FCENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

BIANCA SILVA ANDRADE

O USO DE JOGOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NO 7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Belo Horizonte
2024

BIANCA SILVA ANDRADE

O USO DE JOGOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NO 7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):
Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:
João Bosco Laudares
Izabela Marques de Oliveira

Belo Horizonte
2024

Andrade, Bianca Silva
A554u O uso de jogos na educação básica: uma proposta para o ensino da álgebra no 7º ano do ensino fundamental II / Bianca Silva Andrade. – 2024.
95 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Álgebra – Estudo e ensino (Fundamental) – Teses. 2. Jogos educativos – Teses. 3.. Linguística matemática – Teses. I. Ferreira, Fernanda Aparecida. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.3

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

BIANCA SILVA ANDRADE

O USO DE JOGOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NO 7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 26 de agosto de 2024.

BIANCA SILVA ANDRADE

Bianca Silva Andrade
Nome do(a) Autor(a)

Fernanda Ap. Ferreira

Fernanda Aparecida Ferreira
Nome do(a) Orientador(a)

Belo Horizonte
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo privilégio e oportunidade de concluir mais uma etapa na minha vida acadêmica.

À minha família, pelo constante apoio e incentivo durante esse período, por serem minha base nos momentos difíceis e minha maior motivação para seguir em frente.

À minha orientadora, Fernanda, expresso minha gratidão pela paciência, incentivo e constante dedicação ao longo dessa pesquisa.

Agradeço ao CEFET-MG, a todos os professores e aos meus colegas por me proporcionarem vários aprendizados e um significativo crescimento acadêmico.

Por fim, agradeço aos membros da banca examinadora – os professores João Bosco Laudares e Izabela Marques Oliveira – pela disponibilidade e observações fundamentais para o aprimoramento da pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Nessa dissertação, apresentaremos uma pesquisa que teve como objetivo principal o desenvolvimento de jogos voltados para o ensino da Álgebra para alunos do 7° ano do Ensino Fundamental II. Para fundamentarmos teoricamente nossa pesquisa, fizemos um panorama de algumas literaturas que descrevem, historicamente, o desenvolvimento da Álgebra e seus estágios. Ainda, dialogamos com Usiskin; Fiorentini, Miorim e Miguel; e Lins e Gimenez que trazem algumas concepções da Álgebra no Ensino sob diferentes perspectivas e outros que revelam o quanto os jogos podem ser um forte aliado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para que o desenvolvimento dos nossos jogos fosse concebido de acordo com documentos curriculares oficiais, também nos respaldamos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nos atentando para as habilidades a serem promovidas na unidade temática Álgebra. Diante desse nosso referencial, elaboramos dois jogos, um de cartas, nomeado de "Cartas Misteriosas", e outro de tabuleiro, que chamamos de "Tesouro nas Ilhas Gregas". Fundamentados nos estágios de evolução da Álgebra e sua relação com a Álgebra ensinada nas escolas e pelas orientações da BNCC, os jogos tratam de conteúdos ligados a expressões e equações algébricas, visando uma passagem da aritmética para a linguagem algébrica, com o intuito de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes do Ensino Fundamental II. Esperamos que nosso produto possa servir para que outros professores de matemática utilizem dessa ferramenta para ensinar Álgebra de uma maneira divertida e lúdica.

Palavras-chave: Álgebra. Ensino. Jogo. Linguagem Algébrica.

ABSTRACT

In this dissertation we will present research that had as its main objective the development of games aimed at teaching Algebra for students in the 7th year of Elementary School II. To theoretically base our research, we made an overview of some literature that historically describes the development of Algebra and its stages. Furthermore, we spoke with Usiskin; Fiorentini, Miorim and Miguel; and Lins and Gimenez who bring some concepts of Algebra in Teaching from different perspectives and others who reveal how games can be a strong ally in the process of teaching and learning Mathematics. In order for the development of our games to be designed in accordance with official curricular documents, we were also supported by the National Common Curricular Base (BNCC), paying attention to the skills to be promoted in the Algebra thematic unit. Given this framework, we developed two games, one with cards, called "Mysterious Cards", and another with a board, which we called "Treasure on the Islands". Based on the stages of evolution of Algebra and its relationship with Algebra taught in schools and by BNCC guidelines, the games deal with content linked to algebraic expressions and equations, aiming at a transition from arithmetic to algebraic language, with the aim of developing the algebraic thinking of Elementary School II students. We hope that our product can help other math teachers to use this tool to teach Algebra in a fun and playful way.

Keywords: Algebra. Teaching. Game. Algebraic Language.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

EF – Ensino Fundamental

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2021, pouco antes de concluir a graduação em Licenciatura de Matemática, tive a oportunidade de acompanhar uma professora durante as aulas híbridas, onde, por conta da Pandemia, metade da turma assistia as aulas online e a outra metade, presencial.

Após me formar, mesmo com pouca experiência devido à falta de preparação adequada da faculdade para exercer a função de professora, especialmente porque os estágios obrigatórios foram realizados online, tive a oportunidade de assumir uma turma do 6° ano do Ensino Fundamental II como professora efetiva.

No ano seguinte, fui convidada a me tornar professora de todos os segmentos do Ensino Fundamental II. Foi então que percebi algumas dificuldades e limitações dos alunos, o que me motivou a buscar novas metodologias de ensino.

Enquanto atuava como professora do 7° ano, observei que os alunos tinham dificuldade em introduzir a linguagem algébrica e em relacioná-la com problemas anteriormente resolvidos somente com o uso da aritmética. Essa dificuldade se refletia nos anos seguintes, à medida que a linguagem algébrica se aprofundava e seu uso se tornava cada vez mais frequente. Muitos alunos enfrentavam essa dificuldade devido à ausência de uma base sólida, seja por uma questão pessoal com a matemática e a álgebra, ou por conta da pandemia que limitou a aprendizagem de muitos estudantes.

Diante desse contexto, o qual também presencio atualmente, iniciei uma busca por maneiras de descomplicar a introdução da Álgebra no 7° ano e assim, facilitar a assimilação desse “novo” conteúdo por parte dos estudantes.

Sempre fui uma criança que gostava muito de jogos de tabuleiro. Muitas vezes deixava de lado as brincadeiras mais convencionais da infância para me juntar à minha família, em sua maioria adultos e crianças mais velhas, para jogar uma ou várias partidas de “Imagem & Ação”, “Rummikub” ou “Uno”[1]. Hoje me lembro que, enquanto jogava, o meu raciocínio lógico era

[1] Jogos comuns que encontramos nas casas de famílias brasileiras.

desenvolvido de uma forma muito leve e divertida, visto que o tempo inteiro precisava criar boas estratégias para vencer o jogo.

Levando em consideração esses contextos, essa pesquisa se **justifica,** em parte, pelas experiências vividas em sala de aula e por meu particular interesse por jogos.

Dessa forma, me coloco como uma educadora que acredita que o uso dos jogos em contextos de ensino, sejam eles formais ou não, pode se tornar um forte aliado no processo de ensino e aprendizagem, além de proporcionar leveza e fortalecer os vínculos entre professor-aluno e aluno-conhecimento.

Por mais que acredite na capacidade do uso de novas metodologias, não me coloco aqui como uma defensora do uso desenfreado dos jogos no contexto escolar. Acredito que a escola está em constante mudança e é preciso adaptar os métodos de ensino às condições e ao cenário de cada escola, de forma que a aprendizagem seja cada vez mais eficaz. Além disso, considero que os jogos são uma maneira de tornar o ensino mais dinâmico, porém, acredito que as aulas expositivas e a prática na resolução de questões não devem ser negligenciadas. Essas abordagens são essenciais, pois refletem mais fielmente o que os alunos enfrentarão mais adiante, em vestibulares, no ENEM, em concursos etc.

Frente a essas situações, surge nossa inquietação e a pergunta que orientou todo nosso trabalho de dissertação: **Como trabalhar o conteúdo de Álgebra voltado para estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental II de uma maneira mais lúdica, unindo os contextos de dificuldade e de divertimento, em prol da aprendizagem?**

Diante disso, percebi que, ao unir a dificuldade dos estudantes na introdução da linguagem algébrica com o prazer e a diversão de jogar, o aprendizado e a assimilação desse conteúdo poderiam se tornar algo muito mais leve e eficaz. Por esse motivo, esse trabalho teve como **Objetivo Geral** elaborar e disponibilizar dois jogos envolvendo conteúdos algébricos, voltados para o 7° ano do Ensino Fundamental II, de modo que eles possam contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra,

O primeiro deles, um jogo de cartas, foi elaborado como uma maneira de introduzir a linguagem algébrica. Já o segundo, um jogo de tabuleiro contextualizado, tem por proposta reforçar o uso da linguagem algébrica e as operações envolvidas na solução de equações algébricas lineares, de uma forma divertida. Para alcançar esse objetivo, o caminho percorrido nessa pesquisa será exposto a seguir.

No 1º capítulo apresentaremos a introdução da dissertação. No capítulo 2, faremos uma breve análise histórica da Álgebra. A princípio, será apresentado o Papiro de Ahmes, um documento egípcio que, mesmo que muito antigo, já apresenta problemas que podem ser reconhecidos com algébricos, denominados como problemas de “aha”. Mais adiante, discorreremos de forma comparativa a Álgebra praticada na Mesopotâmia e a Álgebra egípcia, sendo a primeira mais avançada que a última.

Ainda nesse capítulo, na seção 2, falaremos a respeito da evolução da Álgebra que pode ser dividida em três estágios principais: retórica, sincopada e simbólica, nos quais cada um representa uma mudança na linguagem matemática, desde a descrição verbal das operações até a introdução de notações especiais e, finalmente, o uso de símbolos para expressar equações de maneira mais concisa e universal. Além disso, para cada estágio serão apresentados os principais nomes que tiveram participação importante nessa evolução.

No capítulo 3, veremos a importância da história da Álgebra e a sua relação com a álgebra escolar. Além disso, mostraremos que a Álgebra não é apenas uma ferramenta abstrata, mas tem suas raízes nas necessidades práticas dos antigos em resolver problemas do cotidiano e como esse ramo da matemática evoluiu e segue sendo fundamental para várias áreas do conhecimento.

Mais adiante, na segunda seção, apresentaremos as concepções da Álgebra e/ou da Educação Algébrica de acordo com alguns autores: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Lins e Gimenez (2001) e Usiskin (2004). Essas concepções variam desde uma abordagem linguística até uma abordagem mais estrutural e conceitual, destacando como o ensino da Álgebra deve ser abordado para promover o pensamento algébrico dos alunos.

No capítulo 4, abordaremos o que a BNCC tem a dizer sobre os conceitos fundamentais da Álgebra e como as competências e habilidades apresentadas nesse documento influenciaram na elaboração do produto deste trabalho. Apresentaremos, também, dois quadros que exibem todos os objetos do conhecimento e as habilidades relacionadas à Álgebra do Ensino Fundamental I e II (até o 7° ano).

Além disso, serão mostrados alguns exemplos, retirados de livros didáticos aprovados pelo PNLD, que retratam, de maneira prática, a forma como essas habilidades algébricas são estudadas pelos alunos do 1º ano do Ensino Fundamental I ao 6º ano do Ensino Fundamental II. Esses exemplos irão retratar problemas algébricos, mas que, nesses anos de escolaridade, são resolvidos fazendo o uso da aritmética, visto que a linguagem ainda não foi introduzida.

Na segunda seção, falaremos de forma mais detalhada sobre o uso de jogos no ensino da Álgebra. Iniciaremos apresentando o porquê o uso de jogos pode ser um aliado no processo de ensino e aprendizagem, o que caracteriza as atividades lúdicas como boas ferramentas para o ensino e o que alguns estudiosos têm a dizer sobre essa abordagem. Além disso discutiremos como atingir um equilíbrio, de modo que o jogo não se torne apenas uma atividade divertida e sem nenhum objetivo e os desafios que o professor irá enfrentar ao adotar essa metodologia de ensino.

Dado o exposto, no capítulo 5 apresentaremos os dois jogos elaborados como produtos educacionais deste trabalho: “Cartas Misteriosas” e “Tesouros nas Ilhas”.

Para cada um dos jogos, apresentaremos seu objetivo, o público-alvo, os objetos do conhecimento e habilidades da BNCC nas quais o jogo foi baseado, quais foram as concepções da Álgebra apresentadas no capítulo 3 que contribuíram diretamente para a sua elaboração e, por fim, as regras do jogo e os resultados esperados após a sua aplicação.

Dentro do tópico das regras de cada jogo, mostraremos quais são os materiais necessários com suas respectivas ilustrações, o desenvolvimento das partidas retratando alguns exemplos de jogabilidade e orientações para os professores, visando a execução bem-sucedida por parte dos alunos.

Finalmente, no capítulo 6, serão feitas as considerações finais sobre o processo de elaboração dessa pesquisa e criação dos jogos, onde serão expostas brevemente um relato de experiência aprovado a apresentado no ENOPEM ((Encontro Nacional Oline de Professores que Ensinam Matemática) a respeito da minha experiência com a aplicação do jogo “Tesouro nas Ilhas” e minhas conclusões a respeito desse trabalho.

2 A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

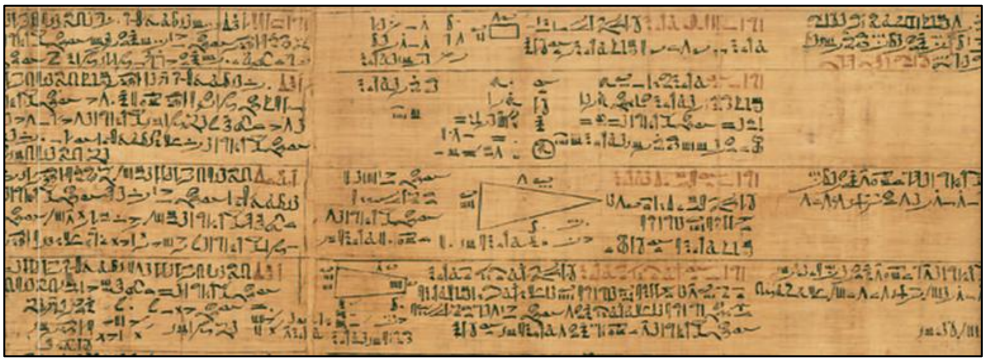
Nesse capítulo, apresentamos o desenvolvimento da Álgebra numa perspectiva histórica, retratando o seu surgimento no Egito e sua evolução até os dias atuais. Para isso, descrevemos os três estágios pelos quais a Álgebra atravessou: retórica, sincopada e simbólica. Para cada estágio destacamos os principais personagens envolvidos e a forma como a linguagem algébrica era utilizada na época.

2.1 A Álgebra no Egito e na Mesopotâmia

O Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes, um documento egípcio escrito a mais de três milênios e meio, é o mais extenso e importante de natureza matemática dessa época e nos permite conhecer parte da história da matemática egípcia e refletir sobre a presença da Álgebra nesse contexto. (BOYER, 2001)

O seu conteúdo central é composto por 84 (oitenta e quatro) problemas de diferentes temas, conforme podemos ver na Figura 1. Apesar de muitos serem de natureza aritmética, envolvendo frações e operações aritméticas, outros, como os problemas *aha*[2] podem ser caracterizados como algébricos.

Figura 1 - Parte do Papiro de Rhind



Fonte: www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html, Acesso: em: 22 fev. 2024.

[2] Aha era o nome dado à incógnita (BOYER, 2001, p. 11).

Em seu livro, História da Matemática, Boyer (2001, p. 11) descreve o processo utilizado por Ahames[3] para resolver um problema de cunho algébrico:

> O Probl. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que **aha** mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como "método da falsa posição", ou "regra de falso". Um valor específico, provavelmente falso, é assumido por aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se a resposta correta. (BOYER, 2001, p. 11, **grifo nosso**).

Diferente de Boyer, que defende que as "equações" presentes no papiro de Ahmes não são resolvidas pelo método da falsa posição, Bertato (2018), pesquisador da Unicamp, afirma:

> Não se pode constatar literalmente que para resolver as equações dos problemas aha seja empregada pelo escriba qualquer suposição de valor. Encontramos sim, nas resoluções dos problemas aritméticos e dos problemas aha, uma hábil manipulação de decomposição aritmética dos números, multiplicações por mínimo múltiplo comum (ou apenas múltiplo comum), soma direta de coeficientes da aha e consecutiva divisão da constante por tal soma. Talvez, devido a tais constatações, autores como Moritz Benedikt Cantor (1829 - 1920), Otto Eduard Neugebauer (1899 - 1990) e o mencionado Eisenlohr, tenham concluído que o método de resolução das equações examinadas, empregado pelos antigos egípcios, se dava via coeficientes, isolando a incógnita, exatamente como faria um estudante de álgebra elementar dos dias de hoje. (BERTATO, 2018, p. 13).

No problema 24 descrito acima, por exemplo, a tradução para linguagem simbólica pode ser escrita como:

$$x + \frac{x}{7} = 19 \qquad (2.1)$$

As antigas civilizações da Mesopotâmia, chamada erroneamente de babilônicas[4], possuíam uma Álgebra muito mais avançada que os egípcios. Enquanto a Álgebra egípcia dedicava grande atenção às equações lineares e, para eles, encontrar as soluções de equações quadráticas com três termos era extremamente difícil, para os babilônios, as equações lineares

[3] Escriba que copiou o papiro por volta de 1650 a.C. (BOYER, 2001, p. 8).

[4] Chamar a Mesopotâmia de Babilônia é reduzir um longo período histórico a apenas um dos reinos que ocuparam aquela região. Além dos babilônios, a Mesopotâmia foi habitada pelos assírios, sumérios, hebreus e fenícios. Embora o Primeiro e o Segundo Império Babilônico tenham dominado grande parte da Mesopotâmia em determinados períodos, não é correto identificar toda a região exclusivamente como Babilônia.

eram tão elementares que não mereciam muita atenção (BOYER, 2001). E, quanto à resolução de equações quadráticas, Boyer sustenta:

> Muitos textos de problemas do período babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. (BOYER, 2001, p. 21).

Os babilônios possuíam uma Álgebra retórica, isto é, não utilizavam letras para representar quantidades desconhecidas e as resoluções de problemas eram escritas fazendo o uso de palavras, não havia abreviações ou símbolos. Boyer afirma que palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem nesse papel.

Além das equações quadráticas, há muitos registros dos babilônios para a resolução de equações cúbicas. Esse, e outros fatos, confirmam o quão desenvolvida era a Álgebra babilônica e o alto nível de abstração adquirido nesse período.

Nesse contexto, fica claro que, para chegarmos até a Álgebra dos dias atuais, essa passou por várias fases, em diferentes lugares e sob diferentes nomes. Na seção seguinte, falaremos um pouco mais sobre como o pensamento e a linguagem algébrica foram evoluindo ao longo do tempo.

2.2 A evolução da Álgebra (história)

Segundo Moura e Sousa (2005), alguns estudiosos, separaram o desenvolvimento da Álgebra em três diferentes estágios: retórica, sincopada e simbólica.

"A ***retórica*** ou *verbal* corresponderia à fase em que não se fazia o uso de símbolos nem abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente." (FIORENTINI et al, 1993, p. 79 – 80, **grifo nosso**).

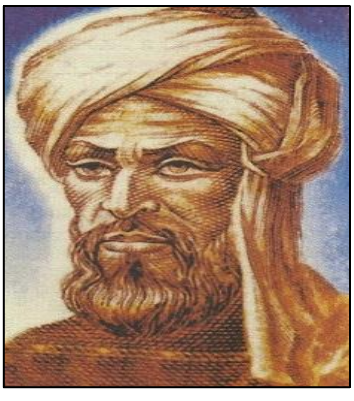
A Álgebra egípcia e babilônia se enquadra nesse período e, foi nesse estágio que os egípcios criaram a palavra "aha" para se referirem à incógnita, ou seja, para representar quantidades desconhecidas sem precisar recorrer ao uso do numeral.

> A criação egípcia marca o ponto de partida do desenvolvimento da linguagem matemática. Com ela, o pensamento matemático começa a desenvolver uma linguagem própria, diferente da linguagem usual das palavras. É, portanto, com a matemática egípcia, que a linguagem matemática começa a se separar da linguagem usual. Trata-se da linguagem matemática através de palavras, que apesar de ser um pequeno passo, quase despercebido por ainda usar palavras, foi importante no sentido de criar um vocabulário próprio – a língua da matemática. A linguagem Matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos (LIMA; MOISÉS, 2000, **apud** Moura e Sousa, 2005, p. 27-28).

Diofante de Alexandria foi um algebrista grego que viveu durante o século III e sua contribuição para a Álgebra será discutida mais adiante. Ele utilizou a palavra *aritmo*, associada ao número, para representar a incógnita. Já os árabes e os europeus utilizavam a palavra "coisa ou raiz". Neste último, a função da palavra é equivalente à função do zero na aritmética, representando a *casa* ou o valor desconhecido (MOURA; SOUSA, 2005).

Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi (780 - 850), matemático e astrônomo, foi um dos mestres da "Casa da Sabedoria" em Bagdá. Ele escreveu mais de meia dúzia de obras de astronomia e matemática, dentre elas, dois livros sobre aritmética e Álgebra que tiveram um papel importante na história da matemática. Em sua obra *De numero hindorum* (sobre a arte hindu de calcular), al-Khowarizmi apresenta os numerais hindus de maneira muito completa, o que leva Boyer (2001) a acreditar que, provavelmente, ele foi o responsável pela impressão muito difundida, mas falsa, de que o nosso sistema de numeração é de origem árabe. Pelo seu papel importante, mais tarde, o esquema de numeração usando numerais hindus foi chamado de algorismo ou algoritmo, derivado de al-Khowarizmi.

Figura 2 - Imagem de Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi



Fonte: www.engquimicasantossp.com.br/2015/07/al-khwarizmi-o-pai-da-algebra.html. Acesso em: 22 fev. 2024.

Além da sua importância no ramo da aritmética, al-Khowarizmi teve papel fundamental na Álgebra, termo que surgiu a partir do título do seu livro mais importante: *Al-jabr Wa'l muqabalah.*

> Não se sabe bem o que significam os termos *al-jabr* e *muqabalah* (...). A palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como "restauração" ou "completação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqabalah*, ao que se diz, refere-se a "redução" ou "equilíbrio" - isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação (BOYER, 2001, p. 156).

Na Figura 3, temos uma imagem que retrata a obra de Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, na qual o termo *Al-jabr Wa'l muqabalah* aparece.

Figura 3 - Primeira página do livro Al-jabr Wa-l muqabalah

Fonte: www.wikiwand.com/pt/Livro_da_Restaura%C3%A7%C3%A3o_e_do_Balanceamento. Acesso em: 22 fev. 2024

Apesar da Álgebra de al-Khowarizmi ser inteiramente expressa em palavras, inclusive os números, o *Al-jabr* se aproxima mais da Álgebra elementar de hoje do que as obras de Diofante e Brahmagupta, por exemplo. Isso porque o livro trata de uma exposição direta e elementar de equações, como era da preferência dos árabes, pois, no geral, essa resolução sistemática não trazia dificuldades para que eles aprendessem as soluções. Por esses e outros motivos al-Khowarizmi é, até hoje, chamado de o "pai da Álgebra". (BOYER, 2001)

A **linguagem sincopada** fez parte da fase intermediária entre a linguagem retórica e a linguagem simbólica. O que caracterizou essa fase foi o uso de notações especiais e abreviações para uma escrita mais reduzida de expressões algébricas, mas ainda existia a falta de símbolos para operações, relações e notação exponencial.

O maior algebrista grego, Diofante de Alexandria (Figura 4), que viveu durante o século III, fez o uso da linguagem sincopada em sua principal obra: *Arithmetica*.

> Nos seis livros preservados da Arithmetica há o uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ξ (talvez como a última letra de arithmos); o quadrado disto aparece como Δ^{Υ}, o cubo como K^{Υ}, a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^{\Upsilon}\Delta$, a quinta potência ou quadrado-cubo, como ΔK^{Υ}, e a sexta potência ou cubo-cubo como $k^{\Upsilon}k$ (BOYER, 2001, p. 123).

Figura 4 - Imagem de Diofante de Alexandria

Fonte: amatematicagrega.blogspot.com/2012/01/diofanto-de-alexandria.html. Acesso em: 22 fev. 2024.

A descrição de Boyer sobre a escrita utilizada por Diofante indica que, apesar de abreviada, não existiam símbolos específicos para todos os termos de uma expressão. A igualdade, por exemplo, era representada pela expressão: é igual a. Além disso, os coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos associados às potências. A adição de termos era indicada por justaposição, ou seja, não se utilizava um símbolo que representasse a soma, e a subtração, por uma letra que vinha antes do termo ao qual estava relacionada (pensando em termos atuais, a subtração seria representada pela letra “M”, abreviação de menos). Os termos independentes também vinham acompanhados de um símbolo (considerando o nosso alfabeto, esse símbolo seria a letra "u", abreviação de unidade). E as incógnitas eram representadas por um símbolo semelhante ao "x". Segundo Guelli (1992), para as potências Diofante utilizava:

> x1, para x
>
> xx2, para 2x (se a incógnita vinha acompanhada por um número diferente de 1, Diofante utilizava o símbolo xx)
>
> Q (de quadrado), para x^2
>
> C (de cubo), para x^3
>
> QQ (de quadrado e quadrado), para x^4
>
> QC (de quadrado e cubo), para x^5 (GUELLI, 1992, p.24).

O Quadro 1 abaixo é o conjunto de três tabelas do livro "Contando a história da Matemática" de Oscar Guelli, e compara a escrita de equações utilizando os símbolos atuais e os símbolos de Diofante.

Quadro 1 - Simbologia algébrica de equações

Símbolos atuais	Símbolos de Diofante
$x + 3 = 18$	$x1\ u3\ é\ igual\ a\ u18$
$x - 2 = 12$	$x1\ M\ u2\ é\ igual\ a\ u12$
$x + 3 = 12 - x$	$x1\ u3\ é\ igual\ a\ u12\ M\ x1$
$x - 9 = 7 - x$	$x1\ M\ u9\ é\ igual\ a\ u7\ M\ x1$
$4x + 12 = x + 36$	$xx4\ u12\ é\ igual\ a\ x1\ u36$
$10x - 2x = 4$	$xx10\ M\ xx2\ é\ igual\ a\ 4u$
$x^2 = 4$	$Q1\ é\ igual\ a\ u4$
$2x^2 = 4x$	$Q2\ é\ igual\ a\ xx4$
$3x^3 = 24$	$C3\ é\ igual\ a\ u24$
$x^4 = 8x^3$	$QQ1\ é\ igual\ a\ C8$

Fonte: Guelli (1992, p. 24)

Outro importante matemático que se destacou nesse estágio foi Brahmagupta. Ele foi um indiano do século VII e deu importantes contribuições na resolução de equações quadráticas, mesmo quando uma das raízes era negativa, e "aparentemente ele foi o primeiro a dar uma solução *geral* da equação diofantina $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros." (BOYER, 2001, p. 151).

Assim como a Álgebra de Diofante, Brahmagupta também possuía uma escrita abreviada, característica da linguagem sincopada.

> A adição era indicada por justaposição, a subtração colocando um ponto sobre o subtraendo, e a divisão colocando o divisor sob o dividendo, como em nossa notação para frações mas sem a barra. As operações de multiplicação e evolução (extração de raízes) bem como quantidades desconhecidas, eram representadas por abreviações das palavras adequadas (BOYER, 2001, p. 151).

A terceira e última fase ocorreu mais de 700 anos depois e se refere à **Álgebra simbólica,** utilizada até os dias atuais. A criação dessa nova linguagem foi consequência das mudanças que ocorreram na Europa na passagem da Idade Média para a Idade Moderna. Durante os séculos XV e XVI os comércios e o artesanato se desenvolveram, as cidades e as navegações foram expandidas e houve uma evolução da arte, da cultura e da ciência, incluindo a Matemática, período conhecido como Renascimento.

O francês François Viète (1540 - 1603) foi o responsável por fazer a transição entre a Álgebra sincopada para a Álgebra simbólica. Em sua obra "Introdução à arte analítica" (1591) propôs o uso das vogais para representar quantidades desconhecidas. "Aqui encontramos, pela primeira vez na Álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida" (DANGERFIELD et al., 2020, p. 208). Inicialmente, para representar as palavras mais e menos utilizava as letras $\underline{p}$ e $\underline{m}$, de *plus* e *moins*, respectivamente, e o traço indicava que as letras estavam sendo usadas como símbolos matemáticos. Apesar dos avanços na linguagem, as equações ainda não eram inteiramente escritas por símbolos, já que Viète utilizava palavras para representar potências ("área" se referindo ao quadrado e "cubo" se referindo à terceira potência) e a igualdade, que era escrita como "é igual a".

> $x^2 = 4$ ➡ A $\acute{a}rea$ é $igual\ a$ 4
> $x^3 = 8$ ➡ $A\ cubo$ é $igual\ a$ 8
> $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ➡ $A2$ $\acute{a}rea$ $\underline{m}$ $A5$ $\underline{p}$ 2 é $igual\ a$ 0
> (GUELLI, 1992, p.29).

Mais tarde, Viète adotou os sinais "$+$" e "$-$" e passou a utilizá-los para substituir os símbolos $\underline{p}$ e $\underline{m}$. "Para a multiplicação, Viète introduziu a palavra ***in***. Mas o passo mais importante desse grande estudioso foi representar coeficientes das incógnitas, quando indicados por letras, através de consoantes." (GUELLI, 1992, p. 30).

> $ax = b$ ➡ $B\ in\ A$ é $igual\ a\ C$
> $ax + b = 0$ ➡ $B\ in\ A + C$ é $igual\ a$ 0
> $ax^2 = b$ ➡ $B\ in\ A$ $\acute{a}rea$ é $igual\ a\ C$
> $ax^2 + bx + c = 0$ ➡ $B\ in\ A$ $\acute{a}rea$ $+ C\ in\ A + D$ é $igual\ a$ 0

(GUELLI, 1992, p.30).

Além de Viète, outros matemáticos contribuíram para o avanço da linguagem simbólica nessa mesma época.

> Em 1557 Robert Recorde (c. 1510-558) introduziu o sinal de igual, que é representado por duas retas paralelas, por acreditar que não havia algo tão idêntico quanto duas retas paralelas; Christoff Rudolff (1499 - 1545) em seu livro Die coss (1525) introduziu o símbolo de raiz quadrada "p"; Thomas Harriot(1560-1621) conseguiu eliminar as últimas palavras presentes nas equações, substituiu a palavra área por AA e cubo por AAA, também foi responsável por introduzir os símbolos > e <, em 1631. O símbolo X para multiplicação foi introduzido pelo matemático inglês William Oughtred (1574 – 1660). Em 1659, na obra de Johann Heinrich Rahn (1622-1676) o símbolo para divisão foi impresso pela primeira vez (OLIVEIRA et al., 2020, p. 353-4).

Dessa forma, as equações de 2º e 3º grau eram escritas da seguinte maneira:

$$x^2 = 81 \;\Rightarrow\; AA = 81$$

$$x^3 = 27 \;\Rightarrow\; AAA = 27$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; AA - A5 + 4 = 0$$

(GUELLI, 1992, p.30).

Em 1637, com a publicação de “*La Geómétrie*” de René Descartes (1596 - 1650), houve a sistematização da Álgebra simbólica e a conclusão da transição da Álgebra sincopada para a simbólica. Descartes utilizava as letras do início do alfabeto (a, b, c, d, …) para representar quantidades conhecidas e as letras do final do alfabeto (x, y, z, …) para representar quantidades desconhecidas. Além disso, introduziu o sinal “·” para multiplicação e criou as notações que utilizamos até hoje para os expoentes. Dessa forma, “A área”, que passou a ser escrito como “AA”, era, agora, representado por “A^2”.

Nessa época, graças a Fraçois Viète, os objetos de estudo da Matemática deixaram de ser apenas problemas concretos sobre valores, idades e quantidades, mas incluiu as próprias expressões algébricas. “A partir desse momento, as equações passaram a ser interpretadas como entendemos atualmente: equação, o idioma da álgebra.” (GUELLI, 1992, p. 31)

A evolução da Álgebra, como retratada neste capítulo, pode ser comparada ao ensino atual da Álgebra nas escolas. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os símbolos não são apresentados de imediato; em vez disso, os conceitos e as ideias implícitos neles são ensinados gradualmente. Essa abordagem revela uma notável semelhança entre a evolução histórica e o ensino atual. No próximo capítulo, exploraremos um pouco mais dessa relação.

3 O ENSINO DA ÁLGEBRA

Nesse capítulo, apresentamos uma breve discussão da relação entre a Álgebra ensinada nas escolas com o seu desenvolvimento histórico. Além disso, esboçamos algumas concepções da Álgebra de acordo com três diferentes autores do campo da Educação Matemática. Por fim, fazemos uma síntese dessas concepções, visando relacioná-las com o produto dessa dissertação.

3.1 Relação entre a Álgebra escolar e a história da Álgebra

A Álgebra, como visto no capítulo 2, teve um papel significativo na história da civilização e, por conseguinte, na história da matemática. Durante o seu processo de desenvolvimento, esse importante ramo da Matemática se tornou essencial para a resolução de problemas de diversas áreas. Isso aconteceu porque a Álgebra foi e ainda é uma ferramenta que nos permite representar determinada situação por meio de símbolos e, seguindo os passos de resolução, chegar a um resultado.

Este é, sem dúvida, um desafio para os professores de Matemática do ensino básico: ensinar os conceitos e processos relacionados à Álgebra sem deixar de lado a ideia de que ela não foi inventada, mas surgiu a partir das necessidades dos povos antigos para resolver determinados problemas. Além disso, ela é, até hoje, um instrumento fundamental para esse fim.

> Um dos desafios que nos é proposto é significar a álgebra que ensinamos aos nossos alunos. Temos, na maioria das vezes, nos esquecido do quando e do por que aqueles conhecimentos passaram a fazer parte da vida e da história do homem. Assim, um possível caminho é o processo histórico de sistematização dos conhecimentos que deve ser evidenciado como ferramenta para a construção do significado dos conceitos, por terem sido constituídos a partir de necessidades do próprio homem, e por isso trazem em si uma finalidade. (SILVA et al., 2015, p. 136).

Portanto, percebe-se que, unir a lógica da construção algébrica e a história pode contribuir para que os alunos tenham uma experiência mais produtiva em relação à aprendizagem da Álgebra. Entender de onde certos métodos e procedimentos vieram e porque surgiram, certamente, traz mais sentido ao ensino. Ainda, de acordo com Juciane Silva et. al. (2015) temos que:

> A adoção da construção lógico-histórica do conceito como método de ensino poderá ser capaz de atender às inquietações dos alunos sobre o "para que aprender álgebra", permitindo-lhes perceber que a matemática como as outras ciências não foram "inventadas" miraculosamente por alguém, mas surgiu a partir da necessidade de resolver determinada situação, e contou com avanços e retrocessos, e mais ainda: não está acabada, é passível de mudança, de reelaboração. (SILVA, Juciane et. al., 2015, p. 136).

Portanto, a História da Álgebra é um ramo importante para a formação de um pensamento algébrico. É indiscutível que, na educação, a Álgebra é construída conforme a história. Os alunos, desde os primeiros anos do ensino fundamental veem conteúdos relacionados à Álgebra, com o foco no pensamento e uma escrita mais detalhada. Com o passar dos anos, vão evoluindo na criação de uma linguagem algébrica, até chegar na utilização dos símbolos e na manipulação dos termos.

3.2 As concepções da Álgebra

Em contraste com o que foi citado na seção anterior, existem ainda, muitas concepções sobre o ensino e utilização da Álgebra. Para isso, fizemos estudos sobre as ideias da Álgebra de acordo com os autores: Usiskin; Fiorentini, Miorim e Miguel; e Lins e Gimenez.

Segundo Usiskin (2004, p. 9) “não é fácil definir a Álgebra”. No livro didático “Matemática Bianchini” para o 7° ano do ensino fundamental, o autor conceitua a Álgebra como “a parte da Matemática que trabalha com grandezas cujos valores variam (variáveis) ou são desconhecidas (incógnitas) e que são representados por símbolos” (Bianchini, 2022, p. 110). Já Lins e Gimenez (2001) afirmam que

> não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 89).

Ainda, segundo Usiskin (2004), “a Álgebra da escola média tem a ver com a compreensão do significado das “letras” (hoje comumente chamadas variáveis) e das operações com elas.” (USISKIN, 2004, p. 9) Porém, não devemos considerar que a Álgebra do ensino médio pode ser limitada ao estudo das variáveis, até porque esse termo possui características diversificadas.

O mesmo autor cita dois textos da década de 50 que trazem conceitos de variáveis. No mais antigo deles, de 1951, Hart[5] afirma: “Uma variável é um número literal que pode assumir dois ou mais valores durante uma determinada discussão.” (HART *apud* USISKIN, 2004, p. 10) Em outro texto, de 1959, os autores May e Van Engen[6] apresentam uma análise, segundo Usiskin, mais cuidadosa desse termo:

> Uma variável, grosso modo, é um símbolo pelo qual se substituem os nomes de alguns objetos, comumente números, em álgebra. Uma variável está sempre associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores da variável. (MAY; VAN ENGEN *apud* USISKIN, 2004, p. 10-11).

Ainda sobre as diferentes ideias do que é uma variável, Usiskin afirma que a concepção desse termo como símbolo que representa, sem distinção, os elementos de um conjunto, raramente é questionada.

Porém, essa concepção não é única. A escola formalista surgiu durante a Crise dos Fundamentos da Matemática, que inicia com o surgimento de contradições dentro da Teoria dos Conjuntos. (BUSSMANN, 2011) Essa escola, na sua busca pelo desenvolvimento de axiomas que solucionassem essas contradições, “considerava as variáveis e todos os demais símbolos matemáticos como meros sinais no papel, relacionados uns aos outros por propriedades assumidas ou deduzidas que, por sua vez, também não passam de sinais no papel.” (USISKIN, 2004, p. 11)

Para muitos alunos do ensino básico, as variáveis são símbolos que sempre representam um número. Contudo, mesmo no primeiro ano do Ensino Fundamental I, os alunos utilizam as letras A, B, C e D, por exemplo, para representar os vértices de um quadrilátero. Ou, até mesmo, a notação “AB” para se referir ao lado de um polígono cujas extremidades são os vértices A e B.

Para outros alunos, as variáveis podem ser representadas somente por letras. Muitos consideram a equação 1 da Figura 5 abaixo como “coisas da Álgebra”, enquanto a equação 2

---

[5] Hart, Walter W. *A First Course in Algebra*. 2ª ed. Boston: D.C. Heath & Co., 1951a. *A Second Course in Algebra*. 2ª ed., ampliada. Boston: D.C. Heath & Co., 1951b.

[6] May, Kenneth O.; Henry Van Engen. "Relations and Functions". Em *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, Twenty-fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mthematics, pp. 65-100. Washington, D.C.: NCTM, 1959.

não. Ainda que o espaço vazio da segunda equação deve ser preenchido com o número 11, que é o valor equivalente a x na primeira equação.

Figura 5 - Diferentes maneiras de representar uma incógnita

Equação 1	Equação 2
$23 - x = 12$	$23 - \_\_\_ = 12$

Fonte: elaborada pela autora

Seguindo essa linha, Usiskin elabora quatro diferentes concepções da Álgebra correspondentes aos diversos usos das variáveis. Segundo ele,

> **as finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com,* **concepções** *diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis.**" (USISKIN, 2004, p. 13, **grifo** e *itálico* do autor).

Abaixo apresentaremos as quatro concepções da Álgebra seguindo as ideias de Usiskin (2004) e uma breve descrição de cada uma delas:

- **Concepção 1: A Álgebra como aritmética generalizada**

Segundo Usiskin, essa concepção, as variáveis são pensadas como generalizadoras de modelos. Ele continua dizendo que as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar* e que essas técnicas são tão importantes para a aritmética assim como é para a Álgebra. A linguagem algébrica, quando comparada com o português, por exemplo, se assemelha à descrição numérica, e, de acordo com o autor, "é impossível estudar aritmética adequadamente sem lidar implícita ou explicitamente com variáveis." (USISKIN, 2004, p. 14). Veja, na imagem a seguir, dois exemplos de aplicação dessa concepção.

Figura 6 - Aplicação da Concepção 1 de Usiskin

Modelo	**Generalização**
$-1 \cdot 5 = -5$	$-x \cdot y = -xy$

Fonte: adaptado de Usiskin (2004, p.13)

Figura 7 - Aplicação da Concepção 1 de Usiskin

Modelo	**Generalização**
$3 + 6 = 6 + 3$	$a + b = b + a$

Fonte: elaborada pela autora

- **Concepção 2: A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas**

Nessa concepção as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes* e as instruções-chave, nesse caso, são *simplificar* e *resolver*. Veja um exemplo:

Figura 8 - Exemplo da Concepção 2 de Usiskin

Problema: Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número.

Tradução para a linguagem algébrica: $5x + 3 = 40$

Fonte: adaptado de Usiskin (2004, p.14)

Para muitos alunos, problemas desse tipo podem ser facilmente resolvidos “de cabeça”, subtraindo 3 de 40 e, em seguida, dividindo o resultado por 5. Porém, a passagem da aritmética para a Álgebra pode gerar certo desconforto e dificuldade. Isto acontece porque a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3 e ao resolver seguindo os procedimentos algébricos, o aluno deveria realizar as operações inversas. Veja:

Figura 9 - Procedimentos para resolver uma equação

$$5x + 3 = 40$$
$$5x + 3 - 3 = 40 - 3 \quad \text{(subtrair 3 de cada membro da equação)}$$
$$5x = 37$$
$$5x \div 5 = 37 \div 5 \quad \text{(dividir ambos os membros por 5)}$$
$$x = 7{,}4$$

Fonte: adaptado de Usiskin (2004, p.14)

De acordo com o exemplo, percebe-se que, na resolução algébrica, o raciocínio ocorre de forma inversa àquele utilizado numa resolução aritmética.

- **Concepção 3: A Álgebra como estudo de relações entre grandezas**

Nessa concepção uma variável é um argumento (representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (representa um número do qual dependem outros números). O que difere esta da anterior é que, agora, as variáveis assumem diferentes valores. Nesse contexto, existem a noção de variáveis dependentes e independentes e "as funções surgem quase que imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem do argumento ou parâmetro x." (USISKIN, 2004, p. 16).

O exemplo a seguir descreve os passos para encontrar a equação de uma reta que passa pelo ponto (6, 2) com inclinação 11, a partir da equação $y = mx + b$. Nessa situação, é simples para um professor compreender que se trata de uma função de variável x no domínio e variável y no contradomínio, mas para o aluno pode não ser, já que não fica claro se o argumento é m, x ou b.

Figura 10 - Passo-a-passo para encontrar a equação de uma reta

$y = mx + b$ (modelo)

$y = 11x + b$ (substituir m pelo seu valor – nesse caso, m é uma constante e não um parâmetro)

$2 = 11 \cdot 6 + b$ (substituir o par de valores associados de x e y – nesse caso, b transformou-se de parâmetro para incógnita e, portanto, $b = -64$)

$y = 11x - 64$ (Essa é a resposta. embora tenhamos dado valores para x e y, não podemos considerar que a equação geral da reta é $2 = 11 \cdot 6 - 64$. Isso porque x e y não são incógnitas, mas x é o argumento e y um valor associado a x, portanto podem variar)

Fonte: adaptado de Usiskin (2004, p.16-17)

- **Concepção 4: A Álgebra como estudo das estruturas**

Nessa concepção as variáveis são utilizadas como sinais arbitrários.

> A concepção de variável nesse caso não coincide com nenhuma daquelas discutidas anteriormente. Não se trata de nenhuma função ou relação; a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, de modo que a variável não atua como uma incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado. (USISKIN, 2004, p. 18).

Nesse sentido, a Álgebra é reconhecida como a análise das estruturas através das propriedades das variáveis.

Podemos considerar o problema da imagem a seguir como uma aplicação dessa concepção.

Figura 11 - Aplicação da Concepção 4 de Usiskin

Problema: fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$

Resposta: $(3x + 22a)(x - 6a)$

Fonte: adaptado de Usiskin (2004, p.18)

Apesar da importância de ter em mente os referenciais (geralmente os números reais), é necessário que os alunos saibam operar com as variáveis, sem ter que recorrer a esses referenciais. Por exemplo, para testar a resposta obtida no problema, raramente é pedido aos alunos que substituam os valores de x e a por um número real qualquer e, dessa forma, recorram a uma generalização aritmética, mas que testem a resposta multiplicando os binômios, utilizando as propriedades das operações com números reais e polinômios.

Assim como Usiskin (2004), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), dividem as concepções da Álgebra em quatro tópicos. Porém, esses autores, baseiam a elaboração dessas concepções no desenvolvimento histórico da Álgebra apresentado por eles a partir de cinco diferentes leituras.

De acordo com os autores, a primeira leitura

> Considera como ponto de referência o momento em que se teve a clara percepção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento matemático ultrapassava o domínio exclusivo do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 78).

A segunda leva em consideração as diversas culturas que contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra, como a egípcia e a babilônica, por exemplo, citadas no capítulo 2; A terceira leitura divide o desenvolvimento desse ramo da Matemática em três fases: retórica, sincopada e simbólica, ambas discutidas na seção 2.2; A quarta leitura "assenta-se não mais nos aspectos exteriores da linguagem algébrica, isto é, no seu maior ou menor grau de concisão, mas na significação que é atribuída aos símbolos desta linguagem." (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 80); A quinta e última tem como base os métodos de abordagem da resolução de equações.

Fundamentando-se nestas cinco leituras do desenvolvimento histórico da Álgebra, os autores elaboraram as quatro concepções descritas a seguir:

- **Concepção 1: Processológica**

Nessa concepção a Álgebra é entendida como um conjunto de técnicas, processos e métodos, que consistem em processos interativos, para resolver determinados problemas, na qual a resolução é baseada numa sequência de passos padronizados. Essa concepção não se limita apenas na linguagem, uma vez que a existência do pensamento algébrico não está condicionada à necessidade de uma forma de linguagem não retórica para expressá-lo.

- **Concepção 2: Linguístico-estilística**

Nesse contexto, a Álgebra é tida como uma linguagem específica criada com o objetivo de expressar os procedimentos algébricos de uma maneira mais concisa. Segundo Fiorentini, Miorim, Miguel (1993), essa forma de expressar o pensamento algébrico é mais rigorosa que a concepção processológico, visto que "defende a não-suficiência da existência de um pensamento algébrico para que a Álgebra se constitua como um campo autônomo do conhecimento matemático." (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 82). Dessa forma, há uma distinção entre o pensamento e maneira como ele é expresso.

- **Concepção 3: Linguístico-sintático-semântica**

Assim como na concepção 2, essa também se baseia em uma linguagem específica e concisa, mas preza pelo significado e relação entre os termos. De acordo com os autores, essa concepção é ainda mais rigorosa que a linguístico-estilística, uma vez que, não se resume apenas à existência de uma linguagem específica para expressar essa forma de pensamento, mas seu caráter semântico possibilita o desenvolvimento dessa linguagem para adquirir uma dimensão operatória e revelar o seu potencial de transformação e utilidade prática.

- **Concepção 4: Linguístico-postulacional**

Esta concepção se assemelha à anterior pelo fato de considerar a Álgebra como uma linguagem simbólica. Nela,

> o caráter simbólico do signo linguístico é ampliado, isto é, ele passa a representar não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades matemáticas que não estão, necessariamente, sujeitas ao tratamento quantitativo. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83).

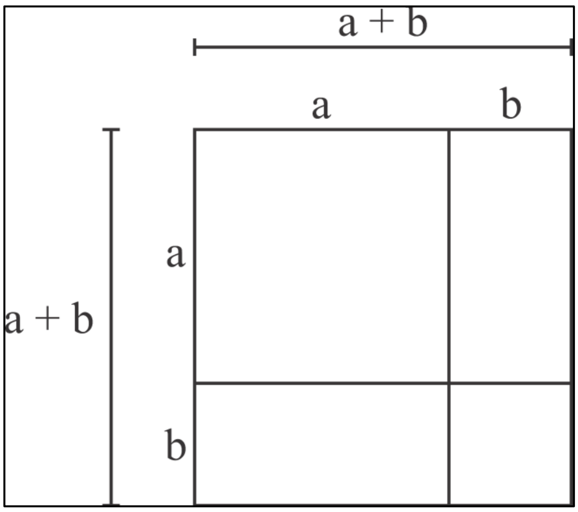
Os autores ainda apresentam outras concepções referentes à Educação Algébrica relacionando-as com as concepções da Álgebra apresentadas até aqui.

A primeira, chamada de linguístico-pragmática, "vincula o papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção linguístico-semântico-sintática dessa disciplina." (FIORENTINI, MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83). Nessa concepção, o domínio, mesmo que mecânico, das técnicas adquiridas para o "transformismo algébrico" [7] seria suficiente para que o aluno resolvesse qualquer tipo de problema.

A segunda concepção da Educação Algébrica, também de cunho linguístico, foi denominada como fundamentalista-estrutural. Essa concepção é baseada na concepção linguístico-postulacional da Álgebra. Agora, não é suficiente que o aluno tenha apenas o domínio das técnicas de "transformismo algébrico", mas que compreenda cada passagem destas técnicas. Dessa forma, o estudante estaria capacitado a utilizá-las na resolução de problemas de diferentes contextos.

A terceira, intitulada fundamentalista-analógica, assim como a linguístico-pragmática, vincula o papel pedagógico da Álgebra à concepção linguístico-semântico-sintática. Essa concepção busca recuperar o valor instrumental da Álgebra, mantendo o seu caráter fundamentalista de justificar os passos no transformismo algébrico, dessa forma procura um equilíbrio entre as duas concepções anteriores. Essa justificação, acontece, na maioria das vezes, por representações geométricas. Acredita-se que uma "Álgebra geométrica" facilita a visualização das identidades algébricas. Um exemplo seria a demonstração da identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, por meio da área de um quadrado de lado ab, como ilustrado na Figura 12.

Figura 12 - Representação geométrica da identidade (a + b)² = a² + 2ab + b²



Fonte: elaborada pela autora

Os autores defendem que reduzir o pensamento algébrico à linguagem algébrica é um ponto comum, porém negativo, nas três concepções da Educação Algébrica.

[7] "Processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas" (FIORENTINI, et al, 1993, p. 83).

> Todas essas concepções de Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída. Em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao “transformismo algébrico”. (FIORENTINI, MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

Ao comparar as concepções da Álgebra e as concepções da Educação Algébrica, percebe-se que as primeiras favoreciam a linguagem em vez do pensamento algébrico. Da mesma forma, as últimas acabaram focando no ensino de uma linguagem algébrica já estabelecida, deixando de construir com os alunos o pensamento algébrico.

Assim como citado anteriormente, Lins e Gimenez (2001) partem do pressuposto de que não existe uma concordância do que seja pensar algebricamente, mas sim a respeito de quais são as coisas da Álgebra. Segundo os autores, esse consenso acarreta dois problemas. O primeiro diz respeito à falta de conhecimento sobre outros tópicos que poderiam ou não ser considerados “coisas da Álgebra”. Já o segundo relaciona-se à dificuldade de organização de um currículo para a Educação Algébrica. A partir desse ponto, Lins e Gimenez (2001) identificam quatro concepções de atividade e Educação Algébrica. Apesar dos autores não nomearem essas concepções, iremos identificá-las como apresentado a seguir:

- **Concepção letrista:**

Esta concepção reduz a Álgebra ao cálculo e representação com letras.

> A ideia central nessa linha de pensamento, não é simplesmente adotar uma caracterização da atividade algébrica como "cálculo literal", mas buscar mostrar como uma suposta linha de desenvolvimento histórico da álgebra pode ser retraçada seguindo o desenvolvimento das "notações algébricas". (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 90).

Os autores defendem que, historicamente, essa ideia deixa de fora os trabalhos de Al-Khowarizmi, pois, como foi visto no capítulo 2, a Álgebra desse matemático era inteiramente expressa em palavras, inclusive os números.

- **Concepção conteudista:**

Nesta concepção a Álgebra é definida a partir dos conteúdos algébricos. Assim como na concepção anterior, Lins e Gimenez (2001) defendem que essa ideia deixa de fora outras coisas que poderiam ser caracterizadas como atividade algébrica. Sobre esta limitação, os autores apresentam a seguinte “conta”

$$\frac{5+5+5}{3} \qquad (3.1)$$

A partir daí questionam se estaríamos diante de uma atividade algébrica ou não. Seguindo a ideia da concepção letrista e conteudista a resposta seria “não”, pois não há, nesse problema, o uso de “letras” (ou variáveis). Mas se tivéssemos quatro parcelas iguais a 5 e dividíssemos o resultado por 4? E 6 parcelas? 10 parcelas? ou mais ainda, se tivéssemos 1000 parcelas? Teríamos, então, o seguinte esquema:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \text{ com } a_1 = a_2 = \cdots = a_n \qquad (3.2)$$

Para Lins e Gimenez (2001) essa ideia geral pode estar implícita na resolução da equação 3.2, concluindo que a atividade algébrica estava presente lá.

- **Concepção de ação:**

Segundo os autores, nessa concepção “a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal” (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 99).

> Podemos considerar que o pensamento formal é algébrico, caso em que todo o pensamento de alguém que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica, mas isso nos deixa com um horizonte inaceitavelmente amplo. Talvez devamos nos restringir no caso da atividade algébrica, ao pensamento que opera sobre as operações (concretas) aritméticas, o que nos deixa com a noção de álgebra escolar como aritmética generalizada, e, outra vez, com uma caracterização dependente de conteúdos. (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 99-100).

Essa abordagem deixa muitos aspectos de fora. Sobre isso, os autores apresentam um exemplo: “se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano[8], vamos negar a esse episódio o status de atividade algébrica?” (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 100).

[8] Estágio que ocorre em sujeitos de 12 anos em diante. Nesse período o pensamento está formado para a abstração e o adolescente possui a capacidade de desenvolver maiores conhecimentos matemáticos.

- **Concepção conceitual:**

Nessa concepção, os autores consideram a proposta do psicólogo francês G. Vergnaud, o qual substitui a noção de conceito pela noção de campo conceitual.

> Um campo conceitual é constituído por: a) um conjunto de esquemas operacionais e de invariantes; b) um conjunto de formas notacionais; e, c) um conjunto de problemas que, a um mesmo tempo, são resolvidos por aqueles esquemas que dão sentido a eles. (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 102-103).

Lins e Gimenez afirmam que podemos pensar em algo como "campo conceitual da Álgebra elementar", mas, por ser muito amplo, alegam que Vergnaud e seus seguidores preferiam tratar, por exemplo, de algo como "campo conceitual das equações do 1º grau". Apesar de fazer referências aos conteúdos e à notação, os autores ressaltam que não se pode caracterizá-lo por nenhuma dessas descrições.

Nos Quadros 2 e 3, apresentamos uma síntese das diversas concepções da Álgebra discutidas neste capítulo e que nos mostram a multiplicidade de abordagens e a importância de entender a Álgebra como um campo em evolução, essencial tanto para a resolução de problemas quanto para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 2 – Síntese das concepções da Álgebra no ensino

Quadro Síntese Concepções da Álgebra no Ensino		
Pesquisadores	**Concepção**	**Característica principal**
Usiskin (2004)	Álgebra como aritmética generalizada	Variáveis generalizam modelos aritméticos
	Álgebra como estudo de procedimentos	Foco na simplificação e resolução de problemas.
	Álgebra como estudo de relações	Variáveis como argumentos e parâmetros em funções.
	Álgebra como estudo de estruturas	Análise das propriedades das variáveis sem referenciais numéricos diretos.
Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)	Processológica	Técnicas e métodos para resolver problemas.
	Linguístico-estilística	Linguagem específica para expressar o pensamento algébrico.
	Linguístico-sintático-semântica	Linguagem concisa com significado e relação entre termos.
	Linguístico-postulacional	Representação de entidades matemáticas abstratas.
Lins e Gimenez (2001)	Concepção letrista	Foco no cálculo e representação com letras.
	Concepção conteudista	Definição pela presença de conteúdos algébricos específicos.
	Concepção de ação	Resulta da ação do pensamento formal sobre operações aritméticas.
	Concepção conceitual	Campo conceitual que inclui esquemas operacionais, notações e problemas específicos.

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 3 - Síntese das concepções pedagógicas

Quadro Síntese Concepções Pedagógicas		
Pesquisadores	**Concepção**	**Característica principal**
Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)	Linguístico-pragmática	Foco na resolução de problemas através de técnicas algébricas.
	Fundamentalista-estrutural	Compreensão e justificação dos procedimentos algébricos.
	Fundamentalista-analógica	Equilíbrio entre resolução de problemas e compreensão justificada, utilizando representações geométricas.

Fonte: Elaborado pela autora

Nos estudos mencionados anteriormente os autores descrevem concepções diversificadas sobre a Álgebra e utilizam diferentes formulações para diferenciar essas concepções. Para Usiskin (2004), por exemplo, a Álgebra se caracteriza como estudo que auxilia na resolução de problemas, baseado na utilização da variável no contexto matemático. Em contrapartida, Lins e Gimenez (2001) têm como base as diferentes atividades algébricas utilizadas no contexto escolar. Já a proposta de Fiorentini; Miorim e Miguel (1993) é baseada no desenvolvimento histórico da Álgebra.

Como exposto neste capítulo, vimos que no contexto do ensino da Álgebra existem muitas concepções que, à primeira vista podem parecer disjuntas, mas carregam consigo algumas similaridades, se pensarmos numa perspectiva de uso dessas concepções em situações de ensino e aprendizagem.

Embora concepções e abordagens distintas possam contribuir para aumentar os obstáculos epistemológicos, cognitivos e didáticos, é importante que pensemos nessas concepções de forma a levá-las para o contexto da sala de aula, mostrando a importância da Álgebra no ensino de Matemática e, como, dependendo do nível de escolaridade em que ela é abordada, entender os aspectos mais relevantes para cada nível, afim de consolidar um raciocínio algébrico nos estudantes que estabeleça a transposição da Aritmética para a Álgebra e toda a rede de conhecimento envolvendo o letramento algébrico, em seu caráter tanto sintático quanto semântico.

Ainda, levando em consideração as concepções de Álgebra e perspectivas para o seu ensino a partir dos referenciais deste capítulo, o desenvolvimento do nosso recurso educacional tem por orientação as ideias aqui apresentadas e, para introduzir os conceitos algébricos de expressões e equações lineares no contexto do 7° ano do Ensino Fundamental II, traremos uma abordagem didática com o uso de jogos, a fim de promover uma prática mais divertida, porém alicerçada nos fundamentos algébricos que queremos tratar. No próximo capítulo, esboçaremos em detalhes o desenvolvimento dos jogos elaborados, relatando como eles dialogam com as concepções de Álgebra, bem como falaremos um pouco sobre o uso de jogos em seu ensino.

4 ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRESCRIÇÕES CURRICULARES E POSSIBILIDADES METODOLÓGICAS PARA O SEU ENSINO

Iniciamos esse capítulo evidenciando como a Álgebra se apresenta na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), levando em consideração as prescrições para o Ensino Fundamental e relacionando as competências e habilidades descritas com algumas atividades presentes nos livros didáticos de Matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Mais adiante, abordaremos a utilização de jogos no ensino, em especial no ensino da Matemática, e como eles podem servir como ferramenta para introduzir a linguagem simbólica da Álgebra aos alunos do 7° ano, bem como contribuir para uma transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

4.1 A Álgebra na BNCC e livros didáticos

A BNCC é um documento normativo que define, de maneira orgânica e progressiva, as aprendizagens essenciais das quais os estudantes precisam desenvolver ao longo de etapas e diferentes modalidades de ensino. (BRASIL, 2017). Esse documento afirma que “O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BRASIL, 2017, p. 265).

Ainda, o documento ressalta que a Matemática, no Ensino Fundamental, por meio da articulação da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade,

> precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2017, p. 265).

Dentre as 8 (oito) competências específicas ao campo da Matemática que a BNCC destaca para o Ensino Fundamental, chamamos atenção para a competência 3 a qual define que o estudante deve

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p.267).

Ao encontro com essa competência, buscamos com nossa proposta de trabalho levar os estudantes a entenderem as relações do conhecimento aritmético com o algébrico, permitindo que eles possam evoluir do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, de maneira segura, aplicando conhecimentos já adquiridos na construção de novos.

Para a unidade temática “Álgebra”, a BNCC do Ensino Fundamental destaca que a finalidade maior é desenvolver o pensamento algébrico. De acordo com o documento, esse pensamento “é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2017. p. 270).

Ainda, a BNCC enfatiza que as ideias matemáticas essenciais da Álgebra para o Ensino Fundamental II (EFII), são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. O que implica dizer que nessa etapa de escolarização, o ensino de Álgebra deve “enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.” (BRASIL, 2017, p. 270).

Nos Quadros 4 e 5 abaixo, destacamos, dentro da unidade temática Álgebra, os objetos de conhecimento matemáticos e as habilidades tratados em cada uma das séries do Ensino Fundamental, até o 7o ano, série na qual propomos a aplicação dos jogos elaborados por nós.

Quadro 4 - Objetos de conhecimento e Habilidades para a Álgebra (EFI)

Ano	Objetos de Conhecimento	Habilidades
1º	Sequências recursivas: observações de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	**(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.**
2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	**(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.**
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	**(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.**
		(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	**(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.**
	Relação de igualdade	**(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.**
4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	**(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.**
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	**(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.**
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	**(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.**
	Propriedades da igualdade	**(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.**

Fonte: Adaptado da BNCC (2017, p. 278 – 310)

Quadro 5 - Objetos de conhecimento e Habilidades para a Álgebra (5°, 6° e 7° ano do EF)

Unidade temática: Álgebra (5°, 6º e 7° ano do Ensino Fundamental)		
Ano	**Objetos do Conhecimento**	**Habilidades**
5º	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	**(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.**
		(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	**(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.**
		(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
6º	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.**
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.**
7º	Linguagem algébrica: variável e incógnita	**EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.**
		(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
		(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.**
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.**
	Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.**

Fonte: Adaptado da BNCC (2017, p. 278 – 310)

Como podemos verificar nos Quadro 4 e 5, a BNCC preconiza ser imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – anos iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A ideia, já é iniciar os estudantes em aspectos de relação da aritmética com a álgebra, mesmo sem deixar tão evidente essa relação.

Será no Ensino Fundamental II, que os estudos de Álgebra se aprofundam, ampliando o trabalho realizado no Ensino Fundamental I. É nessa fase que os estudantes devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas.

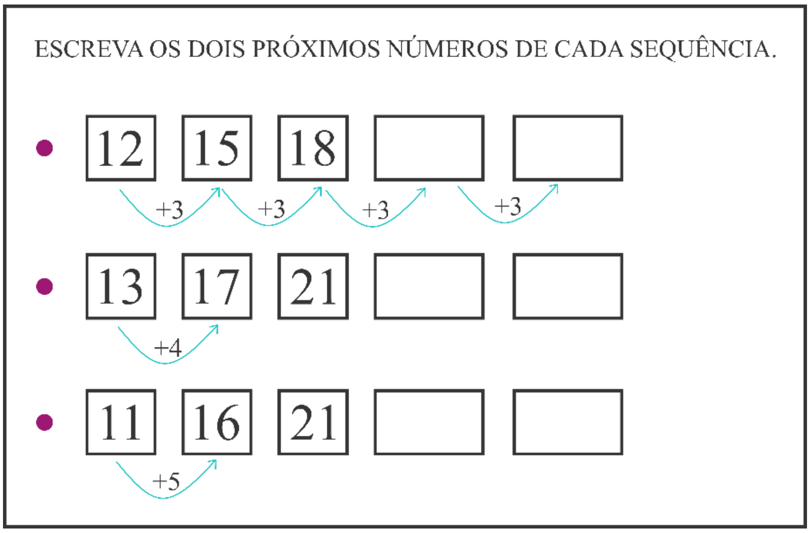
Durante os cinco primeiros anos do Ensino Fundamental I, o ensino da Álgebra está relacionado ao estudo de sequências recursivas, identificação de padrões, relação de igualdade, relação entre operações inversas, propriedades básicas da igualdade, noção de equivalência, grandezas diretamente proporcionais e problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

Essa abordagem de conteúdos é crucial para que a passagem para um pensamento mais algebrizado ocorra de maneira progressiva, trazendo uma compreensão para os estudantes da linguagem algébrica com os objetos matemáticos tratados.

Nas figuras que se seguem (Figuras 13 a 18), apresentamos algumas atividades retiradas dos livros didáticos de Matemática do 1º ao 6º ano do Ensino Fundamental, todos organizados pela editora Moderna e aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Tais atividades são exemplos de como a Álgebra é abordada nos anos iniciais e no 6° ano e a sua evolução no decorrer dessas séries, tendo as prescrições da BNCC como aporte.

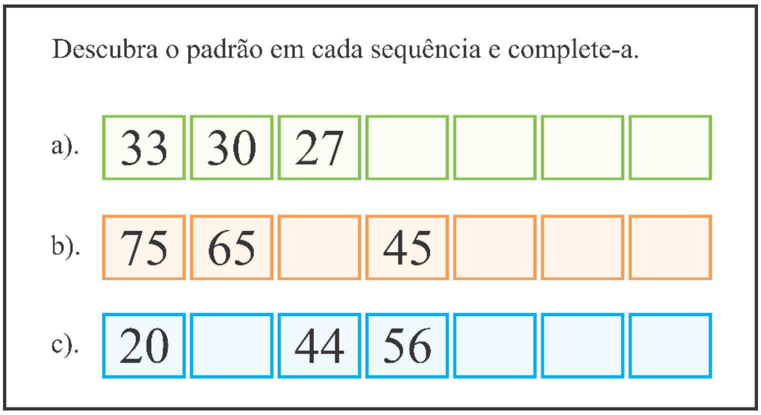
As Figuras 13 e 14 ilustram duas atividades retirada do livro “Buriti Mais” do 1º e 2º ano, respectivamente. Como retratado pela BNCC (ver Quadro 4), durante esses anos, o Ensino da Álgebra é focado no estudo de sequências recursivas, nas quais os alunos são levados a identificar regularidades e padrões e determinar elementos faltantes.

Figura 13 - Atividade retirada do livro Buriti Mais (1º ano EF)



Fonte: adaptado de Gay (2021, P.61)

Figura 14 - Atividade retirada do livro Buriti Mais (2º ano EF)



Fonte: adaptado de Gay (2021, P.67)

No 3º ano, além da continuidade do estudo de sequências recursivas, outra habilidade referente à Álgebra é a compreensão da ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações que resultem na mesma soma ou diferença. Nesse contexto, mesmo que de maneira implícita, os estudantes já são levados a pensar nas operações inversas para resolver certos tipos de problemas.

Um exemplo dessa habilidade está ilustrado na Figura 15. Nessa atividade, retirada do livro "Presente Mais - Matemática", destinado ao 3º ano, os estudantes precisam completar as lacunas de forma que as igualdades se tornem verdadeiras. No primeiro item, por exemplo, o estudante pode resolver a operação 7 + 9 e, em seguida, subtrair 2 unidades. Mesmo que ele não desenvolva a subtração de forma tão evidente, ao pensar em um número que somado a 2 irá resultar em 16, ele já é levado a entender a adição e a subtração como operações inversas. A construção desse pensamento algébrico desde o Ensino Fundamental I é importante, pois é uma das principais bases para entender a ideia de resolução das equações mais adiante.

Figura 15 - Atividade retirada do livro Presente Mais - Matemática (3º ano EF)

Complete as igualdades.

a) $7 + 9 = 2 +$ _______ c) $23 -$ _______ $= 9 + 8$

b) $12 + 7 = 25 -$ _______ d) $5 +$ _______ $= 14 + 16$

Fonte: adaptado de Imenes e Lellis (2021, P.33)

Já no 4º ano, o estudo das sequências recursivas é voltado para aquelas formadas por múltiplos de um número natural ou por números que deixam o mesmo resto ao ser dividido por um número natural diferente de zero. Ainda nesse ano, há a consolidação do reconhecimento das relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão. Além disso, os alunos começam a compreender as propriedades da igualdade: reconhecem que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos e determinam o número desconhecido em igualdades envolvendo as operações fundamentais. A Figura 16, ilustra uma atividade retirada do livro Buriti Mais. Esse é um exemplo de como as propriedades da igualdade são desenvolvidas durante o 4º ano.

Figura 16 - Atividade retirada do livro Buriti Mais (4º ano EF)

Augusto ganhou 50 reais de sua mãe e 25 de seu tio. Já Antônio, seu irmão, ganhou 36 reais da mãe e 39 do tio.

a) Com quantos reais cada um ficou?

b) Identifique a sentença que estabelece uma relação entre a quantia de Augusto e a de Antônio.

- [ ] $50 + 25 = 36 + 39$
- [ ] $50 + 25 < 36 + 39$
- [ ] $50 + 25 > 36 + 39$

c) Augusto gastou 13 reais do que ganhou comprando um brinquedo e 5 reais comprando um suco. Antônio gastou 11 reais com um sanduíche e 7 reais com uma revista em quadrinhos. Com quanto cada um ficou?

d) Uma nova sentença pode ser associada à relação entre as quantias que os irmãos ficaram é:

- [ ] $50 + 25 - 18 = 36 + 39 - 18$
- [ ] $50 + 25 - 18 < 36 + 39 - 18$
- [ ] $50 + 25 - 18 > 36 + 39 - 18$

Fonte: adaptado de Gay (2021, P.58)

No 5° e 6° ano, além de reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número, os estudantes são levados a utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. Além disso, é introduzida a resolução de problemas que envolvem partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, bem como a razão entre as partes e umas das partes e o todo e a variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas. As Figuras 17 e 18 ilustram duas atividades retiradas do livro Buriti Mais do 5º ano e do livro Desafios da Matemática 6º ano, respectivamente.

Figura 17 - Atividade sobre variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas retirada do livro Buriti Mais (5° ano EF)

Veja quais são os ingredientes para uma receita de biscoitinhos de goiabada.

Ingredientes

2 xícaras (chá) de farinha de trigo

150 gramas de manteiga

1 xícara (chá) de açúcar

3 colheres (sopa) de água

150 gramas de goiabada firme cortada em tiras finas

a) Sabendo que essa receita rende 36 biscoitinhos, quantos gramas de goiabada seriam necessários para fazer 18 biscoitinhos? E 72? Explique suas respostas.

b) Maria quer fazer 360 desses biscoitinhos para vender. Quato ela precisará de cada ingrediente para fazer esses biscoitinhos? Complete a lista a seguir com as quantidades correspondentes.

______ xícaras (chá) de farinha de trigo

______ gramas de manteiga

______ xícaras (chá) de açúcar

______ colheres (sopa) de água

______ gramas de goiabada firme cortada em tiras finas

Fonte: adaptado de Gay (2021, p.115)

Figura 18 - Atividade sobre razão entre as partes retirada do livro Desafios da Matemática (6° ano EF)

Em um jogo de *videogame*, Paula e Vítor têm, junto, 300 pontos. Se Paula tem o dobro dos pontos de Vítor, qual é a pontuação de cada um?

Fonte: adaptado de Silveira (2022, p. 92)

Todas as habilidades vistas anteriormente são base para a introdução da linguagem algébrica no 7° ano do Ensino Fundamental II. Os exemplos citados demonstram que o ensino da Álgebra é feito de maneira gradativa. Primeiro os alunos compreendem o pensamento algébrico para, então, conhecer a maneira mais prática de resolver problemas que envolvam sequências recursivas, noção de igualdade, divisão de uma quantidade em partes desiguais, dentre outros.

Esse ensino por etapas comprova que a Álgebra não deve ser resumida somente à manipulação de números e símbolos e à generalização de cálculos, durantes os seis primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos tratam a Álgebra na sua essência, trazendo significados e entendendo a natureza dos problemas que lhes são propostos. Quando bem consolidada, essa base torna a introdução e a apreensão da Álgebra simbólica menos complicada.

No 7° ano do Ensino Fundamental, a BNCC orienta a introdução da linguagem algébrica. Inicialmente, os alunos devem compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita e utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Mais adiante, são apresentadas as equações polinomiais do 1° grau. Quanto a esse objeto do conhecimento, a BNCC afirma que os alunos devem resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. Além disso, ainda nesse ano de escolaridade, são abordados problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, nos quais devem ser utilizadas sentenças algébricas para expressar a relação entre elas.

É comum que os alunos apresentem dificuldade no decorrer do ensino da Álgebra utilizando a linguagem simbólica. Esse fato pode estar relacionado com algumas situações. A primeira delas é a não consolidação da base algébrica nos primeiros anos do Ensino Fundamental. A segunda é a distinção, por parte dos professores, do significado das manipulações algébricas e das regras práticas tratadas nos livros didáticos. Por último, essa dificuldade pode surgir por conta da junção de letras, números e símbolos operatórios que podem causar certa estranheza nos alunos.

Por isso, é importante a escola e os professores estarem atentos às prescrições curriculares e entender como elas se apresentam em materiais didáticos, até mesmo para repensar as propostas de certo material e, ainda, criar materiais que dialogam com tais prescrições.

Nessa perspectiva, pensar em abordagens metodológicas para o ensino pode contribuir para um trabalho em sala que ajude a mobilizar os conhecimentos matemáticos, em prol de uma evolução para novos conhecimentos.

Uma das alternativas pode ser o uso de jogos. Na próxima seção, apresentamos um pouco sobre essa estratégia.

4.2 O uso de jogos no ensino: possibilidades para o Ensino da Álgebra

Hoje ouvimos falar muito da gamificação como uma estratégia pedagógica para o ensino de conteúdos em diversas áreas do conhecimento. Parece ser uma novidade impulsionada pelos diferentes recursos tecnológicos disponíveis na atualidade e que se mostra um auxílio para as situações de ensino e aprendizagem, sejam em ambientes formais ou não formais de educação.

Porém, a gamificação, termo cunhado para se referir a uma metodologia ativada, não é algo tão novo assim no contexto da Educação. Quando falamos em gamificação, estamos falando da utilização de jogos para apoio à aprendizagem, seja com o uso de recursos tecnológicos ou não.

Nesse sentido, a fim de despertar o interesse dos estudantes para o conteúdo de expressões algébricas, equações lineares, relação de equivalência e igualdade entre grandezas, ou seja, conteúdos da Álgebra destinados ao 7° ano do Ensino Fundamental II, recorremos a uma proposta didática de utilização de jogos (sem uso de recurso tecnológico computacional/ digital), com a finalidade de tornar o assunto, assim como o ambiente de sala de aula, mais prazeroso e estimulante.

Muitos trabalhos na área da Educação revelam como a atividade lúdica, principalmente na Educação Fundamental, pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo das crianças, seja apenas na perspectiva do uso do jogo com objetivos alheios ao aprendizado de algum conteúdo curricular ou, para reforçar, compreender ou até mesmo, construir conhecimentos de uma área de estudo, perspectiva essa que adotamos em nosso trabalho.

Mas por que o uso de jogos pode ser um aliado no processo de ensino e aprendizagem? O que caracteriza as atividades lúdicas como boas ferramentas para o ensino? O que dizem os estudiosos sobre essa abordagem?

Para responder/compreender esses questionamentos, elucidaremos em linhas gerais sobre as potencialidades do uso de jogos na aprendizagem das crianças, dando aporte teórico às nossas adoções metodológicas de ensino.

No contexto do ensino em geral, o uso de jogos tem sido fundamentado por teóricos como, Huizinga (1872 – 1945), Wallon (1879 - 1962), Piaget (1896 - 1980), Vygotsky (1896 - 1934), Leontiev (1903 - 1979), entre outros, que reconhecem a importância do jogo na aprendizagem dos alunos, principalmente das crianças. Os jogos, de acordo com os teóricos referenciados, podem ser vistos como um apoio didático que possibilita a criação de momentos lúdicos de livre exploração, estimulando a imaginação e a criatividade dos alunos.

Huizinga (2008), em sua obra Homo ludens, alerta para a noção que temos sobre o que é o jogo ser limitada, quando pensamos em seu aspecto linguístico, já que o uso da palavra pode expressar diferentes compreensões para diferentes culturas. O pesquisador, por meio de análises etimológicas e culturais, nos traz uma perspectiva de significado de jogo que ultrapassa o simples aspecto conferido à linguagem, destacando sobre suas funções no desenvolvimento da humanidade.

Para Huizinga (2008), o jogo é considerado toda e qualquer atividade humana e, por isso, é no jogo e pelo jogo que a civilização de desenvolve. Podemos notar que, a ideia de jogo apresentada pelo pesquisador o coloca como uma atividade inerente a existência humana e, por isso, como algo inato, usar jogos em contextos de ensino pode ser algo valoroso e facilitador da aprendizagem, já que está em "nós", o ato de jogar.

De acordo com as ideias de Huizinga, podemos, de maneira generalista, definir a noção de jogo como

> uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana". Assim definida, a noção parece ser capaz de abrangir tudo aquilo a que chamamos de "jogo" entre animais, as crianças e os adultos: jogos de força e de destreza, jogos de sorte, de advinhação, exibições de todo o gênero. Pareceu-nos que a categoria de jogo fosse susceptível de ser considerada um dos elementos espirituais básicos da vida. (HUIZINGA, 2008, p. 33 - 34 - grifo do autor).

Nessa perspectiva, pode parecer num primeiro momento que o jogo, enquanto uma atividade lúdica, carece de seriedade, pois é uma fuga da vida real e seus problemas intrínsecos. Contudo, Huizinga chama atenção para o fato de que, se analisarmos atentamente a antítese jogo-seriedade, o

> significado de "jogo" de modo algum se define ou se esgota se considerado simplesmente como ausência de seriedade. O jogo é uma entidade autônoma. O conceito de jogo enquanto tal é de ordem mais elevada do que o de seriedade. Porque seriedade procura excluir o jogo, ao passo que o jogo pode muito bem incluir a seriedade. (HUIZINGA, 2008, p. 51 - grifo do autor).

Dito isso, em nossa proposta de usar o jogo como estratégia de ensino para conteúdos da Álgebra, visamos um equilíbrio entre "a fuga da realidade das aulas tradicionais[9] de matemática" e a seriedade que se configura no "ato de ensinar".

Mas como conseguir esse equilíbrio, de modo que o jogo não se torne uma atividade lúdica de distração e sem um objetivo explícito?

Ora, Wallon (1995) ressalta que o jogo é a atividade própria da criança e, nesse sentido, muitos autores chamaram aos jogos da criança de jogos à sério, ou seja, a seriedade é implícita nos jogos da infância. O jogo, nessa concepção seria uma etapa da evolução total da criança, a qual se decomporia em períodos sucessivos.

Contudo, confunde-se bastante essa ideia com toda a atividade da criança, que se mantém "espontânea e não recebe orientações das disciplinas educativas" (WALLON, 1995, p. 73). Wallon destaca que, na primeira fase da atividade das crianças, estão os jogos puramente funcionais, depois os jogos de ficção, de aquisição e de fabricação. A essas atividades, que, antes de tudo, podem ser tidas apenas como ações de lazer, não se opõe a atividade séria, que por analogia a vida adulta, podemos relacionar com o trabalho, conforme destaca Wallon (1995). "Mas este contraste (**jogo x trabalho**) não pode existir para a criança, que ainda não trabalha e para quem o jogo constitui toda a atividade." (WALLON, 1995, p.74 - **grifo nosso**).

Assim, mesmo que se conceba o jogo como toda a atividade da criança, levando em consideração sua evolução total (dando destaque aqui para a evolução cognitiva), não podemos tirar o caráter sério dessa atividade, pois para a criança, são essas atividades que a moldam para a vida adulta.

Apoiando nas concepções apresentadas no início dessa seção, como podemos pensar os jogos no contexto do ensino de matemática?

Os jogos, em geral, quando pensamos o seu uso em situações de ensino, têm por características o uso de regras que precisam estar bem definidas para que a atividade seja realizada com entendimento, pois só assim, os objetivos por trás de uma atividade lúdica serão alcançados. Nesse sentido, busca-se dar um caráter de seriedade para uma atividade.

Para Grando (1995), a necessidade da existência de regras em um jogo pode ser considerada como uma possibilidade de introduzir conceitos que necessitem seguir alguns procedimentos em sala de aula, fazendo assim, uma relação com os procedimentos/algoritmos para executar uma tarefa em matemática, por exemplo. Observa-se a relação direta dessa

[9] Aula em que normalmente temos a exposição de um conteúdo pelo professor e depois a aplicação do mesmo em exemplos dentro da própria matéria. Importante destacar que não estamos criticando o método tradicional de ensino, apenas trazendo mais uma possibilidade didático-metodológica para apresentar e trabalhar conteúdos curriculares, por meio do uso de jogos.

abordagem com a própria evolução da criança, conforme expresso por Wallon (1995), uma vez que, sendo o jogo uma atividade inerente ao desenvolvimento infantil, estamos apenas reproduzindo tais atividades em contextos educativos.

> Inserido neste contexto de ensino-aprendizagem, o jogo assume um papel cujo objetivo transcende a simples ação lúdica do jogo pelo jogo, para se tornar um jogo pedagógico, com um fim na aprendizagem matemática – construção e/ou aplicação de conceitos. (GRANDO, 1995, p.35).

Porém, retirar os estudantes da rotina de aula tradicional utilizando jogos é algo desafiador, pois requer tempo e muita pesquisa do professor para encontrar ou criar jogos com o tema e tempo disponível para ser executado durante a aula. Além disso, cada sala tem uma demanda diferente e uma mesma proposta de jogo, talvez precise ser repensada para contemplar as características de cada turma. Entretanto, para Grando (1995) pensando nos benefícios para os alunos, o esforço é recompensador.

De acordo com Miorim e Fiorentini (1990, p.7), os jogos “[...] podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades”. Dessa forma, o jogo pode ser utilizado como um facilitador para a aprendizagem, com diversas possibilidades, como a construção de conceitos, a memorização de processos ou até mesmo para revisar/reforçar conteúdos já trabalhados, pois a sua dinâmica pode ser mais agradável do que a resolução de uma extensa lista de exercícios.

Ainda, corroborando com Cabral (2006), julgamos que é necessário que os jogos contribuam para estimular o raciocínio, levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas ou não com seu cotidiano, além de auxiliar na construção de raciocínio lógico, bem como na aquisição de atitudes.

Levando em consideração a dificuldade que geralmente surge na introdução da linguagem algébrica nos anos iniciais da Ensino Fundamental II, a elaboração e aplicação de jogos envolvendo os conteúdos da Álgebra podem ser consideradas uma boa estratégia para promover o ensino e, consequentemente a aprendizagem, já que o uso de jogos nas aulas de matemática gera nos alunos uma motivação para buscarem estratégias na resolução dos problemas, acarretando no desenvolvimento do raciocínio lógico e amadurecimento cognitivo.

> A introdução de jogos nas aulas oferece a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem- se

> incapacitados para aprendê-la. Os jogos matemáticos podem ser de extrema importância no desenvolvimento do aluno durante o processo de ensino-aprendizagem, pois favorece a interação nos momentos em que estão em atividades de aplicações práticas. Eles podem ser um caminho para a aprendizagem, tanto para a vida como na questão de resolução de problemas, visando a um desenvolvimento matemático com sucesso. (DULLIUS, GERHARDT & BIANCHINI, 2010, p. 3).

Diante do exposto e das implicações do uso de jogos em contextos de ensino, principalmente com crianças, elaboramos dois jogos voltados para o ensino inicial da Álgebra para alunos do 7° ano do Ensino Fundamental II, relacionando os conhecimentos aritméticos com a linguagem/notação algébrica, visando contribuir para a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

No próximo capítulo eles serão apresentados, bem como as regras, orientações para os professores, exemplos de jogabilidade e relação com as competências da BNCC e com as concepções para o ensino da Álgebra citadas no capítulo 3.

5 JOGOS DESENVOLVIDOS PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Nos capítulos anteriores, fizemos um breve passeio pela história da Álgebra, conhecemos alguns povos e figuras marcantes no desenvolvimento e evolução dessa área de estudo da Matemática. Mostramos, a partir da visão de pesquisadores da Educação Matemática, algumas perspectivas e concepções de Álgebra no contexto de ensino.

Para dar suporte ao conteúdo trabalhado na nossa proposta de pesquisa, visitamos a BNCC, evidenciando as prescrições de conteúdo e as habilidades para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental. Mostramos, em alguns exemplos de livros didáticos como isso se operacionaliza e, fechamos com algumas reflexões sobre o uso de jogos no ensino.

Todo esse percurso, culminou na proposição de desenvolvimento de 2(dois) jogos para o ensino de Álgebra, voltados para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, os quais apresentamos a seguir.

5.1 Cartas Misteriosas

- **Objetivo do jogo**

No jogo Cartas Misteriosas, o objetivo dos estudantes é desvendar o valor numérico das 10 (dez) cartas que compõe o jogo, sendo que em cada uma delas é dada uma informação que relaciona a linguagem usual com a linguagem algébrica por meio das operações elementares da aritmética (adição, subtração, multiplicação e divisão), dentro do conjunto dos números naturais. Além disso, os estudantes precisam relacionar os valores de 9 (nove) dessas cartas com os valores de outras cartas para descobrir, de forma gradativa, o valor numérico de cada uma. Para organizar o raciocínio, sugerimos que o estudante faça o uso de uma tabela que será mostrada mais adiante.

- **Público-alvo**

O jogo tem como foco os estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental II. Ele deve ser aplicado após os estudos sobre expressões algébricas, quando já foi introduzida a utilização de letras para representar números desconhecidos. Além disso, o ideal é que o jogo sirva como uma forma descontraída para iniciar os estudos de equações do 1° grau, já que durante todo o jogo os alunos serão induzidos a elaborar sentenças que mais tarde serão por eles conhecidas como as equações do 1º grau.

- **Objetos de conhecimento e habilidades da BNCC**

➢ **Objetos de conhecimento algébrico**

- Linguagem algébrica: variável e incógnita;
- Equivalência de expressões algébricas;
- Equações polinomiais do 1º grau.

➢ **Habilidades**

Baseado na habilidade **EF07MA13** da BNNC que afirma que os alunos do 7° ano devem "compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita" (BRASIL, 2017, p. 261) uma das finalidades desse jogo é consolidar a aprendizagem de expressões algébricas nas quais se utilizam letras para expressar os valores desconhecidos.

Além disso, como durante o jogo surgem igualdades entre expressões algébricas, os alunos são levados a um primeiro contato com as equações polinomiais de 1° grau. Quanto a isso, de acordo com a habilidade **EF07MA18**, os alunos precisam "resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade" (BRASIL, 2017, p. 263).

Embora no 7° ano os estudantes ainda não tenham tido um contato direto com as propriedades da igualdade, essa habilidade vem sendo abordada desde o 4° ano. Portanto, esse jogo surge como uma oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos anteriormente e aprimorar e simplificar as maneiras de resolução.

- **Relação do jogo com as concepções da Álgebra**

Durante cada rodada do jogo, é possível perceber uma transição entre a Aritmética e a Álgebra, de forma que, problemas que antes os alunos resolviam utilizando somente a aritmética, agora são instigados a transformá-los em notações fazendo o uso de incógnitas. Dessa forma, podemos perceber que a concepção de Usiskin (2004), "A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema", foi considerada na elaboração desse jogo, visto que nela o autor afirma que as variáveis têm o significado de incógnitas.

Ao completar a tabela sugerida com as sentenças que expressam as informações de cada carta, os alunos são levados a entender a importância da linguagem algébrica e como ela pode descrever os procedimentos de uma maneira mais concisa. Além disso, ao expor o raciocínio utilizado para obter o valor de cada carta, é perceptível que, apesar da importância da linguagem algébrica e do uso de símbolos para representar os valores desconhecidos, o pensamento algébrico e o entendimento do significado da linguagem e dos símbolos são extremamente relevantes para uma compreensão completa da Álgebra e não devem ser negligenciados.

Quanto a isso, as concepções "Linguístico-estilística" e "Linguístico-sintático-semântica" de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) foram levadas em consideração na produção do jogo. Isso porque ambas defendem a não suficiência do pensamento algébrico e destacam a relevância da linguagem. A segunda se torna mais exigente que a primeira ao enfatizar a importância de um entendimento semântico dos termos.

A tradução da linguagem escrita para a linguagem simbólica também é uma parte importante do jogo. Os alunos, ao lerem as informações de cada carta, são estimulados a transformá-las em sentenças que utilizam os símbolos (no caso desse jogo, as letras) para representar os valores desconhecidos. A partir daí, poderiam utilizar os transformismos algébricos para chegar ao resultado ou, simplesmente, o pensamento algébrico já adquirido nos anos anteriores. Dessa forma, fica evidente a influência da concepção "Letrista" de Lins e Gimenez (2001), apesar do jogo não resumir a Álgebra ao cálculo e representações com letras. O cálculo e as representações com letras são tão importantes quanto o desenvolvimento do pensamento algébrico, que inclui a compreensão dos significados das variáveis e dos processos de resolução, como mencionado anteriormente.

- **Regras do jogo**

➢ **Organização**

A turma deverá ser dividida em grupos de três integrantes[10]. Cada trio receberá um jogo de 10 cartas (Figura 19) e, cada integrante, uma tabela (Figura 20).

Figura 19 - Cartas do jogo "Cartas Misteriosas"

Fonte: elaborada pela autora.

[10] Essa divisão tem por base a experiência da autora com a utilização do jogo em sala de aula, contudo, outras configurações podem ser assumidas, dado o contexto das turmas.

Figura 20 - Sugestão da tabela do jogo "Cartas Misteriosas"

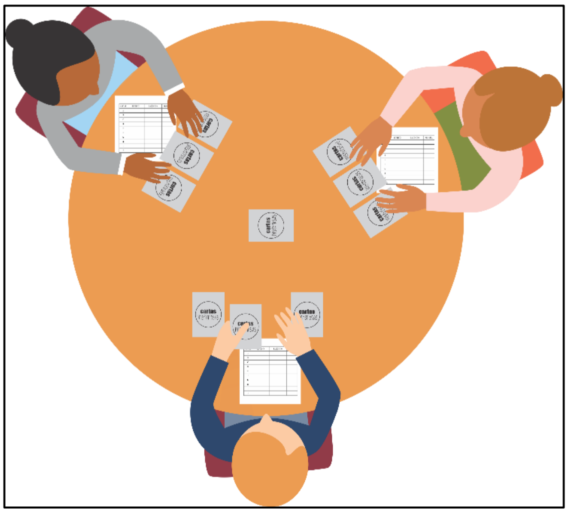
CARTAS	SENTENÇA	RACIOCÍNIO	RESPOSTA
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			

Fonte: elaborada pela autora.

➢ **Desenvolvimento das partidas**

Para iniciar o jogo, cada grupo deve distribuir as cartas entre seus integrantes, de forma que cada um receba três (3) cartas e uma (1) delas fique no centro da mesa. Além disso, cada integrante deverá receber uma tabela.

Figura 21 - Organização do jogo "Cartas Misteriosas"



Fonte: elaborada pela autora.

Após a distribuição das cartas, os jogadores terão um tempo[11] para escrever as sentenças relacionadas às informações das cartas que possui. Por exemplo, se um jogador saiu com as cartas C, G e I, ele deverá preencher a tabela[12] como mostrado na Figura 22.

Figura 22 - Exemplo da tabela preenchida no início do jogo

CARTAS	SENTENÇA	CÁLCULO	RESPOSTA
A			
B			
C	$C - I = A + F$		
D			
E			
F			
G	$G = D - I$		
H			
I	$I + F \div 2 = 23$		
J			

Fonte: elaborada pela autora.

Após o tempo estipulado, os jogadores lançam o dado para definir quem será o primeiro a jogar. Aquele que tirar o maior número começa o jogo. Ele deve pegar a carta que ficou no centro da mesa e traduzi-la para a linguagem simbólica, completando mais uma sentença da sua tabela. Suponha que, o jogador que saiu com as cartas C, G e I, citado anteriormente, foi o primeiro a jogar e pegou a carta A no centro da mesa. Então, a sua tabela (sugestão) ficaria como a da Figura 23.

[11] Como as turmas e os alunos têm perfis diferentes, pode-se chegar em um consenso sobre o tempo para a realização de cada jogada.
[12] Esperamos que os estudantes preencham a tabela conforme sugerido, porém outras notações podem surgir.

Figura 23 - Exemplo da tabela preenchida na primeira rodada

CARTAS	SENTENÇA	CÁLCULO	RESPOSTA
A	$A = E \div 2$		
B			
C	$C - I = A + F$		
D			
E			
F			
G	$G = D - I$		
H			
I	$I + F \div 2 = 23$		
J			

Fonte: elaborada pela autora.

Após essa jogada, o jogador sentado à esquerda do primeiro deverá, sem olhar, pegar uma das cartas do primeiro jogador e transcrevê-la para a linguagem simbólica. Em seguida, o terceiro jogador deve pegar uma das cartas do segundo e traduzi-la para a linguagem simbólica. Sempre que os três integrantes do grupo fizerem uma jogada, eles devem pausar a partida para pensar e refletir nas cartas retiradas e ver como as informações escritas na tabela ajudam na descoberta do valor numérico de alguma carta.

Os jogadores devem seguir esse mesmo processo até que um deles descubra o valor de todas as cartas e complete o restante das colunas da tabela (cálculo e resultado). O jogador que completar a tabela só poderá mostrar os resultados de cada carta após o fim completo de uma rodada, ou seja, quando todos os três jogadores tiverem feito a mesma quantidade de jogadas. Essa situação permite que haja empate.

Assim que um jogador solucionar todos os problemas, ele deve verificar com o professor se todos os resultados estão corretos. O professor irá dizer apenas se "sim" ou se "não". Se todos os valores tiverem corretos, o jogo termina e esse aluno é o campeão. Mas, se houver alguma quantidade incorreta, o professor não deve apontar quais são os valores certos e errados. Ele deve orientar o estudante a voltar para o jogo e deixar que ele perceba o seu erro durante as demais jogadas.

- **Orientações para os professores**

Antes de começar o jogo, dê um exemplo fictício, ou seja, que não faz parte do jogo, de como as sentenças devem ser escritas. Por exemplo, se em uma suposta carta X tivesse a informação “O meu número menos o número da carta Y é igual ao número da carta Z somado a 5”, o aluno deveria traduzi-la para “X – Y = Z + 5” e escrever essa sentença na linha indicada pelo X. Além disso, chame a atenção para o fato de que, nesse exemplo, assim como ocorre com várias cartas do jogo, só é possível descobrir o valor da carta X se já souber os valores das cartas Y e Z. Portanto, nem sempre, escrever a sentença significa descobrir imediatamente o valor daquela carta.

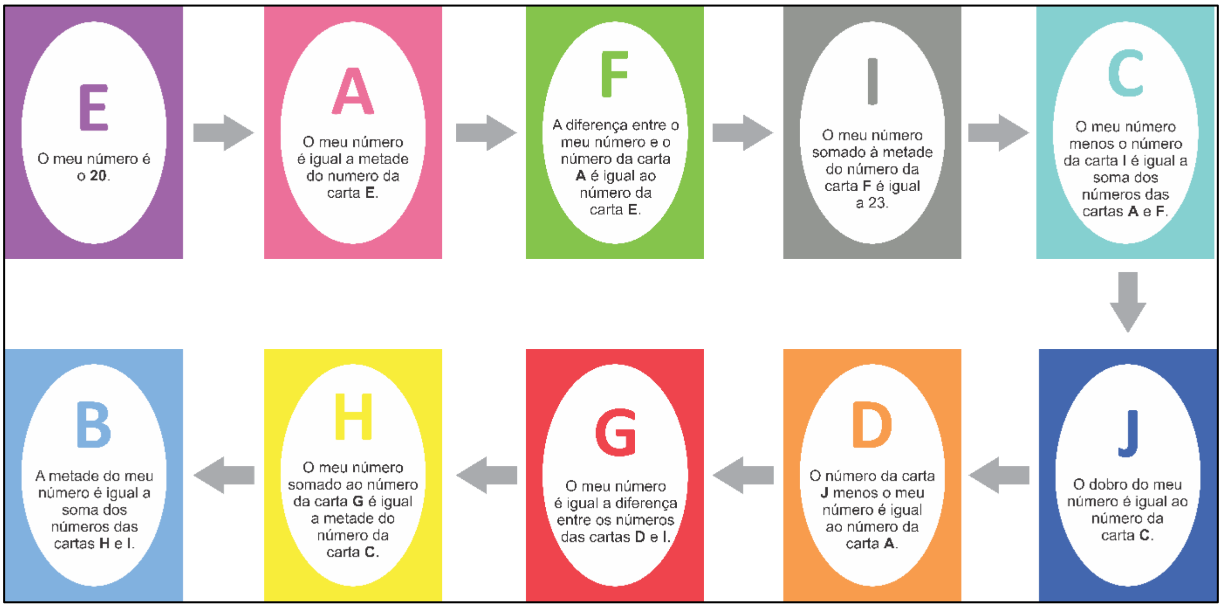
Essa proposta de exemplificar pode ser feita de maneira colaborativa entre os alunos, sem que o professor seja tão diretivo. O professor pode, por meio de indagações levar os alunos a pensarem em notações adequadas e, ainda, perceberem a dependência entre as cartas.

Quanto à coluna dos cálculos, deixe que os alunos preencham da forma que acharem mais conveniente. Certamente, ao final do jogo, terão várias formas de resolução e isso produzirá boas comparações e discussões com os alunos.

Durante o jogo, é importante que o professor visite todos os grupos para tirar as dúvidas, mas para, também, observar como os alunos estão raciocinando durante as rodadas. A maneira como fizerem os cálculos será o ponto de partida para a introdução das resoluções de equação do 1º grau.

A Figura 24 mostra a ordem em que os valores de cada carta são descobertos e a Figura 25, um exemplo de como a tabela pode ser preenchida.

Figura 24 - Ordem em que as cartas do jogo “Cartas Misteriosas” serão desvendadas



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 25 - Tabela preenchida

CARTAS	SENTENÇA	CÁLCULO	RESPOSTA
A	$A = E \div 2$	$20 \div 2 = 10$	10
B	$B \div 2 = H + I$	$26 \cdot 2 = 52$	52
C	$C - I = A + F$	$40 + 8 = 48$	48
D	$J - D = A$	$24 - 10 = 14$	14
E	$E = 20$	–	20
F	$F - A = E$	$20 + 10 = 30$	30
G	$G = D - I$	$14 - 8 = 6$	6
H	$H + G = C \div 2$	$24 - 6 = 18$	18
I	$I + F \div 2 = 23$	$23 - 15 = 8$	8
J	$2 \cdot J = C$	$48 \div 2 = 24$	24

Fonte: elaborada pela autora.

- **Resultados esperados**

Durante o jogo, espera-se que os alunos entendam o significado de cada sentença escrita e consigam relacioná-las com a linguagem usual. Além disso, percebam que, no caso da Álgebra, as letras são usadas para expressar os valores que são desconhecidos. Portanto, nas equações mais usuais, onde, geralmente, são utilizadas as letras **x** e **y**, elas possuem o mesmo papel que as letras utilizadas no jogo.

Espera-se também que os alunos consigam encontrar uma relação entre os cálculos utilizados para descobrir os valores das cartas e a sentença associada a cada uma delas, verificando que as propriedades da igualdade estão presentes na resolução, mas que podem ser escritas de uma maneira simplificada, fazendo o uso das operações inversas.

Por último, presume-se que os alunos observem que uma equação com duas ou mais incógnitas só poderá ser resolvida se apenas uma delas for desconhecida, as demais precisam ser substituídas por valores numéricos. Por isso, a descoberta dos valores das cartas é feita de forma gradual e em uma ordem específica (Figura 24).

5.2 Tesouro nas Ilhas Gregas

- **Objetivo do jogo**

No jogo Tesouro nas Ilhas Gregas, o objetivo dos estudantes é desvendar a quantidade de tesouros das 6 (seis) ilhas do tabuleiro. No decorrer das jogadas, serão dadas algumas informações que relacionam a linguagem usual com a linguagem algébrica por meio das operações básicas da aritmética, dentro do conjunto dos números naturais. Para acessar essas informações, os estudantes devem percorrer o tabuleiro, obtendo uma carta cada vez que chegarem a uma ilha. Assim como no jogo “Cartas Misteriosas” apresentado na sessão anterior, para organizar o raciocínio, sugerimos que o estudante faça o uso de uma tabela, conforme a Figura 26.

Figura 26 - Tabela do jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"

Alpha (α)	Delta (δ)
Lambda (λ)	Omega (ω)
Beta (β)	Theta (θ)

Fonte: elaborada pela autora.

- **Público-alvo**

O jogo Tesouro nas Ilhas Gregas tem como foco os estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental II. Recomendamos que ele seja aplicado após os estudos sobre equações do 1º grau, contudo, a critério do professor, o mesmo pode ser aplicado como impulsionador do conteúdo. O objetivo é que o jogo sirva como uma forma descontraída para retomar e reforçar esse conteúdo e verificar se os estudantes estão aplicando adequadamente as propriedades aprendidas durante esse estudo. Além disso, é uma maneira interessante de introduzir os sistemas de equações, pois durante o jogo os alunos se depararão com equações de duas incógnitas e precisarão substituir os valores conhecidos para descobrir as demais quantidades.

- **Objetos de conhecimento e habilidades da BNCC**

- Objetos de conhecimento algébrico

- Linguagem algébrica: variável e incógnita;
- Equivalência de expressões algébricas;
- Equações polinomiais do 1º grau;
- Sistema de equações polinomiais do 1º grau.

- Habilidades

Baseado na habilidade **EF07MA13** da BNNC que afirma que os alunos do 7° ano devem "compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita" (BRASIL, 2017, p. 261) uma das finalidades desse jogo é representar as informações das cartas a partir da igualdade entre expressões algébricas, nas quais se utilizam letras ou símbolos para expressar os valores desconhecidos.

Após traduzir as informações para a linguagem algébrica, os estudantes devem utilizar as propriedades da igualdade para resolver as equações polinomiais de 1° grau. Quanto a isso, de acordo com a habilidade **EF07MA18**, os alunos precisam "Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (BRASIL, 2017, p. 263).

Embora a BNCC não proponha o estudo de sistemas de equações polinomiais no 7º ano, essa habilidade pode ser incluída no jogo à medida que os alunos precisam fazer substituições de valores para descobrir as demais quantidades, já que grande parte das equações obtidas são equações com duas incógnitas. Essa habilidade é sugerida para o 8º ano (**EF08MA08**) e, segundo a BNCC, os alunos devem "Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso." (BRASIL, 2017, p. 265)

- **Relação do jogo com as concepções da Álgebra**

Assim como no jogo Cartas Misteriosas, é possível notar uma transição entre a aritmética e a Álgebra durante as jogadas. Problemas que eram solucionados apenas com a aritmética, agora podem ser representados por notações algébricas, utilizando incógnitas. Deste modo, podemos considerar que a concepção de Usiskin (2004) "A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema" foi fundamental para a elaboração deste jogo, já que o autor afirma que as variáveis têm o significado de incógnitas.

Um dos objetivos da aplicação desse jogo, por parte dos professores, é verificar se os alunos compreenderam o processo de resolução das equações do 1º grau, utilizando as propriedades da igualdade. Nesse aspecto, a concepção "Processológica" de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) foi considerada ao argumentar que a Álgebra é entendida como um conjunto de técnicas, processos e métodos que envolvem interações para resolver problemas específicos, com uma resolução baseada em uma sequência de passos padronizados. Além de não se limitar apenas à linguagem, uma vez que o pensamento algébrico não depende da exigência de uma forma de linguagem não retórica para ser expresso.

Outras duas concepções dos mesmos autores também foram levadas em conta no processo de desenvolvimento do jogo. São elas: "Linguístico-estilística" e "Linguístico-sintático-semântica". Ao expressar as informações das cartas utilizando a linguagem algébrica, os alunos são levados a perceber que, dessa forma, certos procedimentos podem ser expressos de uma maneira mais concisa, pois o que importa na concepção "Linguístico-estilística" é a linguagem. Entretanto, a concepção "Linguístico-sintático-semântica" é mais rigorosa que a "Linguístico-estilística", pois destaca a importância de compreender semanticamente os termos, ou seja, aqui o pensamento algébrico deve corresponder à linguagem adotada.

Assim como no jogo anterior, a tradução da linguagem escrita para a linguagem simbólica desempenha um papel crucial no jogo. Ao interpretarem as informações das cartas, os alunos são incentivados a transformá-las em sentenças que empregam símbolos para representar valores desconhecidos. Isso destaca claramente a influência da abordagem "Letrista" de Lins e Gimenez (2001).

- **Regras do jogo**

➢ **Organização**

A turma deverá ser dividida em grupos de seis integrantes[13]. Cada grupo receberá um tabuleiro (Figura 27), 36 cartas, sendo 6 de cada ilha (Figura 28), 4 peões e 1 dado. Caso queira definir um tempo para as jogadas, sugerimos a utilização de um cronômetro ou ampulheta por grupo.

Figura 27 - Tabuleiro do jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"

Fonte: elaborada pela autora.

[13] Essa divisão tem por base a experiência da autora com a utilização do jogo em sala de aula, contudo, outras configurações podem ser assumidas, dado o contexto das turmas.

Figura 28 - Cartas do jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"

A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 30 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 80 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 100 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 80 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 50 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 20 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).
A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é metade da quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 210 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) somada a 50 resulta em 200.	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 70 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 130 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	O dobro da quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 460.
A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é o dobro da quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 120 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 70 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 30 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 50 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 70 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).
A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 50 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 60 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é o triplo de 100.	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é metade da quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 120 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) menos 80 resulta em 100.
A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 100 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 70 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 20 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 210 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é o dobro da quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 130 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).
A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 50 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 110 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A metade da quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 125.	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 110 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 60 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) menos 60 resulta em 300.

Fonte: elaborada pela autora.

- **Desenvolvimento das partidas**

Antes de iniciar o jogo, as equipes devem empilhar as 6 cartas correspondentes as 6 ilhas (Figura 29) e cada jogador deve posicionar o seu peão em uma ilha do tabuleiro, lembrando que dois ou mais peões não podem ocupar a mesma ilha em nenhum momento do jogo, inclusive no início (Figura 30).

Figura 29 - Cartas correspondentes a cada ilha

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 30 - Exemplo da disposição dos peões no início da partida

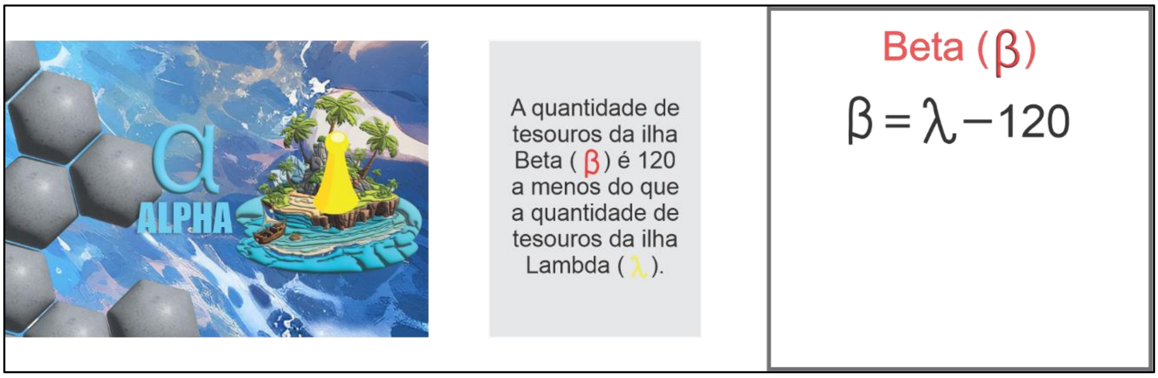
Fonte: elaborada pela autora.

Para começar, os jogadores lançam o dado para definir quem será o primeiro a jogar. Definido o primeiro jogador, os demais participantes jogam seguindo a ordem no sentido horário.

Em cada rodada, o jogador da vez deve lançar o dado e caminhar pelas casas do tabuleiro com o objetivo de chegar em uma das ilhas. Caso ele não alcance uma ilha, deve permanecer na casa em que parou e passar a vez para o próximo jogador. Mas, caso consiga chegar em uma ilha, ele terá um tempo[14] para pegar a primeira carta da pilha correspondente à ilha que está ocupando, traduzir a informação para a linguagem simbólica e escrevê-la na tabela[15]. Após esse tempo, ele deve devolver a carta para a mesma pilha, colocando-a por baixo de todas as outras.

A Figura 31 mostra um exemplo em que o jogador com o peão amarelo alcança a ilha Alpha (α), pega a primeira carta da pilha azul (correspondente a ilha Alpha) e traduz a informação "A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 120 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ)" para a linguagem algébrica ($\beta = \lambda - 120$)[16].

Figura 31 - Exemplo de jogada no jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"

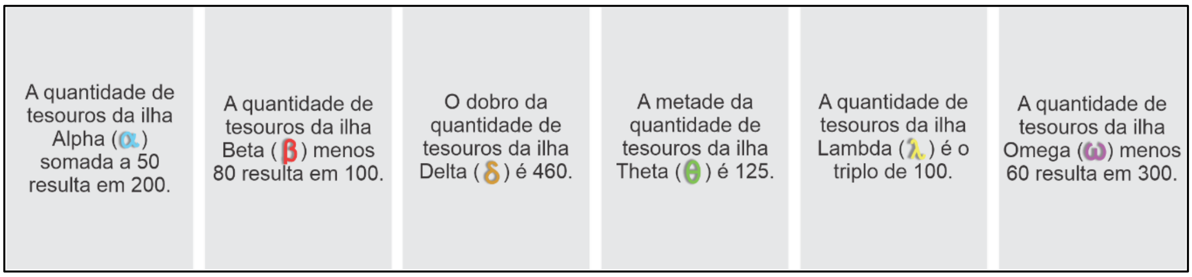


Fonte: elaborada pela autora.

Nas 36 cartas, existem 6 delas que relacionam as quantidades de tesouros de uma única ilha com outros valores numéricos (Figura 32). Diferente da informação do exemplo anterior, essas podem ser traduzidas em equações com apenas uma incógnita, o que possibilita o aluno a descobrir, de forma direta, a quantidade de tesouros de uma ilha e, dessa forma, completar outras informações que obteve ao longo das outras jogadas.

[14] Como as turmas e os alunos têm perfis diferentes, pode-se chegar em um consenso sobre o tempo para a realização de cada jogada.
[15] Nesse jogo, cada jogador deverá receber uma tabela para organizar as informações obtidas durante as partidas (Figura 33).
[16] Essa é uma notação esperada, porém, outras podem surgir durante jogo e ser fontes de informação para que o professor, juntamente com os alunos, discuta a respeito das notações que surgirem.

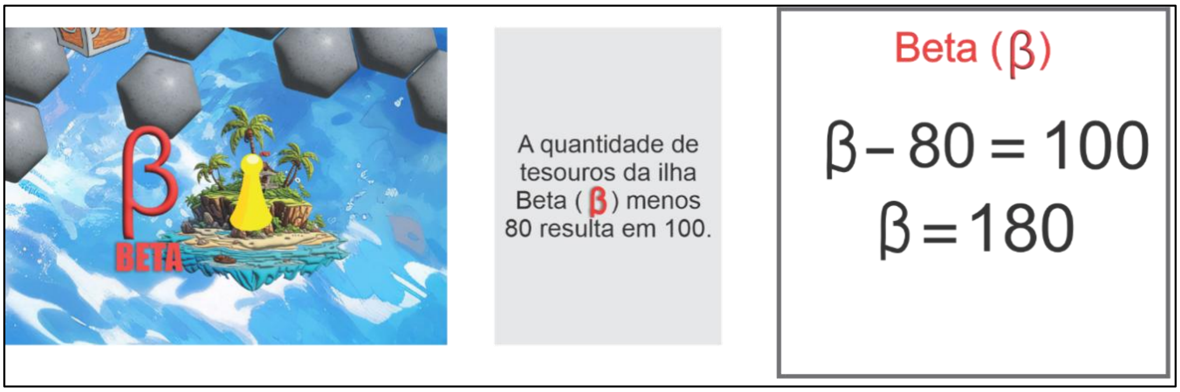
Figura 32 - Cartas que relacionam as quantidades de tesouros das ilhas com valores numéricos



Fonte: elaborada pela autora.

A Figura 33 mostra um exemplo em que o jogador com o peão amarelo alcança a ilha Beta (β) e obtém a informação “A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) menos 80 resulta em 100”. Dessa forma, o estudante, ao traduzir essa informação para a linguagem simbólica ($\beta - 80 = 100$) e utilizar as propriedades da igualdade para resolver essa equação, consegue verificar que $\beta = 180$. Ainda, no exemplo da Figura 31, o jogador já havia obtido a informação que foi traduzida para ($\beta = \lambda - 120$). Dessa maneira, ao descobrir a quantidade de tesouros da ilha Beta, por já possuir essa outra informação, ele também conseguiria descobrir a quantidade de tesouros da ilha Theta.

Figura 33 - Exemplo de jogada no jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"



Fonte: elaborada pela autora.

Os participantes devem realizar essas jogadas até que um deles descubra as quantidades de tesouros das 6 ilhas. Assim que um jogador solucionar todos os problemas, ele deve verificar com o professor se todos os resultados estão corretos. O professor irá dizer apenas se “sim” ou se “não”. Se todos os valores tiverem corretos, o jogo termina e esse aluno é o campeão. Mas, se houver alguma quantidade incorreta, o professor não deve apontar quais são os valores certos e errados. Ele deve orientar o estudante a voltar para o jogo e deixar que ele perceba o seu erro durante as demais jogadas.

- **Orientações para os professores**

Antes de começar o jogo, dê um exemplo fictício, ou seja, que não faz parte do jogo, de como as equações devem ser escritas. Por exemplo, se em uma suposta carta tivesse a informação “A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 10 a mais que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β)” o aluno deveria traduzi-la para “$\alpha = \beta + 10$” e escrever essa equação na parte da tabela destinada a ilha Alpha. Além disso, chame a atenção para o fato de que, nesse exemplo, assim como ocorre em várias informações do jogo, só é possível descobrir a quantidade de tesouros da ilha Alpha se já for conhecida a quantidade de tesouros da ilha Beta, ou vice-versa.

Quanto a isso, faça perguntas para os alunos do tipo: “Se você soubesse que a quantidade de tesouros da ilha Beta é 30, qual seria a quantidade da ilha Alpha?” ou “Se você soubesse que a quantidade de tesouros da ilha Alpha é 60, qual seria a quantidade da ilha Beta?”. Reforce também a forma que essas equações podem ser resolvidas utilizando as propriedades da igualdade.

Durante o jogo, é importante que o professor visite todos os grupos para tirar as dúvidas e para observar a forma que os alunos estão resolvendo as equações.

- **Resultados esperados**

Durante o jogo, espera-se que os alunos consigam traduzir as informações escritas na linguagem usual para a linguagem simbólica. Além disso, percebam que é impossível resolver uma equação com duas incógnitas, a não ser que o valor de uma delas seja conhecido previamente.

Pressupõe-se também que os alunos entendam que as letras gregas utilizadas nesse jogo para representar as quantidades de tesouros de cada ilha possuem o mesmo papel que outras letras ou símbolos que desempenham a função de incógnitas em outras equações.

Nesse sentido chamamos atenção para o fato do uso demasiado das letras **x** e **y** para representar tanto incógnitas, variáveis ou parâmetros e que isso, em certa medida, acaba confundindo os estudantes ao longo da sua escolarização.

Por último, visto que esse jogo será aplicado após os estudos de equações do 1º grau, espera-se que os alunos utilizem as propriedades da igualdade para resolver as equações obtidas. Porém, caso isso não aconteça, deixe que o estudante resolva da forma que achar mais conveniente e, ao final, que todos compartilhem com a turma qual foi o procedimento utilizado.

Esse momento de socialização pode propiciar bons debates e (re) construção e produção de conhecimentos entre os estudantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos essa pesquisa tendo por objetivo, conforme exposto na Introdução, conceber e desenvolver jogos para o ensino de Álgebra voltados para estudantes do Ensino Fundamental II, em especial, os do 7° ano.

A partir desse cenário, nossa proposta de desenvolvimento dos jogos tinha como prerrogativa ajudar na "passagem" da Aritmética para a Álgebra, visando uma transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, porém de uma maneira lúdica e divertida, tentando "distanciar", em certa medida, do rigor dado ao ensino da Álgebra.

Como professores, estamos sempre pesquisando e nossas salas de aula são um "campo" de pesquisa riquíssimo que só conseguimos enxergar como tal, quando começamos a dialogar e estudar o que as pesquisas no campo do Ensino e Educação nos dizem sobre o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Das leituras realizadas, foi possível notar que a Álgebra, como uma área do conhecimento matemático, é algo bastante complexo de definir. Essa falta de conceituação pode gerar diferentes conflitos, como de natureza epistemológica e cognitiva, o que resulta em dificuldades, inclusive para os professores, ao introduzir esse conteúdo.

Entender a história da Álgebra e a sua evolução, especialmente os três principais estágios: retórico, sincopado e simbólico, nos fez perceber que a Álgebra vai muito além da utilização de símbolos e dos mecanismos para resolver equações ou manipular expressões algébricas.

Desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, segundo a BNCC, os estudantes já são introduzidos aos conceitos fundamentais da Álgebra, porém sem utilizar símbolos e mecanismos repetitivos.

Fazendo uma comparação com os estágios de evolução que ocorreram durante ao longo da história, percebe-se uma semelhança na aplicação da Álgebra nas escolas. Nos primeiros anos, os alunos resolvem problemas utilizando apenas a aritmética, mesmo que envolvam sequências ou divisões proporcionais, que podem ser considerados problemas com aspectos algébricos. Mais adiante, quando os alunos desenvolvem maturidade suficiente para compreender a essência e utilizar estratégias que facilitam as resoluções de problemas, é que os símbolos matemáticos aparecem. Essa fase pode ser comparada ao estágio da Álgebra simbólica.

Da mesma forma, as concepções da Álgebra expostas no capítulo 3 foram fundamentais para aprofundar nossa compreensão sobre a Álgebra ensinada nas escolas. O fato de um único autor elaborar várias concepções para um mesmo tema reforça que não há uma definição certa ou errada sobre a Álgebra. Além disso, essas concepções ampliaram nosso entendimento sobre as diversas formas pelas quais a Álgebra pode ser abordada e expressa.

Assim, apesar de ser desafiador relacionar a história, as concepções e as nossas experiências como professores, essas compreensões nos fizeram perceber que, mesmo antes de estudar a história e as concepções da Álgebra, esses dois aspectos já eram aplicados diretamente na prática.

Todo esse processo, incluindo os estudos sobre a utilização dos jogos em sala de aula como uma forma divertida e eficiente para ensinar Matemática, nos levaram à elaboração do produto dessa pesquisa. Durante a construção dos jogos, pudemos observar como os elementos da História e as características das concepções da educação algébrica se refletiam em cada detalhe dessas atividades.

Para explorar mais afundo esses jogos na prática, o jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas", foi aplicado em uma escola privada do município de Nova Lima, porém num contexto um pouco diferente do que planejado nas orientações do jogo, expressas no capítulo 5. Como não haveria tempo de aplicar o jogo para fazer uma análise mais profunda dos resultados alcançados com a aplicação, apenas para entender um pouco sobre como seria a experiência, foram convidados um estudante de cada ano do Ensino Fundamental II para jogar.

No grupo selecionado, dois estudantes dos 6º e 7º anos ainda não tinham começado a utilizar símbolos para resolver problemas algébricos, enquanto os outros dois, do 8º e 9º anos, já estavam familiarizados com esse conceito.

É importante ressaltar que, no momento dessa aplicação, os estudantes receberam uma tabela, como a da Figura 26, para organizar o seu raciocínio. Dessa forma, não houve nenhuma orientação sobre qual seria a maneira "correta" de fazer esses registros.

Detalhes da aplicação foram expressos em um relato de experiência aprovado e apresentado no V Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática (ENOPEM), mas destacamos que foi importante para vislumbrar algumas observações que corroboravam com as referências usadas em nossa pesquisa. Os alunos do 6° e 7° ano tiveram dificuldade de usar a linguagem algébrica, mas compreendiam o problema de maneira artimetizada usando a linguagem materna para expressar seus resultados e os alunos do 8° e 9° ano, apesar de usarem os símbolos, tinham dificuldades de relacionar as incógnitas de maneira correta, revelando que o traquejo algébrico ficava muito no campo do sintático, destituído de semântica/sentido para esses alunos.

Concluímos, portanto, que, no que se refere à Álgebra, os resultados da pesquisa indicam que ela deve ser desenvolvida gradualmente, relacionando o pensamento aritmético com o algébrico. Além disso, o uso de símbolos e manipulações algébricas, considerados por muitos como a essência da Álgebra, é apenas mais uma forma concisa de representar a base matemática que já foi adquirida anteriormente com o estudo da aritmética, além de facilitar a resolução de problemas mais complexos.

Além disso, observamos que o uso de jogos para introduzir e concluir o ensino da Álgebra revelou-se uma estratégia eficaz, tornando o processo mais leve e produtivo.

Esperamos que outros se inspirem nesse trabalho e vejam na ferramenta Jogos, um meio para ensinar matemática, principalmente a Álgebra, como um recurso que permite muitas nuances, mas que, conforme notamos, ajuda muito no envolvimento dos alunos e a ensinar de maneira descomplicada.

REFERÊNCIAS

BERTATO, Fábio Maia. A falsa (su-) posição? Tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18, n. 36, p. 11-29, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini** – 7° ano. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BIANCHINI, Gisele; GERHARDT, Tatiane; DULLIUS, Maria Madalena. Jogos no ensino da Matemática: quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática? **Revista Destaques Acadêmicos**, ano 2, n. 4, 2010, CETEC/UNIVATES.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 3ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017.

BUSSMANN, Tanise Brandão**. Escola formalista na Matemática e seu impacto sobre a Ciência Econômica**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

CABRAL, M. A. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. Trabalho de conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

DANGERFIELD, Jan; DAVIS, Hesther; FARNDON, John et al. **O Livro da Matemática.** Rio de Janeiro: Globo Livros, 2022.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GAY, Maria Regina Garcia. **Buriti Mais Matemática** - 1º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

GAY, Maria Regina Garcia. **Buriti Mais Matemática** - 2º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

GAY, Maria Regina Garcia. **Buriti Mais Matemática** - 4º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

GAY, Maria Regina Garcia. **Buriti Mais Matemática -** 5º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

GRANDO, R.C. **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem na Matemática**. 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

GUELLI, Oscar. **Contando a história da matemática** - Equação: o idioma da álgebra**.** São Paulo: Ática, 1992.

HUIZINGA, J. **Homo Ludenn**: o jogo como elemento da cultura. Trad. João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2008.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Presente Mais Matemática -** 3º ano. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2001.

MIORIM, M. A., FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

DE MOURA, Anna Regina Lanner; DE SOUSA, Maria do Carmo. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, v. 13, n. 2, p. 11-46, 2005.

OLIVEIRA, Tamara Sued Pinheiro de; LIMA, Ana Cristina de Souza; SILVA, Elieudo Nogueira. Estudo da álgebra: o desenvolvimento histórico da formalização simbólica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Número Especial – IV Seminário Cearense de História da Matemática, Fortaleza, v. 7, n. 20, p. 347-356, 2020.

SILVA, Juciane Teixeira; RESENDE, Marilene Ribeiro; IBRAHIM, Soraia Abud; FERNANDES, Florença. As concepções de álgebra e de educação algébrica: uma análise de livros didáticos do 8° ano. **Revista Profissão Docente**, Uberaba, v. 15, n. 33, p. 127-145, ago./dez. 2015.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios da Matemática -** 6° ano. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022.

USISKIN, Zalman. **Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In: As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual Editora, 2004.

WALLON, H. **A evolução psicológica da criança**. Trad. Cristina Carvalho. Lisboa: Edições 70, 1995.

ANEXO A – Aprovação do Relato Experiência no ENOPEM

Relato de experiência submetido, aprovado e apresentado no V ENOPEM. Página a seguir.

FAEPEN-MT
Fundação de Apoio ao Ensino, Pesquisa e Extensão do Norte de Mato Grosso

RESULTADO DA AVALIAÇÃO

O trabalho intitulado "APLICAÇÃO DO JOGO “TESOURO NAS ILHAS GREGAS”: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL ." foi **APROVADO** no evento V ENCONTRO NACIONAL ONLINE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA - V ENOPEM

- **Título:** APLICAÇÃO DO JOGO “TESOURO NAS ILHAS GREGAS”: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL .
- **Número:** 878969
- **Data de Submissão:** 27/06/2024
- **Modalidade:** Relato de Experiência
- **Área Temática:** 4. Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental
- **Autores:** Fernanda Aparecida Ferreira,Bianca Silva Andrade

Cordialmente,
Comissão Científica

APÊNDICE A – Relato de Experiência com a Aplicação do Jogo "Tesouro nas Ilhas Gregas"

APLICAÇÃO DO JOGO "TESOURO NAS ILHAS GREGAS": UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo:

Apresentamos os resultados da aplicação de um jogo auxiliar para o ensino de Álgebra voltados para alunos do Ensino Fundamental (EF) II. Esse jogo foi elaborado como parte de uma dissertação de mestrado, em desenvolvimento no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (Profmat), que tem por objetivo principal desenvolver estratégias metodológicas para o ensino e aprendizagem da Álgebra, voltados para estudantes do EF II. O jogo aborda conteúdos que envolvem expressões algébricas, equações lineares e relação entre incógnitas, conhecimentos esses prescritos pela BNCC na unidade temática Álgebra, destinados ao EF II. Respaldados por referências que discutem concepções da Álgebra no Ensino da Matemática e sobre as potencialidades que os jogos podem propiciar no ensino, o jogo que apresentamos serve de suporte didático para professores que queiram trabalhar a Álgebra de maneira lúdica e divertida.

Palavras-chave: Álgebra; Ensino; Jogo; Aprendizagem.

1. Introdução

O ensino de Álgebra, de acordo com os documentos curriculares oficiais compete à escola e mais especificamente à disciplina de Matemática. Entretanto, muito ainda se discute sobre como esse assunto tem sido tratado no contexto do ensino, uma vez que várias pesquisas apontam que o ensino da Álgebra ainda tem se apoiado na forma que a Matemática Acadêmica lida com esse campo de estudo.

De acordo com Coelho e Aguiar (2018), muitos problemas relacionados com o ensino da álgebra escolar, ocorre em função da ênfase que se dá a seus aspectos técnicos, deixando de lado o desenvolvimento dos conceitos e uma busca por um pensamento mais abstrato.

Em função dessa característica de um ensino centrado nos aspectos estruturais da Álgebra, diversas avaliações governamentais, como o SAEB, indicam deficiências no aprendizado da Álgebra. Essas dificuldades são apontadas não apenas no Brasil, mas em muitos países (STACEY; CHICK, 2004). Pesquisadores como Blanton e Kaput (2005) e Wasserman (2016) discutem essas deficiências.

Em vista disso, apresentamos nesse relato uma alternativa para o ensino da Álgebra, baseada no uso de um jogo, que teve por objetivo auxiliar os estudantes do Ensino Fundamental II, em especial os alunos do 7° ano, na transição da aritmética para álgebra, ajudando na compreensão dos conteúdos de expressões algébricas, equações lineares e relações entre incógnitas.

O jogo, intitulado “Tesouro nas Ilhas Gregas”, foi concebido e desenvolvido, tendo por fundamentos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pesquisas sobre o Ensino de Álgebra e, ainda, sobre o uso de jogos em situações de ensino.

A seguir, apresentamos em linhas gerais as concepções de Álgebra segundo alguns Educadores Matemáticos e ainda, reflexões sobre o uso de jogos.

2. Concepções de Álgebra no Ensino e o uso de jogos

A Álgebra sempre desempenhou um papel crucial na história da civilização e da matemática, sendo uma ferramenta essencial para resolver problemas diversos ao longo do tempo. Este desafio se reflete no ensino básico, onde os professores devem ensinar os conceitos algébricos de acordo com prescrições, destacando sua origem histórica e necessidade prática.

Incorporar a história da Álgebra e todo o seu desenvolvimento no ensino pode ajudar os alunos a compreenderem melhor e darem mais significado ao aprendizado algébrico. Segundo Silva et al. (2015), a construção lógico-histórica dos conceitos pode responder à pergunta dos alunos sobre a importância da Álgebra, mostrando que a matemática evoluiu a partir de necessidades reais e está em constante desenvolvimento.

Todo esse desenvolvimento histórico tem uma relação direta de como a Álgebra é concebida no ensino. Pesquisadores como Usiskin (2004), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Lins e Gimenez (2001) destacam algumas dessas concepções, caracterizando como elas impactam a forma como a Álgebra e abordada em sala pelos professores.

Entretando, há diversas concepções sobre o ensino e a utilização da Álgebra. Usiskin (2004), por exemplo, aponta a dificuldade de definir a Álgebra de forma precisa, enquanto Bianchini (2022) a define como a parte da matemática que lida com grandezas variáveis ou desconhecidas, representadas por símbolos.

Já Lins e Gimenez (2001) afirmam que não há consenso sobre o pensamento algébrico, mas reconhecem a importância de equações, cálculo literal e funções no desenvolvimento da Álgebra. Usiskin (2004), ainda discute a evolução do conceito de variáveis, mostrando que, historicamente, variáveis foram entendidas de diferentes maneiras, desde números literais que assumem múltiplos valores até símbolos que representam elementos de um conjunto. Essa diversidade de concepções reflete a complexidade e a riqueza do pensamento algébrico e desconsiderá-la é "desoportunizar" que os estudantes experienciem um ensino de Álgebra que vai além do caráter sintático e abstrato que normalmente a Álgebra é ensinada.

Pensando nisso, criar alternativas para esse ensino que levem em conta o desenvolvimento da Álgebra e suas possíveis concepções, pode contribuir para um ensino mais divertido e significativo. O uso de jogos pode ser uma ferramenta em potencial.

Atualmente, encontramos muitos trabalhos que utilizam da gamificação como estratégia pedagógica no ensino da Álgebra. Apesar de ser vista como uma novidade impulsionada pela tecnologia contemporânea, a gamificação possui fundamentos históricos na Educação. Definida como o uso de jogos, tanto digitais quanto tradicionais, para apoiar a aprendizagem, a gamificação busca tornar o processo educativo mais envolvente e estimulante.

Huizinga (2008), em "Homo Ludens", argumenta que o jogo é uma atividade humana essencial, transcendendo sua mera definição linguística, contribuindo para o desenvolvimento do cidadão. Wallon (1995) sugere que o jogo é uma atividade séria para a criança, essencial para seu desenvolvimento cognitivo e social. Piaget e Vygotsky, em suas obras, enfatizam o papel do jogo na construção do conhecimento, destacando sua função no desenvolvimento do raciocínio lógico e na internalização de conceitos complexos.

A necessidade de regras claras nos jogos é essencial, pois facilita a introdução de conceitos matemáticos avançados, como algoritmos e procedimentos, alinhando-se às propostas de aprendizagem relatas por Grando (1995). Esta autora sugere que os jogos pedagógicos não promovem apenas a exploração e criatividade, mas também servem como ferramentas eficazes para a aprendizagem significativa.

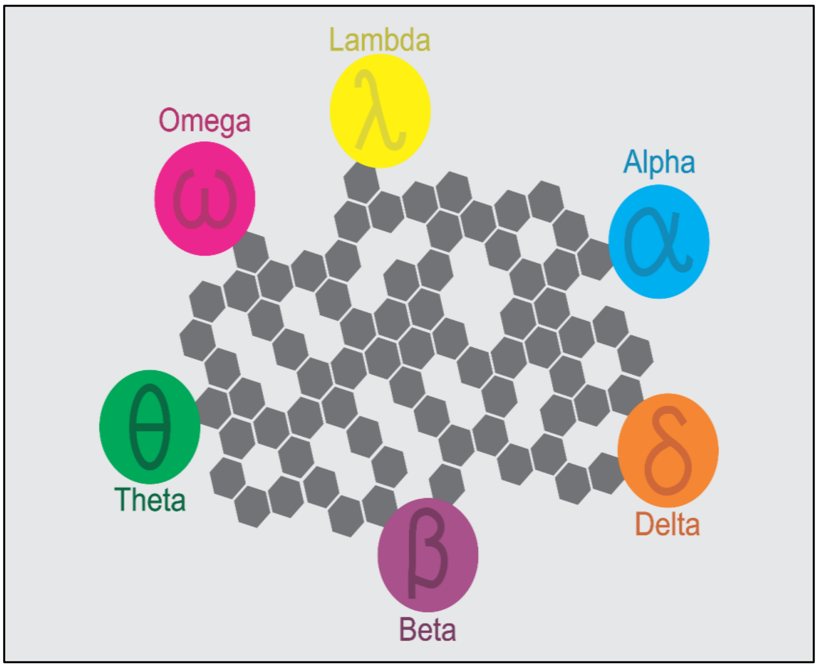
Além disso, o uso de jogos no ensino de matemática tem a capacidade de motivar os alunos, superar obstáculos na aprendizagem matemática e promover interações construtivas em sala de aula. Destacamos que os jogos matemáticos, conforme discutido por Dullius, Gerhardt e Bianchini (2010), podem ser fundamentais para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, especialmente ao abordar a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

3. O Jogo Tesouro nas Ilhas Gregas

✓ **Objetivo do jogo**

No jogo Tesouro nas Ilhas Gregas, o objetivo dos estudantes é desvendar a quantidade de tesouros das 6 (seis) ilhas do tabuleiro (Figura 1). No decorrer das jogadas, serão dadas algumas informações que relacionam a linguagem usual com a linguagem algébrica por meio das operações básicas da aritmética, dentro do conjunto dos números naturais. Para acessar essas informações, os estudantes devem percorrer o tabuleiro, obtendo uma carta, de um total de 36 (Figura 3), cada vez que chegarem a uma ilha. Para organizar o raciocínio, sugerimos que o estudante faça o uso de uma tabela (Figura 2), para anotar suas “operações”.

Figura 1 - Tabuleiro do Jogo



Fonte: Autores

Figura 2 - Tabela auxiliar

Alpha (α)	Delta (δ)
Lambda (λ)	Omega (ω)
Beta (β)	Theta (θ)

Fonte: Autores

Figura 3 - Cartas do Jogo Tesouro nas Ilhas Gregas

A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 30 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 80 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 100 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 80 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 50 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 20 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).
A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é metade da quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) é 210 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Alpha (α) somada a 50 resulta em 200.	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 70 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 130 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	O dobro da quantidade de tesouros da ilha Delta (δ) é 460.
A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é o dobro da quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 120 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 70 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 30 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 50 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 70 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).
A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 50 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é 60 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ) é o triplo de 100.	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é metade da quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) é 120 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Beta (β) menos 80 resulta em 100.
A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 100 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 70 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 20 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 210 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha (α).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é o dobro da quantidade de tesouros da ilha Beta (β).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 130 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Delta (δ).
A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 50 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 110 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Omega (ω).	A metade da quantidade de tesouros da ilha Theta (θ) é 125.	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 110 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Theta (θ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) é 60 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Lambda (λ).	A quantidade de tesouros da ilha Omega (ω) menos 60 resulta em 300.

Fonte: Autores

✓ **Público-alvo**

O jogo Tesouro nas Ilhas Gregas tem como foco nos estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental II. Recomendamos que ele seja aplicado após os estudos sobre equações do 1º grau, contudo, a critério do professor, o mesmo pode ser aplicado como impulsionador do conteúdo. O objetivo é que o jogo sirva como uma forma descontraída para retomar e reforçar esse conteúdo e verificar se os estudantes estão aplicando adequadamente as propriedades aprendidas durante esse estudo. Além disso, é uma maneira interessante de introduzir os sistemas de equações, pois durante o jogo os alunos se depararão com equações de duas incógnitas e precisarão substituir os valores conhecidos para descobrir as demais quantidades.

✓ **Objetos de conhecimento - objetos de conhecimento algébrico**

- Linguagem algébrica: variável e incógnita
- Equivalência de expressões algébricas
- Equações polinomiais do 1º grau
- Sistema de equações polinomiais do 1º grau

<u>Regras do jogo</u>

✓ **Organização**

A turma deverá ser dividida em grupos de seis integrantes. Cada grupo receberá um tabuleiro, 36 cartas, sendo 6 de cada ilha, 4 peões e 1 dado. Caso queira definir um tempo para as jogadas, sugerimos a utilização de um cronômetro ou ampulheta por grupo.

✓ **Desenvolvimento das partidas**

Antes de iniciar o jogo, as equipes devem empilhar as 6 cartas correspondentes as 6 ilhas e cada jogador deve posicionar o seu peão em uma ilha do tabuleiro, lembrando que dois ou mais peões não podem ocupar a mesma ilha em nenhum momento do jogo, inclusive no início.

Para começar, os jogadores lançam o dado para definir quem será o primeiro a jogar. Definido o primeiro jogador, os demais participantes jogam seguindo a ordem no sentido horário.

Em cada rodada, o jogador da vez deve lançar o dado e caminhar pelas casas do tabuleiro com o objetivo de chegar em uma das ilhas. Caso ele não alcance uma ilha, deve permanecer na casa em que parou e passar a vez para o próximo jogador. Mas, caso consiga chegar em uma ilha, ele terá um tempo para pegar a primeira carta da pilha correspondente à ilha que está ocupando, traduzir a informação para a linguagem simbólica e escrevê-la na tabela. Após esse tempo, ele deve devolver a carta para a mesma pilha, colocando-a por baixo de todas as outras.

- ✓ **Resultados esperados**

Durante o jogo, esperamos que os alunos consigam traduzir as informações escritas na linguagem usual para a linguagem simbólica. Além disso, percebam que, é impossível resolver uma equação com duas incógnitas, a não ser que o valor de uma delas seja conhecido previamente.

Pressupõe-se também que os alunos entendam que as letras gregas utilizadas nesse jogo para representar as quantidades de tesouros de cada ilha possuem o mesmo papel que outras letras ou símbolos que desempenham a função de incógnitas em outras equações.

4. Resultados com a aplicação do Jogo

Para aprimorar o jogo, antes que ele fosse elaborado em sua versão final, resolvemos fazer uma aplicação teste. Como não haveria tempo de aplicá-lo para fazer uma análise mais aprofundada dos resultados alcançados para trazer em nossa dissertação, convidamos um estudante de cada ano do Ensino Fundamental II, a partir do 6° ano, para jogar. A ideia era compreender um pouco sobre como seria a experiência e fazer os ajustes que julgássemos necessários.

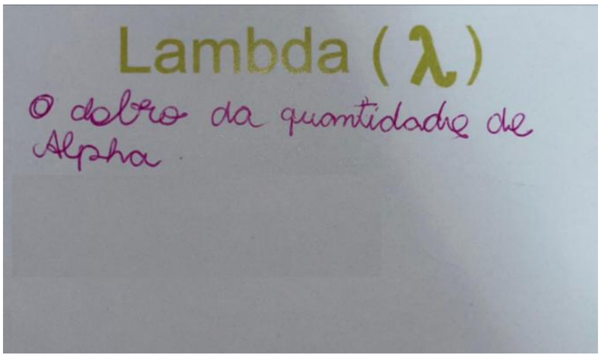
No grupo selecionado, dois estudantes dos 6º e 7º anos ainda não tinham começado a utilizar símbolos para resolver problemas algébricos, enquanto os outros dois, do 8º e 9º anos, já estavam familiarizados com esse conceito.

É importante ressaltar que, no momento dessa aplicação, os estudantes receberam uma tabela, como a da Figura 2, para organizar o seu raciocínio. Dessa forma, não houve nenhuma orientação sobre qual seria a maneira “correta” de fazer esses registros.

Ao escolher esse grupo, nosso objetivo era verificar se, mesmo sem entender a álgebra simbólica, os estudantes mais novos seriam capazes de registrar os seus pensamentos e chegar aos resultados. Além disso, gostaríamos de analisar qual seria a forma que os alunos mais velhos iriam fazer os seus registros: utilizando ou não as incógnitas.

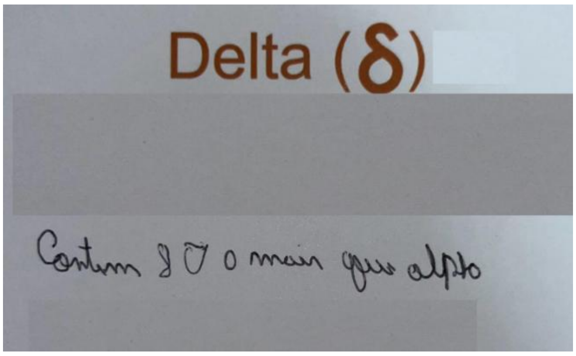
Como esperado, os alunos do 6° e do 7° ano fizeram seus registros utilizando palavras. O registro da Figura 4 foi feito pelo estudante do 6° ano ao retirar a carta que dizia: “A quantidade de tesouros da ilha Lambda é o dobro da quantidade de tesouros da ilha Alpha”. Já o registro da Figura 5 foi feito pelo estudante do 7° ano ao retirar a carta que dizia: “A quantidade de tesouros da ilha Delta é 80 a mais do que a quantidade de tesouros da ilha Alpha”.

Figura 4 - Registro do aluno do 6° ano



Fonte: Autores

Figura 5 - Registro do aluno do 7° ano



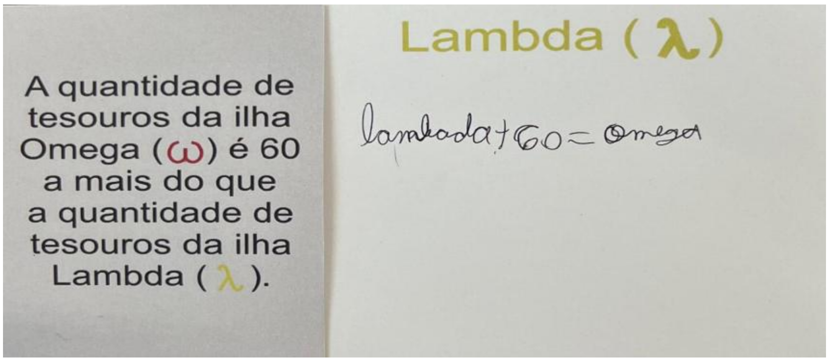
Fonte: Autores

Durante a aplicação do jogo, percebemos que o estudante do 6° ano, apesar de fazer os registros de maneira correta, teve uma certa dificuldade em relacionar a quantidade de tesouros de uma ilha com outra ilha que dependia da primeira. Por exemplo, com a dica “A quantidade de tesouros da ilha Lambda é o triplo de 100”, ele conseguiu verificar facilmente que a ilha Lambda possuía 300 tesouros. Porém, mesmo já tendo registrado uma dica a qual ele escreveu “Lambda é o dobro da quantidade de Alpha”, ele não soube relacionar o Lambda conhecido para encontrar a quantidade de Alpha.

Já o aluno do 7° ano conseguiu fazer essas relações corretamente e, inclusive, terminou o jogo como campeão.

Os alunos do 8° e 9°, ao registrarem seus raciocínios, fizeram o uso de símbolos, porém não da forma como normalmente se espera. O estudante do 8° ano, quando retirava uma carta, registrava a informação como uma equação. Porém, em vez de utilizar os símbolos que representam cada letra grega, ele optou por escrever o nome da letra. O exemplo da Figura 6 mostra uma carta retirada por esse aluno e a forma como registrou a informação contida nela.

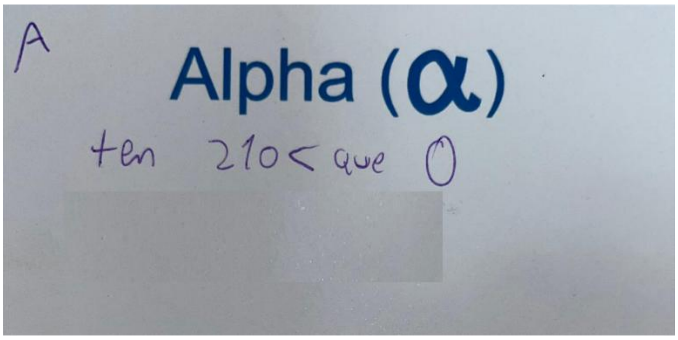
Figura 6 - Registro do aluno do 8° ano



Fonte: Autores

Já o aluno do 9° ano fez os seus registros de uma forma muito inusitada. Em vez de utilizar os símbolos “+” para adição e “–” para subtração, ele fez os registros utilizando os símbolos “>” e “<”. Além disso, para representar as ilhas, ele utilizou a inicial de cada uma. Por exemplo, ao retirar a carta que dizia “A quantidade de tesouros da ilha Alpha é 210 a menos do que a quantidade de tesouros da ilha Ômega”, ele fez o registro mostrado na Figura 7. Apesar disso, ele conseguiu expressar o seu raciocínio e relacionar as quantidades das ilhas que dependiam umas das outras. Porém, por alguns erros de cálculo durante o processo, talvez impulsionados pelo uso do sinal de maior e menor, não obteve todos os resultados corretos.

Figura 7 - Registro do aluno do 9° ano



Fonte: Autores

Destacamos que foi importante para vislumbrar alguns fatos que corroboravam com os referenciais usados em nossa pesquisa. Os alunos do 6° e 7° ano tiveram dificuldade de usar a linguagem algébrica, mas compreendiam o problema de maneira artimetizada usando a linguagem materna para expressar seus resultados e os alunos do 8° e 9° ano, apesar de usarem os símbolos, tinham dificuldades de relacionar as incógnitas de maneira correta, revelando que o traquejo algébrico ficava muito no campo do sintático, destituído de semântica/sentido para esses alunos.

Os resultados alcançados durante a aplicação do jogo “Tesouro nas Ilhas Gregas” reforçam o quanto o pensamento algébrico está presente muito antes de aprendermos linguagem algébrica, uma vez que notamos que alunos com uma aritmética bem desenvolvida, acaba, intuitivamente, migrando para notações mais generalistas, indo na direção da aprendizagem da Álgebra.

5. Considerações Finais

As dificuldades no ensino da Álgebra, em grande parte, acabam se apoiando na falta de métodos didático e pedagógicos adequados para o seu ensino em sala de aula. Em relação ao modo como os conceitos algébricos são apresentados para os estudantes, destacamos que os professores muitas vezes fazem uso de atividades repetitivas, de completar e resolver cálculos diretos, não estimulando o raciocínio e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Riveiro et al (2023), revelam que pesquisas no campo do ensino de Álgebra mostram que a introdução desse assunto na educação básica, deve ser feita de forma significativa, oportunizando ao estudante um amadurecimento gradativo do pensamento algébrico. “A introdução de conceitos algébricos por meio, por exemplo, da Resolução de Problemas, desperta a autonomia e contribui para uma formação que apresenta significados dentro da Álgebra.” (2023, p. 341)

Assim, ao desenvolvermos um jogo para auxiliar no processo de ensino aprendizagem da Álgebra para alunos do Ensino Fundamental II, tendo por base a BNCC e referenciais consolidados na Educação Matemática, acreditamos que contribuímos para uma prática de ensino, por meio de uso de jogos, que desperta no aluno o interesse pela Álgebra e, ainda, o auxilia a transitar da aritmética para a linguagem algébrica de uma forma natural, lúdica e divertida.

Esperamos que outros se inspirem nesse trabalho e vejam na ferramenta Jogos, um meio para ensinar matemática, principalmente a Álgebra, como um recurso que permite muitas nuances, mas que, conforme notamos, ajuda muito no envolvimento dos alunos e a ensinar de maneira descomplicada.

6. Referências

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini** – 7° ano. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

BIANCHINI, Gisele; GERHARDT, Tatiane; DULLIUS, Maria Madalena. Jogos no ensino da Matemática: quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática?. **Revista Destaques Acadêmicos**, ano 2, n. 4, 2010.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-46, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017.

COELHO. F.U; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **ESTUDOS AVANÇADOS**, v. 32 (94), p. 171 -187, 2018.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pró-posições**, 4(1), 78-91, 1993.

GRANDO, R.C. **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem na Matemática**. 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

HUIZINGA, J. **Homo Ludenn**: o jogo como elemento da cultura. Trad. João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2008.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. Campinas: Papirus, 2001.

MIORIM, M. A., FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

RIVEIRO, *et al.* A Construção de um Estado da Arte Sobre Introdução, Dificuldades e Perspectivas de Conceitos e Simbologias da Álgebra no Ensino Fundamental. **JIEEM**. v.16, n.4, p. 330-342, 2023.

SILVA, Juciane Teixeira; RESENDE, Marilene Ribeiro; IBRAHIM, Soraia Abud; FERNANDES, Florença. As concepções de álgebra e de educação algébrica: uma análise de livros didáticos do 8° ano. **Revista Profissão Docente**, Uberaba, v. 15, n. 33, p. 127-145, ago./dez. 2015.

STACEY, K.; CHICK, H. Solving the problem with Algebra. In: STACEY, K. *et al* (Ed.) **The Future of teaching and learning of algebra**: The 12th ICMI Study. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, p.1-20, 2004.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 2004.

WALLON, H. **A evolução psicológica da criança**. Trad. Cristina Carvalho. Lisboa: Edições 70, 1995.

WASSERMAN, Nicholas H. Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. **Canadian Journal of Science**, **Mathematics and Technology Education**, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016.