UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Welerson Silva de Carvalho

Uma abordagem da geometria analítica com ênfase para estudantes com deficiência visual

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Welerson Silva de Carvalho

Uma abordagem da geometria analítica com ênfase para estudantes com deficiência visual

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Deibsom da Silva

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

C331a Carvalho, Welerson Silva de.
Uma abordagem da geometria analítica com ênfase para estudantes com deficiência visual / Welerson Silva de Carvalho. – Recife, 2024.
80 f.; il.

Orientador(a): José Deibsom da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências.

1. Estudantes com deficiência visual. 2. Base Nacional Comum Curricular. 3. Geometria analítica. 4. Material didático 5. Ensino médio. I. Silva, José Deibsom da, orient. II. Título

CDD 510

Trocar essa página pela Folha de Aprovação

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por toda força concedida durante essa caminhada longa e por todos os desafios vencidos durante todo o processo do curso, tratamento do problema ocular, conciliação com a jornada de trabalho.

A minha família que é o alicerce diário e fonte de inspiração para que meus dias sejam melhores, aos meus filhos Miguel Ferreira e João Gabriel, a minha esposa Amanda Maria por todo o apoio, carinho e amor dedicado nessa jornada em todos os momentos que estive ausente para a execução do curso, por toda a preocupação e oração ao nosso Deus centro de nossas vidas e de nossa casa.

Aos meus pais, a senhora Maria José e de modo especial ao senhor Cícero Muniz hoje já falecido, pais adotivos que cuidaram e me instruíram em um lar de dez irmãos, nos dando amor e cuidado, nos guiando e ofertando o melhor que podiam, a educação.

Aos professores por todo conhecimento oferecido, por todo aprendizado compartilhado. Ao programa PROFMAT por oferecer o acesso de professores da educação básica para que possamos externar todas estratégias de conhecimento aos nossos estudantes.

Ao meu orientador Dr. José Deibsom da Silva por todo o acompanhamento, ensinamento, orientação e o olhar humanizado buscando compreender e participar de todo processo de construção da dissertação.

Finalmente externo a minha felicidade e gratidão por está concluindo mais uma etapa em minha vida, tendo conhecimento que toda honra e glória é de Deus e que sem ele nada disso seria possível, concluo com o ensinamento do MESTRE nosso Senhor Jesus Cristo, encontrado em Coríntios Cap 13-2 "Ainda que eu tenha o dom de profecia, saiba todos os mistérios e todo o conhecimento e tenha uma fé capaz de mover montanhas, se não tiver amor, nada serei".

.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

Analisando o ensino da geometria analítica para estudantes com deficiência visual e as possibilidades de aprendizagem para esses estudantes, baseando-se no currículo de Pernambuco e na base nacional comum curricular (BNCC), Organizamos o trabalho em um levantamento de dados estatísticos sobre as pessoas com deficiência visual inseridos na educação e o ensino da geometria analítica, fortalecendo o embasamento teórico por meio da BNCC e dos conceitos do ensino médio da geometria analítica. O desenvolvimento da parte teórica dos conceitos da geometria analítica, se concretiza com a construção do multiplano de geometria analítica (MULTIGEA) para que estudantes com deficiência visual possam, por meio do tato, explorar, compreender e resolver problemas matemáticos usando o MULTIGEA com fichas legendadas que facilitam a leitura tátil para estudantes não brailistas.

Palavras-chave: Deficiência visual, BNCC, MULTIGEA.

Abstract

Analyzing the teaching of analytical geometry for students with visual impairments and the learning possibilities for these students based on the Pernambuco Curriculum and the National Common Curricular Base (BNCC). We organized the work in a survey of statistical data on visually impaired people included in the education and teaching of analytical geometry, strengthening the theoretical basis through the BNCC and high school concepts of analytical geometry. The development of the theoretical part of analytical geometry concepts takes place with the construction of the analytical geometry multiplane (MULTIGEA) so that visually impaired students can, through touch, explore, understand and solve mathematical problems using MULTIGEA with subtitled cards that facilitate tactile reading for non-braillist students.

Keywords: visual impairments, BNCC, MULTIGEA

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O trabalho com conceitos da Geometria Analítica percorre toda a formação escolar de crianças e adolescentes, mantendo-se presente tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Entretanto, estudos de Karrer (2006), Santos (2008) e Dallemole (2010) mostram que os discentes têm grande dificuldade em organizar o pensamento de maneira matematicamente correta, principalmente, porque a Geometria Analítica associa assuntos geométricos com pensamentos algébricos e isso não é realizado de maneira tão fácil e simples pelos alunos.

Essa dificuldade de correlacionar geometria com álgebra é intensificada frente as limitações que a deficiência visual impõe aos alunos cegos, que se vêm muitas vezes limitados quanto a aprendizagem e entendimento da disciplina quando ministrada de maneira convencional. Desta maneira, é possível entender a importância do auxílio efetivo das escolas e instituições na inclusão destes alunos, a fim de promover recursos didáticos, equipamentos especiais e formações específicas para o ensino desta minoria, uma vez que a carência de infraestrutura se torna um empecilho no desenvolvimento de inclusão (SILVA et al, 2017). A transferência de informações para pessoa com deficiência visual, principalmente no ensino da matemática, empregando somente a verbalização, gera uma complexidade na compreensão, considerando que a visualização de pessoas cegas se dá de modo completamente tátil. Desta forma, a aplicação de materiais, tecnologias e metodologias de apoio tornam-se um recurso viável para amparar a educação inclusiva (PEREIRA et al, 2016).

Diante disso, este trabalho, desenvolvido para estudantes do 3° ano do Ensino Médio de colégio da rede pública de ensino de Pernambuco, visa apresentar uma abordagem dinâmica e inclusiva no estudo da geometria analítica no Ensino Médio para alunos com deficiência visual. O presente estudo foi dividido em 4 capítulos. No primeiro capítulo descrevemos alguns aspectos históricos da Geometria, especificamente da Geometria Analítica, e o levantamento de pontos sobre o ensino dessa disciplina, além de expor as dificuldades enfrentadas pelos pessoas com deficiência visual no Brasil e suas conquistas ao longo do tempo.

No segundo capítulo focamos na parte de cálculos matemáticos, abordando conceitos teóricos, definições, demonstrações e exemplos de alguns tópicos da geometria analítica. No terceiro capítulo apresentamos um material didático construído mediante a observação encontrada por uma estudante deficiente visual da rede pública de ensino, com base em suas limitações foi desenvolvido um multiplano da geometria analítica para potencializar o aprendizado tornando acessível para estudantes com deficiência visual e sem o conhecimento em braille. Apresentamos o processo de construção do MULTIGEA e suas aplicações. Por fim, no último capítulo, trazemos as considerações finais, onde relatamos os resultados que obtivemos. Neste capitulo foram resolvidos exercícios de geometria analítica por meio do MULTIGEA, testando essa ferramenta com estudantes da rede pública do estado de Pernambuco e avaliando como métodos alternativos podem auxiliar os educadores na transmissão de conhecimento para as pessoas com deficiência visual, transformando a sala de aula em um ambiente mais interativo, ofertando um produto de uma maleta compacta como recurso pedagógico e influenciando de maneira positiva no ensino inclusivo, uma vez que a utilização de objetos palpáveis torna o entendimento mais simples e intuitivo.

1 O ensino da geometria analítica e a necessidade de suporte aos alunos com deficiência visual

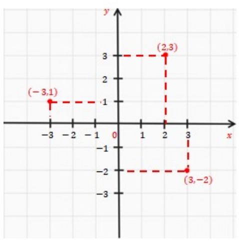
1.1 A geometria analítica

A palavra Geometria vem do grego geometrein, no qual Geo significa "terra"e metron significa "para medir". Portanto, a Geometria é o estudo das formas dos objetos presentes na natureza e das suas posições ocupadas, das relações e das propriedades relativas e essas formas (LUIZ, 2023).

O principal objetivo da geometria analítica é o estudo da geometria através da álgebra. De modo geral, a geometria analítica busca atribuir equações que, de alguma forma, representam os objetos geométricos estudados. Embora existam trabalhos iniciais realizados por Nicole d'Oresme no século XIV, reconhecemos René Descartes e Pierre de Fermat (século XVI-XVII) como os autores dessa área da matemática, que serviu de alicerce para o avanço do cálculo diferencial e integral e da física clássica (DE BRITO; DE ALMEIDA, 2015).

Descartes, ao associar a álgebra com a geometria, originou princípios matemáticos capazes de explorar as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, expressando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas. Descartes desejava expor em seu trabalho que um conjunto de termos algébricos seriam capazes de ser facilmente interpretados com pontos, retas e segmentos de reta num plano e desse modo seria possível solucionar problemas geométricos de forma algébrica (BOYER, 1974). A contribuição de Descartes possibilitou que os indivíduos compreendessem um ponto como um par ordenado de números no plano cartesiano (Figura 01). Sendo assim as retas, os círculos e outras figuras geométricas são simbolizadas por equações em x e y (SILVA, 2015).

Figura 1 – Ilustração de pontos de coordenadas no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, a geometria analítica está respaldada na concepção de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Logo, as linhas no plano são descritas através de equações, e consequentemente, é possível abordar algebricamente diversas questões geométricas, bem como, interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas (DANTE 2011).

1.2 A geometria analítica no ensino médio

De acordo com o artigo 35 da lei de diretrizes e bases da educação nacional, o ensino médio, fase final da educação básica, tem como finalidades

> A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996).

Sendo assim, o ensino médio, como fase final do processo de formação da educação básica, deve se estruturar para promover ao estudante uma formação com base unitária, no sentido de um método de pensar e compreender as determinações da vida social e produtiva, articulação ciência, tecnologia e cultura na perspectiva da emancipação humana (BRASIL, 2013).

No que tange a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos estados, do Distrito Federal e dos municípios e das propostas pedagógicas das instituições, cabe à Base Nacional Comum Curricular, que está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à construção humana integral e à criação de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, definir direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 1997).

A Base Nacional Comum Curricular, no âmbito de Matemática e suas Tecnologias, sugere a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. No que se refere ao pensamento geométrico, faz-se importante a estimulação do desenvolvimento de habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Ademais, são convocados a formular e resolver problemas em contextos diversos, empregando os conceitos de congruência e semelhança (BNCC). A Geometria trata dois tipos de propriedades, as associadas à posição relativa das formas e a de medidas, gerando duas maneiras distintas de pensar em Geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como ponto central quantificar comprimentos, áreas e volumes. Desta forma, para aprimorar esse raciocínio de maneira mais completa, o ensino de Geometria no ensino médio também deve contemplar o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos, relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos, propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais, análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como, desenho, planificações e construções com instrumentos. (HECK, 2019)

Conforme os parâmetros Curriculares Nacionais, a matemática no ensino médio tem uma relevância formativa, que auxilia a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, entretanto, desempenha também uma função instrumental, visto que é uma ferramenta útil para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas nas atividades humanas (BRASIL, 1997).

Pensando no ensino da geometria analítica, os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino médio (PNC+), vê como adequada a abordagem dessa subárea da matemática do 3º ano do ensino médio. Segundo os PCN+, o uso de temas mais abrangentes permite ao aluno a observar e utiliza um vasto número de informações e procedimentos, aprofundando sua percepção sobre o que significa pensar em matemática e utilizar conhecimentos obtidos para a análise e intervenção na realidade (BRASIL, 2002).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino médio, as propriedades que a geometria analítica trata são dois tipos:

> Associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes (BRASIL ,2002).

Na esfera da Geometria Analítica, o uso das formas geométricas para retratar ou visualizar partes do mundo real é uma habilidade importante para a compreensão e construção de modelos para a solução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver competências de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas (BRASIL, 2002).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio, parte do trabalho com geometria está estreitamente ligada às medidas que fazem a conexão entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. Contudo, o ensinamento das propriedades métricas que envolve cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas um fragmento do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si.

Ainda de acordo com os PCN+, para o desenvolvimento do raciocínio do aluno de forma mais completa,

> o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos (BRASIL, 2002).

Diante disso, observamos que o trabalho com a Geometria Analítica possibilita a junção entre geometria e álgebra, mas para que essa conexão seja relevante para o discente, o educador deve trabalhar as duas metodologias: "o entendimento de figuras geométrica, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométrica" (BRASIL, 2006).

Um dos principais objetivos da Geometria Analítica é relacionar a álgebra, forma abstrata, com a geométrica, forma concreta, e apesar de suas aplicações práticas, a Geometria Analítica também proporciona uma perspectiva abstrata em alguns campos abordados, principalmente no que se refere ao mundo vetorial. Diante disso, observamos que o ensino da Geometria Analítica se apresenta como um desafio, graças às dificuldades em transmitir aos alunos conceitos abstratos que são pertinentes da disciplina (FACUNDO, 2023; GIARDINETTO, 1997). E estes desafios se intensificam frente ao ensino especial, principalmente no que tange aos alunos com deficiência visual, exigindo dos educadores uma abordagem específica (OCHAITA; ROSA, 1995).

Portanto, o estudo da Geometria deve proporcionar aos educandos, sem distinção, o aperfeiçoamento da habilidade de desvendar problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, guiar-se no espaço, decifrar mapas, aferir e confrontar distâncias percorridas, identificar propriedades de formas geométricas básicas e saber empregar diferentes unidades de medida (BRASIL, 2006).

1.3 Deficiência Visual e Desafios Sociais

A visão é o meio mais relevante de interação entre o ser humano e o mundo externo. Bem como a audição, ela absorve sinais próximos ou distantes e possibilita organizar, a nível cerebral, as informações transportadas pelos outros órgãos dos sentidos. Entretanto, nem todos os indivíduos são capazes de enxergar, portanto variados graus de deficiência, que vão desde a perda parcial da visão até a total (GIL, 2000).

Nesse contexto, chama-se visão subnormal (ou baixo) à modificação da capacidade funcional resultante de aspectos como rebaixamento expressivo da acuidade visual, atenuação importante do campo visual e da sensibilidade aos contrastes e limitação de outras capacidades. Neste caso, o emprego de auxílios ópticos (como óculos, lupas etc.), permite que a pessoa de baixa visão explore os resíduos visuais, distinguindo vultos, a claridade, ou objetos a pouca distância. Entretanto, a visão se apresenta embaçada, diminuída, restrita em seu campo visual ou prejudicada de algum modo (GIL, 2000).

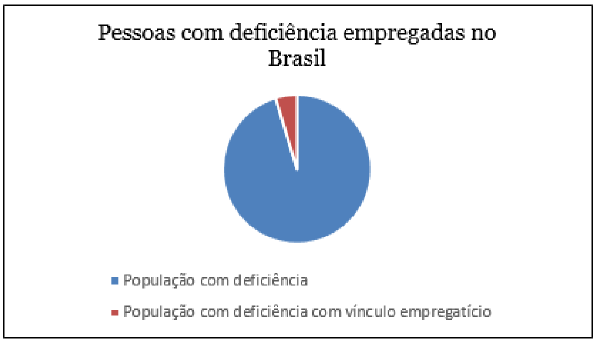
Outro grau para a ausência da visão é a cegueira, que corresponde à perda total da visão. Segundo o professor do Instituto Benjamin Constant, Antônio João Menescal Conde (2012):

> É considerado cego ou de visão subnormal aquele que apresenta desde ausência total de visão até alguma percepção luminosa que possa determinar formas a curtíssima distância. Na medicina duas escalas oftalmológicas ajudam a estabelecer a existência de agrupamentos de deficiências visuais: na acuidade visual (ou seja, aquilo que se enxerga a determinada distância) e o campo visual (a amplitude da área alcançada pela visão). O termo deficiência visual não significa, necessariamente, total incapacidade para ver (CONDE, 2012).

De acordo com os dados do censo demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2010, 18,6% da população brasileira apresenta algum tipo de deficiência visual. Dessa porcentagem, 6,5 milhões possuem deficiência visual severa, sendo que 506 mil tem perda total da visão (0,3% da população) e 6 milhões, elevada dificuldade para enxergar (3,2%). Estes dados, apesar de defasados, revelam a expressividade dessa parcela da população e a relevância de sua inclusão na sociedade, resultando na necessidade de disponibilização de oportunidades de ensino para atender a demanda dessa fração da população, conforme orientação da lei 7.853 de 24 de outubro de 1989, que trata da acessibilidade as pessoas com deficiência visual, integração ao mercado de trabalho e educação adequada e adaptada (LOPES; AFONSO; PIANEZZER, 2020; BRASIL, 1989).

De modo geral, as pessoas com deficiência visual lidam com uma variedade enorme de obstáculos para alcançar seus objetivos, seja no meio profissional, educacional ou social. Segundo Fátima El Kadri (2021), no site Rede Empresarial de Inclusão Social, o mercado de trabalho, ainda apresenta resistência de muitos empregadores em cumprirem a Lei de Cotas (8213/1991), que é o mecanismo mais efetivo para garantir o direito ao trabalho para as pessoas que apresentam alguma deficiência. De acordo com o Ministério do Trabalho e Emprego (MTE), dados do censo 2010, divulgados pela Secretaria de Inspeção do Trabalho (SIT) do MTE em alusão ao Dia Nacional da Luta da Pessoa com Deficiência, demostram este cenário no mercado de trabalho entre os 18 e 64 anos. Deste total, 441.335 delas possuem vínculo empregatício com alguma empresa, segundo levantamento feito via sistema e do esocial até junho de 2022, o que corresponde a apenas 4% da população com deficiência (Figura 2).

Figura 2 – Grafico da relação entre a população total de pessoas com deficiência e o número de pessoas com deficiência empregadas no Brasil.



Fonte: Ministério do Trabalho e Emprego, 2023.

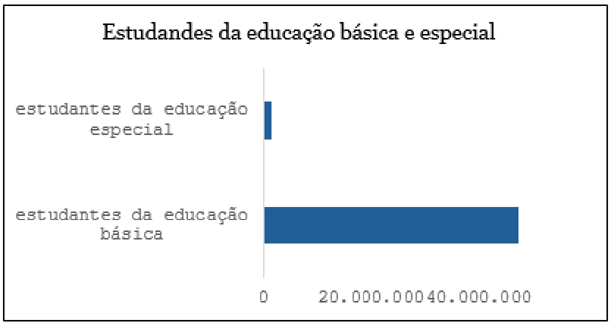
Observa-se ainda que as empresas que atendem a lei, priorizam a contratação de pessoas com deficiência físicas mais leves ou auditivas, deixando os deficientes visuais e intelectuais na extremidade final dessa fila, alegando que as adequações necessárias para as pessoas com deficiência visual, como a sinalização em Braille e a contratação de sofwares específicos para quem tem baixa visão, são mais caras (EL KADRI, 2021).

Ainda pensando em acessibilidade, a lei brasileira regra em pauta a sinalização obrigatória para proporcionar a integração das pessoas com deficiência através de normas de acessibilidade. Apesar disso, faltam calçadas com piso tátil em todos os lugares, tornando ainda mais árduo a travessia, embora a Lei Brasileira de Inclusão (LBI) (13.146/2015) preveja a sinalização em braille e piso tátil nos espaços públicos (EL KADRI, 2021). Cruz e colaboradores (2020), avaliando o enfrentamento das barreiras de acessibilidade para pessoas com deficiência e/ou mobilidade reduzida, demostram que as barreiras arquitetônicas foram citadas pelos participantes do estudo como o principal fator impeditivo de suas atividades, com forte impacto na inclusão social. Percebendo que não é uma deficiência que os tornam incapazes, mas sim as barreiras impostas que limitam as suas capacidades. Outro tema que tem destaque na LBI é a acessibilidade na comunicação. A lei estabelece que todos os sites da internet ofereçam tecnologias assistivas para possibilitar a navegação de pessoas com deficiência visual. Contudo, uma pesquisa realizada em 2022 pelo movimento Web para todos e a Big Data Corp, apontou que apenas 0,46% dos mais de 21 milhões de sites brasileiros são acessíveis para pessoas com deficiência, esses resultados mostraram que os números gerais pioraram praticamente em todos os sites em geral, o que mostra que essa determinação está muito longe de ser cumprida.

O sistema de educação também não apresenta um cenário muito distinto, dado que, apesar de a política Nacional de Educação prever a implementação de recursos para criar um ambiente inclusivo em sala de aula, com materiais em Braille e outras tecnologias assistivas, praticamente não existem salas de aula integralmente acessíveis para alunos com deficiência visual, além da necessidade de formação de professores, um dos principais responsáveis pelo acolhimento e com função de integrar o deficiente dentro do contexto (EL KADRI, 2021; DO ESPIRITO SANTO; DE BARROS LOBO, 2023).

De acordo com dados extraídos do Censo Escolar 2022-MEC/Inep da plataforma diversa, que é uma iniciativa do Instituto Rodrigo Mendes e que tem como objetivo construir e compartilhar conhecimento sobre boas práticas de educação inclusiva, há 47.382.074 estudantes da educação básica matriculados, e destes, 1.527.794 são estudantes da educação especial (Figura 3), resultando em uma proporção de 3,2% de matrículas da educação especial.

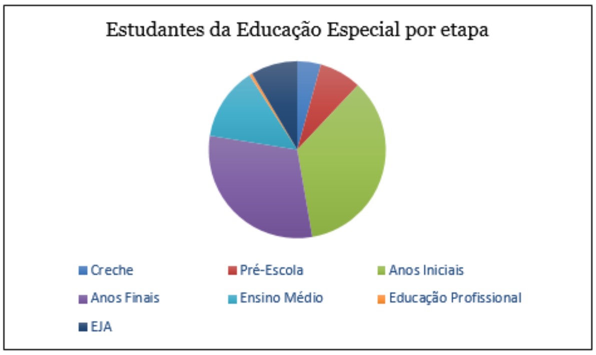
Figura 3 – Comparativo entre estudantes da educação básica e da educação especial no Brasil em 2022.



Fonte: Diversa, 2022

Analisando os dados de indicadores da plataforma, observamos que os números de estudantes da educação especial se concentram nos anos iniciais (35%), e que em contra partida, o ensino profissional (0,58%) detém da menos porcentagem de alunos matriculados (Figura 4), consequência da maior taxa de abandono escolar e das dificuldades encontradas no sistema de ensino por essa parcela de estudantes

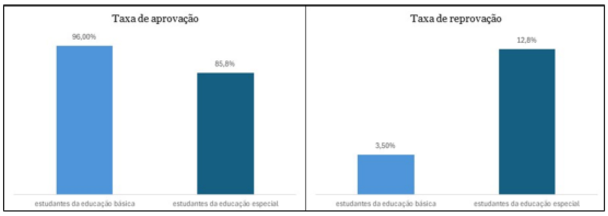
Figura 4 – Gráfico de estudantes da educação especial por etapa de escolarização no Brasil em 2022.



Fonte: Diversa, 2022.

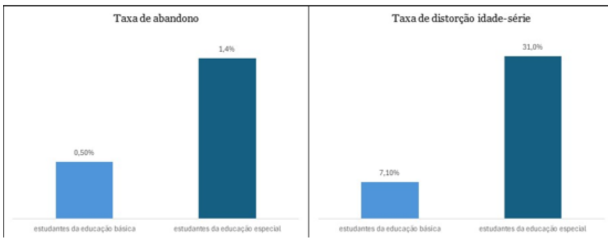
Outros indicadores também expressam a dificuldade dos alunos portadores de alguma deficiência de apresentarem desempenhos superiores, frente a acessibilidade reduzida e a falta de estrutura e preparo escolar. Os dados abaixo apontam que os alunos com deficiência apresentam maiores taxas de reprovação, abandono escolar e de distorção idade-série (Figura 5 e 6).

Figura 5 – Comparativo das taxas de aprovação e reprovação entre alunos da educação básica e educação especial no Brasil em 2022



Fonte: Diversa, 2022.

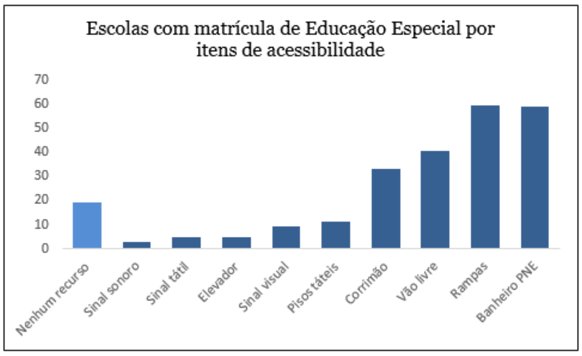
Figura 6 – Comparativo das taxas de abandono e de distorção idade-série entre alunos da educação básica e educação especial no Brasil em 2022



Fonte: Diversa, 2022.

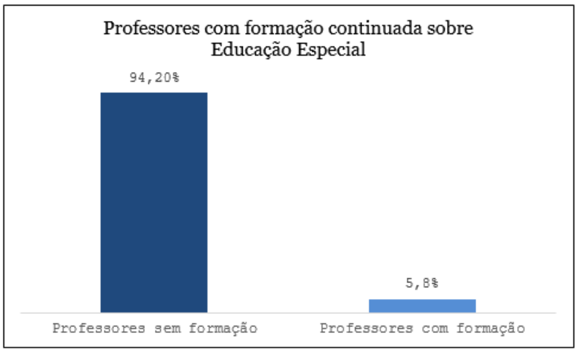
Analisando a estrutura física das escolas com matrículas de educação especial, observamos, que apesar da implementação de itens de acessibilidade, ainda temos muitas lacunas a serem preenchidas nas escolas para possibilitar uma ampla inclusão desses educandos. Indicadores de acessibilidade demostram que ainda há cerca de 19% das escolas que não possuem nenhum tipo de recurso (Figura 7), outro dado importante é a deficiência de profissionais (professores) com formação adequada à educação especial, dados da plataforma Diversa indica que 94,2% dos professores regentes não possuem formação continuada sobre educação especial

Figura 7 – Porcentagem de escolas com matrícula de Educação Especial com recursos de acessibilidade no Brasil em 2022.



Fonte: Diversa, 2022.

Figura 8 – Porcentagem de professores regentes com formação continuada sobre Educação Especial no Brasil em 2022.



Fonte: Diversa, 2022.

Em vista disso, observamos que apesar da preocupação da sociedade em garantir condições de igualdade e equidade às pessoas com deficiência em geral e dos passos dados ao longo dos anos, ainda existem muitos obstáculos a serem transcendidos para a garantia dos direitos dessas minorias.

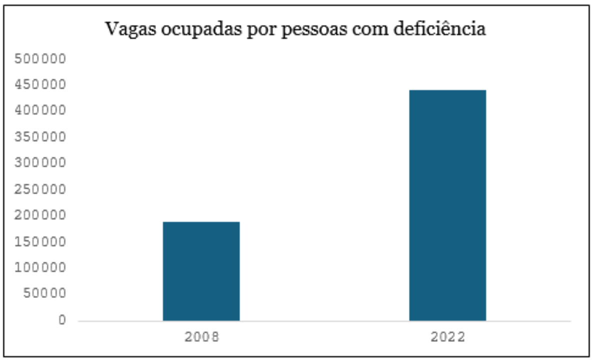
1.4 Direitos e conquistas das pessoas com deficiência

Apesar de estarmos distante de uma realidade totalmente igualitária, no que diz respeito às pessoas com deficiência, é inegável as mudanças e as conquistas ao longo dos últimos anos. Os deficientes passaram a serem enxergados como cidadãos, integrantes da sociedade, em todos os seus setores de espaços.

Várias políticas públicas foram implementadas por meio de leis, visando inclusão e o direito a cidadania de pessoas com deficiência. Um exemplo é o decreto-lei 5.296 de 2004, que orienta a execução de projetos arquitetônicos e urbanísticos com recursos que promovem a acessibilidade e autonomia aos usuários com deficiência. Segundo este decreto, é obrigatório que os estabelecimentos como escolas, hospitais, hotéis, empresas, aeroportos, shopping, entre outros, recebam as pessoas com deficiência visuais ou com visão reduzida, através da execução das normas de acessibilidade, que visam sinalizações específicas nos ambientes, como é o caso das placas em Braile e do piso tátil.

No setor profissional também observamos mudanças significativas. De acordo com o Ministério do trabalho e Emprego (2023), a inclusão das pessoas com deficiência e reabilitados se tornou uma ação específica do seu Plano Plurianual (PPA) em 2008. Desde então, o número total de vagas ocupadas por pessoas com deficiência e beneficiários reabilitados no Brasil tem crescido significadamente, saltando de 189.112 em 2008 para 441.335 em 2022, o que representa um aumento de 57,12% de pessoas com deficiência empregadas (Figura 9).

Figura 9 – Gráfico das vagas ocupadas por pessoas com deficiência em 2008 e 2022.



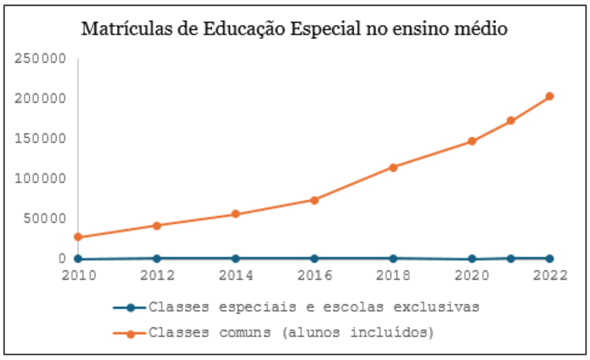
Fonte: Ministério do Trabalho e Emprego, 2023.

As mudanças e as conquistas também se estendem ao setor educacional. De acordo com a Constituição Federal de 1988, em seu artigo 205, a educação é um direito fundamental compartilhado entre estado, família e sociedade, que visa o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988).

Dessa maneira, visando a garantia do compromisso com os alunos com deficiência e reconhecendo a necessidade de práticas pedagógicas inclusivas e de diferenciação curricular, conforme estabelecido na Lei Brasileira de Inclusão da pessoa com deficiência (Lei nº 13.146/2015), que em 2010, o Conselho Nacional de Educação decretou novas diretrizes curriculares nacionais, expandindo e estabelecendo o conceito de contextualização como "a inclusão, a valorização das diferenças e o atendimento à pluralidade e à diversidade cultural resgatando e respeitando as várias manifestações de cada comunidade", conforme enfatiza o Parecer CNE/CEB nº 7/2010.

De acordo com os dados do Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Texeira (Inep) do Censo Escolar 2022, no ensino médio a inclusão de estudantes de educação especial em salas comuns representou o maior salto. Já as matrículas em classes especiais se mantiveram praticamente inalteráveis em 12 anos. Durante esse intervalo observamos um avanço de 633,48% de alunos especiais matriculados, onde os alunos incluídos saíram de 27.695 em 2010 para 203.138 em 2022 (Figura 10). O crescimento especial dos estudantes em turmas regulares e a queda do contexto de classe especial é consequência da Política Nacional de Educação Especial, implantada pelo Ministério da educação em 2008.

Figura 10 – Gráfico da evolução das matrículas de estudantes da Educação Especial no ensino médio, por local de atendimento, entre 2010 e 2022 no Brasil.

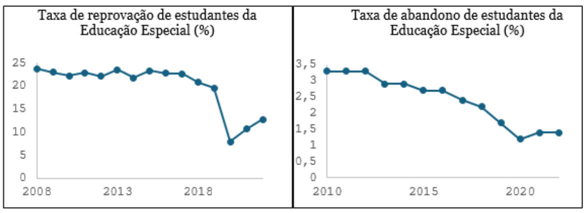


Fonte: Inep/Censo escolar 2022.

Em dados mais recentes, o Censo Escolar 2023 indica que o percentual de alunos com deficiência, transtorno do espectro autista ou altas habilidades matriculados em classes comuns tem crescido progressivamente para a maioria das etapas de ensino. Com exceção de Educação de Jovens e Adultos, as demais etapas da educação básica exibiram mais de 90% de alunos incluídos em classes comuns em 2023. Nesse contexto de inclusão, a maior proporção de alunos incluídos foi mais uma vez observada no ensino médio, com inclusão de 99,5%(INEP, 2023).

Outros indicadores também apontam uma redução na taxa de abandono escolar e na taxa de reprovação de alunos com deficiência ao longo dos últimos 14 anos (Figura 11), como resultado de políticas públicas de inclusão e de acompanhamento educacional especial.

Figura 11 – Gráfico da evolução da taxa de reprovação e da taxa de abandono de estudantes da Educação Especial entre 2008 e 2022 no Brasil.



Fonte: Diversa, 2022.

Amplamente falando, muitas conquistas (na forma de lei, diretrizes e decretos) foram asseguradas às pessoas portadoras de deficiência. Como por exemplo, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que preconiza o respeito à diversidade humana e o atendimento educacional especializado gratuito aos educandos com deficiência, a todos os níveis, etapas e modalidades de ensino; a Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015, que estabelece o Estatuto da Pessoa com deficiência, destinada a assegurar e a promover, em condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais por pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social e cidadania, sem discriminação; entre outras. De maneira geral, muitas ações políticas foram implementadas, eliminando barreiras, zelando pelos direitos e visando a inserção de pessoas com deficiência na sociedade.

1.5 O processo de alfabetização de alunos com deficiência nas escolas e a geometria analítica.

Diante da realidade exposta por esses indicadores e da experiência com uma estudante deficiente visual da rede pública do ensino médio de Pernambuco, que não possui alfabetização em Braille, que surgiu a motivação e inspiração para o presente trabalho, com objetivo de buscar diferentes meios pedagógicos para sanar suas necessidades de aprendizagem.

Embora existam avanços consideráveis a cerca da Educação Inclusiva, ainda percebe-se no exercício da docência da maioria dos professores de matemática, uma certa hesitação para ministrar matemática, especialmente a geometria analítica a estudantes com deficiência visual, em razão da necessidade de aplicação de outros recursos metodológicos que não façam a visão o principal acesso de entrada da informação (PAVANELLO, 1993).

A cegueira carrega uma restrição relevante no processo de ensino e aprendizagem, demandando que as práticas educativas junto às pessoas com deficiência visual sejam analisadas de forma a atender suas singularidades, através dos recursos alternativos. Neste sentindo, o tato desempenha um papel primordial para a aprendizagem, uma vez que "O sistema sensorial mais importante que a pessoa cega possui, para conhecer o mundo, é o sistema háptico ou tato ativo"(OCHAITA;ROSA,1995).

De acordo com o Ministério da educação (MEC) (BRASIL, 2022).

> A criança com deficiência visual necessita de um programa de intervenção precoce não apenas para a minimização de suas dificuldades, mas, principalmente, porque a família e a creche precisam de ajuda e apoio para compreenderem as especificidades de desenvolvimento e aprendizagem decorrentes da ausência da visão (BRASIL,2002,p.29).

O sistema Braille representa uma ferramenta importante para o ensino e a autonomia de pessoas com deficiência. Este sistema é um código formado por sinais em relevo que possibilitam a leitura e a escrita das pessoas com deficiência visual parcial ou total. De acordo com o MEC (BRASIL,2002), "a criança cega deve ter acesso à máquina braille desde os quatro anos, para que se adapte a seu instrumento de escrita e desenvolva habilidades e domínio dessa máquina de forma lúdica e prazerosa".

Analisando as dificuldades encontradas por um estudante deficiente visual e os desafios do ensino da geometria analítica, agravada em muitos casos encontrados na rede pública de ensino quando o estudante não teve o acompanhamento inicial na idade certa e chega ao ensino médio com essa deficiência que gera mais dificuldade no aprendizado da geometria analítica. Nesse contexto, o estudante utiliza-se do tato como mecanismo de compreensão e aprendizado.

Em estudos sobre a formação social da mente, Vygotsky desenvolveu o conceito de compensação, que está associado com a estimulação de vias alternativas para compensar o órgão com deficiência. Nessa perspectiva, "o cego se refina de um modo compensador à capacidade do tato, não através do aumento da sensibilidade, mas sim através da exercitação e da observação e da compensação das diferenças"(VYGOSTSKY,1984). Dessa maneira, na concepção de Vygostky, a pessoa com deficiência visual desenvolve processos compensatórios para vencer as limitações impostas pela cegueira, sugerindo que os indivíduos cegos disponham de um potencial para o desenvolvimento mental normal, sendo viável sua total integração na nossa sociedade"(VEER;VALSINER,1999).

Apesar de todas as dificuldades encontradas no ensino público, deve-se buscar meios pedagógicos para que o conhecimento chegue a todos de forma integral, desse modo se torna imprescindível a utilização de ferramentas táteis para que estudantes que não possuem o conhecimento de braille possam aprender geometria analítica.

A abstração da geometria analítica gera de modo geral a dificuldade na compreensão da geometria analítica, desse modo a criação do multi plano de geometria analítica legendado permite que todos os envolvidos no processo do ensino aprendizagem possam aprender de forma prática, acessível e autônoma. Contudo o professor não deve permitir que esses ou outros empecilhos sirvam como alegação para o descaso com a disciplina de geometria analítica. É primordial que o profissional disponha de uma conduta crítica e seja capaz de desviar de todos esses obstáculos, seja reconsiderando lacunas na -conteúdos geométricos, como por exemplo o uso de materiais concretos, que podem ser preparados pelo próprio professor (ABREU,2014).

Perante , o exposto, fica claro que a educação inclusiva necessita de um processo de modificação da escola, não apenas em seu aspecto físico, mas também em seu setor didático-pedagógico, para que os educandos consigam ter acesso e oportunidade educativa e social compatível com suas diferenças (MITTLERR,2003).

2 Geometria analítica: Teoria e conceitos

A Geometria analítica está presente na educação básica, no ensino fundamental II e no ensino médio, Neste capítulo será elencado alguns tópicos da geometria analítica os quais podem ser desenvolvidos para estudantes do 3° ano do ensino médio com o auxílio do multi plano de geometria analítica.

Para esse objetivo, foram analisadas algumas Obras Reis e Silva (1996), Dante (2005), Santos (2012) e Paulo Winterle (2014). Nesse sentido após a análise listamos alguns tópicos que podem ser ensinados e aprendidos por um estudante deficiente visual que não possui a compreensão do braile, buscando uma proposta pedagógica incluindo a ludicidade como metodologia de ensino, por meio do multi plano. Estará disposto a posterior o processo de criação dessa metodologia e suas aplicações para que esse eixo de conhecimento possa se consolidar como ferramenta capaz de possibilizar a integridade do estudante.

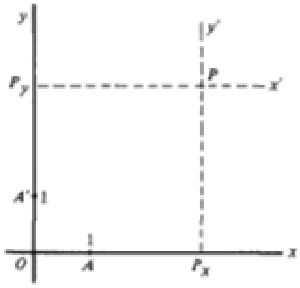
2.1 O plano

2.1.1 Plano cartesiano

O sistema cartesiano ortogonal é constituído por dois eixos perpendiculares entre si (eixo Ox e eixo Oy), que se cruzam em um ponto denominado de origem do sistema, e que caracterizam o chamado plano cartesiano. O eixo horizontal (Ox) é chamado eixo das abscissas e o eixo vertical (Oy) é o eixo das ordenadas. Estes eixos separam o plano em quatro quadrantes que recebem numeração no sentido anti-horário.

O plano é definido pelo par de retas perpendiculares Ox e Oy, tal como mostra a figura a seguir. Usando a unidade OA igual à OA' e sendo P um ponto qualquer do plano, a partir de P podemos traçar uma única paralela x' à reta x e uma única paralela y' à reta y. Como se verifica, estas paralelas interceptam, ou seja, cruzam as retas x e y, respectivamente, nos pontos P_x e P_y. Sendo x o número equivalente ao ponto P_x e y o número correspondente a P_y, estes dois números x e y definem o ponto P, no seguinte sentido: conhecendo o valor de x e y, podemos estabelecer os pontos P_x e P_y e assim, traçar as paralelas x' e y'. Onde estas paralelas se interceptam é o ponto P. Os números x e y são chamados de abscissa e ordenada, respectivamente, do ponto P, eles compõem as coordenadas de P. Para designar que o ponto P possui abscissa x e ordenada y utilizamos a notação $P(x, y)$.

Figura 12 – Representação de plano cartesiano



Fonte: Autoria própria.

2.1.2 Localização de pontos no plano cartesiano

O plano cartesiano é um instrumento matemático utilizado para localização de pontos. Os eixos no plano cartesiano são retas perpendiculares chamadas de eixo das abcissas (ou eixo do x) e eixo das ordenadas (ou eixo do y). Cada ponto do plano cartesiano possui uma coordenada em relação ao eixo das abcissas e uma coordenada em relação ao eixo das ordenadas. As coordenadas de cada ponto são representadas por um par ordenado (x, y).

Para localizar um ponto em um plano cartesiano, utilizamos a sequência prática:

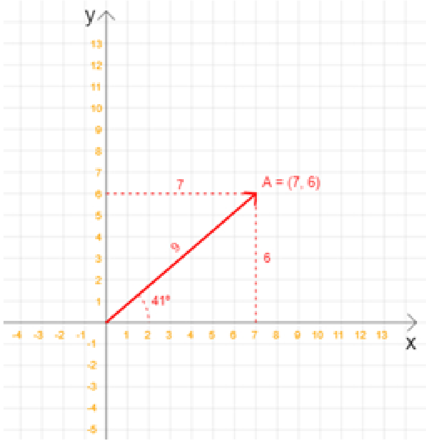
- O 1º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das abscissas.
- O 2º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das ordenadas.
- No encontro das perpendiculares e paralelas aos eixos Ox e Oy, por esses pontos, determinamos o ponto procurado.

2.1.3 Vetores

Geometricamente falando, os vetores são representações de segmentos de retas orientados, ou seja, com um sentido de percurso, seja no plano ou no espaço. A ponta da seta é chamada de ponto final ou extremidade e a outra ponta é chamada de ponto inicial ou origem do segmento.

Em um gráfico, onde $(x, y) \neq (0, 0)$, além do ponto, podemos atribuir ao par (x, y) uma seta, como indica a Figura 13. À vista disso, um par ordenado $(x, y) \neq (0, 0)$ pode ser simbolizado graficamente por um ponto ou por um segmento de reta com seta. Quando empregamos uma seta para representar (x, y), podemos vincular a este par ordenado direção, sentido e módulo. A direção e o sentido do par (x, y) são, respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. De maneira geral, um objeto ao qual se pode associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado de vetor. Já o módulo do par (x, y) é o número $\sqrt{x^2 + y^2}$, que corresponde ao comprimento da seta. Costumamos representar um vetor por uma letra minúscula, por exemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

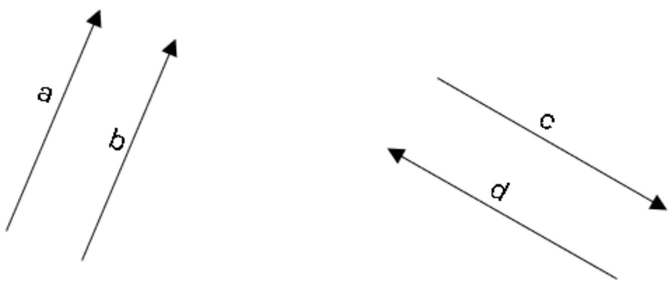
Figura 13 – Representação de um vetor no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria.

Dizemos que dois vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ no plano cartesiano são iguais, $\vec{u} = \vec{v}$, se, e somente se, $x_u = x_v$ e $y_u = y_v$. Desta forma, os vetores estão em segmentos de reta paralelos, podendo ser coincidentes ou não, como por exemplo, na Figura 14, onde $a = b$. Por outro lado, dois vetores são opostos se têm o mesmo comprimento e direções opostas. De maneira similar, estarão em segmentos de retas paralelos, coincidentes ou não. Neste caso, a oposição é marcada por sinal negativo: $c = -d$.

Figura 14 – Representação de vetores iguais (a e b) e opostos (c e d).



Fonte: Autoria própria.

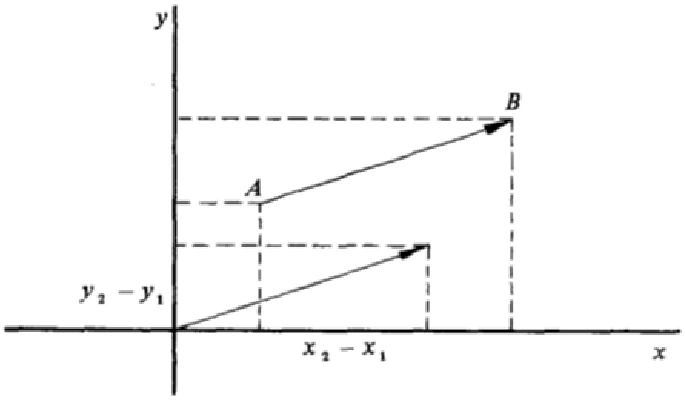
Em contrapartida, ao par ordenado $(0, 0)$ não se podem associar os conceitos de direção e sentido. Entretanto, $O = (0, 0)$ é chamado vetor nulo. Um segmento nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem, ou seja, é determinado por um par de pontos coincidentes.

Em alguns casos, a representação gráfica de um vetor por uma seta não parte necessariamente da origem Figura 14. Por exemplo, os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ determinam o vetor

$$\overrightarrow{AB} = (x_b, y_b) - (x_a, y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a).$$

Nesta situação, a seta que simboliza o vetor $\overrightarrow{AB}$, iniciando da origem, e a seta com origem em A e extremidade em B, dispõem do mesmo módulo, direção e sentido. Sendo assim, de acordo com o interesse, utilizamos uma ou outra para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$.

Figura 15 – Representação de vetor $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Autoria própria

2.1.4 Distância entre pontos

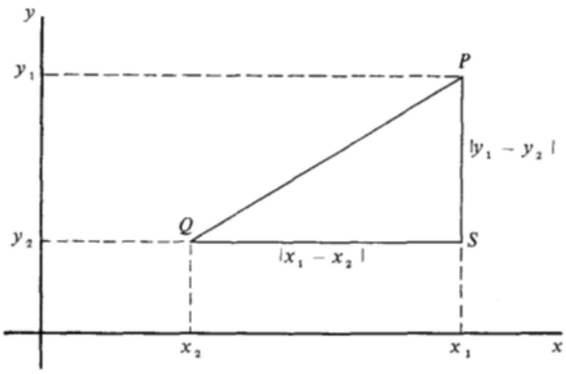
A distância entre dois pontos A e B, por exemplo, no plano $x0y$, é a medida do segmento AB. Em geometria analítica podemos calcular a distância entre dois pontos por meio de suas coordenadas. Sejam os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ dois pontos quaisquer do plano. Como representa a Figura 16, a partir de A e B, podemos criar o triângulo retângulo $\triangle ABC$. Em termos das coordenadas de A e B, as medidas dos catetos deste triângulo são $|x_a - x_b|$ e $|y_a - y_b|$. Consequentemente, a medida de sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Este número é chamado distância de A a B e é indicado por $d(A, B)$, isto é, por definição

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Figura 16 – Representação de distância entre os pontos A e B



Fonte: Autoria própria.

2.1.5 Alinhamento entre pontos

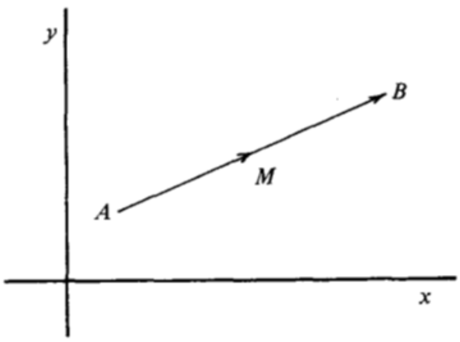
Três pontos $A(x_a, Y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_b, y_b)$ estão alinhados, ou são colineares, quando é possível construir uma reta que passa pelos três pontos.

Aplicando a notação e o conceito de vetores podemos dizer que, pressupondo os pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ os três pontos estão alinhados ou, o ponto B pertence à reta que passa por A e C se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \Lambda\overrightarrow{BC}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.1.6 Ponto médio

O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que divide a reta em duas partes de iguais medidas. Por exemplo, para calcular as coordenadas do ponto médio M do segmento AB em função das coordenadas de A e B. Sejam $C(x_a, y_a)$, $D(x_b, y_b)$ e $M(x, y)$. Pretendemos calcular x e y em função de x_a, y_a, x_b e y_b, de acordo com a Figura 17.

Figura 17 – Representação do ponto médio.



Fonte: Autoria própria.

Sendo M o ponto médio de AB, temos

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

Entretanto,

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_a, y - y_a) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_{-}y_a).$$

Portanto,

$$2(x - x_a, y - y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a) \quad \text{ou} \quad (2x - 2xa, 2y - 2ya) = (xb - xa, yb - ya),$$

onde temos

$$2x - 2x_a = x_b - x_a \quad \text{e} \quad 2y - 2y_a = y_b - y_a.$$

Explicitando x e y, encontramos

$$x = \frac{x_a + x_b}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

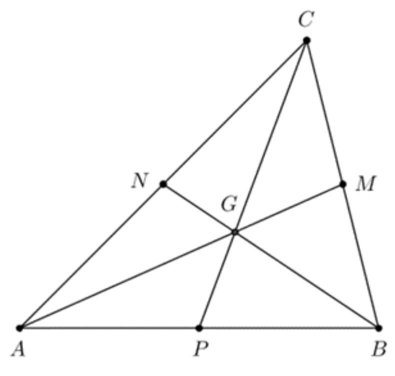
Logo,

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

de modo que as coordenadas do ponto médio de AB são as médias aritméticas das coordenadas de A e B.

A figura exposta a posterior é uma ilustração para quando as representações vetoriais formam uma figura, como por exemplo a formação de um triângulo, desse modo a mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do seu lado oposto. Ao determinar as medianas de um triangulo tem-se o baricentro como intercessão das medianas. 18, os segmentos AM, BN e CP são as medianas do triângulo ABC e G é o seu baricentro.

Figura 18 – Representação das medianas do triangulo ABC e seu baricentro G.



Fonte: Autoria própria.

2.1.7 Equações paramétricas da reta

Sendo $v = (a, b)$ um vetor não nulo e $A(x_0, y_0)$ um ponto do plano. Sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém B. Afirmar que r tem a mesma direção de v significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v. Assim, um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = tv,$$

para algum número real t. Ou, em termos de coordenadas,

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b).$$

Esta equação é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt, \end{aligned}$$

As equações, chamadas equações paramétricas da reta, são de uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor $v = (a, b)$, chamado vetor diretor da reta r.

2.1.8 Equação geral da reta

Para toda reta r do plano está associada uma equação na forma $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são números reais e a e b não são simultaneamente nulos. Qualquer par ordenado (x, y) que satisfaz a equação citada representa um ponto de r. Determinaremos a equação da reta é utilizando a condição de alinhamento de três pontos. Considerando que os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, consideremos um ponto genérico $G(x, y)$ pertencente à reta determinada por A e B, Como os pontos estão alinhados efetuamos o cálculo do determinante da matriz de ordem 3x3, para encontrar a equação da reta.

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos

$$x_a y_b + x y_a + x_b y - x y_b - x_a y - x_b y_a = 0$$

$$x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a) + x_a y_b - x_b y_a = 0.$$

Por fim, fazendo $y_a - y_b = a$, $x_b - x_a = b$ e $x_a y_b - x_b y_a = c$, temos:

$$\underbrace{(y_a - y_b)}_{a} x \quad + \quad \underbrace{(x_b - x_a)}_{b} y \quad + \quad \underbrace{x_a y_b - x_b y_a}_{c} \quad = 0$$

Assim temos, $ax + by + c = 0$, que é chamada de equação geral da reta.

2.1.9 Equação reduzida da reta

Tomando a equação geral de uma reta não vertical $r' : ax + by + c = 0$, podemos isolar y:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, temos:

$$r : y = mx + n$$

denominada equação reduzida da reta. Onde m e n são, respectivamente, os coeficientes angular e linear, e x e y são, respectivamente, a variável independente e dependente. Por meio do valor do coeficiente angular, é possível saber se a reta é crescente, decrescente ou constante. Já o coeficiente linear mostra o ponto em que a reta intercepta o eixo vertical y.

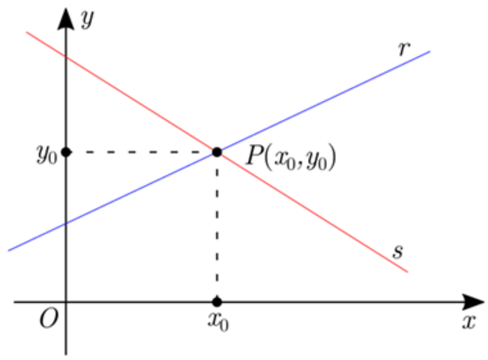
2.1.10 Interseção de retas

Duas retas podem cruzar-se em 0, 1 ou infinitos pontos. No primeiro caso, elas são chamadas paralelas; no segundo, elas são chamadas concorrentes e o ponto de encontro entre elas é chamado ponto de interseção; no terceiro caso, se duas retas possuem dois pontos em comum, então elas obrigatoriamente apresentam todos os pontos em comum e são chamadas coincidentes. Considerando a reta t e u e as suas respectivas equações gerais das retas, $a_t x + b_t y + c_t = 0$ e $a_u x + b_u y + c_u = 0$. Representando-as em um plano cartesiano, iremos perceber que são concorrentes, pois possui o ponto A em comum. O sistema formado com as equações gerais das retas terá como solução o par ordenado (x_0, y_0) que representa o ponto de intersecção. Para encontrarmos as coordenadas (x, y) do ponto de intersecção das duas retas, é necessário resolvermos o sistema composto pelas equações que descreve cada uma delas. Portanto, a solução do sistema é o ponto $P(x_0, y_0)$ que satisfaz ambas as equações. Sejam duas retas r e s, cujas equações em sua forma geral são dadas por:

$$\begin{cases} r: & a_a x + b_a y + c_a &= 0 \\ s: & a_b x + b_b y + c_b &= 0 \end{cases}$$

Ao encontrarmos a solução desse sistema, obteremos o ponto de intersecção entre as duas retas. Graficamente, teremos um problemas semelhante à figura a seguir:

Figura 19 – Interseção entre a reta r e s no ponto P (x_0, y_0).



Fonte: Autoria própria.

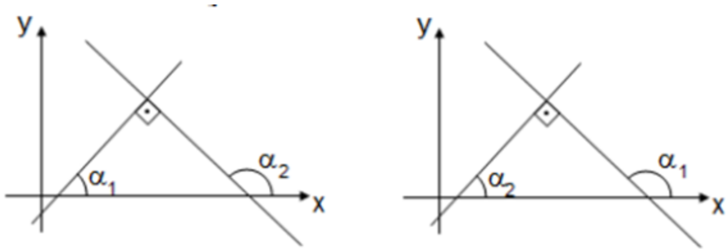
2.1.11 Condição de perpendicularismo

Duas retas r e s são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Demonstração:

Figura 20 – Restas em condição de perpendicularismo.



Fonte: Autoria própria.

De acordo com a figura anterior, temos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$$

Então:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$
$$\text{tg}\alpha_2 = \text{ tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\text{tg}\alpha_2 = \text{ cotg}(-\alpha_1)$$
$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{1}{\text{tg}\alpha_1}$$
$$\text{tg}\alpha_2.\,\text{tg}\alpha_1 = -1$$
$$m_r.m_s = -1 \Leftrightarrow r \perp s.$$

2.1.12 Distância entre ponto e reta

Sabemos que calcular a distância entre um ponto P e uma reta r é, na verdade, encontrar a menor distância entre P e r e isto pode ser feito encontrando-se a distância de P até sua projeção ortogonal P' em r. A distância do ponto $P(x_a, y_a)$ à reta r, de equação $y = mx + k$, é definida como sendo a distância de P' a A, onde $A(x_b, y_b)$ é o pé da perpendicular baixada de P a r.

Indicando por $d(P, r)$ a distância de P a r, temos

$$d(P, r) = ||\overrightarrow{PA}||.$$

Como o vetor $(1, m)$ tem a direção da reta r, os vetores $\overrightarrow{PA} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ e $(-m, 1)$ têm a mesma direção. Logo, existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{PA} = t(-m, 1)$$

e, portanto,

$$d(P, r) = ||\overrightarrow{PA}|| = ||t(-m, 1)|| = |t|\sqrt{m^2 + 1}$$

Desta forma, $d(P, r)$ estará determinada quando conhecermos t. Para calcular o valor de t partimos da equação abaixo

$$\overrightarrow{PA} = (x_b - x_a, y_b, -y_a) = t(-m, 1)$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - tm \\ y_1 &= y_0 + t \end{aligned}.$$

Como (x_b, y_b) pertence à reta r, deve valer

$$y_0 + t = m(x0 - tm) + k$$

, onde,

$$t = \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2}$$

Sendo $d(P, r) = |t|\sqrt{1 + m^2}$, temos, finalmente,

$$d(P, r) = \left| \frac{y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2} \right| \sqrt{1 + m^2}$$

ou

$$d(P, r) = \frac{|y_0 + mx_0 + k|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

2.1.13 Cônicas

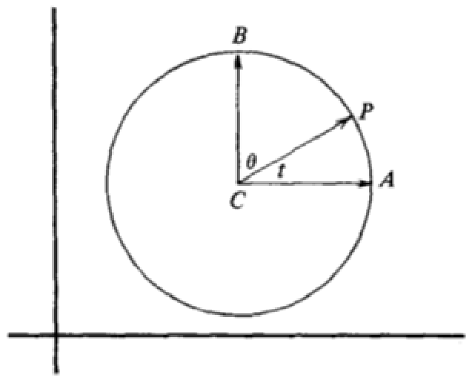
Uma cônica no plano é definida como o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde a, b, c, d, e e f são números reais, com a, b e c não simultaneamente nulos. Serão abordadas a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas cônicas não degeneradas. As cônicas não degeneradas podem ser obtidas da intersecção de um cone circular com um plano.

2.1.14 Circunferência

O círculo é uma figura geométrica plana, que tem como definição a região limitada por uma circunferência. Já a circunferência, é um conjunto de pontos equidistantes de um ponto central. A distância entre o centro de uma circunferência e um ponto qualquer pertencente a ela é sempre a mesma, sendo chamada de raio.

Na figura a seguir representamos uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r.

Figura 21 – Representação de uma circunferência.



Fonte: Autoria própria.

Seja π um plano no $\mathbb{R}^2$ e C a circunferência de centro $A \in \pi$ e raio $r > 0$, assim $C = \{P \in \pi / d(P, A) = r\}$. Se $A(a, b)$ são as coordenadas do centro de uma circunferência de raio r e $P(x, y)$ pertence à essa circunferência, então:

$$d(P, A) = r \quad \Rightarrow \quad d(P, A)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Assim, associamos à circunferência C a equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \textbf{(Equação Reduzida da Circunferência)}.$$

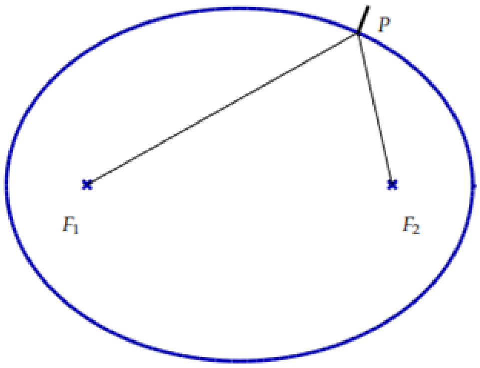
Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \qquad \textbf{(Equação Geral da Circunferência)}. \end{aligned}$$

2.1.14.1 Elipse

A elipse é o conjunto dos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante, como pode ser observado na figura a seguir. Dados dois pontos F_1 e F_2, e um número $r > d(F_1, F_2)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$ é chamado elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior r.

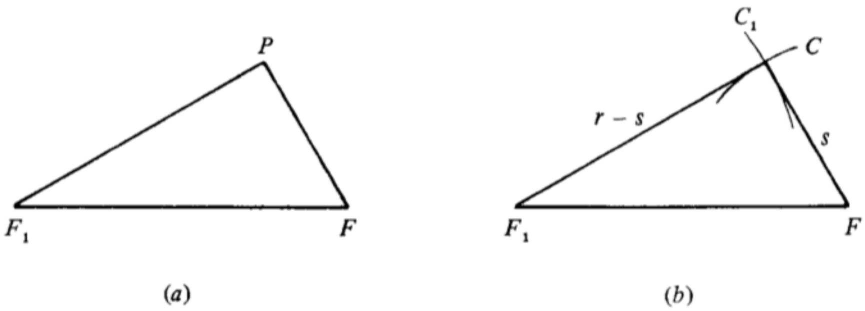
Figura 22 – Representação de uma Elipse.



Fonte: Autoria própria.

Graficamente podemos obter um ponto da elipse fazendo a seguinte construção: centralizamos o compasso em um dos focos e com abertura igual a $s < r$ e traçamos um arco C. Depois, centralizamos no outro foco e com abertura igual a $r - s$ traçamos o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da elipse, como pode ser visto a seguir:

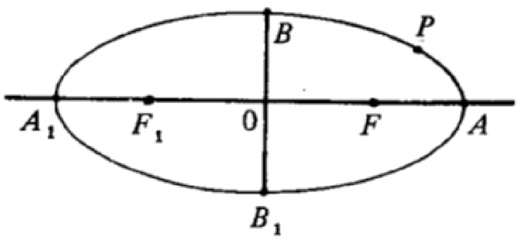
Figura 23 – Obtenção gráfica de um ponto da elipse.



Fonte: Autoria própria.

Empregando esta construção, podemos obter tantos pontos da elipse quantos almejarmos. Unindo estes pontos, obtemos a representação gráfica da elipse

Figura 24 – Ponto da elipse (Fonte: Reis e Silva, 1996).



Fonte: Autoria própria.

Para a obtenção dos pontos A_1 e A, tomou-se $s = \frac{r-d(F,F1)}{2}$ e para os pontos B e B_1, tomando-se, $v = \frac{r}{2}$. Estes pontos são chamados de vértices da elipse, e observa-se que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior r da elipse e que o segmento BB_1 é perpendicular a A_1A. Já o ponto O, interseção de A_1A e BB_1, é o centro da elipse. Na prática, podemos traçar uma elipse usando um barbante e pinos determinar a elipse. Fixamos os pinos em dois pontos (focos) e fazemos um lápis deslizar sobre o papel de modo que, apoiado nos pregos e na ponta do lápis, o laço de barbante se mantenha esticado. A elipse com centro na origem e focos no eixo x ou y possui como equação, a seguinte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sendo assim, se $a > b$, os focos da elipse estão no eixo x e são $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Se $a < b$, os focos da elipse estão no eixo y e são $F1(0, -c)$ e $F(0, c)$, onde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

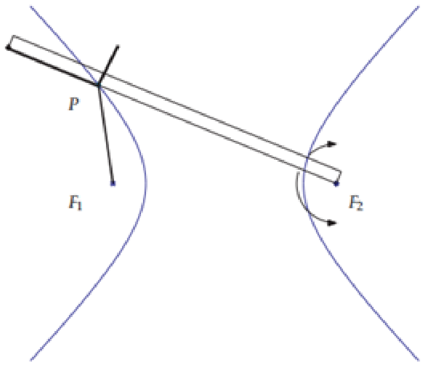
Em geral, a equação de uma elipse é do segundo grau. Quando os vértices da elipse não estão sobre os eixos do sistema de coordenadas, além dos termos em x^2 e y^2, a equação apresenta também termos em xy, x e y.

Por fim, a elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície . A elipse tem a propriedade de refletir os raios vindos de um dos focos na direção do outro foco (SANTOS, 2012).

2.1.14.2 Hipérbole

A hipérbole é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante. Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d(F1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que $|d(F, P) - d(F1, P)| = r$ é chamado hipérbole de focos F_1 e F e eixo r.

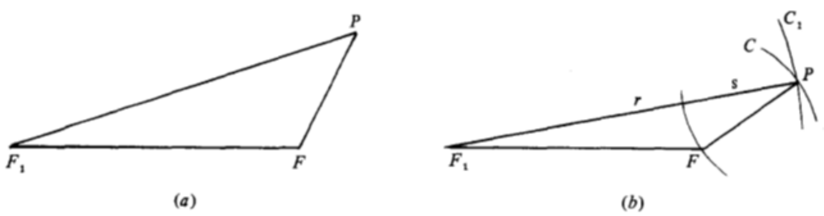
Figura 25 – Demonstração gráfica de uma hipérbole.



Fonte: Autoria própria.

Graficamente, para se obter um ponto da hipérbole é suficiente centralizar o compasso em um dos focos e com abertura s traçar um arco C. Posteriormente, centralizar no outro foco e com abertura $s + r$ traçar o arco C. Assim, a interseção de C e C_1 é um ponto da hipérbole. Unindo os pontos assim obtidos, temos o traçado da hipérbole.

Figura 26 – Obtenção gráfica de um ponto de uma hipérbole



Fonte: Autoria própria.

Os pontos A_1 e A são chamados de vértices da hipérbole, e podem ser obtidos tomando-se $s = \frac{d(F1F)-r}{2}$. Neste caso $d(A1, A) = r$ e que, se $r < \frac{f(F1,F)-r}{2}$, os arcos C e C_1 não se interceptam. Dessa construção, é fácil ver que a hipérbole é composta de dois ramos e que é simétrica em relação à reta que contém os focos e em relação à mediatriz do segmento F_1F.

Podemos desenhar uma parte de um ramo da hipérbole da seguinte forma: Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada.

Equação da hipérbole centrada na origem e com focos nos eixos x ou no eixo y.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, sua equação é:

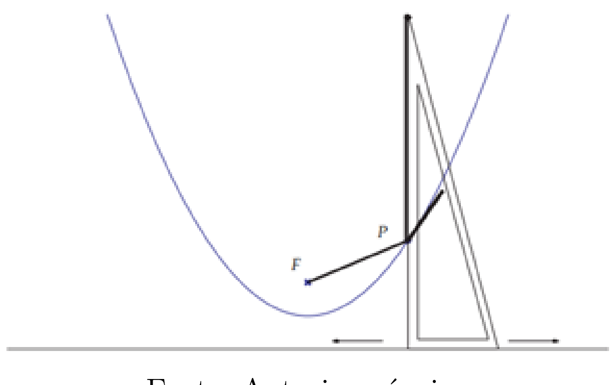
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Sendo assim, a hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz e que corta as duas folhas da superfície. A hipérbole tem a propriedade de refletir os raios vindos na direção de um dos focos na direção do outro foco.

2.1.14.3 Parábola

Uma parábola é o conjunto dos pontos P no plano equidistantes de uma reta r (diretriz) e de um ponto F (foco), não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos P tais que $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$.

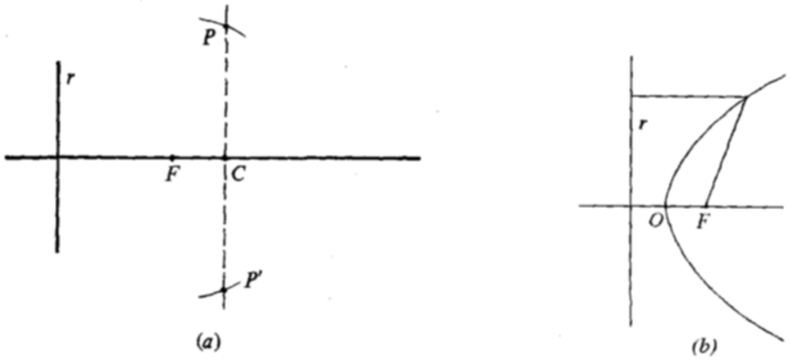
Figura 27 – Representação de uma parábola



Fonte: Autoria própria.

Graficamente, para se obter um ponto da parábola, a partir do foco F traçamos a perpendicular à diretriz r e tomamos sobre esta perpendicular (chamada eixo da parábola) um ponto C. A partir de C traçamos uma paralela a r e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em F determinamos nesta paralela os pontos P e P' da parábola. Unindo os pontos assim construídos, obtemos a parábola

Figura 28 – Obtenção gráfica de um ponto de uma parábola.



Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que se escolhermos o ponto C, sobre o eixo, de modo que $d(C, r) < d(C, F)$, o arco traçado com centro em F e raio $d(C, F)$ não intercepta a paralela à diretriz traçada por C. O ponto da parábola mais próximo de r e o ponto O (Figura x) tal que $d(0, r) = d(0, F)$. Este ponto é chamado vértice da parábola. Em geral, a equação de uma parábola é do segundo grau, isto é, contém termos em x^2, y^2, xy, x e y. Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola sua equação é muito simples. A equação da parábola é a seguinte:

$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

Podemos desenhar uma parte de uma parábola da seguinte forma. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular a reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada. Assim, a parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma reta geratriz do cone. A parábola tem a propriedade de refletir os raios vindos do foco na direção do seu eixo.

3 Construção do MULTIGEA.

3.1 A importância do Multiplano

A compreensão do tema se torna enfático mediante a inquietação existente na rede pública de ensino de Pernambuco a respeito da área de geometria no ensino da matemática, de modo mais específico o ensino da geometria analítica.

Como mencionado anteriormente, a geometria analítica se utiliza do ramo vetorial e abstrativo, tendo dessa forma muitos softwares, programas, aplicativos e outros que facilitam o seu ensino em sala de aula.

Como professor de matemática da rede pública de ensino de Pernambuco, assisto na prática a dificuldade orçamentária das escolas em promover total assistência na aquisição de mecanismos abstrativos para o ensino da geometria analítica e a formação operacional de cada item adquirido. Salientamos nesse contexto a inserção de estudantes com deficiência visual, visto que na maioria dos mecanismos da geometria analítica é necessário o uso integral da visão e os mesmos não a detêm.

Analisando a evolução e educação do estado de Pernambuco e os pilares da educação integral (aprender a Ser, Aprender a Fazer, Aprender a Conviver, Aprender a Conhecer e Aprender a Aprender) temos a necessidade de buscar meios que potencializem a todos os estudantes inseridos na escola com conhecimento de forma eficaz e efetiva, compreendendo dessa forma a garantia da lei e uma educação pública de qualidade.

O professor da educação básica se depara com a geometria analítica e um estudante deficiente visual que não teve o acompanhamento do instrutor de Braille no ensino infantil, fundamental I e fundamental II , mantendo o estudante para a compreensão da geometria analítica a utilização do sentido do tato como principal fonte de aprendizado.

Diante da problemática da educação brasileira o projeto se culmina na construção de uma maleta, compacta e com todas as habilidades necessárias para compreender a geometria analítica, possuindo legendas em alto relevo para facilitar a compreensão por meio do tato.

Esse material se torna acessível para as escolas da rede pública por se realizar com baixo custo e qualquer professor consegue construir seguindo os passos que serão detalhados a posterior. O seu uso propiciará a estudantes com deficiência visual e sem formação brailista o aprimoramento do conhecimento acerca da geometria analítica. A utilização do multiplano da geometria analítica (MULTIGEA) se permite na necessidade de trazer os fundamentos teóricos de alguns tópicos da geometria analítica, para estudantes cegos, para que compreendendo a teoria possam desenvolver a capacidade de resolver questões.

No decorrer do capítulo vigente, estará disposto seu modo de uso e etapas de construção para aplicação de problemas matemáticos. O primeiro obstáculo real encontrado ao analisar a temática foi que o currículo do estado de Pernambuco retirou da formação geral básica a geometria analítica , ou seja, não seria mais possível trabalhar em sala de aula de forma aprofundada.

Nesse aspecto alguns pontos são essenciais para o ensino e inserção do conteúdo em sala de aula. A matriz de referência do sistema de avaliação da educação básica do ensino médio de Pernambuco, especificamente no 3° ano do ensino médio trás as habilidades da geometria analítica para serem trabalhadas e desenvolvidas as competências, e o Exame Nacional do Ensino Médio trás na abordagem matemática itens que precisa dos conceitos básicos da geometria analítica.

Outro ponto crucial é a reforma do novo ensino médio, que reduziu a quantidade de aulas da formação geral básica e complementou-as com unidades curriculares, intituladas de itinerários formativos que estão associadas a trilhas que é o caminho que cada escola, de forma pessoal, escolhe para que seus discentes trilhem. Cada trilha de matemática e suas tecnologias determinada, possibilita a utilização de disciplinas obrigatórias e optativas que possam abordar o conceito e aprofundamento através desse projeto.

A validação e sustentação dessa ferramenta prática no ensino da geometria analítica se concretiza dentro da interdisciplinaridade da educação de Pernambuco. A utilização do MULTIGEA promove interação, socialização e aprendizado na relação estudantes-estudante e estudante-professor e mais que isso, por se tratar de uma maleta de fácil manuseio e auto didata pode ser utilizada além da aula de matemática.

Analisando uma situação cotidiana, um professor da rede pública de ensino pode se deparar com um estudante do ensino médio com deficiência visual e que não teve o acompanhamento do profissional em braille durante toda a formação da educação básica. Em uma situação real como a mencionada o estudante terá como principal mecanismo de sentido para aprendizagem o tato, aumentando a dificuldade na compreensão matemática e por consequência da geometria analítica.

Analisando os dados de inclusão e a inserção de estudantes na educação básica como demostrado no decorrer do trabalho, se torna enfático a necessidade de formas, metodologias capazes de minimizar as lacunas de aprendizagens, desse modo iremos nos utilizar do multiplano, denotado com MULTIGEA (multiplano da geometria analítica).

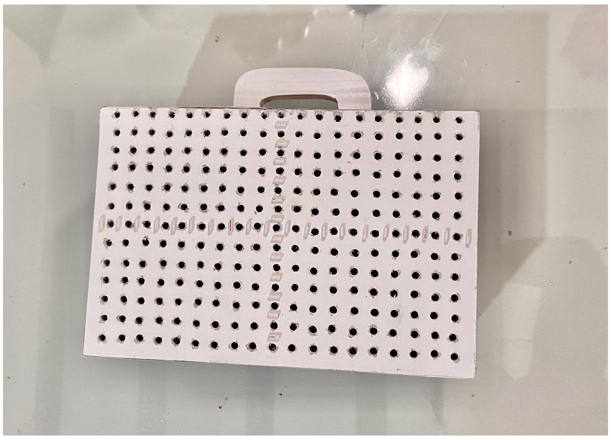
O MULTIGEA se revela como um recurso didático e eficaz para o ensino da geometria analítica. O estudante com deficiência visual poderá ter uma experiência mais dinâmica e interativa. Com a manipulação do multi plano podem ser consolidadas definições, conceitos, exemplos e resolução de exercícios da geometria analítica. A concretização de conceitos abstratos permite um conhecimento de forma autônoma, capaz de desenvolver habilidades e aprimorar os conhecimentos prévios.

3.1.1 Construção do MULTIGEA

O material utilizado para a construção foi MDF de 10 mm, com formato de uma maleta compacta de fácil manuseio.

O lado esquerdo da maleta é composto por um pedaço de MDF de 30 cm de comprimento e 20cm de largura com total de duzentos e quarenta e sete furos, sendo dezenove na horizontal e treze na vertical. A distância entre cada furo é de 1,5 cm. O eixo XOY divide o plano em IV quadrantes. A separação dos eixos das abscissas e ordenadas é feito com pedaços de palito de churrasco para que se perceba o eixo pelo tato.

Figura 29 – Plano Cartesiano MULTIGEA

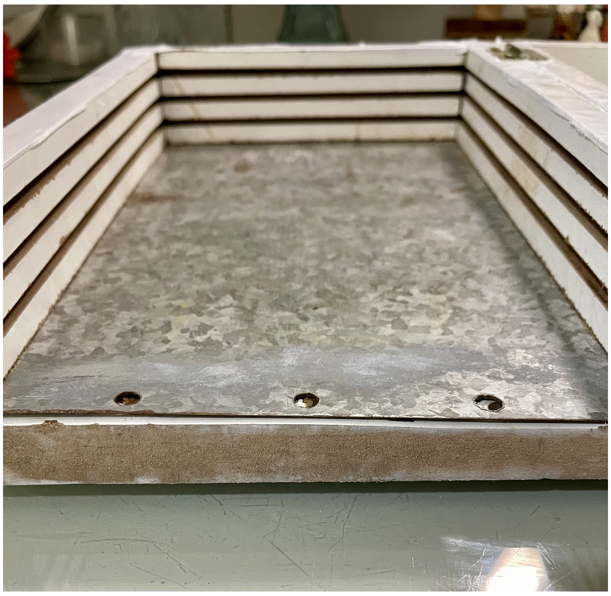


Fonte: Autoria própria

Na parte inferior perfurada foi fixada uma chapa de metal de igual tamanho a base de madeira que servirá no auxilio da fixação das letras e números que serão revestidos com ímã e postos sobre o plano.

A lateral horizontal é feita por duas madeiras fixas de 30 cm de comprimento e 5 cm de largura com cavas na lateral que distam 1 cm uma da outra, totalizando três cavas em cada lado, feitas por uma serra circular. A lateral vertical é feita por duas madeiras de 17 cm de comprimento e 5 cm de largura sendo uma fixa com três cavas que distam 1cm uma da outra e a outra com a mesmas características, porém móvel sendo encaixadas por três pinos de madeiras na base de madeira posto como base.

Figura 30 – Cavas Laterais do MULTIGEA



Fonte: Autoria própria

Do lado esquerdo após fixado a base e as laterais fixas, temos fichas legendadas com material de MDF de 1 mm com dimensões de 29cm de comprimento e 19 cm de largura. De forma móvel tem-se três fichas legendadas que podem ser retiradas uma a uma para por acima do lado direito a depender do assunto trabalhado.

As fichas legendadas é uma das principais ferramentas do MULTIGEA porque ele proporciona uma educação autodidata e multidisciplinar. O professor de matemática faz um diagnóstico de um discente deficiente visual e a lacunas em geometria analítica, o mesmo propõe a aprendizagem por meio do MULTIGEA. Organiza uma agenda individual do estudante baseado em suas dificuldades podendo envolver conteúdos teóricos e resolução de questões. Nesse sentido a utilização da maleta é primordial pois com ela é compreensível os tópicos principais da geometria analítica.

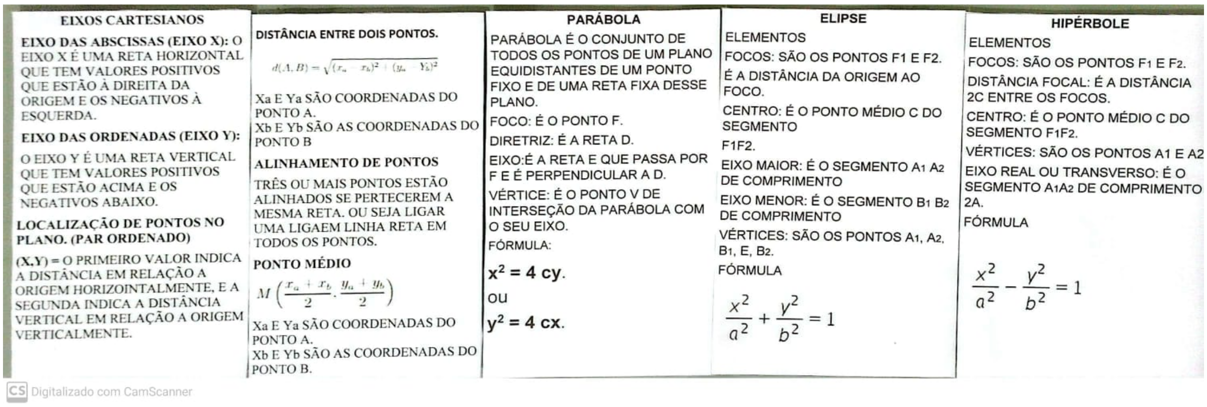
As fichas legendadas fortalece a utilidade do MULTIGEA, de fato não sendo complemento dela, mas sendo indispensável para a sua validação. Um estudante deficiente visual sem a leitura em braile ao manusear o conteúdo terá a sua disposição, abreviações, definições e representações para auxiliar na resolução de problemas.

Os textos postos nas fichas lincam e associam os principais tópicos visando melhorar seus significados e por meio do tato, interpretar o plano. A distribuição dos tópicos foi determinada pela relação entre os conteúdos e inseridos nas fichas.

O MULTIGEA conta com três fichas legendadas fixas, distribuídas da seguinte forma: A ficha 01 aborda os tópicos de plano cartesiano, localização de pontos no plano cartesiano. A ficha 02 explana a distância entre dois pontos, alinhando de pontos e ponto médio. A ficha 03 aborda equação paramétrica, equação geral da reta e equação reduzida.

Analisando os tópicos que podem ser visualizados e compreendido através da maleta, é anexado a esse compartimento um QR Code com as fichas legendadas. Complementando os tópicos desenvolvidos no trabalho que podem ser desenvolvidos com o MULTIGEA. Considerando os tópicos a serem acrescentados, dispomos de outras fichas. A ficha 04 contendo a interseção de retas e condição de perpendicularismo e circunferência, a ficha 05 compreende a cônica elipse, já a ficha 06 compreende a cônica hipérbole e por fim a última compreende a parábola.

Figura 31 – Representação das fichas legendadas



EIXOS CARTESIANOS

EIXO DAS ABSCISSAS (EIXO X): O EIXO X É UMA RETA HORIZONTAL QUE TEM VALORES POSITIVOS QUE ESTÃO À DIREITA DA ORIGEM E OS NEGATIVOS À ESQUERDA.

EIXO DAS ORDENADAS (EIXO Y):

O EIXO Y É UMA RETA VERTICAL QUE TEM VALORES POSITIVOS QUE ESTÃO ACIMA E OS NEGATIVOS ABAIXO.

LOCALIZAÇÃO DE PONTOS NO PLANO. (PAR ORDENADO)

(X,Y) = O PRIMEIRO VALOR INDICA A DISTÂNCIA EM RELAÇÃO A ORIGEM HORIZOINTALMENTE, E A SEGUNDA INDICA A DISTÂNCIA VERTICAL EM RELAÇÃO A ORIGEM VERTICALMENTE.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - Y_b)^2}$$

Xa E Ya SÃO COORDENADAS DO PONTO A.
Xb E Yb SÃO AS COORDENADAS DO PONTO B

ALINHAMENTO DE PONTOS

TRÊS OU MAIS PONTOS ESTÃO ALINHADOS SE PERTECEREM A MESMA RETA. OU SEJA LIGAR UMA LIGAEM LINHA RETA EM TODOS OS PONTOS.

PONTO MÉDIO

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Xa E Ya SÃO COORDENADAS DO PONTO A.
Xb E Yb SÃO AS COORDENADAS DO PONTO B.

PARÁBOLA

PARÁBOLA É O CONJUNTO DE TODOS OS PONTOS DE UM PLANO EQUIDISTANTES DE UM PONTO FIXO E DE UMA RETA FIXA DESSE PLANO.

FOCO: É O PONTO F.

DIRETRIZ: É A RETA D.

EIXO:É A RETA E QUE PASSA POR F E É PERPENDICULAR A D.

VÉRTICE: É O PONTO V DE INTERSEÇÃO DA PARÁBOLA COM O SEU EIXO.

FÓRMULA:

$x^2 = 4cy$.

OU

$y^2 = 4cx$.

ELIPSE

ELEMENTOS

FOCOS: SÃO OS PONTOS F1 E F2.

É A DISTÂNCIA DA ORIGEM AO FOCO.

CENTRO: É O PONTO MÉDIO C DO SEGMENTO

F1F2.

EIXO MAIOR: É O SEGMENTO $A_1 A_2$ DE COMPRIMENTO

EIXO MENOR: É O SEGMENTO $B_1 B_2$ DE COMPRIMENTO

VÉRTICES: SÃO OS PONTOS A_1, A_2, B_1, E, B_2.

FÓRMULA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

HIPÉRBOLE

ELEMENTOS

FOCOS: SÃO OS PONTOS F_1 E F_2.

DISTÂNCIA FOCAL: É A DISTÂNCIA 2C ENTRE OS FOCOS.

CENTRO: É O PONTO MÉDIO C DO SEGMENTO F_1F_2.

VÉRTICES: SÃO OS PONTOS A1 E A2

EIXO REAL OU TRANSVERSO: É O SEGMENTO A_1A_2 DE COMPRIMENTO 2A.

FÓRMULA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Autoria própria.

Figura 32 – QR' CODE das fichas legendadas

Fonte: Autoria própria.

O lado direito da maleta é composto por um pedaço de MDF de 30 cm de cumprimento e 17 cm de largura que é a base de sustentação das fichas legendadas. A lateral horizontal é feito por duas madeiras MDF de 30 cm de comprimento para organizar os itens usados na legenda e representação do plano.

Compreendendo a dificuldade e o alto custo de produzir peças especificas para o MULTIGEA é proposto reutilizar peças de jogos já existentes na maioria das escolas e criar outros de materiais recicláveis. Desse modo as pinos fixados no plano cartesiano será pinos de resta 1, de fácil acesso e baixo custo, as retas e sentido será varetas do jogo pega vareta, acrescidos de palitos de churrasco, letras de papelão, letras em emborrachado e MDF. Para as fixar esses compartimentos uma tampa móvel de MDF.

Figura 33 – Base Interna do MULTIGEA

Fonte: Autoria própria

As partes são interligadas por pequenas dobradiças e uma alça de sustentação, conforme ilustrado na figura.

Figura 34 – Parte externa da maleta

Fonte: Autoria própria

3.2 Aplicação do MULTIGEA

3.2.1 Plano Cartesiano

.

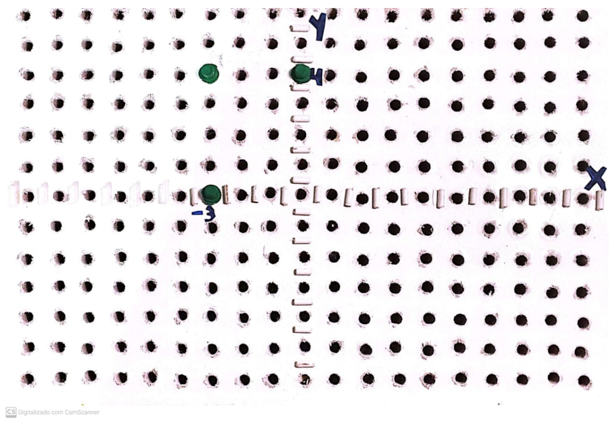
O plano cartesiano é a base esquerda, definindo seu eixo principal XOY cravejados com pedaços madeira para que possa ser identificado pelo tato. Como ilustrado na figura.

3.2.2 Localização de pontos no plano cartesiano

.

Dado um ponto $P(x, y)$ qualquer no plano cartesiano, bastando verificar o quadrante que está localizado e assim deslocar segundo o ponto $P(x, y)$. A distância entre cada furo representa uma unidade, dessa forma, por exemplo, para verificar a localização do ponto $Q(-3, 4)$. Verifica-se que o ponto $Q(-3, 4)$ é do segundo quadrante e por meio do tato contar manualmente o deslocamento para o ponto. Verifica o deslocamento de X, fixando um ponto em $X = -3$ com o deslocamento de quatro casas acimas. De modo análogo ao fixar $Y = 4$ e realizar o deslocamento de três casas no quadrante II, tem-se o ponto $Q(-3, 4)$ conforme representado na figura.

Figura 35 – Localização de Pontos no Plano Cartesiano



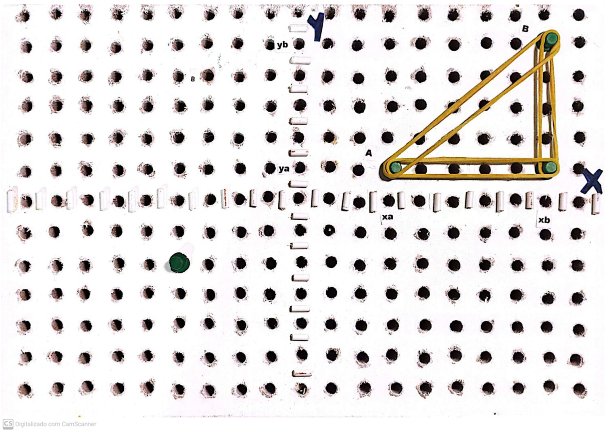
Fonte: Autoria própria

3.2.3 Distância entre dois pontos

.

Para verificar a distancia dos pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ no plano XOY realiza-se o procedimento de localizar os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ e ,após isso, se coloca sobre o plano ligas elásticas ligando as coordenadas de X e ligando as coordenadas de Y. Formando desse modo um triângulo retângulo o qual se pode usar a fórmula ou contar as cavas que se distam dos pontos estabelecidos, desse modo a resolução é imediata e realizada apenas no tato, conforme ilustrado na figura

Figura 36 – Distância Entre os Dois Pontos no MULTIGEA

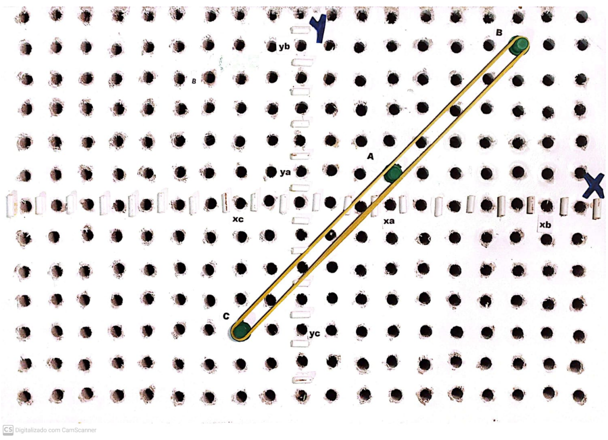


Fonte: Autoria própria

3.2.4 Alinhamento de pontos

Dado três pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ estão alinhados se pertencerem a uma mesma reta. Se o ponto B pertence a reta que passa por A e C, segundo a definição de vetores de modo prático analisando a praticidade do uso do tato e compreendendo a noção de vetores e alinhamento, basta verificar a localização dos pontos A, B e C e sobre eles colocar o palito com as cavas posicionando cada pino nas lacunas propostas, se o mesmo ocorrer os pontos estão alinhados. conforme ilustração abaixo.

Figura 37 – Alinhamento de pontos.

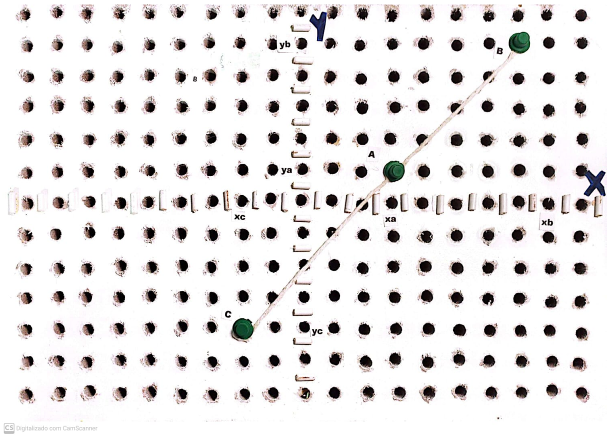


Fonte: Autoria própria

3.2.5 Ponto médio

Dado dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ o ponto médio do segmento AB, chamado de $M(x, y)$ é obtido quando encontramos a media aritmética das coordenadas de x e das coordenadas de y. Desse modo fixamos um barbante no ponto $A(x_a, y_a)$ e vemos o comprimento ao ponto $B(x_b, y_b)$, verifica-se o comprimento e o ponto médio será a metade.

Figura 38 – Ponto Médio.



Fonte: Autoria própria

Fazemos a observação para quando esse número não for inteiro, para o intuito da ferramenta o objetivo é que o estudante busque por meio do tato a metade do comprimento entre os pontos dados, portanto havendo a compreensão o intuito da ferramenta foi atingido.

Porém a dificuldade gerada ao estudante com deficiência não é exclusiva dele quando os números não são inteiros, qualquer estudante que não possui deficiência pode apresentar essas dificuldades.

O conceito de ponto médio usamos para determinar o baricentro de um triângulo, pois basta de ligar cada vértice ao ponto médio do lado oposto, dessa forma teremos a interseção das medianas que se intersectam no baricentro do triângulo.

3.2.6 Equações paramétricas da reta

As equações paramétricas não relacionam diretamente das coordenadas X e Y, ela se relaciona com um parâmetro t. A compreensão proposta para o estudante visual é que o mesmo compreenda que uma equação geral da reta pode ser reescrita como equação paramétrica, usando no MULTIGEA a ficha legendada para isolar as incógnitas e fazer o parâmetro.

3.2.7 Equação geral da reta

Para a equação geral da reta o MULTIGEA será usado quando dada a equação geral para verificar se os pontos pertencem a reta dada, substituindo os valores dos pontos na equação da reta e analisando o seu resultado.

A sua verificação será possível analisando o termo independente que intersecta o eixo Y e conhecendo o ponto que intersecta o eixo x. A abordagem da equação geral da reta, não se dá no plano cartesiano, ela se fortalece na ficha legendada. Embora o estudante com deficiência visual, não consiga enxergar as equações, mas ele consegue compreender uma sequência lógica de resolução de questões, usando a imaginação, nesse sentido a modelagem da equação por meio do tato contribui para que possa sentir as letras e números ajudando a chegar no resultado proposto.

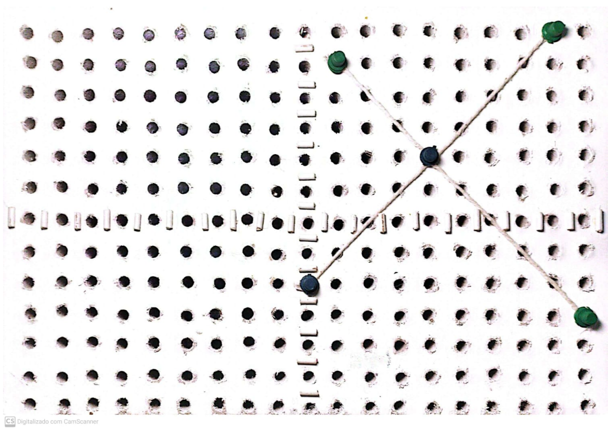
3.2.8 Equação Reduzida da Reta

No MULTIGEA a equação da Reta r que passa por um ponto $A(x_a, y_a)$ é compreendida quando é dado o coeficiente angular e o ponto $A(x_a, y_a)$. Desse modo é preciso manipular por meio do tato a equação, para resolver e determinar a equação reduzida. A utilidade do plano nesse tópico é análogo a equação da reta.

3.2.9 Interseção de retas

Se duas retas se intersectam elas são coplanares, ou seja, pertencem ao mesmo plano, desse modo buscamos o ponto de interseção entre elas $I(a_i, b_i)$. No MULTIGEA com o auxilio da ficha legendada vamos determinar a interseção igualando as retas para encontrar $I(a_i, b_i)$. De forma tátil o MULTIGEA aborda a importância da compreensão da interseção de retas, quando representadas fixando o pino na interseção e no coeficiente linear que intersecta o eixo y.

Figura 39 – Representação da interseção de retas



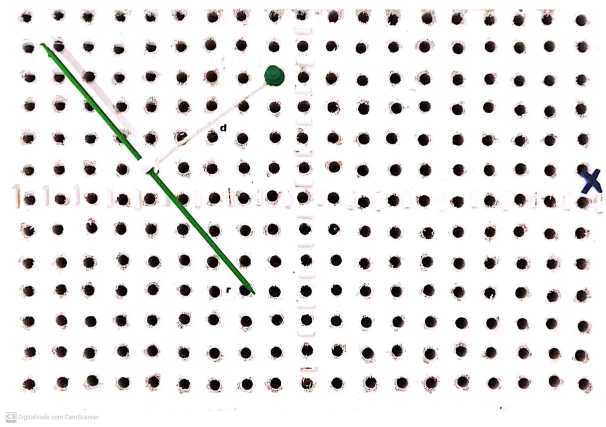
Fonte: Autoria própria

Compreendendo que quando duas retas se intersectam elas tem ponto em comum e inclinação formando o ângulo entre elas, com isso analisaremos quando as retas são concorrentes e perpendiculares. Nesse caso o produto dos coeficientes angulares $m_r.m_s = 1$

3.2.10 Distância de um Ponto a reta

Para que o estudante com deficiência visual compreenda a distância de um ponto a reta, deve se firmar que a menor distância de um ponto a reta é uma reta ortogonal a reta dada passando pelo ponto, ou seja, o ponto forma com a reta um ângulo reto. Nesse sentido deve se fixar um barbante no ponto e direcionar a reta, buscando a menor distância a reta, caso a distância seja um número inteiro a sua verificação pode ser feita pelo tato. Caso não seja inteiro, deve se recorrer a definição formal e usar a parte da ficha legendada como suporte para solucionar a questão. Esse é um tópico pouco abordado nas questões de provas externas, pois não está nos descritores das avaliações externas que trabalham geometria analítica, porém o seu conceito da projeção ortogonal do ponto na reta contribui para a construção de inúmeras soluções de questões da geometria analítica.

Figura 40 – Distância de um ponto a reta



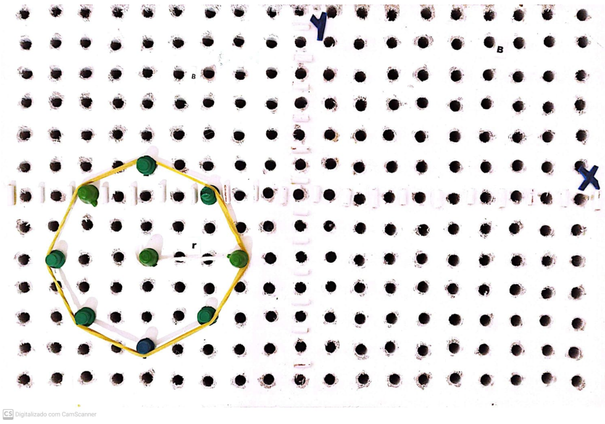
Fonte: Autoria própria

3.2.11 Circunferência

Dados os pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$, ..., $Z(x_i, y_i)$, para verificar se os mesmo pertencem a circunferência , temos que saber a distância de cada um deles ao centro, se os pontos forem equidistantes, ou seja, tiverem a mesma distância ao centro temos uma circunferência.

Nesse contexto, ao utilizar o MULTIGEA, deve-se localizar cada ponto determinado no plano cartesiano e identificar seu centro. Caso o centro não seja dado, verifiquemos duas coordenadas paralela ao eixo x, ou ao eixo y. Encontrado o centro e estabelecido o raio, com um pino fixado sua extremidade no centro, com um pedaço de cordão de tamanho igual ao raio se determina a circunferência fixando os pinos em todos as cavas encontradas. Determinado o centro e raio se modela a equação da circunferência a partir dos pontos localizados, conforme ilustração abaixo.

Figura 41 – Circunferência

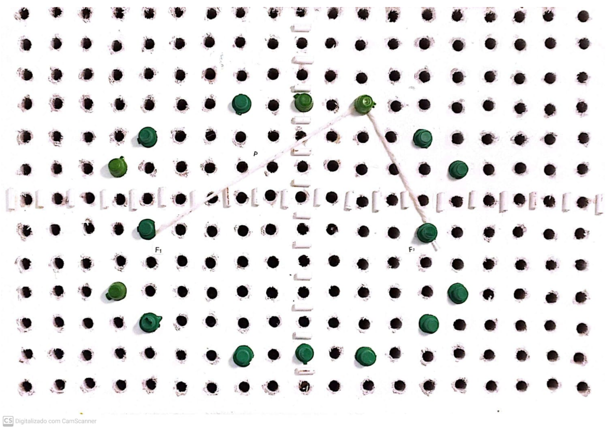


Fonte: Autoria própria

3.2.12 Elipse

Para traçar a elipse, fixamos sobre o plano dois pontos F_1 e F_2, simétricos em relação ao eixo, em cada ponto localizado fixamos as extremidades do barbante no pino usando um barbante maior que o comprimento entre F_1 e F_2. Com o pino se estica o barbante fixando os pinos em todas as cavas pelos quais os pinos for coincidentes. Deve-se se repetir o processo para encontrar todos os pontos necessários para determinar a elipse.

Figura 42 – Representação de uma elipse no MULTIGEA



Fonte: Autoria própria

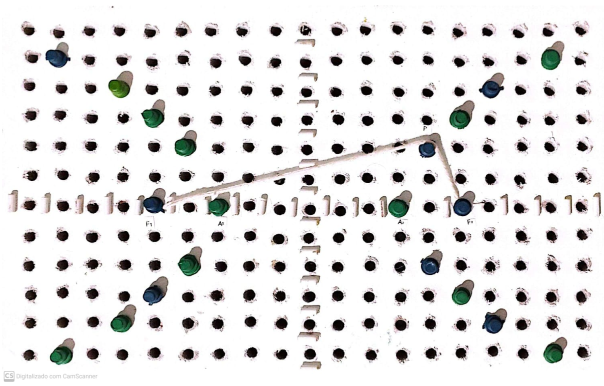
3.2.13 Hipérbole

Como descrito no desenvolvimento teórico do trabalho os passos para representar a hipérbole, usaremos esse ponto de vista no MULTIGEA para analisarmos a formação, comportamento e fórmula da hipérbole.

No eixo das abscissas (x) escolha dois pontos A_1 e A_2 simétricos ao eixo das ordenadas (y). Se escolhe o F_1 distanciando A_1 pelo lado esquerdo, de modo análogo escolhemos F_2. Escolha o tamanho de um barbante maior que o comprimento entre F_1 e

F_2. Fixe a extremidade do barbante em F_1 e F_2. Escolhido F_2 movimente o barbante em direção do 1º e 4º quadrantes marcando com um pino os pontos no MULTIGEA, de modo análogo se repete o processo em F_1 escolhendo o ponto no 2º e 3º quadrantes. Repita todo o processo com o barbante, sendo determinado um comprimento diferente do anterior para termos pontos suficientes para se obter uma hipérbole.

Figura 43 – Representação de uma Hipérbole MULTIGEA

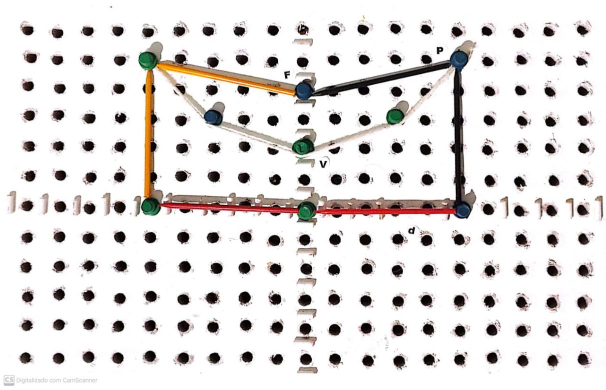


Fonte: Autoria própria

3.2.14 Parábola

Para que possamos determinar e compreender a parábola dentro do MULTIGEA tem que está determinado o foco e a diretriz, para a proposta do multiplano é a compreensão de como funciona a parábola que importa, desse modo como o foco está determinado, fixa-se um pino no foco F e por ele traçar um eixo de simetria e nele marque o ponto A que é a interseção com a diretriz e o vértice V. Se escolhe e marca um ponto P qualquer de modo que d(P,F)=d(P,d).

Figura 44 – Representação de uma parábola MULTIGEA



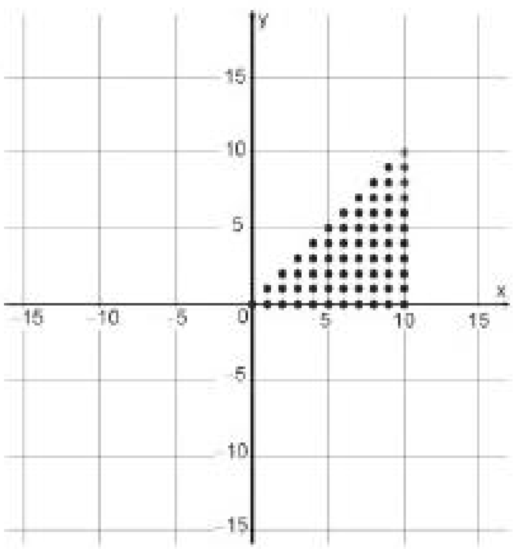
Fonte: Autoria própria

4 A utilização do MULTIGEA para resolução de questões de geometria analítica

Neste capítulo propomos a resolução de algumas questões de geometria analítica por meio do MULTIGEA, validando a sua funcionalidade e importância para estudantes com deficiência visual. As questões escolhidas foram de avaliações externas como o sistema de avaliação brasileiro e do exame nacional do ensino médio e algumas questões presentes nos livros didáticos utilizados nas escolares regulares.

Foram selecionados alguns exercícios para exemplificar o uso do MULTIGEA, para solucionar cada item descrito abaixo, com essas mesmas características e formatos de questões é possível reproduzir a solução de inúmeras questões. No entanto descrevemos a solução de dez questões para a análise.

1. (ENEM - 2008) Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.
Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

a) $0 \leq x \leq y \leq 10$

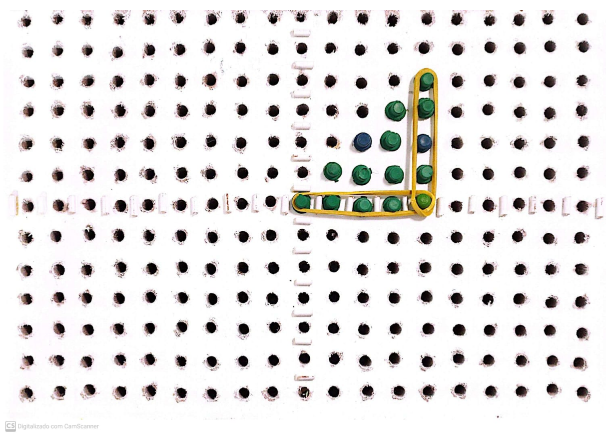
b) $0 \leq y \leq x \leq 10$

c) $0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10$

d) $0 \leq x + y \leq 10$

Solução: Para solucionar a questão vamos localizar os pontos no eixo X, Y. Note que devemos representar algebricamente, para isso coloca-se no MUTIGEA pinos que ilustrem a referida figura. como a maleta é menor e compacta a depender da questão o professor modifica as unidades de medidas, nesse contexto o estudante com deficiência visual é orientado que a distância entre cada pino são de duas unidades de medida. Após posicionado os pinos coloca-se a liga elástica na maior quantidade de pino para as coordenadas de X em uma única linha e faz o mesmo para coordenadas de Y, depois conta manualmente o deslocamento de X e o deslocamento de Y . Desse modo fica estabelecido o menor valor de X, quando ele é zero e o maior valor quando ele dez. De modo análogo repetimos o procedimento para Y e teremos os mesmo valores, o menor valor sendo zero e o maior sendo dez. Inserindo uma liga elástica na maior distância entre as coordenadas de X e Y, temos todos os valores de $X = Y$. Contudo ao analisarmos todas as coordenadas abaixo dos valores de X=Y marcada com a liga elástica temos sempre Y menor que X. Essa observação é relevante para se estabelecer a ordem entre X e Y. conforme ilustração abaixo:

Figura 45 – Gráfico da questão 01

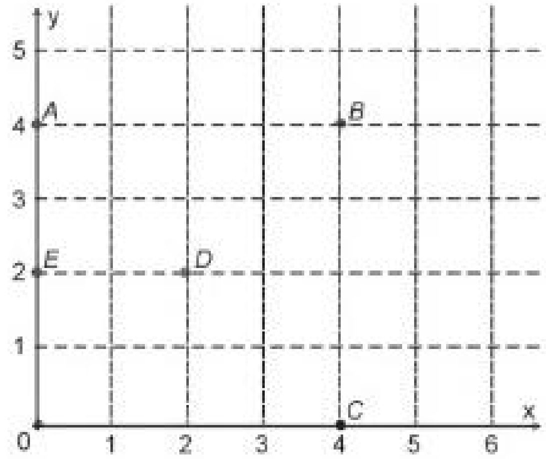


Fonte: Autoria própria

Por fim, pelas observações feitas a solução é a alternativa com essa escrita: $0 \leq y \leq x \leq 10$

2. (ENEM - 2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto

diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: $A(0;4)$, $B(4;4)$, $C(4;0)$, $D(2;2)$ e $E(0;2)$.



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$

b) $y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

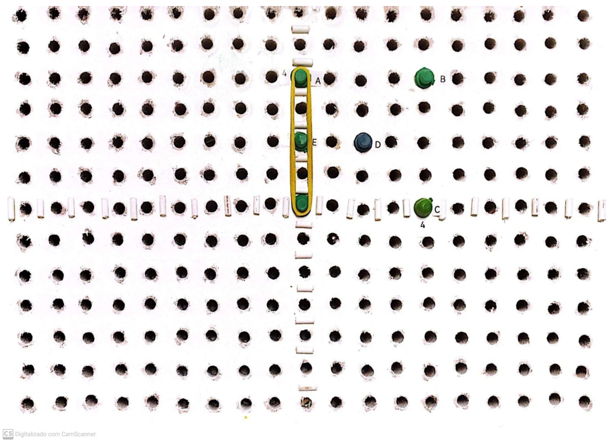
d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

e) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Solução: Para Solucionar essa Questão no MULTIGEA iremos fazer algumas pontuações que facilitem a interpretação da questão e o uso do Multiplano. Qualquer que seja a reta ou circunferência deve-se passar na origem, ou seja em $O(0;0)$, desse modo já fixamos um pino na origem. Desse modo a próxima observação são dois pontos atribuídos caso o tiro for dado pela equação da circunferência e 1 ponto se for dado pela equação da reta. Observe que a equação escolhida ela deve passar pelo ponto $A(0;4)$.

No MULTIGEA iremos localizar todos os pontos trazidos no enunciado $A(0;4)$, $B(4;4)$, $C(4;0)$, $D(2;2)$ e $E(0;2)$ e sobre cada um deles fixar um pino, após fixado com a liga elástica partindo da origem, formaremos as possíveis retas que passam por $A(0;4)$, Analisando essas possibilidades só tem-se a reta que passa por $O(0;0)$ e $A(0;4)$, totalizando um pontos, pois a origem não pontua.

Figura 46 – Representação da equação da reta

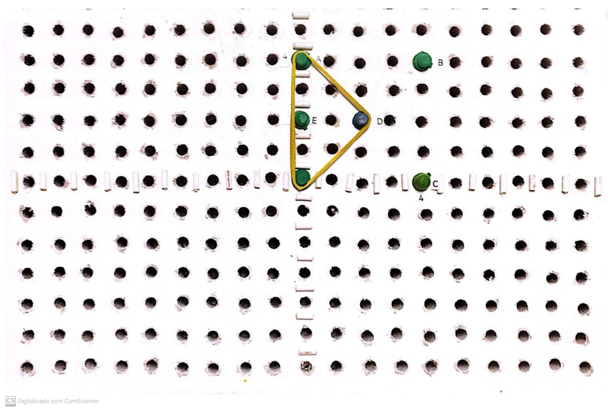


Fonte: Autoria própria

Analisadas todas as retas, iremos analisar as equações da circunferência que passam por $O(0;0)$ e $A(0;4)$. Segundo as alternativas presentes na questão só temos duas possibilidades para equação da circunferência, visto que o item C, passa pela origem.

O item D, tem centro $E(0;2)$ e equidista de duas coordenadas a $A(0;4)$ e $D(2;2)$, totalizando quatro pontos.

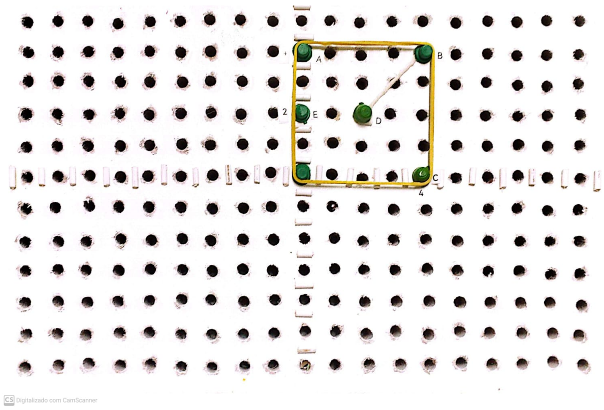
Figura 47 – Representação de pontos equidistantes ao centro fixado no ponto E da circunferência



Fonte: Autoria própria

Já o item E, tem o Centro deslocado do eixo cartesiano com coordenada em $D(2;2)$ que equidista de $A(0;4)$, $B(4;4)$, $C(4;0)$ e $O(0;0)$ com raio de $2\sqrt{2}$. Com um somatório de seis pontos, ou seja sendo essa a alternativa correta.

Figura 48 – Representação de pontos equidistantes ao centro fixado no ponto D da circunferência



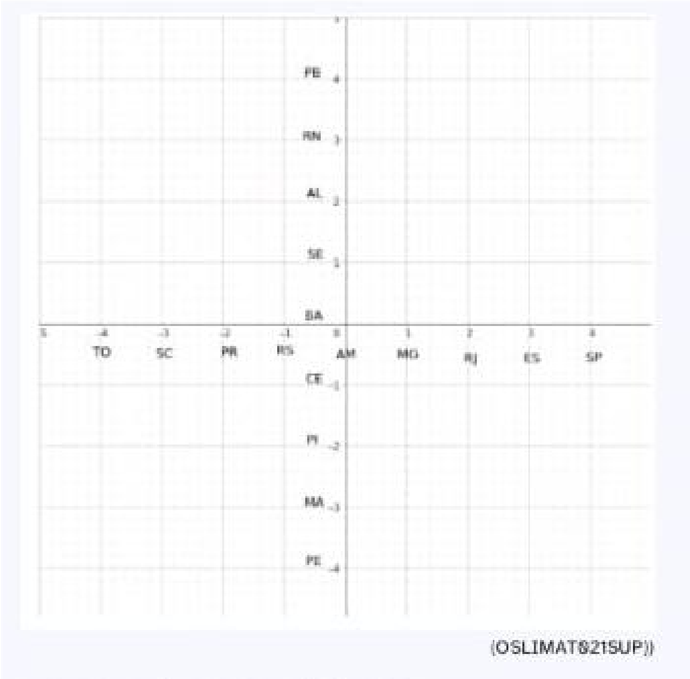
Fonte: Autoria própria

Caso a solução fosse proposta sem a análise das alternativas teríamos que analisar as equações da circunferência, buscando os raios, pois equidistam dele, todos os valores da circunferência.

Desse modo fixado os pontos $A(0;4)$ e $O(0;0)$ temos que o ponto $E(0;2)$ equidista deles com raio de 2 unidades, ou seja, os pontos $A(0;4)$ e $O(0;0)$ pertencem a circunferência de centro $E(0;2)$, somando dois pontos.

De modo análogo a única opção restante de circunferência que contém os pontos $A(0;4)$ e $O(0;0)$ com centro na coordenada de $D(2;2)$, Nesse caso se fixa um barbante em $D(2;2)$ e que ele equidista dos pontos $A(0;4)$, $B(4;4)$, $C(4;0)$ e $O(0;0)$, ou seja, com um somatório de seis pontos, e sendo a alternativa correta.

3. (SEEC-RN 2003) As amigas Anny e Karlla marcaram um encontro no bairro dos estados, representado na malha abaixo. As duas deslocam-se em movimentos lineares segundo as funções: $y = 2x - 5$ e $y = 7 - x$, respectivamente.



O encontro acontecerá no cruzamento das ruas

a) Paraná (PR) e Sergipe (SE).

b) Espírito Santo (ES) e Ceará (CE).

c) São Paulo (SP) e Rio Grande do Norte (RN).

d) Rio Grande do Sul (RS) e Piauí (PI).

e) Minas Gerais (MG) e Alagoas (AL).

Solução: Para solucionar essa questão iremos buscar dois pontos segundo o movimento de Anny e Karlla, como dois pontos determina uma reta, traçaremos essa reta de Anny e Karlla no MULTIGEA e analisaremos o ponto que a reta se intersecta, pois ele indicar o ponto de encontro das amigas. Para o deslocamento de Anny, faremos x=1 e x=5

Para x=1 temos,

$$y = 2x - 5$$

$$y = 2.1\breve{}5$$

$$y = 2\breve{}5$$

$$y = -3$$

Para x = 5 temos,

$$y = 2x - 5$$

$$y = 2.6\breve{}5$$

$$y = 10\breve{}5$$

$$y = 5$$

logo temos dois pontos que descrevem o deslocamento de Anny

Para o deslocamento de Karlla faremos análogo a Anny descrevendo a equação y = 7 – x, Para x = 1 temos,

$$y = 7\breve{}x$$

$$y = 7 - 1$$

$$y = 6$$

Para x = 5 temos,

$$y = 7\breve{}x$$

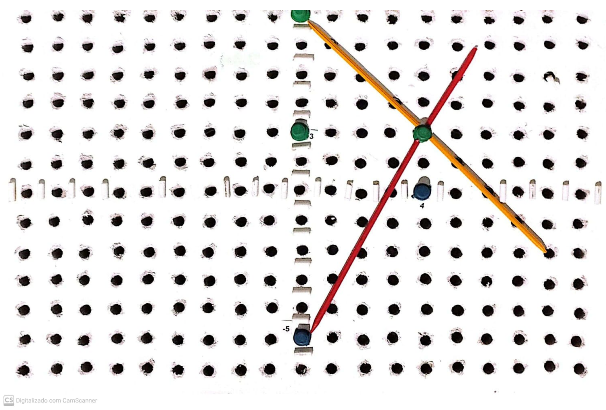
$$y = 7 - 5$$

$$y = 2$$

Determinado os pontos de cada amiga faremos a marcação no MULTIGEA dos dois pontos de Anny e de modo análogo aos pontos de Karlla, fixando barbante na reta de representa cada uma delas. No multiplano após encontrado o ponto de interseção e localizado por meio de um pino no plano cartesiano verifica-se que o ponto procurado é x = 4 e y = 3.

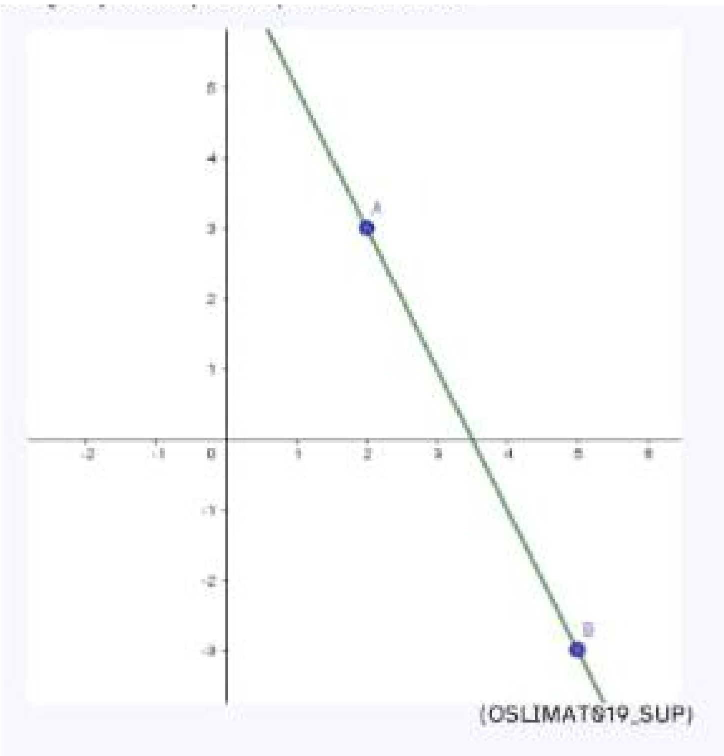
Nesse contexto podemos melhorar a compreensão para o estudante deficiente visual, posicionando as retas no MULTIGEA, observando os pontos encontrados em cada equação e as retas tem-se que as retas estão definidas pelos dois pontos, conforme a ilustração abaixo.

Figura 49 – Interseção de retas MULTIGEA



Fonte: Autoria própria

4. (SEEC-RN 2003) João está estudando geometria analítica e deseja identificar no gráfico abaixo uma função que corresponde à reta formada que passa pelos pontos A e B.



A equação da reta que passa por esses pontos é:

a) $y = 2x - 1$
b) $y = 2x + 7$
c) $y = -2x + 7$
d) $y = x + 1$
e) $y = -x - 2$

Solução: Pela análise do gráfico é possível determinar as coordenadas do ponto A e B, fixando um barbante no ponto A e buscando as coordenadas no eixo cartesiano encontrando $A(2,3)$, de modo análogo o ponto $B(5,-3)$. Definido os dois pontos e já localizados no plano cartesiano, vamos com um barbante fazer a distância entre as coordenadas de x e y para encontrar o coeficiente angular. Nesse sentido a distância entre as coordenadas é expressa na equação abaixo:

$m = \frac{(-6)}{3)}$ $m = -2$

Nesse ponto é importante analisar a reta no MULTIGEA, como a reta é decrescente, tem-se o coeficiente angular negativo, se ela intersectasse o eixo Y a resposta seria imediata, pois te-se apenas duas alternativas com coeficiente angular negativo.

Nesse caso substituiremos o ponto $A(2,3)$ na equação reduzida da reta para encontrar o valor de n

$y = mx + n$

$3 = (-2).(2) + n$

$3 = -4 + n$

$n = 3 + 4$

$n = 7$

Desse modo a solução é dada por: $y = -2x + 7$

5. Dada a equação Elipse $4x^2 + y^2 - 16 = 0$, determinar:

   a) a medida dos semi eixos

   b) um esboço do gráfico

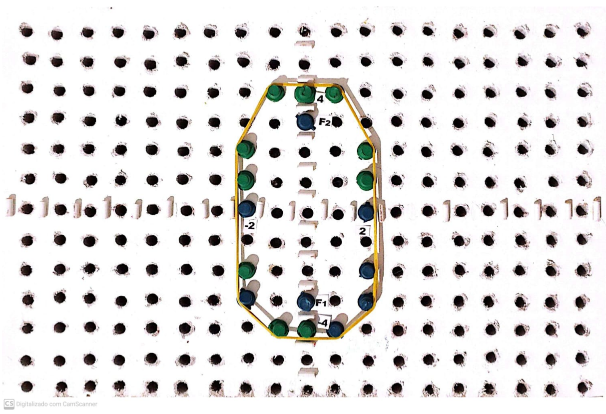
   c) os focos

Solução:

   a) Dada a equação $4x^2 + Y^2 - 16 = 0$, iremos utilizar a ficha legendada para escrever a equação da elipse na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$, chegando a equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$, nesse caso temos a medida dos semi eixos definidos com o eixo maior nas ordenadas com $a^2 = 16$, ou seja a $= 4$. O eixo menor nas abcissas com $b^2 = 4$, ou seja b $= 2$

   b) O gráfico é esboçado no MULTIGEA, a partir das medidas dos semi eixos, nesse sentido temos o gráfico.

Figura 50 – Representação da Elipse MULTIGEA



Fonte: Autoria própria

   c) Com o esboço do gráfico no item anterior e os semi eixos marcados no MULTIGEA, fixamos um pino na origem e com uma liga elástica marcamos a distância entre os pontos fixados, como ilustrado na figura. resolvendo

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$4^2 = 2^2 + c^2$$

$$16 - 4 = c^2$$

$$c^2 = 12$$

$$c = \sqrt{12}$$

Logo, os focos são $F_1(0, -\sqrt{12})$ e $F_2(\sqrt{12}, 0)$

6. Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto $(3, 0)$ e a medida do eixo maior é 10. Determinar sua equação,

   Solução:

   Usaremos o esboço do gráfico para que o estudante deficiente visual tenha uma melhor compreensão da equação da elipse. Note que como o foco é ponto do eixo X, a equação é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.. Vamos determinar a e b, como o eixo maior é 10, decorre que

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

   Como o centro da elipse é na origem, fixamos um pino na origem

$$(0, 0)$$

   e um pino foco é $(3, 0)$, desse modo, temos que $c = 3$, substituindo os valores na equação, teremos a seguinte equação da elipse.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = b^2 + 3^2$$

$$25 - 9 = b^2$$

$$b^2 = 16$$

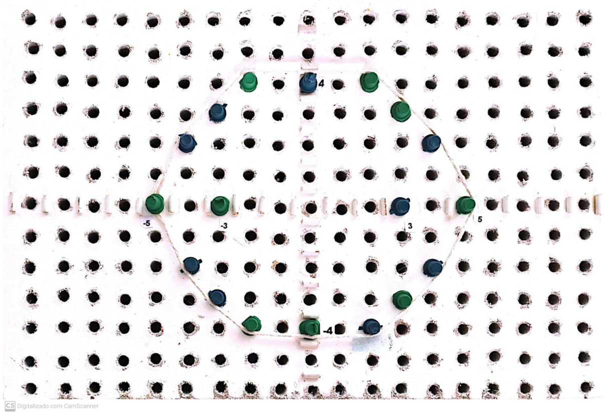
$$b = 4$$

   Logo, a equação procurada é

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

   .

Figura 51 – Representação de uma Elipse com eixo maior igual a 10



Fonte: Autoria própria

7. Dada a equação da hipérbole $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$, determinar:

   a) a medida dos semi eixos

   b) um esboço do gráfico

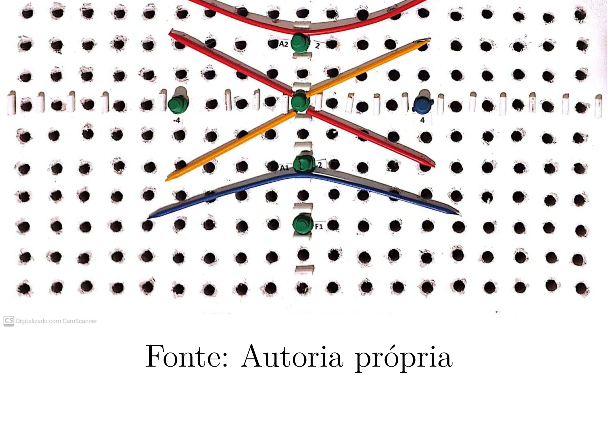
   c) os focos

   Solução:

   a) Dada a equação $x^2 - 4Y^2 + 16 = 0$, iremos utilizar a ficha legendada para escrever a equação da elipse na forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$, chegando a equação $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$, nesse caso temos a medida dos semi eixos definidos com o eixo maior nas ordenadas com $b^2 = 16$, ou seja $b = 4$. O eixo menor nas abcissas com $a^2 = 4$, ou seja a $= 2$

   b) O gráfico é esboçado no MULTIGEA, a partir das medidas dos semi eixos, nesse sentido temos o gráfico.

Figura 52 – Representação do gráfico de uma Hipérbole



Fonte: Autoria própria

c) Com o esboço do gráfico no item anterior e os semi eixos marcados no MULTIGEA, fixamos um pino na origem e com uma liga elástica marcamos a distância entre os pontos fixados, como ilustrado na figura. Resolvendo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 2^2 + 4^2$$

$$c^2 = 4 + 16$$

$$c^2 = 20$$

$$c = 2\sqrt{5}$$

Logo, os focos são $F_1(0, -2\sqrt{5})$ e $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

8. Uma hipérbole tem focos em $F_1(-5, 0) e F_2(5, 0)$ e a medida do eixo real é 6. Determinar sua equação reduzida.

Solução: Para determinar a equação reduzida da hipérbole, iremos determinar os valores de a, b e c. Como c é a distância do centro aos focos e os focos são: $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$, desse modo $c = 5$. Como o eixo real é 6, decorre que $2a = 6$, sendo $a = 3$, vamos substituir na equação para determinar b e encontrar a equação reduzida.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

$$25 = 9 + b^2$$

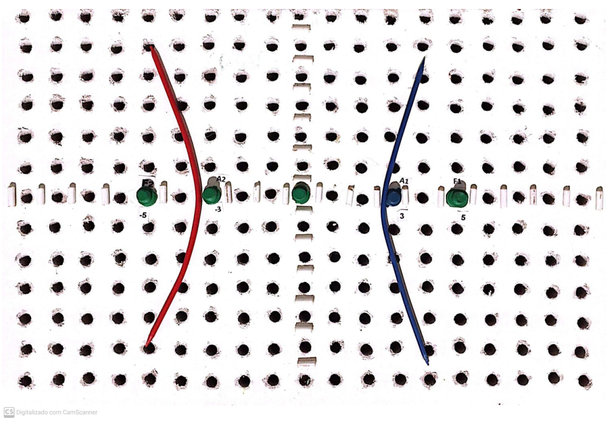
$$b^2 = 25 - 9$$

$$b = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

A equação reduzida é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Figura 53 – Representação de uma Hipérbole com V(3,-3)

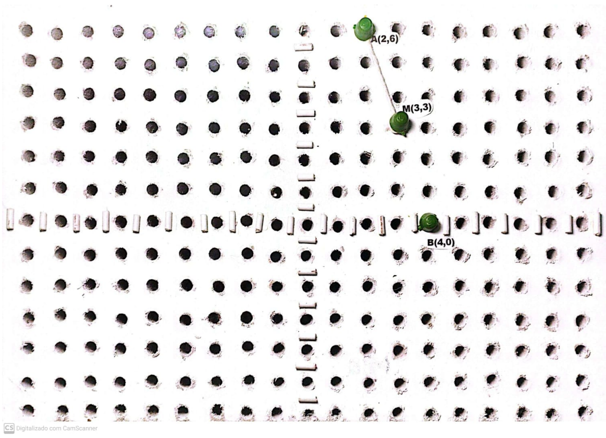


Fonte: Autoria própria

9. Seja M(3,3) o ponto médio do segmento AB. Calcule as coordenadas do ponto A, sabendo que $B(4,0)$.

   Solução: No MULTIGEA de modo inicial vamos localizar o ponto $M(3,3)$ que é o ponto médio do segmento AB, é sabido que o ponto $M(3,3)$ é equidistante do ponto A e B, desse modo vamos localizar de modo inicial o ponto $B(4,0)$ e verificar o deslocamento até o ponto $M(3,3)$. Desse modo de forma tátil o estudante deficiente visual consegui contar manualmente o deslocamento e fixar o pino do ponto A, que desse modo tem a coordenada $A(2,6)$. Outra sugestão é fixar um barbante no ponto $M(3,3)$ e verificar o comprimento até o ponto $B(0,4)$, buscando de modo simétrico o ponto $A(4,0)$.

Figura 54 – Representação de pontos equidistantes ao centro fixado no ponto D da circunferência

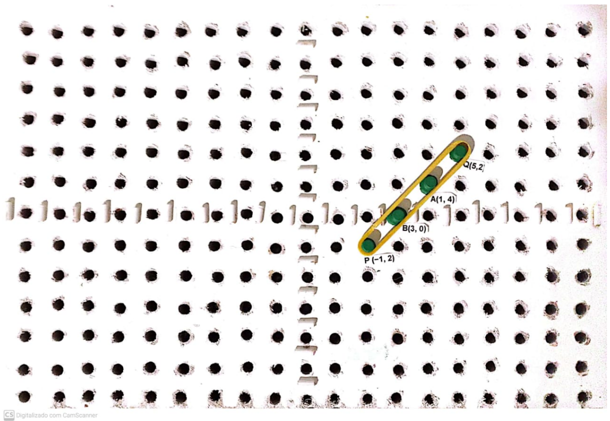


Fonte: Autoria própria

10. Determine dois pontos que estejam alinhados com os pontos $A(1,4)$ e $B(3,0)$.

    Solução: Dados os pontos listados no enunciado, vamos localizar no MULTIGEA os pontos presentes no 1° quadrante. Desse modo como uma reta é definida por dois pontos e por uma reta definida existem infinitos pontos, decorre desse modo escolher outros pontos na reta definida, como por exemplo $P(-1,2)$ e $Q(5,2)$. Observe a representação gráfica feita no MULTIGEA para verificar os pontos escolhidos e infinitos que existem.

Figura 55 – Representação gráfica de pontos atribuídos a reta



Fonte: Autoria própria

5 Conclusão

O presente trabalho se propôs a realizar uma análise da geometria analítica com ênfase em estudantes com deficiência visual, estabelecendo um estudo acerca das pessoas com deficiência visual perante a sociedade e como estão inseridos no campo educacional como discentes. Buscando desse modo estabelecer uma relação entre a geometria analítica e o estudante com deficiência visual, fortalecendo a relação com a revisão bibliográfica com a BNCC, PCN+ e o MEC.

A explanação de alguns conceitos teóricos da geometria analítica deixa evidente que este se mostram como conceitos difíceis de serem compreendidos por estudantes com deficiência visual por toda a sua abstração e agravada quando essa se coloca para estudantes que não tiveram o acompanhamento de braille na idade certa, chegando dessa forma, à última etapa da educação básica com essa deficiência.

Nesta perspectiva, consideramos primordial desenvolver a compreensão dos estudantes com deficiência visual sobre as possibilidades para que se concretize o ensino aprendizagem e uma educação igualitária. Ao analisar as dificuldades das escolas públicas, de modo particular, presencio na prática a dificuldade encontrada por uma estudante com deficiência visual ano do 3° ano do ensino médio em aprender geometria analítica tendo como principal sentido para a aprendizagem o tato, para que possa sentir, analisar, compreender conceitos e resolver exercícios.

Desse modo, propomos a construção e aplicação de um multiplano de geometria analítica, cuja a sua validação se solidifica pela possibilidade de aprender os conteúdos propostos. O multiplano de geometria analítica (MULTIGEA) como desenvolvido no decorrer do trabalho é um recurso metodológico para fortalecer o ensino da matemática, sendo possível ser construído por qualquer escola, por ser de baixo custo. A multidisciplinaridade nele encontrada possibilita sua utilização pelo professor titular da disciplina, bem como outro professor que venha se utilizar das ferramentas para desenvolver conceitos e conteúdos matemáticos. Essa etapa do MULTIGEA é a ligação encontrada para que a geometria analítica e o estudante com deficiência visual possam enfrentar as barreiras e assim enxergar a possibilidade de aprendizado concreto. Para construir o multiplano é necessário que seguir o passo a passo de construção proposta no trabalho, um material de fácil acesso, compacto e que se desenvolve pensando no estudante não brailista, por isso que nele encontramos as fichas legendadas enriquecer o multiplano, pois elas são essenciais para o MULTIGEA. Fora demostrada a sua aplicação com a ilustração de alguns conceitos no multiplano, tornando palpável ao discente a compreensão e demonstração de tópicos da geometria analítica. Para equalizar o seu uso resolve-se algumas questões encontradas em avaliações externas, ou em livros didáticos, todas resolvidas no MULTIGEA.

É importante mencionar que a reflexão feita é na qualidade da educação que conseguimos entregar como professores da educação básica, o MULTIGEA é o recurso pedagógico, buscado, estudado e posto como ferramenta capaz de minimizar as lacunas deixadas pela cegueira, agravadas pela não compreensão do braille. Neste contexto, todo estudo decorre para a realização e uso dessa ferramenta.

Por fim esperamos que esse trabalho venha ser multiplicado em todas as unidades de ensino e que sirva de inspiração para que novas pesquisas sejam feitas e aprimoradas pensando em nosso estudante de modo geral e nas particularidades que cada um traz em seu individual. Da mesma maneira, se mostra necessário a continuação da busca de mecanismos pedagógicos capazes de integralizar o conhecimento a todos os estudantes independente de qualquer deficiência que possam ter nascido com ela ou adquirido no decorrer de sua vida. A partir dessa análise, este trabalho tem o intuito de contribuir para uma educação de qualidade na vida dos estudantes.

Referências

ABREU, L. A. F. Geometria para deficiente visual: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos. 2014.

BOYER, C. B. História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide. 1.ed.São Paulo: Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

ABREU, L. A. F. Geometria para deficiente visual: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos. 2014.

BOYER, C. B. História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide. 1.ed.São Paulo: Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Estratégias e Orientações Pedagógicas para a Educação de Crianças com Necessidades Especiais: Dificuldades de Comunicação e Sinalização: Deficiência Visual. Secretaria de Educação Especial. Brasília (DF), MEC; SEESS, 2002.

BRASIL. Lei 8.213 de 24/07/1991 − Dispõe sobre os Planos de Benefícios da Previdência Social e dá outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br. Acesso em: 23/02/2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Anais do I Simpósio Brasileiro sobre o Sistema Braille. Sistema Braille: Um horizonte de Conquistas. Salvador (BA), 2001.

BRASIL. Ministério da Educação: Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Volume 2. Brasília, 2006. Acesso em 22/02/2024.

BRASIL. Ministério do Trabalho e Emprego. Vagas ocupadas no Mercado de Trabalho por pessoas com deficiência e beneficiários reabilitados no Brasil aumentou. [Brasília]: Ministério do Trabalho e Emprego, 21/09/2023. Disponível em: https://www.gov.br/trabalho-e-emprego/pt-br/noticias-e-conteudo/2023/setembro/vagas-ocupadas-no-mercado-de-trabalho-por-pessoas-com-deficiencia-e-beneficiarios-reabilitados-no-brasil-aumentou-de-2008-para-2022. Acesso em: 21/02/2024.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio: orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. Acesso em 22/02/2024. BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. Acesso em: 22/02/2024.

CRUZ, V. V.; SILVA, H. F. da; PINTO, E. G.; FIGUEIREDO, N. M. . A. de; SÉ, A.

C. S.; FERNANDES, E. M.; MACHADO, W. C. A. Accessibility barriers for people with disabilities or reduced mobility: an integrative review. Research, Society and Development, [S. l.], v. 9, n. 4, p. e168943053, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i4.3053. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/3053. Acesso em: 24/02/2024.

DANTE, L. R. Matemática: Contextos e aplicações. 3º Ano - 4. ed. – São Paulo: Ática, 2011. DE BRITO, F. R. M.; DE ALMEIDA, W. R. GEOMETRIA ANALITICA E ALGEBRA LINEAR PARA ENGENHARIAS. 2 ed. Sete Lagoas: UNIFEMM, 2015.

DO ESPIRITO SANTO, H. O.; DE BARROS LOBO, R. R. Desafios encontrados para acessibilidade e inclusão na educação. Revista Ciência em Evidência, v. 4, n. FC, p. e023007-e023007, 2023.

EL KADRI, F. Da escola ao mercado de trabalho: os obstáculos enfrentados pelas pessoas com deficiência visual. Rede Empresarial de Inclusão Social, 2021. Disponível em: https://www.redeempresarialdeinclusao.org.br/noticias/da-escola-ao-mercado-de-trabalho-os-obstaculos-enfrentados-pelas-pessoas-com-deficiencia-visual/. Acesso em: 21/02/2024.

FACUNDO, G. O. Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio: uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, 2023.

FARIAS, G.C. O Programa de Intervenção Precoce como fator de inclusão da criança cega. Temas sobre desenvolvimento. São Paulo: Memnon, 2003.

GIARDINETTO, J. R. B. Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. Bolema-Boletim de Educação Matemática, 1997.

GIL, M. (org.). Deficiência visual. Brasília: MEC, Secretaria de Educação a Distância, 2000. Cadernos da TV Escola, n.1/2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/defi Acesso em: 21/02/2024.

LUIZ, R. "Geometria analítica". Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matema geometria-analitica.htm. Acesso em 22/02/2024.

MITTLER, P. Educação Inclusiva: contextos sociais. Porto Alegre: Artmed, 2003.

NÚMERO de sites brasileiros aprovados em todos os testes de acessibilidade tem queda em relação ao ano passado e é ainda menor que 1

OCHAITA, E. ; ROSA, A. Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas. Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PAINEL de Indicadores da Educação Especial. DIVERSA, 2022. Disponível em:

https://diversa.org.br/indicadores/. Acesso em: 23/02/2024.

PAVANELO, R. M. O Abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e conseqüências. In: Revista Zetetiké. Campinas, n°.1, 1993.

SILVA, S. F. Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem. Dissertação de Mestrado. PUC-RJ, 2015.

VAN DER-VEER, R.; VALSINER, J. Vygotsky: Uma Síntese. São Paulo: Unimarco, Loyola, 1999.

VIGOTSKY, L.S. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes, 1984.