UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FELIPE NONATO DA SILVA

DEMONSTRAÇÕES PARA O DESAFIO GEOMÉTRICO DE JAKOB STEINER: ABORDAGENS PARA O ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2024

FELIPE NONATO DA SILVA

DEMONSTRAÇÕES PARA O DESAFIO GEOMÉTRICO DE JAKOB STEINER: ABORDAGENS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Erica Boizan Batista
Valdines Leite de Sousa Júnior

JUAZEIRO DO NORTE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S586d Silva, Felipe Nonato da.
Demonstrações para o desafio geométrico de Jakob Steiner: abordagens para o ensino médio / Felipe Nonato da Silva. - 2024.
62 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 42-44).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.

Orientadora: Profa. Dra. Erica Boizan Batista
Co-orientador: Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Júnior.

1. Pizza de Steiner. 2.Demonstrações matemáticas. 3. Aprendizagem Significativa-Matemática. I. Batista,Erica Boizan - orientadora. II.Sousa Júnior, Valdines Leite de - co-orientador. III. Título.

CDD 516

Bibliotecária: Maria Eliziana Pereira de Sousa – CRB 15/564

FELIPE NONATO DA SILVA

DEMONSTRAÇÕES PARA O DESAFIO GEOMÉTRICO DE JAKOB STEINER: ABORDAGENS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 23/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Erica Boizan Batista
CCT/UFCA

Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Júnior
CCT/UFCA

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
CCT/UFCA

Prof. Dr. Glauber Márcio Silveira Pereira
UNINASSAU

Dedico este trabalho, em especial, à minha querida mãe Darcy (in memoriam), que foi minha maior incentivadora, e que, com seu amor e cuidado, contribuiu para a minha formação humana e acadêmica.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu bondoso Deus, por tudo que me proporcionou, e que nos momentos mais difíceis me amparou.

A minha mãe Darcy (*in memoriam*), ao meu pai Franscico e ao meu irmão Fábio, que sempre acreditaram e me incentivaram a buscar e realizar meus sonhos.

A minha esposa Gabriela, pela paciência e compreensão durante todo o curso.

Um agradecimento aos meus colegas do PROFMAT, em especial, Daniele, Erivan, Márcio, Melque e Auxiliadora, pela amizade e por compartilharem comigo suas experiências, conhecimentos e amizade, que tornaram as aulas complexas, em momentos de extroversão. Sentirei saudades.

Agradeço aos meus orientadores Profª. Erica Boizan Batista e Profº. Valdines Leite de Sousa Júnior, por toda paciência, prestatividade e persistência. Não teria concluído este trabalho sem a copiosa ajuda da professora Erica, pelas sugestões, direcionamentos, apoio, correções e pela serenidade que teve comigo quando estive em falta. Muito obrigado.

Aos professores do PROFMAT, da Universidade Federal do Cariri (UFCA), que foram imprescindíveis para a minha formação durante o curso de mestrado.

Quero também expressar meu sentimento de gratidão às minhas ex-diretoras e amigas, Kátia Alves e Irmã Jozefa Alves Xavier, pelas oportunidades e contribuições em meu crescimento profissional.

Por fim, faço das palavras do Rei Salomão (2000), em Provérbios 16:3, as minhas: "Confia teus negócios ao Senhor e teus planos terão bom êxito".

RESUMO

Esta dissertação enfatiza a relevância do ensino de matemática no crescimento cognitivo e intelectual dos estudantes, com foco especial nas demonstrações como estratégia pedagógica no ensino básico. O objetivo principal é explorar essas demonstrações como uma estratégia pedagógica, visando enriquecer o ensino de matemática no ensino médio, impulsionar o desenvolvimento cognitivo e intelectual dos alunos e fomentar a aprendizagem significativa. Para isso, apresentamos algumas demonstrações do desafio geométrico proposto por Jakob Steiner, conhecido como "Pizza de Steiner". A abordagem visa não apenas transmitir conhecimentos, mas também compartilhar com os professores de matemática do ensino médio um material didático que possa ser utilizado para estimular um processo de aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Pizza de Steiner. Demonstrações matemáticas. Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

This dissertation emphasizes the relevance of teaching mathematics in the cognitive and intellectual growth of students, with a special focus on demonstrations as a pedagogical strategy in basic education. The main objective is to explore these demonstrations as a pedagogical strategy, aiming to enrich mathematics teaching in high school, boost students' cognitive and intellectual development and encourage meaningful learning. To this end, we present some demonstrations of the geometric challenge proposed by Jakob Steiner, known as "Steiner's Pizza". The approach aims not only to transmit knowledge, but also to share with high school mathematics teachers teaching material that can be used to stimulate a meaningful learning process.

Keywords: Steiner's Pizza. Mathematical proofs. Meaningful Learning.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1. Introdução

A partir de uma inquietação, quando surge uma situação problema ou algo desconhecido na matemática, surge então o interesse de investigar aquele fato desconhecido, com intuito de obter relações com objetos já conhecidos e novos objetos matemáticos. Temos duas estratégias para o ensino-aprendizagem de matemática, que são através da resolução de problemas e das investigações matemáticas em sala de aula.

A investigação matemática, através das demonstrações, pouco utilizada pelos professores do ensino básico, pode ser utilizada como uma ferramenta de ensino, sendo um método diferente do ensino tradicional, que frequentemente se baseia na transmissão direta de conhecimentos e na prática de exercícios repetitivos, assim:

> as investigações matemáticas são uma opção para repensar o processo de ensino e aprendizagem e promover aulas mais interessantes para os alunos da Educação Básica. Envolver os alunos em atividades de investigação matemática possibilita que além de aprenderem matemática, possam sentir o prazer da descoberta. (JUCÁ E PIRONEL, 2022, p.03).

O papel crucial do ensino de matemática no desenvolvimento cognitivo e intelectual dos estudantes é indiscutível, sendo essencial para a construção de uma base sólida em raciocínio lógico e resolução de problemas. Nesse contexto, as demonstrações surgem como uma estratégia pedagógica de destaque, fazendo uso de um amplo repertório de teoremas, especialmente no âmbito do ensino básico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) fornecem diretrizes cruciais no contexto do ensino de Matemática na Educação Básica. Esses documentos salientam a importância das demonstrações, recomendando que, após a apresentação de teoremas, seja realizada uma exposição demonstrativa que estimule os alunos a compreenderem a construção do conhecimento. A ênfase recai sobre a valorização das deduções e das relações apropriadas entre o discurso teórico e sua aplicação prática.

Especificamente para o Ensino Médio (Brasil, 2006), os documentos destacam que os livros didáticos de Matemática devem abordar as demonstrações de maneira adaptada ao nível de ensino. Essa abordagem visa garantir que as demonstrações matemáticas sejam apresentadas de forma acessível e desafiadora, alinhadas às capacidades cognitivas dos estudantes nessa fase educacional.

Com base na observação de Pietropaolo (2005) sobre as práticas educacionais em relação às demonstrações matemáticas, ele afirma que o Brasil precisa progredir para se equiparar-se a países como Alemanha, França, Inglaterra e Portugal. Segundo ele, esses países destacam-se pela ênfase dada à exploração das demonstrações matemáticas em sala de aula, integrando-as de maneira mais abrangente em suas estruturas curriculares para a formação básica dos estudantes.

Segundo Silva e Júnior (2020), apesar das menções nos documentos oficiais, como prevê os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio no Brasil, as demonstrações ainda estão predominantemente restritas ao Ensino Superior. Este cenário aponta para uma lacuna na abordagem educacional brasileira, evidenciando a necessidade de uma mudança significativa para integrar de forma mais efetiva as demonstrações matemáticas desde as fases iniciais da Educação Básica.

Ao explorarmos o panorama abrangente do ensino básico, percebemos que as demonstrações vão muito além da simples repetição de conceitos já introduzidos. Elas se revelam como um meio dinâmico para revisitar e aprofundar a compreensão de teoremas, proporcionando aos estudantes uma visão mais ampla e refinada dos princípios matemáticos.

De acordo com Serralheiro (2007):

> Para os matemáticos, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas, muitas vezes, também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar outros resultados, afinal uma demonstração frequentemente pode conduzir a novos resultados. (SERRALHEIRO, 2007, p.33)

A autora afirma ainda que o trabalho com demonstrações em sala de aula faz-se necessário em vários momentos e por meio de recursos variados.

Caldato, Utsumi e Nasser (2017) também destacam a importância de preparar os futuros professores para incorporar a argumentação e a demonstração como recursos metodológicos em suas práticas de ensino. Essa abordagem, fundamentada na aplicação de um conjunto variado de ferramentas matemáticas, não apenas reforça os conceitos fundamentais, mas também aprimora a capacidade dos estudantes de aplicar o raciocínio lógico e a resolução de problemas de maneira mais refinada.

Diante desse cenário, surge o desafio de incorporar essas abordagens no ensino básico, promovendo um ambiente propício ao desenvolvimento cognitivo e intelectual dos estudantes. Este artigo propõe-se a explorar algumas das demonstrações do desafio geométrico apresentado por Jakob Steiner, que podem ser integradas às aulas de matemática como estratégia pedagógica, visando contribuir para o enriquecimento do ensino dessa disciplina no ensino médio.

Neste trabalho, adotaremos o método de investigação matemática através das demonstrações matemáticas, tomando como referência a Teoria da Aprendizagem Significativa que Ausubel defendeu em um dos seus livros, *Psicologia da educação,* *uma visão cognitiva* (Ausubel, 1968), onde as ideias expressas simbolicamente são relacionadas de forma não arbitrárias e substancial. Iremos explorar algumas demonstrações da Pizza de Steiner com abordagem para o Ensino Médio e algumas aplicações dos conceitos matemáticos envolvendo a Pizza de Steiner. Faremos também um estudo bibliográfico sobre a Aprendizagem Significava de Ausubel e como as demonstrações podem ser aplicadas para promover a aprendizagem significativa, seguidas da apresentação do problema da divisão do plano proposto por Steiner. Além disso, este estudo busca explorar como as demonstrações matemáticas envolvendo indução matemática, sequências matemáticas e o princípio da contagem, podem ser integradas ao currículo escolar, para que promovam uma aprendizagem significativa. Posteriormente, será feita uma expansão do problema proposto por Steiner para o espaço tridimensional, comparando-o a um enorme queijo e será apresentada uma proposta de sequência didática na perspectiva da aprendizagem significativa.

2. Referencial Teórico

A investigação matemática na visão de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), é dada como a descoberta de relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar suas respectivas propriedades ou relações que são desenvolvidas em torno de qualquer problema proveniente da matemática, buscando sua resolução mesmo sem solucioná-lo. Essa abordagem enfatiza a descoberta e a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, incentivando os alunos a formular hipóteses, testar conjecturas e desenvolver argumentos matemáticos de maneira crítica.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental referenciam o processo investigativo e o processo de resolução de problemas ao citar que o ensino de Matemática tem como objetivo levar o aluno a

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 47).

Observa-se que as tarefas de investigação necessitam que os alunos se envolvam para a resolução, e que os alunos podem chegar na solução de diversas formas, conforme o interesse e o caminho adotado por eles, gerando diversas conclusões acerca do problema investigado.

A resolução de problemas, por outro lado, é uma metodologia que foca na aplicação de conhecimentos matemáticos para encontrar soluções para questões específicas. Polya (1945), um dos principais teóricos da resolução de problemas, define essa abordagem como um processo sistemático que envolve compreender o problema, desenvolver um plano, executar o plano e revisar a solução. Ele ainda enfatiza que a resolução de problemas é um meio essencial de desenvolver a capacidade de pensar logicamente e de aplicar o conhecimento matemático.

Enquanto a investigação matemática é mais aberta e exploratória, a resolução de problemas tende a ser mais estruturada e direcionada, onde envolve a aplicação de estratégias e técnicas conhecidas para resolver problemas específicos, ajudando os alunos a desenvolver habilidades práticas e aplicáveis em diversas situações.

O conceito de demonstração abrange uma ampla gama de perspectivas, desde provas rigorosas e formalidades até argumentações elucidativas de fatos específicos. No âmbito matemático, a demonstração desempenha um papel crucial na consolidação do aprendizado e no desenvolvimento das habilidades cognitivas dos estudantes. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), o ensino de matemática no ensino médio vai além das demonstrações formais, buscando explorar diversas estratégias que promovam o pensamento crítico e a capacidade de generalização.

Roratto, Nogueira e Kato (2011) ressaltam que se o conhecimento for apresentado com abstração e formalismo, os alunos terão dificuldades em relacionar o conhecimento novo com o conhecimento prévio, sendo que existe uma distância no percurso entre a intuição e sua exposição final, formal e abstrata. Assim observa-se que abstração e formalismo não são imediatamente desenvolvidos pelos alunos.

A Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel (2000) destaca a importância da aprendizagem significativa, definida como um processo cognitivo que emerge da atribuição de significados psicológicos pelo aprendiz ao confrontar o significado lógico do material de ensino. Esse processo envolve a interação substancial e não-arbitrária do novo conhecimento com conhecimentos prévios, enriquecendo e tornando-os mais elaborados. A abordagem de conteúdos matemáticos por meio de demonstrações, portanto, não deve ser percebida apenas como uma transmissão de informações, mas como um processo dinâmico que promove a participação ativa dos estudantes e a construção significativa do conhecimento.

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (MOREIRA, 2012, p. 2)

Segundo Tall (1989), a habilidade de “demonstrar” está intrinsecamente ligada à competência cognitiva de recuperar experiências, ideias e conhecimentos ao longo da vida, visando alcançar e validar um resultado. Esse processo representa a construção do conhecimento, desde a formação inicial de conceitos na estrutura cognitiva até a habilidade de aplicar esses conceitos em diversas situações de aprendizado.

Seguindo essa mesma linha temos que, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), a matemática do ensino médio deve capitalizar o potencial já adquirido pelos estudantes, estimulando processos de reflexão e abstração. Isso proporciona uma sólida estrutura para a construção do conhecimento de forma criativa, analítica, indutiva e dedutiva, permitindo a expressão de generalizações decorrentes da resolução de problemas.

A ênfase na recuperação de conhecimentos prévios, defendida por Tall, alinha-se à visão da BNCC de que o aprendizado da matemática deve se basear nos saberes prévios dos alunos, construídos ao longo de sua trajetória escolar. Essa perspectiva contrasta com o ensino tradicional, que frequentemente ignora os conhecimentos prévios dos alunos, dificultando a construção de uma aprendizagem significativa.

> O papel da demonstração, em um currículo de Matemática, vai além da concepção formalista de partir de axiomas e hipóteses e, por intermédio de técnicas, apresentar a prova de uma tese. A demonstração também implica convencimento, comunicar-se matematicamente de maneira adequada, saber até onde a intuição falha e quando e mesma intuição pode servir como estímulo para a proposição de conjecturas. (SILVA; PIRES, 2012, p.25)

Assim, a utilização de demonstrações na matemática do ensino médio deve transcender a mera apresentação de fórmulas e procedimentos. É essencial estimular os estudantes a compreenderem a lógica subjacente, incentivando a construção de argumentações sólidas para embasar suas conclusões. Ao participarem de demonstrações, os alunos devem não apenas validar conhecimentos consolidados, mas também aprimorar suas habilidades de raciocínio crítico, desenvolvendo a capacidade de aplicar conceitos matemáticos de forma original.

Nesse contexto, a exposição a diferentes estratégias de demonstração desafia os estudantes a aprimorarem suas habilidades de raciocínio. Métodos indutivos, dedutivos, analíticos e criativos exigem diferentes formas de pensamento, promovendo o desenvolvimento abrangente das capacidades cognitivas. Além disso, abordagens diversas podem incluir exemplos práticos e aplicações do mundo real, tornando as demonstrações mais tangíveis e relevantes para os estudantes.

Ao incorporar métodos que exploram a interconexão entre diferentes áreas da matemática e promovem a autonomia intelectual, a demonstração matemática se transforma em uma ferramenta poderosa na formação de indivíduos capazes de enfrentar desafios complexos e de aplicar conceitos matemáticos de maneira inovadora em diversos contextos.

Parateli (2005) afirma sobre a importância de, antes de formalizar com demonstrações, propor situações que permitam que o aluno, por si só, estabeleça relações e propriedades matemáticas. À medida que o aluno progride na generalização do pensamento matemático, o conhecimento se constrói, até chegar ao raciocínio lógico e dedutivo, como se espera. Assim, é preciso avaliar as condições iniciais em que o aluno se encontra, para que haja uma melhor compreensão do objeto de estudo.

Segundo Silva e Júnior (2020), sobre o uso das demonstrações matemáticas no Ensino Médio, há relatos de dificuldades relacionadas a esse tipo de atividade, seja pela grande exigência da capacidade de argumentação e linguagem própria, ou pelo fato de ser raramente usada pelos docentes em sala de aula. E ainda observaram que há alunos que ingressaram no Ensino Médio sem nunca terem visto uma demonstração matemática no Ensino Fundamental.

Silva e Júnior (2020) diz que na apresentação das demonstrações matemáticas feitas em sala de aula, alunos:

> [...] afirmam não entender bem os processos utilizados nas demonstrações, mas que, no entanto, gostam de ver o processo argumentativo, também vemos apontamentos de que esse processo os ajuda a obter uma melhor compreensão do conteúdo estudado. (SILVA; JÚNIOR, 2020, p.10)

Isso nos permite concluir a importância do uso das demonstrações matemáticas nas aulas como ferramenta para o desenvolvimento cognitivo do aluno, podendo ser apresentadas, conforme o que diz Ibañes e Ortega (1997, p. 01, apud Crespo, 2004), "a demonstração na aula de matemática apresenta uma grande diversidade de formas, e aparece em diferentes níveis educacionais através de vários tipos de argumentos", e que também é possível envolver as demonstrações matemáticas nas abordagens pedagógicas na Educação Básica.

O método que o professor poderá utilizar em sala de aula para desenvolver no aluno a capacidade de argumentação é através da sequência didática, que, segundo Maroquio, Paiva e Fonseca (2015), as sequências didáticas podem ser utilizadas como ferramenta pedagógica da formação, na qual o professor busca uma forma de desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo na perspectiva de reflexão e mediação, na expectativa de construir o conhecimento compartilhado, coletivo e colaborativamente.

> O uso da sequência didática, como recurso pedagógico, permite um novo olhar sobre a organização curricular, com ênfase no ensino pautado em investigação, por meio de condições reais do cotidiano, partindo de problematizações que levem o aluno a conferir o seu conhecimento prévio com o conhecimento apresentado no espaço de aprendizagem, levando-o a se apropriar de novos significados, novos métodos de investigação e a produzir novos produtos e processos.(MAROQUIO, 2021, p.04).

3. O Problema da Divisão do Plano

Jakob Steiner, nascido em Utzenstorf, Cantão de Berna, Suíça, em 18 de março de 1796, e falecido em 1 de abril de 1863, enfrentou desafios educacionais significativos, aprendendo a escrever somente após os quatorze anos. Em 1814, ingressou na escola de Johann Heinrich Pestalozzi, em Yverdon, onde não só estudou, mas também se tornou professor. Steiner atribuiu a Pestalozzi a inspiração para suas ideias. (STEINER, 2018)

Dentre várias publicações de trabalhos e contribuições em diversas áreas, com ênfase na pesquisa da geometria, Steiner contribuiu com sessenta e dois artigos junto à Fundação de Crelle, na Revista de Matemática Pura e Aplicada, onde publicou no primeiro volume do diário, que:

> Um plano é dividido em duas partes por uma linha reta dentro dele; por uma segunda linha reta que cruza a primeira, o número de partes do plano é aumentado em 2; por uma terceira linha reta que cruza as duas primeiras linhas em dois pontos, o número é aumentado em 3; e assim por diante. Ou seja, cada linha reta sucessiva aumenta o número de partes pelo número de partes em que foi dividida pelas linhas retas anteriores. Portanto, um plano é dividido por n linhas retas arbitrárias em no máximo $2 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (n - 1) + n$ partes. (STEINER, 1826, p.351).

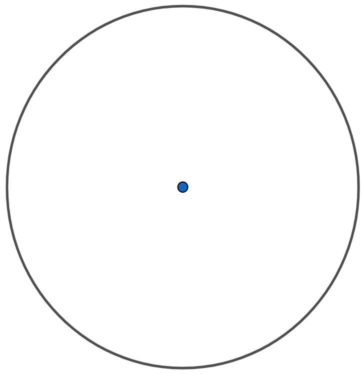
Reconhecido como o maior geométrico puro desde Apolônio de Perga, Steiner destacou-se por sua abordagem generalista, rigor nas demonstrações e amplo domínio de recursos. Um dos problemas intrigantes proposto por Steiner (1826) foi: "Qual é o maior número de partes em que se pode dividir um plano com n cortes retos?"

Este problema é notável pela sua versatilidade em termos de abordagem pedagógica. Sua formulação simples e intuitiva torna-o acessível aos estudantes do ensino médio. Além disso, a variedade de métodos para abordar e resolver esse problema oferece uma excelente oportunidade para explorar diferentes ferramentas matemáticas. Desde a representação gráfica, passando pela aplicação de conceitos geométricos básicos até a utilização de conceitos como Indução Finita, Análise Combinatória e Sequências Matemáticas, os alunos têm a chance de desenvolver habilidades em diversas áreas da matemática.

Imaginando o plano como uma pizza circular, podemos reformular este problema como o de encontrar o maior número de partes em que n, $n \in \mathbb{N}$ cortes retilíneos divide uma pizza grande e fina, conhecido como Pizza de Steiner. Essa abordagem torna a questão mais acessível para visualização, estimulando a exploração por meio de tentativas, experimentos, conjecturas e a correção de erros, facilitando a compreensão do problema de maneira prática e interativa.

Com nenhum corte é fácil ver que teremos apenas um pedaço, conforme mostra a Figura 3.1.

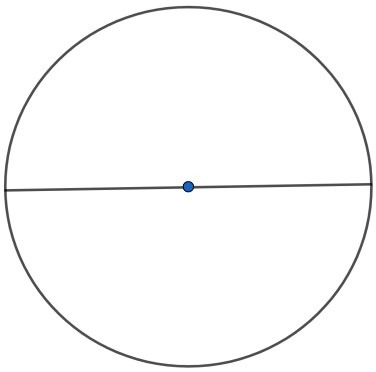
Figura 3.1: Pizza sem corte.



Fonte: Próprio autor.

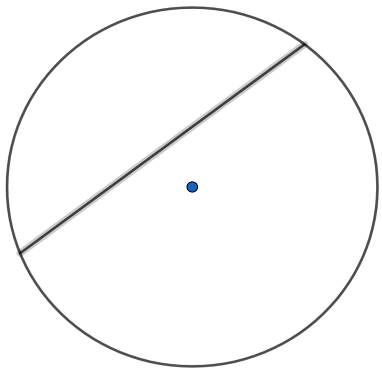
Agora, fazendo um único corte reto, teremos dois pedaços, independente do corte passar no centro da pizza ou não, como em Figura 3.2 e Figura 3.3.

Figura 3.2: Pizza com um corte reto central.



Fonte: Próprio autor.

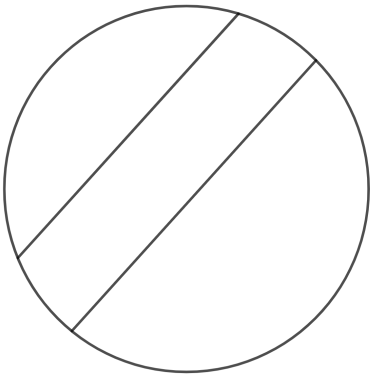
Figura 3.3: Pizza com um corte qualquer.



Fonte: Próprio autor.

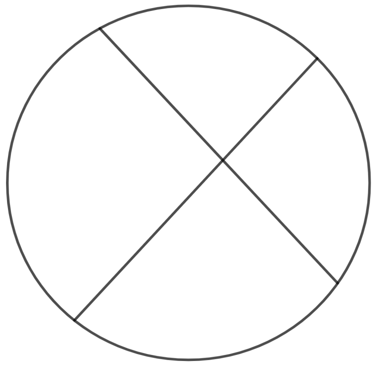
De forma análoga, fazendo agora dois cortes retos na pizza circular, se os cortes forem paralelos, obteremos apenas três pedaços, mas se os cortes forem concorrentes, obteremos quatro pedaços.

Figura 3.4: Pizza com dois cortes retos paralelos.



Fonte: Próprio autor.

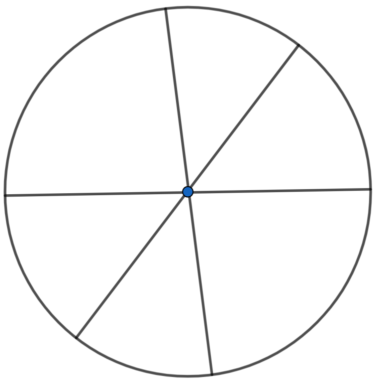
Figura 3.5: Pizza com dois cortes retos concorrentes.



Fonte: Próprio autor.

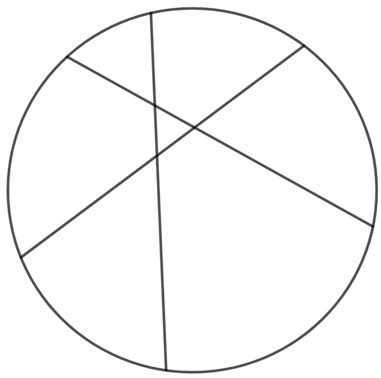
Vamos fazer três cortes na pizza circular. Observe que, se os cortes passarem pelo ponto de interseção entre os três cortes, obtemos seis pedaços, porém, não é o número máximo de pedaços que pode ser obtido. Deslocando um dos cortes, obteremos sete pedaços, que será o número máximo de pedaços obtidos com três cortes, como observado nas Figuras 3.6 e 3.7.

Figura 3.6: Pizza com três cortes que se intersectam num único ponto.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.7: Pizza com três cortes que se intersectam dois a dois.



Fonte: Próprio autor.

Fazendo os cortes de forma conveniente, ou seja, de modo que cada corte reto intersecte os cortes feitos anteriormente, mas que não existam pares de retas paralelas e não haja três ou mais retas concorrendo num mesmo ponto, isto é, que as retas estejam em posição geral, obteremos o número máximo de pedaços. A ideia principal do cortador de pizza de Steiner é maximizar o número de pedaços, sem levar em conta a forma e o tamanho. Assim, o número máximo de pedaços para os casos com quatro cortes e cinco cortes retos será de onze e dezesseis pedaços, respectivamente.

Na próxima seção, apresentaremos algumas demonstrações para o problema da Pizza de Steiner.

4. Demonstrações do Desafio de Steiner

A seção anterior evidencia a natureza versátil e multifacetada deste problema matemático, cuja formulação direta possibilita uma gama diversificada de abordagens e métodos de resolução. Esta característica singular torna-o uma oportunidade ímpar para a exploração e aplicação de diversas ferramentas matemáticas. A adoção de uma abordagem visual, por meio da analogia do plano como uma pizza circular, conhecida como "Pizza de Steiner", emerge como uma estratégia pedagógica eficaz. Através dessa representação visual, almeja-se proporcionar aos estudantes uma compreensão mais concreta e intuitiva do problema em análise. Ao conceber o plano como uma pizza, os alunos são incentivados a empregar conceitos matemáticos, tais como ângulos, áreas e proporções, de maneira mais acessível e envolvente.

Particularmente relevante neste contexto é o aspecto que destaca a variedade de demonstrações alternativas deste problema geométrico, que enriquecem significativamente a experiência de aprendizado. Algumas dessas demonstrações exploram propriedades específicas da geometria, fazendo uso de teoremas e conceitos que ampliam a compreensão do processo de subdivisão do plano. Outras abordagens, por sua vez, empregam técnicas mais abstratas, como é o caso da sequência matemática, oferecendo perspectivas distintas para a resolução do desafio proposto por Steiner. Nas seções subsequentes, serão apresentadas algumas dessas demonstrações, visando não apenas ilustrar a riqueza e a profundidade desse problema matemático, mas também fornecer uma análise progressiva, organizada em ordem crescente de abstração.

4.1 Demonstração usando Sequências Matemáticas

No contexto do ensino médio, os estudantes podem ser introduzidos por meio de sequências numéricas e padrões matemáticos recorrentes. Explorar esse tema permite que os alunos adquiram habilidades essenciais de raciocínio indutivo, dedutivo e de resolução de problemas. Além disso, sequências numéricas são fundamentais em diversas áreas, como ciência da computação, física e economia, proporcionando uma ponte entre a matemática do ensino médio e sua aplicação prática. Ao compreender a lógica subjacente às sequências numéricas, os alunos desenvolvem habilidades analíticas cruciais que são valiosas tanto para o sucesso acadêmico quanto para a resolução de problemas do mundo real.

Nesta seção abordaremos a demonstração da divisão da pizza, de acordo com Steiner (1965, p.283) utilizando sequências numéricas, onde encontraremos uma fórmula fechada, que permita calcular o número de regiões P_n em função do número de cortes n, e não de um termo anterior P_{n-1}.
Considere n como o número de cortes e P_n o número máximo de pedaços obtidos, conforme a tabela abaixo.

Tabela 4.1: Número de pedaços da Pizza.

Número de cortes	0	1	2	3	4	5	...	n
Número de pedaços	1	1+1	2+2	4+3	7+4	11+5	...	$P_{n-1}+n$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Note que o número de pedaços obtidos é dado pela sequência definida pela relação de recorrência $P_n = P_{n-1} + n$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e condição inicial $P_0 = 1$, assim teremos que:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 1, \\ P_2 &= P_1 + 2, \\ P_3 &= P_2 + 3, \\ P_4 &= P_3 + 4, \\ P_5 &= P_4 + 5, \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 + (1 + 2 + 3 + ... + n), \\ P_n &= 1 + \frac{(1+n)n}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a expressão $P_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, determina o número máximo de pedaços obtidos com n cortes retos de uma pizza circular.

4.2 Demonstração por Indução Matemática

O princípio de indução matemática assume uma relevância crucial no contexto do ensino médio, representando uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e da habilidade de resolução de problemas. Ao compreender e aplicar esse princípio, os estudantes adquirem uma abordagem sistemática para abordar padrões e regularidades em sequências matemáticas, além de desenvolverem a capacidade de generalização.

Essa habilidade não apenas fortalece a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também estabelece as bases para a resolução eficiente de problemas mais complexos. Além disso, o princípio de indução matemática desempenha um papel significativo em diversas áreas da matemática, proporcionando aos estudantes uma ferramenta valiosa para a prova de afirmações universais envolvendo os números naturais. Incorporar o ensino desse princípio no currículo do ensino médio não apenas enriquece a experiência matemática dos alunos, mas também os prepara para enfrentar desafios intelectuais mais avançados, cultivando uma abordagem analítica e lógica que se estende para além do ambiente acadêmico.

Podemos citar neste trabalho o último dos axiomas de Peano, que é conhecido como o axioma da indução matemática. Ele é a base de uma das técnicas mais poderosas de demonstração de proposições em Matemática.

Lima (2013) enuncia o axioma de indução no livro de *Números e Funções Reais*, da Coleção PROFMAT, da seguinte forma

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

1. $P(1)$ é válida;

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

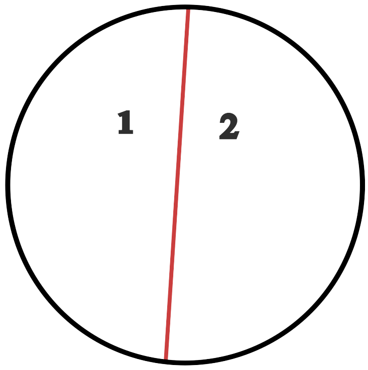
Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Agora, vamos abordar alguns casos da divisão do plano por n retas, e em seguida, a demonstração do número de regiões $P(n)$ obtidas com n cortes retos utilizando princípio de indução matemática, conforme Berman e Fryer (1972).

Com um corte reto na pizza ($n = 1$) é fácil ver que obteremos obteremos dois pedaços. Ou seja

$$P(1) \quad = \quad P(0) + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ regiões.}$$

Figura 4.1: Pizza com um corte reto.



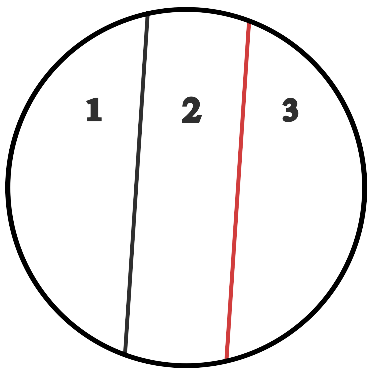
Fonte: Próprio autor.

Nas seções subsequentes, serão apresentadas algumas dessas demonstrações, visando não apenas ilustrar a riqueza e a profundidade desse problema matemático, mas também fornecer uma análise progressiva, organizada em ordem crescente de abstração.

Vamos aplicar o segundo corte reto (na cor vinho), teremos dois casos.

1º caso: Se os dois cortes forem paralelos, teremos 3 pedaços da pizza.

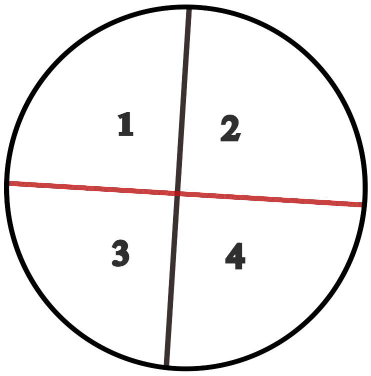
Figura 4.2: Pizza com dois cortes retos paralelos.



Fonte: Próprio autor.

2º caso: Se os dois cortes forem concorrentes, teremos 4 pedaços da pizza.

Figura 4.3: Pizza com dois cortes retos concorrentes.



Fonte: Próprio autor.

Logo, o número máximo de pedaços que podemos dividir uma pizza com dois cortes retos ($n = 2$) é 4. Então

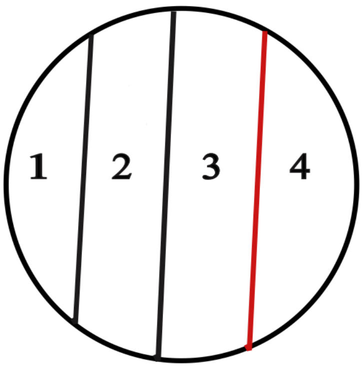
$$P(2) \quad = \quad P(1) + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ regiões.}$$

Observe que o segundo corte, que cruzou o primeiro, gerou mais duas novas regiões (3 e 4).

Para o terceiro corte (na cor vinho), teremos várias situações.

1º caso: Se os três cortes retos forem paralelos, teremos apenas 4 pedaços da pizza.

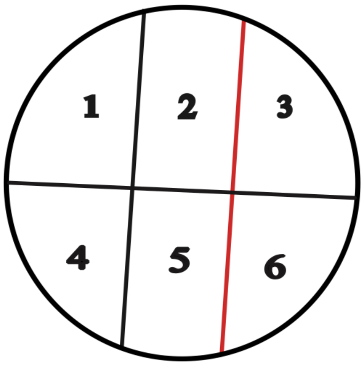
Figura 4.4: Pizza com três cortes paralelos.



Fonte: Próprio autor.

2º caso: Se dois cortes forem paralelos e um transversal, teremos apenas 6 pedaços da pizza.

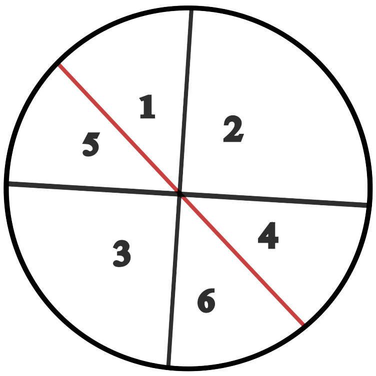
Figura 4.5: Pizza com dois cortes paralelos e um transversal.



Fonte: Próprio autor.

3º caso: Se os três cortes retos concorrem em um mesmo ponto, teremos 6 pedaços da pizza.

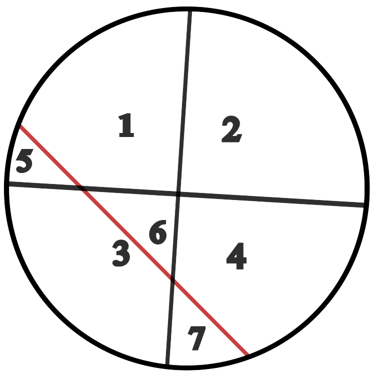
Figura 4.6: Pizza com três cortes que se cruzam num mesmo ponto.



Fonte: Próprio autor.

4º caso: Se os três cortes retos concorrem dois a dois, teremos 7 pedaços.

Figura 4.7: Pizza com três cortes concorrendo dois a dois.



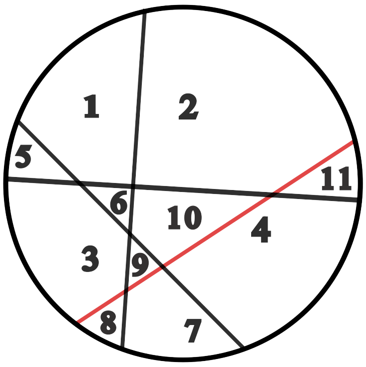
Fonte: Próprio autor.

Veja que, no 4^{o} caso da pizza com três cortes retos ($n = 3$), o novo corte passou por três regiões (1, 3 e 4) duplicando-as. Assim, obtemos mais 3 novas regiões (5, 6 e 7), totalizando 7 regiões com três cortes retos.

$$P(3) \quad = \quad P(2) + 3 = 4 + 3 = 7 \text{ regiões.}$$

Fazendo mais um corte reto, ou seja, o quarto corte reto, que deverá cruzar os três cortes anteriores, teremos

Figura 4.8: Pizza com quatro cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

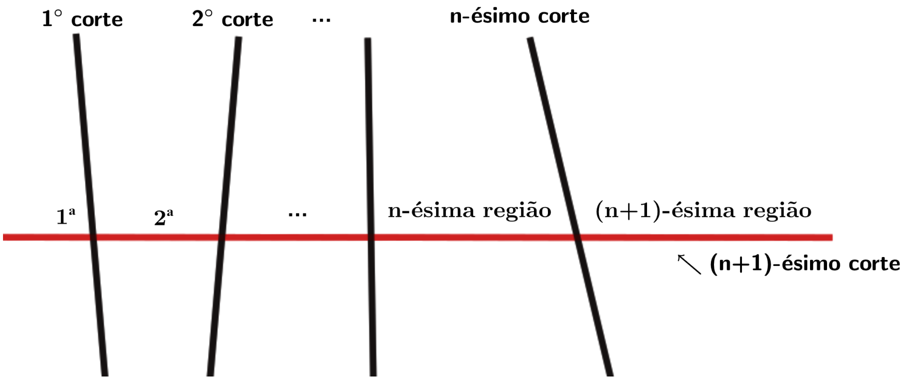
É possível observar que o quarto corte cruzou quatro regiões (2, 3, 4 e 7), duplicando-as. Logo, surgiram mais 4 novas regiões (8, 9, 10 e 11).

$$P(4) \quad = \quad P(3) + 4 = 7 + 4 = 11 \text{ regiões.}$$

Seguindo o padrão, verifica-se que para o $n - ésimo$ corte reto, aumenta-se mais n regiões às anteriores já existentes. Ou seja, para n cortes teremos
$P(n) = P(n-1) + n$ regiões.
Considerando que o $(n+1) - ésimo$ corte deverá cortar os n cortes feitos anteriormente, duplicando as $(n+1)$ regiões já existentes, assim

$$P(n+1) \quad = \quad P(n) + n + 1.$$

Figura 4.9: Pizza com $(n+1)$ cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

Usaremos indução matemática para verificar que a expressão obtida na seção anterior para o problema da Pizza de Steiner é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$P(n) \quad = \quad 1 + \frac{(1+n)n}{2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Seja n o número de cortes retos e $P(n)$ o número máximo de regiões.

Passo 1: Base da indução

Para $n = 1$, temos que

$$P(1) \quad = \quad 1 + \frac{(1+1)1}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Passo 2: Passo de indução

Daí a pizza terá duas fatias. Suponhamos que $P(n)$ vale para algum $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$P(n) \quad = \quad 1 + \frac{(1+n)n}{2}, n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Mostraremos que $P(n+1)$ é válida. Note que $P(n) = P(n-1) + n$.
Fazendo $(n+1)$ cortes, obteremos

$$P(n+1) \quad = \quad P(n) + n + 1. \tag{4.2}$$

Substituindo a equação (4.1) em (4.2), teremos

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= 1+\frac{(1+n)n}{2}+n+1 \\
&= 1+\frac{(1+n)n+2(n+1)}{2} \\
&= 1+\frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= 1+\frac{[1+(n+1)](n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo, isso nos mostra que $P(n+1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Demonstração usando o Princípio da Contagem

O princípio da contagem emerge como um alicerce fundamental no cenário do ensino médio, desempenhando um papel decisivo na formação das habilidades matemáticas dos estudantes. Ao internalizar e aplicar esse princípio, os alunos adquirem ferramentas cruciais para abordar desafios complexos relacionados à contagem e probabilidade. Essa habilidade de enumerar e estruturar possibilidades não apenas se revela imprescindível na matemática pura, mas também transcende para diversas áreas, abrangendo estatística, ciências naturais e ciências sociais. Adicionalmente, o princípio da contagem atua como um catalisador para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade analítica e da resolução de problemas, competências vitais não apenas no contexto acadêmico, mas também nas demandas cotidianas.

Iremos demonstrar o problema da divisão do plano com n cortes retos utilizando o princípio da contagem, conforme Pitombeira (1987).

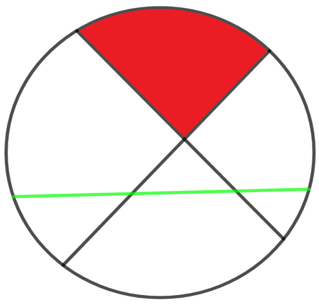
De acordo com a definição do livro *A Matemática do Ensino Médio*

> O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$. (LIMA et al., 1998, p.85).

Seja $P(n)$ o número máximo de regiões obtidas com n cortes retos, e considerando que os cortes estão em posição geral.

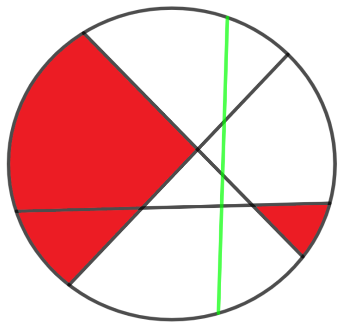
Observando os casos, a partir do terceiro corte, vê-se que o próximo corte (em verde) dividirá todas as regiões em duas, exceto as regiões (em vermelho) que correspondem às interseções das outras retas duas a duas.

Figura 4.10: Pizza com três cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.11: Pizza com quatro cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, duplicando as partes anteriores $P(n-1)$ e subtraindo o total de regiões não duplicadas com os cortes sucessivos, obteremos

$$\begin{aligned} P(3) &= 2P(2) - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7, \\ P(4) &= 2P(3) - (1+2) = 2 \cdot 7 - 3 = 11, \\ P(5) &= 2P(4) - (1+2+3) = 2 \cdot 11 - 6 = 16, \\ P(6) &= 2P(5) - (1+2+3+4) = 2 \cdot 16 - 10 = 22, \\ &\vdots \\ P(n) &= 2P(n-1) - [1+2+3+4+\cdots+(n-2)]. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

Observe que $1+2+3+4+\cdots+(n-2)$ é o número triangular T_n, $n \geq 3$, assim

$$T_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, n \geq 3. \qquad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) em (4.3), teremos

$$P(n) = 2P(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \qquad (4.5)$$

Observe ainda que T_n pode ser escrito como

$$T_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = C_{n-1}^2, n \geq 3.$$

Assim, o número de regiões obtidas em cada caso é igual ao dobro do número de regiões anteriores menos o total de combinações duas a duas dos cortes feitos anteriormente.

$$P(n) = 2P(n-1) - C_{n-1}^2, \text{com}\, n \in N \text{ e } n \geq 3. \qquad (4.6)$$

Retomando a equação (4.5), onde

$$P(n) \quad = \quad 2P(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Podemos reescrever $P(n-1)$ como sendo

$$P(n-1) \quad = \quad 1 + [1+2+3+\ldots+(n-1)] = 1 + \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (4.7)$$

Logo, substituindo a equação (4.7) em (4.5), temos que

$$P(n) \quad = \quad 2\left[1 + \frac{n(n-1)}{2}\right] - \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \qquad (4.8)$$

Manipulando a equação (4.8), obtemos

$$P(n) \quad = \quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \qquad (4.9)$$

Simplificando a equação anterior, observe que

$$1 + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad = \quad n.$$

Então

$$P(n) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (4.10)$$

Entretanto, podemos escrever a equação (4.10), onde o número máximo de partes $P(n)$ em que n retas em posição geral dividem o plano, usando combinação, e $1 = C_n^0$, $n = C_n^1$ e $\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$, assim

$$P(n) \quad = \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 1 + \frac{(1+n)n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

5. O problema da divisão do espaço

Para expandirmos o desafio original proposto por Jakob Steiner, imaginamos que o espaço tridimensional é um enorme queijo, vamos achar uma fórmula para determinarmos o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos.

A resposta para essa pergunta é dada por uma fórmula fechada (Steiner, 1965, p.283)

$$q_n = 1 + \frac{(n^2+5)n}{6}.$$

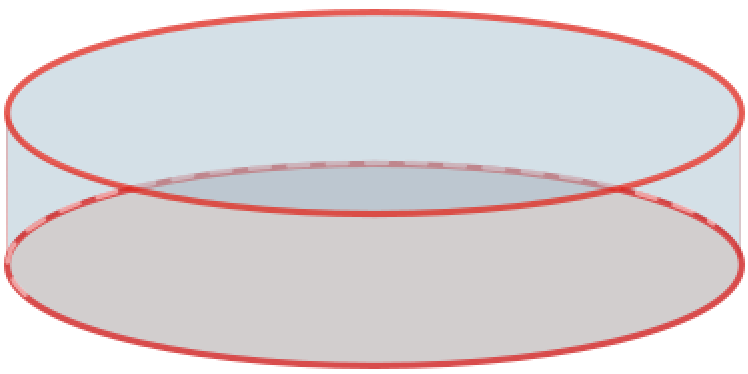
5.1 Demonstração por Sequências Matemáticas

Analogamente ao primeiro caso da seção anterior, podemos utilizar o conhecimento sobre sequências numéricas para determinarmos como n planos, em posição geral, dividem o espaço tridimensional. Dessa forma, vamos considerar que não haverá pares de planos paralelos, nem três ou mais planos que se intersectam segundo uma mesma reta.

Veja que para os casos iniciais $n = 0$, 1, 2 e 3 cortes planos, com algumas tentativas, é fácil observar o número máximo de pedaços, ou seja, $q_n = 1$, 2, 4 e 8 pedaços do queijo, respectivamente.

Para $n = 0$ corte plano, temos o queijo inteiro.

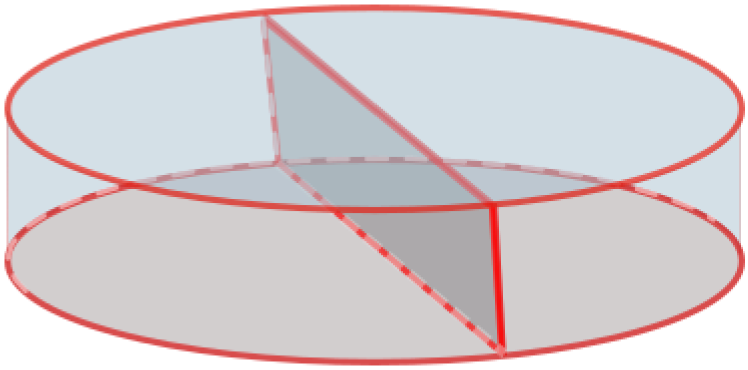
Figura 5.1: Queijo completo.



Fonte: Próprio autor.

Para $n = 1$ corte plano, obtemos dois pedaços do queijo.

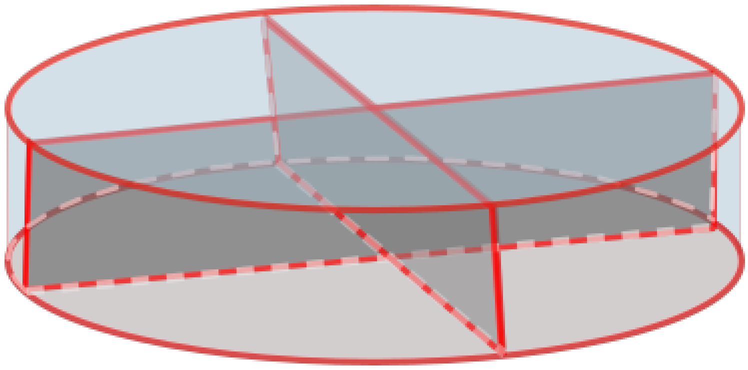
Figura 5.2: Queijo com um corte plano.



Fonte: Próprio autor.

Para $n = 2$ cortes planos, o queijo é dividido em quatro pedaços.

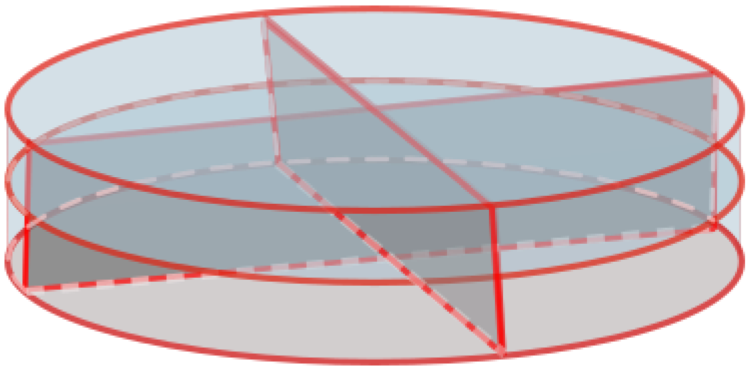
Figura 5.3: Queijo com dois cortes planos.



Fonte: Próprio autor.

Para $n = 3$ cortes planos, teremos oito pedaços.

Figura 5.4: Queijo com três cortes planos.



Fonte: Próprio autor.

De forma geral, para obtermos o número máximo de pedaços, devemos considerar que as interseções, três a três, de n cortes planos do queijo, seja apenas um ponto

distinto de todas as outras interseções.
No caso geral, a fórmula fechada para o número máximo de pedaços do queijo com n cortes planos pode ser obtida seguindo a linha de raciocínio de Cruz (2021).
Considere que $q_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_0 + 1 = 1 + 1 = 2, \\
q_2 &= q_1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4, \\
q_3 &= q_2 + 1 + 3 = 4 + 1 + (1 + 2) = 8, \\
q_4 &= q_3 + 1 + 6 = 8 + 1 + (1 + 2 + 3) = 15, \\
q_5 &= q_4 + 1 + 10 = 15 + 1 + (1 + 2 + 3 + 4) = 26, \\
&\vdots \\
q_n &= q_{n-1} + 1 + (1 + 2 + 3 + ... + (n-1)), \\
q_n &= q_{n-1} + 1 + \frac{(n-1)n}{2}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades acima e simplificando a equação, obtemos

$$\begin{aligned}
q_n &= q_0 + n + \left(1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{(n-1)n}{2}\right) \\
&= 1 + n + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{6 + 6n + n^3 - n}{6} \\
&= 1 + \frac{(n^2+5)n}{6}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos a fórmula para determinar o número máximo de pedaços do queijo de Steiner com n cortes planos.

5.2 Demonstração por Indução Matemática

Vamos demonstrar a validade da fórmula do Queijo de Steiner utilizando o princípio de indução matemática, baseando-nos em Steiner (2018).

$$q_n = 1 + \frac{(n^2+5)n}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

Passo 1: Base da indução

Para $n = 1$

$$q_1 = \frac{1^3 + 5 \cdot 1 + 6}{6} = \frac{1 + 5 + 6}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = 1$.

Passo 2: Passo de indução

Suponha que a fórmula é verdadeira para $n = k$. Ou seja, que

$$q_k \quad = \quad \frac{k^3 + 5k + 6}{6}.$$

Queremos mostrar que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$. Ou seja, precisamos demonstrar que

$$q_{k+1} \quad = \quad \frac{(k+1)^3 + 5(k+1) + 6}{6}.$$

Vamos começar a partir da suposição de que a fórmula é verdadeira para $n = k$, então

$$q_k \quad = \quad \frac{k^3 + 5k + 6}{6}.$$

Adicionando o $(k+1) - \textit{ésimo}$ corte plano, teremos $P(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$ novos pedaços do queijo, logo

$$q_{k+1} \quad = \quad q_k + \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

Substituindo q_k pela fórmula suposta

$$q_{k+1} \quad = \quad \frac{k^3 + 5k + 6}{6} + \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

Vamos encontrar um denominador comum para a soma

$$q_{k+1} \quad = \quad \frac{k^3 + 5k + 6 + 3k(k+1) + 6}{6}.$$

Simplificando a expressão no numerador

$$\begin{aligned}
q_{k+1} \quad &= \quad \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + (1+5) + 5k + 6}{6}, \\
q_{k+1} \quad &= \quad \frac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5 + 5k) + 6}{6}, \\
q_{k+1} \quad &= \quad \frac{(k+1)^3 + 5(k+1) + 6}{6}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução matemática, mostramos que a fórmula

$$q_n = \frac{n^3+5n+6}{6},$$

é válida para todos os n naturais.

5.3 Demonstração por Princípio da Contagem

Nesta seção, abordaremos a demonstração da fórmula do Queijo de Steiner, por Princípio da Contagem, análoga à Pitombeira (1987).

De forma análoga à seção 4.3, temos que, a partir do quarto corte plano, os novos cortes duplicarão os pedaços já existentes do queijo, exceto os pedaços que correspondem à interseção de todas as outras partes combinadas três a três.
Dessa forma, o número máximo de pedaços pedaços do queijo é igual ao dobro do número de partes anteriores diminuído da quantidade de combinações três a três dos cortes planos que já existiam, logo

$$\begin{aligned}
q_4 &= 2\cdot q_3 - C_3^3 = 2\cdot 8 - 1 = 15,\\
q_5 &= 2\cdot q_4 - C_4^3 = 2\cdot 15 - 4 = 26,\\
q_6 &= 2\cdot q_5 - C_5^3 = 2\cdot 26 - 10 = 42,\\
&\vdots\\
q_n &= 2\cdot q_{n-1} - C_{n-1}^3,\\
q_n &= 2\cdot q_{n-1} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!},\\
q_n &= 2\cdot q_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Observando a sequência $q_{n-1} = (8, 15, 26, 42, 64, ...)$, para $n \geq 4$, podemos reescrever cada termo na forma

$$\begin{aligned}
8 &= (1)+7,\\
15 &= (1+3)+11,\\
26 &= (1+3+6)+16,\\
42 &= (1+3+6+10)+22,\\
64 &= (1+3+6+10+15)+29,\\
&\vdots\\
q_{n-1} &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \left[1+\frac{(n-1)n}{2}\right], \text{ com } n\geq 4. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Veja que q_{n-1} é igual à soma dos n primeiros números triangulares adicionado com o

número de pedaços da *Pizza de Steiner*, onde $n \geq 4$.
Substituindo a equação (5.2) em (5.1), obtemos

$$\begin{aligned}
q_n &= 2\cdot\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}+1+\frac{(n-1)n}{2}\right]-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}, \\
q_n &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}+2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}, \\
q_n &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}+1+\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{(n-1)n}{2}. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}+1+\frac{(n-1)n}{2} &= \frac{n^3-3n^2+8n}{6} \\
&= \frac{n^3-3n^2+2n+6n}{6} \\
&= \frac{n^3-3n^2+2n}{6}+\frac{6n}{6} \\
&= \frac{(n^2-3n+2)n}{6}+n \\
&= \frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Vamos substituir a equação (5.4) em (5.3), logo

$$q_n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n+1+\frac{(n-1)n}{2}. \qquad (5.5)$$

É possível reescrever a equação (5.5) como

$$q_n = C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3 = 1+\frac{(n^2+5)n}{6}.$$

6. Proposta de Sequência Didática

A teoria da aprendizagem significativa, proposta por Ausubel (1968), destaca a importância de conectar novos conhecimentos ao conhecimento prévio dos alunos para promover uma compreensão profunda e duradoura. Nessa perspectiva, as sequências didáticas emergem como uma ferramenta pedagógica essencial para facilitar essa conexão e promover uma aprendizagem genuinamente significativa.

Zabala define sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (Zabala, 1998, p. 18). Corroborando com o que definiu Zabala, Oliveira diz que

> [...] sequência didática é um procedimento para sistematização do processo ensino-aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial informado aos alunos o real objetivo da realização da sequência didática no contexto de sala de aula, até o final da sequência para avaliar e informar os resultados. (OLIVEIRA, 2013, p.41).

Diante disso, o professor organiza as etapas da aula em seu planejamento, que vai desde as atividades até a avaliação da aprendizagem, dentro daquilo que será estudado, para alcançar os objetivos que almeja com seus alunos, diante disso, no decorrer da aula, o professor deve ser um facilitador no processo da aprendizagem dos alunos, trazendo-lhes direcionamentos, intervenções e novas atividades.

A importância da sequência didática na perspectiva da aprendizagem significativa reside na sua capacidade de transformar a sala de aula em um ambiente dinâmico e estimulante, onde os alunos são encorajados a construir ativamente o seu próprio entendimento do mundo, em vez de simplesmente memorizar fatos e conceitos isolados. Ao propor atividades desafiadoras, provocativas e contextualizadas, ela promove a construção de conceitos sólidos e a internalização do conhecimento, capacitando os alunos a aplicar o que aprenderam em novas situações e contextos.

Além disso, ao reconhecer a importância da motivação, interesse e engajamento dos alunos no processo de aprendizagem, a sequência didática orientada pela teoria da aprendizagem significativa busca criar experiências educacionais estimulantes e relevantes, que despertem a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico dos alunos. Dessa forma, ela não apenas facilita a aquisição de conhecimentos e habilidades, mas também promove o desenvolvimento integral dos alunos, preparandoos para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo de forma autônoma e confiante.

Portanto, é evidente que a sequência didática, quando concebida e implementada com base nos princípios da aprendizagem significativa, desempenha um papel fundamental na promoção de uma educação de qualidade, centrada no aluno e orientada para o desenvolvimento integral de suas potencialidades. Ao reconhecer e valorizar a importância dessa ferramenta pedagógica, os educadores podem criar experiências educacionais significativas e transformadoras que inspirem e capacitem os alunos a alcançarem todo o seu potencial.

A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel pode ser aplicada para ensinar conceitos matemáticos complexos, como a divisão do plano por n retas de Jacob Steiner.

Segundo Ausubel, (1968), a aprendizagem significativa ocorre quando o novo conhecimento se conecta de maneira substantiva e não arbitrária ao conhecimento pré-existente do aluno. Para construir uma sequência de conteúdo que promova a aprendizagem significativa, Ausubel sugere uma abordagem estruturada e cuidadosa, na qual, antes de introduzir novos conteúdos, é fundamental diagnosticar o conhecimento prévio dos alunos. Isso pode ser feito através de discussões, questionários, testes diagnósticos ou outras atividades que revelem o que os alunos já sabem sobre o tema.

Já a organização dos conteúdos deve ser de forma hierárquica, partindo dos conceitos mais gerais e abrangentes para os mais específicos e detalhados, facilitando a assimilação e integração dos novos conhecimentos com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva dos alunos.

É imprescindível que os novos conceitos devem ser apresentados de forma a se conectarem significativamente com o conhecimento prévio. Utilizar exemplos, analogias e experiências práticas que os alunos possam relacionar com suas vivências anteriores é essencial.

Ausubel, por outro lado, propõe apresentar, de forma introdutória, organizadores prévios (como resumos, diagramas ou mapas conceituais) que proporcionem uma visão geral do conteúdo a ser estudado. Estes organizadores ajudam a estabelecer uma base cognitiva para o novo material.

6.1 Um Exemplo de Sequência Didática Sob a Perspectiva da Teoria de Aprendizagem Significativa

Nesta seção iremos apresentar um exemplo de Sequência Didática na perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, que poderá ser aplicada no Ensino Médio, através de uma série de atividades planejadas. Com isso, buscaremos criar um material que potencialize, de maneira apropriada e relevante, garantindo que cada novo conceito apresentado se relacione com o que já foi aprendido, solidificando assim a base de conhecimento dos alunos.

A Sequência Didática proposta neste trabalho visa, inicialmente, apresentar conceitos iniciais sobre Geometria da Posição, como as definições de Ponto, Reta, Plano e Posições Relativas; Em seguida, apresentar o problema da divisão do plano ou Pizza de Steiner.

A seguir observaremos algumas Competências Específicas, nº. 03 e nº. 05, respectivamente, e Habilidades de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio descritas na BNCC (2018), que embasam esta sequência didática:

Competências Específicas:

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- **(EM13MAT302):** Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

- **(EM13MAT502):** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Objetivo: Compreender a divisão do plano por n retas e suas propriedades, utilizando a teoria da aprendizagem significativa para promover uma compreensão profunda do conceito.

Atividade 1: Exploração Inicial

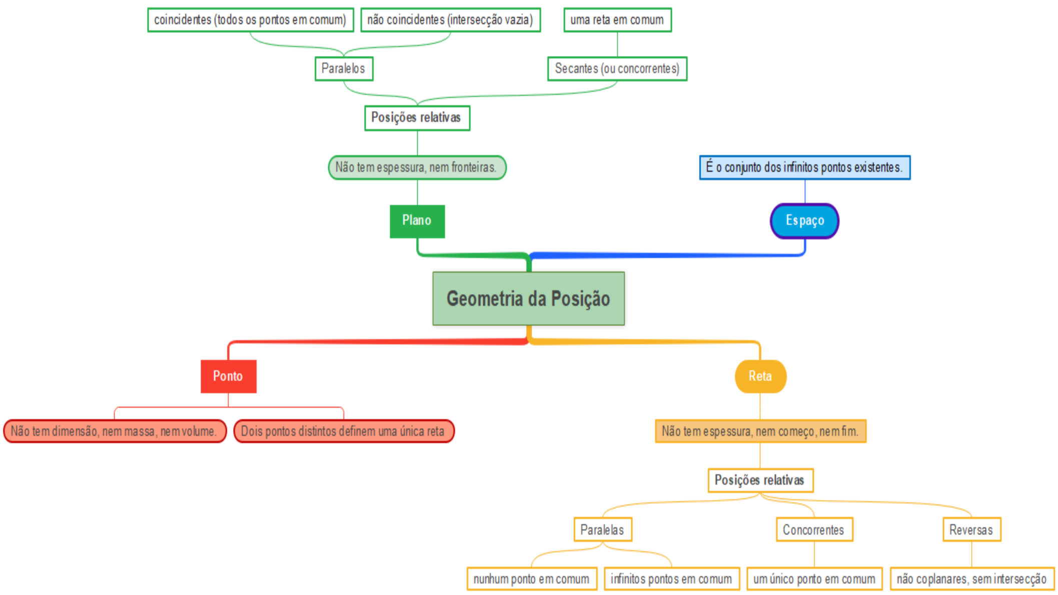
Conteúdo: Noções de Geometria da Posição.
Objetivos: Apresentar os objetos de estudo da Geometria da Posição, destacando algumas aplicações dessa geometria.
Duração: 2 h/a.
Recursos pedagógicos: Pincel, quadro branco, compassos, réguas, lápis, papel, notebook, data show e software GeoGebra.
Metodologia:

- Inicie a aula com uma discussão sobre o que os alunos já sabem sobre ponto, reta e plano.

- Em seguida, apresente as noções primitivas e propriedades de Geometria da Posição (ou Espacial): ponto, reta e plano; podendo usar um notebook, data show e o software GeoGebra como suporte para desenhar os objetos mencionados. É imprescindível que o professor apresente exemplos de objetos encontrados no cotidiano que remetem à forma dos objetos primitivos apresentados.

- Na segunda parte da aula, peça aos alunos que criem Mapa Mental sobre o que foi apresentado na aula sobre Geometria da Posição. O professor poderá orientá-los na construção do Mapa Mental.

Figura 6.1: Mapa mental: Noções primitivas de Geometria da Posição.



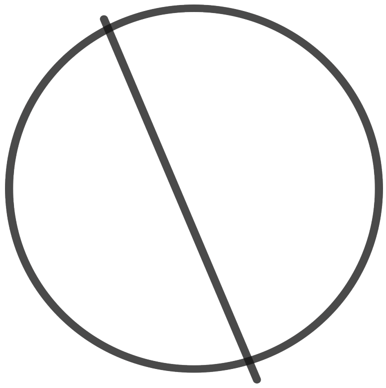
Fonte: Próprio autor.

- Agora o professor irá comparar o plano bidimensional a uma grande pizza circular. Peça que os alunos desenhem um círculo, utilizando um compasso.

Em seguida, peça a eles que façam um corte reto na pizza circular, podendo utilizar uma régua, de modo que obtenham o maior número de partes.

Exemplo 01: Considere o círculo como uma pizza circular. Observe a pizza circular dividida por apenas um corte reto, gerando duas partes.

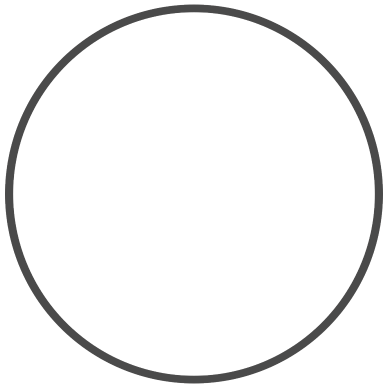
Figura 6.2: Pizza circular com um corte reto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema 01: Usando apenas dois cortes retos, de quais formas podemos dividir essa pizza?

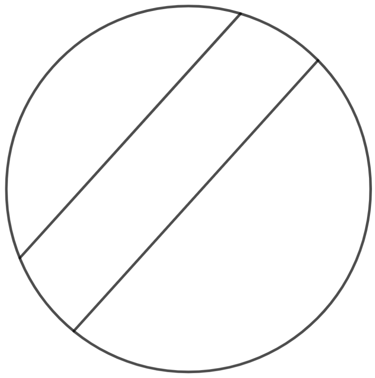
Figura 6.3: Pizza em formato circular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

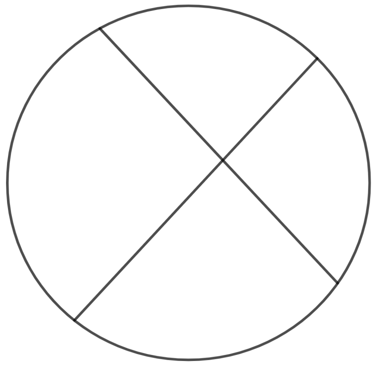
- Na terceira parte da aula, apresente imagens ou diagramas simples que mostrem exemplos das possíveis divisões da pizza por duas e três retas, conforme as Figuras 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7.

Figura 6.4: Pizza com dois cortes retos paralelos.



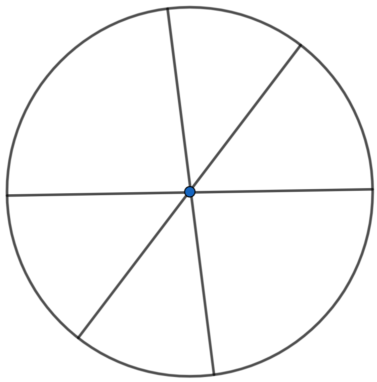
Fonte: Próprio autor.

Figura 6.5: Pizza com dois cortes retos concorrentes.



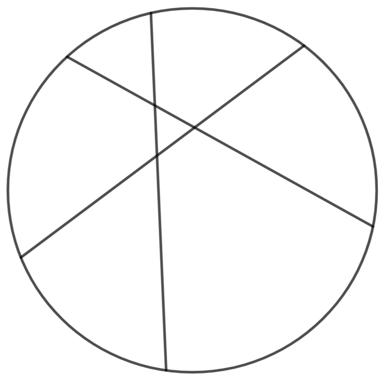
Fonte: Próprio autor.

Figura 6.6: Pizza com três cortes que se intersectam num único ponto.



Fonte: Próprio autor.

Figura 6.7: Pizza com três cortes que se intersectam dois a dois.



Fonte: Próprio autor.

- Pergunte aos alunos sobre as propriedades que observam nessas divisões.

  O que acontece quando os cortes se intersectam todos num mesmo ponto?

  O que foi preciso para obter o número máximo de pedaços, nos casos apresentados?

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo professor, da resolução das questões e participação dos alunos durante a aula.

Atividade 2: Introdução dos Conceitos e Exploração de Propriedades

Conteúdo: Divisão do plano bidimensional.
Objetivos: Explorar e identificar as propriedades das regiões formadas quando o plano é dividido por retas.
Duração: 1 h/a.

Recursos pedagógicos: Pincel, quadro branco, compassos, réguas, lápis, papel, notebook, data show e software GeoGebra.

Metodologia:

- Apresente o conceito de divisão do plano por n retas de Jacob Steiner de forma clara e acessível.

  Sugestão: O professor poderá utilizar, como motivação, o contexto histórico em que surgiu o problema, como apresentado no Capítulo 3 deste trabalho.

- Explique o que são retas em posição geral.

- Divida os alunos em grupos e forneça folhas de papel, compasso e lápis.

- Peça aos grupos que desenhem uma pizza em formato circular, adicionando retas ($n = 0$, 1, 2, 3, 4 e 5) nela e identificando o número de regiões formadas. Oriente os grupos a fazerem uma tabela com o número de regiões obtidas com as n retas em posição geral e quantas regiões aumentaram quando é feito um novo corte.

Tabela 6.1: Exemplo de tabela com o Número de regiões aumentadas da pizza.

Número de cortes	0	1	2	3	4	5
Número de regiões						
Número de regiões aumentadas						

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

- Após preencher a tabela, faça a análise do que foi obtido nela, observando que cada corte reto sucessivo aumenta o número de partes pelo número de partes em que foi dividida pelos cortes retos anteriores, ou seja, a cada corte aumenta-se n partes às existentes.

Tabela 6.2: Número de regiões aumentadas da pizza.

Número de cortes	0	1	2	3	4	5
Número de regiões	1	2	4	7	11	16
Número de regiões aumentadas	0	1	2	3	4	5

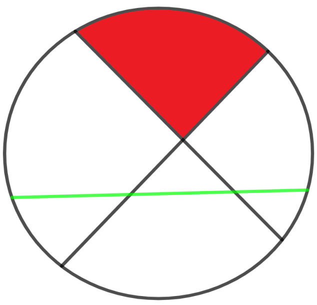
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Ou seja, podemos relacionar o número de pedaços obtidos através da sequência numérica, com condição inicial $P_0 = 1$, então teremos

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1, \\
P_1 &= P_0 + 1, \\
P_2 &= P_1 + 2, \\
P_3 &= P_2 + 3, \\
P_4 &= P_3 + 4, \\
P_5 &= P_4 + 5, \\
&\vdots \\
P_n &= P_{n-1} + n, \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.
\end{aligned}
$$

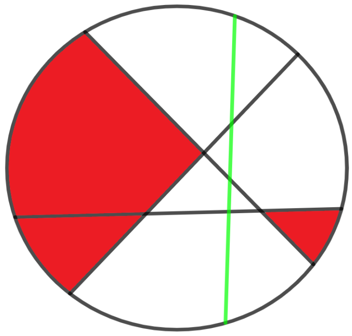
- Em seguida, explore exemplos de divisão do plano por três e quatro cortes retos, destacando as regiões formadas e as propriedades dessas divisões. Destaque (de vermelho) as regiões que não foram divididas com o terceiro corte reto e, logo após, com o quarto corte reto. Use as Figuras 4.10 e 4.11.

Figura 4.10: Pizza com três cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.11: Pizza com quatro cortes retos.



Fonte: Próprio autor.

- Observe que todas as regiões da Figura 4.10 foram duplicadas, com exceção de uma região. Já na Figura 4.11, todas as regiões foram duplicadas, exceto três. Peça que os alunos montem uma tabela com essas informações, a partir de três cortes até o sexto corte.

Tabela 6.3: Número de regiões da Pizza.

Número de cortes	3	4	5	6
Número de regiões	7	11	16	22
Número de regiões não duplicadas	1	3	6	10

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

- Veja que o número de regiões obtidas em cada caso é igual ao dobro do número de regiões anteriores menos o total de combinações duas a duas dos cortes feitos anteriormente.

$$P(n) \ = \ 2P(n-1) - C^2_{n-1}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

- E que a sequência do número de regiões não duplicadas é o número triangular $T_n = C^2_{n-1}$ para $n \geq 3$.

Atividade 3: Generalização

Conteúdo: Generalizando os conceitos aprendidos e fazendo as demonstrações dos resultados.
Objetivos: Explorar e reconhecer o desenvolvimento e generalização da fórmula da Pizza de Steiner.
Duração: 1 h/a.
Recursos pedagógicos: Pincel, quadro branco, compassos, réguas, lápis, papel, notebook, data show e software GeoGebra.
Metodologia:

- Mostre aos alunos a generalização para qualquer número de retas, formulando conjecturas sobre o número máximo de regiões formadas.

- Utilize as demonstrações da **Seção 04** para chegar na fórmula geral da Pizza de Steiner, relacionando a divisão do plano por n retas e outros conceitos matemáticos, promovendo uma aprendizagem significativa.

- Com a sequência numérica desenvolvida na Atividade 2, desenvolva a função que relaciona o total de regiões P_n ao número de cortes retos n.

  Sugestão: Utilize a demonstração da **Subseção 4.1**.

Vamos utilizar a sequência matemática abordada na **Atividade 2** para determinar a função que relaciona o número máximo de regiões da pizza ao número de cortes retos.
Com isso, somando membro a membro as igualdades, obtemos

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 + (1+2+3+...+n), \\ P_n &= 1 + \frac{(1+n)n}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos a expressão $P_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, que determina o número máximo de pedaços obtidos com n cortes retos de uma pizza circular, ou melhor, encontramos a função que relaciona o número máximo de regiões do plano bidimensional obtidas com n retas.

- Para finalizar esta aula, demonstre a fórmula encontrada anteriormente utilizando o Princípio de Indução Matemática, que foi abordado na **Subseção 4.2**.

Atividade 4: Aplicação e Resolução de Problemas

Conteúdo: Exercícios aplicados ao Desafio da Pizza de Steiner.
Objetivos:
- Identificar os dados essenciais de uma situação para sua resolução.
- Compreender os processos matemáticos envolvidos na resolução de problema.

Duração: 1 h/a.
Recursos pedagógicos: Pincel, quadro branco, compassos, réguas, lápis, papel, notebook, data show e software GeoGebra.
Metodologia:

- Apresente problemas que envolvam a divisão do plano por n retas; como encontrar o número mínimo de retas necessárias para dividir o plano em um número específico de regiões.

- Incentive os alunos a trabalharem juntos para resolver esses problemas, aplicando os conceitos aprendidos.

Problema 02: Uma pizzaria criou uma pizza tamanho família, e está interessada em criar uma nova forma de cortar essas pizzas que maximize a quantidade de fatias usando apenas 5 cortes retos, independente do tamanho e formato dos pedaços.
a) Como os cortes devem ser feitos para obter o número máximo de pedaços?
Solução:

Os cortes devem ser feitos de modo que não haja pares de retas paralelas nem três ou mais retas intersectando num mesmo ponto. Ou seja, as retas devem estar em posição geral.

b) Qual o número máximo de fatias que poderá ser obtido?

Solução: Considere que $n = 5$ cortes retos. Logo

$$\begin{aligned} P(5) &= 1 + \frac{(1+5)\cdot 5}{2}, \\ P(5) &= 1 + \frac{6\cdot 5}{2}, \\ P(5) &= 1 + \frac{30}{2}, \\ P(5) &= 1 + 15 = 16 \text{ fatias.} \end{aligned}$$

Então, o número máximo de fatias é 16.

Problema 3 Qual o número mínimo de cortes retos são necessários para dividir uma pizza em 11 pedaços?
Sugestão: Aqui o aluno poderá utilizar algum conhecimento já adquirido no ensino fundamental, como, por exemplo, resolver uma equação do segundo grau.
Solução: Veja que $P(n) = 11$, então usando a fórmula $P(n) = 1 + \frac{(n+1)n}{2}$, temos que

$$\begin{aligned} 11 &= 1 + \frac{(n+1)n}{2}, \\ 11 - 1 &= \frac{(n+1)n}{2}, \\ 10 &= \frac{(n+1)n}{2}, \\ 20 &= n^2 + n, \\ 0 &= n^2 + n - 20. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara para encontrar os possíveis valores para $n \in \mathbb{N}$, onde $n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.
Considere $a = 1$, $b = 1$ e $c = -20$. Assim

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81.$$

Resolvendo a equação, obtemos

$$\begin{aligned} n &= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1}, \\ n &= \frac{-1 \pm 9}{2}, \\ n_1 &= \frac{-1 + 9}{2} = 4 \in \mathbb{N}; \\ n_2 &= \frac{-1 - 9}{2} = -5 \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, para obter 11 pedaços da pizza serão necessários 4 cortes retos no mínimo.

Problema 4: Uma pizza que foi dividida por 7 cortes retos, obtendo o número máximo de regiões. Com os conceitos estudados, é possível determinar o total de regiões da pizza que não foram duplicadas ao fazer o sétimo corte reto.
Determine o total de regiões que não foram duplicadas com o sétimo corte reto.
Sugestão: Veja que para determinar o total de regiões que não foram duplicadas, é

só utilizar a fórmula $T_n = C^2_{n-1}$ para $n \geq 3$.
Solução: Observe que o total de regiões que não foram duplicadas pelo sétimo corte reto é dado por

$$\begin{aligned}
T_7 &= C^2_{7-1}, \\
T_7 &= C^2_6, \\
T_7 &= \frac{6!}{2! \cdot (7-2)!}, \\
T_7 &= \frac{6!}{2! \cdot 5!}, \\
T_7 &= \frac{6 \cdot 5}{2}, \\
T_7 &= \frac{30}{2}, \\
T_7 &= 15 \text{ partes não duplicadas.}
\end{aligned}$$

Avaliação:

- Avalie a compreensão dos alunos por meio de observação durante as atividades em grupo e discussões em sala de aula.

- Aplicar uma avaliação escrita ou oral para verificar a assimilação dos conceitos.

7. Considerações Finais

Conforme destacado por Brasil (2006), é fundamental que o professor de matemática, ao abordar os conteúdos no ensino médio, promova de forma consistente um enriquecimento formativo, sobretudo no que tange ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Isso implica em valorizar o raciocínio matemático, evidenciando a maneira como o professor apresenta problemas, questiona soluções, analisa hipóteses e chega a conclusões. Para alcançar tal objetivo, o docente pode empregar estratégias como a utilização de exemplos e contraexemplos, a generalização de situações e a criação de modelos.

Este trabalho almeja compartilhar com os professores de matemática do ensino médio um material didático que possa ser utilizado para estimular um processo de aprendizagem significativa, conforme proposto por Ausubel (2000). Considerando que as demonstrações apresentadas aqui podem ser utilizadas como um meio pelo qual os alunos ancoram seus conhecimentos prévios na assimilação de novas informações, consolidando os conhecimentos anteriores à medida que adquirem os novos.

Essas demonstrações, quando integradas às aulas de matemática, podem se tornar estratégias pedagógicas valiosas, enriquecendo o ensino da disciplina no ensino médio e contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e intelectual dos estudantes.

Acreditamos que a implementação dessas demonstrações não apenas pode ampliar o repertório dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos, mas também tem o potencial de fomentar a capacidade deles em aplicar o pensamento lógico e analítico em situações desafiadoras. Proporcionar aos alunos a oportunidade de enfrentar problemas complexos, como os apresentados por Jakob Steiner, não apenas fortalece sua compreensão dos fundamentos matemáticos, mas também os prepara para enfrentar desafios intelectuais ao longo de suas trajetórias acadêmicas e profissionais.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, D. P., 1968, *Psicologia da educação, uma visão cognitiva.* Holt, Rinehart and Winston. 3, 29, 30

[2] AUSUBEL, D., 2000, *The Acquisition and retention of knowledge: A cognitive view.* Springer-Netherlands. 5

[3] BERMAN, G., FRYER, K. D., 1972, *Introduction to combinatorics.* University of Waterloo. 14

[4] BRASIL, 2006, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.Brasília: MEC*, v. 2. Secretaria de Educação Básica. 1

[5] BRASIL, 2018. "Base Nacional Comum Curricular: MEC". Disponível em: <`http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.`>. Acesso em: 01 de dezembro de 2023. 5, 31

[6] BRASIL, 1998, "Ministério da Educação e do Desporto", *Parâmetros Curriculares Nacionais.* 1, 4

[7] CALDATO, J., UTSUMI, M. C., NASSER, L., 2017, "Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores", *Revista Triângulo*, v. 10, n. 2, pp. 74–93. 2

[8] CRELLE, J., 1826. "Revista de matemática pura e aplicada". Disponível em: <`https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0001`>. Acesso em: 13 de dezembro de 2023. 8

[9] CRESPO, C. R., 2004, "Argumentar matemáticamente: su importancia en el aula". In: *II Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática.* 7

[10] CRUZ, S. S. L., 2021, *Equações de recorrência e aplicações: combinatória, probabilidade, teoria dos números e matemática financeira.* Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 25

[11] DA PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H., 2009, *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica Editora. 4

[12] DE SOUSA JUCÁ, R., PIRONEL, M., 2022, “Investigação matemática: um caminho para o ensino da matemática: Mathematical Research a Pathway to Teaching Mathematics”, *Revista Cocar*, , n. 14. 1

[13] DÖRRIE, H., 1965. “100 Grandes Problemas de Matemática Elementar”. Disponível em: <`https://archive.org/details/100GreatProblemsOfElementaryMathematicsDoverHeinrichDrrie/page/283/mode/2up`>. Acesso em: 07 de setembro de 2024. 13, 23

[14] LIMA, E. L., 2013, *Números e funções reais*. Sociedade Brasileira de Matemática. 14

[15] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., et al., 1998, *A matemática do ensino médio*, v. 2. SBM Rio de Janeiro. 20

[16] MAROQUIO, V. S., PAIVA, M. A. V., FONSECA, C. D. O., 2015, “Sequências didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores”, *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. 7

[17] MAROQUIO, V. S., 2021, “Sequências didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores/Didactic sequences as a pedagogical resource in continuing teacher education”, *Brazilian Journal of Development*, v. 7, n. 10, pp. 95397–95409. 7

[18] MOREIRA, M. A., 2012. “O que é afinal aprendizagem significativa?” Disponível em: <`http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf`>. Acesso em: 18 de junho de 2024. 5

[19] OLIVEIRA, M. M. D., 2013, *Sequência didática interativa no processo de formação de professores*. Editora Vozes Limitada. 29

[20] PARATELI, C. A., CRISTOVÃO, E. M., PONTES, R. C. M., et al., 2005. “A escrita no processo de aprender matemática”. Disponível em: <`https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/332.`>. Acesso em: 09 de abril de 2024. 6

[21] PIETROPAOLO, R. C., 2005, “(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática”, . 1

[22] PITOMBEIRA, J. B., 1987. “RPM 10 - Um problema de Geometria”. Disponível em: <`https://rpm.org.br/cdrpm/10/10.htm`>. Acesso em: 29 de janeiro de 2024. 20, 27

[23] POLYA, G., 1945. “How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method”. . 4

[24] RORATTO, C., NOGUEIRA, C. M. I., KATO, L. A., 2011, “Ensino de matemática, história da matemática e aprendizagem significativa: uma combinação possível”, *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 16, n. 1, pp. 117–142. 5

[25] SAGRADA, B., 2000, “Bíblia Sagrada”, *Editora Ave Maria*. vi

[26] SERRALHEIRO, T. D., OTHERS, 2007, “Formação de professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações”, p. 147f. 2

[27] SILVA, J. C., JÚNIOR, E. D. M., 2020, “Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes”, *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 16, n. 59, pp. 204–226. 2, 6, 7

[28] SILVA, M. A. D., PIRES, C. M. C., 2012, “Quais os objetivos para o ensino de Matemática?” *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 8, n. 31. 6

[29] STEINER, J., 2018. “Dicionário completo de biografia científica. Encyclopedia.com”. Disponível em: <`https://www.encyclopedia.com`>. Acesso em: 28 de agosto de 2024. 8, 25

[30] TALL, D., 1989, “A natureza da prova matemática”, *Ensino de Matemática*, v. 127, pp. 28–32. 5

[31] ZABALA, A., 1998, *A prática educativa: como ensinar*. Editora Artmed. 29

A. Algumas Demonstrações

Demonstração da Fórmula do Número Triangular

A sequência dos números triangulares é dada pela soma dos primeiros n números naturais. Podemos representar o n-ésimo número triangular, T_n, como

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Para encontrar uma fórmula fechada para T_n, podemos somar essa sequência de duas formas diferentes

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n, \\ T_n &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1. \end{aligned}$$

Somando essas duas equações, temos

$$2T_n = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \cdots + ((n-1)+2) + (n+1).$$

Cada par na soma acima é igual a $(n+1)$, e há n pares. Portanto, temos

$$2T_n = n(n+1).$$

Dividindo ambos os lados por 2, obtemos a fórmula fechada para o n-ésimo número triangular

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração da Fórmula para a Soma dos Primeiros Números Triangulares

A soma dos primeiros n números triangulares é

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n.$$

Sabemos que o k-ésimo número triangular é dado por

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Portanto,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}.$$

Podemos simplificar esta soma dividindo por 2 e separando as somas

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k).$$

Separando as somas

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right).$$

Sabemos das fórmulas para a soma dos primeiros n números naturais e a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Substituindo essas fórmulas na expressão de S_n

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Colocando $\frac{n(n+1)}{2}$ em evidência

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right).$$

Simplificando a expressão dentro dos parênteses

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)}{4} \cdot \left(\frac{2n+1+3}{3} \right), \\ S_n &= \frac{n(n+1)}{4} \cdot \frac{2n+4}{3}, \\ S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos primeiros n números triangulares é dada por

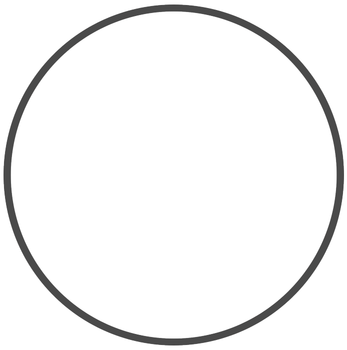
$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

B. Atividades Propostas

Atividade 01: Exploração Inicial

01) Desenhe um círculo, utilizando um compasso e faça um corte reto sobre ele.

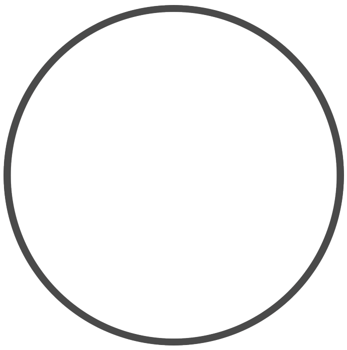
Figura B.1: Pizza em formato circular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

02) Usando apenas dois cortes retos, de quais formas podemos dividir essa pizza?

Figura B.2: Pizza em formato circular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

03) Quais as propriedades que observam nessas divisões.

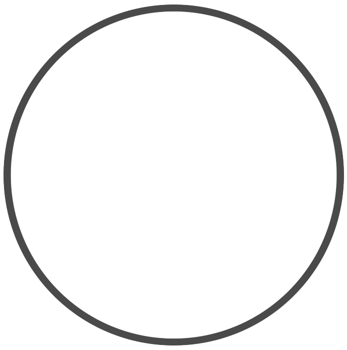
a) O que acontece quando os cortes se intersectam todos num mesmo ponto?

b) O que foi preciso para obter o número máximo de pedaços, nos casos apresentados?

Atividade 2: Introdução dos Conceitos e Exploração de Propriedades

1) Em grupos, desenhe uma pizza em formato circular, adicionando retas ($n = 0$, 1, 2, 3, 4 e 5) nela e identificando o número de regiões formadas. Anote em uma tabela o número de regiões obtidas com as n retas em posição geral e quantas regiões aumentaram quando é feito um novo corte.

Figura B.3: Pizza em formato circular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.1: Número de regiões aumentadas da pizza.

Número de cortes	0	1	2	3	4	5
Número de regiões						
Número de regiões aumentadas						

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Faça uma análise do que foi obtido na tabela.

Atividade 3: Aplicação e Resolução de Problemas

1) Uma pizzaria criou uma pizza tamanho família, e está interessada em criar uma nova forma de cortar essas pizzas que maximize a quantidade de fatias usando apenas 5 cortes retos, independente do tamanho e formato dos pedaços.

a) Como os cortes devem ser feitos para obter o número máximo de pedaços?

b) Qual o número máximo de fatias que poderá ser obtido?

2) Qual o número mínimo de cortes retos são necessários para dividir uma pizza em 11 pedaços?

3) Uma pizza que foi dividida por 7 cortes retos, obtendo o número máximo de regiões. Com os conceitos estudados, é possível determinar o total de regiões da pizza que não foram duplicadas ao fazer o sétimo corte reto. Determine o total de regiões que não foram duplicadas com o sétimo corte reto.