



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT

## A Fórmula de Euler para Poliedros

Agna Souza Santos

São Cristóvão - SE  
Agosto, 2024

Agna Souza Santos

## A Fórmula de Euler para Poliedros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DMA-UFS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Salviano Veiga

Universidade Federal de Sergipe

Agosto, 2024

# A Fórmula de Euler para Poliedros

por

Agna Souza Santos

Área de Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra

Subárea de Conhecimento: Matemática

Especialidade de Conhecimento: Geometria

Banca Examinadora:

---

Profa. Dra. Ana Cristina Salviano Veiga  
(Orientadora)

---

Prof. Dr. Marcos Aurélio Guimarães Monteiro  
(Primeiro Examinador - DMA- UFS)

---

Prof. Dr. Gastão Florêncio Miranda Júnior  
(Segundo Examinador - DMA- UFS)

*Aos meus pais, pois minha vitória é deles.  
À minha filha Sofia, minha maior fonte de inspiração.  
Ao meu marido Danilo, parceiro de todas caminhadas.*

# Agradecimentos

Ao universo e à espiritualidade, que sempre guiaram meus passos de maneira sutil e poderosa. Acredito que essa força maior esteve presente em cada momento dessa jornada.

Ao meu marido Danilo pelo companheirismo e apoio, à minha filha Sofia, minha parceira e maior motivação e inspiração, obrigado a ambos pela paciência e compreensão por todos os momentos que não puderam ser vividos com eles em virtude do tempo dedicado ao PROFMAT.

Aos meus pais Jane e Aurelino por todo carinho, apoio e incentivo ao longo da minha caminhada. Entre erros e acertos, eles me fizeram a mulher que sou hoje e me ensinaram a importância de batalhar e perseverar, além do esforço e dedicação para que eu tivesse a melhor educação possível. Também sou grata aos meus irmãos Aurélio, Airon e Arthur, e a todos os familiares, pelo apoio e torcida.

Aos meus amigos e amigas que sempre me incentivaram, apoiaram e ouviram meus anseios. Em especial, agradeço a Adeilza, Camila, Layane, Livia e Thayna. Nossas conversas foram fundamentais para me manter forte durante essa jornada.

A minha orientadora Ana Cristina pela paciência, ajuda e disponibilidade para que pudéssemos concluir esse trabalho.

Aos meus colegas de turma Rhamar, Mario, Jhonatan e Rômulo, meu muito obrigado pela parceria que formamos. Finalizar esse processo teria sido impossível sem nossas trocas e nosso grupo de estudos nas madrugadas divertidas. Em especial, agradeço a Rhamar por toda a parceria e troca de conhecimento.

Aos professores do PROFMAT - UFS, pelos ensinamentos que contribuíram significativamente para o meu desenvolvimento profissional e me permitiram ter um melhor desempenho ao longo do curso.

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização desse trabalho.

A mim mesma por não desistir, por enfrentar os desafios e persistir mesmo nos momentos mais difíceis.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a fórmula de Euler para poliedros convexos. Embora tenha um enunciado simples e de fácil compreensão, ela fornece um invariante fundamental para essa classe de objetos. Com o objetivo de sugerir uma proposta de abordagem desse importante resultado aos professores do ensino médio, apresentamos uma demonstração combinatória, devida a Cauchy, uma demonstração por indução, usando teoria dos grafos, e algumas aplicações da fórmula de Euler tanto à geometria de poliedros, inerente aos currículos do ensino médio, quanto à teoria dos grafos. No final do trabalho, apresentamos um produto educacional que consiste em um roteiro e proposta de atividades didáticas a serem seguidas pelo professor de Matemática do ensino médio em suas aulas sobre Geometria de Poliedros.

**Palavras-chave** Poliedros; Teorema de Euler; Grafos

# Abstract

In this work, we present Euler's formula for convex polyhedra. Although it has a simple and easy to understand statement, it provides a fundamental invariant for this class of objects. Aiming to suggest a proposal for approaching this important result to high school teachers, we present a combinatorial proof, due to Cauchy, a proof by induction, using graph theory, and some applications of Euler's formula to both, the geometry of polyhedra, regarding the high school curricula, and graph theory. At the end of the work, we present an educational product which consists on a script and proposal of didactic activities to be followed by the high school mathematics teacher in his Polyhedra Geometric classes.

**keywords** Polyhedra; Euler; Graphs

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Fórmula de Euler para Poliedros</b>	<b>5</b>
1.1	Uma breve biografia de Euler . . . . .	5
1.2	Definição de Poliedro . . . . .	6
1.3	Prova Combinatória - Cauchy . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Grafos</b>	<b>15</b>
2.1	Breve Histórico . . . . .	15
2.2	Definições preliminares . . . . .	17
2.3	Grafos Eulerianos . . . . .	22
2.4	A Fórmula de Euler para Grafos . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>28</b>
3.1	Poliedros Regulares . . . . .	28
3.2	Três casas e três serviços públicos . . . . .	34
3.3	Problemas adicionais . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Generalização</b>	<b>38</b>
4.1	Gênero . . . . .	38

4.2	Característica de Euler . . . . .	39
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>40</b>
5	<b>Anexo - Produto Educacional</b>	<b>43</b>

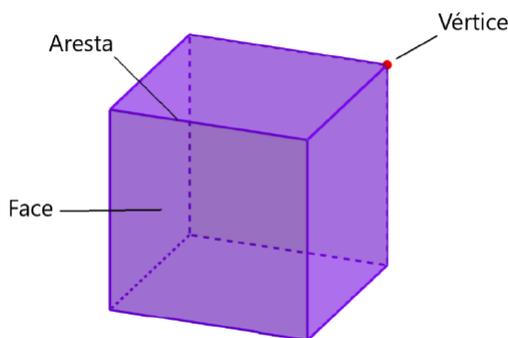
# Introdução

Iniciamos apresentando a famosa fórmula de Euler (1707-1783) para poliedros convexos, uma das mais bonitas e elegantes fórmulas da matemática. Ela destaca-se especialmente por sua simplicidade:

$$V - A + F = 2,$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro. Por exemplo, um cubo contém  $V = 8$  vértices,  $A = 12$  arestas e  $F = 6$  faces, e de fato temos que  $V - A + F = 2$ .

Figura 1: Vértices, arestas e faces do cubo



Fonte: [8]

Em [17], é apresentado o resultado de uma pesquisa entre matemáticos que consideram a fórmula de Euler para poliedros secundária apenas à fórmula  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , que, por sinal, também é de Euler.

O início do estudo dos poliedros se perde nas névoas do passado, mas sabe-se que por volta de 360 a.c Platão escreveu sobre os cinco poliedros regulares em um dos seus diálogos denominado de Timeu. Nesse trabalho ele discute a natureza do universo e introduz a

ideia dos cinco sólidos regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), associando cada um deles aos elementos fundamentais da natureza: terra, água, ar, fogo e universo. Esses sólidos ficaram conhecidos como sólidos de Platão, mas sabe-se que apesar de não haver registros, os Pitagóricos já conheciam e estudavam o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, enquanto o octaedro e o icosaedro eram estudados por Teeteto.

Embora os poliedros já fossem explorados muito antes de Euler, os matemáticos não conseguiram enxergar a relação

$$V - A + F = 2,$$

antes dele. Euler foi o primeiro a tentar classificar os poliedros pela contagem de seus vértices, arestas e faces, diferente de seus antecessores que lidavam com propriedades métricas dos poliedros tais como medida de ângulos, comprimentos dos lados e áreas das faces.

Apesar de ter descoberto em 1750 essa tão importante equação, a prova apresentada por Euler para sua fórmula negligenciou algumas sutilezas dos poliedros e não estava completamente correta.

Figura 2: Leonhard Euler, 1707 - 1783



Fonte: [12]

Legendre (1752 – 1833) foi o primeiro matemático a apresentar em 1794 uma demonstração correta e com todo rigor necessário para a fórmula de Euler. Ele usou em seu trabalho a projeção de um poliedro sobre uma esfera e a fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Mais tarde, foi observado que a prova de Legendre funciona para uma classe maior do que os poliedros convexos: os poliedros convexos estrelados.

Figura 3: Adrien - Marie Legendre, 1707 - 1783



Fonte: [1]

Vários anos após a descoberta de Euler e a apresentação da demonstração de sua fórmula, apareceram novas provas e várias generalizações para outros objetos geométricos. Todas essas provas usavam abordagens muito diferentes. Uma delas foi dada por Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857), um grande matemático com contribuições profundas e substanciais em análise complexa, análise real, álgebra, equações diferenciais, teoria das probabilidades, determinantes e física-matemática.

Figura 4: Augustin - Louis Cauchy, 1789 - 1857



Fonte: [2]

Embora seja bastante engenhosa, a demonstração de Cauchy tem poucos pré-requisitos formais e pode ser apresentada a estudantes do ensino médio. Diante disso, optamos por apresentar, no capítulo 1 deste trabalho, a prova de Cauchy para a fórmula de Euler.

Outro aspecto importante da demonstração de Cauchy é a forte ligação da mesma com a teoria dos grafos (introduzida por Euler), embora tal importância não tenha sido concebida por Cauchy. De modo a apresentar a fórmula de Euler em um contexto mais moderno e tornar as aulas de Geometria mais interessantes, apresentamos no capítulo 2 deste trabalho o estudo da fórmula de Euler via teoria dos grafos, que embora não faça parte nos Parâmetros Curriculares Nacionais, acreditamos que possa ser introduzida nas aulas de Geometria de Poliedros, dada a forte ligação entre estes objetos e grafos, estruturas discretas que consistem em vértices e arestas que conectam estes vértices.

No capítulo 3 apresentamos algumas aplicações da Fórmula de Euler para poliedros e grafos. Dentre estas aplicações, destacamos a existência de apenas cinco poliedros regulares.

No capítulo 4 falamos brevemente sobre a generalização da fórmula de Euler para superfícies.

Por fim, apresentamos um produto educacional que consiste em uma proposta de roteiro e atividades didáticas a serem seguidas pelo professor de Matemática do ensino médio em suas aulas sobre Geometria de Poliedros.

# Capítulo 1

## Fórmula de Euler para Poliedros

### 1.1 Uma breve biografia de Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) nasceu perto de Basileia, na Suíça. Ele foi educado em casa até os seus 7 anos e, aos 13 anos, iniciou seus estudos de teologia na Universidade de Basileia. Euler não demonstrou grande entusiasmo pela área teológica e se dedicava à matemática nas horas vagas. Devido à sua capacidade, Leonhard foi notado e encorajado por Johann Bernoulli, seu professor, a iniciar o curso de graduação em matemática, o qual foi concluído em 1726.

Em 1727, Euler aceitou o convite de Daniel Bernoulli e juntou-se à Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia. Posteriormente, ele partiu para Berlim em 1741, ficando até 1766, quando retornou para São Petersburgo. Nos últimos anos de sua vida, ele sofreu com problemas de visão que inicialmente o deixaram cego de um olho e, mais tarde, evoluíram a ponto de incapacitá-lo de trabalhar de maneira completamente independente. Apesar de tal fato, ele continuou a produzir, contando com a ajuda de assistentes e um quadro gigante em seu escritório, onde escrevia com letras grandes, além de sua memória prodigiosa.

Em 1783, Euler sofreu um acidente vascular cerebral e veio a falecer. Ao longo de sua vida, Euler fez significativas contribuições em diversas áreas da matemática, incluindo a topologia, teoria dos números, álgebra, trigonometria, notação matemática, teoria dos grafos, entre outros.

## 1.2 Definição de Poliedro

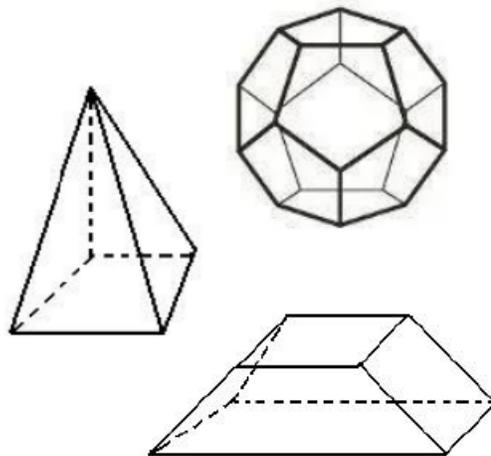
Não existe uma definição universal de poliedros. Muitas definições com variados níveis de rigor foram apresentadas ao longo dos anos. Porém, é um consenso que poliedros podem ser descritos por vértices, arestas e faces, que serão definidos abaixo. Apresentamos a seguir a definição de poliedro adotada neste texto.

Neste capítulo apresentaremos a demonstração de Cauchy para a fórmula de Euler. Assumiremos que o leitor tem conhecimento sobre polígono, polígonos regulares, suas nomenclaturas e principais características, que serão utilizados livremente.

**Definição 1.1.** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, chamados de faces, onde:*

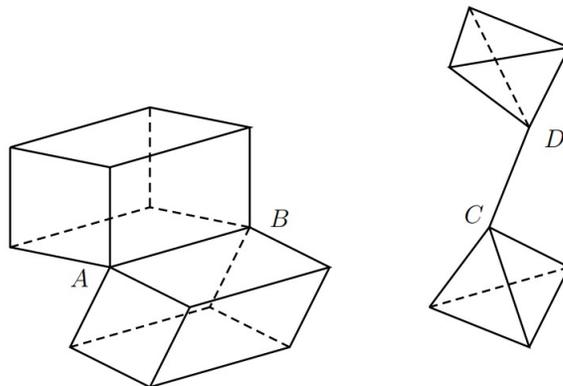
1. *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
2. *A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, chamado aresta, ou é um ponto, chamado vértice, ou é vazia.*
3. *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).*

Figura 1.1: Exemplos de Poliedros



Fonte: Autoria própria

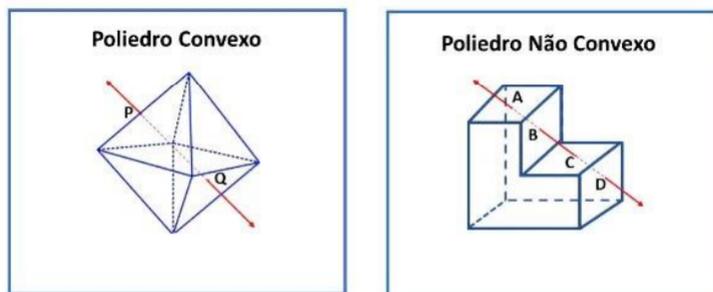
Figura 1.2: Exemplos de objetos geométricos que não são poliedros



Fonte: 22

**Definição 1.2.** Dizemos que um poliedro é convexo se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos em sua superfície está completamente contido na região interior ao poliedro ou em alguma de suas faces (ver 1.3).

Figura 1.3: À esquerda: um poliedro convexo. À direita: um poliedro não convexo



Fonte: 22

### 1.3 Prova Combinatória - Cauchy

Estamos prontos para enunciar e provar a fórmula de Euler para poliedros. Dado um poliedro, denotaremos por  $V$  seu número de vértices, por  $A$  seu número de arestas e por  $F$  seu número de faces.

**Teorema 1.1.** Em um poliedro convexo  $P$  vale a relação

$$V - A + F = 2.$$

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, apresentaremos aqui a prova de Cauchy para o teorema acima. O método de Cauchy envolve vários passos. O primeiro passo consiste em formar um objeto geométrico plano, o qual chamaremos de configuração plana do poliedro  $P$ . Por meio de certas manipulações desse objeto, manteremos o tempo todo controle sobre os números de vértices, arestas e faces do poliedro, até chegarmos à equação desejada  $V - A + F = 2$ .

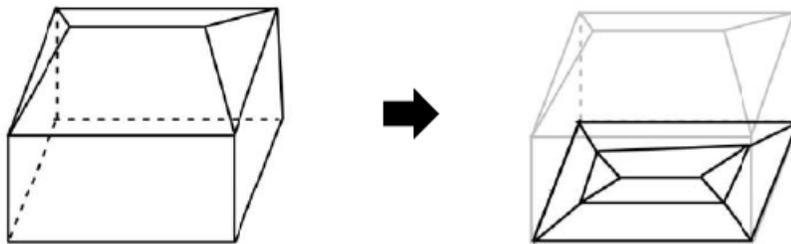
*Demonstração.*     • **1. Formando a configuração plana**

Primeiramente removemos uma face de  $P$ , a seguir transportaremos para essa face todos os vértices remanescentes e os ligaremos por segmentos de retas (arestas) segundo a seguinte regra: dois vértices do novo objeto estão conectados por uma aresta se, e somente se, seus representantes no poliedro original  $P$  estavam conectados por uma aresta de  $P$ . O objeto final assim obtido é chamado de configuração plana de  $P$  e será denotado por  $\mathcal{P}$ . Note que esse processo só é possível porque o poliedro  $P$  é convexo.

Em seu trabalho, Cauchy afirma que “as outras faces poderiam ser consideradas como formando um conjunto de polígonos, todos contidos no contorno da face removida”.

Na figura 1.4 temos um poliedro à esquerda e sua configuração plana à direita.

Figura 1.4: Configuração plana do poliedro na face inferior

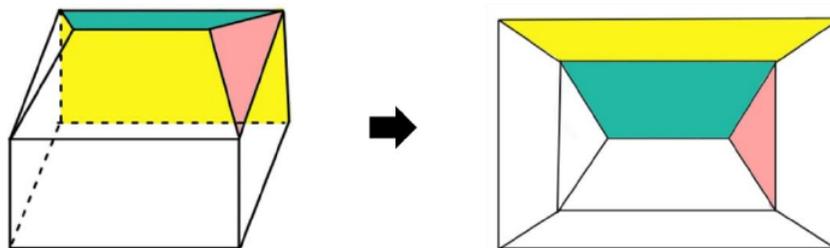


Fonte: [17]

Veja na figura 1.5 uma ilustração da identificação das faces remanescentes de um poliedro com as faces de sua configuração plana.

Observe que o número  $V$  de vértices e  $A$  de arestas de  $P$  é igual ao número de vértices e arestas de  $\mathcal{P}$ , respectivamente. No entanto, o número de faces de  $\mathcal{P}$  é  $F - 1$ , onde  $F$  é o número de faces de  $P$ .

Figura 1.5: Formando as faces da configuração plana



Fonte: Autoria própria

Sejam  $V_0$ ,  $A_0$  e  $F_0$  o número de vértices, arestas e faces de  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Temos que

$$V_0 - A_0 + F_0 = V - A + F - 1.$$

Dessa forma, se mostrarmos que vale a igualdade

$$V_0 - A_0 + F_0 = 1,$$

concluiremos a prova da fórmula de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

Portanto, contaremos vértices, arestas e faces em  $\mathcal{P}$ .

A ideia da prova da relação  $V_0 - A_0 + F_0 = 1$  consiste em executar operações de adicionar e remover arestas de  $\mathcal{P}$ , de forma que a soma alternada

$$(\text{número de vértices}) - (\text{número de arestas}) + (\text{número de faces}),$$

relativa ao objeto obtido após cada operação aplicada, mantém-se a mesma. Ao final desse processo, obteremos um triângulo. Como o triângulo possui 3 vértices, 3 arestas e 1 face, chegaremos ao resultado desejado:

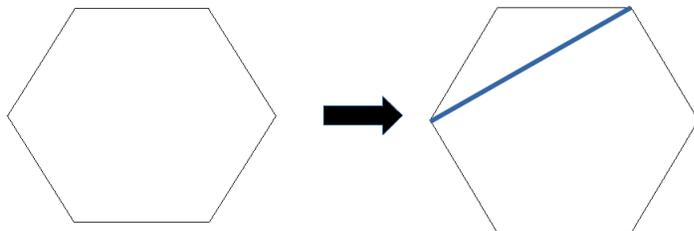
$$V_0 - A_0 + F_0 = 3 - 3 + 1 = 1.$$

• **2. Provando que  $V_0 - A_0 + F_0 = 1$ .**

Para provar o resultado, começamos observando se alguma face de  $\mathcal{P}$  não é um triângulo. Em caso afirmativo, traçamos uma diagonal e dividimos a face em duas faces menores.

Veja figura 1.6.

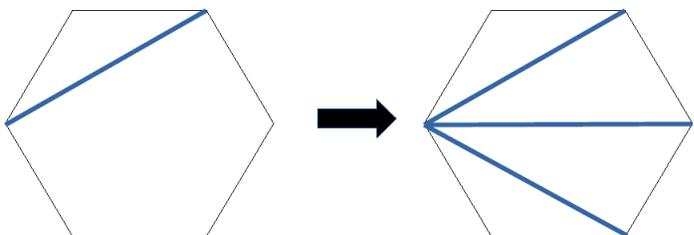
Figura 1.6: Adicionando arestas a  $\mathcal{P}$



Fonte: Autoria própria

Repetimos o processo de traçar diagonais à face escolhida até que a mesma esteja toda dividida em triângulos.

Figura 1.7: Adicionando arestas a  $\mathcal{P}$



Fonte: Autoria própria

A seguir, aplicamos o mesmo processo às demais faces de  $\mathcal{P}$ . Este procedimento é chamado de triangulação de  $\mathcal{P}$ . O objeto assim obtido, será denotado por  $\mathcal{P}_1$ .

Note que cada vez que adicionamos uma diagonal a  $\mathcal{P}$ , o número de arestas aumenta de uma unidade e o mesmo ocorre com o número de faces. No entanto, o número de vértices permanece inalterado. Suponha que  $\mathcal{P}_1$  foi obtido de  $\mathcal{P}$  a partir da adição de  $k$  diagonais. Dessa forma, denotando por  $V_1, A_1$  e  $F_1$  o número de vértices, arestas e faces de  $\mathcal{P}_1$ , respectivamente, teremos:

$$V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - (A_0 + k) + (F_0 + k) = V_0 - A_0 + F_0.$$

O próximo passo consiste de uma decomposição de  $\mathcal{P}_1$ . Dividimos esse processo em dois casos:

Caso 1: Verificamos se  $\mathcal{P}_1$  tem uma face com apenas uma aresta em comum com a fronteira de  $\mathcal{P}_1$ , se sim, removemos essa face e a aresta em comum. A figura resultante,

a qual denotaremos por  $\mathcal{P}_2$  tem uma nova fronteira. Sejam  $V_2, A_2$  e  $F_2$  o número de vértices, arestas e faces de  $\mathcal{P}_2$ , respectivamente. Note que  $V_2 = V_1$ ,  $A_2 = A_1 - 1$  e  $F_2 = F_1 - 1$ , assim,

$$V_2 - A_2 + F_2 = V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - A_0 + F_0.$$

E mais uma vez a soma alternada

$$(\text{número de vértices}) - (\text{número de arestas}) + (\text{número de faces})$$

permanece inalterada após a operação de remoção de uma face do caso 1.

Caso 2: Verificamos se  $\mathcal{P}_1$  tem uma face com duas arestas em comum com a fronteira de  $\mathcal{P}_1$ . Também nesse caso, removemos essa face e juntamente com ela as duas arestas exteriores e o vértice que as une. Denotamos por  $\mathcal{P}_3$  a figura resultante. Sejam  $V_3, A_3$  e  $F_3$  o número de vértices, arestas e faces de  $\mathcal{P}_3$ , respectivamente. Note que  $V_3 = V_1 - 1$ ,  $A_3 = A_1 - 2$  e  $F_3 = F_1 - 1$ , assim, mesmo nessa possibilidade, após uma operação desse tipo aplicada a  $\mathcal{P}_1$ , também teríamos

$$V_3 - A_3 + F_3 = V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - A_0 + F_0.$$

E mais uma vez a soma

$$(\text{número de vértices}) - (\text{número de arestas}) + (\text{número de faces})$$

também permanece inalterada após a operação de remoção de uma face do caso 2.

É importante ressaltar que devemos ter atenção à ordem de remoção das faces. Como foi apontado por [3], se tivermos o cuidado de manter a fronteira da figura resultante após a remoção de faces dos casos 1 ou 2, sempre homeomorfa a um círculo, sucessivas aplicações do processo de decomposição citado acima, o qual chamaremos de algoritmo de Cauchy, mantêm a soma alternada do número vértices, arestas e faces inalterada e no final do processo teremos apenas um triângulo. Dessa forma,

$$V_0 - A_0 + F_0 = 3 - 3 + 1 = 1.$$

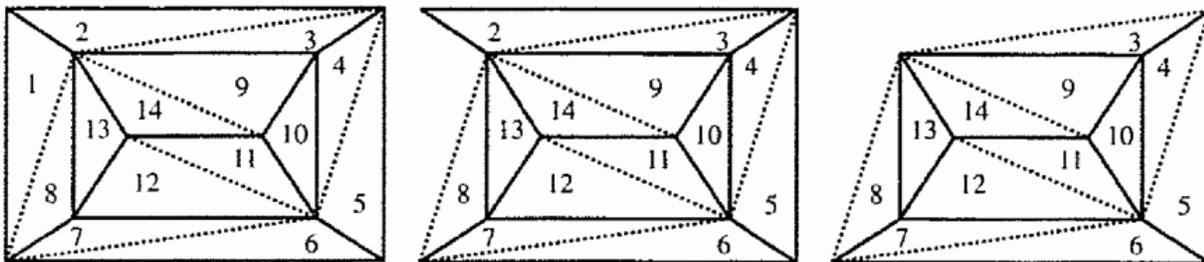
Portanto,

$$V - A + F = 2.$$

□

Na figura 1.8 apresentamos um exemplo de uma ordem correta de aplicação do Algoritmo de Cauchy.

Figura 1.8: Ordem de aplicação do Algoritmo de Cauchy

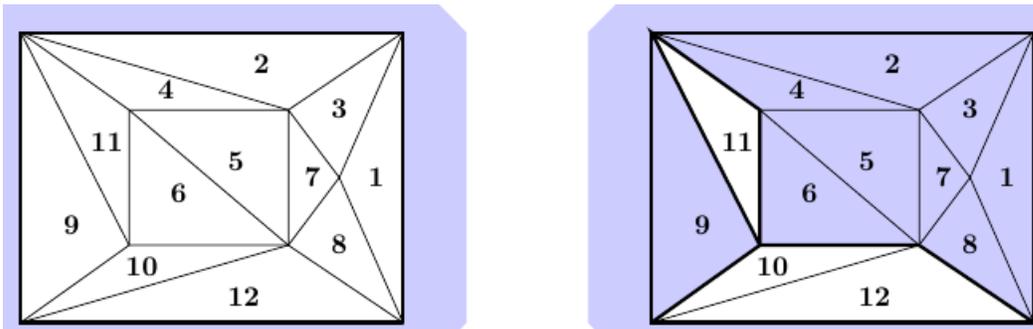


Fonte: [17]

A demonstração de Cauchy foi criticada por alguns matemáticos, em particular por Lakatos [11]. Isso se deve ao fato de que Cauchy não deu instruções precisas sobre como eliminar os triângulos. Sem o devido cuidado na ordem, é possível que, seguindo o algoritmo de Cauchy, obtenhamos uma figura desconexa para a qual a relação de Euler não é válida.

Apresentamos, na figura 1.9 abaixo, um exemplo (ver [3]) de uma aplicação incorreta do algoritmo de Cauchy, onde é negligenciado o requerimento de manter a fronteira da figura resultante, ao se eliminar uma face, homeomorfa a um círculo.

Figura 1.9: Erro na ordem de aplicação do algoritmo de Cauchy



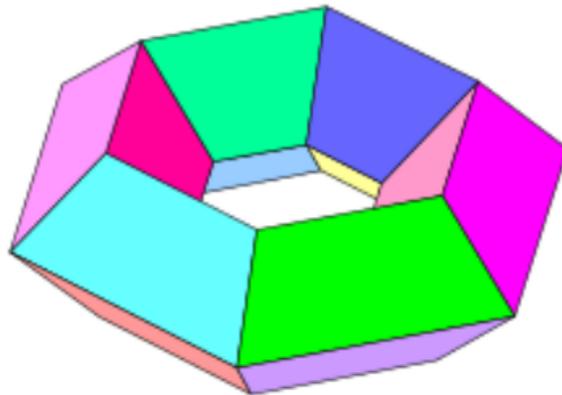
Fonte: [3]

Removendo triângulos na ordem indicada na figura 1.9, aplicamos o algoritmo de Cauchy até o nono triângulo.

Se removermos o décimo triângulo, o décimo primeiro e o décimo segundo triângulos não estarão mais conectados. Dessa forma, a fronteira da figura resultante, não será homeomorfa a um círculo. Assim, não teremos a garantia da validade da fórmula de Euler: ao removermos o décimo triângulo, não removemos nenhum vértice, mas removemos duas arestas e um triângulo, portanto a soma alternada de vértices, arestas e faces não é preservada.

Embora tenha acrescentado a hipótese de convexidade ao Teorema de Euler, acredita-se que Cauchy soubesse que sua demonstração aplicava-se a alguns poliedros não convexos, mas isso não fica claro a partir de seu trabalho. Existem generalizações modernas da prova de Cauchy para uma classe mais ampla de poliedros. Se ao removermos uma face do poliedro, o restante puder ser projetado em um plano, então a técnica de Cauchy é aplicável. Essa propriedade pode ser reformulada da seguinte forma: se o poliedro é homeomorfo à esfera, então ele satisfaz à relação de Euler. A grosso modo, isso significa que os poliedros para os quais a fórmula de Euler não vale são aqueles que possuem “buracos” (ver figura 1.10 para um exemplo).

Figura 1.10: Poliedro com buraco: não satisfaz à fórmula de Euler



Fonte: [20]

Cauchy aproximou-se muito dessa propriedade, no entanto, não chegou a percebê-la. Caso tivesse percebido, teria deixado sua contribuição para a Analysis Situs (Topologia). Em 1907, Jacques Hadamard (1865 - 1963) escreveu:

Considero ser um dos eventos mais marcantes na história da ciência o erro de

Cauchy ao ter acreditado que podia demonstrar o teorema de Euler sem introduzir qualquer hipótese sobre a natureza do poliedro estudado. Na verdade, é uma questão de enorme importância que lhe escapou e cuja descoberta ele deixou para Riemann: o papel fundamental da Analysis Situs na matemática.

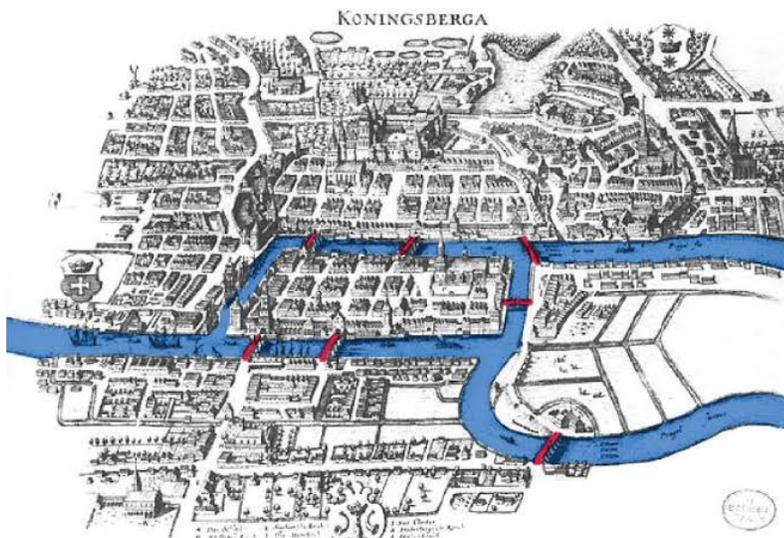
# Capítulo 2

## Grafos

### 2.1 Breve Histórico

A teoria dos grafos tem origem com o famoso problema das pontes de Königsberg. Nesse problema, os habitantes da pequena cidade se questionavam se era possível fazer um passeio atravessando as setes pontes do rio Prególia, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida.

Figura 2.1: Konisberg



Fonte: [18]

Konigsberg foi uma cidade histórica situada na antiga Prússia Oriental. A cidade é composta por 4 grandes partes de terra firme que são cortadas pelo rio Pregel, sendo duas delas as ilhas Kneiphof e Lomse. A ilha Kneiphof tem um formato quase que retangular com localização central entre as demais partes, Kneiphof funcionava como um ponto de ligação vital entre os diferentes distritos, facilitando o fluxo de pessoas e bens, integrando de maneira eficiente a cidade. A ilha de Lomse é extensa, por isso apenas parte dela é representada nas ilustrações tratadas neste capítulo. Por serem ilhas, Kneiphof e Lomse estavam ligadas as outras partes da cidade através de pontes, as pontes eram necessárias para conectar as ilhas ao continente e entre si, facilitavam o transporte e o comércio de mercadorias, permitiam maior conectividade entre as partes da cidade, facilitando o deslocamento dos moradores e ajudavam na administração e defesa da cidade, pois permitiam o movimento rápido de tropas e recursos em caso de necessidade. Especificamente, as setes pontes originais de Königsberg eram: Ponte do Mercado (Krämerbrücke), Ponte Alta (Hohe Brücke), Ponte de Madeira (Holzbrücke), Ponte Verde (Grüne Brücke), Ponte do Mel (Honigbrücke), Ponte do Forno (Köttelbrücke) e Ponte Nova (Neue Brücke).

Essas pontes ligavam as duas ilhas (Kneiphof e Lomse) às partes continentais da cidade e entre si, formando a famosa configuração que inspirou o “Problema das Sete Pontes de Königsberg” de Leonhard Euler.

Após a Segunda Guerra Mundial, em 1945, foi anexada à União Soviética . Em 1946, a cidade foi oficialmente renomeada para Kaliningrado, em homenagem a Mikhail, um gesto simbólico para honrar a contribuição de um dos líderes da União Soviética e para reforçar a presença e influência soviética na região. Sua área foi repovoada por russos e outras etnias soviéticas. Em 1991, após o colapso da União Soviética, Kaliningrado passa a fazer parte do território russo, sendo assim um enclave russo situado entre a Polônia e a Lituânia.

Em 1735, Euler toma conhecimento sobre os problemas das pontes de Koningsberg e inicia sua investigação sobre o mesmo. Em 1736 ele faz uma publicação de um artigo intitulado de “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis” (“solução de um problema relacionado a geometria da posição”), o qual é considerado um dos primeiros problemas na área de teoria dos grafos, embora ainda fosse uma teoria desconhecida na época de Euler. A teoria dos grafos foi formalizada pela primeira vez apenas em 1892, quando W. W. Rouse Bali (1850 - 1925), no seu trabalho “Recreações e problemas matemáticos”, estabeleceu a ligação entre

o resultado de Euler sobre as pontes de Königsberg e problemas em grafos.

O problema questionava: É possível partir de uma das 4 áreas de terra firme, passar pelas 7 pontes retornando para a área inicial?

Para discutir a solução do problema das pontes de Königsberg, precisamos introduzir alguns conceitos da teoria dos grafos.

Embora seja um quebra-cabeça histórico e ainda hoje muito interessante para apresentar em sala de aula, nosso objetivo principal neste capítulo é usar a linguagem da teoria de grafos para expor uma nova demonstração da fórmula de Euler para poliedros. Esta nova abordagem permite ao professor de Matemática apresentar algumas aplicações interessantes da Geometria de Poliedros, e também da própria teoria dos grafos, que exigiriam mais pré-requisitos caso outra ferramenta fosse utilizada.

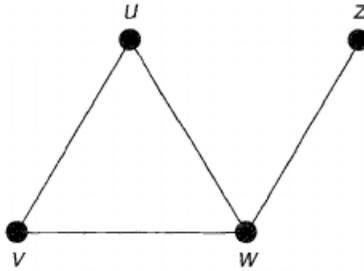
## 2.2 Definições preliminares

Nesta seção, introduzimos definições, exemplos e notações preliminares da teoria dos grafos. Este é um ramo da matemática com aplicações em diversas áreas de conhecimento. Apresentaremos os conceitos que serão necessários para nossas aplicações.

**Definição 2.1.** *Um grafo simples  $G$  consiste em um conjunto finito não vazio  $V(G)$  de elementos chamados vértices e um conjunto finito  $A(G)$  de pares não ordenados distintos de elementos distintos de  $V(G)$  chamados arestas. Chamamos  $V(G)$  de conjunto de vértices e  $A(G)$  de conjunto de arestas de  $G$ . Uma aresta  $\{v, w\}$  que une os vértices  $v$  e  $w$  será denotada por  $vw$ . Por exemplo, a figura 2.2 representa o grafo simples  $G$  cujo conjunto de vértices  $V(G)$  é  $\{w, v, w, z\}$ , e cujo o conjunto de arestas  $A(G)$  consiste nas arestas  $uv, uw, vw$  e  $wz$ .*

Observe que em qualquer grafo simples existe no máximo uma aresta unindo um determinado par de vértices. No entanto, muitos resultados válidos para grafos simples podem ser generalizados para objetos mais gerais, nos quais dois vértices podem ter várias arestas

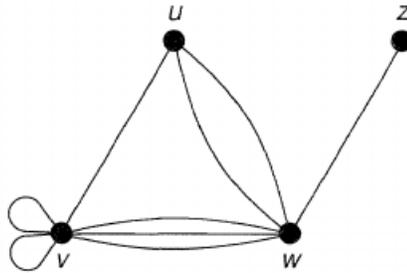
Figura 2.2: Grafo simples



Fonte: [21]

unindo-os. Adicionalmente, podemos remover a restrição de que uma aresta une dois vértices distintos e permitir laços - arestas que unem um vértice a si mesmo. O objeto resultante, no qual laços e múltiplas arestas são permitidos, é chamado de grafo (ver figura 2.3). Assim cada grafo simples é um grafo, mas nem todo grafo é um grafo simples.

Figura 2.3: Grafo

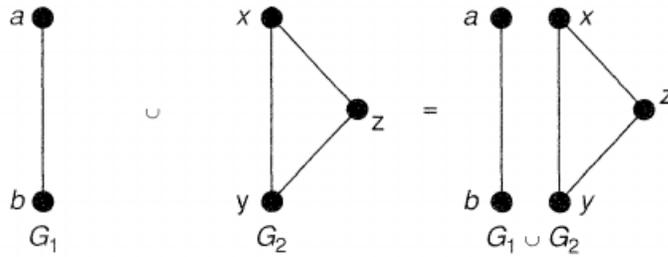


Fonte: [21]

Dessa forma, um grafo  $G$  consiste de um conjunto finito não vazio  $V(G)$  de elementos chamados vértices, e uma família finita  $A(G)$  de pares não ordenados de elementos (não necessariamente distintos) de  $V(G)$  chamados arestas. Chamamos  $V(G)$  de conjunto de vértices e  $A(G)$  de família de arestas de  $G$ . Uma aresta  $\{v, w\}$  que une os vértices  $v$  e  $w$ , novamente será denotada por  $vw$ . Na figura 2.3,  $V(G)$  é o conjunto  $\{u, v, w, z\}$  e  $A(G)$  consiste nas arestas  $uv, vv, vv, vw, vw, vw, uw, uw$  e  $wz$ . Observe que cada laço  $vv$  une o vértice  $v$  a si mesmo. Escrevemos  $G = (V(G), A(G))$ .

Sejam  $G_1 = (V(G_1), A(G_1))$  e  $G_2 = (V(G_2), A(G_2))$  grafos tais que os conjuntos  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$  são disjuntos, então a união  $G = G_1 \cup G_2$  é o grafo com conjunto de vértices  $V(G_1) \cup V(G_2)$  e família de arestas  $A(G_1) \cup A(G_2)$ . (Ver figura 2.4).

Figura 2.4: A união de grafos é um grafo

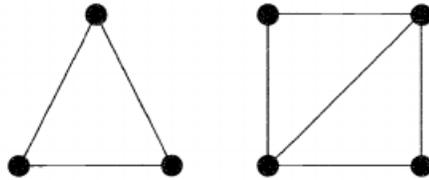


Fonte: [21]

**Definição 2.2.** Dizemos que um grafo é conexo se ele não pode ser expresso como a união de dois grafos. Caso contrário, dizemos que o grafo é desconexo.

Se um grafo  $G$  é desconexo, ele pode ser expresso como uma união de grafos conexos, cada um dos quais é chamado de componente conexa de  $G$ . Veja figura 2.5 para um exemplo de um grafo desconexo.

Figura 2.5: Grafo desconexo com duas componentes conexas



Fonte: [21]

**Definição 2.3.** 1. 1. Dizemos que dois vértices  $v$  e  $w$  de um grafo  $G$  são adjacentes se existe uma aresta  $vw$  conectando-os. Nesse caso, dizemos que a aresta  $vw$  é incidente nos vértices  $v$  e  $w$ . Ver figura 2.6.

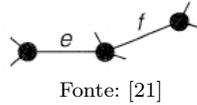
Figura 2.6: Vértices adjacentes



Fonte: [21]

2. 2. Dizemos que duas arestas distintas  $e$  e  $f$  de um grafo  $G$  são adjacentes se elas possuem um vértice em comum. Ver figura 2.7.

Figura 2.7: Arestas adjacentes



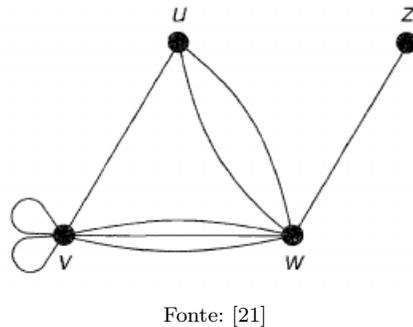
**Definição 2.4.** 1. O grau de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é o número de arestas incidentes em  $v$ . Denotamos o grau de  $v$  por  $\text{grau}(v)$ .

2. O grau de um laço  $v$  é 2.

3. Um vértice isolado tem grau 0.

**Exemplo 2.1.** No grafo da figura 2.8, temos que  $\text{grau}(u) = 3$ ,  $\text{grau}(v) = 8$ ,  $\text{grau}(w) = 6$  e  $\text{grau}(z) = 1$ .

Figura 2.8: Grau de um vértice

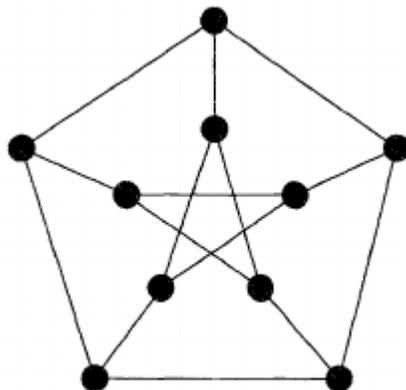


Em um grafo qualquer, a soma dos graus de todos os vértices é um número par: o dobro do número de arestas, visto que cada aresta incide em exatamente dois vértices. Esse resultado é conhecido como o lema do aperto de mão e é atribuído a Euler. Uma consequência imediata do lema do aperto de mão é que em um dado grafo  $G$ , o número de vértices de grau ímpar é par.

**Definição 2.5.** Um grafo em que cada vértice tem o mesmo grau é chamado de grafo regular. Se cada vértice tem grau  $r$ , o grafo é dito ser regular de grau  $r$  ou  $r$ -regular.

**Exemplo 2.2.** Os grafos regulares de grau 3 são chamados de grafos cúbicos. Um exemplo de grafo cúbico é o grafo de Petersen, mostrado na figura 2.9

Figura 2.9: Grafo de Petersen



Fonte: [21]

**Definição 2.6.** 1. Dado um grafo  $G$ , um passeio em  $G$  é uma sequência de arestas da forma  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$ , também denotada por  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ , onde duas arestas consecutivas são adjacentes ou idênticas. Note que um passeio determina uma sequência de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_m$ . Chamamos  $v_0$  de vértice inicial e  $v_m$  de vértice final do passeio. Dizemos ainda que temos um passeio de  $v_0$  a  $v_m$ . O comprimento de um passeio é o seu número de arestas.

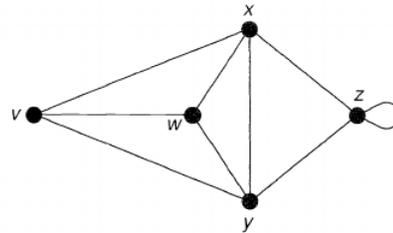
2. Um passeio em que todas as arestas são distintas é uma trilha.
3. Um caminho é uma trilha onde todos os vértices (exceto possivelmente  $v_0 = v_m$ ) são distintos.
4. Um caminho ou uma trilha é fechado, se  $v_0 = v_m$ .
5. Um ciclo é um caminho fechado contendo pelo menos uma aresta. Observe que um laço ou um par de arestas múltiplas é um ciclo.

**Exemplo 2.3.** No grafo da figura 2.10, temos que  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x$  é uma trilha,  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$  é um caminho,  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$  é uma trilha fechada, e  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$  é um ciclo. Um ciclo de comprimento 3 é um triângulo.

**Definição 2.7.** 1. Uma floresta é um grafo que não contém ciclos.

2. Uma árvore é uma floresta conexa.

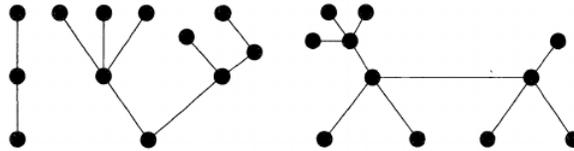
Figura 2.10: Passeios, trilhas, caminhos e ciclos



Fonte: [21]

**Exemplo 2.4.** Na figura 2.11 temos um exemplo de uma floresta com três componentes conexas, cada uma das quais é uma árvore.

Figura 2.11: Floresta e árvores



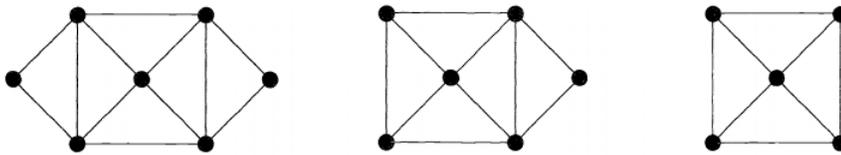
Fonte: [21]

## 2.3 Grafos Eulerianos

Nesta seção, apresentamos a solução do problema das pontes de Konisberg. Consideramos esse exemplo uma motivação à introdução da teoria dos grafos aos alunos do ensino médio.

**Definição 2.8.** Um grafo conexo  $G$  é Euleriano se existe uma trilha fechada contendo todas as arestas de  $G$ . Tal trilha é chamada de trilha Euleriana. Observe que esta definição exige que cada aresta seja percorrida uma vez e apenas uma vez. Um grafo não-Euleriano  $G$  é semi-Euleriano se existir uma trilha contendo cada aresta de  $G$ . A figura 2.12 mostra um grafo Euleriano, um grafo semi-Euleriano e um grafo não-Euleriano, respectivamente.

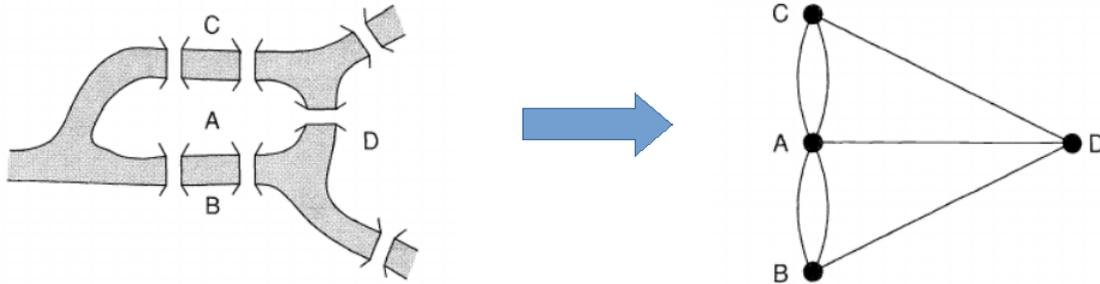
Figura 2.12: Grafo Euleriano, Grafo semi-Euleriano e Grafo não-Euleriano



Fonte: [21]

Retornamos agora ao problema das sete pontes de Konisberg, que questiona se é possível cruzar cada uma das sete pontes de Konisberg exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida. Traduzindo para a linguagem de grafos, este problema é equivalente à pergunta: O grafo de Konisberg (ver figura 2.13) possui uma trilha Euleriana?

Figura 2.13: O Grafo de Konisberg



Fonte: [21]

Somos então conduzidos ao questionamento: sob quais condições um grafo é Euleriano? Para responder a esta questão, e conseqüentemente ao problema das pontes de Konisberg, apresentamos os resultados abaixo.

**Lema 2.1.** *Se  $G$  é um grafo no qual o grau de cada vértice é pelo menos 2, então  $G$  contém um ciclo.*

*Demonstração.* Se  $G$  possui um laço ou arestas múltiplas, então o resultado é direto. Podemos então supor que  $G$  é um grafo simples. Seja  $v$  um vértice qualquer de  $G$ . Construímos um passeio  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$  indutivamente. Escolhemos  $v_1$  como qualquer vértice adjacente a  $v$ , e para  $i > 1$ ,  $v_{i+1}$  adjacente a  $v_i$  mas não adjacente a  $v_{i-1}$ , a existência desse vértice é garantida pela nossa hipótese. Como  $G$  possui um número finito de vértices, eventualmente escolheremos um vértice que já foi escolhido antes. Se  $v_k$  é o primeiro vértice com esta propriedade, então a parte do passeio que fica entre as duas ocorrências de  $v_k$  é um ciclo.  $\square$

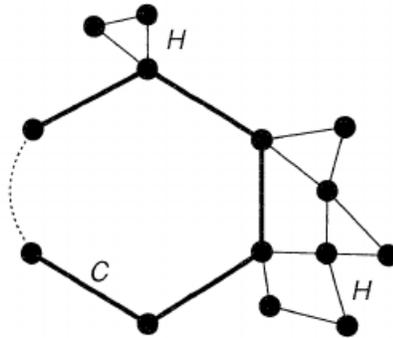
**Teorema 2.1.** *(Euler 1736) Um grafo conexo  $G$  é Euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de  $G$  é par.*

*Demonstração.* Suponha que  $G$  é Euleriano. Seja  $P$  uma trilha Euleriana de  $G$ . Sempre que

$P$  passa por um vértice, há uma contribuição de 2 para o grau desse vértice. Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em  $P$ , cada vértice tem grau par.

Suponhamos agora que o grau de cada vértice é par. Faremos a prova por indução sobre o número de arestas de  $G$ . Como  $G$  é conexo, cada vértice tem grau pelo menos 2 e assim, pelo Lema 2.1,  $G$  contém um ciclo  $C$ . Se  $C$  contém todas as arestas de  $G$ , a prova está completa. Caso contrário, removemos de  $G$  as arestas de  $C$  para formar um novo, possivelmente desconexo, grafo  $H$  com menos arestas que  $G$  e em que cada vértice ainda tem grau par. Por hipótese de indução, cada componente conexa de  $H$  tem uma trilha euleriana. Como cada componente de  $H$  tem pelo menos um vértice em comum com  $C$ , por conexidade, obtemos uma trilha Euleriana de  $G$  seguindo as arestas de  $C$  até que um vértice não isolado de  $H$  seja alcançado, traçando a trilha Euleriana da componente de  $H$  que contém aquele vértice, e então continuando ao longo das arestas de  $C$  até chegarmos a um vértice pertencente a outra componente de  $H$ , e assim por diante. Todo o processo termina quando retornamos ao vértice inicial (ver figura 2.14).

Figura 2.14: Teorema 2.1



Fonte: [21]

□

**Corolário 2.1.** *O grafo de Konisberg não possui uma trilha Euleriana.*

*Demonstração.* Como o grafo de Konisberg tem quatro vértices de grau ímpar, pelo Teorema 2.1, o grafo de Konisberg não possui uma trilha Euleriana. □

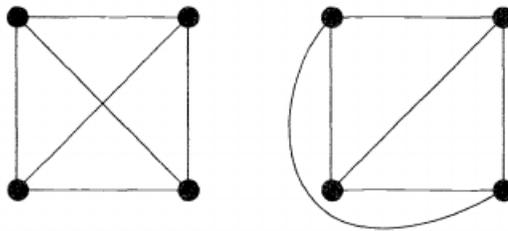
## 2.4 A Fórmula de Euler para Grafos

Nesta seção, apresentamos a fórmula de Euler para Poliedros usando a linguagem da teoria de grafos.

**Definição 2.9.** *Um grafo planar é um grafo que pode ser desenhado no plano de forma que duas arestas quaisquer não tenham interseções geométricas, exceto no vértice para a qual ambas são incidentes. Um tal desenho de um grafo planar é chamado de desenho planar, o qual chamaremos simplesmente de grafo planar.*

**Exemplo 2.5.** *Na figura 2.15 temos um grafo não planar à esquerda e um grafo planar à direita.*

Figura 2.15: Grafo não planar à esquerda e grafo planar à direita



Fonte: [21]

Se  $G$  é um grafo planar, então qualquer desenho planar de  $G$  divide o plano em um conjunto de regiões, chamadas faces. Chamamos a área ilimitada fora do grafo de face infinita. Por exemplo, na figura 2.16 o grafo planar tem quatro faces, sendo que  $f_4$  é a face infinita.

Estamos prontos para enunciar e provar a fórmula de Euler para grafos.

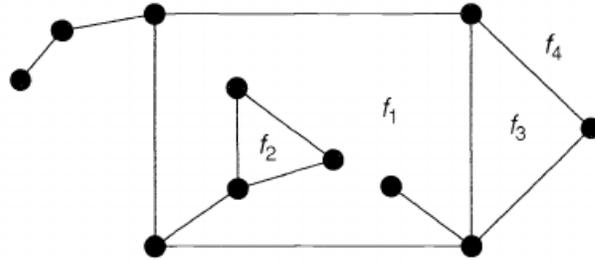
**Teorema 2.2.** *Seja  $G$  um grafo planar, conexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Então*

$$V - A + F = 2.$$

*Demonstração.* A prova é por indução sobre o número de arestas  $A$  de  $G$ .

Se  $A = 0$ , como  $G$  é conexo, temos que  $V = 1$  e  $F = 1$  (face infinita). Dessa forma,  $V - A + F = 2$ .

Figura 2.16: Grafo planar e suas faces



Fonte: [21]

Agora supomos que o teorema é válido para todos os grafos conexos planos com no máximo  $A - 1$  arestas.

Seja  $G$  um grafo conexo plano com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces. Temos dois casos a analisar.

**Caso 1.**  $G$  é uma árvore.

Se  $G$  é uma árvore, como  $G$  não contém nenhum ciclo, podemos sempre encontrar pelo menos um vértice de grau 1 em  $G$ . Removendo este vértice e a aresta adjacente a ele, obtemos um grafo conexo plano  $G'$  com  $A - 1$  arestas e  $V - 1$  vértices. Por hipótese de indução,  $(V - 1) - (A - 1) + F = 2$ , donde  $V - A + F = 2$ .

**Caso 2.**  $G$  não é uma árvore.

Se  $G$  não é uma árvore, seja  $e$  uma aresta em algum ciclo de  $G$ . Então  $G - \{e\}$  é um grafo conexo plano com  $V$  vértices,  $A - 1$  arestas e  $F - 1$  faces. Por hipótese de indução obtemos  $V - (A - 1) + (F - 1) = 2$ , donde

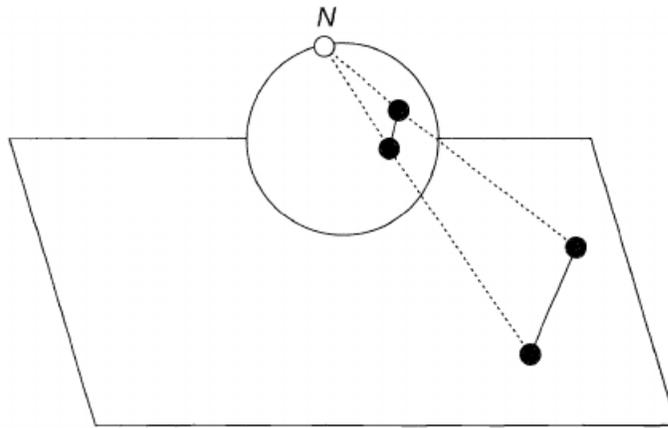
$$V - A + F = 2.$$

Como queríamos demonstrar. □

Um grafo poliédrico é um tipo de grafo (planar) que representa as arestas e os vértices de um poliedro convexo tridimensional. Ele é construído mapeando cada vértice do poliedro, usando a projeção estereográfica, a um ponto do plano e cada aresta a um segmento de reta conectando esses pontos. Com essa identificação, concluímos que a fórmula de Euler para

grafos planos é equivalente à fórmula de Euler para poliedros convexos.

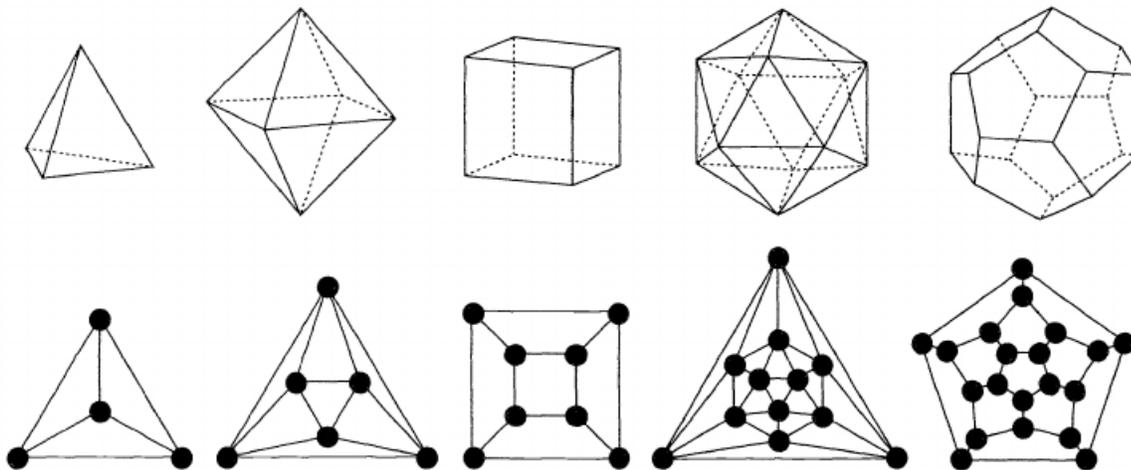
Figura 2.17: Identificação dos vértices e arestas de um poliedro com os vértices e arestas do seu grafo poliédrico



Fonte: [21]

**Exemplo 2.6.** *Dentre os grafos poliédricos, destacamos os grafos de Platão, formados pelos vértices e arestas de cinco poliedros regulares (veja mais detalhes no próximo capítulo), também conhecidos como sólidos de Platão: o tetraedro, o octaedro, o hexaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Veja figura 2.18*

Figura 2.18: Grafos de Platão



Fonte: [21]

# Capítulo 3

## Aplicações

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações dos conteúdos abordados nos capítulos anteriores que podem ser exploradas nas aulas de Geometria de Poliedros do ensino médio.

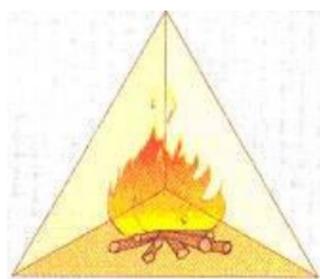
### 3.1 Poliedros Regulares

Por volta de 360 a.c Platão escreveu sobre os cinco poliedros regulares - poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas - em um dos seus diálogos denominado de Timeu. Nesse trabalho ele discute a natureza do universo e introduz a ideia dos cinco sólidos regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), associando cada um deles aos elementos fundamentais da natureza: terra, água, ar, fogo e universo. Esses sólidos ficaram conhecidos como sólidos de Platão. Porém, sabe-se que apesar de não haver registros, os Pitagóricos já conheciam e estudavam o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, enquanto o octaedro e o icosaedro eram estudados por Teeteto.

Em Timeu, Platão escreveu: “Uma vez formados quatro ângulos desse tipo, está composta a primeira figura sólida (tetraedro regular), que divide um todo esférico em partes iguais e semelhantes. A segunda figura é formada a partir dos mesmos triângulos, combinando-se oito triângulos equiláteros que produzem um só ângulo sólido a partir de quatro ângulos planos; e quando se geram seis ângulos deste tipo, o segundo corpo (octaedro regular) está deste

modo terminado. A terceira figura é constituída pela conjunção de cento e vinte triângulos elementares e de doze ângulos sólidos, cada um dos quais envolvido por cinco triângulos planos equiláteros, e é gerada com vinte bases que são triângulos equiláteros (icosaedro regular). Engendrados estes sólidos, o outro triângulo elementar foi deixado de parte, e o triângulo isósceles engendrou a natureza do quarto, constituindo quatro triângulos que coincidiram no centro os seus ângulos rectos, formando um único quadrilátero equilátero. Quando foram conjugados seis deste tipo, produziu oito ângulos sólidos, sendo cada um deles constituído pela harmonia de três ângulos planos rectos; a figura do corpo constituído foi a do cubo, que tem seis faces planas, quadrangulares e equilaterais (hexaedro regular). Visto que havia ainda uma quinta combinação (dodecaedro regular), o deus utilizou-a para pintar animais no universo (...) Atribuamos à terra a forma cúbica, pois a terra, dos quatro elementos, é o que tem mais dificuldade em mover-se e, dos corpos, o mais adequado para ser moldado – inevitavelmente e com certeza que foi gerado deste modo para que tivesse as bases mais estáveis. (...) Por isso, manteremos a salvo o discurso verosímil se atribuirmos esta forma à terra, e, das que restam, a forma mais difícil de movimentar à água, a que se movimenta melhor ao fogo e a intermédia ao ar; o corpo mais pequeno ao fogo, o maior à água, e o médio ao ar; o que é mais agudo ao fogo, o segundo mais agudo ao ar e o terceiro à água. Considerando todos estes corpos, aquele que tem as bases mais pequenas será, por natureza, necessariamente o que melhor se movimenta, pois de todos eles é absolutamente o mais pungente e mais agudo e ainda o mais leve pelo facto de ser constituído por um menor número de partes iguais. O segundo corpo deverá vir em segundo lugar de acordo com estes pressupostos, e o terceiro em terceiro. Portanto, de acordo com o raciocínio correto e verosímil, estabeleçamos que a figura sólida da pirâmide é o elemento que gerou o fogo e a sua semente; digamos que, na ordem de geração, o ar é o segundo e a água o terceiro”. (Platão, 2011, pp. 143-146)

Figura 3.1: Tetraedro: Elemento fogo



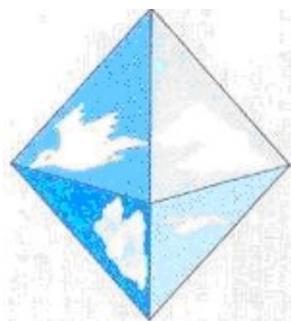
Fonte: [16]

Figura 3.2: Hexaedro: Elemento terra



Fonte: [16]

Figura 3.3: Octaedro: Elemento ar



Fonte: [16]

Figura 3.4: Dodecaedro: Elemento Universo



Fonte: [16]

Platão, em *Timeu* [15], utiliza os poliedros para explicar princípios filosóficos. Essa associação reflete sua visão de que esses sólidos regulares são formas fundamentais que compõem a estrutura do universo. Posteriormente, Euclides escreveu o livro “*Os Elementos*” onde dedica o último capítulo ao estudo dos poliedros de maneira sistemática e rigorosa na Geometria Euclidiana, definindo-os, descrevendo suas propriedades e estabelecendo resultados matemáticos sobre eles. Nesse livro, Euclides apresenta a prova, mesmo antes de Euler, de que existem apenas cinco poliedros regulares.

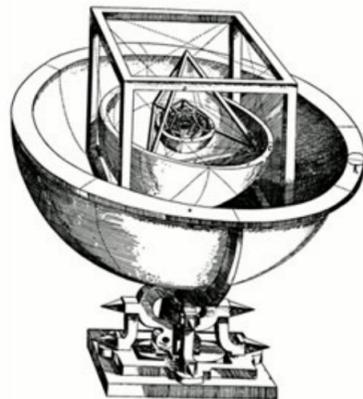
Figura 3.5: Icosaedro: Elemento água



Fonte: [16]

Kepler (1571 – 1630), em 1596 concebeu um modelo do Sistema Solar explorando os poliedros platônicos. Esse modelo consistia em esferas concêntricas, separadas por poliedros regulares. Kepler pensou que os dois números estavam conectados, isto é, que a razão pela qual havia somente seis planetas era porque existiam somente cinco sólidos regulares. Em 1596, em sua obra “Mysterium Cosmographicum”, Kepler estabeleceu um modelo do sistema solar onde os cinco sólidos platônicos eram colocados um dentro do outro, separados por uma série de esferas inscritas, na seguinte ordem: primeiro o octaedro seguindo-se o icosaedro, o dodecaedro, o tetraedro e, finalmente, o cubo. Ele conjecturou que as razões entre os raios das órbitas dos planetas coincidiam com as razões entre os raios das esferas. Seu modelo, contudo, não era sustentado pelos dados experimentais dos astrônomos Tycho Brahe (dinamarquês, 1546 – 1601) e Nicolau Copérnico (polonês, 1473 – 1543).

Figura 3.6: Modelo do Sistema Solar segundo Kepler



Fonte: [13]

Percebe-se a importância do fato de que existem apenas cinco poliedros regulares para

o desenvolvimento de teorias de compreensão do universo. Embora já fosse um resultado amplamente conhecido antes de Euler, sua fórmula para poliedros simplifica bastante a demonstração desse fato, podendo inclusive ser apresentada, sem maiores pré-requisitos, a estudantes de ensino médio.

Apresentamos agora a prova da existência de apenas cinco poliedros regulares convexos como uma consequência imediata da fórmula de Euler.

**Teorema 3.1.** *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

*Demonstração.* Dado um poliedro regular  $P$ , seguimos com as notações:

$F$  : número de faces.

$A$  : número de arestas.

$V$  : número de vértices.

Como  $P$  é um poliedro regular, o número de arestas em cada face é uma constante, a qual denotaremos por  $n$ . O mesmo ocorre com o número de arestas que são incidentes em cada vértice, denotaremos este número por  $m$ . Em particular, como cada face de  $P$  é um polígono regular, devemos ter  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$ .

Por definição, cada aresta é aresta de exatamente duas faces. Dessa forma,

$$n \cdot F = 2A.$$

Como cada aresta é adjacente a exatamente dois vértices, temos

$$m \cdot V = 2A.$$

Portanto,

$$F = \frac{2A}{n} \quad \text{e} \quad V = \frac{2A}{m}.$$

Substituindo estas equações na fórmula de Euler  $V - A + F = 2$ , obtemos

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

ou

$$A\left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n}\right) = 2,$$

donde

$$\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} > 0.$$

Como  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ , obtemos:

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Como  $m \in \mathbb{Z}$  e  $3 \leq m < 6$ , concluimos que  $m = 3, 4$  ou  $5$ .

De forma inteiramente análoga, obtemos  $n = 3, 4$  ou  $5$ .

Se  $m = 3$ , da expressão  $\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , concluimos que  $n = 3, 4$  ou  $5$ .

Se  $m = 4$ , da expressão  $\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , concluimos que  $n = 3$ .

Se  $m = 5$ , da expressão  $\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , concluimos que  $n = 3$ .

Coletando todas as possibilidades de valores para  $m$  e  $n$ , e lembrando que

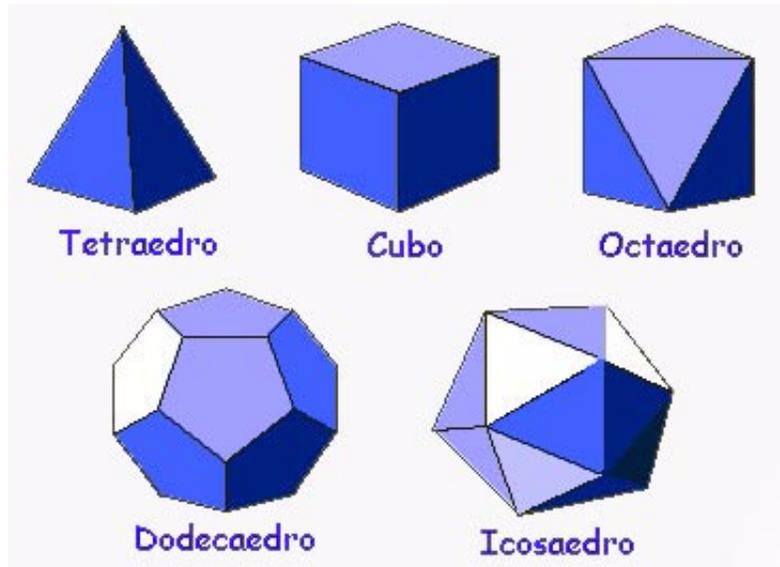
$$A = \frac{2mn}{2n - mn + 2m}, V = \frac{2A}{m} \text{ e } F = \frac{2A}{n},$$

obtemos a tabela de todos os poliedros regulares:

m	n	V	A	F	Poliedro
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Cubo
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

□

Figura 3.7: Os Cinco Poliedros Regulares



Fonte: [8]

## 3.2 Três casas e três serviços públicos

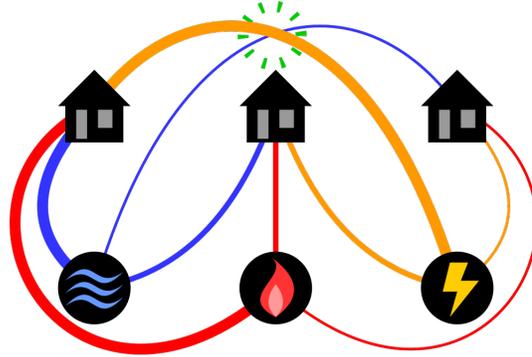
Nesta seção analisamos um problema matemático clássico conhecido como “O problema das três casas e três serviços públicos”. Ao apresentá-lo no início do século *XX*, Henry Dudeney escreveu que já era um problema antigo. Abaixo enunciamos o problema e apresentamos uma solução usando apenas os recursos apresentados neste trabalho, com o intuito de facilitar a compreensão do mesmo por estudantes de ensino médio.

**Exemplo 3.1.** *Considere três casas  $A$ ,  $B$  e  $C$  e três serviços públicos: água, gás, e eletricidade, todos provenientes de pontos diferentes. É possível conectar todos os serviços para todas as casas sem que nenhuma das linhas se cruze?*

*Demonstração.* Provaremos, por contradição, que é impossível conectar todos os serviços para todas as casas sem que nenhuma das linhas se cruze.

Suponha que todos os requisitos do problema são atendidos. Neste caso, ao conectar os três serviços às três casas, sem intersecção de arestas, construímos um grafo planar  $G$ . Note que  $G$  é conexo, possui  $V = 6$  vértices (3 casas e 3 serviços) e  $A = 9$  arestas (3 arestas de cada casa para cada serviço). Logo, pela fórmula de Euler,  $V - A + F = 2$ , obtemos  $F = 5$ .

Figura 3.8: Três casas e três serviços públicos



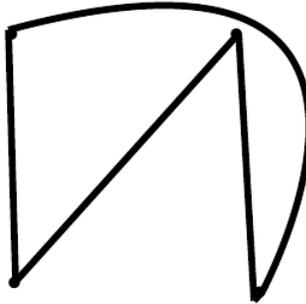
Fonte: [19]

Ainda por contradição, observamos que o número mínimo de arestas limitando cada face é 4 (ver figura 3.9). Portanto,

$$A \geq \frac{4F}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Note que dividimos  $4F$  por 2 porque cada aresta do grafo é parte de exatamente duas faces.

Figura 3.9: Três casas e três serviços públicos



Fonte: Autoria própria

Como vimos anteriormente,  $G$  tem 9 arestas. Logo,  $A \geq 10$  é uma contradição e, dessa forma,  $G$  não é planar. Portanto, é impossível conectar todos os serviços para todas as casas sem que nenhuma das linhas se cruze.  $\square$

### 3.3 Problemas adicionais

**Exemplo 3.2.** *Existe um poliedro com um número ímpar de faces, cada um das quais possui um número ímpar de arestas?*

*Demonstração.* Não existe. Suponhamos, por contradição, que existe um poliedro  $P$  satisfazendo o problema.

Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_k$  as faces de  $P$ , onde  $k$  é ímpar. Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  o número de arestas de  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , respectivamente e  $A$  o número de arestas de  $P$ . Temos que

$$2A = \sum_{i=1}^k A_i,$$

o que é uma contradição, pois o lado esquerdo da igualdade é um número par e o lado direito da igualdade é um número ímpar, visto que é a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares.  $\square$

**Exemplo 3.3.** *Prove que em todo poliedro existe pelo menos um par de faces com o mesmo número de lados.*

*Demonstração.* Antes de provarmos o resultado, enunciamos o Princípio da Casa dos Pombos:

*Se tivermos  $n + 1$  pombos para serem colocados em  $n$  casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos.*

Seja agora  $n$  o maior número de lados que uma face pode ter em um determinado poliedro  $P$ . Então cada face de  $P$  tem entre 3 e  $n$  lados. Observe que  $P$  deve ter no mínimo  $n + 1$  faces, visto que duas faces dividem no máximo um lado e cada lado da face com  $n$  lados está conectada a alguma outra face. Portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe um par de faces com o mesmo número de lados.  $\square$

**Exemplo 3.4.** *Prove que existe um ciclo de comprimento par em qualquer poliedro.*

*Demonstração.* Se o poliedro tem uma face com um número par de lados, esta face é um ciclo de comprimento par. Caso contrário, todas as faces do poliedro têm um número ímpar

de lados. Escolhemos duas faces adjacentes com  $f_1$  e  $f_2$  números de lados. Note que  $f_1 + f_2 + 2$  é um número par. Seja  $C$  o ciclo que é formado pelas arestas de ambas as faces, com exceção da aresta comum. Observe que não há repetições de arestas e nem de vértices em  $C$ , porque as duas faces possuem apenas uma aresta em comum. O comprimento de  $C$  é o número par  $f_1 + f_2 - 2$ .  $\square$

**Exemplo 3.5.** *Prove que não existe um poliedro convexo cujas faces são todas hexagonais.*

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que exista um poliedro  $P$  cujas faces são todas hexágonos. Como toda aresta limita duas faces, e existem seis arestas em cada face, temos:

$$2A = 6F \Rightarrow A = 3F.$$

Pela fórmula de Euler, obtemos

$$V = 2F + 2.$$

Como cada vértice encontra no mínimo três faces, e cada face hexagonal tem exatamente seis vértices, concluímos que

$$6F \geq 3V \Rightarrow 2F \geq V \Rightarrow 2F \geq 2F + 2,$$

o que é uma contradição.  $\square$

# Capítulo 4

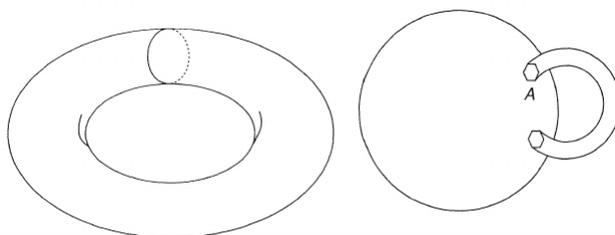
## Generalização

### 4.1 Gênero

No capítulo 2 consideramos grafos planos, ou seja, grafos desenhados no plano ou (equivalentemente) na superfície de uma esfera. Mais geralmente, grafos podem ser desenhados em outras superfícies, como por exemplo, o toro.

O toro pode ser pensado como uma esfera com uma “alça” (ver figura 4.1).

Figura 4.1: Toro



Fonte: [21]

Dizemos que uma superfície é de gênero  $g$  se ela for homeomorfa a uma esfera com  $g$  “alças”. Assim, o gênero de uma esfera é 0 e o gênero de um toro é 1.

Um grafo que pode ser desenhado sem cruzamentos em uma superfície do gênero  $g$ , mas não em um de gênero  $g - 1$ , é um grafo de gênero  $g$ .

A fórmula de Euler pode ser generalizada para grafos de gênero  $g$ .

**Teorema 4.1.** *Seja  $G$  um grafo conexo de gênero  $g$ , com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces (definidas de maneira óbvia). Então  $V - A + F = 2 - 2g$ .*

## 4.2 Característica de Euler

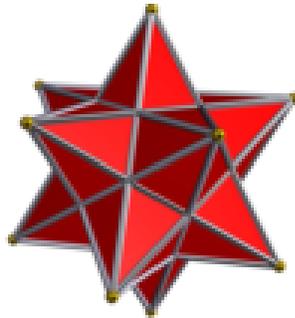
A característica de Euler de um poliedro  $P$  é definida como a soma alternada

$$\chi(P) = V - A + F.$$

No caso de um poliedro convexo  $P$ , a fórmula de Euler nos diz que  $\chi(P) = 2$ .

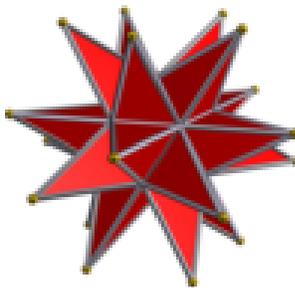
Se o poliedro não é convexo, a característica de Euler pode variar. Por exemplo, o pequeno dodecaedro estrelado  $\mathcal{PD}$  (ver figura 4.2) tem 12 vértices, 30 arestas e 12 faces, donde  $\chi(\mathcal{D}) = -6$ . Já o grande dodecaedro estrelado  $\mathcal{GD}$  (ver figura 4.3) tem 12 vértices, 30 arestas e 12 faces, donde  $\chi(\mathcal{D}) = 2$ .

Figura 4.2: Pequeno dodecaedro estrelado



Fonte: [5]

Figura 4.3: Grande dodecaedro estrelado

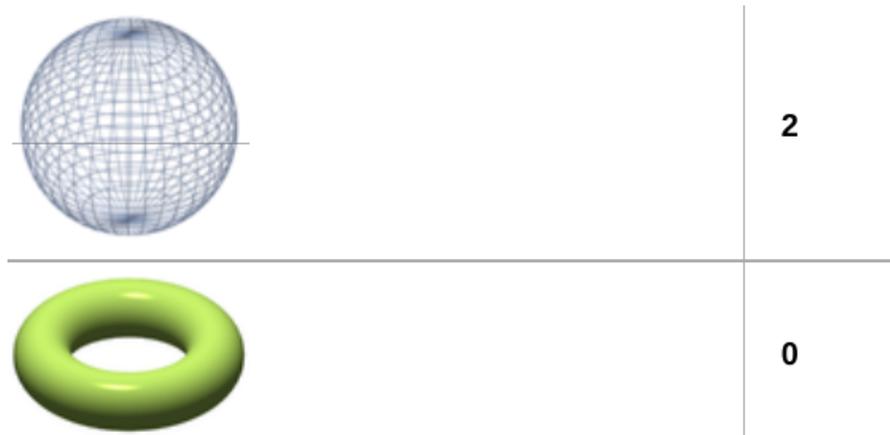


Fonte: [5]

Na topologia algébrica, a característica de Euler é um invariante topológico, ou seja, um número que descreve a “forma” de um espaço topológico. Desta maneira, o pequeno dodecaedro não pode ter a forma de nenhum poliedro convexo.

A característica de Euler pode ser definida para superfícies (orientáveis compactas) de gênero  $g$  encontrando uma “poligonização” da superfície. Definindo  $V$ ,  $A$  e  $F$  de maneiras óbvias, para uma superfície  $S$ , a característica de Euler é dada por  $\chi(S) = V - A + F = 2 - 2g$ . Dessa forma, a característica de Euler da esfera  $\mathbb{S}^2$ , onde  $g = 0$ , é  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$  e a característica de Euler do toro  $\mathbb{T}$ , onde  $g = 1$ , é  $\chi(\mathbb{T}) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$ . Isso mostra que esses espaços são “diferentes” do ponto de vista da topologia.

Figura 4.4: Característica de Euler da Esfera e do Toro



Fonte: [5]

# Bibliografia

- [1] ADRIEN-MARIE LEGENDRE. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Adrien-Marie\\_Legendre&oldid=68451914](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Adrien-Marie_Legendre&oldid=68451914). Acesso em: 17 ago. 2024;
- [2] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Augustin-Louis\\_Cauchy&oldid=67973472](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Augustin-Louis_Cauchy&oldid=67973472). Acesso em: 19 mai. 2024;
- [3] BRASSELET, J.P., THUY, N.T.B., An Elementary Proof of Euler's Formula using Cauchy's Method: Topology and its Applications, Volume 293, 2021;
- [4] EUCLIDES, Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009;
- [5] EULER CHARACTERISTIC. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Acesso em 17 de junho de 2024. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler\\_characteristic&oldid=1229570874](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_characteristic&oldid=1229570874);
- [6] EVES, H., Introdução à história da matemática. Campinas: Editora Unicamp, 2008;
- [7] MUNIZ NETO, A.C., Geometria: Coleção PROFMAT, SBM, 2012;
- [8] GUZMAN, J.H., NEUROCHISPAS, aprende intuitivamente. Disponível em <https://br.neurochispas.com>;
- [9] HEDIN, E., JONSSON, A., WESTERGREN, S., XIE, R., Euler's theorem for polyhedra: Katedralskolan, 2022;
- [10] KIRK, A., Euler's Polyhedron Formula: Millennium Mathematics Project, University of Cambridge, 2007;

- [11] LAKATOS, I., Proofs and Refutations: Cambridge University Press, 1976;
- [12] LEONHARD EULER. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard\\_Euler&oldid=66622672](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard_Euler&oldid=66622672). Acesso em: 18 de setembro de 2023;
- [13] OHANNES Kepler.[*S.l.*],[*S.d.*]. Disponível em: <https://www.fisica.net/giovane/astro/Modulo1/kepler.html>;
- [14] O Planeta de Euler. [*S.l.*], 2007. Disponível em: <https://dererumundi.blogspot.com/2007/04/o-planeta-de-euler.html>. Acesso em: 8 jul. 2024;
- [15] TIMEU-CRÍTIAS. Tradução do grego, introdução, notas e índices: Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, 2011;
- [16] RELAÇÃO com a natureza. [*S.l.*], 2008. Disponível em: <http://poliedrosdeplatao.pbworks.com/w/page/17518433/RelaC3A7C3A3o20com20a20Natureza>. Acesso em: 14 jun. 2024;
- [17] RICHENSON, D.S., Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology: Princeton University Press, 2008;
- [18] THE TRUTH about Konigsberg. THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, [*S.l.*], p. 198-207, 3 de maio 2004. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07468342.2004.11922073>. Acesso em: 6 maio 2024;
- [19] THREE UTILITIES PROBLEM. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Acesso em 28 de abril de 2024. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Three\\_utilities\\_problem&oldid=1221149117](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Three_utilities_problem&oldid=1221149117);
- [20] TOROIDAL POLYHEDRON. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Acesso em 30 de abril de 2024. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Toroidal\\_polyhedron&oldid=1221455703](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Toroidal_polyhedron&oldid=1221455703)
- [21] WILSON, R.J., Introduction to Graph Theory: Prentice Hall, fourth edition, 1998.
- [22] PORTAL DA OBMEP, GRAFOS: uma introdução. [*S.l.*], 10 de maio de 2024. Disponível em <https://portaldaoimpb.br/index.php/modulo/ver?modulo=84>.

## Capítulo 5

### Anexo - Produto Educacional

Com base nos conteúdos expostos nesta dissertação, apresentamos em anexo um roteiro de aula e uma sequência de atividades propostas a serem exploradas pelo professor de Matemática em suas aulas de Geometria de Poliedros, conteúdo parte dos parâmetros nacionais curriculares.

## Atividade 1: Definição e Classificação de Poliedros

**Objetivo:** Compreender o conceito de poliedros e suas classificações, diferenciando poliedros de não poliedros e identificando seus elementos principais.

### Recursos:

- Apresentação em Power point “Atividade 1: Definição e Classificação de Poliedros “. Disponível em: <https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4XmqI0EOoR9dQDBUrDO?e=iKk8V8>
- Site “Pletora de poliedros”. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html>

### Metodologia:

#### Etapas

##### 1ª Introdução ao Conceito de Poliedros

- Utilizando o slide, iniciar a aula com uma breve explicação do que são poliedros, apresentando sua definição formal.
- Destacar os elementos que compõem um poliedro: **vértices**, **arestas** e **faces**.
- Manipular os sólidos geométricos disponíveis na página <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html> para explorar mais os elementos de um poliedro. Interagir com os modelos 3D para observar os vértices, arestas e faces de diferentes poliedros.

##### 2ª Exploração de Exemplos e Não Exemplos de poliedros

- Apresentar uma série de imagens de diferentes sólidos, tanto poliedros quanto não poliedros.
- Pedir aos alunos que tentem identificar e justificar quais objetos são poliedros e quais não são.
- Explicar, em cada caso, por que o exemplo mostrado é ou não um poliedro, apontando em qual critério da definição o objeto não se encaixa. Por exemplo, uma esfera não é um poliedro porque não possui faces planas.

##### 3ª Classificação dos Poliedros em conexo e não convexo

- Após as definições básicas, introduzir as classificações de poliedros: **não convexos** e **convexos**. Exibindo as imagens para mostrar exemplos de cada um dos tipos.
- O objetivo é que os alunos consigam chegar a uma definição após a visualização das imagens sem que seja necessário o professor apresentar uma definição formal.

#### **4ª Resumo, fixação e verificação de aprendizagem**

- Concluir a atividade revisando os conceitos abordados e reforçando as definições.
- Deixar um espaço para perguntas e esclarecimentos, garantindo que os alunos tenham compreendido a diferenciação entre os tipos de poliedros e a identificação de não poliedros.

**Slide**  
**Atividade 1: Definição e Classificação de Poliedros**

# POLIEDROS

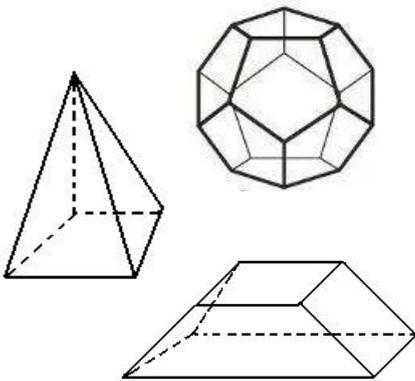
Atividade 1: Definição e classificação de Poliedros

Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

Slide 1: Apresentação do tema de aula.

## POLIEDROS



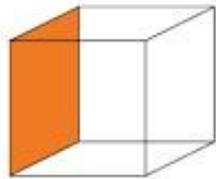
### DEFINIÇÃO

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, chamados de faces, onde:

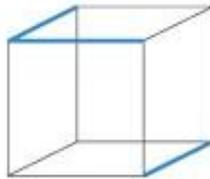
1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
2. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, chamado aresta, ou é um ponto, chamado vértice, ou é vazia.
3. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Slide 2: Definição de poliedros.

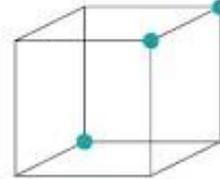
## ELEMENTOS DE UM POLIEDRO



FACE



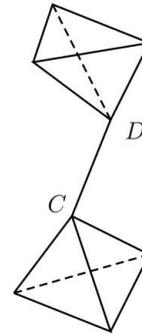
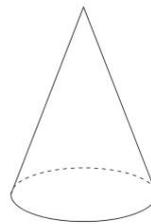
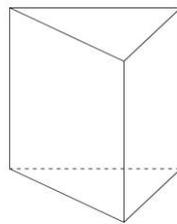
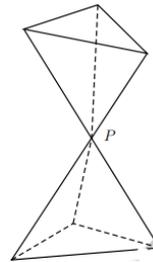
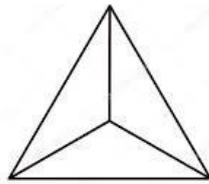
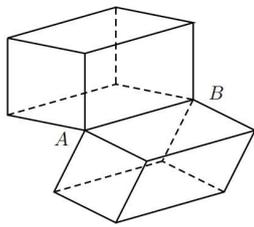
ARESTA



VÉRTICE

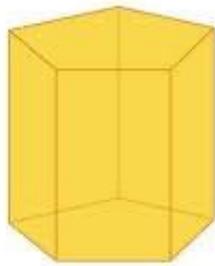
Slide 3: Elementos de um poliedro.

**SÃO  
POLIEDROS?**

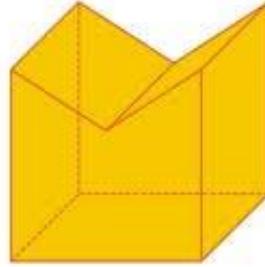


Slide 4: Exemplos de poliedros e não poliedros

## CONVEXO X NÃO CONVEXO

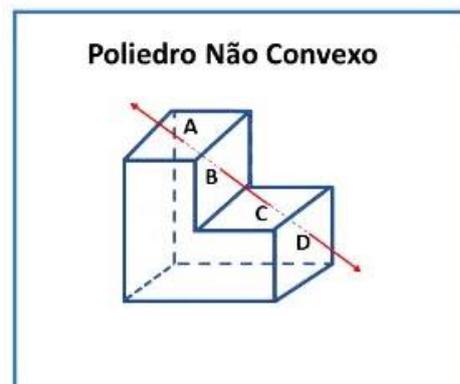
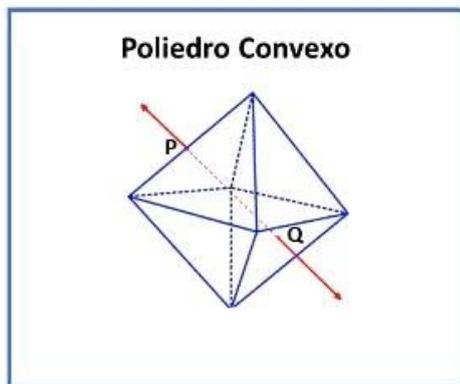


Poliedro convexo

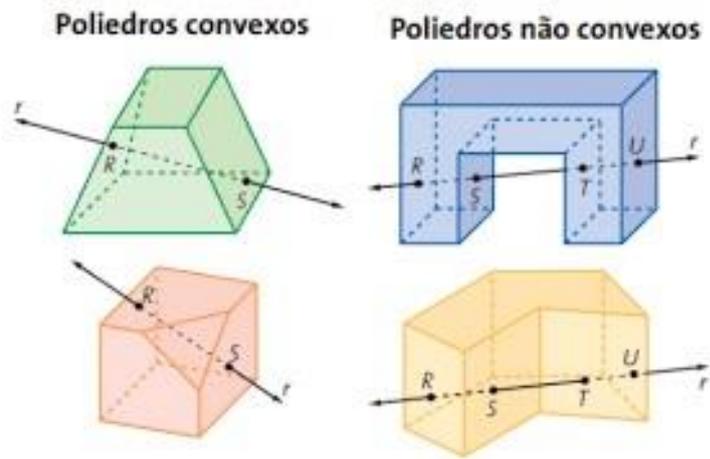


Poliedro não convexo

Slide 5: Classificação dos poliedros em convexo ou não convexo.



Slide 6: Classificação dos poliedros em convexo ou não convexo.



Slide 7: Exemplos de poliedros convexos e não convexos.

## Atividade 2: Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler

**Objetivo:** Deduzir a fórmula de Euler para poliedros, identificando o padrão de contagem de vértices, arestas e faces, compreender as exceções para poliedros com furos, e explorar a relação topológica entre poliedros e superfícies.

### Recursos:

- Apresentação em Power point “Atividade 2 – Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler “. Disponível em: <https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4XmqmJ0nX3QqQHb7JIJ?e=9KdWKF>
- Site “Pletora de poliedros”. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html>
- Atividade em folha “Atividade 2 – Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler”

### Metodologia:

#### Etapas

##### 1ª Identificando os elementos de um poliedro e a busca pela fórmula de Euler

- Distribuir a tabela em anexo para os alunos, onde devem preencher a quantidade de vértices, arestas e faces para cada poliedro apresentado.
- Explicar aos alunos que, usando esses três elementos (V, A e F) e duas operações matemáticas (soma e subtração), é possível encontrar um padrão e que este padrão se manifesta sempre no mesmo resultado para os poliedros apresentados.
- O professor deve incentivar os alunos a investigarem possíveis padrões usando os valores preenchidos na tabela e oferecer suporte, se necessário, para ajustar e refinar as fórmulas propostas pelos alunos.
  - Caso necessário, ajudar os alunos a estabelecerem qual ordem e qual operação usar (soma e subtração). Por exemplo, perguntar: **“O que acontece se você subtrair o número de arestas do número de vértices e adicionar o número de faces?”**
  - Outra abordagem pode ser **“Que outras combinações vocês conseguem criar com a soma e subtração de vértices, arestas e faces? Testem essas fórmulas com os valores que vocês encontraram.”**

##### 2ª Exploração da Relação Topológica

- Após os alunos chegarem à fórmula  $V-A+F = 2$  o professor deve abrir o site <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html> e com o uso da

ferramenta de contagem mostrar mais poliedros que se encaixam nessa fórmula.

- O próximo passo é exibir poliedros com um e dois furos, chamando atenção para o resultado da fórmula que não mais é igual a 2. Deve-se questionar aos alunos se eles perceberam algo em comum no formato desses sólidos (que não se encaixaram na fórmula  $V - A + F = 2$ ), provavelmente alguns alunos notaram a presença dos furos e associaram tal característica ao fato.
- Incentivar os alunos a imaginar o que ocorreria se os poliedros apresentados no slide 2 fossem inflados. O professor deve promover discussões e estimular a criatividade dos alunos. Após um breve debate, o professor deve exibir o slide 3, que contém uma animação mostrando os sólidos inflando e transformando-se em uma esfera. Em seguida, os sólidos do slide 5 devem ser apresentados, e o professor deve lembrar que, para esses sólidos com furos, a fórmula de Euler não se aplica. Os alunos devem ser desafiados a refletir sobre o que aconteceria se esses poliedros fossem inflados. O professor deve então mostrar a imagem do toro e concluir a atividade. É essencial destacar que o objetivo dessas atividades é o Teorema de Euler e por isso focaremos nos poliedros homeomorfos a uma esfera.

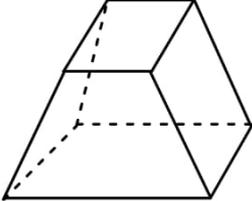
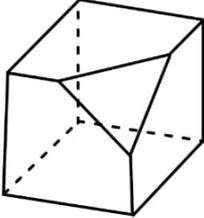
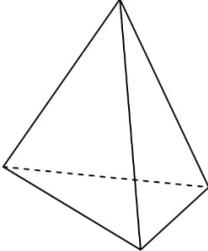
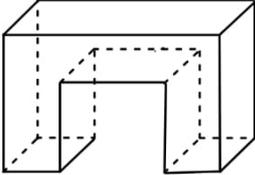
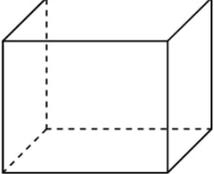
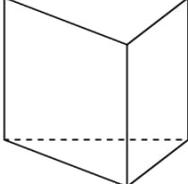
#### **4ª Resumo, fixação e verificação de aprendizagem**

- Concluir a atividade revisando os conceitos abordados e reforçando as definições.
- Deixar um espaço para perguntas e esclarecimentos, garantindo que os alunos tenham compreendido o Teorema de Euler e os demais aspectos abordados.

**Apostila**  
**Atividade 2: Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler**

**Questão 1**

Observe as imagens e determine a quantidade de vértices, arestas e faces em cada poliedro:

POLIEDRO	VÉRTICES	FACES	ARESTAS
			
			
			
			
			
			

## Questão 2

Utilize os dados obtidos na questão anterior e obtenha uma relação entre os valores de  $V$ ,  $F$  e  $A$  que seja verificada para os exemplos acima. Use o espaço abaixo para efetuar seus cálculos e testar as fórmulas.

**Slide**  
**Atividade 2 : Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler**

# POLIEDROS

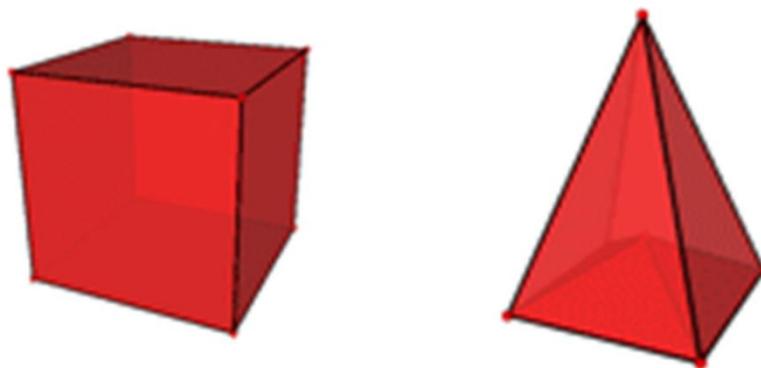
ATIVIDADE 2: Mapeando os elementos de um poliedro e deduzindo a fórmula de Euler

Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

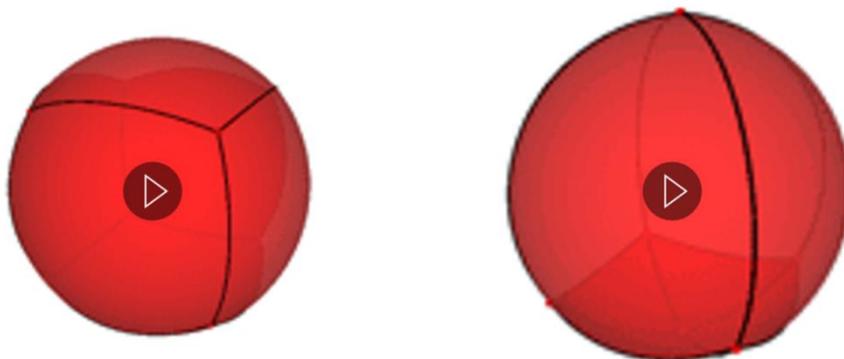
Slide 1: Apresentação do tema de aula.

## E se inflarmos esse poliedro?



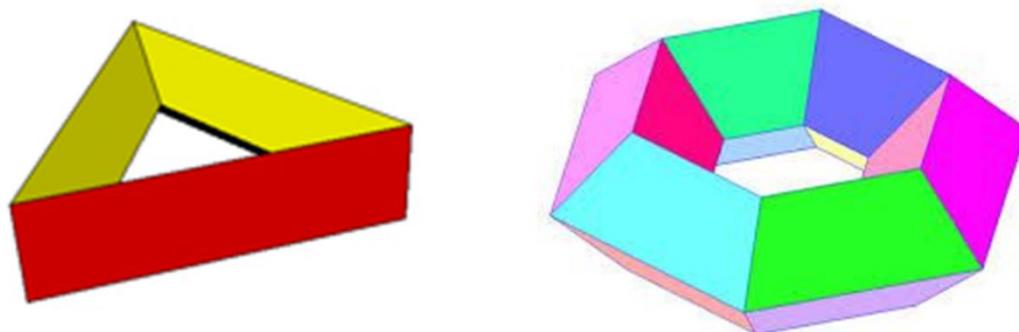
Slide 2: Apresentação dos poliedros e indagação do que acontece caso sejam inflados

**Chegaremos a uma...**



Slide 3: Animação dos poliedros sendo inflados.

**E nesse caso? Chegaremos a um...**



Slide 4: Poliedros com furos.



Slide 5: Toro – resultado de um poliedro com furo após ser inflado.

### **Atividade 3: Demonstração da Fórmula de Euler**

**Objetivo:** Demonstrar a fórmula de Euler utilizando recursos visuais.

**Recursos:**

- Apresentação em Power point “Atividade 3: Demonstração do Teorema de Euler “ . Disponível em:  
<https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4Xmqmt9IE5fu1q6xwTU?e=7VNWYL>

**Metodologia:**

**Etapas**

**1ª Abordar o Contexto Histórico:**

- Com o uso do slide, iniciar a aula apresentando um breve histórico sobre quem foi Euler
- Informar aos alunos que a fórmula de Euler foi enunciada por Leonhard Euler no século XVIII, mas ele não forneceu uma prova formal na época. A demonstração formal da fórmula e o desenvolvimento subsequente do conhecimento sobre poliedros ocorreram ao longo dos anos, com contribuições de vários matemáticos.
- Explicar que o entendimento atual sobre poliedros resultou de uma construção histórica. Diversos matemáticos e pesquisadores contribuíram para a formulação e prova dos teoremas relacionados aos poliedros.

**2ª Demonstração da Fórmula de Euler**

- Fazer a demonstração da fórmula de Euler utilizando os slides apresentados em anexo. Os slides abordam a demonstração de Cauchy e contém ilustrações que auxiliam a visualização da relação entre vértices, arestas e faces dos poliedros.
- Durante a demonstração, utilizar uma linguagem acessível e evitar o rigor matemático excessivo. O objetivo é que os alunos compreendam a fórmula de forma intuitiva e clara, sem a necessidade de formalismos técnicos.
- Recomenda-se que o professor faça um breve nivelamento de manipulação algébrica para que os alunos consigam acompanhar de modo mais rápido as manipulações presentes no primeiro slide. O professor pode ainda omitir a parte escrita e apenas elaborar logicamente os cálculos.

**3ª Verificação de aprendizagem**

- Concluir a atividade revisando os conceitos abordados e reforçando as definições.
- Deixar um espaço para perguntas e esclarecimentos, garantindo que os alunos tenham compreendido a diferenciação entre os tipos de poliedros e a identificação de não poliedros.

**Slide**  
**Atividade 3: Demonstração da Fórmula de Euler**

# POLIEDROS

ATIVIDADE 3: Demonstração do Teorema de Euler

Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

Slide 1: Apresentação do tema de aula.

## Breve histórico

Leonhard Euler (1707 - 1783) nasceu perto de Basileia, na Suíça. Ele foi educado em casa até os seus 7 anos e, aos 13 anos, iniciou seus estudos de teologia na Universidade de Basileia. Euler não demonstrou grande entusiasmo pela área teológica e se dedicava à matemática nas horas vagas. Devido à sua capacidade, Leonhard foi notado e encorajado por Johann Bernoulli, seu professor, a iniciar o curso de graduação em matemática, o qual foi concluído em 1726.

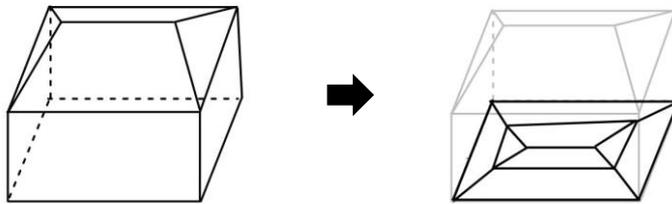
Ao longo de sua vida, Euler fez significativas contribuições em diversas áreas da matemática, incluindo a topologia, teoria dos números, álgebra, trigonometria, notação matemática, teoria dos grafos, entre outros.



Leonhard Euler (1707-1783)

Slide 2: Breve histórico sobre Leonhard Euler.

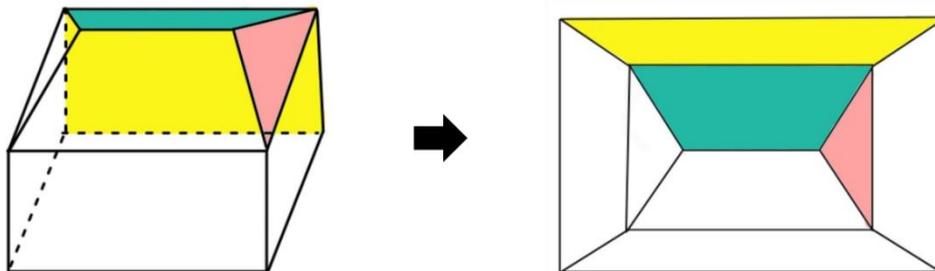
### 1º passo: Formando a configuração plana



- Notem que o número de  $V$  e  $A$  permanecem iguais, no entanto temos  $F - 1$  faces.
- Na configuração plana chamaremos os elementos do poliedro de  $V_0$ ,  $A_0$  e  $F_0$ .
- Portanto, na configuração plana temos  $V_0 - A_0 + F_0 = 1$ . Se provarmos isso, provamos que no poliedro inicial temos  $V - A + F = 2$

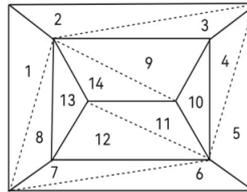
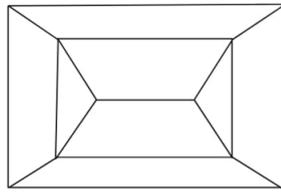
Slide 3: Início da demonstração do teorema, formando a configuração plana de um poliedro.

### Entendendo a equivalência de faces ...



Slide 4: Associando as faces do poliedro as faces da configuração plana.

## 2º Passo: Triangular as faces



	V	A	F	V-A+F=
P	10	17	8	1
P1	10	23	14	1

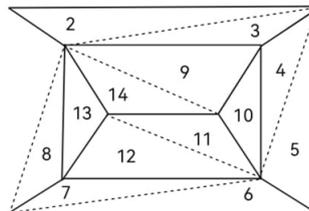
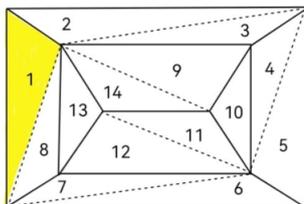
- Chamamos o novo objeto de  $P_1$ . Seus elementos são denotados por  $V_1$ ,  $A_1$  e  $F_1$ .
- Ao adicionar uma nova aresta para triangular uma face, aumentamos o número de faces em 1 e o número de aresta em 1 sem alterar o número de vértices.
- Logo acrescentamos um total de  $k$  faces e  $k$  arestas a figura planar. Portanto:

$$V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - (A_0 + k) + (F_0 + k) = V_0 - A_0 + F_0 = 1$$

Slide 5: 2ª etapa da demonstração, triangulação das faces.

## 3º Passo: Decompor $P_1$

Caso 1: Retirar faces que tem apenas uma aresta em comum com a fronteira de  $P_1$



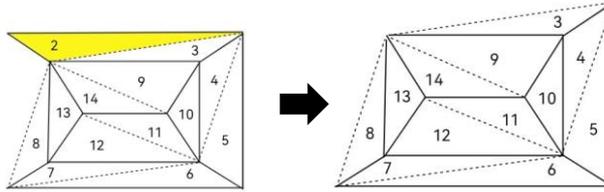
	V	A	F	V-A+F=
P1	10	23	14	1
P2	10	22	13	1

- Notem que retiramos 1 face e 1 aresta mas não alterou-se o número de vértices novamente.
- Logo  $V_2 = V_1$ ,  $A_2 = A_1 - 1$  e  $F_2 = F_1 - 1$ . Portanto =

$$V_2 - A_2 + F_2 = V_1 - (A_1 - 1) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - A_0 + F_0 = 1$$

Slide 6: 3ª etapa da demonstração, decomposição das faces.

Caso 2: Retirar faces que tem duas arestas em comum com a fronteira de  $P_1$



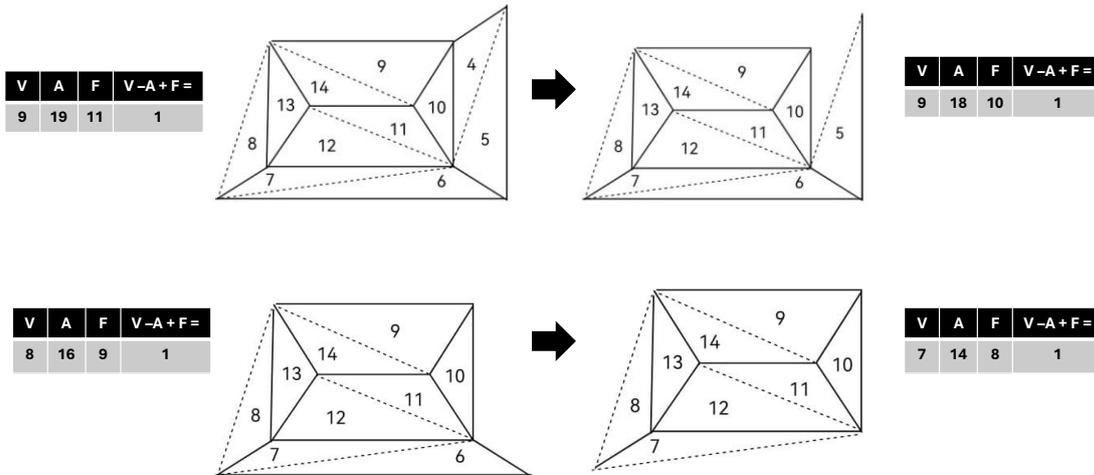
	V	A	F	V-A+F=
P2	10	22	13	1
P3	9	20	12	1

• Notem que retiramos 1 face, 2 arestas e 1 vértice.

• Logo  $V_3 = V_1 - 1$ ,  $A_3 = A_1 - 2$  e  $F_3 = F_1 - 1$ . Portanto =

$$V_3 - A_3 + F_3 = V_1 - 1 - (A_1 - 2) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = V_0 - A_0 + F_0 = 1$$

Slide 7: continuação da decomposição das faces.



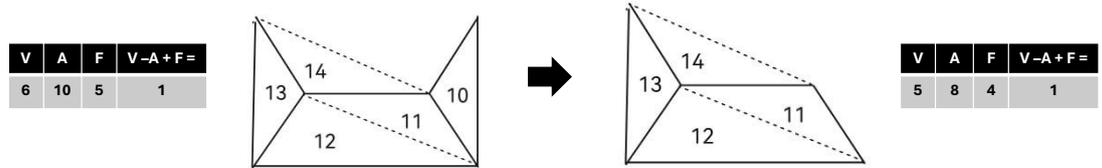
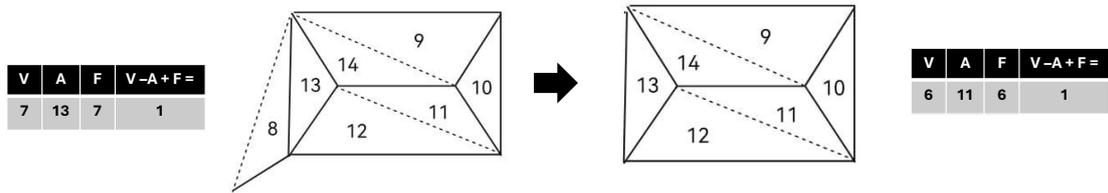
V	A	F	V-A+F=
9	19	11	1

V	A	F	V-A+F=
9	18	10	1

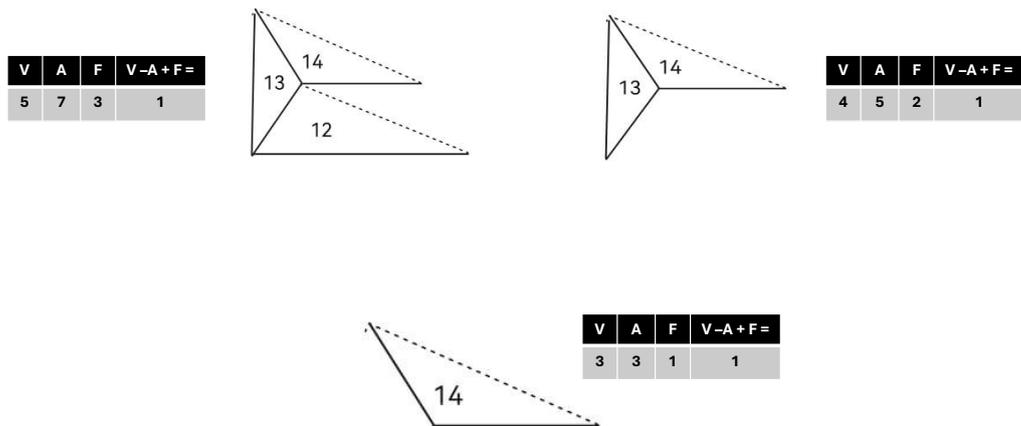
V	A	F	V-A+F=
8	16	9	1

V	A	F	V-A+F=
7	14	8	1

Slide 8: continuação da decomposição das faces.



Slide 9: continuação da decomposição das faces.



Slide 10: Conclusão da demonstração.

## Atividade 4: Poliedros regulares

### Objetivo

Permitir que os alunos reconheçam e compreendam as características dos poliedros regulares, incluindo a associação feita por Platão entre esses poliedros e os elementos da natureza, e aplicar a fórmula de Euler aos poliedros regulares.

### Recursos

- Apresentação em Power point “Atividade 4 – Poliedros regulares “. Disponível em: <https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4XmqwDFcd93O098vMs0?e=y1xXCB>
- Poliedros platônicos. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/tuZ82PTk>
- Atividade em folha “Atividade 4 – Poliedros regulares” .

### Metodologia

#### Etapas

##### 1ª Introdução, manipulação dos poliedros regulares

1. Iniciar a aula manipulando os poliedros na página do GeoGebra.
2. Durante a manipulação o professor deve fazer questionamentos que levem os alunos a perceberem as características presentes nesses sólidos geométricos sem ainda formalizar a definição de poliedros regulares.

Sugestão de questionamentos:

- “O que vocês notam sobre as faces desses sólidos?”
- “Como as faces se parecem entre si? Há algo que as torna iguais?”
- “Quantos lados vocês conseguem contar em cada face? O que isso sugere sobre a forma das faces?”
- “Observando todos os sólidos, há algo comum em relação aos seus vértices e arestas?”

##### 2ª Contextualização histórico e definição

Com o uso do slide “ Atividade 4: Poliedros regulares”

1. Fazer uma breve abordagem histórica sobre os poliedros.
2. Exibir a associação feita por Platão entre os poliedros regulares e os elementos da natureza.
3. Formalizar a definição e apresentação dos 5 poliedros regulares ressaltando suas características, concluir que devido suas características eles satisfazem ao Teorema de Euler.

### **3ª Aplicação da apostila**

1. Entregar a apostila referente à aula, que inclui atividades para aplicar a fórmula de Euler aos poliedros regulares.
2. Orientar os alunos para trabalharem em grupos ou individualmente, resolvendo os problemas e atividades propostas na apostila.

### **4ª Revisão e Avaliação do conhecimento construído**

1. Fazer uma resolução em conjunto das atividades propostas e sanar possíveis dúvidas.
2. O professor pode manipular novamente os sólidos no GeoGebra para verificação das questões.
3. Ao final da aula, o professor pode promover um quiz de perguntas e respostas sobre o tema treinado ou adaptar essas perguntas para um Kahoot (ou outra plataforma de sua preferência). Segue em anexo sugestões de perguntas para realização dessa atividade.

**Apostila**  
**Atividade 4: Poliedros regulares**

**Questão 1**

Historicamente, a simetria e a regularidade dos poliedros foram altamente valorizadas pelos matemáticos antigos, especialmente pelos seguidores de Platão. Platão, em seus estudos sobre os sólidos perfeitos, destacou a importância dos poliedros cujas faces são idênticas e têm simetria regular, o que é um dos aspectos que define os sólidos de Platão.

Você está restaurando um antigo poliedro encontrado em uma construção histórica que remonta aos tempos da Grécia Antiga. Durante a restauração, você descobre que parte da peça está danificada, dificultando a contagem direta das arestas. No entanto, você consegue observar que o poliedro é formado por 20 pentágonos regulares em suas faces e conhece o número de vértices, que é 12.

Para concluir a restauração é necessário determinar o número de arestas restante. Explique como faria para calcular o número de arestas restante:

---



---



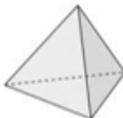
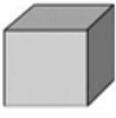
---



---

**Questão 2**

Com base no que foi estudado sobre poliedros regulares, tente imaginar cada poliedro em sua totalidade e preencha a tabela abaixo.

POLIEDROS REGULARES					
Nome do poliedro					
Polígono da face					
Quant. de faces					
Quant. de vértices					
Quant. de arestas					
$V - A + F =$					

**Quiz**  
**Atividade 4: Poliedros regulares**

1. Qual a principal característica dos poliedros regulares?
2. Qual nome do matemático que associava os elementos das naturezas aos poliedros regulares?
3. Por qual outro nome são conhecidos os poliedros regulares?
4. Quantos poliedros regulares existem?
5. Qual o poliedro regular que é formado por 4 triângulos?
6. Quantos triângulos tem o icosaedro?
7. Quantos pentágonos formam o dodecaedro?
8. Sabendo que o dodecaedro tem 12 Faces e 30 arestas, quantos vértices ele tem?
9. Qual o resultado de  $V-A+F$  no icosaedro?
10. No hexaedro um vértice pertence a quantas arestas ao mesmo tempo?
11. Em qualquer poliedro, a mesma aresta pertence a quantas faces ao mesmo tempo?

Slide  
Atividade 4: Poliedros regulares

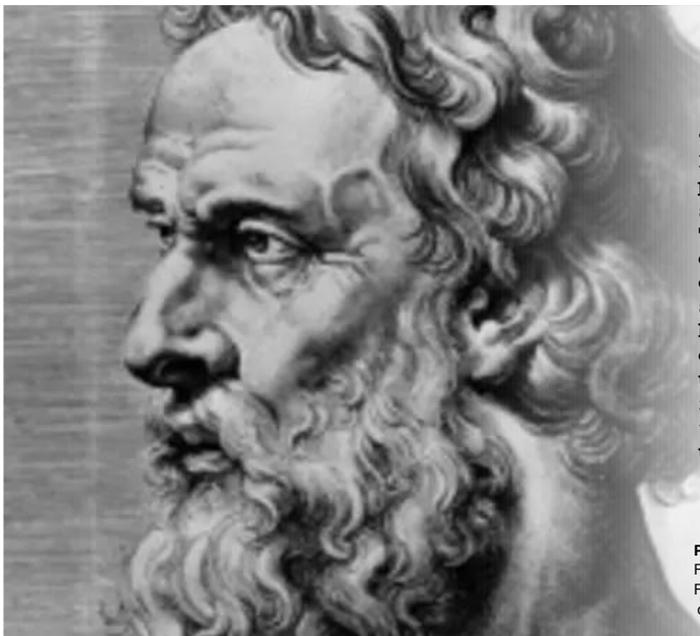
# POLIEDROS

ATIVIDADE 4: Poliedros Regulares

Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

Slide 1: Apresentação do tema de aula



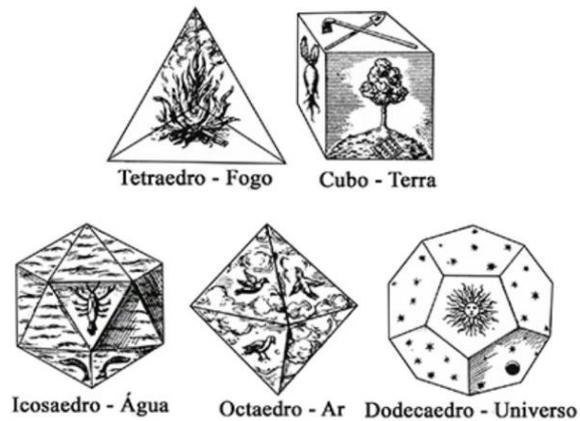
## Sólidos de Platão

- Por volta de 360 a.C. Platão escreveu sobre os cinco poliedros regulares em um de seus diálogos denominado Timeu. Nesse trabalho, ele discute a natureza do universo e introduz a ideia dos cinco sólidos regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), associando cada um deles aos elementos fundamentais da natureza: terra, água, ar, fogo e universo.

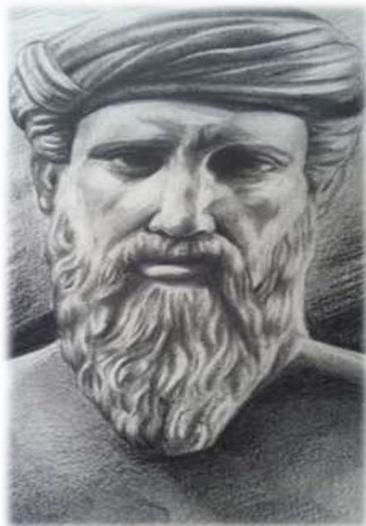
Platão (c. 427 a.C. – c. 347 a.C.)  
Filósofo grego, aluno de Sócrates e mestre de Aristóteles.  
Fundador da Academia, uma das primeiras instituições de ensino superior no mundo ocidental.

Slide 2: Breve histórico sobre Platão e os poliedros regulares

# Sólidos de Platão



Slide 3: Associação dos poliedros regulares aos elementos da natureza



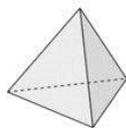
Esses sólidos ficaram conhecidos como sólidos de Platão, mas sabe-se que, apesar de não haver registros, os pitagóricos já conheciam e estudavam o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, enquanto o octaedro e o icosaedro eram estudados por Teeteto.

**Pitágoras (c. 570 a.C. - c. 495 a.C.)**  
Matemático e filósofo grego, conhecido por seu teorema sobre triângulos retângulos. Fundador da escola pitagórica, que influenciou profundamente a matemática e a filosofia.

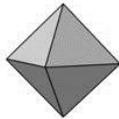
Slide 4: Breve histórico sobre Pitágoras e os poliedros regulares.

# POLIEDROS REGULARES

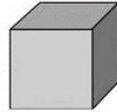
Um poliedro é chamado de regular se as faces são polígonos regulares congruentes e, além disto, por cada vértice concorre a mesma quantidade de arestas.



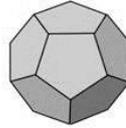
Tetraedro



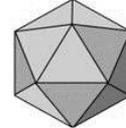
Octaedro



Hexaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Slide 5: Definição de poliedros regulares.

## Discussão e correção

### Questão 1

Historicamente, a simetria e a regularidade dos poliedros foram altamente valorizadas pelos matemáticos antigos, especialmente pelos seguidores de Platão. Platão, em seus estudos sobre os sólidos perfeitos, destacou a importância dos poliedros cujas faces são idênticas e têm simetria regular, o que é um dos aspectos que define os sólidos de Platão.

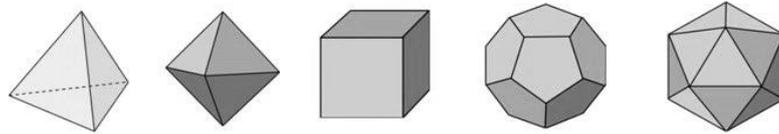
Você está restaurando um antigo poliedro encontrado em uma construção histórica que remonta aos tempos da Grécia Antiga. Durante a restauração, você descobre que parte da peça está danificada, dificultando a contagem direta das arestas. No entanto, você consegue observar que o poliedro é formado por 20 pentágonos regulares em suas faces e conhece o número de vértices, que é 12.

**Para concluir a restauração é necessário determinar o número de arestas restante. Explique como faria para calcular o número de arestas restante:**

Slide 6: Discussão e correção da questão 1.

**Questão 2**

Com base no que foi estudado sobre poliedros regulares, tente imaginar cada poliedro em sua totalidade e preencha a tabela abaixo.



Nome do poliedro					
Polígono da face					
Quantidade de faces					
Quantidade de vértices					
Quantidade de arestas					
$V - A + F =$					

Slide 7: Discussão e correção da questão 2.

## Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos

### Recursos

- Apresentação em Power point “Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos “. Disponível em:  
<https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4XmqwkSoQz4UjBUJdtj?e=LHyI58>
- Atividade em folha “Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos”.

### Objetivo

- Introduzir o conceito de grafos e suas aplicações através do problema das sete pontes de Königsberg.
- Munir os alunos com conhecimento básico sobre grafos para trabalhar posteriormente com a planificação dos sólidos e grafos platônicos.
- Apresentar os grafos platônicos e suas características.

### Metodologia

#### Etapas

##### **1ª Apresentação do Problema das Sete Pontes**

- Iniciar a atividade apresentando aos alunos o problema histórico das 7 pontes de Königsberg e a participação de e a influência de Euler nesse episódio.

##### **2ª Introdução ao Conceito de Grafos**

- Mostrar que, para simplificar a visualização do problema, podemos utilizar uma representação mais simplista associando as pontes e as ilhas a elementos de um grafo. Explicar que apesar de Euler não desenhar os grafos como conhecemos hoje, ele estabeleceu os conceitos fundamentais que levaram à criação dessa representação.
- Apresentar o conceito de grafo e seus elementos: vértices e arestas.
- Explicar o conceito de grau de um vértice e como indicar um caminho em um grafo. Demonstrar como o grau dos vértices e a estrutura do grafo influenciam a possibilidade de encontrar um caminho que passe por todas as arestas exatamente uma vez.

##### **3ª Aplicação e revisão dos conceitos e avaliação do conhecimento construído**

- Distribuir a atividade em anexo para grupos de cinco alunos. Solicitar que eles tentem encontrar um caminho que passe por todos os vértices e arestas sem repetir nenhuma aresta.

- Pedir que as equipes apresentem suas soluções e conclusões sobre a possibilidade ou não de sair e retornar ao mesmo vértice sem repetir alguma aresta.
- O professor deve encerrar a aula com seus comentários chamando atenção para as condições necessárias em cada um dos grafos trabalhados, abordando as classificações abaixo.

**Verificação de Ciclos e Caminhos Eulerianos:**

1 → *Grafo Euleriano (Ciclo Euleriano): Se todos os vértices do grafo têm grau par, é possível percorrer todas as arestas partindo e retornando ao mesmo vértice.*

2 → *Grafo Semi-Euleriano (Caminho Euleriano): Se exatamente dois vértices têm grau ímpar, é possível percorrer todas as arestas partindo de um vértice e retornando a outro diferente, mas não é possível retornar ao ponto de partida.*

3 → *Nenhum Caminho ou Ciclo Euleriano: Se mais de dois vértices têm grau ímpar, não é possível percorrer todas as arestas sem repetir nenhuma aresta.*

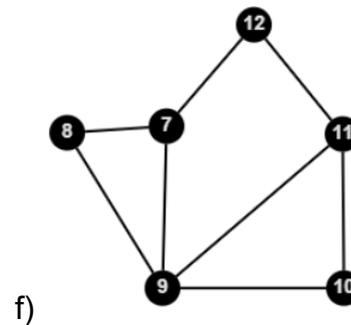
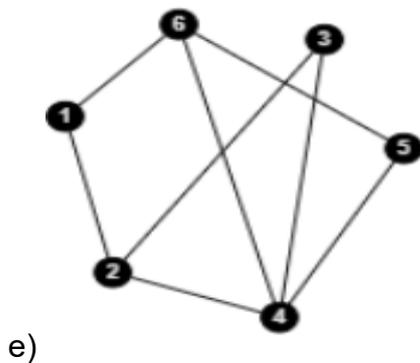
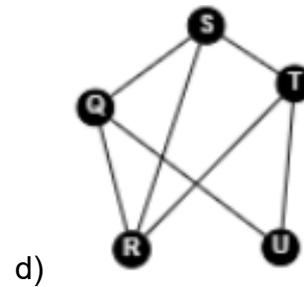
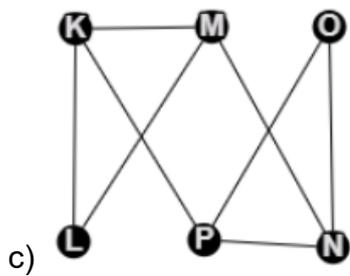
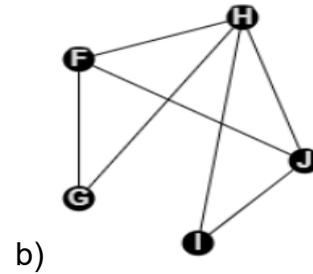
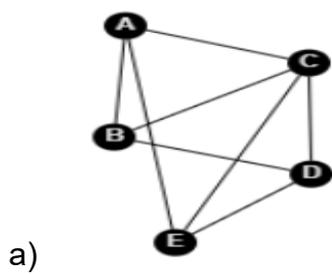
**Apostila**  
**Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos**

1. Agora é sua vez, em cada grafo identifique o grau de cada vértice e tente percorrer todos os vértices sem repetir nenhuma aresta. Identifique cada grafo usando a seguinte numeração:

1→ quando for possível percorrer todas as arestas partindo e retornando ao mesmo vértice.

2→ quando for possível percorrer todas as arestas partindo de um vértice e retornando a outro diferente.

3→ quando não for possível percorrer todas as arestas.



**Apostila - Gabarito**  
**Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos**

**Classificação 1: Ciclo Euleriano** → todos os vértices têm grau par, então é possível percorrer todas as arestas e retornar ao mesmo vértice, formando um ciclo.

**Letra A**

- Vértices: A, B, C, D, E
- Graus: A: 3, B: 3, C: 4, D: 3, E: 3

**Letra E**

- Vértices: 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - Graus: 1: 3, 2: 4, 3: 3, 4: 4, 5: 2, 6: 3
- 

**Classificação 2: Caminho Euleriano** → exatamente dois vértices têm grau ímpar, então é possível percorrer todas as arestas partindo de um vértice e retornando a outro diferente

**Letra B**

- Vértices: F, G, H, I, J
- Graus: F: 3, G: 2, H: 4, I: 2, J: 3

**Letra C**

- Vértices: K, L, M, N, O, P
  - Graus: K: 3, L: 2, M: 3, N: 3, O: 2, P: 2
- 

**Classificação 3: Nenhum Caminho ou Ciclo Euleriano** → Mais de dois vértices têm grau ímpar, então não é possível percorrer todas as arestas sem repetir nenhuma

**Letra D**

- Vértices: Q, R, S, T, U
- Graus: Q: 3, R: 4, S: 4, T: 3, U: 2

**Letra F**

- Vértices: 7, 8, 9, 10, 11, 12
- Graus: 7: 3, 8: 3, 9: 4, 10: 3, 11: 4, 12: 2

**Slide**  
**Atividade 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos**

# POLIEDROS

ATIVIDADE 5: O problema das 7 pontes e introdução a grafos

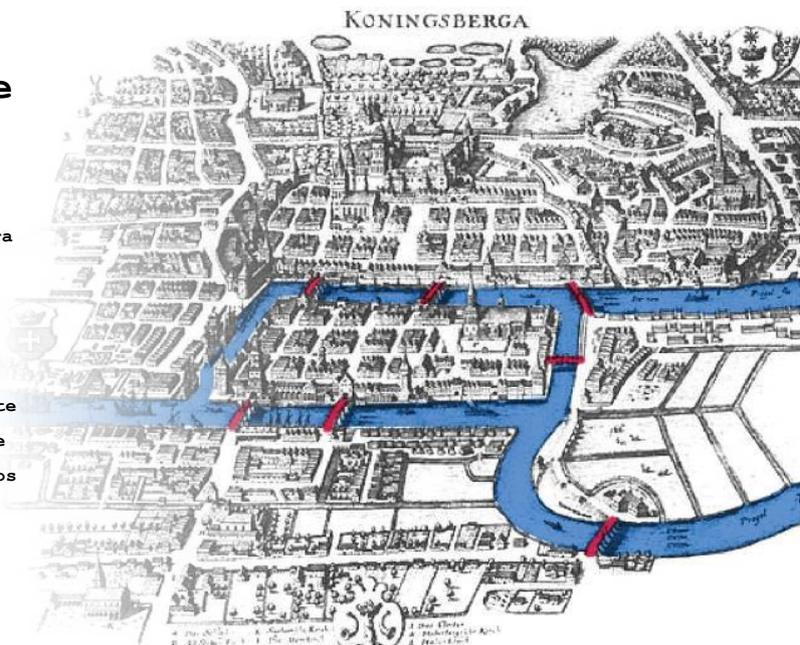
Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

Slide 1: Apresentação do tema de aula

## As 7 pontes de Königsberg

- Königsberg foi uma cidade histórica situada na antiga Prússia Oriental. A cidade era composta por quatro grandes partes de terra firme que foram cortadas pelo rio Pregel, sendo duas delas as ilhas Kneiphof e Lomse. As pontes eram necessárias para conectar as ilhas ao continente.
- Elas facilitavam o transporte e o comércio de mercadorias, permitiam maior conectividade entre as partes da cidade, facilitando o deslocamento dos moradores, e ajudavam na administração e defesa da cidade, pois permitiam o movimento rápido de tropas e recursos em caso de necessidade.

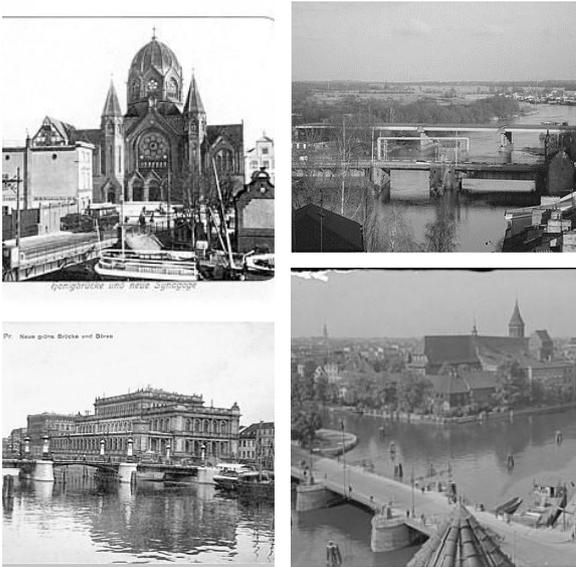


Slide 2: Apresentação da cidade de Königsberg e o problema das 7 pontes.

Os habitantes da pequena cidade se questionavam se era possível fazer um passeio atravessando as sete pontes do rio Prególia, sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornando ao ponto de partida.



Slide 3: Apresentação da cidade de Königsberg e o problema das 7 pontes.



O problema questionava: É possível partir de uma das quatro áreas de terra firme, atravessar as sete pontes e retornar à área inicial?

Detalhes técnicos:

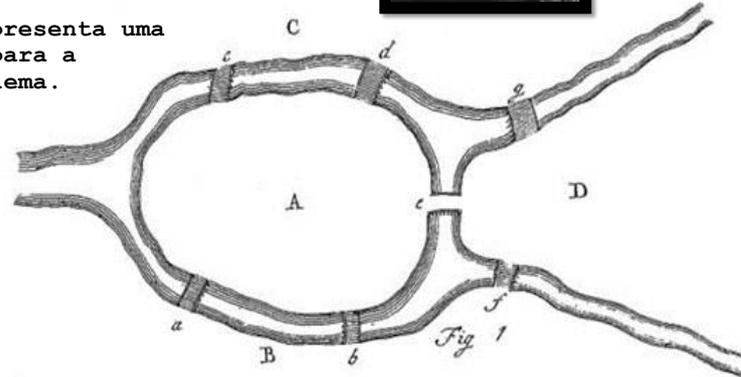
1. Não é permitido sair dessa região do mapa;
2. Não é permitido atravessar a mesma ponte mais de uma vez
3. É permitido cruzar o rio apenas passando pelas pontes

Slide 4: Apresentação da cidade de Königsberg e o problema das 7 pontes.

Em 1735, Euler tomou conhecimento dos problemas das pontes de Königsberg e iniciou sua investigação sobre o assunto. Em 1736, ele publicou um artigo intitulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes*.



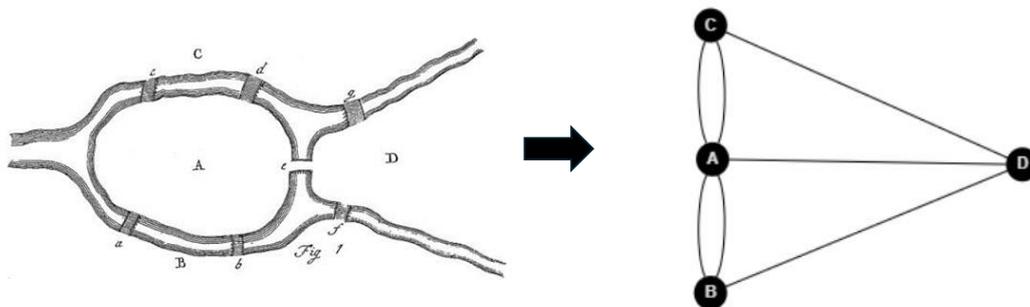
Neste artigo ele apresenta uma ilustração generalizada para a resolução do famoso problema.



Slide 5: Euler e sua representação do problema das 7 pontes.

## Euler e a Teoria dos Grafos

Com a representação simplista das Pontes de Königsberg, Euler deu o primeiro passo para o desenvolvimento da teoria dos grafos, transformando um problema histórico em um grafo, que mais tarde se tornaria a base para o estudo das redes e conexões em diversas áreas da matemática e da ciência

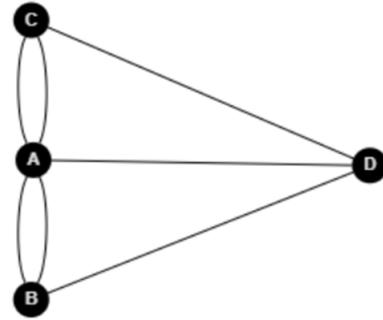


Slide 6: A representação do problema na Teoria dos grafos.

## Euler e a Teoria dos Grafos

Euler foi o primeiro a formular o problema de forma matemática e a apresentar uma solução, o que marcou o nascimento da teoria dos grafos.

Contudo, a formalização dessa teoria como um campo de estudo independente ocorreu muito tempo depois, ao longo dos séculos, por meio do trabalho de outros matemáticos que formalizaram e expandiram os conceitos introduzidos por Euler.

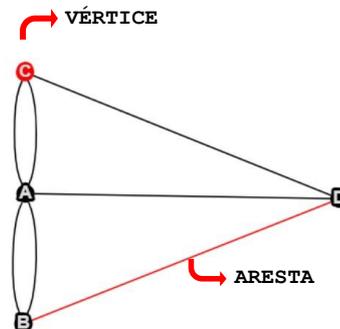


Slide 6: A representação do problema na Teoria dos grafos.

## Teoria dos Grafos

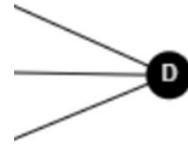
### Definição

Um grafo simples  $G$  consiste em um conjunto finito não vazio  $V(G)$  de elementos chamados vértices e um conjunto finito  $E(G)$  de pares não ordenados distintos de elementos distintos de  $V(G)$  chamados arestas.



Slide 7: Definição de grafos, vértices e arestas.

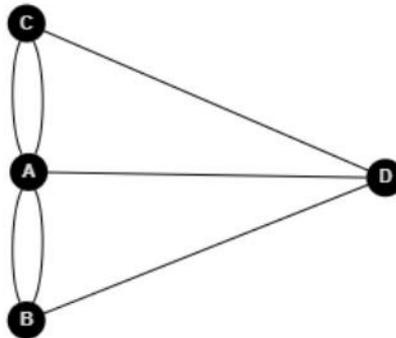
O grau de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é o número de arestas incidentes em  $v$ . Denotamos o grau de  $v$  por  $\text{grau}(v)$ .



$$\text{grau}(d) = 3$$

Slide 8: grau de um vértice.

O problema das pontes tem solução? É possível?



Slide 9: Grafo do problema das 7 pontes para discussão de possível solução.

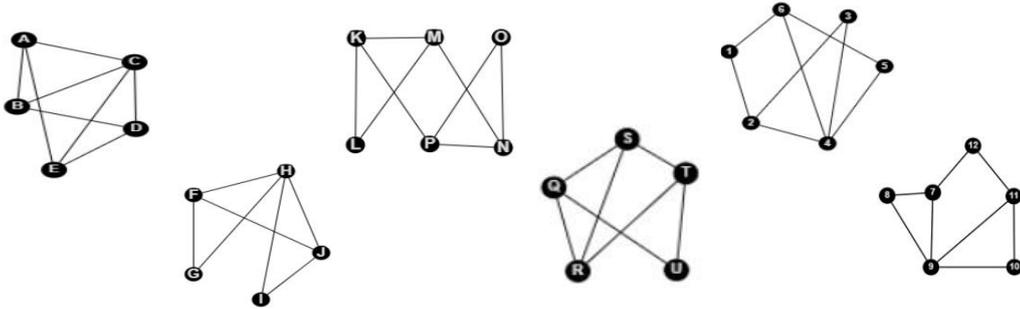
## ATIVIDADE

1. Agora é sua vez, em cada grafo identifique o grau de cada vértice e tente percorrer todos os vértices sem repetir nenhuma aresta. Identifique cada grafo usando a seguinte numeração:

1→ quando for possível percorrer todas as arestas partindo e retornando ao mesmo vértice.

2→ quando for possível percorrer todas as arestas partindo de um vértice e retornando a outro diferente.

3→ quando não for possível percorrer todas as arestas.



Slide 10: Atividade de grafos.

## Atividade 6: O teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos

### Recursos

- Apresentação em Power point “Atividade 6: O teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos “. Disponível em: <https://1drv.ms/p/s!AlmLodZSP4XmqztzcZWQbCINmOEc?e=YbLcLi>
- Atividade em folha “Atividade 6: O teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos.”

### Objetivo

- Explorar e compreender a planificação dos poliedros dodecaedro e icosaedro com o auxílio do GeoGebra.
- Identificar e aplicar conceitos de vértices, arestas e faces em grafos, reconhecendo a relação entre a teoria dos poliedros e a construção prática dos sólidos.
- Estimular a resolução de problemas e a colaboração ao montar as planificações
- Aplicar o Teorema de Euler em grafos planos, principalmente nas planificações dos sólidos platônicos.
- Conhecer os grafos platônicos e suas características.

### Metodologia

#### Etapas

##### 1ª Apresentação e análise da planificação do dodecaedro e do icosaedro

- Iniciar a atividade apresentando a planificação do dodecaedro e do icosaedro com o auxílio do GeoGebra.
- Fazer questionamentos para ajudar os alunos a identificarem características das planificações e os elementos de grafos presentes nelas:
  - *Sugestão de questões sobre características da planificação:*
    - “Quais são as formas geométricas presentes na planificação do dodecaedro e do icosaedro?”
    - “Como as faces se conectam na planificação?”
    - “O que diferencia a planificação do dodecaedro e no icosaedro?”
    - “O que acontece com o quantitativo de vértices e arestas em relação ao poliedro antes da planificação?”
    - “Vocês conseguem notar elementos de grafos na planificação?”

## **2ª Construção do octaedro e construção da planificação do hexaedro e do tetraedro**

### **Material de apoio: Apostila 6**

- Distribuir a apostila para que os alunos recortem e montem a planificação do octaedro.
- Explicar que essa etapa é fundamental para que os alunos consigam manipular e se apropriar da planificação.
- Na folha pontilhada solicitar que os alunos construam a planificação de um hexaedro e de um tetraedro. Nesse momento o professor pode voltar a exibir a planificação do dodecaedro e também manipular o hexaedro e o tetraedro, sem fazer a planificação, para que os alunos observem as características. Orientar na construção e garantir que a planificação esteja correta.
- Espera-se que os alunos percebam que os polígonos da face devem ser regulares e que o uso do pontilhado e escolhas convenientes vão ser fundamentais na construção. O professor deve ir orientando na construção.

### **4ª Definir grafo planar, associar as planificações e aplicar o teorema de Euler.**

- Com o auxílio do slide 6, o professor deve definir e ilustrar grafos planares, mostrando que as planificações estudadas são tipos de grafos planares.
- Estabelecer que nos grafos planares a região infinita é considerada uma face.
- Determinar que se um grafo é planar então  $V-A+F=2$ . Nesse momento o professor deve solicitar que os alunos verifiquem o Teorema de Euler nas planificações que eles construíram.
- Em seguida o professor faz a correção em conjunto com a turma, esclarecendo possíveis dúvidas. Deve-se estabelecer que ele o Teorema é válido para as demais planificações estudadas na aula.

### **5ª Apresentar os grafos platônicos**

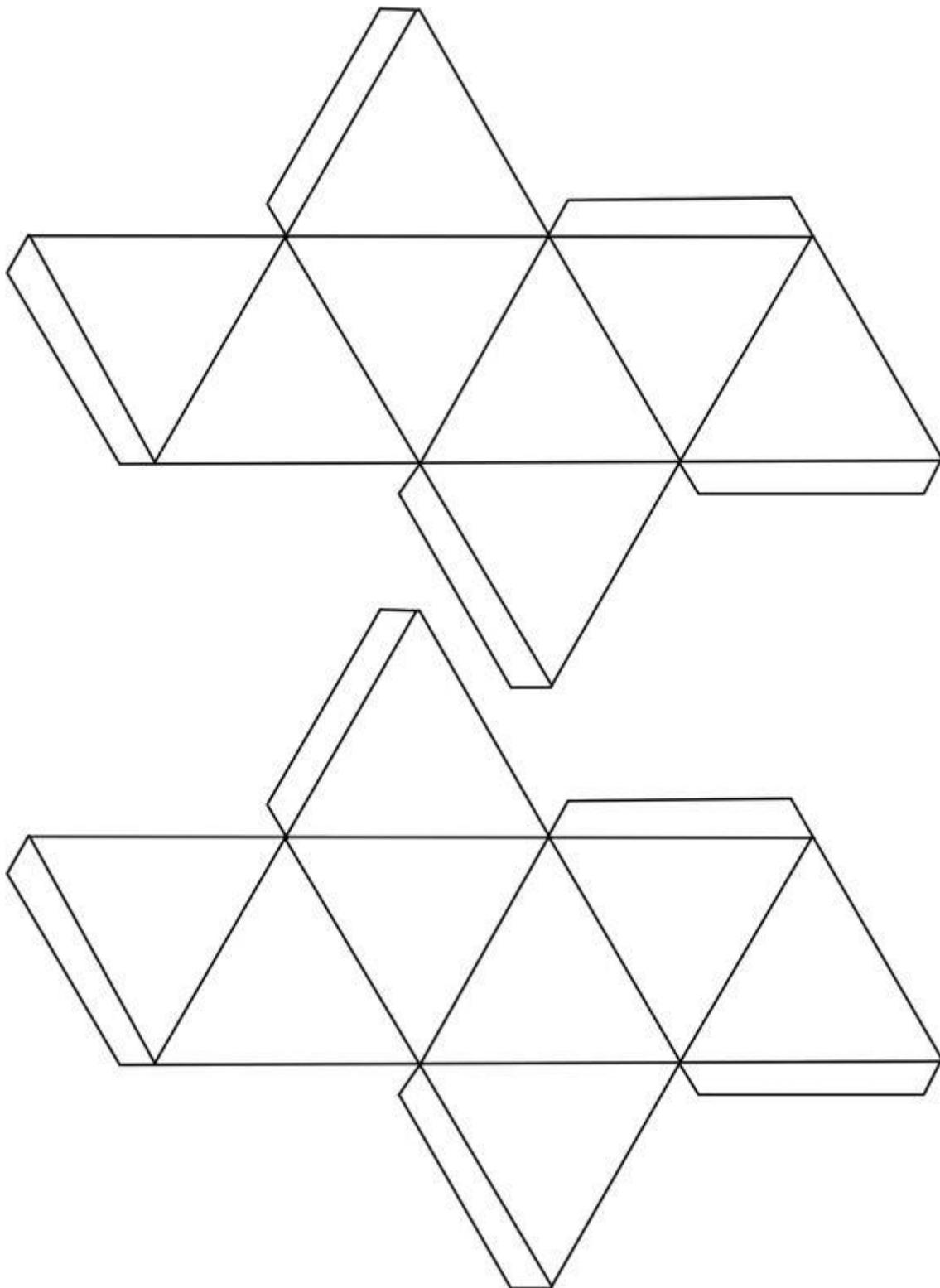
- Ainda utilizando o slide 6, exibir os grafos platônicos, definindo-os e trabalhando suas características, assim como associando aos seus respectivos poliedros platônicos.

### **6ª Revisão e Avaliação do conhecimento construído**

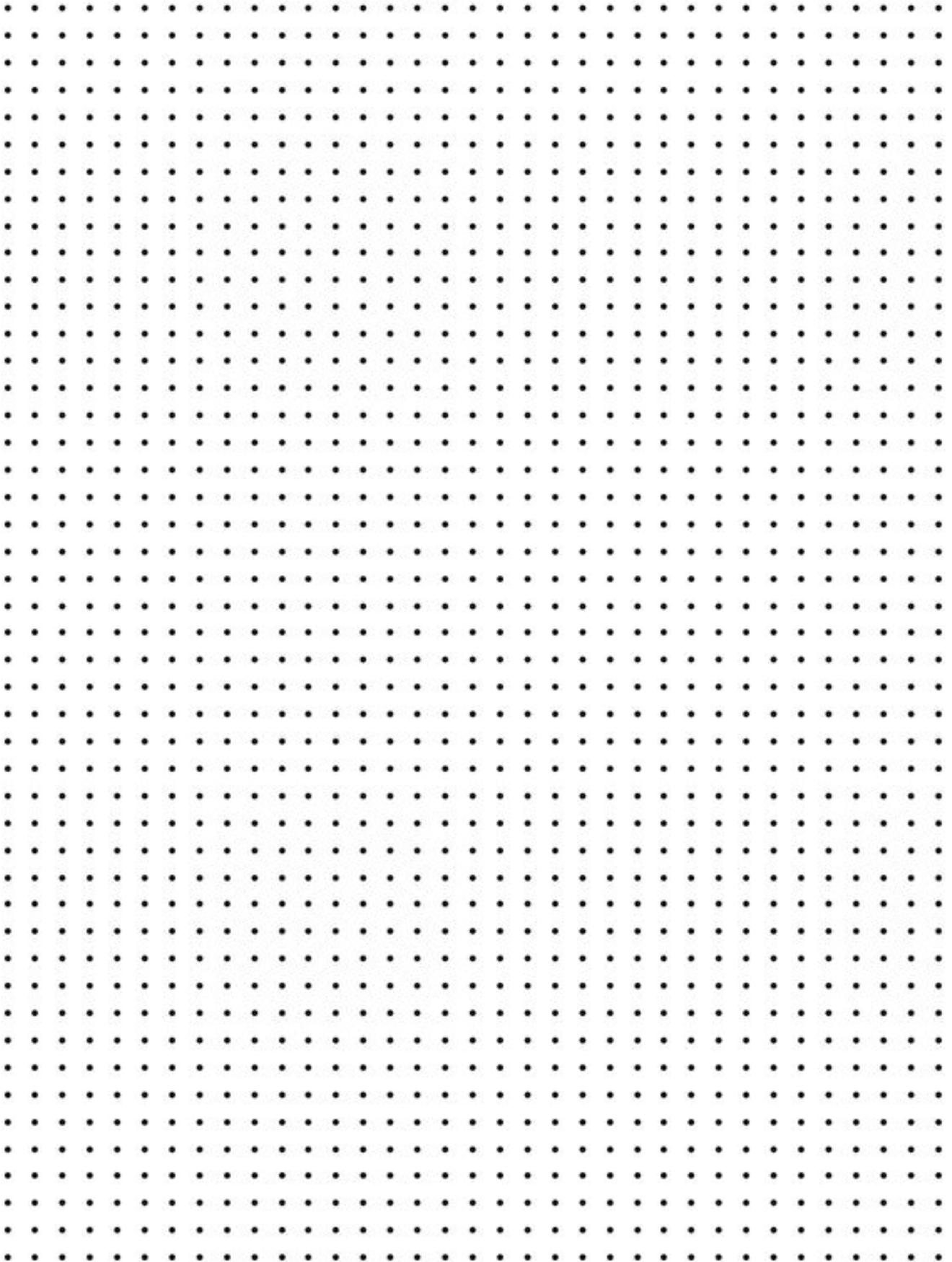
- Finalizar a aula com um breve questionamento sobre os conhecimentos adquiridos e abrindo espaço possíveis dúvidas restantes.

**Apostila**  
**Atividade 6: O teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos**

1) Recorte e monte a planificação do sólido abaixo:



2) Utilize o espaço abaixo para construir a planificação do hexaedro e do tetraedro.



**Slide**  
**Atividade 6: O teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos**

# POLIEDROS

ATIVIDADE 6: O Teorema de Euler aplicado a planificação de sólidos platônicos e grafos platônicos

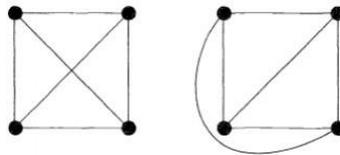
Prof.<sup>a</sup>: Agna Souza

2024

Slide 1: Apresentação do tema de aula.

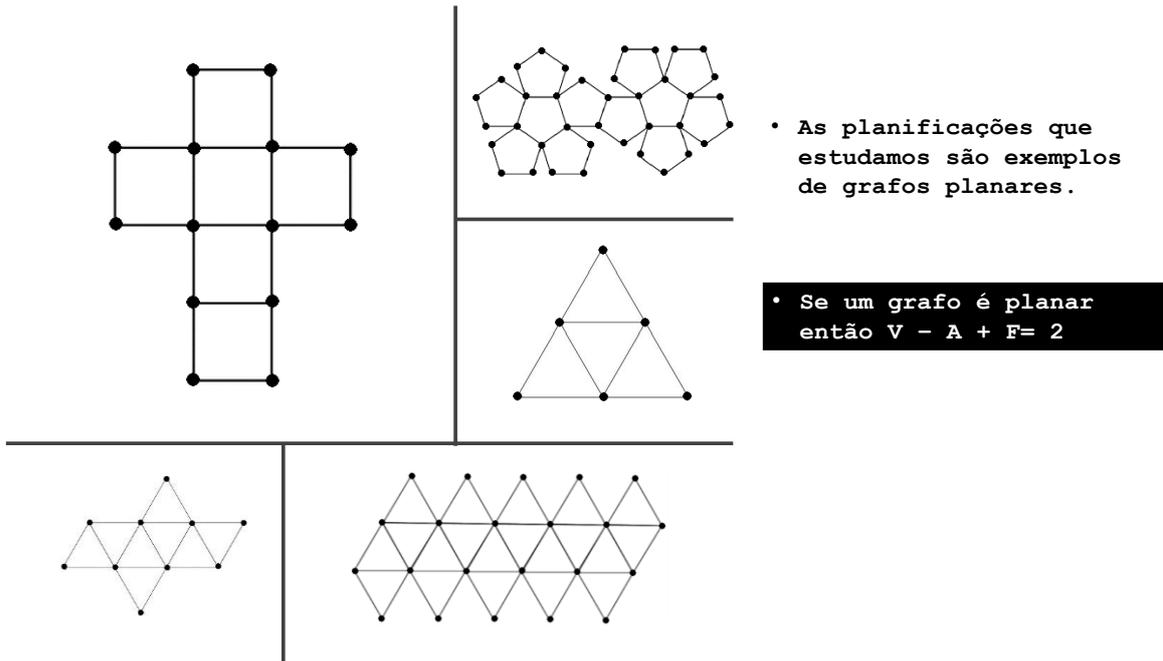
## Grafos planares

Um grafo planar é um grafo que pode ser desenhado no plano de forma que duas arestas quaisquer não tenham interseções geométricas, exceto no vértice para o qual ambas são incidentes. Se  $G$  é um grafo planar, então o qualquer desenho planar de  $G$  divide o plano em um conjunto de regiões, chamadas faces. Chamamos a área ilimitada fora do grafo de face infinita.



Grafo não planar à esquerda e grafo planar à direita

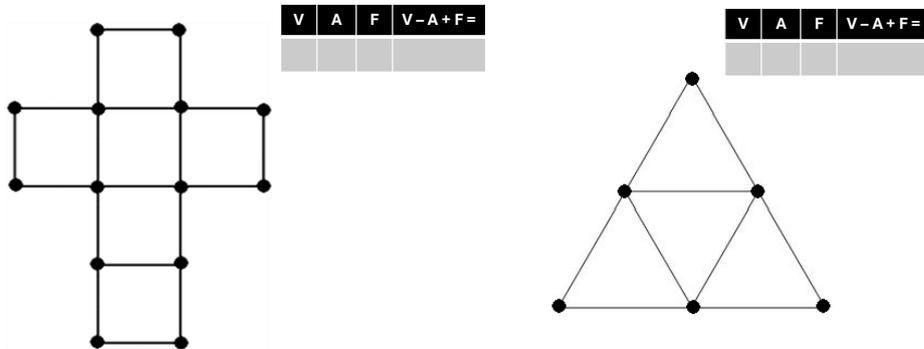
Slide 2: Definição e de exemplo de grafos planares.



Slide 3: Classificação das planificações como grafos planares e Teorema de Euler para grafos.

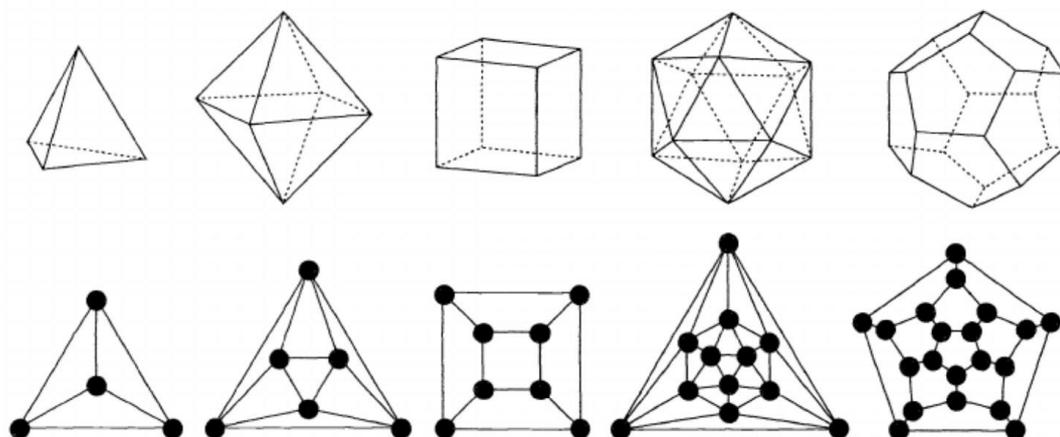
## Atividade

Verifique o Teorema de Euler nas planificações que você construiu anteriormente.



Slide 4: Aplicação do Teorema de Euler as planificações.

## Grafos platônicos



Slide 5: Grafos platônicos.