



Universidade Federal do ABC

GABRIELA COTRIM DE MORAES

ISOMETRIAS E GRUPOS DE FRISO

**Santo André
2013**



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

GABRIELA COTRIM DE MORAES

ISOMETRIAS E GRUPOS DE FRISO

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

SANTO ANDRÉ

2013



Universidade Federal do ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata **Gabriela Cotrim de Moraes**, realizada em 25 de setembro de 2013.

Prof. Dr. Daniel Miranda Machado(UFABC) – Presidente

Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici (UFABC) – Membro Titular

Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos (USP) – Membro Titular

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi (UFABC) – Membro Suplente

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo (UFSCAR) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20____.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Dedico essa dissertação ao meu filho Murilo de Moraes Meirelles, que cresceu com uma mãe estudante que nunca tinha tempo o suficiente para passeios e brincadeiras.

Meu filho, você além de ser o maior presente que tive na vida, foi minha inspiração e minha força de vontade. Em todos os momentos que tropecei, foi por você que me levantei e continuei caminhando. Amo você acima de tudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, pelo apoio incondicional em todos os projetos nos quais me engajei até hoje, em particular o mestrado. Agradeço também à minha amiga Helayne Cristina Rosseto por sempre estar lá, pra me ouvir chorar ou pra me dar apoio. Agradeço acima de tudo a Deus, que me deu capacidade e determinação para chegar até aqui.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a identificação e a classificação dos sete grupos de simetrias que geram frisos ornamentais. Para tanto, foi feito um estudo das isometrias do plano e suas propriedades, como paridade, pontos fixos, entre outras. O trabalho também apresenta um estudo das propriedades advindas da composição de isometrias, e a associação das isometrias à teoria de grupos. O Teorema Central trata dos grupos de friso, identificando-os de acordo com os frisos ornamentais gerados. O trabalho apresenta, finalmente, a proposição de atividades para alunos de ensino médio envolvendo isometrias, frisos ornamentais e identificação de grupos de simetrias.

Palavras-chave: isometrias, grupos de simetrias, grupos de friso

ABSTRACT

The objective of this paper is offer an identification and a classification of the seven symmetry groups that generate frieze patterns. For that, a study was made about the isometries and their properties, such as parity, simmetry points, and others. The paper also presents a study of the properties resulting from the isometries composition and the association of isometrias and the groups theory. The Main Theorem is about frieze groups, identifying them according to the frieze pattern generated. The work finally presents a proposition of activities for students of high school that involve isometries, frieze patterns and identification of simmetry groups.

keywords:isometries, simmetry groups, frieze groups

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	19
2	ISOMETRIAS	21
2.1	Definições	21
2.1.1	Notações	21
2.1.2	Definições Básicas	21
2.1.3	Grupos	23
2.2	Translações	25
2.3	Reflexões por um ponto	28
2.4	Reflexões por uma reta	31
2.5	Rotações	35
3	PROPRIEDADES	39
3.1	Composição	39
3.2	Involuções e Pontos Fixos	48
3.3	Paridade	49
3.4	Reflexões Transladadas	53
3.5	Grupos Diedrais	55
4	GRUPOS DE FRISO	59
5	APLICAÇÕES	65
5.1	Verificação do Teorema de Pitágoras	65
5.1.1	Objetivos	65
5.1.2	Material	65
5.1.3	Roteiro	65
5.2	Identificando os grupos de simetrias em frisos ornamentais	70
5.2.1	Objetivos	70
5.2.2	Material	71
5.2.3	Roteiro	71
5.3	Criando Frisos ornamentais	74
5.3.1	Objetivos	74
5.3.2	Material	74
5.3.3	Roteiro	74

Referências Bibliográficas

77

INTRODUÇÃO

Desde a graduação, o ensino da geometria através das transformações do plano chamou minha atenção.

Tratada com todo formalismo, a geometria das transformações pode se tornar um assunto bastante complexo. Porém, simplificando sua linguagem para torná-la acessível ao aluno do ensino médio, é uma ferramenta de ensino poderosa e de grande alcance, seja por ser mais interessante do ponto de vista do aluno, ou por ser de fácil acesso, quando traduzida numa linguagem acessível ao mesmo.

Além da geometria por transformações, um assunto pelo qual me apaixonei durante minha graduação foi a teoria de grupos. Desde o primeiro momento em que estudei esse assunto, ele despertou meu interesse, por me ajudar a enxergar a matemática e principalmente as propriedades envolvidas nas operações matemáticas de uma forma mais construtiva e acessível.

Ao final da disciplina de graduação intitulada Tópicos de Grupos e Aplicações, uma disciplina optativa que cursei pelo meu interesse no assunto, tive meu primeiro contato com os grupos diedrais e os grupos de simetria. Foi a união de dois assuntos pelos quais eu tinha amplo interesse, interesse esse que culminou com a escolha do tema dessa dissertação.

O objetivo aqui é estudar com um pouco mais de profundidade as transformações do plano, mais especificamente as isometrias do plano e as propriedades advindas da composição entre as diversas isometrias. Unindo este estudo à teoria de grupos, estudar os grupos de simetrias e grupos diedrais, chegando numa aplicação bastante interessante que é a identificação dos grupos de simetrias que formam os frisos ornamentais.

Destaco aqui o Teorema que inspirou este trabalho, que é o Teorema que identifica os sete grupos de simetrias que podem ocorrer nos frisos ornamentais. Para construir a demonstração desse Teorema, foi percorrido um longo caminho.

Inicialmente definimos os termos básicos bem como os elementos da geometria necessários ao desenvolvimento do nosso Teorema principal. Aproveitamos também para definir as transformações do plano, que são a base do estudo realizado. Além das definições da geometria, trazemos nesse momento inicial as bases da Teoria de Grupos que permearão todo o texto.

Após as definições iniciais, nos propusemos a estudar as transformações elementares do plano; translação, reflexão e rotação; verificando suas definições formais, encontrando suas equações para utilização em aplicações da geometria analítica e verificando quais das transformações, ou pares delas formam grupos.

No capítulo sobre propriedades, buscamos verificar as transformações advindas da composição de duas ou mais transformações, bem como as propriedades interessantes que estas composições podem apresentar. Neste capítulo, surgem as reflexões transladadas, que não foram definidas inicialmente por serem o resultado da composição de três reflexões por retas. É neste capítulo

também que definimos os grupos diedrais, que aparecem com grande destaque no estudo das simetrias, e demonstramos um teorema de grande importância que classifica todos os grupos finitos de simetrias como grupos cíclicos ou grupos diedrais.

Finalmente no capítulo sobre os grupos de friso, trazemos a demonstração do Teorema principal desse trabalho, Teorema este que identifica os sete tipos de grupo que podem gerar os frisos ornamentais. O objetivo do Teorema é mostrar que, fixado um motivo (ou figura ornamental), existem apenas sete possibilidades de sequências de transformações do plano que geram um friso ornamental.

Finalmente chegamos ao capítulo de aplicações. Neste capítulo retomamos a motivação original deste trabalho, que é a finalização do programa de mestrado em matemática PROFMAT. Por se tratar de um programa destinado a professores de matemática, não poderíamos deixar de apresentar aplicações da teoria estudada através de atividades que podem ser realizadas em sala de aula, principalmente em aulas do ensino médio.

ISOMETRIAS

2.1 DEFINIÇÕES

2.1.1 Notações

Antes de começarmos com as definições iniciais, vamos estabelecer as notações que serão utilizadas ao longo do texto.

1. **Ponto:** o ponto será denotado por uma letra maiúscula, ou pelo par ordenado que o representa no plano cartesiano. Por exemplo, o ponto A pode ser denotado simplesmente por A ou por suas coordenadas (x_A, y_A) .
2. **Segmento de reta:** o segmento de reta que passa pelos pontos A e B será representado por \overline{AB} .
3. **Medida de segmento:** a distância entre dois pontos dados, A e B , que é a medida do segmento \overline{AB} será representada por AB .
4. **Vetor:** o vetor definido por dois pontos A e B , orientado na direção de B será denotado por \vec{AB} .
5. **Transformações do plano:** serão denotadas por letras gregas minúsculas.
6. **Retas:** serão representadas por letras minúsculas.

2.1.2 Definições Básicas

Neste capítulo, nosso objetivo é definir os objetos e termos que serão utilizados ao longo do texto, bem como as notações adotadas, procurando tornar claras as idéias expostas. Começaremos definindo pontos, transformações e colineações do plano.

Definição 1 Considerando o plano ondcartesiano, um **ponto** é um par ordenado (x, y) e uma **reta** é um conjunto de pontos satisfazendo a equação $ax + by + c = 0$, e $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b não são simultaneamente nulos.

Definição 2 Uma **transformação** do plano é uma bijeção do conjunto de pontos do plano nele mesmo. Chamaremos de **colineação** a toda transformação que preserva retas, ou seja, se r é uma reta e α é uma colineação, então $\alpha(r)$ também será uma reta.

Definição 3 Uma **involução** é uma função que tem ela própria por inversa.

Algumas transformações têm características especiais, como preservam conjuntos de pontos, ou propriedades de conjuntos de pontos, como segue:

Definição 4 Dizemos que uma transformação α do plano **fixa** um ponto P do plano se $\alpha(P) = P$. Além disso, dizemos que uma transformação α do plano **preserva** uma reta r do plano, se $\forall P \in r, \alpha(P) \in r$. Dizemos ainda que uma transformação α do plano **fixa uma reta** r quando $\alpha(P) = P, \forall P \in r$.

Definição 5 Uma **dilatação** α é uma colinação com a propriedade de que $\alpha(r)$ é paralela à r para toda reta r do plano.

Uma definição importante para este trabalho é a de isometria, que será amplamente utilizada ao longo do texto.

Definição 6 Uma **isometria** é uma transformação do plano que preserva distâncias, ou seja, se P, Q são pontos do plano e α é uma isometria e $P' = \alpha(P)$ e $Q' = \alpha(Q)$, então $PQ = P'Q'$.

Definidos os objetos básicos, iremos agora definir as transformações do plano, transformações estas que serão a base para a construção do Teorema central que inspirou este texto. Começaremos definindo translação, que é a transformação que move pontos do plano em direções determinadas.

Definição 7 Dados dois pontos distintos A, B . A **translação** $\tau_{A,B}$ é uma função que leva cada ponto P do plano num ponto $P' = \tau_{A,B}(P)$ onde $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$.

Outra transformação do plano que utilizaremos no desenvolvimento deste trabalho é a reflexão por um ponto dado, conhecida também como meia-volta, dada a sua natureza.

Definição 8 Seja A um ponto do plano. A **Reflexão por um ponto** em torno de A é a função σ_A dada por:

$$\sigma_A(P) = \begin{cases} P, & \text{se } P = A \\ = P', & \text{se } P \neq A \text{ onde, } A \text{ é o ponto médio de } \overline{PP'} \end{cases}$$

Essa transformação associa a cada ponto P do plano o seu simétrico em relação a A .

As reflexões também podem ser feitas utilizando retas como base, nesse caso temos um espelhamento do ponto transformado, sendo a reta utilizada na reflexão o espelho.

Definição 9 Dada uma reta r do plano, a **reflexão por uma reta** em torno de r de um ponto P do plano é a função σ_r definida por:

$$\sigma_r(P) = \begin{cases} P, & \text{se } P \in r \\ Q, & \text{se } P \notin r, \text{ onde } r \text{ é a mediatriz de } \overline{PQ} \end{cases}$$

Já vimos que algumas transformações podem fixar pontos ou mesmo conjuntos de pontos. Estes pontos, ou conjuntos de pontos recebem nomes específicos, como vemos a seguir.

Definição 10 O ponto P é um **ponto de simetria** para o conjunto de pontos S se $\sigma_P(S) = S$, ou seja, se σ_P fixa S . A reta r é uma **reta de simetria** para o conjunto de pontos S se $\sigma_r(S) = S$.

Definição 11 Uma isometria α é uma **simetria** para o subconjunto de pontos do plano s se α preserva s .

Além das transformações já definidas, temos ainda rotações e reflexões transladadas. A primeira, como o nome diz, rotaciona pontos em torno de um ponto fixado. A segunda faz um movimento com o ponto que é ao mesmo tempo uma reflexão por uma reta (o eixo da reflexão transladada) e uma translação por um vetor paralelo a esse eixo.

Definição 12 Uma **rotação** em torno de um ponto C por um ângulo θ no sentido anti-horário $\rho_{C,\theta}$ é uma transformação que leva um ponto qualquer P no ponto P' , onde $CP' = CP$ e θ é o ângulo formado no sentido anti-horário entre \vec{CP} e \vec{CP}' .

Definição 13 Uma **reflexão transladada** de eixo c é o produto de três reflexões por retas $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ onde a e b são retas distintas e perpendiculares à c .

2.1.3 Grupos

Além dos objetos comuns da geometria utilizados neste texto, iremos utilizar algumas definições e propriedades utilizadas na Teoria de Grupos, como segue:

Definição 14 Um **grupo** é um conjunto G munido de uma operação $*$ que satisfaz às seguintes propriedades:

1. O conjunto G é fechado para a operação $*$, isto é, se $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$;
2. $*$ é associativa, ou seja, dados $a, b, c \in G$, então $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. G possui um elemento neutro para a operação $*$ chamado identidade que denotaremos por i . Como caracterização do elemento temos que $\forall a \in G; a * i = i * a = a$;
4. todo elemento de G possui inverso pela operação $*$, ou seja, $\forall a \in G; \exists a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$.

Observação: Por economia de notação, podemos representar a operação entre elementos de um grupo por justaposição desses elementos, assim representamos $a * b$ simplesmente por ab .

Definição 15 Seja G um grupo. Um conjunto $H \subset G$ é um **subgrupo** de G se:

1. $i \in H$;
2. Dados $\alpha, \beta \in H$, então $\alpha\beta \in H$;
3. Se $\alpha \in H$, então $\alpha^{-1} \in H$.

Note que todo subgrupo é, ele mesmo um grupo.

Agora que conhecemos grupos e subgrupos, vamos verificar se o conjunto das transformações do plano são um grupo.

Teorema 1 1. O conjunto de todas as transformações, considerando como operação a composição de funções, forma um grupo.

2. O conjunto de todas as colineações é um subgrupo do grupo das transformações.

Demonstração:

1. A identidade é uma transformação do plano, pois é uma função bijetora, a identidade é o elemento neutro do grupo.

A composta de duas transformações do plano, também é uma transformação do plano, pois sabemos que composição de funções bijetoras resulta numa função bijetora.

Toda função bijetora é inversível, e sua inversa é, também, uma função bijetora, logo, toda transformação do plano possui uma inversa e esta inversa é também uma transformação do plano.

2. Para mostrar que o conjunto das colineações é um subgrupo do grupo das transformações, mostraremos inicialmente que composta de colineações é também uma colineação.

De fato, sejam α e β colineações e seja ℓ uma reta do plano. Como β é uma colineação, temos que $\beta(\ell)$ será uma reta do plano, e como α é uma colineação $\alpha(\beta(\ell))$ também será uma reta. Assim, $\alpha\beta(\ell)$ é uma reta e portanto $\alpha\beta$ é uma colineação.

A identidade é claramente uma colineação e, além disso, dada α uma colineação qualquer e ℓ uma reta do plano, sabemos que, por α ser bijetora existe uma reta r no plano tal que $\ell = \alpha(r)$, então $\alpha^{-1}(\ell) = \alpha^{-1}(\alpha(r)) = r$ que é uma reta e portanto α^{-1} é uma colineação, o que encerra a demonstração. ■

Ainda nas definições básicas a respeito de grupos, temos os grupos abelianos, grupos cíclicos e subgrupos gerados por algum conjunto.

Definição 16 Um grupo G onde vale a propriedade comutativa, isto é, dados $a, b \in G$ temos $ab = ba$ é chamado de **grupo abeliano**.

Teorema 2 Sejam \mathcal{F} e \mathcal{H} subgrupos de um grupo \mathcal{G} . Então $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ é um subgrupo de \mathcal{G} .

Demonstração:

1. Como \mathcal{F} é subgrupo de \mathcal{G} então $i \in \mathcal{F}$, onde i é a identidade do grupo \mathcal{G} ; como \mathcal{H} é subgrupo de \mathcal{G} então $i \in \mathcal{H}$. Logo $i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$.
2. Sejam $a, b \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Em particular temos $a, b \in \mathcal{F}$ e como \mathcal{F} é subgrupo de \mathcal{G} então $ab \in \mathcal{F}$. Analogamente concluímos que $ab \in \mathcal{H}$, portanto $ab \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$.
3. Seja $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Então $a \in \mathcal{F}$ e como \mathcal{F} é subgrupo de \mathcal{G} existe $a^{-1} \in \mathcal{F}$. Analogamente, podemos concluir que existe $a^{-1} \in \mathcal{H}$, portanto $a^{-1} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ o que conclui a demonstração. ■

Definição 17 Seja G um grupo e seja $X \subset G$. Denotaremos por $\langle X \rangle$ o **subgrupo de G gerado por X** que é definido por $\langle X \rangle = \bigcap \{H : H \text{ subgrupo de } G \text{ e } X \subset H\}$.

Definição 18 Um **subgrupo cíclico** de um grupo G é um subgrupo gerado por algum elemento $\alpha \in G$. Denotaremos por $\langle \alpha \rangle = \{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Note que a identidade pode sempre ser denotada como α^0 e além disso, se não existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha^n = i$ então o grupo cíclico será infinito. Quando um grupo cíclico for finito, ele pode ser denotado por C_n , sendo n o número de elementos do grupo, ou seja $\langle \alpha \rangle = C_n$ se $\alpha^n = i$.

2.2 TRANSLAÇÕES

Uma translação $\tau_{A,B}$, como já vimos, será caracterizada por levar um ponto P do plano num ponto P' de modo que $\overline{PP'} = \overline{AB}$. Assim, podemos concluir que $\tau_{A,B}(A) = B$. Em outras palavras, a translação $\tau_{A,B}$ soma a um ponto P do plano o vetor \overrightarrow{AB} . Assim, sendo $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, consideramos $a = x_B - x_A$ e $b = y_B - y_A$ e assim concluímos que $\tau_{A,B}$ tem equação na forma $\tau_{A,B}(x, y) = (x', y') = (x + a, y + b)$.

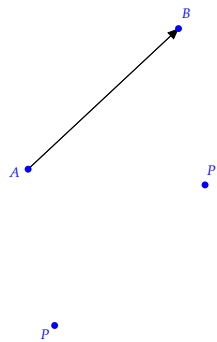


Figura 1: $\tau_{A,B}$

Definida a translação com suas equações, o próximo passo é mostrar que dados dois pontos A e B , a translação $\tau_{A,B}$ está bem definida e qual a relação que ocorre entre os pontos A , B , C e D caso ocorra $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$.

Teorema 3 Dados dois pontos distintos do plano P e Q , existe uma única transformação $\tau_{P,Q}$ que leva P em Q .

Demonstração: A translação $\tau_{P,Q}$ como definida anteriormente leva, de fato, o ponto P no ponto Q . Falta mostrar então, que dada uma translação qualquer τ tal que $\tau(P) = Q$ então $\tau = \tau_{P,Q}$.

Vimos que uma translação tem por equação $\tau(x, y) = \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases}$.

Como $\tau(P) = Q$, temos que $\tau(x_P, y_P) = \begin{cases} x_Q = x_P + a, \\ y_Q = y_P + b \end{cases}$ de onde concluímos que $a = x_Q - x_P$ e $b = y_Q - y_P$, o que mostra que $\tau = \tau_{P,Q}$. ■

Teorema 4 Suponha A, B e C pontos não colineares. Então $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$ se, e somente se, $\square ABDC$ for um paralelogramo.

Demonstração: (\Rightarrow) Dados A, B e C pontos não colineares, como $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$ temos que $D = (x_D, y_D) = (x_C + (x_B - x_A), y_C + (y_B - y_A))$. Então, $\vec{CD} = \vec{AB}$. Por outro lado, $\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$ e $\vec{BD} = (x_D - x_B, y_D - y_B) = (x_C + x_B - x_A - x_B, y_C + y_B - y_A - y_B) \Rightarrow \vec{BD} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = \vec{AC}$ e portanto $\square ABCD$ é um paralelogramo.

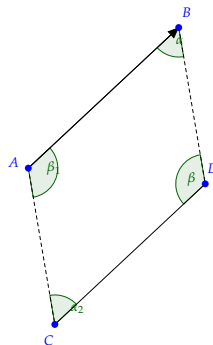


Figura 2: Teorema 4

(\Leftarrow) Se $\square ABDC$ é um paralelogramo, então $\vec{AB} = \vec{CD}$ o que nos garante que $\tau_{A,B} = \tau_{C,D}$. Indicamos [10] para aprofundar os conhecimentos no tramento vetorial da geometria. ■

Vamos agora verificar que a translação preserva o paralelismo entre retas e quais as retas preservadas por elas.

Teorema 5 Uma translação é uma dilatação. Se $P \neq Q$ então $\tau_{P,Q}$ não fixa nenhum ponto do plano e preserva exatamente as retas do plano que são paralelas à \overline{PQ} .

Demonstração: Suponha uma reta r de equação $aX + bY + c = 0$ e $\tau_{P,Q}$ de equação $\tau_{P,Q}(x, y) = (x + h, y + k)$.

Como na definição de reta temos $a, b \neq 0$, podemos escrever os pontos de r com a forma $(x, \frac{-ax-c}{b})$. Assim, dado um ponto $(x, y) \in r$ qualquer temos que $\tau_{P,Q}(x, y) = (x + h, \frac{-ax-c}{b} + k)$, então:

$a(x + h) + b(\frac{-ax-c}{b} + k) + c = ax + ah - ax - c + bk + c = ah + bk$, o que nos mostra que $\tau_{P,Q}(x, y)$ satisfaz a equação $aX + bY + c - ah - bk = 0$ que é a equação de uma reta paralela à reta r . Portanto $\tau_{P,Q}$ é uma dilatação.

Suponha agora que $\tau_{P,Q}$ fixa um ponto $A = (x_A, y_A)$ do plano. Então, temos que $\tau_{P,Q}(x_A, y_A) = (x_A + h, y_A + k) = (x_A, y_A)$, o que significa que $h = k = 0$. Mas $h = x_Q - x_P$ e $k = y_Q - y_P$, logo $h = k = 0 \Rightarrow P = Q$ o que contraria nossa hipótese. Logo, se $P \neq Q$ $\tau_{P,Q}$ não fixa nenhum ponto do plano.

Falta mostrar que $\tau_{P,Q}$ preserva exatamente as retas do plano que são paralelas à \overline{PQ} .

Seja s uma reta do plano tal que $s // \overline{PQ}$ e seja $A \in s$. Como $A\tau_{P,Q}(\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{PQ}$ e $s // \overline{PQ}$, então $\tau_{P,Q} \in s$, o que mostra que $\tau_{P,Q}$ preserva s .

Suponha agora que $\tau_{P,Q}$ preserva uma reta r do plano. Isso significa que dado um ponto $A \in r$, $A \notin \overrightarrow{PQ}$, teremos $B = \tau_{P,Q}(A) \in r$, o que implica que $\overrightarrow{AB} \subset r$. Como $B = \tau_{P,Q}(A)$ teremos $\tau_{A,B} = \tau_{P,Q}$. Então, se $\overrightarrow{PQ} \subset r$, temos $r // \overline{PQ}$. Como A, P e Q não são colineares, o Teorema 3 nos garante que $\square PQAB$ é um paralelogramo, logo $r // \overline{PQ}$. Se tomarmos A de forma que $A \in \overrightarrow{PQ}$, então como $B = \tau_{P,Q}(A) \in \overrightarrow{PQ}$ e como por hipótese $B \in r$ teremos $r = \overrightarrow{PQ}$, pois as duas retas possuirão dois pontos de intersecção distintos. ■

Falta então verificar que as translações formam um grupo. Mais do que isso, formam um grupo abeliano.

Teorema 6 1. As translações formam um grupo abeliano \mathcal{T} .

2. As dilatações formam um grupo \mathcal{D} .

Demonstração:

1. A identidade é uma translação por um vetor nulo: $i = \tau_{P,P}$.

Dadas duas translações τ_1 e τ_2 , onde $\tau_1(x, y) = (x + a, y + b)$ e

$\tau_2(x, y) = (x + k, y + h)$, temos que

$\tau_1\tau_2(x, y) = \tau_1(x + k, y + h) = (x + k + a, y + h + b)$ e

$\tau_2\tau_1(x, y) = \tau_2(x + a, y + b) = (x + a + k, y + b + h) = (x + k + a, y + h + b)$. Portanto,

$\tau_1\tau_2$ é uma translação

Dada uma translação por um vetor qualquer (a, b) , que chamaremos de τ , e sendo

$\alpha = \tau^{-1}$ temos que, dado um ponto (x, y) :
 $\alpha(\tau(x, y)) = (x, y) \Rightarrow \alpha(x + a, y + b) = (x, y) \Rightarrow \alpha(x, y) = (x - a, y - b)$, logo α é uma translação, o que mostra que o conjunto das translações é um subgrupo do grupo das transformações. Além disso $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ o que mostra que \mathcal{T} é um grupo abeliano.

2. Primeiramente a identidade é uma dilatação, pois dada uma reta r , $i(r) = r // r$.
 Sejam α e β duas dilatações e r uma reta, então $\alpha(r) // r$ e $\beta\alpha(r) // \alpha(r) // r$.
 Finalizando, dada uma dilatação α e uma reta ℓ qualquer, por ser α uma função bijetora, existe uma reta r tal que $\ell = \alpha(r)$ e por α ser uma dilatação, temos $\ell // r$. Então, $\alpha^{-1}(\ell) = \alpha^{-1}(\alpha(r)) = r$, logo α^{-1} é também uma dilatação.
 Portanto as dilatações formam um grupo que chamaremos de \mathcal{D} . ■

2.3 REFLEXÕES POR UM PONTO

Suponha que queremos refletir um ponto qualquer do plano $P = (x, y)$ por um ponto fixo $A = (a, b)$. Então, de acordo com a definição, devemos encontrar um ponto $P' = (x', y') = \sigma_A(P)$ de modo que A seja o ponto médio de $\overline{PP'}$. Usando a fórmula para coordenadas do ponto médio, temos que

$$A = (a, b) = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \Rightarrow x' = -x + 2a \text{ e } y' = -y + 2b.$$

Concluimos então que a reflexão por um ponto σ_A em torno do ponto A é dada pela equação $\sigma_A(x, y) = (x', y') = (-x + 2a, -y + 2b)$.

Encontradas as equações que definem a reflexão por um ponto vamos verificar que essas transformações levam retas em retas paralelas a elas. Podemos verificar também quais os pontos fixados pela reflexão por um ponto e quais retas são preservadas por esta transformação.

Teorema 7 1. A reflexão por um ponto é uma dilatação.

2. Uma reflexão por um ponto σ_A fixa um ponto P se, e somente se, $P = A$.
 3. Uma reflexão por um ponto σ_A preserva uma reta r se, e somente se, $A \in r$.

Demonstração:

1. Seja r uma reta do plano de equação $aX + bY + c = 0$ e σ_A a reflexão pelo ponto $A = (a, b)$. Vimos na equação da reflexão por um ponto, que $\sigma_A(x, y) = (-x + 2a, -y + 2b)$. Supondo $P = (x, y) \in r$, temos que $ax + by + c = 0$. Vamos observar o que ocorre com $P' = (x', y') = \sigma_A(P)$.
 $ax' + by' + c = a(-x + 2a) + b(-y + 2b) + c = -ax - by + 2a^2 + 2b^2 + c =$
 $= 2a^2 + 2b^2 + 2c$, então o ponto P' satisfaz a equação $ax + by + 2a^2 + 2b^2 + 2c = 0$ que é a equação de uma reta paralela à r . Portanto σ_A é uma dilatação.

2. Suponha que existe um ponto $P = (x, y)$ do plano tal que $\sigma_A(P) = P$. Então temos que $(-x + 2a, -y + 2b) = (x, y) \Rightarrow (a, b) = (x, y) \Rightarrow P = A$.
Se $P = A$, temos que $\sigma_A(A) = (-a + 2a, -b + 2b) = (a, b) = A$ o que mostra a segunda parte do teorema.
3. Dada uma reta r , e um ponto $P = (x, y) \in r$, se $P' = \sigma_A(P) \in r$ então $A \in r$, pois como vimos, A é o ponto médio de $\overline{PP'}$. Por outro lado, estando A em r , a mesma razão fará com que $\sigma_A(P) \in r, \forall P \in r$. ■

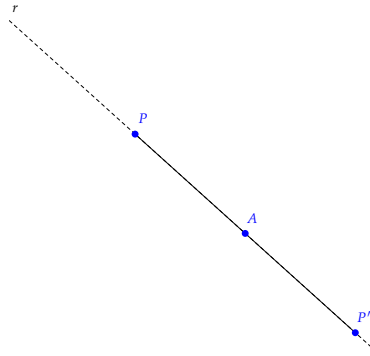


Figura 3: Reflexão por um ponto

Vamos agora relacionar as reflexões por um ponto com as translações.

Teorema 8 Se Q é o ponto médio entre P e R , então $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R\sigma_Q$.

Demonstração: Sejam $P = (x_P, y_P)$ e $R = (x_R, y_R)$. Sendo Q o ponto médio de P e R , temos $Q = (\frac{x_P+x_R}{2}, \frac{y_P+y_R}{2})$. Então, dado um ponto $X = (x, y)$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma_Q\sigma_P(x, y) &= \sigma_Q(-x + 2x_P, -y + 2y_P) = \\ &= (x - 2x_P + 2\frac{x_P+x_R}{2}, y - 2y_P + 2\frac{y_P+y_R}{2}) = (x - x_P + x_R, y - y_P + y_R) \end{aligned}$$

$$\tau_{P,R}(x, y) = (x + x_R - x_P, y + y_R - y_P)$$

$$\sigma_R\sigma_Q(x, y) = \sigma_R(-x + 2\frac{x_P+x_R}{2}, -y + 2\frac{y_P+y_R}{2}) =$$

$$= \sigma_R(-x + x_P + x_R, -y + y_P + y_R) = (x - x_P - x_R + 2x_R, y - y_P - y_R + 2y_R) =$$

$$= (x - x_P + x_R, y - y_P + y_R).$$

Portanto $\sigma_Q\sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R\sigma_Q$. ■

Usaremos agora o Teorema anterior para verificar o que ocorre quando compomos três reflexões por pontos.

Teorema 9 Um produto de três reflexões por pontos é uma reflexão por ponto. Em particular, se os pontos P, Q e R não são colineares, então $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_S$, onde $\square PQRS$ é um paralelogramo.

Demonstração: Sejam $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$ e $R = (x_R, y_R)$ pontos fixados do plano e $X = (x, y)$ um ponto qualquer. Então:

$$\sigma_R \sigma_Q \sigma_P(x, y) = (-x + 2x_P - 2x_Q + 2x_R, -y + 2y_P - 2y_Q + 2y_R).$$

Daí temos que $\sigma_R \sigma_Q \sigma_P = \sigma_S$, onde $S = (x_P - x_Q + x_R, y_P - y_Q + y_R)$.

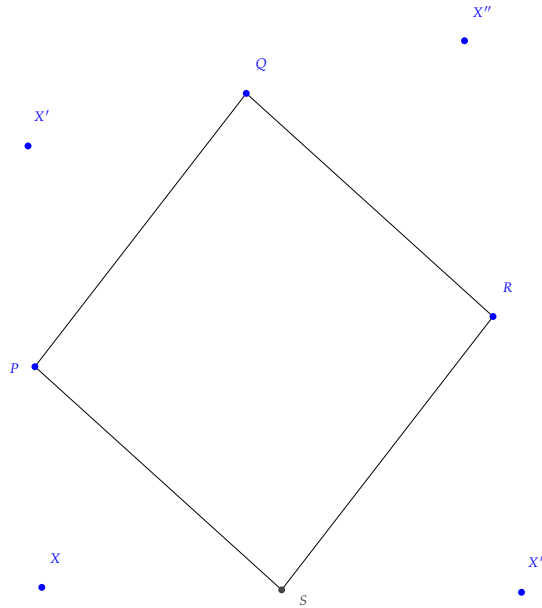


Figura 4: Produto de três reflexões por pontos não colineares

Por construção, o ponto S é obtido somando-se ao ponto P o vetor \vec{QR} . Logo os lados \overline{PS} e \overline{QR} do quadrilátero $PQRS$ são paralelos. Além disso,

$$\vec{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \vec{SR} &= (x_R - x_S, y_R - y_S) = (x_R - x_P + x_Q - x_R, y_R - y_P + y_Q - y_R) = \\ &= (-x_P + x_Q, -y_P + y_Q) = \vec{PQ} \text{ o que prova que } \square PQRS \text{ é um paralelogramo. } \blacksquare \end{aligned}$$

O próximo Teorema mostra uma aplicação clássica da geometria por transformações. Dados três dos vértices de um paralelogramo, é possível determinar o quarto vértice resolvendo uma equação que envolve isometrias do plano.

Teorema 10 *Dados quaisquer três dos quatro pontos não necessariamente distintos A , B , C , então um quarto ponto D é unicamente determinado pela equação $\tau_{A,B} = \sigma_D \sigma_C$.*

Demonstração: Suponha conhecidos os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Vamos determinar $D = (x_D, y_D)$ resolvendo a equação dada. Para isso consideremos um ponto qualquer $X = (x, y)$:

$$\tau_{A,B}(x, y) = \sigma_D \sigma_C(x, y) \Rightarrow (x + x_B - x_A, y + y_B - y_A) =$$

$$= (x - x_C + x_D, y - y_C + y_D), \text{ então}$$

$$x_B - x_A = -x_C + x_D \Rightarrow x_D = -x_A + x_B + x_C \text{ e, conseqüentemente}$$

$$y_D = -y_A + y_B + y_C.$$

Os outros casos, ou seja, quando o ponto desconhecido for diferente de D , podem ser obtidos por simples manipulação algébrica dos resultados obtidos. ■

Antes do próximo Teorema, que mostra que ao compormos três reflexões por pontos podemos inverter a ordem das aplicações das reflexões, vamos verificar um fato importante sobre as reflexões por pontos, que elas são involuções.

Lema 1 *Toda reflexão por ponto tem por inversa ela mesma, ou seja, $\sigma_A = \sigma_A^{-1}$ para todo ponto A do plano.*

Demonstração: Seja $A = (a, b)$ um ponto fixado do plano e $X = (x, y)$ um ponto qualquer. Então:

$$\sigma_A^2(x, y) = \sigma_A(-x + 2a, -y + 2b) = (x - 2a + 2a, y - 2b + 2b) = (x, y) \quad \blacksquare$$

Teorema 11 $\sigma_R\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q\sigma_R$, para quaisquer pontos P, Q e R do plano.

Demonstração: Vimos que a composta de três reflexões por pontos é uma reflexão por ponto, ou seja, $\sigma_P\sigma_Q\sigma_R = \sigma_S$. Então, usando o Lema anterior temos:

$$\sigma_S = \sigma_S^{-1} = (\sigma_P\sigma_Q\sigma_R)^{-1} = \sigma_R^{-1}\sigma_Q^{-1}\sigma_P^{-1} = \sigma_R\sigma_Q\sigma_P. \quad \blacksquare$$

Finalizando a seção das reflexões por ponto, verificaremos que estas, junto com as translações, formam um grupo.

Teorema 12 *A união dos conjuntos das translações e das reflexões por pontos forma um grupo \mathcal{H} .*

Demonstração: Já vimos que as translações formam um grupo e que a composição de duas reflexões por pontos resulta em uma translação. Além disso, pelo Teorema 9, a composição de três reflexões por pontos resulta numa reflexão por ponto, o que significa que a composta de uma translação com uma reflexão por ponto resultará numa reflexão por ponto. Vimos também no Lema 1 que a identidade pode ser escrita como a composta de qualquer reflexão por ponto por ela mesma. Finalizando, lembramos que as translações possuem inversas, e que as reflexões por ponto são inversas delas mesmas.

Desta forma fica provado que \mathcal{H} é, de fato, um grupo. ■

2.4 REFLEXÕES POR UMA RETA

De acordo com a definição, a reflexão por uma reta r é a transformação que leva um ponto qualquer P do plano no seu simétrico com relação à r , que chamaremos de P' , o que faz com que r seja a mediatriz entre os pontos P e P' .

Antes do próximo Teorema, vamos recordar uma noção de geometria, que é a noção de semiplanos. Uma reta qualquer, divide um plano em duas partes, chamadas semiplanos. Assim, ao afirmarmos que uma transformação "inverte semiplanos" o que estamos dizendo é que a imagem de um ponto por esta transformação estará no semiplano oposto.

Teorema 13 *A reflexão por uma reta é uma transformação que inverte semiplanos. A reflexão σ_r fixa o ponto P se, e somente se, $P \in r$. A reflexão σ_r fixa a reta s se, e somente se, $s = r$. A reflexão σ_r preserva a reta t se, e somente se, $t = r$ ou $t \perp r$.*

Demonstração Dada uma reta r , esta reta irá dividir o plano em dois semiplanos distintos. A reflexão σ_r aplicada a um ponto P do plano, resulta num ponto simétrico a P com relação a r , ou seja, leva pontos de um semiplano para o semi-plano oposto, invertendo assim os semiplanos. Seja P um ponto qualquer do plano. Vimos em sua definição, que $P' = \sigma_r(P)$ é tal que r é a mediatriz de $\overline{PP'}$. Logo, se $P' = P$, significa que a mediatriz de $\overline{PP'}$ tem que estar localizada no próprio ponto $P = P'$, $\Rightarrow P \in r$.

Se $P \in r$, então $\sigma_r(P) = P'$ será o simétrico de P com relação a r , que nesse caso será o próprio P .

σ_r fixa $s \Leftrightarrow \sigma_r(P) = P, \forall P \in s \Leftrightarrow P \in r \forall P \in s \Leftrightarrow r = s$.

Vimos que se $t = r$, σ_r fixa a reta t , em particular σ_r preserva t . Vamos então supor $t \neq r$ tal que σ_r preserva t . Isso significa que para qualquer ponto $P \in t$, $\sigma_r(P) \in t$ mas r é a mediatriz entre os pontos P e $\sigma_r(P)$, o que significa que $r \perp \overline{P\sigma_r(P)}$. E como $\overline{P\sigma_r(P)} \subset t$ teremos $t \perp r$.

Se $t \perp r$ e $P \in t$ teremos que $\sigma_r(P) = P'$ é tal que r é a mediatriz entre P e P' . Como pela definição de mediatriz $\overline{PP'} \perp r$, teremos, obrigatoriamente, $P' \in t$. ■

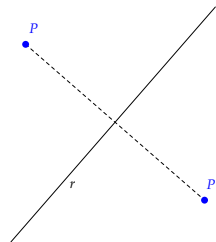


Figura 5: Reflexão por reta

Vamos agora encontrar a equação das reflexões por retas.

Sejam r uma reta de equação $aX + bY + c = 0$ e $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Seja $P' = \sigma_r(P) = (x', y')$. Por enquanto vamos supor $P \notin r$.

Pela definição da reflexão por reta, sabemos que a reta que contém P e P' é perpendicular a r .

O coeficiente angular de r será $m_r = -\frac{a}{b}$. Usando a condição de perpendicularismo entre retas, podemos concluir que $m_s = \frac{b}{a}$, onde s é a reta que contém P e P' . Como $P, P' \in s$ teremos

$$m_s = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{b}{a} \Rightarrow a(y' - y) = b(x' - x).$$

Além disso, o ponto médio de $\overline{PP'}$, $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ está na reta r ,

logo $a\frac{x+x'}{2} + b\frac{y+y'}{2} + c = 0$, o que nos fornece o sistema:

$$\begin{cases} ay' - bx' = ay - bx \\ by' + ax' = -ax - by - 2c \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema para x' e y' teremos, da primeira equação:

$$ay' = ay - bx + bx' \Rightarrow y' = \frac{ay - bx + bx'}{a}$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$\begin{aligned} b\frac{ay - bx + bx'}{a} + ax' &= -ax - by - 2c \Rightarrow \\ \Rightarrow aby - b^2x + b^2x' + a^2x' &= -a^2x - aby - 2ac \Rightarrow \\ \Rightarrow x'(a^2 + b^2) &= -aby + b^2x - a^2x - aby - 2ac + 2a^2x - 2a^2x \Rightarrow \\ \Rightarrow x'(a^2 + b^2) &= a^2x + b^2y - 2a(ax + by + c) \Rightarrow \\ \Rightarrow x' &= x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Voltando para a expressão de y' temos:

$$\begin{aligned} y' &= y - \frac{bx}{a} + b\frac{(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2})}{a} \Rightarrow y' = y - \frac{bx}{a} + \frac{bx}{a} - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Portanto a equação da reflexão é $\sigma_r(x, y) = (x', y')$, onde:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Observe que se $P \in r$, então $ax + by + c = 0$ o que nos fornece $(x', y') = (x, y)$ como queríamos.

Lema 2 $\sigma_r^2 = i$, qualquer que seja r .

Demonstração: Dados uma reta r do plano um ponto P qualquer, sendo $P' = \sigma_r(P)$ temos que P' é tal que r é a mediatriz de $\overline{PP'}$. Se considerarmos $P'' = \sigma_r(P')$ temos que r é a mediatriz de $\overline{P'P''}$. Logo $\overline{PP'}$ e $\overline{P'P''}$ possuem a mesma mediatriz o que nos garante $P'' = P$. ■

Agora que já conhecemos as equações da reflexão por uma reta e sabemos que ela é uma involução, vamos verificar que ela é uma isometria.

Teorema 14 A reflexão por uma reta σ_r é uma isometria.

Demonstração: Dada uma reta r do plano, σ_r será uma função bijetora, por ser a própria inversa, como vimos no lema anterior. Então precisamos apenas mostrar que σ_r preserva distância. Para tanto observe a figura:

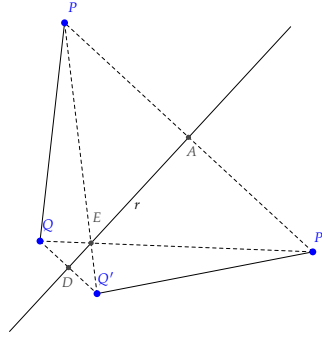


Figura 6: Reflexão por reta é isometria

São dados dois pontos P e Q e suas respectivas reflexões pela reta r : P' e Q' . Precisamos mostrar que $PQ = P'Q'$.

Primeiramente sejam $A = r \cap \overline{PP'}$; $D = r \cap \overline{QQ'}$ e $E = r \cap \overline{PQ}$. Temos então $PA = AP'$, pois A é o ponto médio de $\overline{PP'}$ por construção. Como os ângulos $P\hat{A}E$ e $P'\hat{A}E$ são ambos retos e \overline{AE} é lado comum, pelo caso LAL temos que $\triangle APE \cong \triangle AP'E$ o que nos fornece $PE = EP'$.

Analogamente, teremos $QD = DQ'$, pois D é o ponto médio de $\overline{QQ'}$ por construção e novamente os ângulos $Q\hat{D}E$ e $Q'\hat{D}E$ são retos e \overline{DE} é lado comum, teremos, pelo caso LAL que $\triangle DQE \cong \triangle DQ'E$ obtendo $QE = EQ'$.

Temos agora $PE = EP'$, $QE = EQ'$ e os ângulos $P\hat{E}Q$ e $P'\hat{E}Q'$ são opostos pelo vértice. Então, novamente pelo caso LAL, temos $\triangle PQE \cong \triangle P'Q'E$ o que nos fornece o resultado $PQ = P'Q'$ como queríamos.

No caso em que P e Q estão em lados opostos da reta r , a construção é análoga, invertendo-se os pontos Q e Q' da construção apresentada. ■

Este final de seção, não trata especificamente das reflexões por retas, mas da isometrias como um todo. Primeiramente verificaremos quais são as propriedades preservadas pelas isometrias.

Lema 3 *Uma isometria é uma colineação que preserva: estar entre (dois pontos), pontos médios, segmentos, raios, triângulos, ângulos, medida angular e perpendicularismo.*

Demonstração: Seja α uma isometria e sejam A, B e C pontos colineares e $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$ e $C' = \alpha(C)$.

Lembremo-nos do seguinte resultado: $AC = AB + BC \Leftrightarrow B \in \overline{AC}$.

Como α preserva distância, se tivermos $AC = AB + BC$, ou seja, B está entre A e C , como $A'C' = AC$, $A'B' = AB$ e $B'C' = BC$ teremos $A'C' = A'B' + B'C'$ o que nos fornece B' entre A' e C' .

Em particular se $AB = BC$ teremos $A'B' = B'C'$ o que mostra que uma isometria também preserva pontos médios.

Mais geralmente, como \overline{AB} é a reunião entre os pontos A e B e todos os pontos que estão entre eles, $\alpha(\overline{AB})$ será a reunião entre os pontos A' e B' e todos os pontos que estão entre eles, o que nos dá $\alpha(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ e nos mostra que α preserva segmentos.

Como α é injetora por sua definição e \overline{AB} é união de \overline{AB} com todos os pontos C tais que $A - B - C$, então $\alpha(\overline{AB})$ será a união de $\overline{A'B'}$ com todos os pontos C' tais que $A' - B' - C'$ o que nos dá $\alpha(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ e nos garante que α preserva raios.

Como \overline{AB} é a união de \overline{AB} com \overline{BA} , então teremos $\alpha(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ e $\alpha(\overline{BA}) = \overline{B'A'}$ que reunidos dão $\overleftrightarrow{A'B'}$ concluímos que α preserva retas, ou seja, é uma colinação.

Consideremos agora que A , B e C são pontos não colineares. Então

$AB + BC > AC$ o que significa que $A'B' + B'C' > A'C'$ e que A' , B' e C' não são colineares.

Assim, como $\triangle ABC$ é a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} concluímos que $\alpha(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$, o que prova que α preserva triângulos. Em particular, $\alpha(\hat{A}) = \hat{A}'$, ou seja, α preserva também ângulos. Como α preserva distâncias, teremos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ pelo caso LLL, o que garante a preservação de medida angular por α . Um caso particular da preservação de medida angular é a preservação de perpendicularismo, pois se α preserva medida angular, preservará também ângulos de 90° .

Além disso, como retas paralelas possuem uma perpendicular comum, α também preservará paralelismo entre retas. ■

Finalizamos mostrando que o conjunto das isometrias e, em particular, o conjunto das simetrias, formam grupos

Teorema 15 *O conjunto de todas as simetrias para um conjunto de pontos s forma um grupo tendo como operação a composição de funções.*

Demonstração: Seja s um conjunto de pontos qualquer e sejam α e β simetrias de s .

A identidade i é uma simetria, pois $i(s) = s$.

Como α é uma isometria, ela é uma transformação, logo possui uma inversa α^{-1} . Daí, $\alpha^{-1}(s) = \alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha^{-1}\alpha(s) = i(s) = s$, então α^{-1} é também uma simetria.

$\alpha\beta(s) = \alpha(s) = s$, logo a composição de simetrias é uma simetria. Portanto, o conjunto de simetrias para um conjunto de pontos s forma um grupo. ■

Teorema 16 *O conjunto de todas as isometrias forma um grupo.*

A demonstração é análoga à do último Teorema.

2.5 ROTAÇÕES

Primeiramente vamos verificar que $\rho_{C,0} = i$, qualquer que seja C .

De fato, dado um ponto P e sendo $P' = \rho_{C,0}(P)$, pela definição teremos que o ângulo entre

\vec{CP} e \vec{CP}' será 0. Como C é ponto comum, isto nos dá $\vec{CP} = \vec{CP}'$, e sabendo, também pela definição que $CP' = CP$ concluímos que $P = P' \Rightarrow \rho_{C,0} = i$.

Visto isso, provaremos que a rotação é uma isometria.

Teorema 17 *Uma rotação é uma isometria.*

Demonstração: Sejam P, Q e C pontos do plano e θ um ângulo qualquer. Sejam $P' = \rho_{C,\theta}(P)$ e $Q' = \rho_{C,\theta}(Q)$. Se P, Q e C estão alinhados, a definição de $\rho_{C,\theta}$ nos garante que $PQ = P'Q'$. Vamos então supor que P, Q e C são não colineares. Observe a figura

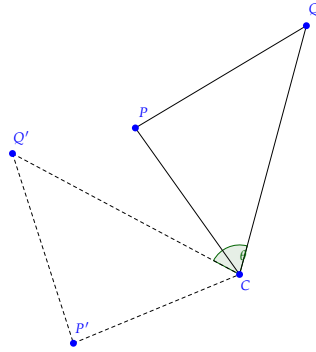


Figura 7: Rotação

Pela definição de rotação, temos que $CP = CP'$ e $CQ = CQ'$ e sabemos que $\widehat{PCP'} = \widehat{QCQ'} = \theta$. Mas $\widehat{QCP} = \widehat{Q'CP'} - \widehat{PCQ'} = \theta - \widehat{PCQ'}$ e $\widehat{Q'CP'} = \widehat{PCP'} - \widehat{PCQ'} = \theta - \widehat{PCQ'}$, logo $\widehat{QCP} = \widehat{Q'CP'}$. Então, pelo caso LAL temos $\triangle PCQ \cong \triangle P'CQ'$ o que prova que $PQ = P'Q'$. ■

A exemplo do que fizemos com as outras transformações que estudamos, vamos verificar quais pontos são fixados e quais conjuntos de pontos são preservados pelas rotações. Aproveitaremos para mostrar que a reflexão por um ponto é uma rotação por um ângulo de 180° , ou uma meia-volta, como mencionamos anteriormente, e que o conjunto das rotações com um mesmo centro forma um grupo abeliano.

Teorema 18 1. *Uma rotação $\rho_{C,\theta}$, $\theta \neq 180^\circ$ fixa exatamente o ponto C .*

2. *Uma rotação $\rho_{C,\theta}$ preserva todos os círculos com centro em C .*

3. *Se C é um ponto e θ e α são números reais, então $\rho_{C,\theta}\rho_{C,\alpha} = \rho_{C,\theta+\alpha}$ e $\rho_{C,\theta}^{-1} = \rho_{C,-\theta}$.*

4. *Uma rotação de um ângulo de 180° é uma reflexão por um ponto, $\rho_{C,180^\circ} = \sigma_C$ para qualquer ponto C .*

5. O conjunto das rotações com centro em C forma um grupo abeliano.

Demonstração:

1. A definição de rotação nos garante que $\rho_{C,\theta}(C) = C$.
 Dado um ponto qualquer P , se $\rho_{C,\theta}(P) = P$, então temos que
 $0 = P\hat{C}P = \theta \Rightarrow \rho_{C,\theta} = i$. Portanto o único ponto fixado por $\rho_{C,\theta}$ é C .
2. Seja C_P um círculo cujo centro é C e $P \in C_P$. Então \overline{CP} é um raio de C_P . Seja agora $P' = \rho_{C,\theta}(P)$. Como por definição $CP = CP'$ temos que $\overline{CP'}$ será, também, um raio de C_P e portanto $P' \in C_P$.
 Observe a figura:

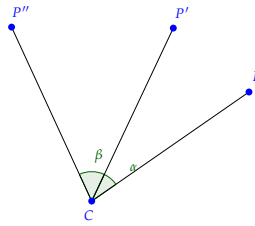


Figura 8: Rotação preserva círculos

3. Sendo $P' = \rho_{C,\theta}(P)$ e $P'' = \rho_{C,\alpha}(P')$ temos que P' é tal que $P\hat{C}P' = \theta$ e P'' é tal que $P'\hat{C}P'' = \alpha$. Portanto temos $P\hat{C}P'' = \theta + \alpha$, e como $P'' = \rho_{C,\alpha}\rho_{C,\theta}(P)$ teremos $\rho_{C,\alpha}\rho_{C,\theta} = \rho_{C,\alpha+\theta}$.
 Usando o resultado anterior, temos que $\rho_{C,\theta}^{-1}\rho_{C,\theta} = i = \rho_{C,0} = \rho_{C,\theta-\theta} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \rho_{C,\theta}^{-1} = \rho_{C,-\theta}$.
4. Se $\theta = 180^\circ$, então como $CP = CP'$ teremos C como ponto médio entre P e P' , o que faz com que $\rho_{C,180^\circ} = \sigma_C$.
5. Já vimos que o produto de duas rotações com centro C dá uma rotação com centro C , o que nos mostra que o conjunto das rotações é fechado para o produto. Além disso, vimos que a inversa de uma rotação com centro C é também uma rotação com centro C . Além disso, vimos que $\rho_{C,0} = i$. Portanto, o conjunto das rotações é um subgrupo do grupo das isometrias, sendo ele mesmo um grupo. Para verificar que o grupo das rotações é abeliano, observe que
 $\rho_{C,\theta}\rho_{C,\alpha} = \rho_{C,\theta+\alpha} = \rho_{C,\alpha+\theta} = \rho_{C,\alpha}\rho_{C,\theta}$. ■

PROPRIEDADES

3.1 COMPOSIÇÃO

Nesta seção vamos estudar as propriedades que são obtidas através da composição das transformações do plano que vimos até agora. Começaremos mostrando que uma isometria que fixa três pontos não colineares só pode ser a identidade.

Teorema 19 *Se uma isometria fixa dois pontos de uma reta, então essa isometria fixa a reta. Se uma isometria fixa três pontos não colineares, então essa isometria é a identidade.*

Demonstração: Suponha dois pontos $A, B \in r$, onde r é uma reta e α uma isometria que fixa A e B e seja $P \in r$ um ponto qualquer distinto de A e B .

Como vimos no Lema 3, uma isometria preserva retas. Considerando $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$ e $P' = \alpha(P)$, teremos $AP = A'P'$ e $BP = B'P'$. Como α fixa A e B , concluímos que $P' = P$ e portanto α fixa a reta r .

Sejam agora A, B e C pontos não colineares fixados por uma isometria β .

Conforme visto no Lema 3, α preserva triângulos, e como nesse caso α fixa A, B e C teremos $\alpha(\triangle ABC) = \triangle ABC$. Mas, para qualquer ponto P do plano, está em uma reta que intercepta $\triangle ABC$ em dois pontos distintos, então P estará numa reta fixada por α o que significa que $\alpha(P) = P, \forall P$. Portanto α é a identidade. ■

Como uma isometria que fixa três pontos não colineares é a identidade, se tivermos duas isometrias que têm imagens iguais para três pontos não colineares essas isometrias serão iguais.

Teorema 20 *Se α e β são isometrias tais que $\alpha(P) = \beta(P)$, $\alpha(Q) = \beta(Q)$ e $\alpha(R) = \beta(R)$ para P, Q e R pontos não colineares, então, $\alpha = \beta$.*

Demonstração: Como α e β são isometrias, em particular, são transformações. Logo possuem inversa. Assim, temos:

$\alpha(P) = \beta(P) \Rightarrow \beta^{-1}\alpha(P) = \beta^{-1}\beta(P) = i(P) = P$. O mesmo ocorrendo para os pontos Q e R .

Assim, o Teorema 19, nos garante que

$\beta^{-1}\alpha = i \Rightarrow \alpha = \beta$. ■

No Teorema seguinte caracterizaremos quais são as isometrias que fixam dois pontos.

Teorema 21 *Uma isometria que fixa dois pontos é uma reflexão por reta ou a identidade.*

Demonstração: Suponha α uma isometria que fixa dois pontos distintos, P e Q em uma reta r . Pelo que vimos até agora, conhecemos duas possibilidades para α , que são a identidade ou σ_r . Vamos provar que essas são as únicas possibilidades para α , mostrando que se $\alpha \neq i$ então $\alpha = \sigma_r$.

Se $\alpha \neq i$ então existe um ponto R tal que $\alpha(R) \neq R$ e pelo visto na demonstração do Lema 3, $R \notin r$ e P, Q e R são três pontos não colineares.

Seja $R' = \alpha(R)$. Como α é uma isometria, teremos $PR = PR'$ e $QR = QR'$, o que nos fornece P e Q como pontos distintos e equidistantes de R e R' , significando que P e Q estão na mediatriz entre R e R' . Assim temos $\alpha(R) = R' = \sigma_r(R)$, e além disso, temos $\alpha(P) = P = \sigma_r(P)$ e $\alpha(Q) = Q = \sigma_r(Q)$. Logo, pelo Teorema 20, temos $\alpha = \sigma_r$. ■

Sabendo que uma isometria que fixa dois pontos só podem ser uma reflexão por uma reta ou a identidade, vamos provar a seguir que uma isometria que fixa um único ponto do plano é um produto de duas reflexões por retas. Mais adiante veremos que este produto pode ser uma rotação ou uma translação.

Teorema 22 *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é um produto de duas reflexões por retas.*

Demonstração: Suponha α uma isometria que fixa um ponto C . Sejam agora $P \neq C$, $P' = \alpha(P)$ e r a mediatriz de $\overline{PP'}$. Como α é uma isometria, temos $CP = CP'$, então $C \in r$. Daí, $\sigma_r(C) = C$ e $\sigma_r(P') = P$.

Então $\sigma_r\alpha(C) = \sigma_r(C) = C$ e $\sigma_r\alpha(P) = \sigma_r(P') = P$.
Pelo Teorema 21, $\sigma_r\alpha = i$ ou $\sigma_r\alpha = \sigma_s$, onde $s = \overleftrightarrow{CP}$.

De qualquer forma, $\sigma_r\alpha \neq i$, pois, caso não fosse, teríamos $\alpha = \sigma_r$ e α fixaria mais pontos do que apenas C .

Logo, $\sigma_r\alpha = \sigma_s \Rightarrow \sigma_r\sigma_r\alpha = \sigma_r\sigma_s \Rightarrow \alpha = \sigma_r\sigma_s$. ■

Como consequência dos dois últimos Teoremas, temos que se uma isometria fixa um ponto qualquer do plano, ela será um produto de duas reflexões por reta ou a identidade, caso fixe mais de um ponto.

Corolário 1 *Uma isometria que fixa um ponto é a identidade, uma reflexão por reta ou o produto de duas reflexões por retas.*

Demonstração: Seja α uma isometria e P um ponto qualquer tal que $\alpha(P) = P$. Se existir algum $Q \neq P$ tal que $\alpha(Q) = Q$ então, pelo Teorema 19 α será uma reflexão por reta ou a identidade. Observe que $\sigma_r\sigma_r = i$ para toda reta r . Se P é o único ponto fixado por α então este resultado é consequência direta do Teorema anterior. ■

O próximo Teorema mostra que toda isometria pode ser escrita como um produto de reflexões por retas.

Teorema 23 1. Um produto de duas reflexões por retas é uma isometria.

2. Uma isometria é a identidade, uma reflexão por reta ou o produto de duas ou três reflexões por retas.

Demonstração:

1. Já vimos que uma reflexão por reta é uma isometria e que o produto de duas isometrias é uma isometria, logo o produto de duas reflexões por retas é uma isometria.

2. Sabemos que $\sigma_r \sigma_r = i$, para qualquer reta r . Seja $\alpha \neq i$ uma isometria tal que $\alpha(P) = Q$, com $P \neq Q$ e seja r a mediatriz de \overline{PQ} . Então $\sigma_r \alpha(P) = \sigma_r(Q) = P$, ou seja, $\sigma_r \alpha$ fixa o ponto P .

Vimos, no Corolário anterior, que $\sigma_r \alpha = \beta$ é o produto de no máximo duas reflexões por retas. Mas $\sigma_r \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \sigma_r \beta$. Como σ_r é uma reflexão por reta e β é o produto de no máximo duas reflexões por retas, então α será o produto de no máximo três reflexões por retas. ■

Agora vamos a mais uma aplicação interessante da geometria por transformações. O próximo Teorema mostra que dados dois triângulos congruentes, existe uma única isometria que leva um triângulo no outro.

Teorema 24 Se $\triangle PQR \cong \triangle ABC$, então existe uma única isometria α tal que $\alpha(P) = A$, $\alpha(Q) = B$ e $\alpha(R) = C$.

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 17, que existe no máximo uma isometria α tal que $\alpha(P) = A$, $\alpha(Q) = B$ e $\alpha(R) = C$. A questão que precisamos responder é se existe pelo menos uma isometria com estas características, o que provará o Teorema em questão.

Sejam os triângulos $\triangle PQR \cong \triangle ABC$. Observe a figura abaixo e a seguir sua construção:

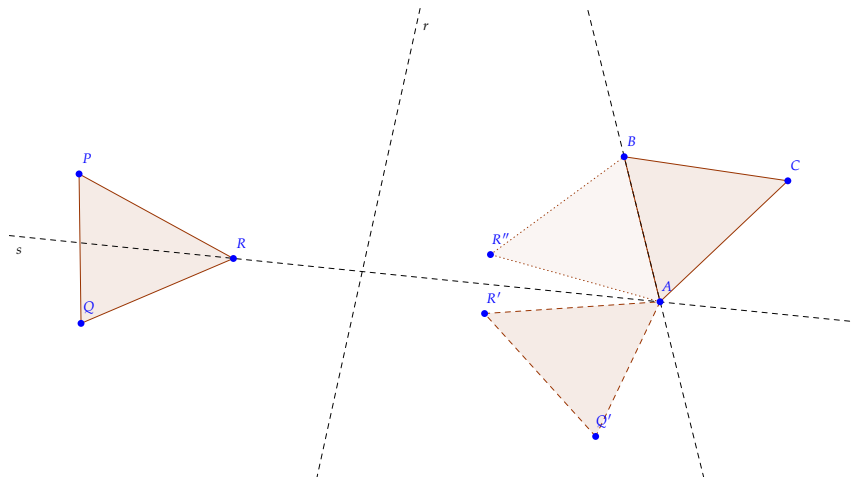


Figura 9: Congruência de triângulos

Primeiramente encontramos a reta r mediatriz de \overline{PA} . Teremos então $\sigma_r(P) = A$, $\sigma_r(Q) = Q'$ e $\sigma_r(R) = R'$. Feito isto, encontramos a reta s mediatriz de $\overline{Q'B}$. Note que $A \in s$, pois $AB = PQ = AQ'$. Teremos então $\sigma_s(A) = A$, $\sigma_s(Q') = B$ e $\sigma_s(R) = R''$. Para terminar encontramos a reta t mediatriz de $\overline{R''C}$. Note que $A \in t$, pois $AC = PR = AR' = AR''$ e que $B \in t$ pois $BC = QR = Q'R' = Q'R''$. Teremos então $\sigma_t(A) = A$, $\sigma_t(B) = B$ e $\sigma_t(R'') = C$. Portanto, $\alpha = \sigma_t\sigma_s\sigma_r$ é a isometria procurada. ■

Como consequência desse último Teorema, vem o seguinte:

Teorema 25 *Dois segmentos, dois ângulos, ou dois triângulos são, respectivamente, congruentes, se e somente se existe uma isometria que leva um no outro.*

Demonstração: Como dois segmentos congruentes correspondem a lados homólogos de triângulos congruentes e dois ângulos congruentes correspondem a ângulos homólogos de triângulos congruentes, a demonstração é consequência direta do Lema 3 e do Teorema 21. ■

Vimos que todas as isometrias podem ser escritas como produto de reflexões por retas. A seguir veremos em qual caso o produto de duas reflexões por reta representa uma translação.

Teorema 26 *Se as retas r e s são paralelas, então $\sigma_s\sigma_r$ é a translação pelo vetor que representa o dobro da distância entre r e s .*

Demonstração: Sejam r e s retas paralelas e P um ponto qualquer

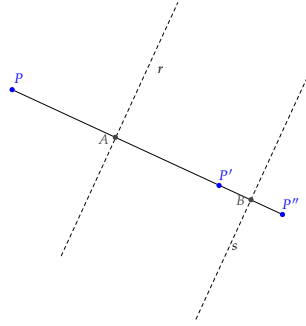


Figura 10: Composição de reflexões por retas paralelas

Sejam $P' = \sigma_r(P)$ e $P'' = \sigma_s(P')$. Pela definição de reflexão por reta, temos que r é a mediatriz de $\overline{PP'}$, então $\overline{PP'} \perp r$ e também temos que s é a mediatriz de $\overline{P'P''}$ o que garante que $\overline{P'P''} \perp s$. Como $r \parallel s$ teremos $\overline{PP'} \parallel \overline{P'P''}$ e como P' é ponto comum aos dois segmentos, teremos P, P' e P'' alinhados. Como P foi tomado arbitrariamente teremos que $\sigma_s \sigma_r$ é uma translação.

Sejam agora $A = r \cap \overleftrightarrow{PP'}$ e $B = s \cap \overleftrightarrow{P'P''}$. Então o vetor \overrightarrow{AB} representa a distância entre r e s . Se $P - P' - P''$, então $AB = AP' + P'B$ e sabemos que $PP' = 2AP'$ e $P'P'' = 2P'B$ pois A e B são respectivamente pontos médios de $\overline{PP'}$ e $\overline{P'P''}$.

Então $PP'' = PP' + P'P'' = 2AP' + 2P'B = 2(AP' + P'B) = 2AB$.

Se $P - P'' - P'$, então $AB = AP'' + P''B = AP' - P'B$ e sabemos que

$PP' = 2AP'$ e $P'P'' = 2P'B$ pois A e B são respectivamente pontos médios de $\overline{PP'}$ e $\overline{P'P''}$.

Então

$PP'' = PP' - P'P'' = 2AP' - 2P'B = 2(AP' - P'B) = 2AB$. ■

Corolário 2 Se a reta t é perpendicular à reta s em S e perpendicular à reta r em R , então $\sigma_r \sigma_s = \tau_{S,R}^2 = \sigma_R \sigma_S$.

Demonstração: Se $t \perp r$ e $t \perp s$, então temos $r \parallel s$. Neste caso, pelo Teorema anterior, $\sigma_r \sigma_s = \tau$, onde τ é a translação por um vetor que representa o dobro da distância entre r e s . Como t é perpendicular às duas retas tendo como pontos de interseção R e S , então o vetor que representa a distância entre as duas retas é \overrightarrow{SR} o que prova que $\sigma_r \sigma_s = \tau_{S,R}^2$.

Agora seja $S' = \sigma_r(S)$. Então R é o ponto médio entre S e S' e pelo Teorema 8 temos $\tau_{S,R}^2 = \tau_{S,S'} = \sigma_R \sigma_S$. ■

Teorema 27 Toda translação é um produto de duas reflexões por retas paralelas, e, reciprocamente, um produto de duas reflexões por retas paralelas é uma translação.

Demonstração: (\Leftarrow) Teorema 26.

(\Rightarrow) Seja $\tau_{P,Q} \neq i$, então pelo Teorema 8 $\tau_{P,Q} = \sigma_R \sigma_P$, onde R é o ponto médio de \overline{PQ} . Fazendo $r \perp \overleftrightarrow{PR}$ em P e $s \perp \overleftrightarrow{PR}$ em R , temos pelo Teorema anterior $\sigma_R \sigma_P = \sigma_s \sigma_r$. ■

Teorema 28 Se as retas r, s e t são perpendiculares à reta b , então existem únicas retas p e q tais que $\sigma_s\sigma_r = \sigma_t\sigma_p = \sigma_q\sigma_t$.

Demonstração: Seja a reta b perpendicular a r, s e t em R, S e T , respectivamente.

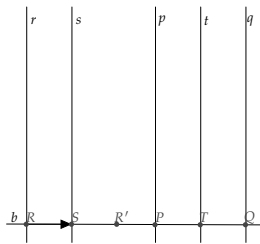


Figura 11: Reflexões por retas perpendiculares

Pelo Teorema 8 existem $P \in b$ e $Q \in b$, os únicos pontos tais que $\sigma_s\sigma_r = \sigma_T\sigma_P = \sigma_Q\sigma_T$. Vamos encontrar estes pontos:

Seja $R' = \sigma_s(R)$, então S é o ponto médio de $\overline{RR'}$ e o Teorema 7 nos diz que $\sigma_s\sigma_r = \tau_{R,R'}$. Então, para termos $\sigma_s\sigma_r = \sigma_T\sigma_P = \sigma_Q\sigma_T$, devemos ter T como ponto médio entre P e Q e $PT = RS = TQ$. Então, obtemos o ponto Q fazendo $Q = \tau_{R,S}(T)$ e $P = \sigma_T(Q)$, obtendo assim os pontos conforme o desejado.

Sejam agora $p \perp b$ em P e $q \perp b$ em Q . Pelo Corolário 2 teremos

$$\sigma_s\sigma_r = \sigma_s\sigma_R = \sigma_T\sigma_P = \sigma_t\sigma_p \text{ e } \sigma_s\sigma_r = \sigma_s\sigma_R = \sigma_Q\sigma_T = \sigma_q\sigma_t.$$

A unicidade das linhas p e q segue diretamente da lei do cancelamento, por exemplo, se $\sigma_t\sigma_p = \sigma_t\sigma_a \Rightarrow \sigma_p = \sigma_a$. ■

Veremos a seguir como escrever uma translação como um produto de duas reflexões por reta.

Teorema 29 Se $P \neq Q$ então $\tau_{P,Q}$ pode ser escrita como $\sigma_b\sigma_a$, onde $a, b \perp \overleftrightarrow{PQ}$ e uma das retas, a ou b é uma reta escolhida arbitrariamente e a outra reta é unicamente determinada.

Demonstração:

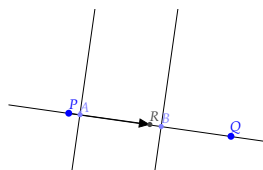


Figura 12: Translação como composta de reflexões por retas

Dada a reta $a \perp \overleftrightarrow{PQ}$ em A , temos, pelo Teorema 7, que $\tau_{P,Q} = \sigma_R\sigma_P$, onde R é ponto médio de \overline{PQ} . Fazendo $B = \tau_{P,R}(A)$, temos $\sigma_B\sigma_A = \tau_{P,Q}$ e sendo $b \perp \overleftrightarrow{PQ}$ em B , o Teorema 25 garante que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_B\sigma_A = \tau_{P,Q}$. ■

Corolário 3 Se as retas r , s e t são perpendiculares à uma reta b , então $\sigma_t\sigma_s\sigma_r$ é uma reflexão por uma reta perpendicular à b .

Demonstração: Pelo Teorema 28, se r , s e t são retas paralelas à uma reta b , então existem retas p e q perpendiculares à b , unicamente determinadas de modo que:

$$\sigma_s\sigma_r = \sigma_t\sigma_p = \sigma_q\sigma_t \Rightarrow \sigma_t\sigma_s\sigma_r = \sigma_t\sigma_t\sigma_p = i\sigma_p = \sigma_p. \blacksquare$$

Os resultados subsequentes mostram como escrever uma rotação como produto de duas reflexões por retas. Vale lembrar que já foi mostrado que a reflexão por um ponto é uma rotação por um ângulo de 180° .

Teorema 30 Se as retas r e s se interceptam no ponto C e o ângulo medido no sentido anti-horário entre r e s é $\frac{\theta}{2}$, então $\sigma_s\sigma_r = \rho_{C,\theta}$.

Demonstração: Sejam r e s retas concorrentes num ponto C e suponha $\frac{\theta}{2}$ o ângulo menor entre r e s medido no sentido anti-horário.

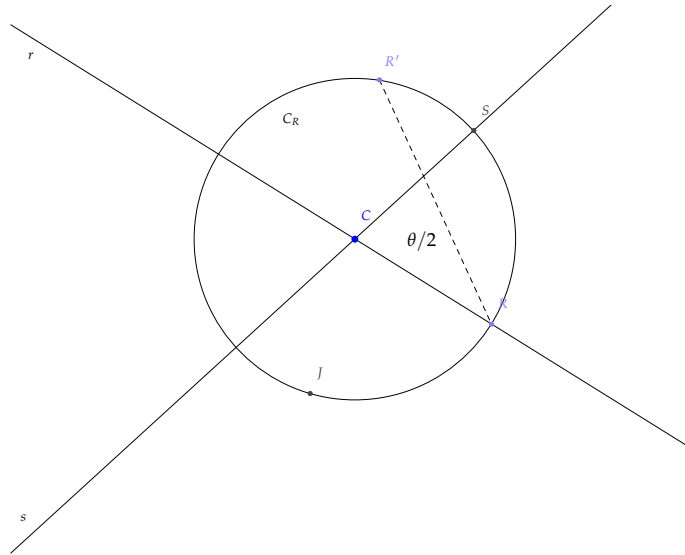


Figura 13: Rotação como produto de reflexões por retas

Seja $R \in r$, $R \neq C$ e sejam C_R a circunferência de centro C que passa pelo ponto R e $S = C_R \cap s$. Teremos então $R\hat{C}S = \frac{\theta}{2}$ e $r = \overleftrightarrow{CR}$ e $s = \overleftrightarrow{CS}$.

Seja $R' = \rho_{C,\theta}(R)$. Então, pelo Teorema 18, $R' \in C_R$ e $R\hat{C}R' = 2R\hat{C}S$, $S \in s$ e $RS = R'S$, pelo caso LAL, já que temos $CR = CR'$ e $R\hat{C}S = R'\hat{C}S$ pois $R' = \rho_{C,\theta}(R)$ e \overleftrightarrow{CS} é lado comum. Então teremos em s a mediatriz de $\overline{RR'}$, então $R' = \sigma_s(R)$.

Seja $J = \sigma_r(S)$. Então r é a mediatriz de \overline{JS} o que significa que $J\hat{C}R = R\hat{C}S$ e $SC = JC$, logo $J \in C_R$ e o ângulo $J\hat{C}S = \theta$. Então $S = \rho_{C,\theta}(J)$.

Temos portanto:

$$\sigma_s \sigma_r(C) = \sigma_s(C) = C = \rho_{C,\theta}(C)$$

$$\sigma_s \sigma_r(J) = \sigma_s(S) = S = \rho_{C,\theta}(J)$$

$$\sigma_s \sigma_r(R) = \sigma_s(R) = R' = \rho_{C,\theta}(R)$$

Como os pontos C , J e R não são colineares, concluímos que $\sigma_s \sigma_r = \rho_{C,\theta}$. ■

Corolário 4 *Toda rotação é um produto de duas reflexões por retas concorrentes, e, reciprocamente, um produto de duas reflexões por retas concorrentes é uma rotação.*

Demonstração: (\Leftarrow) Teorema 30.

(\Rightarrow) Seja dada uma rotação $\rho_{C,\theta}$. Seja r uma reta qualquer contendo C e seja s uma reta contendo C tal que o ângulo no sentido anti-horário entre r e s seja $\frac{\theta}{2}$ (podemos considerar $s = \rho_{C,\frac{\theta}{2}}(r)$). Então, pelo Teorema 29, $\rho_{C,\theta} = \sigma_s \sigma_r$. ■

Teorema 31 *Se as retas r , s e t são concorrentes em C , então existem únicas retas p e q tais que $\sigma_s \sigma_r = \sigma_t \sigma_p = \sigma_q \sigma_t$.*

Demonstração: Sejam as semirretas $\vec{CR} \in r$, $\vec{CS} \in s$ e $\vec{CT} \in t$.

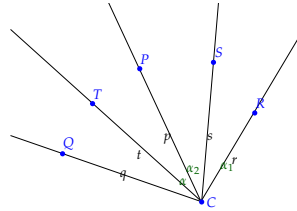


Figura 14: Reflexões por retas concorrentes

Seja $\alpha = R\hat{C}S$ e sejam $P = \rho_{C,-\alpha}(T)$ e $Q = \rho_{C,\alpha}(T)$, então $P\hat{C}T = R\hat{C}S = T\hat{C}Q$.
Sejam $p = \overleftrightarrow{CP}$ e $q = \overleftrightarrow{CQ}$.

Pela demonstração do Teorema 30, temos que $\sigma_s \sigma_r = \rho_{C,2\alpha} = \sigma_t \sigma_p = \sigma_q \sigma_t$.

A unicidade das retas p e q é garantida pela lei do cancelamento, por exemplo, se $\sigma_t \sigma_p = \sigma_t \sigma_a \Rightarrow \sigma_p = \sigma_a$. ■

Teorema 32 *A rotação $\rho_{C,\theta}$ pode ser escrita como $\sigma_b \sigma_a$ onde a e b são retas concorrentes em C e uma das retas, a ou b é escolhida arbitrariamente e a outra reta está unicamente determinada.*

Demonstração: Dada a rotação $\rho_{C,\theta}$, seja a uma reta contendo C .

Sejam $A \in a$, $A \neq C$, $B = \rho_{C,\frac{\theta}{2}}(A)$ e $b = \overleftrightarrow{CB}$. Então, pelo Teorema 30, $\rho_{C,\theta} = \sigma_b \sigma_a$. ■

Corolário 5 *A reflexão σ_p é o produto (em qualquer ordem) de duas reflexões por quaisquer duas retas perpendiculares em P .*

Demonstração: Como já vimos, $\sigma_P = \rho_{P,180^\circ}$, logo, pelo Teorema 32 existem retas a e b perpendiculares em P , tal que $\sigma_b\sigma_a = \rho_{P,180^\circ} = \sigma_P$. Além disso, $\sigma_P = \sigma_P^{-1} = \rho_{P,-180^\circ} = \sigma_a\sigma_b$. ■

Finalmente, podemos concluir que o produto de exatamente duas reflexões por retas só pode ser uma translação ou uma rotação.

Teorema 33 *Um produto de duas reflexões por retas é uma translação ou uma rotação. Somente a identidade é ao mesmo tempo uma rotação e uma translação.*

Demonstração: São dadas duas retas r e s do plano.

Se $r \parallel s$, $r \neq s$, vimos no Teorema 27 que $\sigma_s\sigma_r$ é uma translação.

Se r e s são concorrentes, vimos no Corolário 4 que $\sigma_s\sigma_r$ é uma rotação. Note que a reflexão por um ponto pode ser vista como uma rotação por um ângulo de 180° .

Se r e s são coincidentes, então $\sigma_s\sigma_r = i$ e, neste caso, o produto será ao mesmo tempo uma rotação e uma translação. ■

Veremos agora o que acontece com as composições entre duas rotações, duas translações, ou uma translação e uma rotação em qualquer ordem.

Teorema 34 *Uma rotação por um ângulo θ seguida de uma rotação por um ângulo φ é uma rotação por um ângulo $\theta + \varphi$, a menos que $\theta + \varphi = 0^\circ$, neste caso o produto é uma translação. Uma translação seguida por uma rotação por um ângulo θ , $\theta \neq 0$ é uma rotação por um ângulo θ . Uma rotação por um ângulo θ , $\theta \neq 0$ seguida de uma translação é uma rotação por um ângulo θ . Uma translação seguida de uma translação é uma translação.*

Demonstração: O Teorema 6 nos garante que o produto de duas translações é uma translação.

Vimos, no Teorema 9, que o produto de duas rotações por ângulos de 180° é uma translação, como em $\sigma_B\sigma_A = \tau_{A,B}$, e também vimos no Teorema 18 que $\rho_{C,\theta}\rho_{C,\varphi} = \rho_{C,\theta+\varphi}$.

Vamos considerar então $\rho_{B,\varphi}\rho_{A,\theta}$, com $A \neq B$ e $\theta, \varphi \neq 0$. Fazendo $c = \overleftrightarrow{AB}$ existem retas a contendo A e b contendo B tais que $\rho_{A,\theta} = \sigma_c\sigma_a$ e $\rho_{B,\varphi} = \sigma_b\sigma_c$. Então $\rho_{B,\varphi}\rho_{A,\theta} = \sigma_b\sigma_c\sigma_c\sigma_a = \sigma_b\sigma_a$. Observe a construção a seguir:

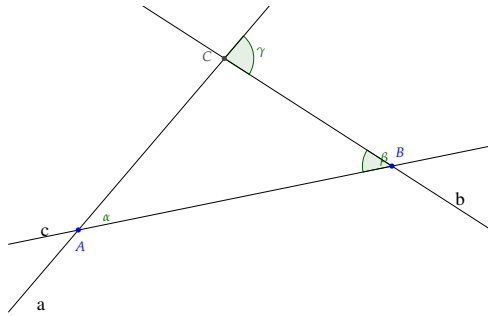


Figura 15: Composição de rotações com centros distintos

Note que $\alpha = \frac{\theta}{2}$ e $\beta = \frac{\varphi}{2}$.

Quando $\theta + \varphi = 0^\circ$, temos que $a // b$ e então o produto $\rho_{B,\varphi}\rho_{A,\theta}$ é uma translação. Se $\theta + \varphi \neq 0$ então a e b se interceptam em algum ponto C e $\sigma_b\sigma_a$ é uma rotação. Observe, que pelo Teorema do ângulo externo de um triângulo qualquer, temos $\gamma = \alpha + \beta = \frac{\theta}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\theta + \varphi}{2}$ e o Teorema 30 nos garante que $\rho_{B,\varphi}\rho_{A,\theta} = \rho_{C,\theta + \varphi}$.

Para terminar, lembramos que $\tau_{A,B} = \sigma_B\sigma_A = \rho_{B,180^\circ}\rho_{A,180^\circ}$. Logo $\rho_{C,\theta}\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,B}\rho_{C,\theta}$ são rotações por um ângulo $\theta + 180^\circ + 180^\circ = \theta$. ■

3.2 INVOLUÇÕES E PONTOS FIXOS

Esta seção se destina a organizar alguns resultados que já foram provados com nomenclatura diferente.

Teorema 35 *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é uma rotação. Uma isometria que fixa um ponto pode ser uma rotação, uma reflexão por reta ou a identidade.*

De fato, vimos, no Teorema 22, que uma isometria que fixa exatamente um ponto é um produto de duas reflexões por retas. Se essas retas forem paralelas ou coincidentes, esse produto será uma translação (que não fixa nenhum ponto) ou a identidade (que fixa todos os pontos do plano). Logo essas retas devem ser concorrentes e, pelo Corolário 4 esse produto será uma rotação.

Vimos ainda, no Corolário 1, que uma isometria que fixa um ponto é o produto de no máximo duas reflexões por retas. Se for um produto de duas reflexões por retas será uma rotação (como no caso anterior), ou a identidade. Se for o produto de apenas uma reflexão por reta então será uma reflexão por reta.

Teorema 36 *Uma rotação por um ângulo não nulo que preserva uma reta é uma reflexão por um ponto.*

Foi visto no Teorema 18 que uma rotação por um ângulo não nulo fixa exatamente o seu centro, ou seja, um ponto. No mesmo Teorema vimos que uma rotação por um ângulo de 180°

é uma reflexão por um ponto, e também vimos, no Teorema 7 que uma reflexão por um ponto pode preservar uma reta. Por sua natureza, a rotação só preservará uma reta se for por um ângulo de 180° , provando o Teorema anterior.

3.3 PARIDADE

Nesta seção definiremos e classificaremos as isometrias como pares e ímpares e estudaremos as propriedades de cada um destes tipos de isometrias.

Lema 4 *Se P é um ponto e a e b são retas, então existem retas c e d com $P \in c$ tais que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_d\sigma_c$.*

Demonstração: Suponha dados a , b e P . Se $a \parallel b$, c será a reta paralela a a contendo P . Se a e b são concorrentes num ponto C , então $c = \overleftrightarrow{CP}$.

Então a , b e c são paralelas ou concorrentes em C .

Se a e b são paralelas, então $\sigma_b\sigma_a$ é uma translação, como vimos no Teorema 27 e nesse caso, o Teorema 29 nos garante a existência da reta d conforme o Lema.

Se a e b são concorrentes, então $\sigma_b\sigma_a$ é uma rotação, como vimos no Corolário 4 e nesse caso, o Teorema 32 nos garante a existência da reta d conforme o Lema. ■

Após verificarmos as possibilidades para os produtos de duas reflexões por retas, veremos o que acontece com um produto de quatro reflexões por retas. Os produtos de três reflexões por retas serão vistos mais adiante.

Teorema 37 *Um produto de quatro reflexões por retas é um produto de duas reflexões por retas.*

Demonstração: Suponha dado o produto $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p$ e seja $P \in p$.

Pelo Lema anterior, existem retas q' e r' tais que $\sigma_r\sigma_q = \sigma_{r'}\sigma_{q'}$, com $P \in q'$.

Novamente pelo Lema anterior, existem retas r'' e m tais que $\sigma_s\sigma_{r'} = \sigma_m\sigma_{r''}$ com $P \in r''$.

Como p , q' e r'' são concorrentes em P , existe uma reta ℓ tal que $\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_\ell$.

Portanto $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_{r'}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_m\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_m\sigma_\ell$. ■

Teorema 38 *As isometrias são rotações, reflexões ou translações.*

Demonstração: No caso da isometria fixar algum ponto do plano, o Teorema 35 nos garante que essa isometria será uma rotação, ou uma reflexão por reta (considerando que a identidade pode ser escrita como uma rotação por um ângulo $\theta = 0$ ou como o produto de uma reflexão por ela mesma).

Precisamos verificar quais são as isometrias que não fixam nenhum ponto.

Seja α uma isometria que não fixa nenhum ponto do plano. Então, dados P , Q e R pontos do

plano, temos $P' = \alpha(P) \neq P$, $Q' = \alpha(Q) \neq Q$ e $R' = \alpha(R) \neq R$.

Consideremos agora a translação $\tau_{P,P'}$. Temos então que $\tau_{P,P'}(P) = P' = \alpha(P)$.

Sabemos também que $PQ = P'Q'$, pois α é isometria. Seja $Q'' = \tau_{P,P'}(Q)$. Então, pelo Teorema 3 e pelo Teorema 4 temos que $\square PP'Q''Q$ é um paralelogramo. Assim, se $Q' \neq Q''$ então teríamos $Q' = \rho_{P',\theta}(Q'') = \rho_{P',\theta}(\tau_{P,P'}(Q))$ para algum ângulo θ . Mas, vimos no Teorema 32 que uma rotação pode ser escrita como um produto de duas reflexões por retas concorrentes. Então existem r e s retas concorrentes tais que $Q' = \sigma_r \sigma_s(Q'')$.

Vimos ainda, no Teorema 27 que toda translação é um produto de duas reflexões por retas paralelas, logo existem a e b retas paralelas tais que $Q'' = \sigma_a \sigma_b(Q) \Rightarrow Q' = \sigma_r \sigma_s \sigma_a \sigma_b(Q)$, e pelo Teorema anterior, existem retas c e d tais que $Q' = \sigma_c \sigma_d(Q)$. Então, pelo Teorema 33 teremos que α é uma translação ou uma rotação. Como α não fixa nenhum ponto, concluímos que α só pode ser uma translação. Se $Q'' = Q'$, então, podemos concluir, de forma análoga, que α é uma translação ou que $R' = \tau_{P,P'}(R)$. No último caso, o Teorema 20 nos garante que $\alpha = \tau_{P,P'}$, ou seja, uma isometria que não fixa nenhum ponto é uma translação, o que finaliza nossa demonstração. ■

Teorema 39 *As isometrias involutivas (isometrias que são involuções) são as reflexões por um ponto e as reflexões por retas.*

Vimos nos lemas 1 e 2 que as reflexões (sejam elas por ponto ou por reta) são involuções. No Teorema 16 vimos que a inversa de uma rotação não é ela mesma e a respeito das translações, é fácil verificar que $\tau_{A,B}^{-1} = \tau_{B,A}$. Como o Teorema 38 nos garante que não existem outros tipos de isometrias, concluímos que somente as reflexões são isometrias involutivas.

Conforme havíamos comentado no início desta seção, segue o resultado que classifica as isometrias pares e ímpares. Note que quando nos referimos a produtos de isometrias estamos nos referindo a composições de isometrias.

Definição 19 *Uma isometria que é o produto de um número par de reflexões por retas é dita uma **isometria par**. Uma isometria que é o produto de um número ímpar de reflexões por retas é dita uma **isometria ímpar**.*

Teorema 40 1. *Uma isometria par é o produto de duas reflexões por retas.*

2. *Uma isometria ímpar é uma reflexão por reta ou o produto de três reflexões por retas.*

3. *Nenhuma isometria é ao mesmo tempo par e ímpar.*

Demonstração:

1. Dada uma isometria que é um produto grande de reflexões por retas, podemos usar o Teorema anterior para substituir as quatro primeiras reflexões por retas por duas reflexões por retas repetidamente até obtermos um produto com menos de quatro reflexões por reta. Se a isometria for par, o processo resultará num produto de duas reflexões por retas.

2. Se a isometria for ímpar, o processo resultará em um produto de três reflexões por retas ou em uma reflexão por reta.

3. Para mostrar que uma isometria não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar, precisamos mostrar que um produto de duas reflexões por retas não pode igualar uma reflexão por reta ou o produto de três reflexões por retas.

Suponha que existem retas p, q, r, s e t tais que $\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_t$, então, pelo que vimos anteriormente, existem retas ℓ e m tais que

$\sigma_m\sigma_\ell = \sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_s\sigma_t = \sigma_t$. Temos uma contradição, pois $\sigma_m\sigma_\ell$ é uma translação ou uma rotação e não pode ser igual à reflexão σ_t . Portanto um produto de duas reflexões por retas nunca é igual a uma reflexão por reta ou a um produto de três reflexões por retas. ■

Além de classificar as isometrias, classificaremos também as isometrias involutivas.

Teorema 41 *Uma isometria involutiva par é uma reflexão por ponto ou a identidade; uma isometria involutiva ímpar é uma reflexão por reta.*

Demonstração: Como vimos anteriormente, uma isometria involutiva é uma reflexão.

Além disso, uma isometria par é um produto de duas reflexões por retas, que pode ser uma rotação ou uma translação. Então, uma isometria involutiva par deve ser ao mesmo tempo uma reflexão e uma rotação ou translação. Isso ocorrerá na identidade ou na reflexão por ponto, que é uma rotação por um ângulo de 180° .

Uma isometria ímpar é uma reflexão por reta ou um produto de três reflexões por retas. Para que ela seja involutiva deverá, obrigatoriamente, ser uma reflexão por reta. ■

Agora que determinamos quais são as isometrias pares, vamos verificar que o conjunto das isometrias pares forma um grupo.

Teorema 42 *As isometrias pares formam um grupo \mathcal{E} .*

Demonstração: A identidade é uma isometria par, pois $\sigma_a\sigma_a = i$.

A inversa de uma isometria par, também será uma isometria par, pois $(\sigma_a\sigma_b)^{-1} = \sigma_b^{-1}\sigma_a^{-1}$.

O produto de duas isometrias pares é uma isometria par, pelo Teorema 37.

Portanto o conjunto das isometrias pares é um subgrupo do grupo das isometrias, sendo ele mesmo um grupo \mathcal{E} . ■

A seguir temos um Lema de extrema importância que mostra que o conjugado de uma involução é também uma involução. Antes disso, definiremos o conjugado de uma isometria.

Definição 20 *Chamamos $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de **conjugado** de β por α .*

Lema 5 Sejam α e β isometrias. Então $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma involução se, e somente se, β for uma involução.

Demonstração: (\Rightarrow) Se $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma involução, então
 $\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} = i \Rightarrow \alpha\beta\beta\alpha^{-1} = i \Rightarrow \beta\beta = \alpha^{-1}\alpha = i$.
(\Leftarrow) $\beta\beta = i \Rightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta\beta\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = i$. ■

O próximo resultado caracteriza que o conjugado de uma reflexão por uma isometria qualquer.

Teorema 43 Se P é um ponto, r é uma reta e α uma isometria, então
 $\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(r)}$ e $\alpha\sigma_P\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$.

Demonstração: Pelo Lema 5, $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva. Além disso, $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}(\alpha(P)) = \alpha\sigma_P(P) = \alpha(P)$, então $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ fixa $\alpha(P)$. Além disso, $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ não fixará nenhum outro ponto, pois P é o único ponto do plano fixado por σ_P . Portanto
 $\alpha\sigma_P\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$.
Analogamente, $\alpha\sigma_r\alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva que fixa $\alpha(r)$, logo
 $\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(r)}$. ■

Após o último resultado, é natural imaginar se os conjugados das rotações e das translações também são rotações e translações, respectivamente. Fica claro que a resposta é sim, dado que as translações e as rotações são produtos de reflexões por retas, como veremos a seguir.

Teorema 44 Se α é uma isometria, então
 $\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}$ e $\alpha\rho_{C,\theta}\alpha^{-1} = \rho_{\alpha(C),\theta}$.

Demonstração: Vimos que $\tau_{A,B} = \sigma_M\sigma_A$, onde M é o ponto médio entre A e B . Então,
 $\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\sigma_A\alpha^{-1} = \alpha\sigma_M\alpha^{-1}\alpha\sigma_A\alpha^{-1}$. Como α é isometria, $\alpha(M)$ é o ponto médio entre $\alpha(A)$ e $\alpha(B)$, logo
 $\alpha\tau_{A,B}\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(M)}\sigma_{\alpha(A)} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)}$.
Vimos também que $\rho_{C,\theta} = \sigma_s\sigma_r$, onde r e s são retas concorrentes em C que formam um ângulo no sentido anti-horário de $\frac{\theta}{2}$.
Então $\alpha\rho_{C,\theta}\alpha^{-1} = \alpha\sigma_s\sigma_r\alpha^{-1} = \alpha\sigma_s\alpha^{-1}\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(s)}\sigma_{\alpha(r)}$. Como α é isometria, $\alpha(r)$ e $\alpha(s)$ se interceptam em $\alpha(C)$ e o ângulo no sentido anti-horário entre $\alpha(r)$ e $\alpha(s)$ será $\pm\frac{\theta}{2}$, pois isometrias preservam medidas angulares mas não necessariamente o sentido de rotação do ângulo. Portanto, $\alpha\rho_{C,\theta}\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(s)}\sigma_{\alpha(r)} = \rho_{\alpha(C),\pm\theta}$. ■

Por fim, vamos estudar em quais casos as reflexões por retas comutam.

Teorema 45 Dadas r e s retas quaisquer, então $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ se, e somente se, $r = s$ ou $r \perp s$.

Demonstração: Pelo que vimos nos Teoremas 13 e 43, temos:
 $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r \Leftrightarrow \sigma_s\sigma_r\sigma_s = \sigma_r \Leftrightarrow \sigma_{\sigma_s(r)} = \sigma_r \Leftrightarrow \sigma_s(r) = r \Leftrightarrow r = s$ ou $r \perp s$. ■

3.4 REFLEXÕES TRANSLADADAS

As reflexões transladadas foram deixadas para este momento, pois suas propriedades dependem de resultados obtidos na seção de composição e na seção de paridade.

Vale destacar que as reflexões transladadas são o resultado do produto de três reflexões por retas. O próximo resultado destaca as propriedades das reflexões transladadas.

Teorema 46 1. *Uma reflexão transladada não fixa nenhum ponto.*

2. *O ponto médio entre qualquer ponto do plano e sua imagem por uma reflexão transladada pertence ao eixo da reflexão transladada.*
3. *Uma reflexão transladada preserva exatamente uma reta, que é seu eixo.*

Demonstração:

1. Suponha $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ uma reflexão transladada, P um ponto do plano e $P' = \sigma_c\sigma_b\sigma_a(P)$. Então, pela definição de reflexão transladada temos $a, b \perp c$ e $a \neq b$.
Se $P' = P$, então $\sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = P \Rightarrow \sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c(P)$. Mas $\sigma_b\sigma_a$ é uma translação por um vetor perpendicular a a e b e, portanto, paralelo a c , ou seja, se considerarmos que c divide o plano em dois semiplanos, teremos $\sigma_b\sigma_a(P)$ no mesmo semiplano que P , enquanto $\sigma_c(P)$ por ser uma reflexão pela reta c estará no semiplano oposto ao que contém P , o que nos leva a uma contradição. Logo $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ não pode fixar nenhum ponto.
2. Suponha r a perpendicular a c que contém P . Então existe uma reta s , $s \perp r$ tal que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_s\sigma_r$. Fazendo $S = s \cap c$, então P e S são pontos distintos, e $\sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c\sigma_s\sigma_r(P) = \sigma_c\sigma_s(P) = \sigma_s(P)$. Portanto S é o ponto médio de $\overline{PP'}$ e $S \in c$.

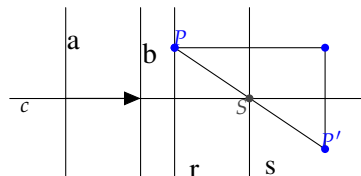


Figura 16: Reflexão Transladada

3. Para terminar, suponha que $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ preserve uma reta r e suponha $P \in r$. Então, como vimos, o ponto médio de $\overline{PP'}$ que chamaremos de M pertence a c . Mas como $P, P' \in r$ então temos $M \in r$. Seja agora $Q \in r$ tal que $P - P' - Q$ e seja $Q' = \sigma_c\sigma_b\sigma_a(Q)$. Então $Q' \in r$. Então, sendo M' o ponto médio de $\overline{QQ'}$ teremos $M' \in r \cap c$. Como $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ é isometria $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QM'} \Rightarrow M' \neq M$. Portanto r e c se interceptam em dois pontos distintos, o que nos garante que $r = c$. ■

A reflexão transladada já é definida como um produto de três reflexões por retas. A seguir vemos que as reflexões transladadas também podem ser escritas como um produto entre uma reflexão por uma reta e uma reflexão por um ponto, em qualquer ordem.

Teorema 47 *Uma reflexão transladada é a composição de uma reflexão por alguma reta a seguida por uma reflexão por um ponto $B \notin a$. Uma reflexão transladada é a composição de uma reflexão por algum ponto A seguida de uma reflexão por alguma reta b tal que $A \notin b$. Reciprocamente, se P é um ponto e r uma reta tal que $P \notin r$, então $\sigma_P\sigma_r$ e $\sigma_r\sigma_P$ são reflexões transladadas tendo como eixo a reta perpendicular a r que passa por P .*

Demonstração: (\Rightarrow) Se α é uma reflexão transladada, então existem a, b e c retas distintas com $a, b \perp c$ em A e B respectivamente tais que $\alpha = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$.

Então temos $\sigma_A = \sigma_a\sigma_c = \sigma_c\sigma_a$ e $\sigma_B = \sigma_b\sigma_c = \sigma_c\sigma_b$.

Daí, $\alpha = \sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_B\sigma_a$ e $\alpha = \sigma_B\sigma_a = \sigma_b\sigma_c\sigma_a = \sigma_b\sigma_A$.

(\Leftarrow) Suponha $P \notin r$. Seja p a reta perpendicular a r contendo P e s a reta perpendicular a p contendo P . Assim temos r, p e s retas distintas com $r, s \perp p$. Além disso, $\sigma_P\sigma_r = \sigma_p\sigma_s\sigma_r$ e $\sigma_r\sigma_P = \sigma_r\sigma_p\sigma_s$. Portanto os produtos $\sigma_P\sigma_r$ e $\sigma_r\sigma_P$ são reflexões transladadas, como queríamos. ■

O resultado a seguir mostra várias propriedades das reflexões transladadas. Ele começa mostrando em qual caso a reflexão transladada comutará com uma translação, segue mostrando que a composta de uma reflexão transladada por ela mesma é uma translação não nula e termina mostrando que uma reflexão transladada gera um grupo cíclico infinito.

Teorema 48 *Uma translação que preserva uma reta c comuta com uma reflexão transladada que tem por eixo a reta c . O quadrado de uma reflexão transladada é uma translação diferente da identidade. Uma reflexão transladada gera um grupo cíclico infinito.*

Demonstração: Seja $\alpha = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$ uma reflexão transladada. Então a, b e c são retas distintas com $a, b \perp c$. Além disso, se considerarmos $A = a \cap c$ e $B = b \cap c$ e $C = \tau_{A,B}(B)$, podemos escrever $\sigma_b\sigma_a = \tau_{A,C}$, e como $A, C \in c$ então $\tau_{A,C}$ preserva c . Seja agora τ uma translação qualquer que preserva c . Como uma translação que preserva c comuta com σ_c e como todas as translações comutam, temos $\alpha\tau = \sigma_c\sigma_b\sigma_a\tau = \sigma_c\tau\sigma_b\sigma_a = \tau\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \tau\alpha$.

Além disso,

$$\alpha^2 = (\sigma_c\sigma_b\sigma_a)^2 = \sigma_c\sigma_b\sigma_a\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\tau_{A,C}\sigma_c\tau_{A,C} = \sigma_c\sigma_c\tau_{A,C}^2 = \tau_{A,C}^2.$$

Para terminar, observe que nenhuma potência positiva de uma translação τ é a identidade, pois a inversa de $\tau_{A,B}$ é $\tau_{B,A}$. Então o grupo cíclico $\langle \alpha^2 \rangle$ é um grupo infinito. Note ainda que o grupo cíclico $\langle \alpha \rangle$ contém todas as potências pares de α , logo contém o grupo $\langle \alpha^2 \rangle$, o que garante que o grupo cíclico $\langle \alpha \rangle$ é infinito. ■

Teorema 49 *As retas p, q e r não possuem ponto, nem perpendicular comum se, e somente se, $\sigma_r\sigma_q\sigma_p$ for uma reflexão transladada.*

Demonstração: (\Leftarrow) Imediato da definição de reflexão transladada.

(\Rightarrow) Suponha retas p , q e r que não possuem ponto nem perpendicular em comum.

Primeiro vamos considerar o caso em que p e q se interceptam no ponto Q .

Por hipótese, $Q \notin r$. Seja P o pé da perpendicular à r baixada de Q e seja $m = \overleftrightarrow{PQ}$. Então existe uma reta s que passa por Q tal que $\sigma_q\sigma_p = \sigma_m\sigma_s$. Como $p \neq q$ então $s \neq m$ e $P \notin s$. Então $\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_r\sigma_m\sigma_s = \sigma_p\sigma_s$ com $P \notin s$. Portanto $\sigma_r\sigma_q\sigma_p$ é uma reflexão transladada.

No caso em que $p \parallel q$, as retas r e q devem se interceptar, pois, caso contrário, p , q e r teriam uma perpendicular comum. Então, aplicando o caso anterior, existe um ponto P e uma reta s com $P \notin s$ tal que $\sigma_p\sigma_q\sigma_r = \sigma_p\sigma_s \Rightarrow (\sigma_p\sigma_q\sigma_r)^{-1} = (\sigma_p\sigma_s)^{-1} \Rightarrow \sigma_r^{-1}\sigma_q^{-1}\sigma_p^{-1} = \sigma_s^{-1}\sigma_p^{-1} \Rightarrow \sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_p$, com $P \notin s$. Portanto, novamente temos $\sigma_r\sigma_q\sigma_p$ uma reflexão transladada. ■

Após este último Teorema, temos dois resultados muito importantes como consequência imediata.

Corolário 6 *Uma isometria ímpar é uma reflexão por reta ou uma reflexão transladada.*

Corolário 7 *Uma isometria diferente da identidade é exatamente umas das seguintes transformações: translação, rotação, reflexão por reta ou reflexão transladada.*

Terminaremos esta seção mostrando que o conjugado de uma reflexão transladada por uma isometria qualquer continua sendo uma reflexão transladada.

Teorema 50 *Se β é uma reflexão transladada de eixo c e α é uma isometria, então $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma reflexão transladada de eixo $\alpha(c)$.*

Demonstração: Seja $\beta = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$ uma reflexão transladada. Então, $a, b \perp c$ e $a \neq b$. Daí, $\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\sigma_c\sigma_b\sigma_a\alpha^{-1} = \alpha\sigma_c\alpha^{-1}\alpha\sigma_b\alpha^{-1}\alpha\sigma_a\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(c)}\sigma_{\alpha(b)}\sigma_{\alpha(a)}$. E como α é isometria, temos $\alpha(a), \alpha(b) \perp \alpha(c)$ e $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Portanto $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma reflexão transladada de eixo $\alpha(c)$. ■

3.5 GRUPOS DIEDRAIS

Nesta seção iremos observar os grupos de simetrias dos polígonos regulares.

Antes de entrar nos Teoremas principais, vamos considerar um exemplo específico, o do grupo de simetrias do quadrado.

Suponha um quadrado centrado na origem do plano cartesiano, onde um de seus vértices está sobre a parte positiva do eixo das abscissas. Observe as notações na figura abaixo

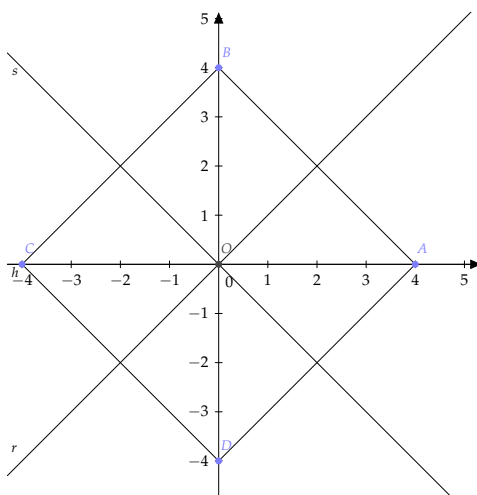


Figura 17: Simetrias do quadrado

É claro que o quadrado é preservado por $\rho = \rho_{O,90^\circ}$ e por $\sigma = \sigma_h$. Note que $\rho^4 = \sigma^2 = i$. Como, de acordo com o Teorema 15, as simetrias do quadrado formam um grupo, então o quadrado deve ser preservado pelas quatro rotações distintas ρ, ρ^2, ρ^3 e ρ^4 e pelas quatro isometrias ímpares e distintas $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma$ e $\rho^4\sigma$.

Considere agora V_1 e V_2 dois vértices adjacentes quaisquer do quadrado dado. Se aplicarmos uma simetria aos pontos do quadrado, V_1 será levado em um dos quatro vértices do quadrado, e nesse caso V_2 será levado em um dos dois vértices adjacentes à imagem de V_1 . Desta forma os outros dois vértices do quadrado estarão determinados.

Então existem no máximo 8 simetrias para o quadrado. Como listamos acima 8 simetrias distintas para o quadrado, podemos concluir que existem exatamente 8 simetrias distintas para o quadrado, e listamos todas elas.

Assim, dizemos que as isometrias ρ e σ geram todo o grupo de simetrias do quadrado, que chamaremos de $D_4 = \langle \rho, \sigma \rangle$. Note que D_4 tem ordem 8, ou seja, possui 8 elementos.

Baseados no exemplo que acabamos de ver, mostraremos os resultados a seguir sobre os grupos de simetrias.

Definição 21 Um **Grupo Diedral** D_n é o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados.

Teorema 51 O grupo de simetrias de um polígono regular de n , D_n lados possui $2n$ elementos.

Demonstração: A demonstração é análoga ao que fizemos no caso do quadrado.

Suponha um polígono regular de n lados centrado na origem O do plano cartesiano. Chamaremos de h a reta suporte do eixo das abscissas. Então, teremos que $\rho = \rho_{O, \frac{360^\circ}{n}}$ e $\sigma = \sigma_h$ preservam o nosso polígono.

Como as simetrias de qualquer conjunto de pontos, em particular do nosso polígono, formam um

grupo, então o polígono deve ser preservado pelas n rotações distintas $\{\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}, \rho^n\}$ e pelas n isometrias ímpares distintas

$\{\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma\}$, tendo em vista que $\rho^n = \sigma^2 = i$ pelas definições das duas isometrias.

Considerando V_1 e V_2 dois vértices consecutivos quaisquer do polígono, ao aplicarmos uma simetria sobre o mesmo, V_1 deverá ser levado em um dos n vértices do polígono e V_2 num dos dois vértices adjacentes à imagem de V_1 . Deste modo, todos os outros vértices da imagem do polígono pela simetria ficam determinados, e portanto, teremos no máximo $2n$ simetrias para o polígono de n lados.

Mas havíamos listado $2n$ simetrias distintas para o polígono de n lados o que nos leva a concluir que seu grupo de simetrias possui exatamente $2n$ elementos. ■

Teorema 52 *Para cada número natural n existe um polígono tendo D_n como grupo de simetrias e um polígono tendo C_n como grupo de simetrias.*

Demonstração: Se $n > 2$, D_n é o grupo de simetrias do polígono regular de n lados e C_n será o grupo de simetrias do polígono mostrado à direita na figura abaixo para $n = 6$.

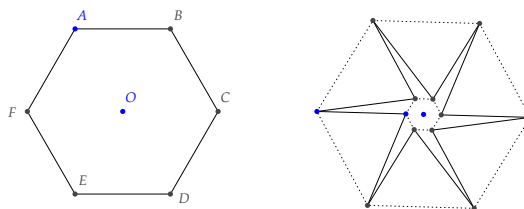


Figura 18: Polígonos que possuem D_n e C_n como grupos de simetrias respectivamente

D_1 é o grupo de simetrias do triângulo isósceles que não é equilátero; D_2 é o grupo de simetrias do retângulo que não é quadrado; $C_1 = \langle \rho_{O,360^\circ} = i \rangle$, contém somente a identidade, então será o grupo de simetrias do triângulo escaleno; C_2 contém somente $\rho_{O,180^\circ} = \sigma_O$ e a identidade, então será o grupo de simetrias do paralelogramo que não é losango. ■

O próximo resultado é de extrema importância, não só para a demonstração do Teorema principal deste trabalho, mas no estudo dos grupos de simetrias em geral.

Teorema 53 *Um grupo finito de isometrias é um grupo cíclico C_n ou um grupo diedral D_n .*

Demonstração: Suponha \mathcal{G} um grupo finito de isometrias. Então \mathcal{G} não pode conter uma translação nem uma reflexão transladada que sejam diferentes da identidade, pois estas isometrias geram um subgrupo infinito de \mathcal{G} .

Então \mathcal{G} contém somente rotações e reflexões por retas. Vamos considerar dois casos: o primeiro em que \mathcal{G} contém apenas rotações e o segundo em que \mathcal{G} contém pelo menos uma reflexão por

reta.

Suponha \mathcal{G} um grupo finito que possui apenas rotações. Uma possibilidade é \mathcal{G} ser o grupo da identidade C_1 . Então vamos supor que \mathcal{G} contém uma rotação $\rho_{A,\theta}$ com $\theta \neq 0$. Assumimos então que $\rho_{B,\varphi}$ é uma rotação em \mathcal{G} com $B \neq A$ e $\varphi \neq 0$. Nesse caso, \mathcal{G} deve conter $\rho_{B,\varphi}^{-1}\rho_{A,\theta}^{-1}\rho_{B,\varphi}\rho_{A,\theta}$, que como vimos no Teorema 35 será uma translação diferente da identidade, o que não pode ocorrer porque \mathcal{G} é finito, logo devemos ter $A = B$ e concluímos que todas as rotações de \mathcal{G} tem centro em A . Note que $\rho_{A,-\theta} \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \rho_{A,\theta} \in \mathcal{G}$ e que todo elemento de \mathcal{G} pode ser escrito como $\rho_{A,\theta}$ com $0 \leq \theta < 360^\circ$.

Seja $\rho = \rho_{A,\varphi}$, onde φ é o menor possível que faz de $\rho_{A,\theta}$ uma simetria com $\varphi > 0$. Se $\rho_{A,\alpha} \in \mathcal{G}$ e $\alpha > 0$, então existe um número k natural tal que $\alpha = k\varphi$, o que nos fornece $\rho_{A,\alpha} = \rho^k$. Daí, todo elemento de \mathcal{G} pode ser escrito como uma potência de ρ . Portanto, um grupo finito de isometrias que não contém reflexões por retas é um grupo cíclico C_n para algum n natural.

Vamos para o caso onde \mathcal{G} contém pelo menos uma reflexão por reta.

Como i é uma isometria par, como uma *isometria* e sua inversa têm a mesma paridade e como o produto de duas isometrias pares é uma isometria par, segue que o conjunto de todas as isometrias pares de \mathcal{G} forma um subgrupo de \mathcal{G} e pelo que vimos no caso anterior esse subgrupo será o grupo cíclico C_n para algum n natural. Então as isometrias pares de \mathcal{G} são as n rotações $\{\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n\}$ com $\rho^n = i$.

Suponha que \mathcal{G} possui m reflexões por retas. Se σ é uma reflexão por reta de \mathcal{G} , teremos que as n isometrias ímpares $\{\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma\}$ estarão em \mathcal{G} o que implica $n \leq m$. Por outro lado, as m isometrias ímpares multiplicadas à direita por σ fornecem m isometrias pares distintas, daí $m \leq n$. Então $m = n$ e \mathcal{G} contém os $2n$ elementos gerados por ρ e σ .

Se $n = 1$, $\mathcal{G} = \langle \sigma \rangle$. Se $n > 1$, então $\rho\sigma$ deve ser uma reflexão por uma reta que contém A . Concluímos então que um grupo finito de isometrias que contém uma reflexão por reta é o grupo diedral D_n para algum n natural. ■

Corolário 8 *O grupo de simetrias de um polígono é um grupo cíclico ou um grupo diedral.*

Demonstração: Observe que um polígono tem um número finito de vértices, o que faz com que ele tenha um número finito de simetrias e o resultado é consequência direta do Teorema anterior. ■

GRUPOS DE FRISO

Os grupos de friso são modelos matemáticos para classificar desenhos bidimensionais que são repetitivos em alguma direção, através das simetrias que aparecem no padrão. Estes padrões ocorrem com frequência na arquitetura e na decoração.

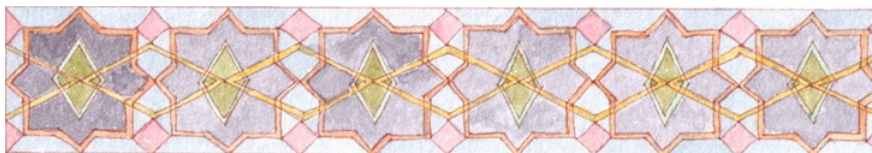
Quando vemos um piso decorado, ou um vitral numa igreja antiga, ou mesmo padrões em trechos de pinturas ou papel de parede, encontramos o que chamamos de friso ornamental. A formação desse friso, ou seja, do desenho que o compõe, é feita a partir de um mesmo motivo original que se repete seguindo um determinado padrão. Os padrões de repetição desses motivos são o objeto de estudo desse capítulo.



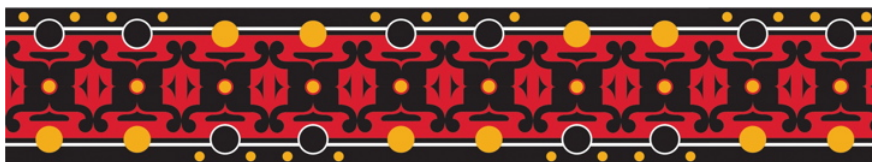
Ohn Yu Shin



Tori Ero



Rachel Mccaslin



Mike Odum

Figura 19: Frisos ornamentais criados por artistas plásticos

Teorema 54 *Se P é um ponto de simetria para o conjunto S de pontos e α é uma simetria de S , então $\alpha(P)$ é um ponto de simetria para S . Se r é uma reta de simetria para o conjunto de pontos S e α é uma simetria de S , então $\alpha(r)$ é uma reta de simetria para S .*

Demonstração: Se as isometrias α e σ_P estão em um grupo \mathcal{G} de isometrias, então $\sigma_{\alpha(P)}$ também está em \mathcal{G} porque o produto $\alpha\sigma_P\alpha^{-1}$ deve estar em \mathcal{G} . Análogamente, se as isometrias α e σ_r estão num grupo \mathcal{G} de isometrias, então $\sigma_{\alpha(r)}$ também está em \mathcal{G} porque o produto $\alpha\sigma_r\alpha^{-1}$ deve estar em \mathcal{G} . Como as simetrias de qualquer conjunto de pontos formam um grupo, o resultado está provado. ■

Em um friso ornamental, frequentemente aparece um padrão formado pela repetição de algumas figuras ou motivos. A propriedade essencial de um friso ornamental é que ele é formado por alguma "isometria inteligente". Evidentemente, há uma variedade infinita desses padrões. Entretanto, tirando a escala e o motivo, e considerando apenas as simetrias por trás desses padrões como invariantes, podemos ver que existem apenas sete tipos possíveis de frisos ornamentais.

Definição 22 *Um grupo de isometrias que preserva uma reta dada c e cujas translações formam um grupo cíclico infinito é dito um **grupo de friso** com centro c . Observe que essa reta c não necessariamente faz parte do motivo do friso ornamental em questão, mas existe uma reta de simetria mesmo que imaginária que é preservada ao longo do friso.*

Teorema 55 *Seja \mathcal{F} um grupo de friso com centro c cujas translações formam um grupo cíclico infinito $\langle \tau \rangle$. Se \mathcal{F} contém uma reflexão por ponto, suponha que \mathcal{F} contém σ_A ; se \mathcal{F} contém uma reflexão por uma reta perpendicular a c , suponha que \mathcal{F} contém σ_a com $a \perp c$. Seja γ a reflexão transladada com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$. Então \mathcal{F} é um dos sete grupos distintos definidos a seguir: $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$, $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$, $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$, $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$, $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$, $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$, $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$.*

Demonstração: A notação seguinte será utilizada durante o desenvolvimento. Começamos escolhendo um ponto A na reta c . Se \mathcal{F} contém reflexões por pontos, então A é escolhido para ser o ponto em torno do qual ocorre uma dessas reflexões, se \mathcal{F} não contém reflexões por pontos, mas contém reflexões por retas perpendiculares a c , A é escolhido como a interseção entre uma dessas retas e c , caso contrário, A é escolhido como qualquer ponto de c .

Seja $A_i = \tau^i(A)$, então toda translação em \mathcal{F} deve levar cada A_i em um A_j . Seja M o ponto médio entre A e A_1 , e seja $M_i = \tau^i(M)$. Então M_i será o ponto médio entre A_i e A_{i+1} e também ponto médio de A_0 e A_{2i+1} .

Uma possibilidade para \mathcal{F} é o grupo gerado por τ .

Seja $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$. Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_1 como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é preservado por uma reflexão transladada. Nas figuras que seguem, os pontos não fazem parte do friso ornamental.

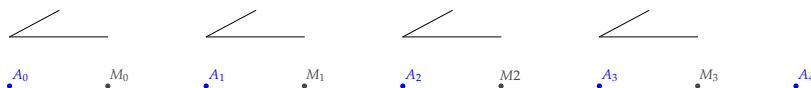


Figura 20: $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$

Além das translações, as únicas outras isometrias que preservam o centro c são as reflexões por pontos contidos em c . Suponha que \mathcal{F} contenha uma reflexão por ponto. Então σ_A está em \mathcal{F} pela escolha de A . Além disso, σ_M está em \mathcal{F} pois M é o ponto médio entre A e $\tau(A)$ o que significa que $\sigma_M \sigma_A = \tau \Rightarrow \sigma_M = \tau \sigma_A$. Pelo Teorema anterior, \mathcal{F} contém a reflexão por cada A_i e M_i .

Agora, suponha P tal que $\sigma_P \in \mathcal{F}$. Então a translação $\sigma_P \sigma_A$ está em \mathcal{F} . Daí $\sigma_P \sigma_A(A) = A_n$ para algum n . Temos então $\sigma_P(A) = A_n$, e P é o ponto médio de A e A_n . Portanto \mathcal{F} contém exatamente as reflexões pelos pontos A_i e M_i .

Seja $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$. Como σ_A é uma involução, então $\tau \sigma_A = \sigma_A \tau^{-1}$. Logo, todo elemento em \mathcal{F}_2 é da forma τ^i ou $\sigma_A \tau^i$, ou seja, todo elemento de \mathcal{F}_2 é da forma $\sigma_A^j \tau^i \Rightarrow \mathcal{F}_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$, pois $\sigma_M \tau = \sigma_A$.

Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_2 como grupo de simetrias tem um ponto de simetria e não tem retas de simetria.

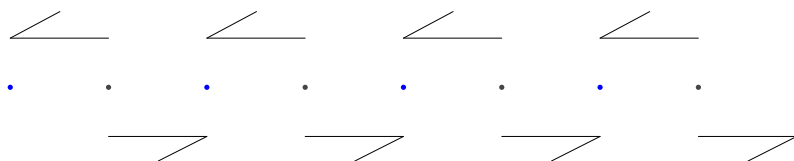


Figura 21: $\mathcal{F}_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$

Se \mathcal{F} contém apenas isometrias pares, então \mathcal{F} tem que ser \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 . As outras possibilidades para \mathcal{F} são obtidas pelo aumento de \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 com isometrias ímpares. Primeiramente vamos considerar a adição de reflexões por retas.

Lembre que σ_r preserva c se, e somente se $r = c$ ou $r \perp c$. Seja $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$. Como $\tau \sigma_c = \sigma_c \tau$, então \mathcal{F}_1^1 é abeliano e todos os seus elementos são da forma $\sigma_c^j \tau^i$. Se $n \neq 0$, então \mathcal{F}_1^1 contém a reflexão transladada com eixo c que leva A em A_n . Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_1^1 por grupo de simetrias não tem ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

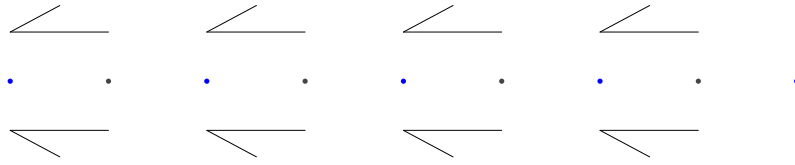


Figura 22: $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$

Seja $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$. Como σ_c comuta com τ e com σ_A , então todo elemento de \mathcal{F}_2^1 é da forma $\sigma_c^k \sigma_A^j \tau^i$. Se $n \neq 0$, então \mathcal{F}_2^1 contém a reflexão transladada $\sigma_c \tau^n$ com eixo c que leva A em A_n . Além disso, \mathcal{F}_2^1 contém $\tau^{2i+1} \sigma_A \sigma_c$, que é a reflexão pela reta perpendicular a c em A_i , e \mathcal{F}_2^1 contém $\tau^{2i+1} \sigma_A \sigma_c$ que é a reflexão pela reta perpendicular a c em M_i . Se a é a reta perpendicular a c em A , então $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$. Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_2^1 como grupo de simetrias tem um ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

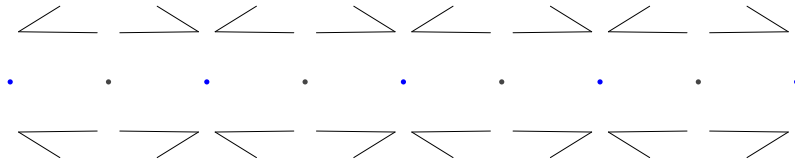


Figura 23: $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$

Suponha que \mathcal{F} não contenha uma reflexão por ponto, mas contenha a reflexão por uma reta a perpendicular a c . Nesse caso, supomos $A \in a$. Então \mathcal{F} contém $\tau^{2i} \sigma_a$, que é a reflexão pela reta perpendicular a c em A_i , e \mathcal{F} contém $\tau^{2i+1} \sigma_a$, que é a reflexão pela reta perpendicular a c em M_i . Assuma que \mathcal{F} contenha outra reflexão por reta σ_r . Então $r \neq c$ pois a reflexão por ponto $\sigma_c \sigma_a \notin \mathcal{F}$. Logo $r \perp c$. Daí \mathcal{F} contém a translação $\sigma_r \sigma_a$, que deve levar A em A_n para algum n . Portanto $\sigma_r(A) = A_n$ para algum n , $n \neq 0$, e r é perpendicular a c em algum A_i ou algum M_i . Além disso, \mathcal{F} deve conter exatamente estas reflexões por retas perpendiculares a c em A_i para cada i e estas reflexões por retas perpendiculares a c em M_i para cada M_i . Consideramos então todos os possíveis casos adicionando reflexões a \mathcal{F}_1 .

Seja $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ onde a é perpendicular a c em A . Como $\tau \sigma_a = \sigma_a \tau^{-1}$ então todo elemento de \mathcal{F}_1^2 é da forma $\sigma_a^j \tau^i$. \mathcal{F}_1^2 não contém σ_c mas contém as reflexões por retas que são perpendiculares a c em A_i ou M_i . Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_1^2 como grupo de simetrias não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o centro não é uma reta de simetria.

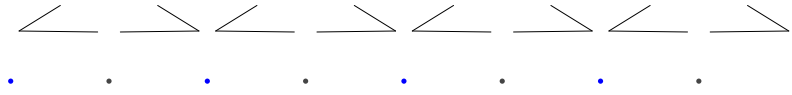


Figura 24: $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$

Agora suponha que \mathcal{F} contém uma reflexão por ponto e a reflexão por uma reta q . Se $q \neq c$, q é perpendicular a c em A_i , ou q é perpendicular a c em M_i , então voltamos a \mathcal{F}_2^1 . Para obter algo novo, devemos supor que q não passa por A_1 ou M_1 . Como $\sigma_q(A)$ deve ser a imagem de uma reflexão por ponto em \mathcal{F} pelo Teorema anterior (fazendo $\alpha = \sigma_q$), a única possibilidade restante é que q seja mediatriz de $\overline{AM_i}$ para algum i . Por causa das reflexões por pontos em \mathcal{F} , a segunda parte do Teorema anterior requer então que \mathcal{F} contenha a reflexão pela mediatriz de $\overline{AM_i}$ para cada i . Então, em particular, \mathcal{F} contém σ_p onde p é a mediatriz de \overline{AM} .

Se a reta a é perpendicular a c em A , então \mathcal{F} não pode conter σ_p e σ_a simultaneamente ou a translação $\sigma_p\sigma_a$ poderia levar A em M , o que não pode ocorrer. Assim, como $\sigma_p\sigma_a = \sigma_p\sigma_c\sigma_a$, \mathcal{F} não pode conter σ_p e σ_c simultaneamente. Consideramos então todas as possibilidades de adição de reflexões a \mathcal{F}_2 . Seja $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_p \rangle$ onde p é a mediatriz de \overline{AM} . Note que \mathcal{F}_2^2 contém a reflexão transladada $\sigma_p\sigma_a$ com eixo c que leva A em M . Seja $\gamma = \sigma_p\sigma_a$. Como $\gamma^2 = \tau$ e $\sigma_p = \gamma\sigma_A$, então $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$. \mathcal{F}_2^2 não contém σ_c . Um friso ornamental que tem \mathcal{F}_2^2 como grupo de simetria tem um ponto de simetria, tem uma reta de simetria mas o centro não é uma reta de simetria.

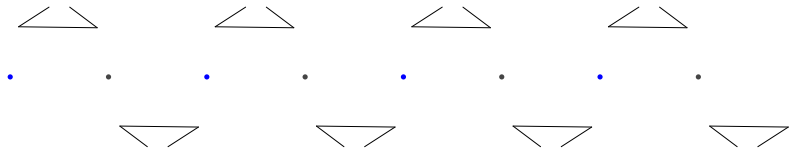


Figura 25: $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$

Consideramos todas as possibilidades para \mathcal{F} que não contém necessariamente uma reflexão transladada. Agora suponha que \mathcal{F} contém a reflexão transladada α . Então α tem eixo c e α^2 é uma translação que preserva c . Nós temos dois casos: $\alpha^2 = \tau^{2n}$ e $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$ para algum inteiro n .

Suponha $\alpha^2 = \tau^{2n}$. Como α e τ comutam, então $(\alpha\tau^{-n})^2 = i$. Daí, a isometria involutiva ímpar $\alpha\tau^{-n}$ deve ser σ_c . Consequentemente $\alpha = \sigma_c\tau^n$. Neste caso, \mathcal{F} contém σ_c e $\sigma_c\tau^m$ para cada inteiro m . Se \mathcal{F} não contém uma reflexão por ponto, então voltamos a \mathcal{F}_1^1 . Se \mathcal{F} contém uma reflexão por ponto, então voltamos a \mathcal{F}_2^1 .

Agora suponha $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$. Então $(\tau^{-n}\alpha)^2 = \tau$. Seja $\gamma = \tau^{-n}\alpha$. Então γ é uma isometria ímpar cujo quadrado é τ . Assim, γ deve ser a única reflexão transladada com eixo c que leva A em M . Sendo $\gamma^{2m} = \tau^m$ e $\gamma^{2m+1} = \tau^m\gamma$, as reflexões transladadas em \mathcal{F} são exatamente as da forma $\tau^m\gamma$.

Seja $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ onde γ é a reflexão transladada com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$. Um friso ornamental tendo \mathcal{F}_1^3 como grupo de simetrias não possui pontos de simetria nem retas de simetria, mas é preservados por uma reflexão transladada.

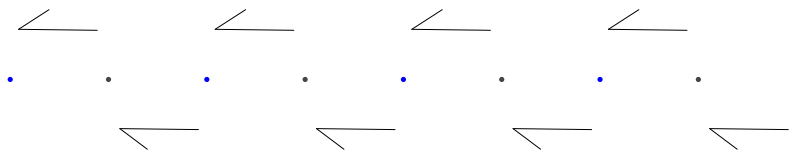


Figura 26: $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$

Suponha que \mathcal{F} contém isometrias além das geradas pela reflexão transladada γ com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$. Como o quadrado da translação $\sigma_c \gamma$ é τ , então $\sigma_c \gamma \notin \langle \tau \rangle$. Logo σ_c não pode estar em \mathcal{F} .

Se \mathcal{F} contém σ_r com $r \perp c$, então \mathcal{F} contém a reflexão por ponto $\sigma_r \gamma$. Se \mathcal{F} contém uma reflexão por ponto, então \mathcal{F} deve conter σ_A , e nesse caso, \mathcal{F} contém σ_A e a reflexão transladada γ com eixo c e tal que $\gamma^2 = \tau$, o que nos leva de volta à \mathcal{F}_2^2 .

Finalmente esgotamos as possibilidades. O grupo \mathcal{F} deve ser portanto, um dos sete grupos descritos acima. ■

Para finalizar o capítulo, trazemos uma árvore de possibilidades através da qual, com no máximo quatro perguntas, conseguimos avaliar um friso ornamental e descobrir qual dos sete grupos gera este friso.

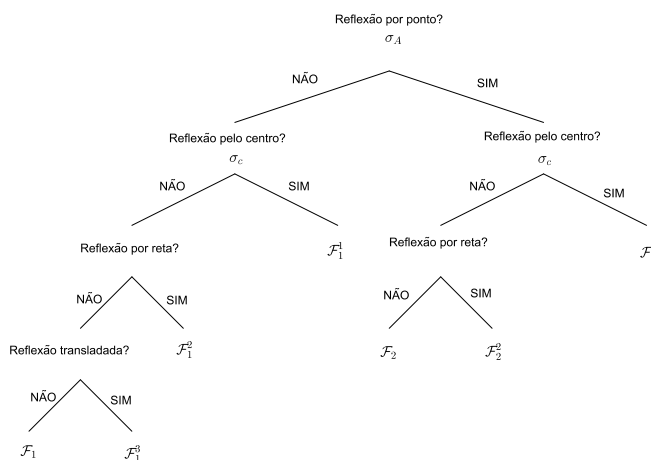


Figura 27: Árvore de possibilidades

APLICAÇÕES

As transformações geométricas e a base da teoria de grupos podem ser adaptadas para uma linguagem acessível aos alunos dos ensinos fundamental e médio. É claro que não podemos num âmbito escolar empregar todo o formalismo apresentado nesse texto, porém é perfeitamente possível adequar as idéias e os conceitos envolvidos para aplicações em sala de aula.

Iremos então, nesse capítulo explorar algumas atividades que utilizam os conceitos estudados neste trabalho em aplicações voltadas diretamente para alunos do ensino médio.

5.1 VERIFICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras, é um teorema de conhecimento dos alunos do ensino médio. A demonstração desse teorema feita por Euclides, envolve a construção de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo. Nesta atividade, propomos a utilização das transformações do plano como ferramentas para a verificação do Teorema de Pitágoras, promovendo o conhecimento um pouco mais formal da matemática de forma acessível a alunos do ensino médio.

5.1.1 *Objetivos*

O objetivo desta atividade é Demonstrar o Teorema de Pitágoras utilizando transformações do plano de forma que a demonstração seja acessível e compreensível por alunos do ensino médio.

5.1.2 *Material*

O material utilizado para esta atividade é um computador com o software Geogebra instalado. Este software é gratuito podendo ser utilizado sem restrições no ambiente escolar.

Caso a escola disponha computadores suficientes para que todos os alunos utilizem, ou um computador para cada dois alunos, sugerimos que a atividade seja desenvolvida pelos alunos, de modo que eles possam chegar, de forma mais efetiva, às conclusões a respeito da demonstração do Teorema em questão.

5.1.3 *Roteiro*

Primeiramente devemos lembrar aos nossos alunos o Teorema em questão. O Teorema de Pitágoras enuncia que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos

quadrados dos seus catetos. É interessante também recordar o que é um triângulo retângulo e quais são os seus elementos.

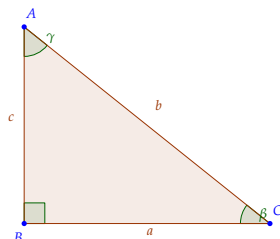


Figura 28: Triângulo retângulo e seus elementos

Num triângulo retângulo temos:

- O ângulo reto, no caso da figura o ângulo \hat{B}
- Dois ângulos agudos, na figura são β e γ
- A hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto, na figura o segmento b
- Os catetos, que são os lados adjacentes ao ângulo reto, na figura os segmentos a e c

O Teorema de Pitágoras nos diz que o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos seus catetos, ou seja, se chamarmos de a , b e c as medidas dos segmentos a , b e c respectivamente, teremos:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Para verificar este teorema, primeiramente vamos construir quadrados sobre os lados do triângulo retângulo. Existem diversas formas de fazer esta construção. Optamos pela sequência a seguir, utilizando o Geogebra:

1. Construimos uma circunferência de centro B e raio AB . Construimos uma reta perpendicular à \overline{AB} que passa pelo ponto B . Construimos o ponto D como sendo o ponto de intersecção entre a circunferência e a reta traçadas.
2. Construimos uma reta paralela à \overline{AB} passando pelo ponto B e construimos uma circunferência de centro D e raio BD . Obtemos assim o ponto E de intersecção entre a reta e a circunferência.
3. Obtemos então o quadrado $\square ABDE$ sobre o lado \overline{AB} do triângulo retângulo.
4. repetimos a construção para o lado \overline{AC} do triângulo obtendo o quadrado $\square ACFG$.

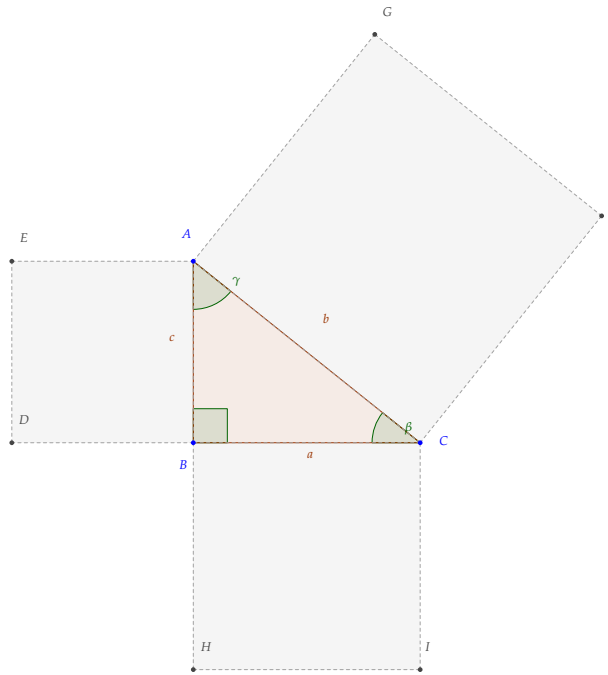


Figura 29: Verificação do Teorema de Pitágoras - Passo 1

5. repetimos mais uma vez a construção para o lado \overline{BC} do triângulo obtendo o quadrado $\square BCIH$.

Vamos agora mover os quadrados construídos sobre os catetos de forma a fazê-los coincidir com o quadrado construído sobre a hipotenusa. O próprio Teorema de Pitágoras nos dá a informação de que os catetos são menores do que a hipotenusa, o que nos permite fazer este tipo de transformação.

Primeiramente definimos o vetor \overrightarrow{IC} e transladamos os vértices do quadrado $\square BCIH$ pelo vetor \overrightarrow{IC} obtendo o quadrado $\square CC'B'H'$. Isto feito, vamos rotacionar o quadrado $\square CC'B'H'$ em torno do ponto C . O ângulo de rotação será o ângulo suplementar ao ângulo β , que pode ser obtido pelas indicações que o Geogebra fornece na coluna à esquerda intitulada Janela de álgebra. Então calculamos o ângulo $360^\circ - \beta$ e realizamos a rotação de cada um dos vértices do quadrado $\square CC'B'H'$ obtendo o quadrado $\square CC''B''H''$.

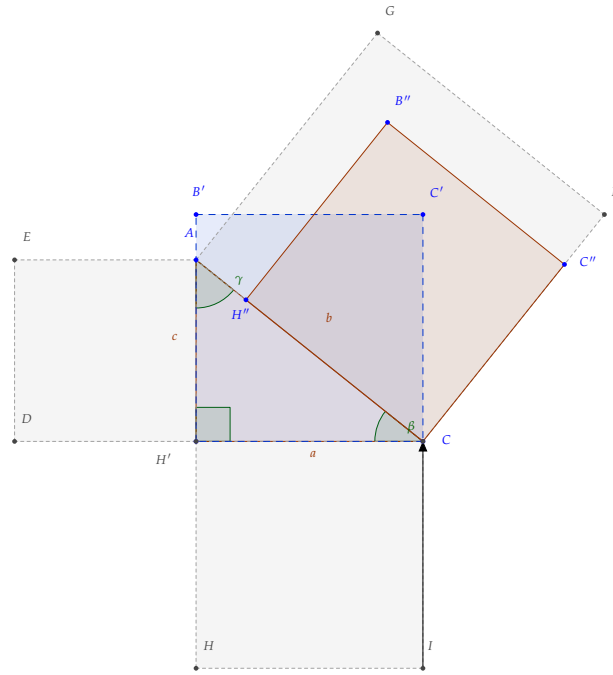


Figura 30: Verificação do Teorema de Pitágoras - Passo 2

Vamos fazer o mesmo procedimento com o quadrado $\square ABDE$. Primeiro trasladamos seus vértices pelo vetor \vec{EA} obtendo o quadrado $\square AA'B_1H'$ e na sequência rotacionamos o quadrado obtido em torno de A usando o ângulo γ e obtendo o quadrado $\square AA''JB_2'$.

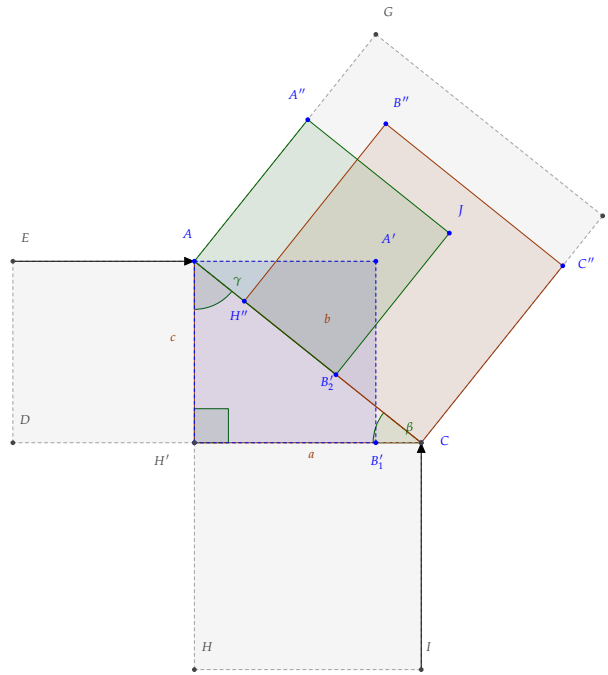


Figura 31: Verificação do Teorema de Pitágoras - Passo 3

Vemos na última figura que os quadrados $\square CC''B''H''$ e $\square AA''JB''_2$ ficaram sobrepostos. Vamos então quebrar o quadrado $\square AA''JB''_2$ em retângulos e tentar preencher o restante do quadrado $\square ACFG$.

Chamando de K o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{B''H''}$ e $\overline{A''J}$, dividindo o quadrado $\square AA''JB''_2$ nos retângulos $\square AA''KH''$ e $\square B''_2JKH''$. Devemos mover o retângulo $\square B''_2JKH''$, pois é ele que está sobrepondo o quadrado $\square CC''B''H''$.

Definimos então o vetor com origem no ponto A'' e que vai até o ponto H'' e fazemos, usando este vetor, a translação do retângulo $\square B''_2JKH''$, obtendo o retângulo $\square A''LJ'K'$.

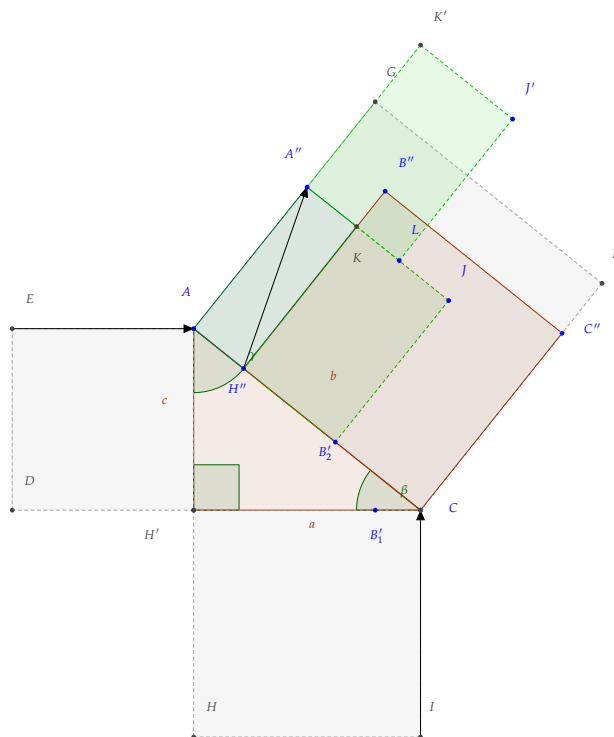


Figura 32: Verificação do Teorema de Pitágoras - Passo 4

Continuamos repetindo o processo de mover os pedaços do retângulo que ficaram sobrepostos ou que ficaram para fora do quadrado $\square ACFG$ até completá-lo. O Teorema de Pitágoras garante que esse processo terá um fim e assim concluímos a verificação proposta.

5.2 IDENTIFICANDO OS GRUPOS DE SIMETRIAS EM FRISOS ORNAMENTAIS

O teorema principal deste trabalho, é o teorema que identifica os sete grupos de simetrias que ocorrem nos frisos ornamentais. Para trabalhar com o ensino médio, é interessante identificar os sete grupos através das simetrias presentes em cada um deles. Assim, é possível ao aluno de ensino médio identificar em um dado friso ornamental, quais simetrias ocorrem e, conseqüentemente, identificar qual o grupo de simetrias que gerou o friso ornamental.

5.2.1 *Objetivos*

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno identifique, em um friso ornamental qualquer, as simetrias que o geraram. Observando a imagem e diferenciando as imagens que ocorrem por translação, por reflexão ou por reflexão transladada.

5.2.2 Material

Para realizar esta atividade, serão necessárias imagens de frisos ornamentais.

Se a escola dispuser de um data show, é interessante projetar as imagens para que os alunos trabalhem. Caso não haja essa possibilidade, as imagens podem ser impressas e copiadas para que cada aluno tenha uma cópia em um tamanho que proporcione boa visualização do friso ornamental em questão.

5.2.3 Roteiro

Primeiramente expor aos alunos que os grupos de simetrias que geram os frisos ornamentais são sete, e quais são as simetrias que podem ocorrer em cada um dos grupos, conforme capítulo 4 deste trabalho.

Isto feito, devem ser expostas, ou distribuídas as imagens dos frisos ornamentais para que os alunos possam identificar a qual grupo pertencem.

Nesta proposta apresentamos 5 frisos ornamentais para os quais explicamos qual o grupo de simetrias que o gera e porque. Porém, é possível utilizar outras imagens que podem ser encontradas facilmente na internet.

1. Observe o friso ornamental a seguir:

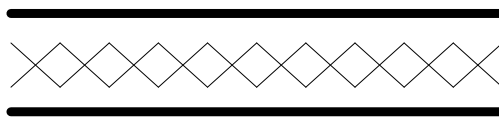


Figura 33: Identificando as simetrias - 1a

Seguindo a árvore de possibilidades do Capítulo 4, concluímos que o grupo de simetrias que gera este padrão é o \mathcal{F}_2^1 . Observe na figura a presença da reflexão por um ponto A contido em c e da reflexão pelo centro do friso c . O motivo que se repete neste friso é o segmento \overline{PA} . Através da reflexão por ponto σ_A obtemos o segmento $\overline{AP'}$. Finalizamos aplicando a reflexão por reta σ_c no segmento $\overline{PP'}$ obtendo o segmento $\overline{P_1P'_1}$. Os outros pontos do friso são obtidos pela translação do motivo inicial.

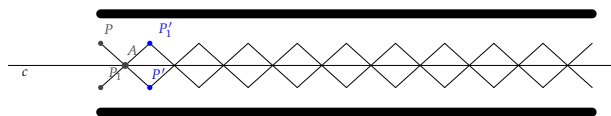


Figura 34: Identificando simetrias - 1b

2. Observe o friso ornamental a seguir:

Seguindo a árvore de possibilidades, concluimos que o grupo de simetrias que gera

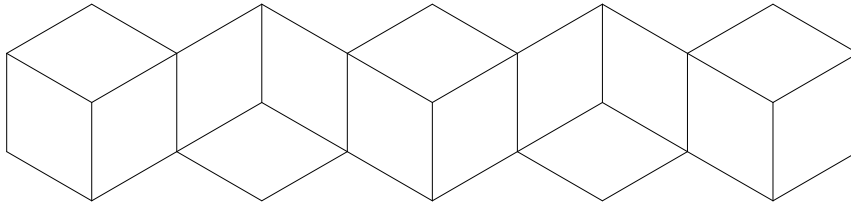


Figura 35: Identificando simetrias - 2a

este friso é o \mathcal{F}_1^3 . Observe o centro do friso na figura abaixo. Observamos claramente a presença da reflexão transladada que leva $\square ABCD$ em $\square A'B'C'D'$, o que revela o grupo de simetrias nesse caso.

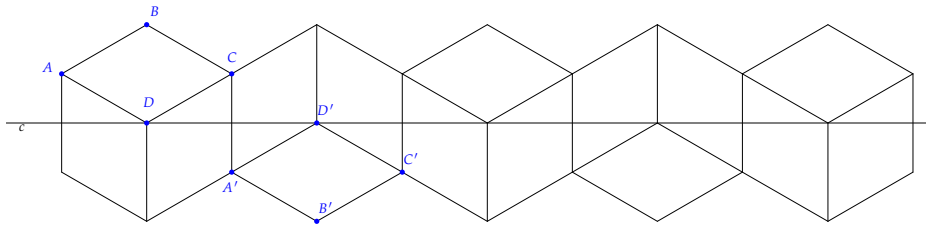


Figura 36: Identificando simetrias - 2b

3. Observe o friso ornamental a seguir:

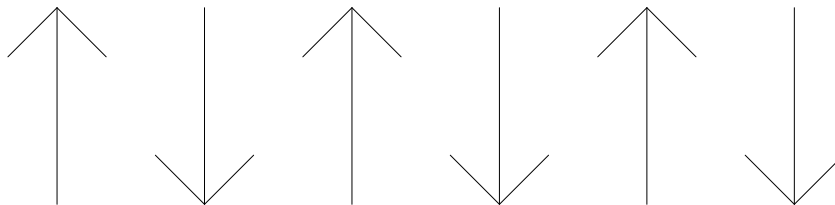


Figura 37: Identificando simetrias - 3

Esse friso ornamental também apresenta o grupo \mathcal{F}_1^3 como grupo de simetrias. A justificativa é análoga à do friso anterior.

4. Observe o friso ornamental a seguir:

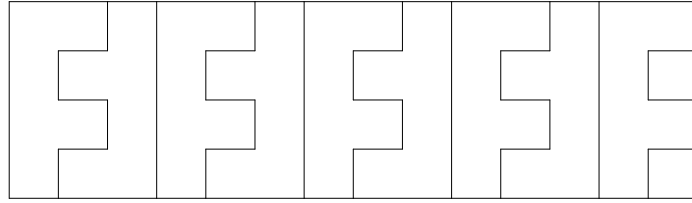


Figura 38: Identificando simetrias - 4a

Este friso é gerado pelo grupo \mathcal{F}_2 . Observe na figura abaixo o centro do friso c e o ponto A pertencente a ele, por onde são feitas as reflexões por ponto. Como não podemos observar nenhuma reflexão além de σ_A a conclusão, de acordo com a árvore de possibilidades nos leva a este grupo.

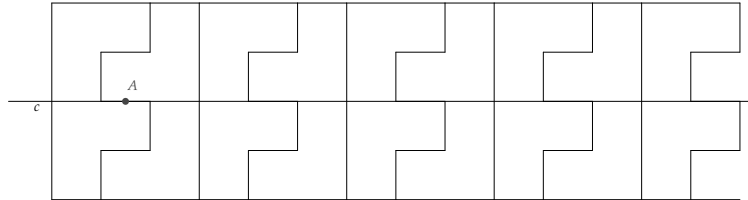


Figura 39: Identificando simetrias - 4b

5. Observe o friso ornamental a seguir:

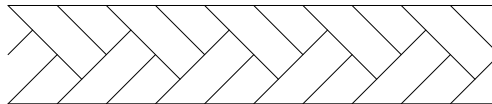


Figura 40: Identificando simetrias - 5a

Este friso é facilmente identificável desde que se localize seu centro c . Uma vez localizada a reta c a verificação de que os pontos B' e C' são as imagens de B e C por σ_A e que os pontos D' e E' são as imagens de D e E por σ_c identificam o grupo de simetrias que gera este friso como \mathcal{F}_2^1 .

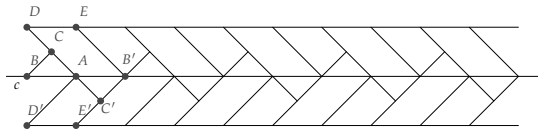


Figura 41: Identificando simetrias - 5b

5.3 CRIANDO FRISOS ORNAMENTAIS

Para finalizar, uma atividade lúdica para criar frisos ornamentais a partir de um motivo utilizando os grupos de simetrias.

5.3.1 *Objetivos*

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos que de fato os frisos ornamentais são criados a partir de um motivo que se repete de acordo com um certo grupo de simetrias.

5.3.2 *Material*

Para o desenvolvimento desta atividade usaremos computadores com o software Geogebra. É recomendável a realização da atividade com, no máximo, dois alunos por computador, a fim de que todos possam vivenciar a experiência de criar as simetrias com a utilização do software.

5.3.3 *Roteiro*

Primeiramente devemos solicitar aos alunos que criem um motivo a ser replicado com os grupos de friso. Recomendamos que esse motivo seja simples, com poucos vértices de modo a simplificar o trabalho e possibilitar a construção do máximo de frisos ornamentais no espaço de uma aula.

Para exemplificar este roteiro, utilizamos um triângulo equilátero como motivo.



Figura 42: Motivo

Procuramos deixar nas figuras os vértices do motivo de modo a facilitar a execução das transformações do plano no Geogebra. No final, é interessante esconder os vértices para uma

melhor visualização do friso ornamental.

Montando um friso ornamental a partir do grupo \mathcal{F}_1 devemos usar apenas uma translação fixada. Então devemos definir um vetor no Geogebra e transladar os vértices do nosso motivo para formar o friso.

Para criar o vetor, usamos a ferramenta criar um vetor a partir de dois pontos, criando o vetor \vec{DE} .

Para transladar os vértices do nosso motivo utilizamos a ferramenta translação por um vetor e selecionamos, primeiro o ponto a ser transladado e depois o vetor \vec{DE} .

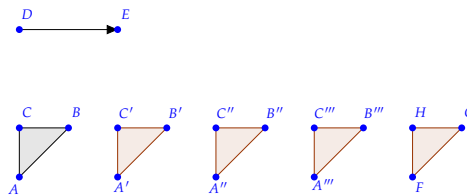


Figura 43: Aplicando a translação

Para finalizar utilizamos a ferramenta polígono para unir os pontos obtidos pelas translações e obter o friso ornamental. Após terminar de fechar os polígonos, selecionamos o vetor utilizado e os vértices do friso e clicamos em exibir objeto, para ocultá-los, obtendo assim o friso.



Figura 44: Resultado da translação

Gerando um friso ornamental que tem por base o grupo \mathcal{F}_2 , devemos utilizar as translações e as reflexões por um ponto A que pertença ao centro c do friso que será criado.

Para isso, vamos primeiro aplicar a reflexão σ_A nos vértices do nosso motivo.

Escolhemos então uma reta, de preferência paralela ao vetor utilizado no primeiro friso, para que todos os frisos tenham o mesmo centro. Esta reta será o centro c do nosso friso.

Nesta reta escolhemos um ponto A que será o centro da reflexão por ponto σ_A aplicada. É conveniente escolher o ponto A próximo à localização do motivo para não ter problemas de visualização do friso criado.

Escolhido o ponto A , usamos a ferramenta reflexão em relação a um ponto do Geogebra nos vértices do nosso motivo, selecionando sempre o ponto A como centro da reflexão.

Como a composição de duas reflexões por pontos é uma translação, basta usar o vetor que definimos anteriormente como vetor de traslação e transladar os pontos que temos até então.

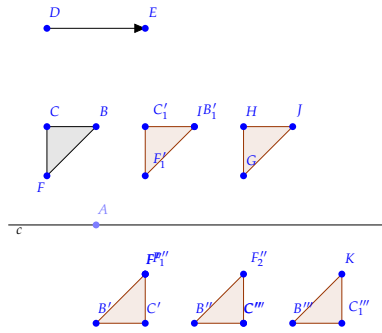


Figura 45: Reflexão por ponto e translação

Após terminar as translações, unimos os pontos novamente utilizando a ferramenta polígono e depois escondemos os objetos que nos auxiliaram na construção do friso, obtendo a figura.

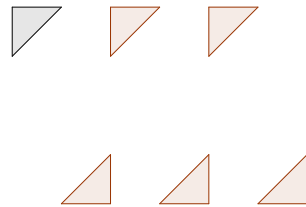


Figura 46: Resultado da reflexão por ponto seguida de translação

Os demais frisos ornamentais, baseados nos outros grupos de simetrias, são criados de maneira análoga, sempre utilizando as ferramentas para isometrias disponíveis no geogebra. A sugestão é que se faça na mesma sequência, realizando primeiro as transformações que envolvem reflexões e finalizando com as translações dos vértices obtidos nas primeiras transformações. Se for possível, no espaço de uma aula, é interessante criar frisos envolvendo todos os grupos estudados.

Caso o tempo não seja suficiente para a realização de todos os frisos possíveis, sugerimos que a turma seja dividida em grupos, ficando cada grupo responsável por um dos grupos de simetrias e no final os alunos podem observar uns o trabalho dos outros.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MARTIN, George E.; *Transformation Geometry*, Springer-Verlag 1982.
- [2] LIMA, Elon Lages.; *Isometrias*, SBM 1996.
- [3] ALVES, Sérgio e GALVÃO, M. E.; *Um estudo geométrico das transformações elementares*, IME-USP 1996.
- [4] WEYL, Hermann; *Symmetry*, Princeton University Press 1952.
- [5] YAGLOM, I.M.; *Geometric Transformations I*, The Mathematical Association of America 1962.
- [6] FRALEIGH, John B.; *A First Course in Abstract Algebra*, Pearson 2002.
- [7] ARMSTRONG, M.A.; *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag 1988.
- [8] ARTIN, Michael; *Algebra*, Prentice-Hall 1991.
- [9] YALE, Paul B.; *Geometry and Symmetry*, Holden-Day 1968.
- [10] BOULOS, Paulo e CAMARGO, Ivan de; *Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial*, Pearson 2005.

ÍNDICE

colineação, 21

conjugado, 51

dilatação, 22

grupo, 23

grupo abeliano, 24

grupo de friso, 60

grupo diedral, 56

involução, 22

isometria, 22

isometria ímpar, 50

isometria par, 50

ponto, 21

ponto de simetria, 23

reflexão por um ponto, 22

reflexão por uma reta, 22

reflexão transladada, 23

reta, 21

reta de simetria, 23

rotação, 23

simetria, 23

subgrupo, 23

subgrupo cíclico, 25

transformação, 21

translação, 22