UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

RAUL CÉZAR APARECIDO DOS SANTOS CID

Processos Composicionais com Sequências de Fibonacci no Ensino da Matemática

Campinas

2024

Raul Cézar Aparecido dos Santos Cid

Processos Composicionais com Sequências de Fibonacci no Ensino da Matemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Jônatas Manzolli

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Raul Cézar Aparecido dos Santos Cid e orientada pelo Prof. Dr. Jônatas Manzolli.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C486p

Cid, Raul Cézar Aparecido dos Santos, 1991-
Processos composicionais com sequências de Fibonacci no ensino da matemática / Raul Cézar Aparecido dos Santos Cid. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Jônatas Manzolli.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números de Fibonacci. 2. Ensino de matemática. I. Manzolli, Jônatas, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Compositional processes with Fibonacci sequences in teaching mathematics
Palavras-chave em inglês:
Fibonacci numbers
Mathematics teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Roberto Andreani
Adolfo Maia Júnior
Manuel Silveira Falleiros
Data de defesa: 23-08-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0004-4094-3414
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8215856469520957

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 23 de agosto de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). ADOLFO MAIA JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). MANUEL SILVEIRA FALLEIROS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as coisas, principalmente pelo dom da vida, pela possibilidade de fazer coisas prazerosas e estar com pessoas que amo.

Agradeço a toda minha família: à minha querida esposa Bruna, aos meu pais Maria Leide e Jeso, aos meus irmãos Junior, Tiago e Vitória, pessoas que são a base da minha vida.

Agradeço também toda a estrutura universitária do programa PROFMAT no IMECC, a todos os professores, funcionários e colegas de turma.

Agradeço a orientação do professor Jonatas Manzolli, mesmo com a distância causada pela pandemia, tivemos boas conversas que acrescentaram muito neste trabalho e também nas minhas percepções sobre o ensino.

Durante a escrita desta dissertação recebi a feliz notícia de que serei pai de um menino, dedico também a ele, que nem nasceu ainda. Que a educação possa ser um caminho sólido para a construção do seu caráter.

Resumo

A relação entre Matemática e Música parece, nos dias atuais, algo muito distante porém este diálogo deve ser estimulado por professores e estudiosos que buscam na interdisciplinaridade uma forma mais eficaz de motivarem seus alunos. Essa aparente distância se exemplifica quando se coloca em caixas bem separadas as ciências exatas e a música, porém a história trata de reestabelecer aquilo que é natural, a relação forte que existe entre essas duas áreas e que tem registros desde a Antiguidade. Pitágoras, matemático grego que viveu no século V a.C., explorou o monocórdio, uma experiência envolvendo proporções numéricas com frequências sonoras para gerar escalas musicais utilizadas até os dias atuais. O modelo de ensino adotado na Idade Média, herdado da Antiguidade clássica, baseava-se nas artes liberais que eram divididas em dois grupos: o Quadrivium que tinha em sua composição a Aritmética, a Geometria, a Astronomia e a Música, que era considerada uma aplicação do número.

A dissertação aqui apresentada tem como objetivo propor relações entre a Música e a Matemática, mais especificamente por meio de um método de composição que utiliza a sequência de Fibonacci para criar relações entre notas e números. Entretanto, a relação entre essas duas áreas nem sempre é uma tarefa trivial, por vezes, pode-se cair em aplicações muito simplistas, como relacionar frações com a duração de notas musicais ou relacionar a um número qualquer sem se ater a nenhuma contextualização musical. Apenas utilizar exemplos de relações existentes entre a Música e a Matemática não é suficiente, é preciso dar-lhes a oportunidade de vivenciar essas relações, uma aula sem experiências musicais pode não convencer os alunos da real interação entre as áreas, além de deixá-los na superficialidade de um tema com um potencial muito abrangante. Ao pensar assim, a nossa pesquisa voltou-se ao desenvolvimento de um método de composição que poderia de fato engajar os alunos numa interação criativa.

Outro propósito desta pesquisa é ajudar educadores matemáticos a elaborar aulas que sejam instigadoras para os alunos, a fim de envolver uma porcentagem maior de estudantes, pois a música cria um elo motivacional unânime entre as pessoas, sem perder o caráter conteudista e os saberes próprios da Matemática.

A dissertação está organizada em quatro capítulos. No primeiro, será abordada a relação interdisciplinar entre Matemática e Música e os desafios dos professores de Matemática no ensino básico, considerando, inclusive, o período de pandemia que exigiu que as aulas acontecessem de forma remota. O segundo capítulo tem a sequência de Fibonacci como tema central, trazendo a definição e algumas propriedades desses números, além disso, descreve o número phi (número de ouro) relacionando-o as sequências numéricas de Fibonacci. No terceiro capítulo, temos a aplicação da sequência de Fibonacci na composição musical, que culmina na produção de um perfil melódico que é posteriormente transformado numa composição para piano e flauta. Por fim, no quarto e último capítulo, temos o desfecho do trabalho com uma sugestão de projeto interdisciplinar com base nos assuntos abordados nos capítulos anteriores.

Em suma, esta dissertação apresenta duas contribuições, a primeira é um algoritmo composicional utilizando sequências numéricas e aritmética dos módulos que será descrita e formalizada matematicamente. A segunda é a proposta de um projeto interdisciplinar que a partir do diálogo entre Matemática e Música, abarca outras áreas se somam para enriquecer o ambiente de ensino e apredizagem.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Fibonacci; Música.

Abstract

The relationship between Mathematics and Music seems, nowadays, something very distant, but this dialogue must be encouraged by teachers and scholars who seek interdisciplinarity a more effective way to motivate your students. This apparent distance is exemplified because the layman puts the exact sciences and Music in very separate boxes, but history tries to reestablish what is natural, the strong relationship that exists between these two areas and which has records since Antiquity. Pythagoras, Greek mathematician who lived in the V BC, explored the monochord, an experiment involving numerical proportions with sound frequencies to generate musical scales used to this day. The model of teaching adopted in the Middle Ages, inherited from classical antiquity, was based on the arts liberals who were divided into two groups: the Quadrivium, which had in its composition the Arithmetic, Geometry, Astronomy and Music, which was considered an application of number.

This work aims to propose relationships between music and mathematics, more specifically through a method of composing that uses the Fibonacci sequence. Explaining the relationship between music and mathematics is not always easy, sometimes one can fall in very simplistic applications, such as relating fractions to the duration of musical notes or relating the frequency of a note to an integer. The examples given are actual relationships exist between music and mathematics, but just quoting this in a class may not convince students of the real interaction between areas, in addition to leaving them in superficiality of a topic with a much deeper potential.

Another purpose of this research is to help mathematics educators design lessons that are enjoyable for students in order to engage a higher percentage of students, because music is an almost unanimous motivating element among people, without losing the content character and the knowledge of mathematics.

The dissertation is organized into four chapters. In the first, the relation interdisciplinary relationship between mathematics and music and the challenges of mathematics teachers in basic education, even considering the pandemic period that demanded that the they happen remotely. The second chapter has the Fibonacci sequence as a central theme, bringing the definition and some properties of these numbers, in addition to In addition, it describes the phi number (golden number) in relation to the Fibonacci numbers. In the third chapter, we have the application of the Fibonacci sequence in musical composition, which culminates in the production of a melodic profile, from a numeric sequence

Finally, in the fourth and last chapter, we have the conclusion of the work with a suggestion of interdisciplinary project based on the subjects covered in the previous chapters.

This dissertation has two major contributions, the first is a compositional algorithm using numerical sequences and arithmetic of the modules that will be described and formalized mathematically. The second is the proposal of an interdisciplinary project with great emphasis on mathematics and music where other areas must also be added to enrich learning.

Keywords: Teaching Mathematics; Fibonacci; Music.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação Quadrivium . . . 24
Figura 2 – Leonardo Fibonacci . . . 27
Figura 3 – *Liber Abaci* . . . 27
Figura 4 – Diagrama da prole de coelhos de acordo com a solução do problema. . 28
Figura 5 – Retângulo Áureo . . . 36
Figura 6 – Sequência de retângulos áureos . . . 36
Figura 7 – Espiral a partir do retângulo áureo . . . 37
Figura 8 – Diagrama da relação números/notas musicais . . . 38
Figura 9 – Diagrama da relação números/notas musicais . . . 39
Figura 10 – Quadro do Periodo Pisano . . . 41
Figura 11 – Pentagrama . . . 42
Figura 12 – Teclado musical . . . 43
Figura 13 – Intervalos musicais . . . 43
Figura 14 – Compilação do programa JAVA, termos de Fibonacci . . . 47
Figura 15 – Excel . . . 48
Figura 16 – Associação número/nota utilizada na composição maior . . . 48
Figura 17 – Fluxograma de etapas do modelo . . . 50
Figura 18 – Espiral áurea . . . 57
Figura 19 – Caracol . . . 58
Figura 20 – Concha Nautilos . . . 58
Figura 21 – Árvore genealógica de um zangão . . . 59
Figura 22 – Monalisa . . . 60
Figura 23 – Criação de Adão . . . 60
Figura 24 – Homem Vitruviano . . . 61
Figura 25 – Teclado musical . . . 62
Figura 26 – Violino . . . 62
Figura 27 – Mozart . . . 63
Figura 28 – Bela Bartok . . . 66
Figura 29 – Sorriso . . . 68
Figura 30 – triângulo de Pascal . . . 69
Figura 31 – Reflexões . . . 69
Figura 32 – Tela inicial do FLAT . . . 70
Figura 33 – Caption . . . 70
Figura 34 – Xilofone . . . 71
Figura 35 – Diapasão eletrônico . . . 72
Figura 36 – Representação de um xilofone artesanal . . . 72

Figura 37 – Interface do Songmaker 73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela Coelhos 29
Tabela 2 – Razões entre números de Fibonacci 35
Tabela 3 – Cifras e notas musicais 42
Tabela 4 – figura rítmica 43
Tabela 5 – Escalas maiores 44
Tabela 6 – Escalas menores 44
Tabela 7 – Escalas pentatônicas 44
Tabela 8 – Frequência das notas musicais 63
Tabela 9 – Tabela Kochel 64

Sumário

Introdução 15

1 A INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NOS DESAFIOS DE ALUNOS E PROFESSORES 17

1.1 Aspectos sobre o ensino de Matemática 17

1.2 Motivação a partir da interdisciplinaridade 22

2 A RELAÇÃO ENTRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A PROPORÇÃO ÁUREA 26

2.1 História de Fibonacci 26

2.2 Definição da sequência de Fibonacci 29

2.2.1 Sequências de Fibonacci 30

2.3 Propriedades elementares dos números de Fibonacci 30

2.3.1 Soma dos n primeiros números de Fibonacci 30

2.3.2 Soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar 31

2.3.3 Soma dos números de Fibonacci de ordem par 31

2.3.4 Soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci 31

2.3.5 Soma dos números de Fibonacci com sinais alternados. 32

2.3.6 A fórmula de Binet 33

2.4 Proporção áurea/ número de ouro 34

2.4.1 Um pouco de história 34

2.4.2 Definição de secção áurea 35

2.4.3 O retângulo, quadrado e espiral áureos 36

3 UM ALGORITMO COMPOSICIONAL UTILIZANDO SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E ARITMÉTICA DE MÓDULOS 38

3.1 Sequência numérica aplicada à geração de perfis melódicos 38

3.2 Aritmética dos módulos 40

3.3 Período de Pisano 40

3.4 Teoria musical e aplicação do algoritmo 42

3.4.1 Nota musical 42

3.4.2 Representação de uma nota musical 42

3.4.3 Duração de notas 43

3.4.4 Escalas 43

3.5 Composição maior 46

3.6 Formalização do algoritmo 49

3.7 Partitura no Sibelius 50

4 PROJETO INTERDISCIPLINAR COM A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 57
4.1 Biologia, Geometria e Artes 57
4.2 Diálogos com a Música 62
4.3 Proporção áurea na obra de Mozart 63
4.4 Bela Bartok 66
4.5 Aparência da estética da face 68
4.6 Matemática 69
4.7 Física 69
4.8 Desenvolvendo conteúdos práticos para sala de aula 70
4.8.1 FLAT 70
4.8.2 Construindo um xilofone 71
4.8.3 Songmaker 73

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 74

REFERÊNCIAS 75

6 PLANO DE AULA 76

Introdução

Um dos maiores desafios hoje para a sociedade brasileira, que inclui famílias e Estado, é proporcionar a crianças, adolescentes e jovens uma educação que cumpra seu papel, formando pessoas na sua integralidade e que estejam preparadas para ingressar no mercado de trabalho. A Matemática sofre de grande estigma e são desesperadores os resultados apresentados nos testes que tentam aferir o aprenzidado nessa área. Mais decepcionante são os recursos disponíveis ao professor diante disso, que tenta realizar seu trabalho, mas que esbarra em muitas situações como: falta de motivação, salas lotadas, falta de participação de pais e responsáveis. O que fazer? Como é possível mudar esse quadro? Como é possível fazer a diferença? Aqui, proponho um elemento que pode contribuir muito com as aulas, que é a integração com a Música. Pensar nessas duas áreas do conhecimento juntas em uma mesma aula é, mesmo nos dias de hoje, quase improvável, pois tratam, à primeira vista, de objetos de estudo diferentes. Mas a história da civilização ocidental mostra que essa relação é antiga e chega aos primódios da nossa civilização no pensamento da Escola de Pitágoras.

Atuo como professor de Matemática da rede pública de ensino do município de Paulínia, na escola Maestro Marcelino Pietrobom. Minhas vivências e experiências enquanto docente, que se iniciaram em 2012, ainda durante a Licenciatura, foram determinantes para a escolha do tema desta dissertação, visto que tem o intuito de auxiliar na reflexão e na prática das aulas de Matemática de outros professores. Pensando nas muitas aplicações matemáticas possíveis de serem trabalhadas por um professor, uni a motivação de tornar as aulas de matemática mais atrativas com a minha paixão pela Música. Apesar de não ter formação profissional nesta área, aprendi a tocar alguns instrumentos e também já fiz aulas de canto. Assim, na minha experiência pregressa, conhecia algumas aplicações da Música na Matemática e quando as citava na sala de aula sempre tinha um bom retorno dos alunos, pois o gosto pela Música parece estar latente em todas as pessoas.

Unindo esses dois aspectos, a necessidade de transformar a sala de aula e meu apreço pela Música, a pergunta que motivou esse trabalho foi: como criar um projeto interdisciplinar de ensino focado no diálogo entre Matemática e Música e com possível participação de outras áreas? Essa questão de trabalho que motivou a minha dissertação tem ressonância em algumas publicações e conteúdos que tratam desse tema, os quais foram abordados nesta dissertação, como a tese de doutorado da Luciana Gastaldi Sardinha Souza. (1)

Entre as várias possibilidades de temas ou conteúdos matemáticos, a escolha foi abordar as sequências de Fibonacci e a secção de ouro como vínculo entre a Matemática e a Música. Outra motivação para estudar as sequências de Fibonacci nesta dissertação é que esse tema é pouco trabalhado no ensino básico, mas há muitas aplicações em áreas do conhecimento, como na Arquitetura, nas Artes plásticas, na Biologia, na Música etc. No recorte da interação com a Música, o foco da dissertação é a composição aplicando a lógica dos números de Fibonacci para determinar os parâmetros altura e duração das notas musicais. Além das indicações pedagógicas, apresentamos neste trabalho uma composição na qual utilizei as sequências de Fibonacci no processo criativo.

A motivação central deste trabalho é uma proposta de melhoria no ensino de Matemática por meio da Música, que pode ser um elemento importante, agregador e motivador para os alunos. E suas duas grandes contruibuições são: o algoritmo composicional e o projeto interdisciplinar.

1 A interdisciplinaridade entre Matemática e Música nos desafios de alunos e professores

Este capítulo tem o propósito de refletir sobre a Matemática no ensino básico, suas dificuldades e seus desafios. Propõe um elemento que pode agregar muito às aulas de Matemática, a Música, e, consequentemente, o diálogo interdisciplinar entre essas duas áreas.

1.1 Aspectos sobre o ensino de Matemática

Um dos maiores desafios dos educadores matemáticos que trabalham no ensino básico é estimular seus alunos a apreciarem, ou pelo menos dialogarem, com essa área do conhecimento, que envolve Ciência e Filosofia, já tão estigmatizada por grande parte das pessoas pelas mais diversas razões: falta de incentivos, de habilidades, traumas, entre outras. Há também muitas hipóteses para entender o cenário que coloca os estudantes brasileiros nas últimas posições do ranking PISA[1] quando o assunto é aprendizagem de Matemática, entre elas estão a baixa qualidade da formação de professores, a não prioridade de investimentos e esforços nos níveis de alfabetização, a falta de recursos nas escolas, a falta de apoio e conscientização das famílias, entre tantas outras.

Pensando ainda nessa realidade, dois aspectos que contribuem para o cenário alarmante na educação matemática devem ser ressaltados. O primeiro é a disposição individual de cada aluno, que vem diretamente do comprometimento deste e da ação da família em querer estimular essa criança ou adolescente a gostar dos estudos, a fazê-lo entender que o aprendizado é prazeroso em si mesmo, que o estudo não serve estritamente para ter uma nota no final do ano.

O segundo aspecto trata da inserção de conteúdos interdisciplinares no ensino da matemática como forma de incentivar o aprendizado, este será desenvolvido mais detalhadamente no tópico 1.2, por hora, atemo-nos ainda ao primeiro. Ignorar o papel da família e a vontade do estudante é um grande erro ao se criar estratégias para a evolução do ensino de Matemática. Em uma de suas entrevistas, realizada em 2015, o matemático Arthur Ávila, ganhador da medalha Fields, afirmou:

---

[1] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206#:~:text=Quando%20comparado%20com%20os%20pa%C3%ADses,(391)%20est%C3%A3o%20%C3%A0%20frente.> Acesso em: 7 jan. 2020.

> O principal num processo de aprendizagem é o aluno que precisa estar curioso, que precisa querer aprender e isso não pode ser substituído pelo melhor professor do mundo, o professor pode ajudá-lo a se desenvolver, mas se ele não tiver motivação as idéias não serão entendidas.[2]

Um conhecido ditado diz que "o aluno faz a escola", ou seja, com alunos comprometidos, motivados, cientes de seu papel, temos uma boa escola. A qualidade do ensino está diretamente relacionada ao envolvimento de todos os indivíduos presentes nesse processo: estudante, professor, gestão e família.

Felicetti e Morosini (2010) (2), em seus estudos sobre o envolvimento do aluno no processo de aprendizado deste, diferenciam compromisso de comprometimento:

> Compromisso é entendido e relacionado a tudo aquilo que é feito, enquanto que o comprometimento refere-se a como se faz, ou seja, este último é constituído do que se faz e como se faz. Portanto, o comprometimento é muito maior que o compromisso (p. 25).

Para as autoras, não basta cumprir um rito de estudo, o importante é como este é feito, qual o tempo dispensado para estudar, qual a qualidade desse estudo. Além disso, uma pergunta corrobora com a tese de que o aluno é o principal elemento de sua aprendizagem: um professor comprometido com sua profissão docente consegue ensinar a todos os seus alunos da mesma maneira? A resposta fica clara quando observamos o rendimento tão heterogêneo dos alunos de uma mesma classe, no que diz respeito ao desenvolvimento e também no rendimento nas provas e testes que tentam mensurar o aprendizado deles. O estudante deve ser o principal responsável no processo de aprendizagem, o não comprometimento deste gera enormes dificuldades em seu aprendizado e afeta inclusive o trabalho dos professores.

> Logo, não basta ser aluno, o compromisso não é suficiente no contexto educacional em que vivemos, é necessário um comprometimento crítico, dinâmico e responsável por parte do aluno com relação à sua aprendizagem, uma vez que o mercado de trabalho exige cada vez mais pessoas capazes de criar, além de reproduzir, pessoas independentes que façam e não esperem outros fazerem. (Felicetti; Morosini, 2010, p. 25).

No trecho acima, as autoras começam afirmando que não basta ser aluno, ou seja, não basta estar matriculado em uma escola ou comparecer às aulas, é preciso consciência de que se está construindo conhecimento com grande ajuda dos professores, mas que este aluno, que deve ser estudante, é o principal responsável pelo sucesso na busca dos objetivos.

[2] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TnUUSxZVFX8&t=305s>(minuto 11:00; transcrição minha). Acesso em: 7 fev. 2020.

Cada faixa etária tem suas peculiaridades, seus desafios, e a falta de maturidade é um elemento que devemos considerar, porém, o observado nas escolas é que idade e desinteresse nos estudos são "grandezas" diretamente proporcionais e que podem ser observadas analisando até mesmo o índice de abandono escolar, como reflete a Pesquisa Nacional por Amostras de Domicílios (PNAD), realizada pelo IBGE em 2019:

> O marco do abandono precoce à escola se dá aos 15 anos: nessa idade, quando em geral se entra no Ensino Médio, o percentual de jovens quase dobra em relação à faixa etária anterior, passando de 8,1%, aos 14 anos, para 14,1%, aos 15 anos. Os maiores percentuais, porém, se deram a partir dos 16 anos, chegando a 18,0% para pessoas com 19 anos ou mais. () Sobre as causas da evasão escolar, o IBGE aponta: São Paulo – De 50 milhões de jovens de 14 a 29 anos no país, 10,1 milhões (20,2%) não completaram a educação básica. Por abandono ou por nunca ter sequer frequentado a escola. Os dados do IBGE, divulgados nesta quarta-feira (15), mostram ainda que a evasão tem predominância de pretos e pardos (classificação usada pelo instituto), que representam 71,7% do total. Além disso, 58,3% são homens e 41,7%, mulheres. Os principais fatores citados são a necessidade de trabalhar (39,1%) e desinteresse (29,2%)[3].

Como os dados mostram, ainda há uma grande porcentagem de jovens que abandonam a escola por desinteresse, pois não veem sentido no que estão aprendendo, e mesmo com toda inovação tecnológica, aulas mais dinâmicas, professores mais preparados, escolas com melhor infraestrutura, ainda assim não se sentem motivados à aprendizagem.

Os pesquisadores de pedagogia se debruçam há muito tempo sobre esse triste fato da não valorização e não motivação dos alunos em relação ao ensino, fenômeno este que pode não ser exclusivo do Brasil, mas que gera consequências mais graves, haja vista os resultados internacionais que nos colocam nas últimas posições de nível de ensino, como já foi citado neste capítulo.

A motivação de um indivíduo está intimimamente ligada com suas necessidades. Um pai ou mãe de família sente-se motivado a trabalhar para poder suprir as demandas básicas de sua família e proporcionar o máximo de conforto possível. Um bebê sente-se motivado a dar seus primeiros passos e depois a andar, pois sente a necessidade de descobrir as coisas, mover-se pela casa, mexer nos objetos. Como nos exemplos anteriores, o aluno também precisa enxergar a indispensabilidade de estudar, de se comprometer com sua aprendizagem, cabe também à família ajudá-lo nessa missão, pois na idade escolar é difícil que se tenha total conciência da importância da escola, dentre as possíveis motivações se destacam a formação integral do indivíduo e a possibilidade de ascensão social através dos

[3] Disponível em <https://www.redebrasilatual.com.br/educacao/2020/07/dez-milhoes-abandonaram-ou-nem-frequentaram-escola/>

estudos.

Um sério agravante da situação da educação surgiu no primeiro trimestre de 2020, com a pandemia do Coronavírus que impediu a realização de aulas presenciais.

A pandemia da Covid-19 gerou em toda comunidade escolar grandes desafios e a necessidade de mudanças na didática, com a maior inserção de tecnologias que, projetadas para serem implementadas gradualmente em anos, aconteceram em poucas semanas. Os professores e alunos tiveram que se adaptar ao ensino a distância. No início, a novidade trouxe certa empolgação, mas com o passar dos meses o que se viu foi uma grande apatia da maioria dos estudantes e a mesma falta de interação que já ocorria no dia a dia das aulas presenciais foi potencializada.

A participação nas aulas online foi mínima, muitas vezes os professores (pensando aqui no ensino público) não tinham sequer um aluno nas salas virtuais. Depois de algumas conversas após o retorno das aulas presenciais, os motivos apresentados pelos alunos para a ausência nas aulas online foram os mais diversos, sendo os mais comuns: falta de recursos tecnológicos, falta de espaço apropriado em casa para aula ou simplesmente a falta de interesse pela aula.

A partir da experiência vivida durante o isolamento social, em que se esperava que o uso das novas tecnologias levasse à participação dos alunos, o que se viu a médio prazo foi que os estudantes continuaram com a mesma postura, aqueles que não se envolviam nas aulas, mesmo com essas inovações, continuaram com uma postura passiva. Assim, faz cada vez mais sentido o questionamento se de fato o meio externo é o mais importante na motivação dos estudantes. A situação vivenciada por todos nós também serviu como teste para o ensino a distância ou ensino híbrido (parte a distância e parte presencial) em públicos mais jovens, há ônus e bônus nesse modelo, a seguir estão elencados alguns pontos com base em minha experiência:

Positivos

- Flexibilidade na utilização de recursos: o professor pode utilizar vídeos, softwares, jogos virtuais, projetar slides, textos e esquemas, entre outros. Presencialmente, nem sempre é possível ter tantas possibilidades por conta dos recursos disponíveis.
- Capacitação dos professores para utilização de recursos nas aulas.
- Reflexão por parte dos professores para inovação em suas aulas, dado que é impossível ter a mesma dinâmica nas aulas presenciais e online.

Negativos

- Não há garantia de que todos os alunos tenham acesso ao ensino a distância devido à falta de condições de adquirir equipamentos e internet de boa qualidade.
- Falta de interação entre os próprios alunos e entre alunos e professores.
- Dificuldade de avaliação.
- Dificuldade de concentração dos estudantes.

A experiência deixou claro que os professores, ainda que por necessidade, tiveram que se reinventar e, consequentemente, houve um aperfeiçoamento e crescimento profissional. Já os estudantes tiveram enormes prejuízos, dentre eles, alguns já citados, como: não acesso às aulas, desmotivação e falta de interação.

A volta às aulas presenciais se deu no início de 2022, foram quase dois anos de defasagem em que a grande maioria dos estudantes de escolas públicas só tiveram aulas remotas e não se sabe ao certo a porcentagem de alunos que de fato acessaram essas aulas. Este cenário só agravou a situação educacional, aumentando as diferenças de aprendizagem entre alunos da escola pública e da escola privada. Os prejuízos foram maiores para os estudantes que estavam em nível de alfabetização ou para aqueles que estavam em transição de ciclo: do Fundamental I para o Fundamental II ou do Fundamental II para o Ensino Médio. Como um adolescente que estava no 8º ano e já foi direto para a 1ª série do Ensino Médio consegue acompanhar as aulas após 2 anos sem estudar?

Pensar a educação, mais especificamente a educação matemática no Brasil, e nas formas de melhorar o ensino e aprendizado é de longe um dos desafios mais difíceis a se resolver quando pensamos em políticas públicas. A escola, com todos os seus agentes colabora com o principal responsável para a mudança desse cenário, que é o estudante. E o que resta ao professor é trabalhar, recuperar o tempo perdido a partir de algumas ações como: replanejamento do currículo, tentando focar nos assuntos mais importantes e que são pré-requisitos para aquilo que se aprenderá futuramente, aulas de reforço e alfabetização, foco em aulas que trabalhem outros aspectos do desenvolvimento, como concentração, organização, resolução de situações-problema, retomada de rotina de estudos.

1.2 Motivação a partir da interdisciplinaridade

Além da vontade e motivação pessoal, aspectos que competem somente ao aluno, no máximo à família, discutido no item 1.1, é necessário refletir também sobre as ações relacionadas ao ensino que estão ao alcance do professor. Enquanto educadores matemáticos, devemos sempre nos colocar criticamente diante desse desafio que é mais do que repassar um conteúdo que, muitas vezes, somente é decorado próximo aos testes e provas. Devemos facilitar o caminho dos jovens e adolescentes para que os conceitos matemáticos realmente sejam apreendidos e os auxilie na vida cotidiana, na vida profissional ou agregue culturalmente ao indivíduo. Entre as possibilidades de inserção cultural e artística encontra-se o diálogo entre Matemática e Música, o qual exploramos nesta dissertação.

A aula tradicional expositiva, na qual o professor utiliza a lousa e não há interação e/ou participação dos alunos, é muito criticada por toda a comunidade escolar, pois não consegue atingir os alunos, principalmente aqueles que já não se identificam com a Matemática.

Deve-se, então, criar alternativas que tornem a aula um ambiente propício à aprendizagem, utilizando-se de métodos para que a Matemática tenha sentido nas diversas aplicações cotidianas, sem deixar de lado aspectos inerentes à própria ciência, como abstração, resolução de problemas, lógica etc. Várias alternativas já foram pensadas para contribuir com o engajamento dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem e este trabalho tem a interdisciplinaridade como uma dessas alternativas.

Vários pontos de vista na literatura discutem o conceito de interdisciplinaridade. Há uma variedade de definições, das quais considera-se aqui a defendida por Japiassu (1976, p. 82 apud Silva; Cusati; Guerra, 2018, p. 987) (3) que

> considera a interdisciplinaridade como um movimento realizado no interior das disciplinas por meio da prática pedagógica e, entre elas, visando integração. Como afirma, a interdisciplinaridade é movimento a ser praticado também como atitude de espírito. Atitude esta, elaborada na curiosidade, na abertura, no senso de aventura da descoberta, tendo a ousadia como método e exercida num movimento de conhecimento com aptidão de construir relações.

Para promover essa interdisciplinaridade é necessária, então, uma troca de conhecimentos, um objetivo comum, um projeto onde não se ensina somente Matemática, Português ou História, separadamente, mas que se ensina um conceito ou se ensina a fazer algo que traz consigo aspectos importantes de várias áreas do conhecimento. Dessa forma, é possível alcançar o interesse de mais alunos, pois serão trabalhados vários conceitos distintos para a realização sinergética de um único projeto. Este trabalho não busca explorar qualquer relação interdisciplinar, mas propomos uma relação bem específica entre Matemática e Música, que pode ser estendida até as Artes em geral.

A primeira dificuldade nessa relação é que formalmente essas duas áreas se encontram em pólos opostos na classificação atual das áreas de estudo, inclusive dentro das universidades. A Matemática faz parte do grande grupo das Ciências Exatas, que trabalha principalmente com métodos rigorosos para testar hipóteses, teoremas, conjecturas. Já a Música é uma arte que trata de expressar o pensamento e o sentimento humano por meio de alguns padrões de estética.

Essa divisão nem sempre foi assim, na Idade Média, a educação era organizada em dois grandes ramos: Trivium (Gramática, Lógica e Retórica) e o Quadrivium (Aritmética, Geometria, Música e Astronomia). O trabalho de Souza *et al.* (2016) (4) faz uma relação entre as quatro disciplinas do Quadrivium:

> Aritmética – ou números em repouso, relacionada ao estudo dos números, Música – ou números em movimento, considerada uma aplicação da aritmética e ao estudo dos princípios musicais, Geometria – ou grandezas em repouso, relacionada com a teoria do espaço, grandezas estáticas e a Astronomia – ou grandezas em movimento, como também uma aplicação da Geometria. [...] O Quadrivium, que etimologicamente significa o cruzamento de quatro caminhos, está voltado para o estudo da matéria. (n.p).

Vemos aqui que a relação música-matemática na Antiguidade não era algo forçado, portanto, hoje, não podemos usar essa relação apenas para justificar a interdisciplinaridade e propor aulas diferentes, é uma relação natural.

> A música era para os pitagóricos um sinal da harmonia do cosmos, bem como uma via para conseguir o equilíbrio interno. Os pitagóricos foram os primeiros a fundamentá-la cientificamente. Consideravam que a música tinha uma aritmética escondida. Para os pitagóricos, “tudo é número”. (SOUZA *et al*, 2016, n.p).

Figura 1 – Representação Quadrivium

Fonte:<https://escoladeartesliberais.com.br/quadrivium-o-estudo-dos-numeros/>Acesso em 7 jan. 2023.

Quando observamos a biografia de vários matemáticos que viveram da Idade Antiga até a Idade Moderna, percebemos que eles não eram "apenas"matemáticos, mas possuiam conhecimento em diversas áreas.

Tales de Mileto, que viveu entre os séculos VII e VI a.C. , era filósofo, engenheiro e homem de negócios. Johann Carl Friedrich Gauss, que viveu entre os séculos XVIII e XIX, além de matemático era astrônomo e físico e fez contribuições em várias áreas do conhecimento. Essa lista é muito grande e mostra como as áreas se interligam.

Quando olhamos a trajetória de vida desses grandes cientistas, espantamo-nos por suas grandes habilidades em áreas tão diversas, pois já nos acostumamos com um sistema educacional em que as áreas estão totalmente segmentadas. Os alunos, e até professores, não têm uma visão ampla das aplicações entre as áreas.

A interdisciplinaridade é ainda um grande desafio para a educação brasileira, porém já é aplicada em outros sistemas de educação. Olhar para o mundo e para experiências de outros países que têm bons índices de educação também é importante para entender o que o sistema educacional brasileiro precisa melhorar. Quando analisamos alguns aspectos do sistema de educação finlandesa, considerado o melhor do mundo, vemos grandes diferenças.

Kirsti Lonka, professora de psicologia educacional da Universidade de Helsinki, explica:

> Tradicionalmente, a aprendizagem é definida como uma lista de argumentos e conhecimentos a serem adquiridos – como a aritmética” continua Lonka. “Mas quando se trata de vida real, o nosso cérebro não é dividido em disciplinas, desta forma, temos que pensar de uma maneira muito holística quando refletimos sobre os problemas do mundo, crises globais, a migração, a economia.[4]

Riia Palmqvist, conselheira da Agência Nacional de Educação da Finlândia

[4] Disponível em https://www.greenme.com.br/viver/especial-criancas/65710-na-finlandia-a-escola-elimina-as-materias-do-curriculum-classico/

elenca três pontos principais, em sua visão, para compreender o sucesso do sistema educacional finlandês:

> Acesso igualitário à educação de qualidade, valorização dos professores e apoio especial aos alunos que têm necessidades específicas de aprendizagem[5] .

Além dessas bases descritas, ainda há enormes diferenças de ordem prática: espaços físicos flexiveis, horários de aula mais adequados à aprendizagem, currículo mais flexível e que dá certa autonomia ao professor em escolher o que ensinar e como ensinar.

Aplicar todos essas mudanças no Brasil melhoraria a educação? Teríamos alunos mais bem formados? A Matemática na escola seria melhor entendida? É difícil afirmar, porém o que se sabe é que os métodos usados atualmente não são eficazes, não atingem a maioria dos alunos, não geram estudantes comprometidos e motivados.

[5] https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2021/03/03/o-que-faz-a-educacao-da-finlandia-estar-entre-as-melhores-do-mundo.htm Acesso em 8 jan.2023

2 A relação entre a sequência de Fibonacci e a proporção áurea

Este capítulo apresenta a breve história da sequência de Fibonacci, seguida pela definição desta, com exemplos de outras sequências de Fibonacci e algumas propriedades interessantes. Relaciona também o número de ouro com a sequência de Fibonacci.

2.1 História de Fibonacci

Leonardo Pisano ou Leonardo Bigollo (na Toscana, Bigollo significa "viajante") nasceu na cidade de Pisa, região da Toscana, um importante centro mercantil, na década de 1170, e é considerado por muitos o matemático mais talentoso da Idade Média. Era também conhecido como Leonardo Fibonacci (devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de filius Bonacci, que significa filho de Bonaccio), era filho de Guglielmo dei Bonacci, um destacado mercador pisano e representante dos comerciantes de Pisa.

Recebeu sua educação básica em Bugia (atualmente Bejaia, na Argélia), onde seu pai foi realizar trabalhos alfandegários, e por meio das viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e à Síria, entrou em contato com a Aritmética, onde conheceu os algarismos e métodos de cálculos indo-arábicos.

Fibonacci publicou o seu primeiro livro, *Liber Abaci* (*Livro do Ábado*) em 1202, no qual descreve em seus primeiros capítulos, as nove cifras indianas (nove algarismos), o zero e as operações elementares envolvendo tais algarismos (incluindo o zero). Neste livro, ele demonstra que o sistema numérico hindu-arábico é mais prático e eficiente se comparado ao sistema de numeração romano, vigente na Itália durante a Idade Média.

Segundo Lívio (2011, p. 111) (5), Fibonacci inicia o *Liber Abaci* da seguinte forma: "os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números e com o 0 qualquer número pode ser escrito...".

Na imagem do livro a seguir, temos o famoso problema do coelho de Leonardo, com sua solução dada na coluna de números na extrema direita: 1, 2, 3, 5, 8,..., 377, agora conhecida como sequência de Fibonacci.

Figura 2 – Leonardo Fibonacci

Fonte: Disponível em: <encurtador.com.br/cdBNR> Acesso em: 31 jan. 2022.

Figura 3 – *Liber Abaci*

Fonte: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-liber-abaci-of-leonardo-of-pisa> Acesso em: 31 jan. 2022.

O *Liber Abaci* apresenta em seu Capítulo 12, o seguinte problema:

> Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muros por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Solução: segue o processo de reprodução em cada mês:

No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes).

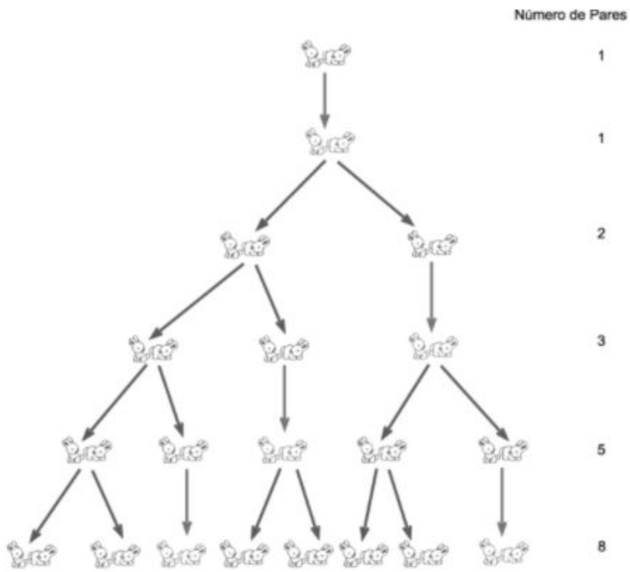
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos).
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes).

- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes).

- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes, o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes, gerado no mês anterior, agora é adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos e dois pares de filhotes).

Nota-se que em um determinado mês, o número de pares de coelhos será igual ao número de pares do mês anterior somado ao número de pares do mês anterior do anterior, pois serão esses últimos que contribuirão com o acréscimo do número de pares de filhotes (vide Figura 4 e Tabela 1.1).

Figura 4 – Diagrama da prole de coelhos de acordo com a solução do problema.



Fonte:<https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos> Acesso em: 31 jan. 2022.

Mês	Nº pares adultos	Nº pares filhotes	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 1 – Tabela Coelhos

Com base no problema clássico da reprodução de coelhos é possível definir a sequência de números que resolve o problema e estudar algumas de suas propriedades, como faremos nas próximas seções.

2.2 Definição da sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci (F_n) descreve a solução do problema da reprodução dos coelhos enunciada anteriormente. Ela é definida recursivamente pela fórmula abaixo:

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geqslant 1,$

com $F_1 = F_2 = 1$.

Assim os 17 primeiros termos da sequência de Fibonacci expressos na equação acima são os seguintes: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597).

A sequência recebeu esse nome em maio de 1876 pelo matemático francês François Edouard Anatole Lucas. A seguir, apresentamos exemplos de outras sequências de Fibonacci, que têm a mesma lei recursiva, lei na qual cada termo pode ser calculado a partir dos termos anteriores, mas utilizam outros termos iniciais. Dessa forma, quando nos referirmos à sequência de Fibonacci (no singular), estamos falando da sequência original $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, em que o seu n-ésimo termo é denotado por F_n.

Os números de Fibonacci geram um enorme fascínio no mundo da Matemática, tanto que em 1963 iniciaram-se os trabalhos da Fibonacci Association, um grupo de matemáticos que se debruçam sobre essa sequência, suas propriedades, aplicações e problemas. A principal publicação dessa associação é o *The Fibonacci Quarterly*, os propósitos dessa revista, como escrito no próprio site[1] são "novos resultados, propostas de pesquisa, problemas desafiadores e novas provas de relações".

2.2.1 Sequências de Fibonacci

Definição: sequencias de Fibonacci são sequências que obedecem à lei recursiva $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, ou seja, sequências em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores. Podemos citar como exemplo as sequências (2, 5, 7, 12, 19, . . .) e (-1, 2, 1, 3, 4, . . .).

Exemplo 1: sequência de Lucas

A sequência de Lucas é definida pela recorrência:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \forall n \geqslant 2$$

com $L_1 = 2, L_2 = 1$

Os 9 primeiros termos da sequência de Lucas são:

(2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47).

Exemplo 2: a sequência (5, 13, 18, 31, 49, 80, 129, 209, ...) é uma sequência de Fibonacci que se inicia com $f_1 = 5, f_2 = 8$ e os demais termos foram gerados a partir da soma dos dois termos anteriores.

Pode-se concluir que as sequências mudam dependendo dos valores iniciais.

2.3 Propriedades elementares dos números de Fibonacci

2.3.1 Soma dos n primeiros números de Fibonacci

Para todo $n \geqslant 1$, a soma dos n primeiros números de Fibonacci é dada por:

$$S(n) = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$$

Demonstração. Por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para n = 1, pois $f_1 = 1$ e $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para n = k, ou seja, $f_1 + f_2 + ... + f_k = f_{k+2} - 1$, Hipótese de Indução (HI).

[1] Disponível em: <https://www.fq.math.ca/>.Acesso em: 15 Fev. 2023

Devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, mostraremos que $f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = f_{(k+1)+2} - 1$.

De fato, somando f_{k+1} em ambos os membros da HI e levando em consideração que $f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3}$, obtemos $f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1$, estabelecendo o resultado para todo $n \subset N$. □

2.3.2 Soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar

Para todo $n \geqslant 1, f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$.

Demonstração. $f_3 = f_1 + f_2$
$f_5 = f_3 + f_4$
$. . . f_{2n-1} = f_{2n-3} + f_{2n-2}$

$f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_1 + f_1 + f_3 + ... + f_{2n-2}$ usando a propriedade demonstrada no subtópico 2.3.1

$= f_1 + f_{2n} - 1 = 1 + f_{2n} - 1 = f_{2n}$

□

2.3.3 Soma dos números de Fibonacci de ordem par

Para todo $n \geqslant 1, f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$

Demonstração. $f_4 = f_2 + f_3$
$f_6 = f_4 + f_5$
$. . . f_{2n} = f_{2n-2} + f_{2n-1}$

$f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_2 + f_2 + f_3 + f_4 ... + f_{2n-2} + f_{2n-1} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 ... + f_{2n-2} + f_{2n-1} = = f_{2n+1} - 1$ usando a propriedade demonstrada em 2.3.1. □

2.3.4 Soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci

Para todo $n \geqslant 1, (f_1)^2 + (f_2)^2 + ... + (f_n)^2 = f_n f_{n+1}$.

Demonstração. Para $n = 1$

$(f1)^2 = f_1.f_2$

$1^2 = 1.1$ ok

(H.I.)

$(f_1)^2 + (f_2)^2 + ... + (f_n)^2 = f_n.f_{n+1}.$

(T.I.)

$(f_1)^2 + (f_2)^2 + ... + (f_n)^2 + (f_{n+1})^2 = fnf_{n+1} + (f_{n+1})^2$

$= f_{n+1}.(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1}f_{n+2}$ □

2.3.5 Soma dos números de Fibonacci com sinais alternados.

Para todo $n \geqslant 2$, $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^{n+1}f_n = (-1)^{n+1}f_{n-1} + 1$

Demonstração. A afirmação é obviamente verdadeira para $n = 2$, pois $f_1 - f_2 = 1 - 1 = 0$ e

$(-1)^{2+1}f_{2-1} + 1 = -1 \cdot 1 + 1 = 0.$
Logo, vale a base da indução.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, ou seja, $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)k + 1fk = (1)^{k+1}f_{k-1} + 1$ (HI).

Devemos mostrar que ela também vale para $n = k + 1$, ou seja, que $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^{k+1}fk + (-1)k + 2fk + 1 = (-1)^{k+2}f_k + 1$

De fato, somando $(-1)^{k+2}f_{k+1}$ em ambos os membros da HI e notando que $fk + 1 = fk + fk - 1$,
obtemos $f_1f_2 + f_3f_4 + ... + (-1)k + 1fk + (-1)k + 2fk + 1$
$= (-1)^{k+1}f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2}fk + 1$
$= (-1)^{k+1}f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2}(fk + fk - 1)$
$= (-1)^{k+1}f_{k-1} + 1 + (-1)^{k+2}fk + (-1)k + 2fk - 1.$

Como $(-1)k + 1fk - 1 + (-1)k + 2fk - 1 = 0$, o resultado segue.

□

2.3.6 A fórmula de Binet

É uma expressão explícita para encontrar qualquer número da sequência de Fibonacci sem precisar calcular todos os termos anteriores. Esta fórmula explícita para F_n é conhecida, na literatura, por fórmula de Binet, em homenagem ao matemático francês Jacques Binet (1786-1856), que a descobriu em 1843.

Teorema (fórmula de Binet). Para todo inteiro positivo n,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução, verifica-se que para para $n = 1$

$$\mathrm{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{2} = 1$$

Para $n = 2$, tem-se:

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{6}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2\sqrt{5}}{4} - \frac{6}{4\sqrt{5}} = 1$$

Como a verificação é válida para $n = 1$ e $n = 2$, supondo que a fórmula é válida para algum $n = k$ e $n = k + 1$, pode-se concluir que também será válida para $n = k + 2$. Como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, substituindo a hipótese de indução, tem-se que: $F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k.(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k.(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k.(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

Sabendo que $(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ e $(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+2} = F_{k+2}$$ □

2.4 Proporção áurea/ número de ouro

2.4.1 Um pouco de história

> A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razões. O primeiro, podemos comparar a um medida do áureo; o segundo, podemos chamar de jóia preciosa. Kepler (1571 - 1630)

Um dos números mais intrigantes para os matemáticos e estudiosos de diversas áreas é o número de ouro, que também é conhecido por outros nomes: proporção áurea, razão de ouro, secção áurea e proporção divina. Há inúmeras aplicações dessa proporção na natureza, na Arquitetura, na estética, na anatomia humana e, em muitos casos, ela aparece de forma quase misteriosa em todas as áreas já citadas. Esse número é representado pela letra grega phi (ϕ), lê-se fi, em homenagem ao escultor e arquiteto grego Fídias (Phídias), que viveu entre 490 e 430 a.C., por se acreditar que utilizou a proporção de ouro em suas obras. É um número irracional, ou seja, não pode ser expresso como razão entre dois números inteiros.

> Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi, que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de“Proporção Divina” (Lívio, 2011, p. 13).

A sequência de Fibonacci tem íntima ligação com o número de ouro. A seguir temos uma amostra da razão (F_{n+1}/F_n), em que numerador e denominador são termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Quanto maior for n, mais próxima de phi estará a razão (F_{n+1}/F_n), esse fenômeno foi observado pelo astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630).

Fração	Razão
1/1	1,000000
2/1	2,000000
3/2	1,500000
5/3	1,666666
8/5	1,600000
13/8	1,625000
21/13	1,615385
34/21	1,619048
55/34	1,617647
89/55	1,618182
144/89	1,617978
233/144	1,618056
377 /233	1,618026
610/377	1,618037
987/610	1,618033

Tabela 2 – Razões entre números de Fibonacci

Segundo Koshy (6), alguns povos antigos como egípcios e gregos já conheciam a razão de ouro e a utilizaram nas suas construções.

> O papiro de Ahmes, escrito centenas de anos antes da existência da civilização grega antiga e agora mantido no museu britânico, contém um relato detalhado de como o número foi usado na construção da grande pirâmide de gizé por volta de 3070 a.C. Ahmes refere-se a este número como uma "proporção sagrada".

Uma das grandes construções do mundo grego, o Parthenon, um templo erguido em homenagem à deusa Atena, tem relação com a secção de ouro. A razão entre algumas medidas da fachada dessa bela construção são muito próximas a $1,6180...$ É difícil dizer com certeza se essa relação foi usada de propositalmente.

2.4.2 Definição de secção áurea

Euclides, em seu livro *Os elementos*, Diz que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor. Determinar a divisão em extrema e média razão de um segmento AB é o mesmo que encontrar o número áureo desse número.

Chamando $AC = x$ e $CB = 1$, consequentemente $AB = x + 1$, temos que:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Notando que $\frac{AC}{CB}$ é a razão áurea, ou seja,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x}{1} = x = \phi$$

, a raiz positiva da equação nos fornecerá o número de ouro.

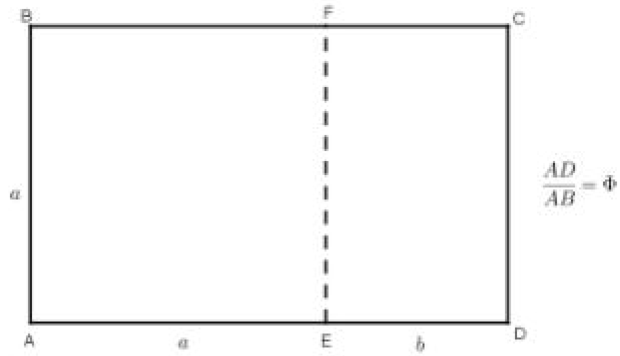
Resolvendo a equação, encontramos:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2.4.3 O retângulo, quadrado e espiral áureos

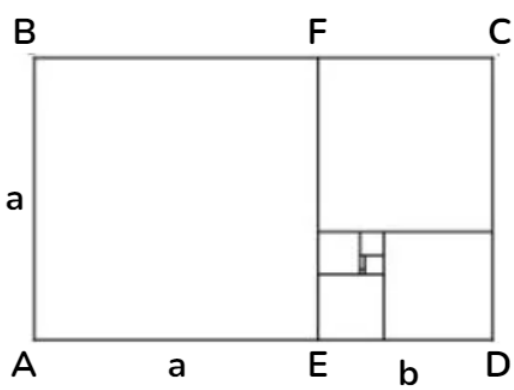
Definição: Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo no qual as suas medidas (base e altura) estão na razão áurea. Além disso, podemos afirmar que o retângulo ABCD é semelhante ao retângulo EFCD (é o retângulo original menos o quadrado ABFE)

Figura 5 – Retângulo Áureo



Fonte:Autor

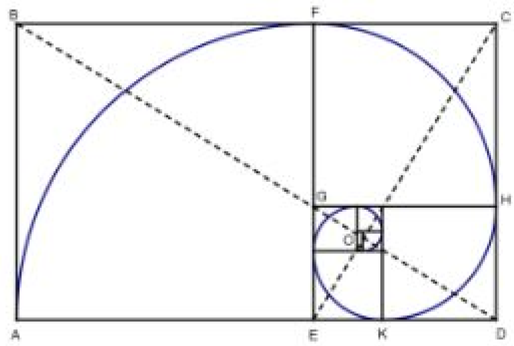
Figura 6 – Sequência de retângulos áureos



Fonte:Autor

A partir da sequência infinita de retângulos áureos, podemos desenhar a espiral áurea traçando o quarto de circunferência de cada um dos quadrados, resultando na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Espiral a partir do retângulo áureo



Fonte:Autor

Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

Desenvolvendo, temos:

$$b.(a+b) = a^2$$

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

resolvendo a equação com relação ao termo “b”:

$$b = \frac{-a + -\sqrt{a^2 - 4.1.(-a^2)}}{2.1}$$

$$b = \frac{-a + a.\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{-a+a.\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618... = \phi$$

3 Um algoritmo composicional utilizando sequências numéricas e aritmética de módulos

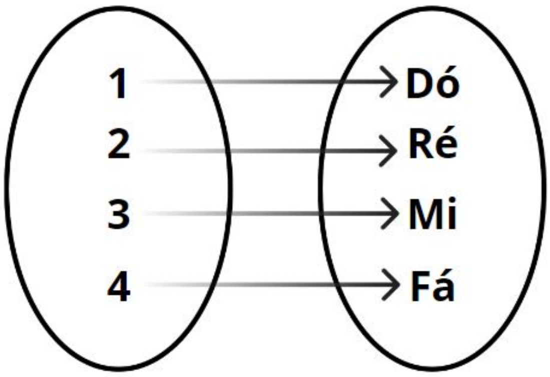
A partir do que foi apresentado no Capítulo 2, este capítulo apresenta uma aplicação das sequências numéricas para composição de um perfil melódico. Neste sentido, a aplicação de sequências numéricas, como a sequência de Fibonacci, pode ser utilizada na composição musical, como será aqui descrito.

3.1 Sequência numérica aplicada à geração de perfis melódicos

Antes de abordarmos o método de composição a partir de sequências numéricas, é necessário explicar o que é um perfil melódico, termo utilizado neste trabalho para uma sequência de sons, com altura e duração, definidos a partir de uma sequência numérica. Essa associação pode ser feita de várias formas, ficando a cargo da praticidade e criatividade do compositor. Um exemplo simples é mostrado a seguir.

Dado um conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e um conjunto M = {Dó, Ré, Mi, Fá}. Pode-se criar uma função f entre os conjuntos C e M na qual cada elemento do conjunto C se relaciona com um e apenas um elemento do conjunto M.

Figura 8 – Diagrama da relação números/notas musicais



Fonte: elaborado pelo autor

A sequência numérica geradora, que está no conjunto C, tem quatro elementos e a lei de associação, nesse caso, é:

- Número 1 - está associado à nota Dó;
- Número 2 - está associado à nota Ré;
- Número 3 - está associado à nota Mi;
- Número 4 - está associado nota à nota Fá.

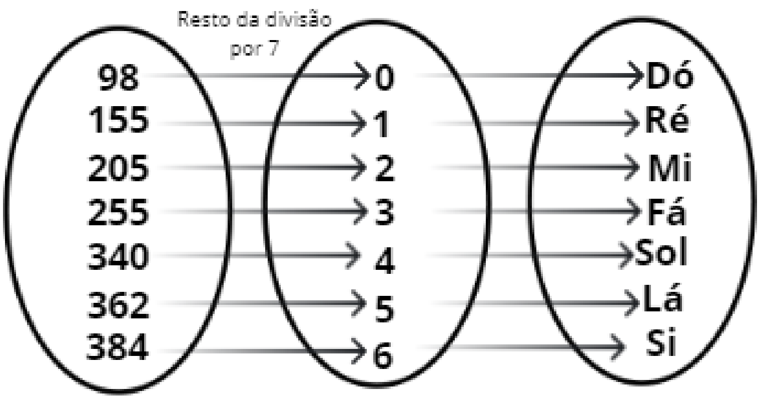
A partir da função f entre os dois conjuntos, pode-se gerar perfis melódicos com as mais diversas sequências numéricas com elementos que pertencerão ao conjunto C.

O método anterior pode ser extremamente eficiente, porém há uma questão a se considerar: o primeiro conjunto chamado aqui de conjunto C pode ter infinitos elementos, inclusive todo o conjunto N, enquanto o conjunto chamado M é finito, pois se trata da altura de notas musicais ou outro parâmetro. Sendo assim, a relação da função $f : C \rightarrow M$ ficará mal definida. Para corrigir a situação, a opção usada neste trabalho é a aritmética modular, ou seja, utilizar o resto da divisão entre um elemento do conjunto C e um número natural.

Com essa ferramenta da aritmética modular, que será formalizada no próximo tópico, será possível associar qualquer número natural a um parâmetro musical finito.

O diagrama a seguir (Figura 9) é um resumo desse método, considerando apenas alguns números a título de exemplo. No conjunto à esquerda, temos seis números naturais aleatórios, o conjunto representado no meio são números naturais padronizados a partir do resto da divisão por 7, e no conjunto à direita estão os nomes das notas musicais e a regra de associação, conforme se vê pelas setas.

Figura 9 – Diagrama da relação números/notas musicais



Fonte: elaborado pelo autor

Por fim, a ideia básica do algoritmo e da composição aqui apresentada é que podemos associar o processo de composição a uma função composta: o Conjunto C é composto pelos termos de Fibonacci ou qualquer outra sequência numérica, o conjunto B será uma nova sequência numérica padronizada e o conjunto M são os parâmetros musicais bem definidos.

3.2 Aritmética dos módulos

Neste tópico será apresentada uma aplicação direta da utilização dos números de Fibonacci na composição musical, uma ferramenta muito importante é a aritmética dos módulos ou congruências, também conhecida como aritmética do relógio.

Definição: seja m > 1 um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m escreve-se:

$a \equiv b \pmod{m}$

Quando a e b não são congruentes mod m, podemos dizer também incongruentes, escreve-se:

$a \not\equiv b \pmod{m}$

Exemplos:

a) $18 \equiv 6 \pmod{4}$ Se dividirmos 18 por 4 e 6 por 4 , obteremos o mesmo resto 2.

b) $11 \not\equiv 17 \pmod{5}$ Se dividirmos 11 por 5 e 17 por 5, obeteremos restos diferentes.

3.3 Período de Pisano

Definição: período de Pisano é o período $\pi(m)$ da sequência de números de Fibonacci feita módulo m repetições. Joseph Louis Lagrange é o responsável pela descoberta das funções periódicas de Fibonacci em 1774.

Para qualquer inteiro m, a sequência de Fibonacci tomada módulo m é periódica. O período de Pisano, denotado por $\pi(m)$, é a duração do período dessa sequência.

Tomemos m = 3. Os restos da divisão dos números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377... por 3 são: 1, 1, 2,0,2,2,1,0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0... Observe que esta última sequência se repete a cada oito termos. Temos, então, que $\pi(3) = 8$. Os primeiros 144 períodos Pisano são mostrados no seguinte quadro:

Figura 10 – Quadro do Periodo Pisano

π (*n*)	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12
0+	1	3	8	6	20	24	16	12	24	60	10	24
12+	28	48	40	24	36	24	18	60	16	30	48	24
24+	100	84	72	48	14	120	30	48	40	36	80	24
36+	76	18	56	60	40	48	88	30	120	48	32	24
48+	112	300	72	84	108	72	20	48	72	42	58	120
60+	60	30	48	96	140	120	136	36	48	240	70	24
72+	148	228	200	18	80	168	78	120	216	120	168	48
84+	180	264	56	60	44	120	112	48	120	96	180	48
96+	196	336	120	300	50	72	208	84	80	108	72	72
108+	108	60	152	48	76	72	240	42	168	174	144	120
120+	110	60	40	30	500	48	256	192	88	420	130	120
132+	144	408	360	36	276	48	46	240	32	210	140	24

Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period> Acesso em: 19. set. de 2023

De forma mais prática, tomemos outro exemplo, considerando $n = 29$. $\pi(29) = 14$ (retirado do quadro acima, linha 24+ e coluna 5+).Na prática, considerando apenas os restos dos termos da sequência de Fibonacci por 29, teremos os números:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 5, 26, 2, 28, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 5, 26, 2, 28, 1, 0, ...$

Essa sequência de restos tem ciclos de 14 termos.

3.4 Teoria musical e aplicação do algoritmo

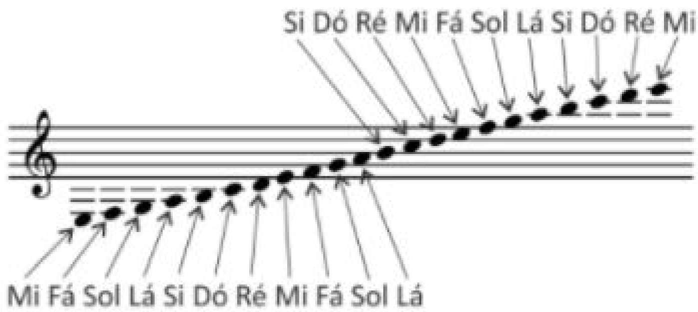
3.4.1 Nota musical

Chamamos de nota musical, neste trabalho, a dupla N =(x,y) onde x é denominado de altura, y é denominado de duração.

3.4.2 Representação de uma nota musical

As notas musicais podem ser representadas no pentagrama onde cada figura alocada em uma linha ou espaço entre as cinco linhas representa uma nota musical diferente.

Figura 11 – Pentagrama



Fonte:<http://www.deniswarren.com/?page_id=3980> Acesso em 17/06/2023

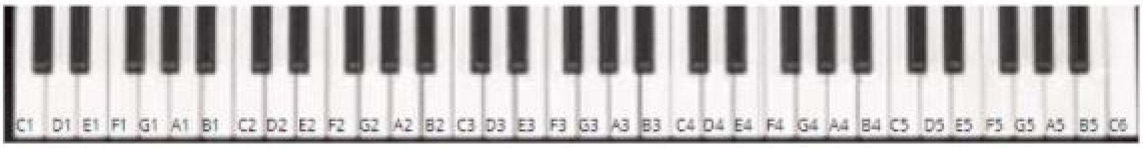
Outra forma de representação é a cifra, em que cada letra representa uma nota musical. A seguir temos a tabela com as associações:

Letra	Nota Musical
A	lá
B	si
C	dó
D	ré
E	mi
F	fá
G	sol

Tabela 3 – Cifras e notas musicais

A seguir, temos a localização dessas notas musicais no piano , os números à frente de cada letra se referem à altura da nota, pois as mesmas notas musicais podem ter diferentes alturas, uma pode ser mais grave ou mais aguda que outra.

Figura 12 – Teclado musical



Fonte: elaborado pelo autor

3.4.3 Duração de notas

A duração das notas, outro parâmetro musical, também é aplicada com base na sequência de Fibonacci. Neste caso, foi usada a congruência Fn = b (mod 5) onde Fn é o enésimo termo de Fibonacci e b é o resto da divisão de Fn por 5, dessa forma, teremos cinco possibilidades: 0,1,2,3 e 4, em que cada um desses restos serão associados às seguintes figuras rítmicas:

resto	figura rítmica
0	semicolcheia
1	colcheia
2	semínima
3	mínima
4	semibreve

Tabela 4 – figura rítmica

Figura 13 – Intervalos musicais

Nome	Imagem	Duração
Semibreve	𝅝	1
Mínima	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$
Semínima	♩	$\frac{1}{4}$
Colcheia	♪	$\frac{1}{8}$
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$

Fonte: <https://gracieducacaomusical.blogspot.com/2018/01/figuras-musicais-e-pausas.html> Acesso em 29. jan. de 2024

3.4.4 Escalas

Um escala musical é uma sequência de notas separadas entre elas por um intervalo predefinido. Entre as escalas mais utilizadas na música estão as escalas maiores, menores e pentatônicas.

A seguir são apresentadas as sequências de notas, representadas pela cifra de cada uma das escalas citadas anteriormente. A escala utilizada na composição maior foi a de Dó maior.

Dó maior	C	D	E	F	G	A	B	C
Ré maior	D	E	F#	G	A	B	C#	D
Mi maior	E	F#	G#	A	B	C#	D#	E
Fá maior	F	G	A	A#	C	D	E	F
Sol maior	G	A	B	C	D	E	F#	G
Lá maior	A	B	C#	D	E	F#	G#	A
Si maior	B	C#	D#	E	F#	G#	A#	B

Tabela 5 – Escalas maiores

Dó menor	C	D	Eb	F	G	Ab	Bb	C
Ré menor	D	E	F	G	A	Bb	C	D
Mi menor	E	F#	G	A	B	C	D	E
Fá menor	F	G	Ab	A#	C	Db	Eb	F
Sol menor	G	A	Bb	C	D	Eb	F#	G
Lá menor	A	B	C	D	E	F	G	A
Si menor	B	C#	D	E	F#	G	A	B

Tabela 6 – Escalas menores

Dó maior	C	D	E	G	A
Ré maior	D	E	F#	A	B
Mi maior	E	F#	G#	B	C#
Fá maior	F	G	A	C	D
Sol maior	G	A	B	D	E
Lá maior	A	B	C#	E	F#
Si maior	B	C#	D#	F#	G#

Tabela 7 – Escalas pentatônicas

Nesse modelo, dada uma escala, associa-se a ela um conjunto de números inteiros cuja cardinalidade é igual ao número de notas da escala. No caso da escala maior, toma-se o conjunto $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Então, é a esse conjunto que se associa os termos de Fibonacci e é a cardinalidade do conjunto que define a operação de módulo.

De forma equivalente à altura, a duração pode ser definida por um conjunto associado a {semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia}, e depois associa-se o conjunto de números inteiros.

Uma coisa muito importante: é possível associar diferentes tipos de sequência de Fibonacci aos diferentes parâmetros. Ou seja, mudanças nos tipos de sequência vão gerar músicas diferentes, mudanças na definição de escala também, etc.

Finalmente, a escolha da escala, das durações e das respectivas sequências numéricas são os parâmetros de entrada ou condições de contorno do modelo de composição.

3.5 Composição maior

Para criar uma composição a partir da sequência de Fibonacci é necessária uma organização e a utilização de padrões com certo nível de coerência, coerência essa que pode seguir um modelo matemático e ser ajustada com as regras musicais que envolvem os compassos e a harmonia, por exemplo.

Para este trabalho foi realizada uma composição mais elaborada, o software utilizado foi o Sibelius[1], um programa comercial largamente distribuido para editoração de partituras musicais usado para criar composições e que pode também ser utilizado nas atividades dentro de sala de aula. Também há a possibilidade de tocar a composição criada incluindo instrumentos como violino, piano, percussão e outros, para isso se faz necessário um trabalho de ajuste para que a partitura gerada por computador seja executável, respeitando aspectos técnicos e teóricos da música. Portanto, após a aplicação do algoritmo, são necessarios ajustes e arranjos na partitura final. Como será apresentado a seguir.

A composição foi separada em 4 partes, a quantidade de notas são os quatro primeiros termos da sequência de Fibonacci multiplicados por quarenta, essa multiplicação foi feita para gerar uma composição com maior duração e utilizar a própria sequência para determinar a proporção entre as quatro partes da composição.

- A primeira parte com 40 notas;
- A segunda parte com 40 notas;
- A terceira parte com 80 notas;
- A quarta parte com 120 notas.

Precisamos, então, calcular os primeiros 120 termos da sequência de Fibonacci. Para isso e também para calcular as congruências, foi utilizada uma calculadora programada em JAVA disponibilizada pela aluna Clarice Augusta Rezende de Oliveira que também a utilizou em seu trabalho de conclusão do mestrado cujo título é *Composição musical e Fibonacci: a utilização da música como forma lúdica de aprendizagem.* (7)

[1] Sibelius é um programa de computador de edição de partituras e notação musical.

Figura 14 – Compilação do programa JAVA, termos de Fibonacci

Fonte: elaborado pelo autor

Na primeira parte com 40 notas foi usada congruência com módulo 15. Na segunda parte, com 40 notas, foi usada congruência com módulo 33. Na terceira parte, com 80 notas, foi usada congruência com módulo 35. Na quarta parte, com 120 notas, foi usada congruência com módulo 30.

A escolha dos módulos se baseia na tabela dos períodos de Pisano, os números de Fibonacci mod (n) geram sequências cíclicas. Com mod 15, o ciclo tem 40 números, com mod 33 também 40 números, com mod 35 tem 80 números e, por fim, com mod 30 tem 120 números.

A partir dos números de Fibonacci foi gerada uma nova sequência com aritmética modular, essa transformação se fez necessária, como já dito antes, para associar um conjunto com infinitos elementos (aqui chamado de conjunto C) a um outro conjunto com finitos elementos (aqui chamado de conjunto M).

Figura 15 – Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	n	Fn	Fn ≡ a (mod 15)	Notas , tom: C	Duração Fn ≡ a (mod 5)	Duração da nota	Nome do intervalo
3	1	1	1	C4	1	2	oitava
4	2	1	1	C4	1	2	oitava
5	3	2	2	D4	2	4	semínima
6	4	3	3	E4	3	8	mínina
7	5	5	5	G4	0	1	semicolcheia
8	6	8	8	C5	3	8	mínina
9	7	13	13	A5	3	8	mínina
10	8	21	6	A4	1	2	oitava
11	9	34	4	F4	4	16	semibreve
12	10	55	10	E5	0	1	semicolcheia
13	11	89	14	B5	4	16	semibreve
14	12	144	9	D5	4	16	semibreve
15	13	233	8	C5	3	8	minina
16	14	377	2	D4	2	4	seminima
17	15	610	10	E5	0	1	semicolcheia
18	16	987	12	G5	2	4	seminima
19	17	1597	7	B4	2	4	seminima
20	18	2584	4	F4	4	16	semibreve
21	19	4181	11	F5	1	2	oitava
22	20	6765	0	B3	0	1	semicolcheia

+ ≣ 1ª parte ▾ 2ª parte ▾ 3ª parte ▾ 4ª parte ▾ duração das notas ▾

Fonte: elaborado pelo autor

Após a geração dessa nova sequência numérica, cada um desses números foi associado a dois parâmetros musicais: altura e duração. Para composições mais elaboradas, pode-se associar a outras variáveis como intensidade.

A seguir temos o quadro de associação dos números com as alturas que foi utilizada nesse trabalho.

Figura 16 – Associação número/nota utilizada na composição maior

Número	Nota	Número	Nota	Número	Nota
0	B3	12	G5	24	D5
1	C4	13	A5	25	E5
2	D4	14	B5	26	F5
3	E4	15	B3	27	G5
4	F4	16	C4	28	A5
5	G4	17	D4	29	B5
6	A4	18	E4	30	B3
7	B4	19	F4	31	C4
8	C5	20	G4	32	D4
9	D5	21	A4	33	E4
10	E5	22	B4	34	F4
11	F5	23	C5	35	G4

Fonte:elaborado pelo autor

Vamos a um exemplo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Consideremos o n = 10 , F_{10} = 55

55 ≡ a (mod 15), temos que o resto da divisão de 55 por 15 é 10, dessa forma, teremos que a = 10

ou seja, F_{10} será associado ao número 10 (parâmetro altura)

A partir da tabela criada, 10 está associado a nota Mi (E5)

Já para a duração da nota, devemos fazer:

55 congruente b (mod 5), temos que o resto da divisão de 55 por 5 é 0, dessa forma, teremos que b = 0. O número zero deve ser associado à semicolcheia.

Esse processo foi realizado com todos os 120 primeiros termos da sequência de Fibonacci, então cada um dos números gerou uma nota musical com altura e duração. Após essa transformação, a partitura foi escrita manualmente no Sibelius.
Para incrementar a composição foi acrescentada harmonia, esse elemento foi gerado automaticamente com plugins do software Sibelius.

3.6 Formalização do algoritmo

Dados os conjuntos:

F = {Números de Fibonacci / $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, ..., F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ }

A = { $a_n \in N/F_n \equiv a_n$ (mod b) onde b= 15,30,33 ou 35 }

M = {Notas musicais da escala de dó maior / $m_1 = dó, m_2 = ré, ...$}

Temos as relações:

$f(x) = y, x \in F$ e $y \in A$ onde $f(F_1) = a_1, f(F_2) = a_2, ..., f(F_n) = a_n$

$g(y) = z$ $y \in A$ e $z \in M$ onde $g_0 = m_1$,..., $g_n = m_n + 1$

A função composta $g \circ f = g(f(x))$ nos diz como associar cada F_n

(número de Fibonacci) a uma e somente uma nota musical.

Conclusão: dada a definição da transformação de Fibonacci é possível generalizar a aplicação da transformação para os dois parâmetros que definem uma nota musical N=(x,y).

Figura 17 – Fluxograma de etapas do modelo

Fonte: elaborado pelo autor

3.7 Partitura no Sibelius

Depois de todo o processo de transformação da sequência numérica em parâmetros musicais é necessário, segundo o fluxograma das etapas do modelo, colocar as notas no pentagrama. No projeto dessa composição, cada nota foi colocada manualmente, ao fazer isso com o software Sibelius, nota-se que o encaixe nos padrões musicais não é perfeito, longe disso, é necessário então fazer ajustes para que a composição seja possível de ser tocada.

O ajuste foi feito substituindo algumas notas para que a canção ficasse com uma escrita mais simples e fosse possível de ser tocada com mais coerência em termos da escrita da notação ritmica. A melodia foi então ajustada e reproduzida por uma flauta, o programa permite selecionar o instrumento que executará cada parte da canção. Um piano executa a harmonia, sendo que o próprio programa faz a leitura da melodia e modela a harmonia.

A seguir se encontram dois links, o primeiro referente à canção gerada na primeira versão (sem ajustes) e o segundo com a versão já ajustada. Os dois áudios estão alocados no site Soundcloud e podem ser acessados por qualquer pessoa a partir dos links disponibilizados.

<https://soundcloud.com/raul-cid-895825054/cancao-de-fibonacci-antiga>

<https://soundcloud.com/raul-cid-895825054/cancao-de-fibonacci>

A seguir está a partitura final, resultado de todo o processo da geração da sequência numérica, a inserção manual na partitura e os ajustes e arranjos na partitura final.

Canção de Fibonacci


2
22
Fl.
F
Am
C
Dm
F
Pno.
27
Fl.
Am
G
C
F
Dm
Pno.
32
Fl.
G
F/A
G
G
Pno.
36
Fl.
C
F
Dm
G
G
Pno.
41
Fl.
G
Am
Dm/F
G
Pno.

3


4
68
Fl.
G C F G Dm
Pno.
73
Fl.
C G F/A Am Dm
Pno.
78
Fl.
G G G Em
Pno.
82
Fl.
G F Am Dm
Pno.
86
Fl.
G F/A G
Pno.


92
Fl.
C
F
G
Pno.
95
Fl.
Dm
G
G
C
Pno.

4 Projeto interdisciplinar com a sequência de Fibonacci

Este capítulo tem como objetivo apresentar um projeto interdisciplinar em que a sequência de Fibonacci e o número de ouro tenham destaque. Uma forma concreta da interdiciplinariedade explorada no Capítulo 1.

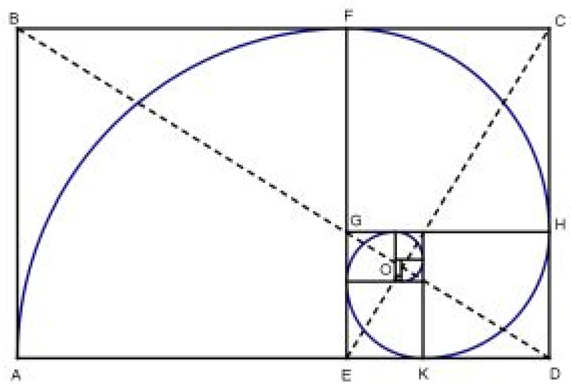
A aplicabilidade deste trabalho dependerá de fatores externos a ele, o importante é dar ideias e motivação para que possa ser transformado em uma aula, exposição, feira de Ciências ou qualquer outra ação que colabore com o ensino de Matemática.

É importante que os conceitos centrais, que foram abordados no Capítulo 2, sejam a base para que outros conteúdos e disciplinas possam agregar no projeto final.

4.1 Biologia, Geometria e Artes

Uma forma de visualização da sequência de Fibonacci e da Matemática em geral é na Geometria, quando se tem uma referência visual daquilo que se pretende explicar, o entendimento se torna mais fácil. O retângulo e a espiral de ouro, já definidos no Capítulo 2, podem nos ajudar a aplicar a geometria nas artes ou biologia como veremos nos exemplos a seguir.

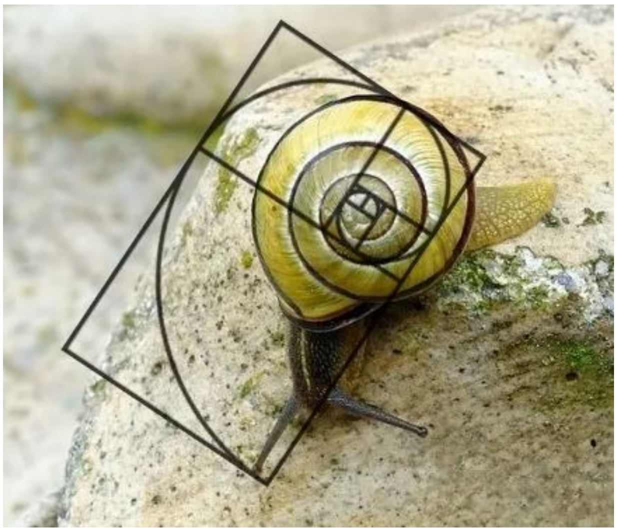
Figura 18 – Espiral áurea



Fonte: <https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/> Acesso em 19/05/2023

Caracol: ao se estudar o grupo dos moluscos é possível relacionar as medidas do caracol, pois se “encaixam” no retângulo de ouro e na sua espiral.

Figura 19 – Caracol



Fonte:<https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/> Acesso em: 19 maio 2023.

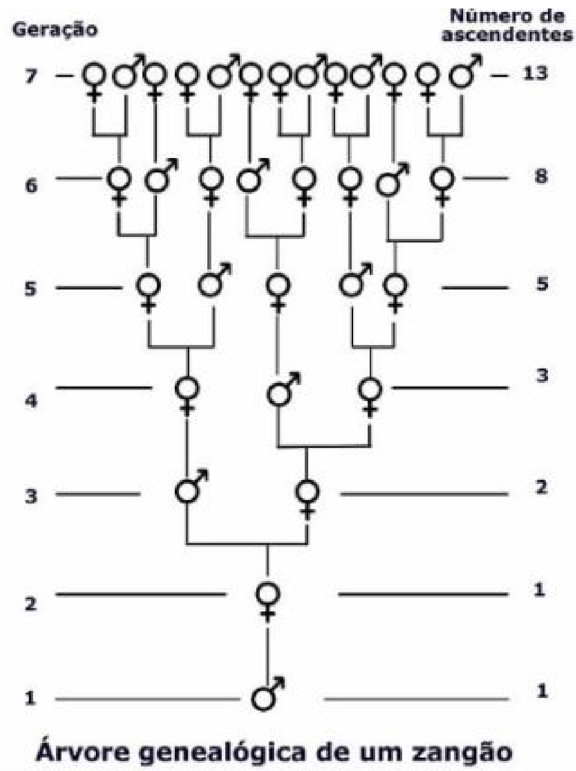
Um outro molusco da família dos cefalópodes, o Nautilus, também é um ótimo exemplo visual para se entender a secção áurea.

Figura 20 – Concha Nautilos

Fonte:<https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/#:~:text=Ela%20pode%20ser%20aplicada%20em,decr%C3%A9scimo%20que%20espelha%20a%20Sequ%C3%AAncia> Acesso em: 19 maio 2023.

Ainda falando sobre Biologia, vemos a aplicação na árvore genealógica do zangão, que é bem peculiar: não tendo sido fruto de um ovo fecundado, o zangão não tem pai, mas apenas um ascendente direto, a abelha rainha que o gerou, sua mãe. Esta, sendo fêmea e, portanto, fruto de um óvulo fecundado, tem dois ascendentes, pai e mãe. Seu pai, por sua vez, sendo macho, também tem apenas uma ascendente, enquanto sua mãe tem dois. O zangão se vê então na inusitada situação de ter apenas três avós: duas fêmeas e um macho. Repetindo este raciocínio membro a membro para cada ascendente do zangão teremos a estranha e assimétrica árvore genealógica mostrada na figura a seguir até a sétima geração de ascendentes (na qual se usa o símbolo convencional para "macho" e "fêmea"; o símbolo que representa um macho é aquele que está na primeira geração, o zangão, e o que representa a fêmea na segunda, mãe dele).

Figura 21 – Árvore genealógica de um zangão

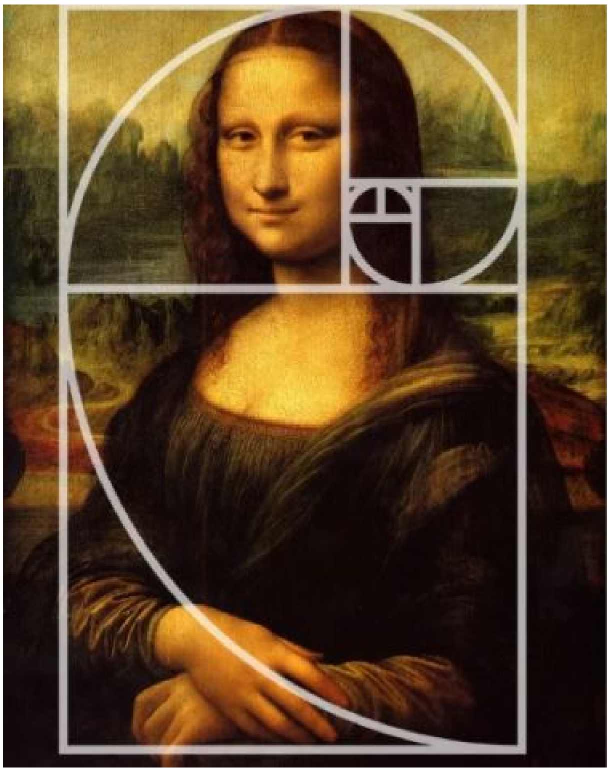


Fonte: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/aplicacoes-da-sequencia-de-fibonacci> Acesso em: 19 maio 2023.

A quantidade de indivíduos em cada geração da árvore genealógica do zangão, é um número de Fibonacci. Analisar este caso é um bom exercício de correlação entre matemática e biologia.

Nas artes com a Monalisa : talvez a obra de arte mais conhecida do mundo produzida por Leonardo Da Vinci no início do século XVI e que está em exposição no museu do Louvre (Paris), como vemos na figura há vários retângulos áureos encaixados nas proporções da Gioconda.

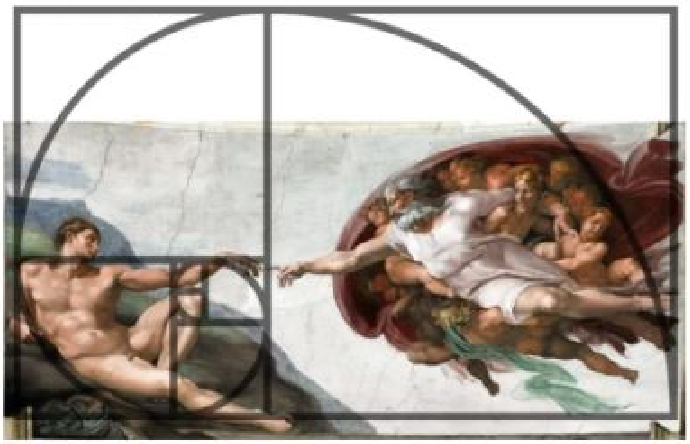
Figura 22 – Monalisa



Fonte: <https:www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea> Acesso em: 19 maio 2023.

Criação de Adão: produzida por Michelangelo no século XVII. Pintura que se encontra na capela sistina em Roma. Há hipóteses de que o pintor tenha se utilizado da secção áurea nessa obra.

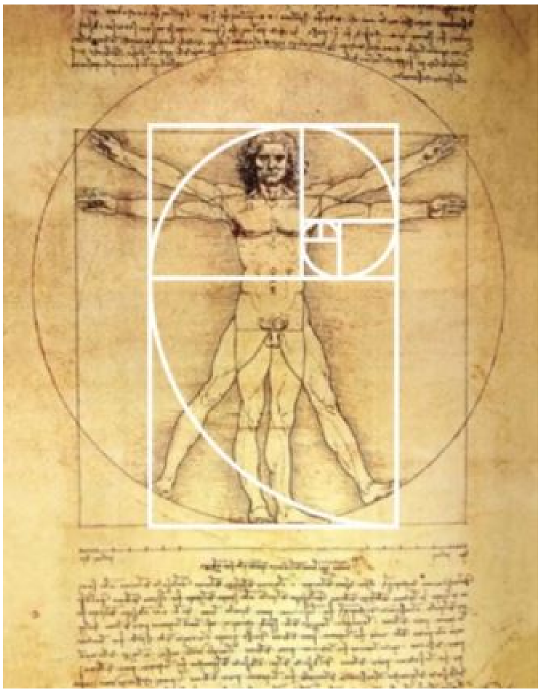
Figura 23 – Criação de Adão



Fonte:<https:<www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci> Acesso em: 19 maio 2023.

Outra obra icônica de Leonardo da Vinci, o Homem Vitruviano, representa a relação entre a Geometria e as medidas e proporções do corpo humano.

Figura 24 – Homem Vitruviano

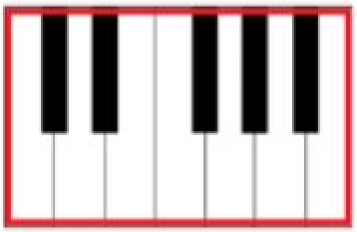


Fonte:<https:www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/> Acesso em: 19 maio 2023.

4.2 Diálogos com a Música

O piano é um instrumento cuja estrutura física pode ser relacionada com os números de Fibonacci. Na figura, temos uma parte do teclado chamada oitava, ela é constituída de 13 teclas, separadas em dois grupos: 8 brancas e 5 pretas. As pretas também estão divididas em dois grupos de duas e três teclas. Todos os números dessa organização – 2, 3, 5, 8, 13 – pertencem à sequência de Fibonacci.

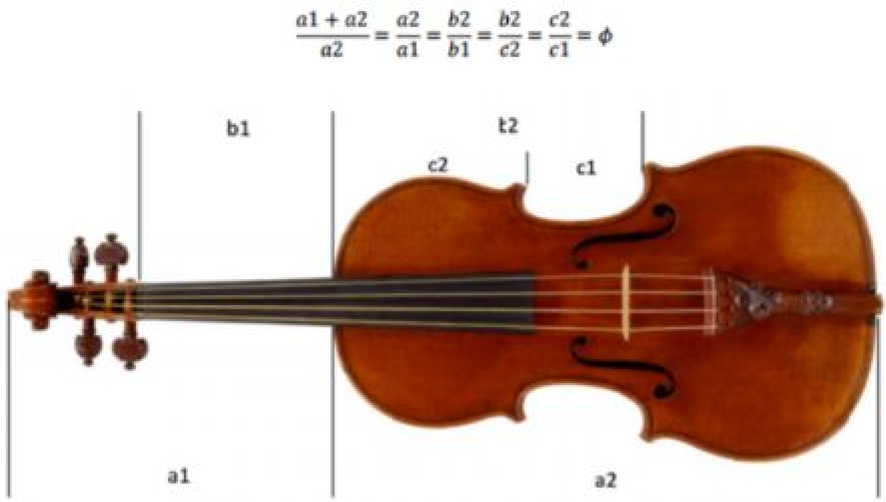
Figura 25 – Teclado musical



Fonte: elaborado pelo autor

Violino Stradivarius: instrumentos fabricados pelo famoso luthier Antonio Stradivari entre os séculos XVII e XVIII, destaca-se pela sua qualidade sonora em virtude de alguns aspectos como tipo de madeira, verniz utilizado e tamanho da abertura da fenda no corpo do violino. Observe a figura a seguir que relaciona algumas medidas do violino, temos pelo menos cinco razões cujo valor é igual ao número de ouro.

Figura 26 – Violino



Fonte:<http://blog.dubspot.com/fibonacci-sequence-in-music/> Acesso em: 19 maio 2023.

Frequências das notas musicais: o som é uma onda mecânica e como tal tem frequência própria, caracterizando a altura desse som, quanto maior a frequência mais aguda será a nota. Existem relações entre os números da tabela de frequências, vejamos as razões:

Nota Musical	Frequência (Hz)
C	264
D	297
E	330
F	352
G	396
A	440
B	495
C	528

Tabela 8 – Frequência das notas musicais

$$\frac{297}{264} = \frac{396}{352} = \frac{495}{440} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{330}{297} = \frac{440}{396} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{352}{330} = \frac{528}{495} = \frac{16}{15}$$

Quando fatoramos denominadores e numeradores das frações simplificadas: 8 (2.2.2), 9 (3.3), 10 (2.5), 15 (3.5) e 16 (2.2.2.2) temos números de Fibonacci.

4.3 Proporção áurea na obra de Mozart

Figura 27 – Mozart

Fonte:<https://www.theculturecconcept.com/> Acesso em: 19 maio de 2023.

Músico austríaco que viveu no século XVIII, compôs vários tipos de músicas como: óperas, concertos, sinfonias, músicas sacras. Dentre esse conjunto de composições está a sonata, tipo de composição que é feita para um único instrumento ou um grupo pequeno de instrumentos, a sonata clássica está dividida em três movimentos: introdução, desenvolvimento e recapitulação. A seguir, temos a análise de uma sonata de Mozart. A primeira coluna se refere ao movimento e à sonata. Segundo o levantamento do musicólogo Kochel, cada obra de Mozart corresponde a um índice Köchel, ou seja, um número precedido da letra K ou das letras KV (do alemão Köchelverzeichnis: "Catálogo Köchel").

A segunda coluna representa o número de compassos da primeira parte (a), a terceira coluna representa o número de compassos da segunda parte (b) e a quarta e última coluna representa a soma dos compassos da parte (a) e da parte (b).

Kochel	a	b	a+b
279,I	38	62	100
279,II	28	46	74
279,III	56	102	158
280,I	56	88	144
280,II	24	36	60
280,III	77	113	190
281,I	40	69	109
281,II	46	60	106
282,I	15	18	33
282,III	39	63	102
283,I	53	67	120
283,II	14	23	37
283,III	102	171	273
284,I	51	76	127
309,I	58	97	155
311,I	39	73	112
310,I	49	84	133
330,I	58	92	150
330,III	68	103	171
332,I	93	136	229
332,III	90	155	245
333,I	63	102	165
333,II	31	50	81
457,I	74	93	167
533,I	102	137	239
533,II	46	76	122
545,I	28	45	73
547a,I	78	118	196
570,I	79	130	209

Tabela 9 – Tabela Kochel

Ao analisar essa tabela, podemos fazer as seguintes relações: $\frac{b}{a}$ e $\frac{a+b}{b}$, onde cada uma dessas razões são números que se aproximam do número de ouro. Como exemplo, na primeira linha (sonata 279, movimento I) temos que a = 38 , b = 62 e a+b = 100.

$$\frac{b}{a} = 62/38 = 1,6316 \quad \frac{a+b}{b} = 100/62 = 1,6129$$

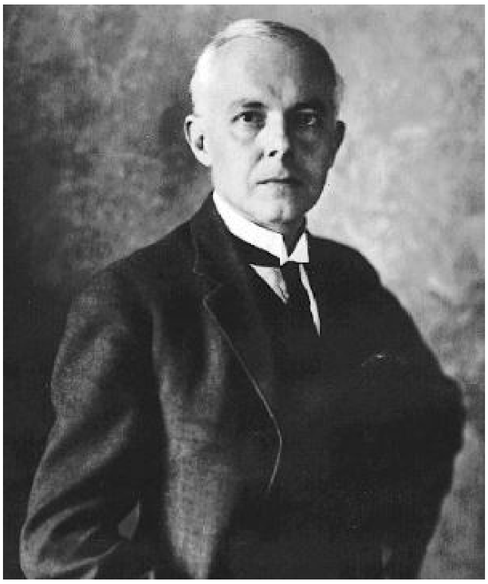
Nos dois casos, temos valores que se aproximam do número de ouro (1.61803399). As sonatas 282 I, 333 I e II e 545 I também possuem essa relação.

4.4 Bela Bartok

Bela Bartok nasceu em 25 de março de 1881, em Nagyszentmiklos, Hungria. Começou a aprender a tocar piano com sua mãe. Perdeu o pai quando tinha apenas 8 anos e aos 13 anos mudou-se com a mãe para Pozsony (atual Bratislava, capital da Eslováquia). Em 1898, entrou para a Academia Real de Música de Budapeste. Foi nomeado professor de piano da Academia de Budapeste em 1907. Autenticamente democrata e horrorizado com o nazismo, recusa-se a permanecer em seu país quando o fascismo se instala no poder. Decide-se, em 1940, estabelecer-se nos Estados Unidos. Bartók compôs até o final de sua vida. Morreu em Nova York, em 26 de setembro de 1945, em uma miséria tão grande que não deixou sequer dinheiro suficiente para o pagamento de seu enterro.

Entre suas muitas composições, vamos observar a peça *Música para instrumentos de Corda, Percussão e Celeste*, composta em 1936. Os 89 compassos do movimento estão divididos em duas seções com 55 e 34 compassos, perceba que 89, 55 e 34 são números de Fibonacci.

Figura 28 – Bela Bartok



Fonte:<https://www.algosobre.com.br/biografias/bela-bartok.html> Acesso em: 26 set 2023.

Erno Levdai, em *Análise da música de Bartok* elucidou que Bela Bartok, quando tinha pouco mais de trinta anos, desenvolveu um método que integrava todos os elementos da música: escalas e estruturas de acordes. Bartok utilizou a secção áurea para se basear na duração das partes (introdução, desenvolvimento e recapitulação) de uma obra inteira. A secção áurea já era aplicada em muitas áreas do conhecimento, mas nunca, de forma explícita como fez Bartok, na Música.

Sistema Axial de Bartok: seu sistema tonal se desenvolveu a partir da música funcional. Com base na análise das composições, podemos afirmar que o sistema axial tem as propriedades essenciais da harmonia clássica:

- Afinidades funcionais de quarto e quinto grau;
- A relação das tonalidades relativas maior e menor;
- As relações dos harmônicos;
- O papel das notas de atração;
- A tensão oposta de dominante e subdominante;
- A dualidade dos princípios tonais e de distância.

O método de Bartok, em sua construção formal e harmônica, está estritamente ligado à lei da secção áurea.

Exemplos:

- 1º movimento da sonata para dois pianos e percussão: o movimento tem 443 compassos e a recapitulação começa no compasso 274. A proporção entre os números 443 e 274 é uma boa aproximação do número de ouro (1,6167...).

- O 1º movimento de contraste tem 93 compassos e a recapitulação começa na metade do compasso 57. A proporção entre os números 93 e 57 é uma boa aproximação do número de ouro (1,6357...).

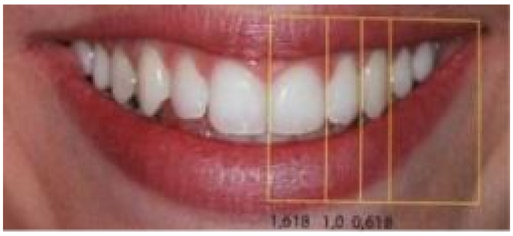
- O 1º movimento do divertimento se compõe de 563 compassos e a recapitulação começa no compasso 348. A proporção entre os números 563 e 348 é uma boa aproximação do número de ouro (1,6178...).

4.5 Aparência da estética da face

Uma área onde o número de ouro pode ser aplicada e que é no mínimo inusitada é a odontologia. A estética dos dentes é muito importante e a matemática contribui para a beleza do sorriso. A figura a seguir destaca três dentes, o incisivo central, o incisivo lateral e o canino. Segundo alguns estudos, um sorriso ideal é aquele cuja razão entre a largura de dois dentes adjacentes é igual o número de ouro. É óbvio que é quase impossível que as duas razões sejam exatamente iguais ao phi, considera-se então um número aproximado a 1,6.

> "Para que possamos ter um sorriso bonito com estética ideal, devemos seguir três elementos: Simetria através da linha média (os dentes do lado esquerdo devem ser iguais aos do lado direito em forma, cor, textura e posicionamento).
> A dominância dos incisivos centrais superiores (os dois dentes da frente sempre devem aparecer mais que os outros, ou seja, serem dominantes).A proporção entre os dentes superiores de maneira regressiva (o dente da frente é o que mais aparece no sorriso, o dente do lado aparece um pouco menos e assim sucessivamente)."[1]

Figura 29 – Sorriso



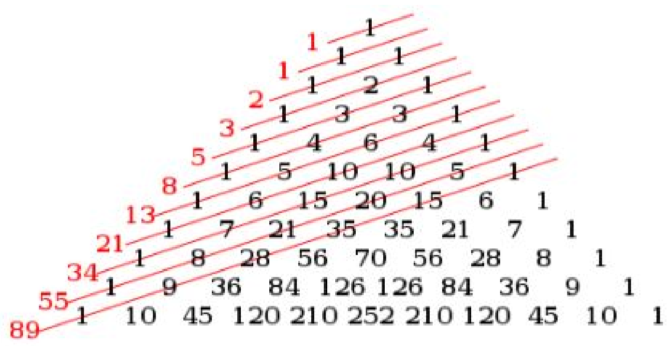
Fonte:<http://marcodevilla.com.br/proporcao-e-simetria-dos-dentes-superiores-na-estetica-do-sorriso/> Acesso em 26 set 2023.

[1] Fonte: http://marcodevilla.com.br/proporcao-e-simetria-dos-dentes-superiores-na-estetica-do-sorriso/ Acesso em 26 set 2023.

4.6 Matemática

No triângulo de Pascal, utilizado para o estudo do binômio de Newton, passando uma diagonal em cada linha, a soma dos números é equivalente a um termo numérico da sequência de Fibonacci, de forma crescente:

Figura 30 – triângulo de Pascal

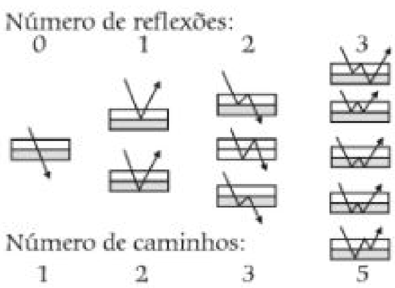


Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/El-Triangulo-de-Pascal-mostando-como-se-obtiene-la-Serie-de-Fibonacci-a-partir-de-la-suma_fig3_333622280> Acesso em 26 set. 2023

4.7 Física

Na Física também há aplicação da sequência de Fibonacci: quando colocamos duas placas de vidro, com diferentes índices de refração, sobrepostas e um raio de luz incide sobre essas placas, teremos diferentes caminhos para esse raio de luz. Observe a figura:

Figura 31 – Reflexões



Fonte:<https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/apostilas-eletronicas-da-d-fifi/apostilas-sobre-o-numero-D184-e-a-serie-de-fibonacci/> Acesso em 26 set. 2023.

O número de caminhos possíveis será sempre um número da sequência de Fibonacci, pois se o raio não sofrer reflexão, temos um caminho, se sofrer uma reflexão, temos dois caminhos, se sofrer duas reflexões, teremos três caminhos e assim por diante.

4.8 Desenvolvendo conteúdos práticos para sala de aula

4.8.1 FLAT

Para aplicar esta aula, sugerimos o uso do software on-line e gratuito FLAT[2] , que tem como finalidade auxiliar na composição musical por meio da escrita na forma de partitura, que pode ser facilmente criada/editada. Outra funcionalidade bastante atrativa aos alunos é tocar as composições criadas, podendo inclusive escolher alguns instrumentos para a execução da música.

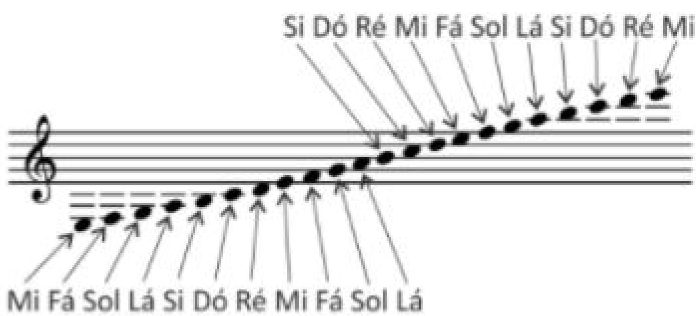
Figura 32 – Tela inicial do FLAT

Fonte: elaborado pelo autor.

Alguns pré-requisitos para esta aula:

1- É necessário que os alunos tenham um conhecimento mínimo sobre partitura, conseguindo colocar a figura correta (que indica duração da nota) no local correto (que indica a altura da nota).

Figura 33 – Caption



Fonte:<http://www.deniswarren.com/?page_id=3980> Acesso em 26 set. 2023.

[2] <https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/Fibonacci.pdf>

2- Apesar de o software ser muito intuitivo, é necessário uma ou duas aulas mostrando suas principais funcionalidades, é fundamental que os alunos tenham a oportunidade de fazer experimentos.

Sugiro que inicialmente sejam trabalhadas músicas bem simples, cantigas populares com uma sequência básica de notas .

4.8.2 Construindo um xilofone

O xilofone é um instrumento percussivo composto por teclas de madeira, análogas ao piano em sua estrutura, pois as teclas que emitem os sons mais graves se encontram à esquerda do instrumentista, enquanto que as teclas que emitem sons mais agudos estão à direita.

> Seu timbre é duro e brilhante e pode ser tocado com baquetas de diversas gradações de dureza. O xilofone passou a ser usado em orquestras a partir do século XIX. A primeira obra a usar o xilofone como instrumento solista foi O Carnaval dos animais, de Camille Saint-Saens, composta em 1886. (Filarmonica, s/d, on-line).

Figura 34 – Xilofone

Fonte: <https://www.filarmonica.art.br/educacional/sem-misterio/xilofone/> Acesso em 26 set. 2023.

A ideia dessa aula é fazer que os alunos coloquem “a mão na massa” fazendo experimentos e gerando um xilofone com garrafas de vidro. Para isso, serão utilizados os seguintes materias: garrafas de vidro, copo com marcação para medir líquidos, funil, lápis com borracha, afinador (pode ser baixado pelo celular) e água.

Após a entrega dos materiais e uma explicação sobre o instrumento, o professor fornecerá uma tabela para que os alunos possam comparar a altura da nota musical com a quantidade de água em cada garrafa a partir da frequência gerada, isso será conferido por meio do afinador eletrônico.

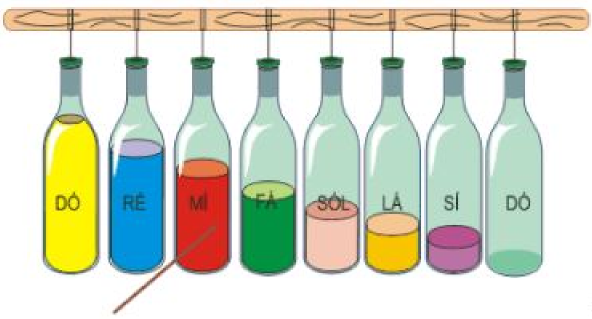
Figura 35 – Diapasão eletrônico

Fonte:<https://musicjungle.com.br/blog/musica/afinador-online-melhores-aplicativos-de-afinador>Acesso em 26 set. 2023.

O ideal é que se tenha pelo menos oito garrafas para que cada uma delas possa gerar uma altura na escala diatônica escolhida, o recomendado é que se utilize a escala de dó maior: dó, ré,mi,fá,sol,lá,si, dó, sendo este último dó com frequência maior que o primeiro.

Após o término da construção do xilofone de garrafas, é possível retomar a atividade da composição musical e executar a música no instrumento produzido.

Figura 36 – Representação de um xilofone artesanal



Fonte: <http://acaomatematica.blogspot.com/2011/05/o-som-da-fracao.html> Acesso em: 15 ago. 2022

4.8.3 Songmaker

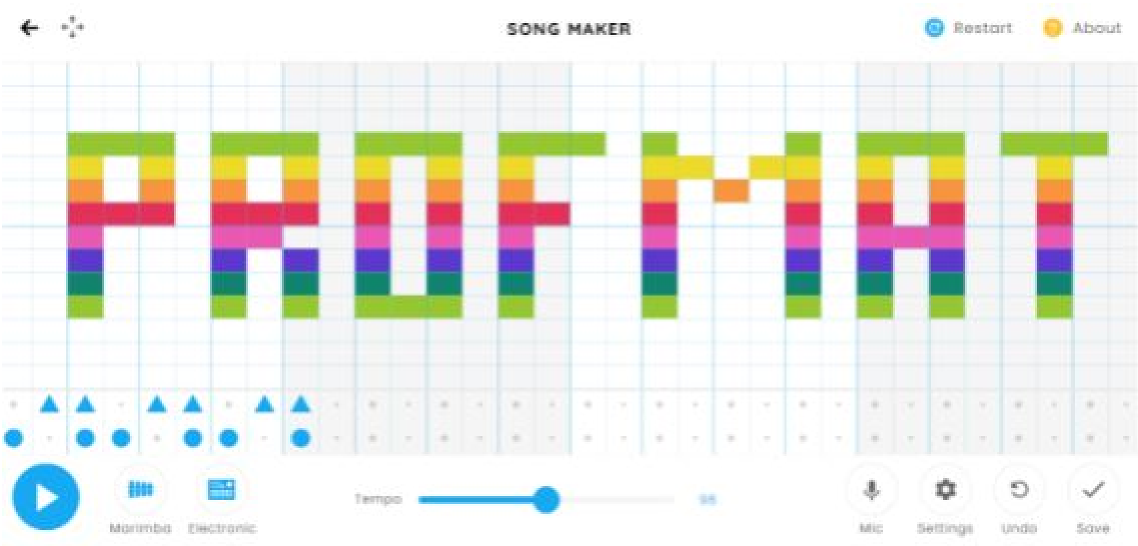
Ferramenta de criação musical criada pelo Google e disponibilizada no navegador. Tem uma interface bastante intuitiva e qualquer pessoa leiga consegue criar uma sequência de notas. Não foi concebido para ser um meio profissional de criação musical, desta forma, conseguimos trabalhar muito bem inclusive com alunos do ensino fundamental.

A seguir, temos os primeiros passos para o início de uma produção:

- Acesse o site o Song Maker e comece a selecionar os retângulos que correspondem às alturas das notas musicais. É possível criar uma trilha sonora por meio de desenhos gráficos ou colocar a criatividade em prática marcando as notas.
- Selecione o tipo de instrumento musical, o padrão é Marimba, você pode selecionar também: piano, strings, woodwind, synth. Selecione também o tipo de instrumento percussivo, o padrão é Eletronic, mas você pode optar por Blocs, Kit ou Conga.
- Ajuste a velocidade da execução da trilha no botão deslizante Tempo.
- Clique sobre o botão Play para executar a música recém-criada e verificar o resultado.

Clique sobre o botão Save para salvar a trilha. O áudio será disponibilizado em um link ou pode ser compartilhado nas s redes sociais do Song Maker, no momento ele não permite fazer download da trilha sonora mesmo após ela ter sido salva. Ainda assim, é uma opção para a introdução na educação musical e pode servir como distração para crianças de todas as idades.

Figura 37 – Interface do Songmaker



Fonte: elaborado pelo autor

5 Considerações finais

A motivação central deste trabalho é uma proposta para melhorias no ensino de Matemática por meio da Música, e da interdisciplinaridade com outras áreas. Saber como lidar com os problemas apontados já no primeiro capítulo como: a estigmatização da matemática e a falta de motivação para o aprendizado são os grandes desafios do educador. A problemática do ensino de matemática no Brasil, abordada já na introdução, pode ser resolvida com várias medidas, e as propostas apresentadas nesta dissertação podem ajudar o professor de Matemática no seu trabalho, gerando um melhor ambiente de aprendizagem aos seus alunos.

A dissertação trouxe duas contribuições: o algoritmo usado para relacionar sequências numéricas em sons e uma proposta de trabalho interdisciplinar com o intuito de gerar melhorias do ensino da Matemática e do ambiente em sala de aula. Com relação ao algoritmo para composição, é importante ressaltar que houve ajustes no resultado gerado. Pois, com o software Sibelius foi possível editorar e ouvir o resultado da composição, simultaneamente, desta forma, várias modificações foram feitas pelo autor seguindo sua intituição musical, de forma, subjetiva e pessoal. O que de tudo mostra os limites do algoritmo proposto, mas por outro lado demonstra o potencial de utilizar como ferramenta para composição. O algoritmo não gera uma obra acabada, mas um conjunto de notas que pode ser depurado pelo compositor. Essa forma de trabalhar com a composição, a matemática e computador, foi denominado na literatura como composição assistida por computador.

É certo que devemos repensar o currículo escolar, a didática em sala de aula e analisar o que países com bons índices de educação estão fazendo para que isso seja replicado no Brasil, considerando suas particularidades. Com essa atualização, a interdisciplinaridade terá cada vez mais espaço no ambiente escolar.

A aplicação de uma atividade em sala de aula que se utilize desse algoritmo deve ser a próxima etapa dessa pesquisa. É possível também criar um programa de computador que calcule o modelo apresentado na dissertação, ou seja, que consiga reproduzir um perfil melódico a partir de uma sequência numérica qualquer.

Espero, ao fim deste texto, ter gerado uma reflexão ao leitor/educador de que é possível, mesmo com todas as dificuldades alcançar mais alunos e transformar essa falsa idéia de que a Matemática é para poucos em uma Matemática mais popular.

Referências

1 SOUZA, L. G. S. *Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 15.

2 FELICETTI, V. L.; MOROSINI, M. C. Do compromisso ao comprometimento: o estudante e a aprendizagem. *Educar em Revista*, SciELO Brasil, p. 23–43, 2010. Citado na página 18.

3 SILVA, A. X. da; CUSATI, I. C.; GUERRA, M. d. G. G. V. Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade: dos conhecimentos e suas histórias. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, p. 979–996, 2018. Citado na página 22.

4 MELO, H. S. Quadrivium. *Matemática: 7 perspetivas*, Universidade dos Açores, p. 41–73, 2016. Citado na página 23.

5 LIVIO, M. *Razão áurea.* [S.l.]: Editora Record, 2021. Citado na página 26.

6 KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2.* [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. Citado na página 35.

7 OLIVEIRA, C. A. R. de; FALCAO, R. Composiçao musical e fibonacci: a utilizaçao da música como forma lúdica de aprendizagem. Citado na página 46.

6 PLANO DE AULA

Público Alvo: Alunos do ensino fundamental (preferencialmente 8º e 9º ano) e ensino médio.

Tema: Crie sua música.

Objetivos:

- Entender o conceito de sequência numérica.
- Trabalhar com a sequência de Fibonacci e outras sequências.
- Estimular a criatividade.
- Contato do alunos com conceitos básicos musicais.

Conteúdo: Sequências numéricas, operações com números inteiros, conceitos de função e introdução a música.

Duração da Aula: 4 aulas de 50 min

Recursos Didáticos: Materiais básicos como caderno,lápis,borracha e caneta. Computador com sotware instalado.

Avaliação: Análise das criações de cada aluno.

Desenvolvimento da atividade: A primeira aula poderá servir para explicar a teoria do conceito de sequencias numéricas. Como podemos transformar números em sons?
1ª possibilidade:
Temos 7 notas musicais (dó,ré,mi,fá,sol,lá,si) e 10 algarismos no sistema decimal. Podemos então, associar cada número a uma nota musical.