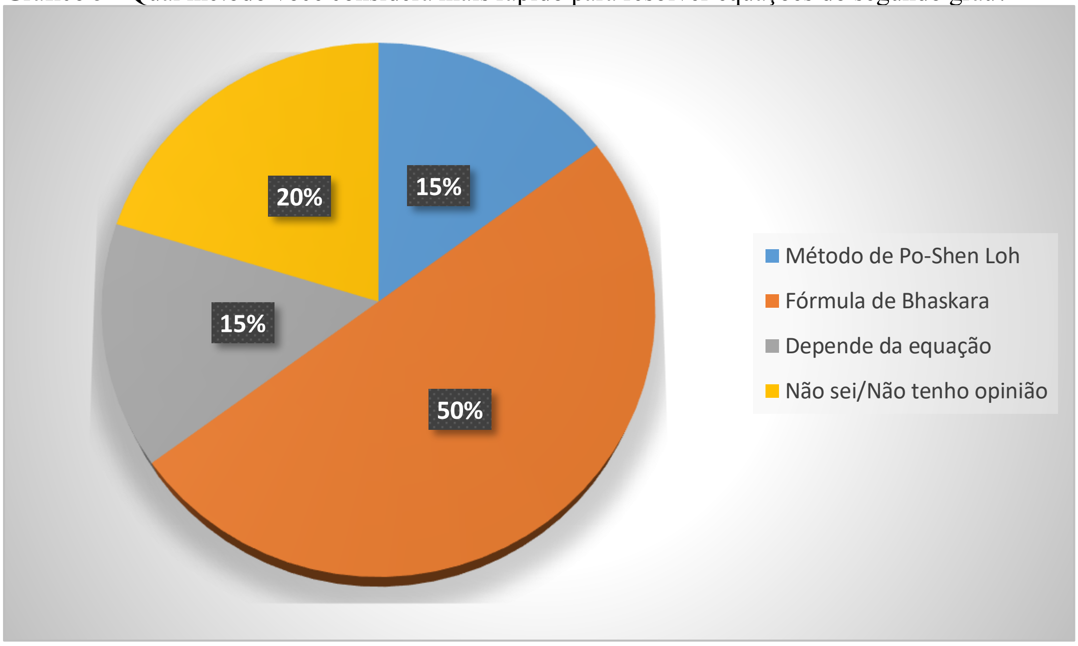
Fonte: o próprio autor

De acordo com os resultados obtidos, 61% dos alunos consideram o método de Bhaskara como o mais rápido para resolver equações do segundo grau. Isso reflete uma preferência estabelecida por essa abordagem, que é amplamente ensinada e familiar aos estudantes. Por outro lado, apenas 9% dos alunos optaram pelo método de Poh-Shen Loh como o mais rápido. Essa menor preferência pode ser atribuída à relativa novidade desse método para muitos alunos.

É interessante notar que 15% dos alunos indicaram que a rapidez do método depende da questão em questão. Essa resposta sugere uma compreensão mais flexível por parte dos alunos, reconhecendo que diferentes métodos podem ser mais eficazes dependendo das características específicas da equação a ser resolvida.

Na terceira questão foi perguntado aos alunos “Em termos de precisão, qual o método você acredita ser mais preciso na obtenção das raízes das equações?” Essa questão busca entender a percepção dos alunos sobre a precisão dos métodos de resolução de equações do segundo grau. A precisão é um aspecto fundamental na matemática, pois garante que as soluções obtidas sejam corretas e confiáveis, veja as respostas no gráfico 5.

Gráfico 5 - Qual método você considera mais rápido para resolver equações do segundo grau?

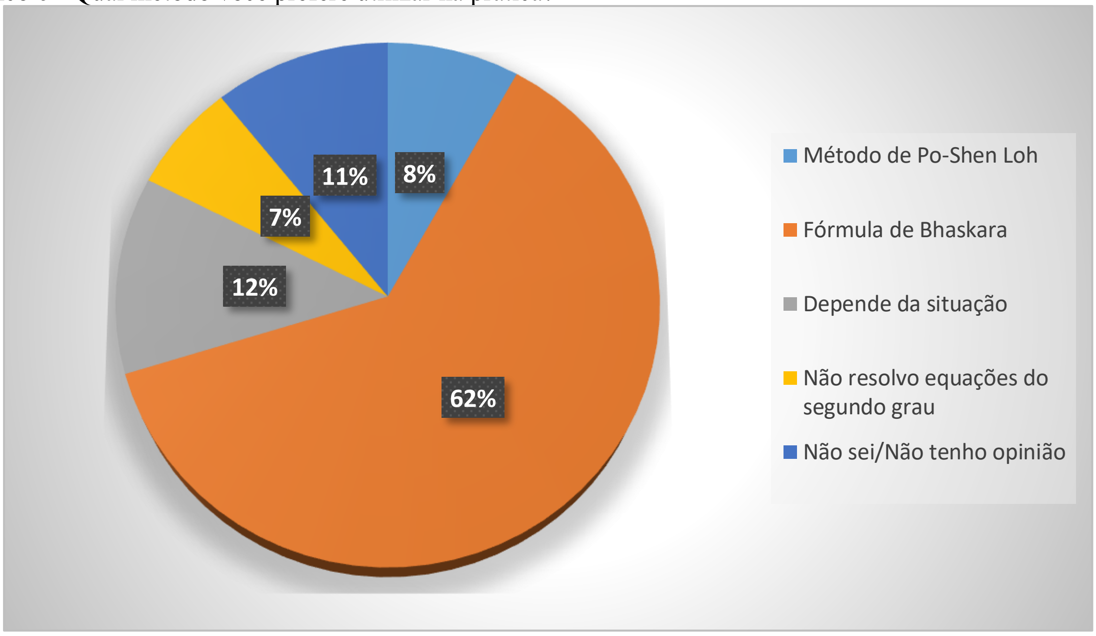


Fonte: o próprio autor

A preferência pelo método de Po-Shen Loh como o mais rápido foi expressa por apenas 15% dos alunos, enquanto uma maioria significativa de 50% optou pelo método tradicional de resolução, como mostra o gráfico acima. Além disso, 15% acreditam que dependerá da equação. Mas para Manso (MANSO, 2021) o método de Po-Shen Loh é uma abordagem que simplifica operacionalmente os cálculos, especialmente para alunos das séries iniciais.

Na quarta questão, buscou-se entender as preferências dos alunos em relação aos métodos utilizados na prática. Essa questão é fundamental para identificar quais técnicas são mais valorizadas e implementadas no dia a dia escolar. A seguir, apresentamos um gráfico que ilustra as respostas obtidas, destacando os métodos preferidos pelos participantes.

Gráfico 6 - Qual método você prefere utilizar na prática?



Fonte: o próprio autor

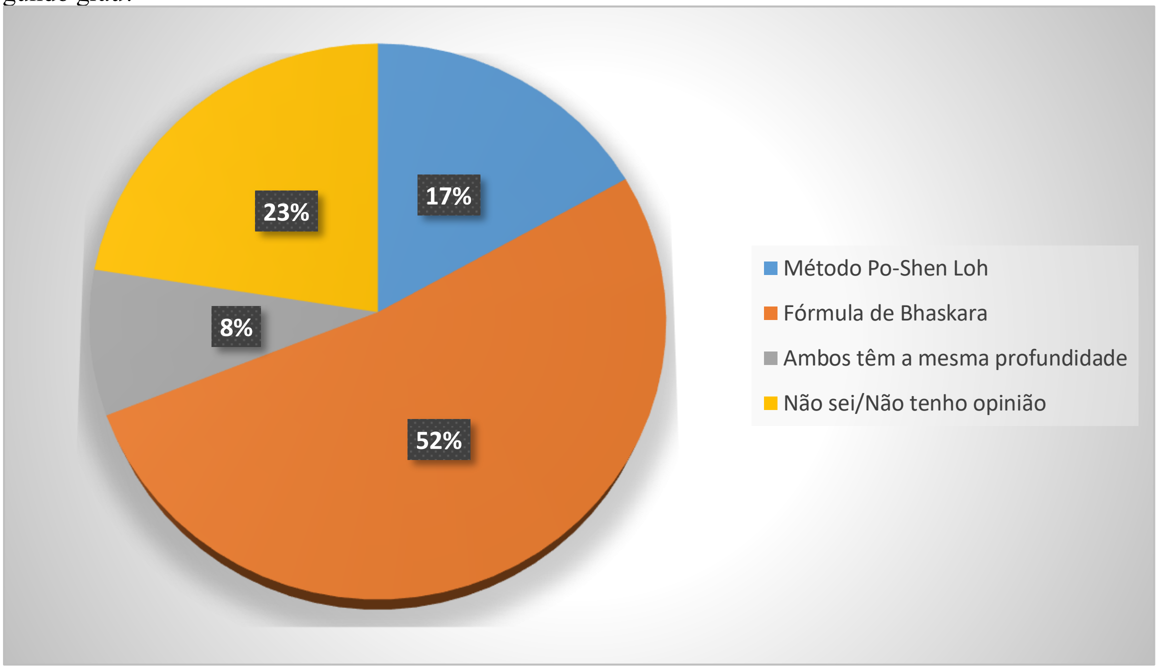
Como mostra o gráfico acima, a maioria dos alunos prefere o método resolutivo tradicional. Este método parece ser o mais aceito e confiável entre os participantes, possivelmente devido à sua familiaridade e comprovada eficácia ao longo do tempo. A preferência pelo método tradicional pode também refletir o nível de conforto dos alunos com técnicas que já foram amplamente utilizadas e testadas em diversos contextos educacionais.

Por outro lado, apenas 8% dos alunos disseram preferir o método Po-Shen Loh. Esta baixa porcentagem sugere que o método Po-Shen Loh ainda não é amplamente adotado ou conhecido pelos alunos. Pode ser que este método, embora potencialmente eficaz, ainda precise de mais divulgação e treinamento para ser melhor compreendido e utilizado pelos estudantes.

Adicionalmente, 12% dos alunos preferem usar métodos diferentes de acordo com as circunstâncias. Esta escolha indica uma flexibilidade e adaptabilidade entre esses alunos, que podem estar dispostos a ajustar suas abordagens conforme a complexidade e a natureza dos problemas que enfrentam. Essa adaptabilidade pode ser vista como uma habilidade valiosa, permitindo que os alunos escolham a técnica mais apropriada para cada situação específica.

Na quinta questão, buscou-se entender a opinião dos alunos sobre qual método oferece uma compreensão mais profunda das raízes de uma equação do segundo grau. Esta questão é essencial para identificar qual abordagem educacional proporciona um entendimento mais sólido e intuitivo desse importante conceito matemático. A seguir, apresentamos um gráfico que ilustra as respostas dos participantes, destacando os métodos considerados mais eficazes para uma compreensão aprofundada das raízes das equações do segundo grau.

Gráfico 7- Na sua opinião, qual método oferece uma compreensão mais profunda sobre as raízes da equação do segundo grau?



Fonte: o próprio autor

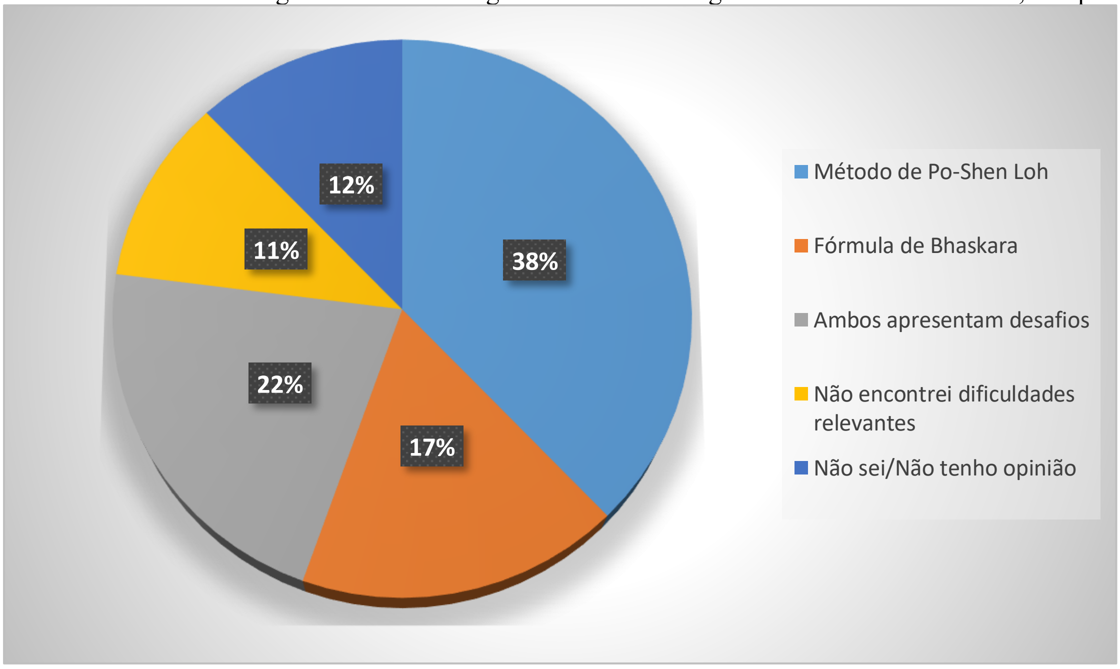
Os dados mostram que apenas 17% dos alunos relataram que o método Po-Shen Loh oferece uma compreensão mais profunda das raízes das equações do segundo grau. Esta baixa porcentagem indica que o método Po-Shen Loh ainda não é amplamente reconhecido pelos alunos como a melhor opção para um entendimento aprofundado. Isso ocorre apesar de, segundo Pieronkiewicz (PIERONKIEWICZ, 2020), o método ter o potencial de melhorar a aprendizagem significativa e prazerosa na resolução de equações do segundo grau em comparação com os métodos tradicionais dos livros didáticos.

Em contrapartida, 52% dos alunos consideram o método resolutivo tradicional como o que oferece a melhor compreensão das raízes da equação do segundo grau. Este resultado reforça a confiança dos alunos no método tradicional, devido à sua ampla utilização e familiaridade nos currículos educacionais. O método tradicional, com sua abordagem sistemática e bem estruturada, continua a ser a preferência dominante entre os alunos.

Observa-se também que apenas 8% dos alunos afirmam que ambos os métodos Po-Shen Loh e o tradicional têm a mesma profundidade na explicação das raízes. Esta pequena porcentagem sugere que a maioria dos alunos vê uma diferença significativa na eficácia dos métodos, preferindo claramente um sobre o outro. Em resumo, esses dados indicam a importância de continuar explorando e talvez integrando diferentes abordagens pedagógicas para atender às diversas necessidades e preferências dos alunos.

Na sexta questão, buscou-se identificar se os alunos encontraram dificuldades significativas ao usar algum dos métodos de resolução de equações do segundo grau. Esta questão foi crucial para entender os obstáculos enfrentados pelos estudantes e melhorar as estratégias de ensino. A seguir, apresentamos um gráfico que ilustra as respostas dos participantes, destacando os métodos que apresentam maiores desafios segundo eles.

Gráfico 8 - Você encontrou alguma dificuldade significativa ao usar algum desses métodos? Se sim, em qual?



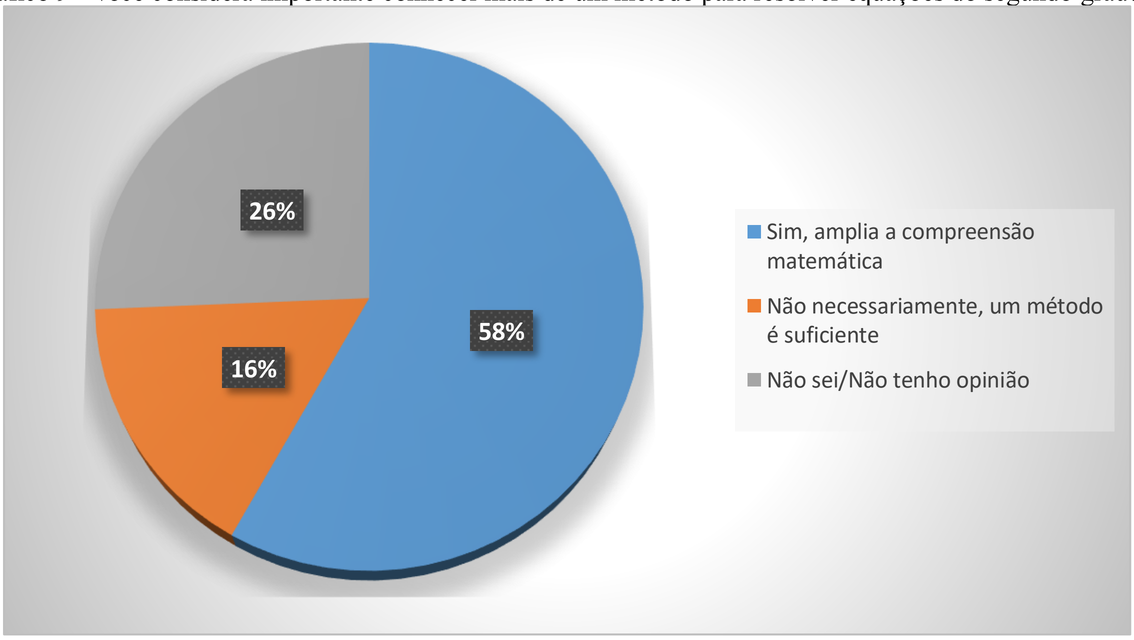
Fonte: o próprio autor

Os dados revelam que 38% dos alunos encontraram dificuldades significativas ao usar o método Po-Shen Loh, enquanto 17% enfrentaram desafios com o método resolutivo tradicional. Esses números indicam que o método Po-Shen Loh, embora inovador, apresenta uma maior complexidade percebida pelos alunos, ao passo que o método tradicional, apesar de ser mais familiar, não é isento de dificuldades, especialmente relacionadas a erros algébricos e à memorização da fórmula.

Além disso, apenas 11% dos alunos afirmaram que não tiveram problemas com nenhum dos métodos, enquanto 22% relataram que ambos os métodos são difíceis de usar. Esses resultados sugerem a necessidade de estratégias pedagógicas diferenciadas, como recursos de apoio adicionais para o método Po-Shen Loh e reforço na prática e compreensão dos conceitos fundamentais para o método tradicional, visando atender melhor às necessidades e preferências dos alunos e facilitar o aprendizado de equações do segundo grau.

Na sétima questão, procuramos saber a opinião dos alunos sobre a importância de conhecer mais de um método para resolver equações do segundo grau. Entender essa percepção foi essencial para avaliar a relevância de ensinar múltiplas abordagens na educação matemática. A seguir, apresentamos um gráfico que ilustra as respostas dos participantes, destacando suas opiniões sobre a utilidade de dominar diferentes métodos para a resolução de equações do segundo grau.

Gráfico 9 - Você considera importante conhecer mais de um método para resolver equações do segundo grau?



Fonte: o próprio autor

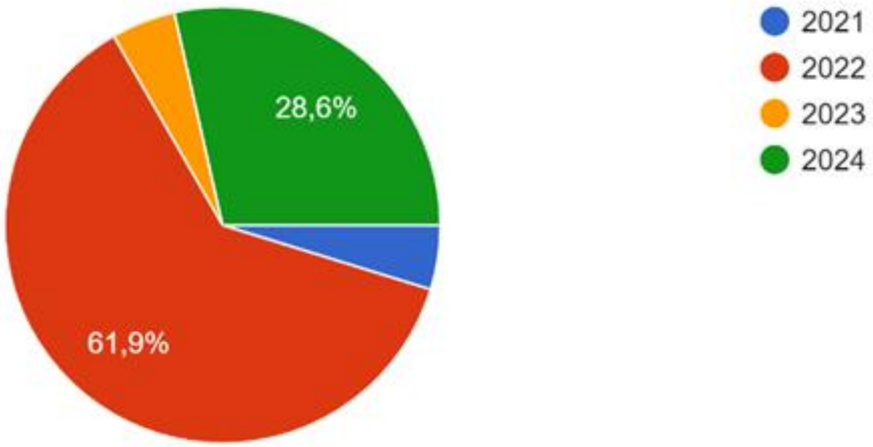
Como mostra o gráfico acima, 58% dos alunos concordam que conhecer mais de um método resolutivo é importante, pois melhora sua compreensão matemática. Essa maioria indica que os estudantes veem valor na diversidade de abordagens, reconhecendo que diferentes métodos podem oferecer novas perspectivas e aprofundar o entendimento dos conceitos matemáticos.

Por outro lado, 26% dos alunos acreditam que um único método é suficiente. Essa parcela sugere que, para alguns estudantes, a familiaridade e a proficiência em um método resolutivo já atendem às suas necessidades de aprendizagem. Sendo assim, é necessário fazer com que os alunos entendam que o Método de Po-Shen Loh pode ser comparado com o Método de Bhaskara na resolução de equações polinomiais de grau dois e seu o objetivo é facilitar o entendimento e proporcionar uma nova maneira de encontrar as raízes das equações (MANSO, 2021).

6.2 Questionário Diagnóstico – Professores

A amostra deste estudo foi composta por vinte e um alunos das turmas do PROFMAT-UEMA, que tiveram entrada nos anos de 2021, 2022, 2023 e 2024. Utilizou-se de um questionário, onde foi pedido a resolução de questões por cada método (tradicional e Poh-Shen Loh), como os professores já possuem uma aprendizagem significativa, não houve a apresentação da teoria e/ou de como proceder na resolução dos exercícios. Abaixo no gráfico 10 temos o grupo pesquisado.

Gráfico 10 - Qual turma do PROFMAT você pertence?

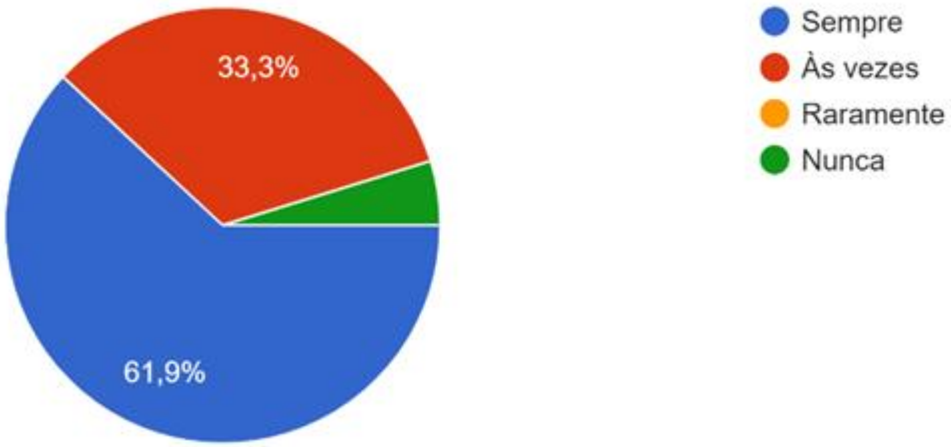


Fonte: o próprio autor

Como visto no gráfico acima, a maioria dos alunos participantes da pesquisa ingressaram no PROFMAT - UEMA em 2022, mas ingressantes de outros semestres também fizeram parte dessa pesquisa. Esse grupo, composto por professores atuantes no ensino básico, trouxe consigo uma vasta experiência prática que se mostrou fundamental para o desenvolvimento e a execução da pesquisa sobre métodos de ensino de equações do segundo grau.

Após conhecer o perfil dos participantes da pesquisa, iniciamos a coleta de dados com o questionário 1. Na primeira questão, perguntamos aos participantes: "Com que frequência você ensina ou utiliza a fórmula de Bhaskara para resolver equações do segundo grau?" Através desta pergunta, conseguimos avaliar qual método é mais utilizado nas salas de aula. Esta informação foi crucial para entender a predominância do método tradicional em comparação com outras abordagens e para fundamentar a comparação com o método proposto por Poh-Shen Loh.

Gráfico 11 - Com que frequência você ensina ou utiliza a formula de Bhaskara para resolver equações do segundo grau?



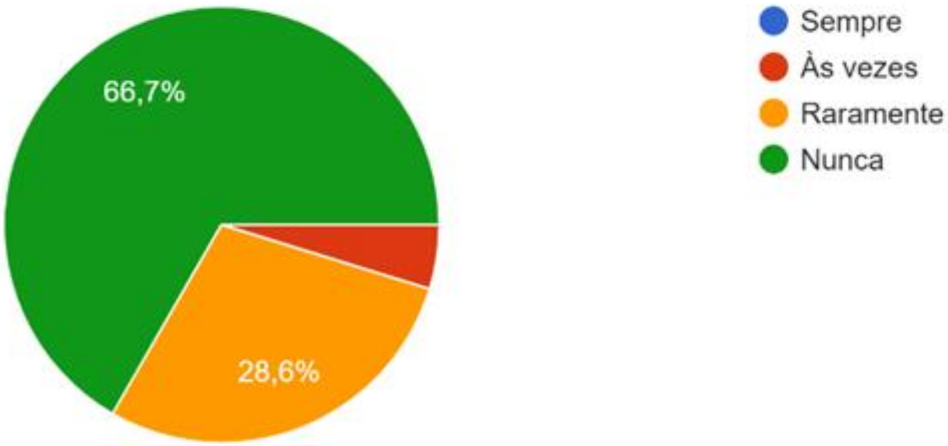
Fonte: o próprio autor

Como demonstra o gráfico acima, a maioria dos professores participantes da pesquisa ensina o método resolutivo tradicional para equações do segundo grau. Especificamente, 61,9% dos participantes afirmaram que sempre utilizam a fórmula de Bhaskara em suas aulas. Além disso, 33,3% dos professores indicaram que ensinam esse método às vezes. Apenas 4,8% dos respondentes disseram que não utilizam a fórmula de Bhaskara.

Esses dados indicam o domínio dos métodos tradicionais na prática docente. O uso consistente da fórmula de Bhaskara demonstra que muitos educadores confiam em métodos estabelecidos para garantir que os alunos compreendam e resolvam equações quadráticas. O que está de acordo com Silva (SILVA, 2017), que afirma que no Brasil, tanto nas salas de aula quanto nos livros didáticos, a maioria dos problemas envolvendo equações do segundo grau é resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara.

Na segunda questão, foi perguntado aos participantes “Com que frequência você ensina ou utiliza o método de Poh-Shen Loh para resolver equações do segundo grau?” Esta questão é crucial, pois permite avaliar a familiaridade e a adoção desse método alternativo em comparação com o método tradicional de Bhaskara. As respostas para esta questão podem ser encontradas no Gráfico 12, que apresenta a distribuição das frequências com que os participantes ensinam ou utilizam o método de Poh-Shen Loh para resolver equações do segundo grau.

Gráfico 12 - Com que frequência você ensina ou utiliza o método de Poh-Shen Loh para resolver equações do segundo grau?

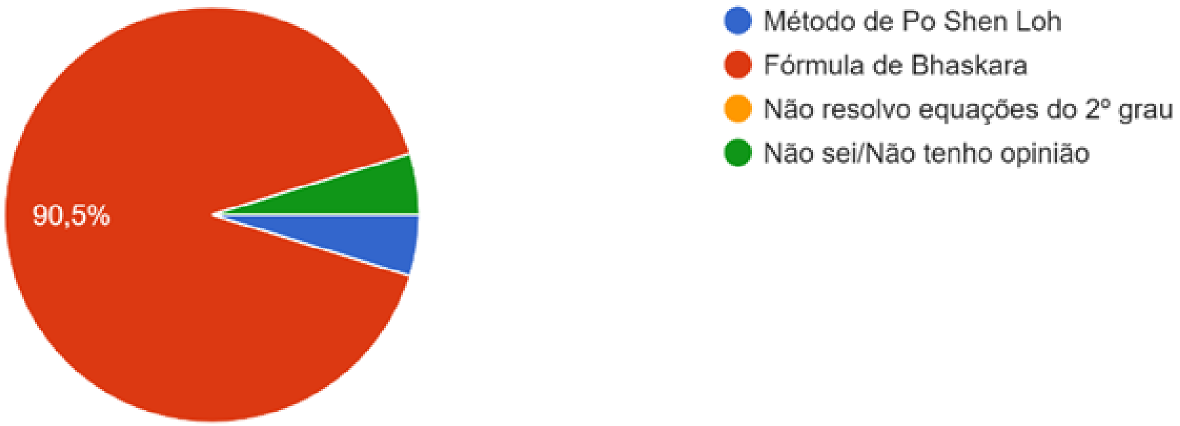


Fonte: o próprio autor

O Gráfico 12 revela que a maioria dos professores correspondendo a 66,7% dos participantes, informaram que nunca ensinaram o método Po-Shen Loh para resolver equações do segundo grau. Este dado indica uma baixa frequência de adoção desse método alternativo nas práticas de ensino, sugerindo uma preferência pela fórmula de Bhaskara. Apenas 4,7% dos participantes indicaram que às vezes ensinam o método Po-Shen Loh, o que demonstra uma utilização esporádica ou limitada dessa abordagem. Por fim, 28,6% dos professores afirmaram que ensinam o método raramente, indicando uma minoria que utiliza ocasionalmente o método de Poh-Shen Loh em suas práticas de ensino. Esses dados evidenciam uma significativa disparidade na utilização entre o método tradicional e o método de Poh-Shen Loh, destacando a predominância da fórmula de Bhaskara no contexto educacional dos participantes da pesquisa.

Na terceira questão, com o objetivo de compreender melhor as preferências pedagógicas dos professores em relação ao ensino de equações do segundo grau, perguntou-se: "Qual o método você prefere utilizar em sala de aula para o ensino de resolução de equações do 2º grau?" A resposta a essa pergunta nos ajudou a identificar quais métodos são mais valorizados e aplicados pelos educadores em suas práticas diárias. Veja no gráfico 13 as respostas dadas pelos participantes.

Gráfico 13 - Qual o método você prefere utilizar em sala de aula para o ensino de resolução de equações do 2º Grau?



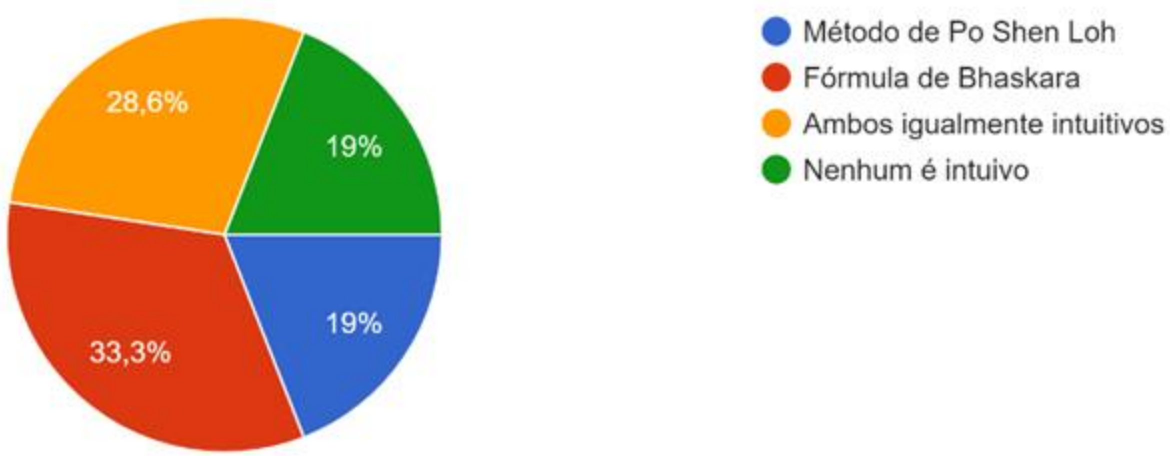
Fonte: o próprio autor

Os resultados mostram que menos de 5% dos professores afirmaram que o método Po-Shen Loh é preferível para ser utilizado em sala de aula. Em contraste, uma esmagadora maioria de 90,5% declarou que prefere o método resolutivo tradicional, utilizando a fórmula de Bhaskara, como mostrado no gráfico. Isso evidencia "a necessidade de mudança, pois o papel do professor é essencial: deve propor bons problemas, acompanhar e orientar a busca de soluções, coordenar discussões entre soluções diferentes, valorizar caminhos distintos que chegaram à mesma solução, validando-os ou mostrando situações em que o raciocínio utilizado pode não funcionar" (ROMANATTO, 2012, p. 303).

Os dados expostos no gráfico ressaltam ainda uma clara preferência pelo método tradicional no ensino de equações do segundo grau. A predominância da fórmula de Bhaskara pode ser atribuída a sua longa tradição no sistema educacional, à familiaridade dos professores com este método e à sua presença consolidada nos livros didáticos e currículos escolares.

A quarta questão do questionário abordou a experiência dos professores em sala de aula, perguntando: "Na sua experiência em sala de aula, qual método é mais intuitivo para os alunos compreenderem e aplicarem na resolução de equações do segundo grau?" Essa pergunta visava identificar qual método, entre a fórmula de Bhaskara e o método de Poh-Shen Loh, é percebido como mais acessível e fácil de entender pelos alunos, na visão dos professores. Veja no gráfico 14.

Gráfico 14 - Na sua experiência em sala de aula, qual método é mais intuitivo para os alunos compreenderem e aplicarem na resolução de equações do segundo grau?



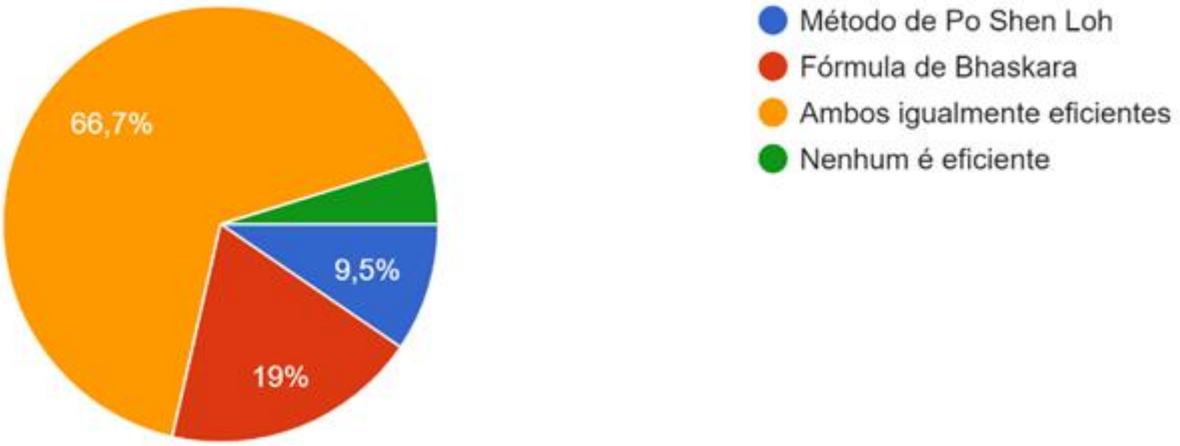
Fonte: o próprio autor

Como mostra o gráfico acima, a maioria dos professores (33,3%) afirma que o método resolutivo tradicional, utilizando a fórmula de Bhaskara, é mais intuitivo para os alunos compreenderem e aplicarem na resolução de equações do segundo grau. No entanto, 19% dos participantes consideram o método de Poh-Shen Loh mais intuitivo, indicando uma aceitação crescente dessa abordagem. Além disso, 28,6% dos respondentes acham que ambos os métodos são intuitivos, sugerindo que uma abordagem híbrida pode ser benéfica, permitindo aos alunos escolher a técnica que melhor se adapta ao seu estilo de aprendizagem.

Por outro lado, 19% dos participantes não consideram nenhum dos métodos intuitivo, o que aponta para desafios na forma como os conceitos matemáticos são ensinados atualmente. Esses dados destacam a diversidade de opiniões sobre a intuitividade dos métodos de ensino de equações do segundo grau e sugerem que, enquanto a fórmula de Bhaskara ainda é amplamente favorecida, há uma abertura para inovação pedagógica. Explorar e experimentar diferentes metodologias pode ajudar a identificar as práticas mais eficazes e engajadoras, melhorando a aprendizagem dos alunos.

Na quinta questão do questionário buscou-se avaliar as percepções dos participantes sobre a eficiência dos métodos de ensino em termos de aprendizagem dos alunos, perguntando: "Qual método você considera ser mais eficiente em termos de aprendizagem para os alunos?" Essa pergunta foi formulada para entender qual abordagem, entre a fórmula de Bhaskara e o método de Poh-Shen Loh, é percebida como mais eficaz na facilitação do entendimento e na retenção dos conceitos de equações do segundo grau.

Gráfico 15 - Qual método você considera ser mais eficiente em termos de aprendizagem para os alunos?



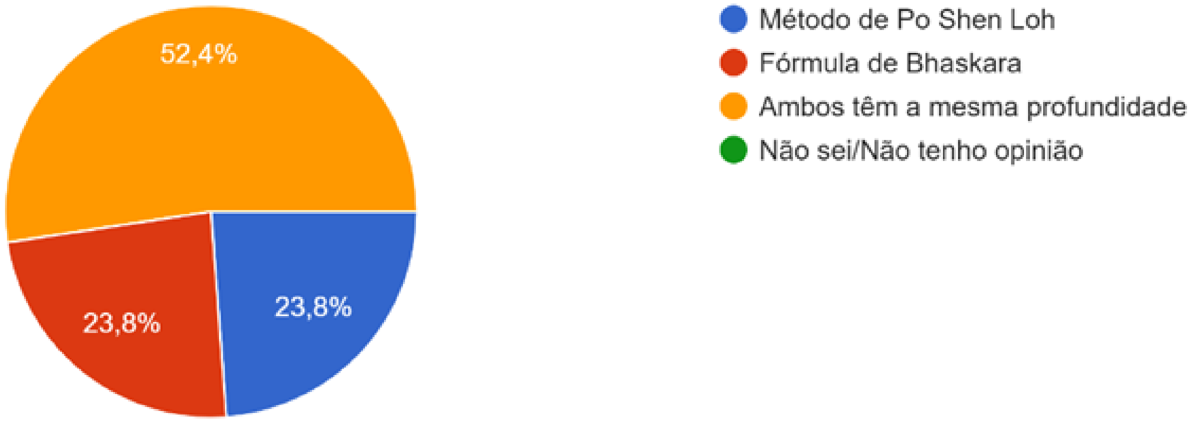
Fonte: o próprio autor

Somente 9,5% dos professores relataram que o método Po-Shen Loh é mais eficiente, enquanto 19% indicaram o método resolutivo tradicional como o mais eficiente em termos de aprendizagem. Esses números sugerem que, embora o método de Poh-Shen Loh seja reconhecido por uma parcela dos participantes como sendo o mais eficiente, o método tradicional de Bhaskara ainda é considerado superior por uma proporção maior.

Observa-se também que 66,7% dos entrevistados afirmam que ambos os métodos são eficientes, o que sugere que muitos veem valor em uma abordagem combinada que integra as vantagens dos dois métodos. Este dado é significativo, pois aponta para a possibilidade de uma estratégia pedagógica mais inclusiva que não se limita a uma única metodologia. Por outro lado, 4,8% afirmam que nenhum dos métodos é eficiente, destacando a necessidade de explorar novas técnicas e abordagens para atender a diferentes estilos de aprendizagem e melhorar a eficácia do ensino de equações do segundo grau.

A sexta questão direcionou-se à percepção dos participantes sobre a profundidade da compreensão proporcionada pelos métodos de ensino em relação às raízes da equação do segundo grau, perguntando: "Na sua opinião, qual o método oferece uma compreensão mais profunda sobre raízes da equação do segundo grau?" Essa pergunta foi formulada com o objetivo de avaliar qual abordagem, entre a fórmula de Bhaskara e o método de Poh-Shen Loh, é considerada mais eficaz na promoção de uma compreensão abrangente e significativa das raízes das equações quadráticas.

Gráfico 16 - Na sua opinião, qual o método oferece uma compreensão mais profunda sobre raízes da equação do segundo grau?



Fonte: o próprio autor

De acordo com o gráfico acima, 23,8% dos professores relataram que o método de Poh-Shen Loh oferece uma compreensão mais profunda das raízes da equação do segundo grau. Por outro lado, a mesma proporção de 23,8% indicou que o método resolutivo tradicional, utilizando a fórmula de Bhaskara, proporciona uma compreensão mais aprofundada. Surpreendentemente, a maioria expressiva de 52,4% dos participantes afirmou que ambos os métodos oferecem uma compreensão profunda, sugerindo que há méritos em cada abordagem e que uma combinação dos dois pode ser benéfica para uma compreensão mais completa das raízes das equações quadráticas.

A sétima questão do questionário buscou avaliar a familiaridade dos participantes com diferentes métodos para resolver equações do segundo grau, perguntando: "Você considera conhecer mais de um método para resolver equações do segundo grau?" Essa pergunta foi formulada para entender se os participantes têm conhecimento e habilidade em mais de uma abordagem para a resolução dessas equações, o que pode indicar uma maior versatilidade e compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes.

Gráfico 17 - Você considera conhecer mais de um método para resolver equações do segundo grau?

Fonte: o próprio autor

Como mostra o gráfico acima, todos os participantes concordam que conhecer mais de um método resolutivo para equações do segundo grau é importante, pois melhora a compreensão matemática. Esse resultado sugere um consenso entre os participantes sobre a relevância de ter familiaridade com diferentes abordagens para resolver problemas matemáticos. Essa compreensão multifacetada não apenas promove uma visão mais abrangente dos conceitos matemáticos, mas também permite aos alunos desenvolverem habilidades analíticas e críticas ao escolherem a melhor estratégia para resolver problemas específicos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebemos que associam ainda a Matemática, somente à capacidade de decorar algumas fórmulas. Neste caso, o senso crítico, o raciocínio lógico ou o entendimento não são necessários. Mas esse comportamento não corresponde à aprendizagem matemática real. Só quando uma postura investigativa é assumida, questionamentos são feitos e há participação, é que um assunto pode ser verdadeiramente aprendido. Quando as pessoas que estudam esse conteúdo começam a entendê-lo.

Ao longo da história da matemática, todos os métodos de resolução, sejam algébricos, gráficos, cartesianos ou geométricos, tiveram um papel importante. No entanto, nos dias de hoje, não podemos nos limitar a um método de resolução.

Devido ao fato de diversificar o olhar dos alunos e ampliar sua assimilação do assunto, é de extrema importância ensinar várias maneiras de resolver o mesmo problema, demonstrando que são aplicáveis. O uso de alguns desses métodos em sala de aula deve ser incentivado, tentado despertar o interesse dos alunos pela matemática, ensinando-lhes que a álgebra, a geometria e a aritmética são disciplinas que podem e devem ser trabalhadas em conjunto.

Esses métodos permitem que os alunos realizem uma variedade de atividades associadas ao conteúdo, como calcular as medidas dos lados de uma figura geométrica, calcular a variação dos valores de uma equação, resolver sistemas, esboçar gráficos e conhecer as aplicações da matemática em várias ciências.

É fundamental que os professores aprendam sobre a história da matemática e outras maneiras de resolver equações quadráticas, além da fórmula de Bhaskara, que é tradicionalmente usada para resolver equações quadráticas. No entanto, sabemos que eles enfrentam vários desafios, como controlar a agitação dos alunos, combater o desinteresse pela disciplina, que é um problema comum em sala de aula, e lidar com diferentes perfis de alunos e níveis de aprendizagem.

É comum acreditar que há uma conexão entre a resolução de uma equação de segundo grau e a fórmula de Bhaskara. Mas o método de Po-Shen Lo (Babilônico) permite uma demonstração simples e fácil de entender desta fórmula. Percebemos que os alunos podem resolver uma equação completa do segundo grau sem usá-la de forma decorada, como costuma acontecer. Recomendamos que este método seja usado como um complemento do conteúdo normalmente fornecido pela abordagem de equações quadráticas.

Nosso principal intuito é melhorar a aprendizagem dos alunos, do fundamental ao médio. Esperamos que este trabalho ajude os professores interessados em estudar as diversas formas de resolução de equações quadráticas, fugindo dos materiais comercializados atuais e priorizando o estudo reflexivo e intelectual dos alunos, construindo o conteúdo junto com o professor e desenvolvendo-o de forma precisa em sala de aula para garantir a participação de todos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Patrícia, et al. **Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação.** Educação E Pesquisa, vol. 33, no. 2, 2007.

AMARAL, J. T. do. **Método de Viète para Resolução de Equações do 2° Grau**. Revista do Professor de Matemática. nº 13. Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm. Acesso em 03 de março de 2024

ANDRADE, B.C. **A evolução histórica da resolução das equações do 2° grau**. Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2000.

ANDRADE, W.C. **Uma abordagem histórica da equação do 2º grau**. In. Revista do Professor de Matemática, nº43, 2000.

ARAÚJO, Waldirene, et al. **Metodologias ativas no ensino de ciências: desafios e possibilidades na prática docente.** Research Society and Development, vol. 12, no. 1, 2023.

BATISTA, João, et al. **Importância das metodologias ativas para o ensino de língua inglesa na escola pública.** Revista Ciência Em Evidência, vol. 3, no. 2, 2023.

BOGGINO, Norberto. **A avaliação como estratégia de ensino. Avaliar processos e resultados.** Sísifo, n. 9, p. 79-86/EN 79-86, 2016.

BORGES, Cécilia, et al. **Saberes docentes: diferentes tipologias e classificações de um campo de pesquisa.** Educação & Sociedade, vol. 22, no. 74, 2001.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2012.

BOYER, C.B. **História da Matemática**: Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1996.

BRIGHENTI, Josiane; BIAVATTI, Vania Tanira; DE SOUZA, Taciana Rodrigues. **Metodologias de ensino-aprendizagem: uma abordagem sob a percepção dos alunos**. Revista Gestão Universitária na América Latina-GUAL, p. 281-304, 2015.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingos. Campinas – SP: Unicamp, 2004.

FANG, Zhen, et al. **Does diversified teaching methods help college students' psychological acceptance？**., 2024.

FERREIRA, Juliana, et al. **A resolução de problemas como proposta de metodologia no ensino de análise combinatória**., 2018.

FILHO, Mário, et al. **Trajetória de vida e construção dos saberes de professoras de educação física.** Revista Brasileira De Educação Física E Esporte, vol. 24, no. 2, 2010.

FRAGOSO, W. C. Uma Abordagem Histórica da Equação do 2º Grau. RPM. n. 43. p. 20 a 25. 2000. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/43/4.htm. Acesso em: 04 de março de 2024.

GREGÓRIO, Ana, et al. **Análise da mobilização de saberes docentes a partir de relatos produzidos por licenciandos em química após a autoscopia trifásica.** Revista Brasileira De Ensino De Ciência E Tecnologia, vol. 12, no. 1, 2019.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Conjuntos, Funções e Trigonometria. São Paulo: Atual. 1985.

INEICHEN, Camila, et al. **Conhecimento e saberes docentes no ensino de química: o que revelam as teses e dissertações?** Research Society and Development, vol. 9, no. 11, 2020.
JUSTINO, Júlia, et al. **Enhancing collaborative learning through pedagogical alignment**., 2019, p. 227-234.

KATZ, V. J. **A history of Mathematics.** Editora Pearson Education, 2009.

LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas. **O uso do computador no ensino de matemática na graduação.** 23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, p. 32-43, 2000.

LIMA, E. L. Et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Coleção do Professor de Matemática. 8ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções.** Coleção PROFMAT, SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio.** vol 1. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **Temas e Problemas**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2010.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2010.

LOH, P. S. **Simple Proof of the Quadratic** Formula. arXiv:1910.06709 [math.HO]. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf.

MANKE, Rosana, et al. **Utilização de estratégias de ensino: um estudo com docentes de ciências contábeis.** Revista Fsa, vol. 20, no. 11, 2023.

MARTINEZ, Isabella Guedes; DOS SANTOS, Elias Batista. **Ensino de ciências por investigação e aulas de acompanhamento pedagógico: análise do processo de aprendizagem de um grupo de estudantes do ensino fundamental.** Brazilian Applied Science Review, v. 3, n. 3, 2019.

MARTINY, Luis, et al. **“O que eu transformaria? muita coisa!”: os saberes e os não saberes docentes presentes nas práticas de ensino/estágio supervisionado em educação física.** Journal of Physical Education, vol. 22, 2011.

MIAO, Feng, et al. **Application of diversified teaching strategies in the intelligent physical education platform: enhancing course interactivity and engagement.** International Journal of Education and Humanities, vol. 10, 2023.

MORAES, Fátima, et al. **Saberes docentes e formação em saúde: uma revisão da literatura.** Cadernos Saúde Coletiva, vol. 28, 2020.

MORGADO, Augusto C; CARVALHO, Paulo C. P. Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

MOYO, Grate, et al. **Exploring accounting lecturers’ use of feedback as a teaching practice: a case of a south african university.** International Journal of Research in Business and Social Science (2147-4478), vol. 12, 2023.

NÓVOA, António. **Conhecimento profissional docente e formação de professores.** Revista Brasileira de Educação, v. 27, 2022.

OLIVEIRA, Breynner Ricardo de. **A implementação de políticas educacionais no nível micro: uma análise a partir dos profissionais da escola no contexto da prática.** 2019.

PEDROSO, A. H. **Uma breve história da equação do 2º grau.** Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf. Revista Eletrônica de Matemática, nº 02, 2010.Acesso em: 15 de dez 2024.

PEREIRA, E. C.; SANTOS, A. S.; **Uma abordagem sobre equações do 2º grau.** Multidebates, Palmas – TO. v. 4, n. 4, out 2020.

PIMENTA, Selma, et al. **Formação de professores - saberes da docência e identidade do professor.** Nuances Estudos Sobre Educação, vol. 3, 2009.

POPOYA, A.M., et al. **Teacher professional development around the world: the gap between evidence and practice.** The World Bank Research Observer, vol. 37, 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Editora Zahar, 2012.

SIEBEL, Anna, et al. **Metodologias ativas na área de ciências da natureza e suas tecnologias.** Revista Pedagógica, vol. 24, 2021.

SILVA, T. B. da. **Aritmética e Frações do Egito Antigo.** Dissertação de Graduação, Universidade Federal de São Carlos, jul. 2013.

TANES, Talita, et al. **Iniciação à docência: importância da construção de saberes relacionados à prática docente.** Revista Contexto & Educação, vol. 37, 2022.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

APÊNDICE A – MÉTODO DE BHASKARA

Quando uma equação do segundo grau é completa, usamos a Fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes da equação: **$ax^2 + bx + c = 0$.**

A fórmula é apresentada abaixo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \bullet a}$$

Fórmula de Delta

Na fórmula de Bhaskara, aparece a letra grega **Δ (delta)**, chamada discriminante da equação, pois conforme o seu valor é possível saber qual o número de raízes (soluções) que a equação terá. Para determinar o delta usamos a seguinte fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4 \bullet a \bullet c$$

Passo a Passo

Para resolver uma equação do 2º grau, usando a fórmula de Bhaskara, devemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Identificar os coeficientes **a**, **b** e **c**: Nem sempre os termos da equação aparecem na mesma ordem, portanto, é importante saber identificar os coeficientes, independente da sequência em que estão. O coeficiente **a** é o número que está junto ao x^2, o **b** é o número que acompanha o **x** e o **c** é o termo independente, ou seja, o número que aparece sem o x.

2º Passo: Calcular o delta: Para calcular as raízes é necessário conhecer o valor do delta. Para isso, substituímos as letras na fórmula pelos valores dos coeficientes.

3º Passo: Calcular as raízes: Devemos substituir todas as letras pelos seus valores na fórmula de Bhaskara e calcular as raízes.

Exemplo

Determine as raízes da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$

Solução: Para resolver, primeiro devemos identificar os coeficientes, assim temos: a = 1; b = - 2; c = - 3.

Devemos tomar cuidado com as regras de sinais e lembrar que primeiro devemos resolver a potenciação e a multiplicação e depois a soma e a subtração.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-3) = 4 + 12 = 16$$

Assim, devemos resolver a fórmula de Bhaskara duas vezes. Temos então:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \bullet 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \bullet 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Atividade

1) Resolva as equações do 2º grau, utilizando o método de Bhaskara:
   a) $x^2 - 7x + 6 = 0$
   b) $x^2 - 4x - 5 = 0$
   c) $x^2 - 9x + 8 = 0$
   d) $x^2 - 6x + 5 = 0$
   e) $x^2 - 4x + 3 = 0$
   f) $x^2 + 3x + 2 = 0$
   g) $x^2 + 8x + 15 = 0$
   h) $x^2 + 3x - 10 = 0$
   i) $x^2 + 4x - 5 = 0$
   j) $x^2 + x - 6 = 0$

APÊNDICE B – Método Quadrático (método do ponto médio ou método de Po-Shen Loh)

Para utilizarmos o método Quadrático, usaremos a equação do segundo grau modificada:

$$x^2 + Sx + P = 0,$$

onde $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 \bullet x_x = \frac{c}{a}$.

Por Bhaskara, as raízes da equação quadrática são:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b - 4ac^2$. O ponto médio das raízes é:

$$M = (x_1 + x_2|2,\ 0) = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\middle|2,\ 0\right) = \left(-{}^{b}/_{a}\middle|2,\ 0\right),$$

Como a distância do ponto médio até as raízes são iguais, podemos reescrever as raízes da seguinte maneira:

$$x_1 = -({}^{b}/_{a})/2 + \text{u e } x_2 = -({}^{b}/_{a})/2 - \text{u}$$

para encontrar o valor dessa distância, utilizaremos o produto das raízes:

$$P = x_1 \bullet x_x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \bullet \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

logo:

$$((-{}^{b}/_{a})/2 + \text{u}) \bullet ((-{}^{b}/_{a})/2 - \text{u}) = = ({}^{b^2}/_{a^2})/4 - u^2 = \frac{c}{a}$$

ou seja:

$$u = \sqrt{\frac{b^2/a^2}{4} - \frac{c}{a}}$$

Passo a Passo

Para resolver uma equação do 2º grau, usando o método Quadrático, devemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Calcule a abcissa do ponto médio, $x_m = \frac{S}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-{}^{b}/_{a}}{2}$;

2º Passo: Escreva as raízes como $x_1 = (-{}^{b}/_{a})/2 + \text{u}$ e $x_2 = (-{}^{b}/_{a})/2 - \text{u}$;

3º Passo: Calcule o valor da variável u e encontre as raízes.

Exemplo:
Determine as raízes da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$

Solução:

Para resolver, primeiro devemos identificar os coeficientes, assim temos: a = 1; b = - 2; c = - 3. **Temos, que:**

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

e

$$P = x_1 \cdot x_x = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3.$$

e

$$M = \left(\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1, 0)$$

Como a distância do ponto médio até as raízes são iguais, podemos reescrever as raízes da seguinte maneira:

$$x_1 = 1 + u \text{ e } x_2 = 1 - u$$

para encontrar o valor dessa distância, utilizaremos o produto das raízes:

$$P = x_1 \cdot x_x = \frac{c}{a} = -3$$

logo:

$$x_1 \cdot x_x = (1 + u) \cdot (1 - u) = 1 - u^2 = -3 = \frac{c}{a}$$

ou seja:

$$1 - u^2 = -3$$

$$-u^2 = -3 - 1$$

$$-u^2 = -4 \cdot (-1)$$

$$u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 2$$

Portanto

$$x_1 = 1 + 2 = 3$$

e

$$x_2 = 1 - 2 = -1$$

Atividade 2

1) Resolva as equações do 2º grau da Atividade 1, utilizando o método Quadrático (método do ponto médio ou método de Po-Shen Loh):

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO (ALUNOS)

1**.** Qual método você acha mais fácil de compreender?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Não sei/Não tenho opinião

2. Qual método você considera mais rápido para resolver equações do segundo grau?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Depende da equação
d. Não sei/Não tenho opinião

3. Em termos de precisão, qual método você acredita ser mais preciso na obtenção das raízes das equações?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Depende da equação
d. Não sei/Não tenho opinião

5. Qual método você prefere utilizar na prática?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Depende da situação
d. Não resolvo equações do segundo grau
e. Não sei/Não tenho opinião

6. Na sua opinião, qual método oferece uma compreensão mais profunda sobre as raízes da equação do segundo grau?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Ambos têm a mesma profundidade
d. Não sei/Não tenho opinião

7. Você encontrou alguma dificuldade significativa ao usar algum desses métodos? Se sim, qual?

a. Método de Po-Shen Loh
b. Fórmula de Bhaskara
c. Ambos apresentaram desafios
d. Não encontrei dificuldades relevantes
e. Não sei/Não tenho opinião

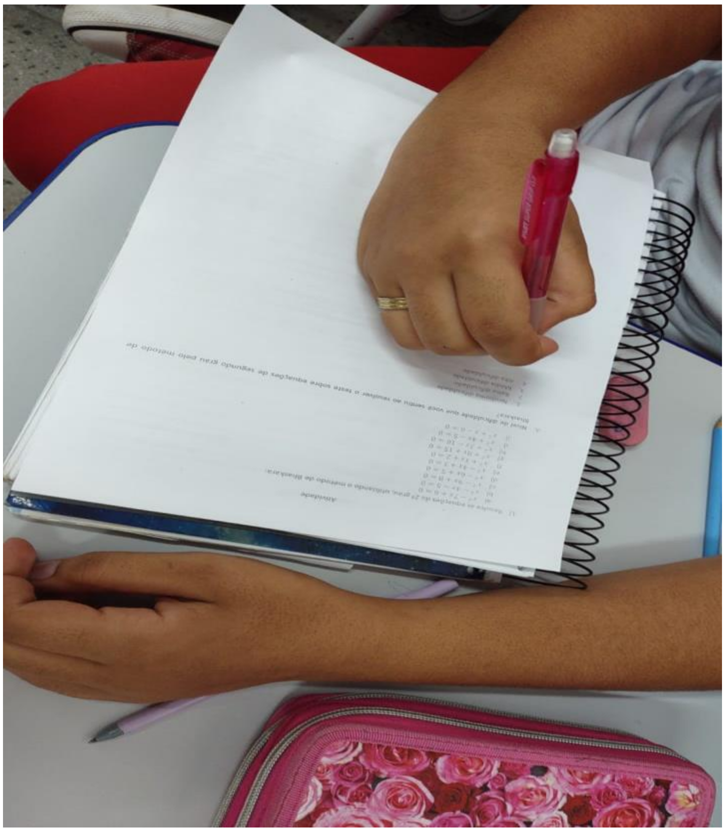
8. Você considera importante conhecer mais de um método para resolver equações do segundo grau?

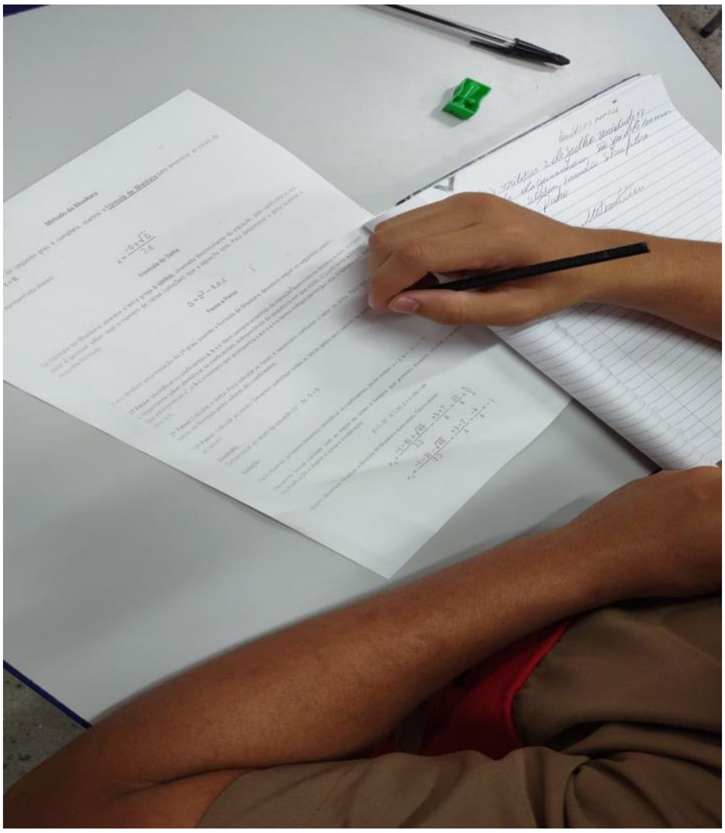
a. Sim, amplia a compreensão matemática
b. Não necessariamente, um método é suficiente
c. Não sei/Não tenho opinião

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO (PROFESSORES - PROFMAT)

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfjW1FEY4Ox23HG3KtJN2WfXIkItO5wWskLpt8WgQM4CfdaqA/closedform

ANEXO A – FOTOS DOS ALUNOS





ANEXO B – FOTOS DOS ALUNOS (RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES)

Equação da letra d:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = 36 - 20$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$

Equação da letra d.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$u = \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 5}$$

$$u = \sqrt{\frac{36}{4} - 5}$$

$$u = \sqrt{\frac{36-20}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \pm\frac{4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-(-6)}{2} + \frac{4}{2} = \frac{6}{2} + \frac{4}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$x_2 = \frac{-(-6)}{2} - \frac{4}{2} = \frac{6}{2} - \frac{4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Equação da letra d:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$S = \frac{-(-6)}{1} = 6$$

$$P = \frac{5}{1} = 5$$

$$M = \left(\frac{6}{2}, 0\right)$$

$$x_1 = \frac{6}{2} + u \text{ e } x_2 = \frac{6}{2} - u$$

$$\left(\frac{6}{2} + u\right) \cdot \left(\frac{6}{2} - u\right) = \frac{36}{4}$$

$$-u^2 = 5 - \frac{36}{4}$$

$$-u^2 = \frac{20 - 36}{4}$$

$$u^2 = \frac{16}{4}$$

$$u = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} + \frac{4}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6}{2} - \frac{4}{2} = 1.$$

ANEXO C – FOTOS DOS PROFESSORES - PROFMAT (RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES)