Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma Proposta de Aplicações de um Tipo de Equação Diofantina no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos no Estado de Goiás

Raquel Barbosa Ferreira

Goiânia

2024

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

RAQUEL BARBOSA FERREIRA

3. Título do trabalho

Uma Proposta de Aplicações de um Tipo de Equação Diofantina no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos no Estado de Goiás

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/08/2024, às 22:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Raquel Barbosa Ferreira**, **Discente**, em 13/08/2024, às 17:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4738981** e o código CRC **63177007**.

Referência: Processo nº 23070.034724/2024-12 SEI nº 4738981

Raquel Barbosa Ferreira

Uma Proposta de Aplicações de um Tipo de Equação Diofantina no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos no Estado de Goiás

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ferreira, Raquel Barbosa
Uma Proposta de Aplicações de um Tipo de Equação Diofantina no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos no Estado de Goiás [manuscrito] / Raquel Barbosa Ferreira. - 2024.
LXXIX, 79 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.
Bibliografia.
Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Educação de Jovens e Adultos. 2. Equação Diofantina Linear. 3. Máximo Divisor Comum. 4. Sequência didática. I. Rodrigues, Paulo Henrique de Azevedo, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 19 da sessão de Defesa de Dissertação de **Raquel Barbosa Ferreira**, que confere o título de Mestra em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte e seis dias do mês de julho de dois mil de vinte e quatro a partir das 10h, por meio de videoconferência (Google Meet para acesso a Reunião: https://meet.google.com/src-vcof-edi), realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"** Uma Proposta de Aplicações de um Tipo de Equação Diofantina no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos no Estado de Goiás**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) e o membro titular externo Fábio Vieira de Andrade Borges – Universidade de Rio Verde (FESURV). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, vinte e seis dias do mês de julho de dois mil de vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Referência: Processo nº 23070.034724/2024-12 SEI nº 4675274

Raquel Barbosa Ferreira graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - Campus Goiânia, em 2010.

Dedico este trabalho ao meu filho Pedro. O seu nascimento me tornou mais forte e incentivou na busca por novos conhecimentos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelas bênçãos recebidas.

A minha mãe Luiza por ser minha grande incentivadora e uma fonte de inspiração.

Aos professores do Mestrado, que tanto admiro e foram essenciais para a minha vida acadêmica. Gratidão em especial ao meu orientador Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, pela grande contribuição.

A todos os amigos que me incentivaram ao longo dessa jornada.

"A dúvida é o princípio da sabedoria."
(Aristóteles)

Resumo

A Educação de Jovens e Adultos é uma modalidade de ensino que propiciou o acesso à educação por pessoas que, mediante diversos fatores, não concluíram o Ensino Fundamental e Médio na idade adequada. Um dos objetivos principais dessa modalidade é a busca por uma sociedade igualitária, criando assim melhores expectativas e oportunidades. O grande desafio é a utilização dos conhecimentos informais dos alunos, e ainda, a falta de material específico. Com relação a sequência didática apresentada, foi voltada para a resolução de problemas que envolvam Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis, trazendo um conteúdo inusual até mesmo para o Ensino Regular, no entanto, evoca uma série de conteúdos do Ensino Fundamental e expande as habilidades já existentes. Observamos, ao longo do processo, a importância de uma sequência didática direcionada para a modalidade prevista, com características específicas, desde o resgate de conteúdos considerados pré-requisitos, dando ênfase a ideia do Máximo Divisor Comum, até a aplicação e ampliação do conteúdo trabalhado.

Palavras-chave

Educação de Jovens e Adultos, Equação Diofantina Linear, Máximo Divisor Comum, Sequência didática.

Abstract

Youth and Adult Education is a modality of education that provided access to education by people who, through several factors, did not conclude elementary and high school at the appropriate age. One of the main objectives of this modality is the search for an egalitarian society, thus creating better expectations and opportunities. The great challenge is the use of the student's informal knowledge, and even, the lack of specific material. Regarding the following teaching presented, it was focused on solving problems involving Linear Diophantine Equations with two variables, bringing an unusual content even for Regular Education, however, it evokes a series of contents of Elementary School and expands the already existing skills. We observed, throughout the process, the importance of a following teaching directed to the predicted modality, with specific characteristics, since the rescue of contents considered prerequisites, emphasizing the idea of the Greatest Common Divisor, application and expansion of the content worked.

.

Keywords

Youth and Adult Education, Linear Diophantine Equation, Greatest Common Dividor, Following teaching.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Esse trabalho está voltado para a aprendizagem dos estudantes da rede pública de ensino do Estado de Goiás, mais precisamente para o Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos. Serve como um manual para os professores de Matemática que atuam nessa modalidade de ensino. Com uma linguagem simples, agrega no planejamento dos professores com formação inicial em Matemática e até mesmo para aqueles que fizeram complementação pedagógica ou são de outras áreas de atuação.

A Educação de Jovens e Adultos é uma modalidade de ensino destinada a atender alunos que se encontram com idade não oportuna para a série que está cursando. A regra para que o mesmo seja matriculado nessa modalidade (III etapa/Ensino Médio) é ter idade mínima de 18 anos, sendo assim, grande parte do alunado é composta por trabalhadores. Tendo em vista essa realidade, uma aprendizagem verdadeiramente significativa, que contribua para a vida cotidiana dos pesquisados, se torna um fator motivador para permanência e conclusão da etapa de ensino.

É notório a problemática diante da dificuldade existente no ensino da álgebra na Educação Básica, e na modalidade de ensino escolhida se torna mais evidente, pois temos alunos que se encontram afastados da sala de aula por um determinado período, causando assim uma defasagem nos conteúdos básicos.

Para justificar a escolha analisamos as bases documentais que regem a educação brasileira e o currículo estadual. Iniciamos o estudo pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [5] para um melhor entendimento do ensino da Matemática e para a Educação de Jovens e Adultos. Logo após passamos pela base curricular, tendo como objetos de estudo a Base Nacional Comum Curricular [3] e o Currículo Referência do Estado de Goiás[6].

Sobre a resolução de Equações Diofantinas, OLIVEIRA [9], afirma que se encontra nos livros de Ensino Fundamental, entendemos assim que o seu estudo será uma ferramenta a mais para a resolução direta ou de situações problemas. Esses fatos nortearam a formulação da sequência didática, levando a uma retomada dos conteúdos do Ensino Fundamental antes de introduzir a parte destinada ao Ensino Médio.

No decorrer da investigação será analisada a reação dos alunos diante da sequência didática apresentada. É importante destacar que no ano de 2023, o estado de Goiás alterou as regras e colocou os alunos do turno noturno, independente da idade, para compor a modalidade Educação de Jovens e Adultos, no entanto, na Unidade Escolar que a sequência didática foi aplicada, não houve alteração dessas normativas.

No capítulo 1 apresentaremos uma base de conhecimentos a cerca da Educação de Jovens e Adultos, os princípios norteadores, caracterizando e justificando a escolha desse público alvo para a pesquisa realizada. No capítulo 2 o foco são os elementos advindos da Teoria dos Números necessários para a resolução das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

No capítulo 3 o tema do trabalho se faz presente, justificando a retomada necessária nos capítulos anteriores. É vista também a história de Diofanto de Alexandria e sua principal contribuição para o nosso estudo. O foco é a definição e aplicação das Equações Diofantinas, assim como a condição de existência e resolução de problemas.

No capítulo 4 faremos uma sequência didática do conteúdo proposto para a Educação de Jovens e Adultos, abordaremos situações-problemas, aplicação das Equações Diofantinas em saques no caixa eletrônico e ainda uma avaliação realizada por meio da adaptação do jogo africano Seixos. O capítulo 5 traz um relato de experiência advindo da aplicação da sequência didática para um grupo de estudantes da rede pública estadual de ensino no interior do estado de Goiás. Para finalizar, o capítulo 6 serão apresentadas as considerações finais do trabalho.

1 Referencial Teórico

As Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) [4] estabelece que o Ensino Médio compõe a Educação Básica (Lei 9.394/96). Mais especificamente, os parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [5], conforme art. 37, determina que: a Educação de Jovens e Adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no Ensino Fundamental e Médio na idade própria.

A Educação de Jovens e Adultos é oferecida em diferentes etapas e é adaptada para atender às necessidades específicas desse público. Uso de metodologias adaptadas e valorização da experiência dos alunos são características fundamentais para o bom desempenho dos alunos. Vale ressaltar que além das questões de aprendizado, os estudantes podem enfrentar desafios como a alfabetização tardia, necessidade de conciliar estudo, trabalho e família.

A organização do currículo por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] é estabelecida por meio de um documento de caráter normativo e bem definido. A Base Nacional Comum Curricular tem suas bases legais na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e Documento Curricular Nacional [11], não há, em nenhum dos documentos apresentados, a sugestão do estudo de Equações Diofantinas, porém, existem vários indícios de que o estudo desse tipo de equação seria benéfico para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular [3] propõe que os estudantes devem desenvolver habilidades de resolução de problemas, investigação e construção de modelos. Assim, o incentivo para o desenvolvimento de métodos de resolução de problemas se torna primordial, sendo o ensino da álgebra um ponto importante nesse processo, assim como o uso de suas ferramentas para a resolução de problemas de forma eficaz.

Analisando as etapas de ensino, podemos verificar que as habilidades adquiridas no Ensino Fundamental devem ser ampliadas, ganhando aplicabilidade no Ensino Médio. Verificando o Currículo Referência do Estado de Goiás [6], podemos retirar várias habilidades que são base para o estudo de Equações Diofantinas. Assim, vamos listar as habilidades encontradas no Currículo Referência do Estado de Goiás que servem como base para o estudo de Equações Diofantinas.

Habilidades	
Série	**Habilidades**
6° ano Ensino Fundamental	• Reconhecer a aplicação dos números naturais e suas diferentes formas de utilização no cotidiano; • Estabelecer relações entre os números naturais, em situações problemas, tais como: "ser múltiplo de", "ser divisor de"; • Determinar o MMC e o MDC de dois ou mais números e utilizá-los na resolução de problemas.
7° ano Ensino Fundamental	• Analisar, interpretar e resolver operações com números inteiros na resolução de situações-problemas; • Compreender e utilizar a linguagem matemática como instrumento de representação para auxiliar na resolução de problemas orais e escritos; • Reconhecer, escrever e resolver equações e sistemas de equações do 1º grau em situações diversas.
8° ano Ensino Fundamental	• Verificar e analisar a validade de resoluções de situações-problema principalmente as que envolvem equações, sistemas de equações e inequações; • Identificar padrões diversos e utilizar a linguagem algébrica para representá-lo.

Tabela 1: Habilidades trabalhadas no Ensino Fundamental

Assim, o Ensino Fundamental nos fornece habilidades o suficiente para a introdução das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas no Ensino Médio. E ainda, levando em consideração a realidade da Educação de Jovens e Adultos (diferente faixa etária e, principalmente, alguns alunos que retornam aos estudos depois de vários anos longe do ambiente escolar), se faz necessária uma rápida revisão, voltada para as habilidades do Ensino Fundamental. No capítulo destinado as propostas de atividades para a modalidade de ensino, temos uma parte direcionada à retomada dos conteúdos mencionados.

Ampliar os conhecimentos adquiridos pode ainda sanar uma problemática atual no ensino da álgebra: a grande dificuldade em transformar situações problemas para a forma algébrica. De tal forma, o uso dessa ferramenta para a resolução de problemas se tornam ineficientes diante dessa dificuldade. Levando em consideração a modalidade escolhida, temos alunos com uma maturidade maior quando se trata de aplicabilidade em situações cotidianas e resolução de problemas.

De forma indireta o conteúdo em questão se encontra em alguns livros didáticos. No 7º ano existe a introdução de equação do primeiro grau e, ao trabalhar a quantidade de resoluções dessas equações nos deparamos com o caso quando temos uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Nessa etapa, o método de resolução apresentado é a escolha do valor de uma incógnita, fazemos a substituição e encontramos o valor da outra incógnita, tendo assim, infinitas soluções. Vale ressaltar que, por esse método, nem sempre encontramos soluções inteiras.

A partir daí, temos algumas situações-problemas que podem ser resolvidas pelas Equações Diofantinas, no entanto, o método de tentativa e erro é usado, sem utilizar nenhuma menção a essa ferramenta de resoluções de problemas. Além disso, o método de tentativa e erro não é eficaz o suficiente para resolver todas as situações propostas. Porém, não podemos desmerecer e/ou desconsiderar esse método como um todo, afinal faz parte da construção do pensamento lógico do indivíduo.

Dessa forma, o uso do conteúdo na Educação Básica é justificado por OLIVEIRA [9] como:

> Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Segundo, já existem diversas situações problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa "ferramenta"de resolução de problemas. (OLIVEIRA, S.B. de, 2006, p.28)

Assim, como a Base Nacional Comum Curricular [3] estabelece o desenvolvimento das habilidades referentes à parte algébrica e numérica, e ainda, aplicações da base de conteúdos adquiridos no Ensino Fundamental, aprofundando no Ensino Médio, o conteúdo Equações Diofantinas tem espaço no currículo e planejamento de matemática da Educação de Jovens e Adultos.

Ainda temos a competência 3 da Base Nacional Comum Curricular [3] que se refere a:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, Ministério da Educação, 2018, p.527)

A competência perpassa as características e competências que podem ser trabalhadas no decorrer da formalização do conteúdo e, principalmente, na resolução de situações-problemas que podem fazer parte do cotidiano dos alunos. Devemos ter atenção desde a leitura dos problemas, o cuidado ao expressá-los de forma algébrica e ainda, a análise e validação dos resultados obtidos. Ao validar respostas, selecionando aquela que satisfaz o enunciado, o aluno demonstra o conhecimento adquirido, não ficando atado a uma mera reprodução de um algoritmo baseado numa mera reprodução de passos.

Por meio da resolução desse tipo de equação no Ensino Médio, os alunos poderão relembrar e/ou ampliar conteúdos básicos, tais como: máximo divisor comum, múltiplos e divisores, critérios de divisibilidade, números naturais, números inteiros, números primos, decomposição em fatores primos; uma rica revisão que facilitará a compreensão de diversos conteúdos que também necessitam desses pré requisitos.

É um tema pouco estudado no Ensino Médio, sendo um método de resolução de problemas mais eficiente que usar tentativa e erro, que é utilizado normalmente. Quando utilizamos situações referentes a realidade do aluno, fazendo uma ligação entre conteúdo e a sua aplicação, podemos trabalhar com a capacidade de abstração, raciocínio, interpretação ampla da realidade que vivem, compreensão de fatos matemáticos e investigação.

O contato com problemas desta área contribui para o desenvolvimento matemático do aluno, sendo uma oportunidade para instigar a curiosidade dos mesmos, tendo em vista que um grande desafio é a de motivar para uma aprendizagem verdadeiramente significativa e que vise maiores desafios e expectativas para os estudantes dessa modalidade de ensino, afinal, a finalização do Ensino Médio pode virar apenas um dos objetivos desse alunado, gerando novas expectativas.

A Matemática é uma ferramenta para resolver problemas práticos de acordo com as diligências de cada momento da História, na busca por soluções de problemas e/ou aplicações para compreender a realidade. Não é apenas resolver algo, é entender a razão e aplicação do que está sendo feito. O processo de aquisição de conhecimento percorre várias etapas, sendo a resolução de problemas uma de suas principais metas, além de que será possível identificar as limitações e potencialidades dos alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Sobre a resolução de problemas, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [5] "a resolução de problemas é o ponto de partida da atividade matemática, que deixa de ser uma simples reprodução de procedimentos e acúmulo de informações e ganha significado". O conteúdo proposto para análise será trabalhado de forma prática, buscando, na rotina do aluno, um significado efetivo para o estudo das Equações Diofantinas e valorizando o rigor matemático necessário, independente da modalidade de ensino trabalhada.

A busca da resolução se inicia por problemas semelhantes, na busca por estratégias que possam solucioná-los deve-se sempre usar a lógica, experiências e métodos já utilizados e ainda a pesquisa. Quanto mais contato o aluno tiver com a resolução de problemas, melhor conseguirá assimilar e criar métodos para solucionar a questão proposta. Quanto mais complicado for o problema, mais elementos serão exigidos para encontrar a solução.

Levando em consideração que a pesquisa é referente ao tema: Equações Diofantinas Lineares com duas Incógnitas no Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos, vale ressaltar que o mesmo será abordado paralelamente a sua importância para a formação básica do estudante da modalidade prevista. Fazer uma relação entre os conteúdos trabalhados e a sua aplicação é de extrema importância para que a teoria não se torne um conjunto de algoritmos para a resolução de problemas que não tem ligação com o dia-a-dia. Sobre isso os Parâmetros Curriculares Nacionais, afirmam:

> A realidade torna-se conhecida quando se interage com ela, modificando-a física e/ou mentalmente. A atividade de interação permite interpretar a realidade e construir significados, permitem também construir novas possibilidades de ação e de conhecimento. (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1988, p.71)

A aprendizagem deve estar ligada a compreensão dos significados e aplicação dos conteúdos matemáticos. O processo de aprendizagem deve ocorrer através de trocas de conhecimento e desenvolvimento do raciocínio lógico até se obter uma resposta satisfatória. Nesse contexto, o ambiente de aprendizagem pode facilitar ou dificultar o processo, assim como as experiências, conhecimentos e habilidades pré-existentes.

2 Tópicos da Teoria dos Números

Nesse capítulo vamos apresentar a base da Teoria dos Números que serve para compreender a definição e as aplicações das Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis, baseado nos conceitos trabalhados por HEFEZ [7] e VIEIRA [14]. A utilização de uma linguagem de simples compreensão tem por finalidade alcançar o professor que atua na Educação de Jovens e Adultos.

2.1 Conjuntos numéricos

Vamos determinar os conjuntos numéricos que serão mencionados ao longo deste trabalho.

- O conjunto dos números naturais:
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
- O conjunto dos números naturais excluindo o zero:
  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros:
  $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

2.1.1 Operações com conjuntos numéricos

Dados dois conjuntos A e B, vamos definir:

- União entre conjuntos: formado pelos elementos x tal que $x \in A$ ou $x \in B$.
  Notação: $A \cup B$.
- Intersecção entre conjuntos: Formado pelos elementos x tal que $x \in A$ e $x \in B$.
  Notação: $A \cap B$.

Exemplo 1. *Dados os conjuntos* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, temos:*

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

(b) $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

2.1.2 Propriedades da união e intersecção de conjuntos

Dados A, B e C conjuntos numéricos, podemos enunciar as seguintes propriedades:

1. Propriedade comutativa
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
2. Propriedade associativa
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Propriedade distributiva
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.1.3 Relação de pertinência

Dados um conjunto A e um elemento a, podemos dizer se o elemento a pertence ou não pertence ao conjunto A.

Notação: $a \in A$ (a pertence a A).

$a \notin A$ (a não pertence a A).

Exemplo 2. *Dado o conjunto* $A = \{2, 5, 7, 3, 1\}$. *Assim, podemos afirmar que:*

- $2 \in A$

- $1 \in A$

- $4 \notin A$

2.1.4 Relação de inclusão

Usamos para comparar os elementos de dois conjuntos. Se os elementos de um conjunto A, também pertencem a um conjunto B, dizemos que A está contido em B, ou B contém A.

Notação: $\subset$ Está contido $\not\subset$ Não está contido $\supset$ Contém $\not\supset$ Não contém

Exemplo 3. *Dados os conjuntos* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $A = \{1, 2, 3\}$,*temos que:*
$A \subset B$ *ou* $B \supset A$.

2.2 Princípio da Boa Ordenação

Definição 1. *Diremos que A, um subconjunto de* $\mathbb{Z}$, *é limitado inferiormente se existir* $c \in \mathbb{Z}$ *tal que* $c \leq x$ *para todo* $x \in A$. *Logo* $a \in A$ *é o menor elemento de* A *se* $a \leq x$ *para todo* $x \in A$.

Proposiçao 1. *Não existe nenhum número inteiro n tal que* $0 < n < 1$

Demonstração. Vamos supor, por absurdo que $\exists$ n $\in \mathbb{Z}$ tal que $0 < n < 1$. Logo, o conjunto $a = x \in A; 0 < x < 1$ é diferente de vazio e limitado inferiormente, possuindo um menor elemento. Suponha a o menor elemento de A, logo: $0 < a < 1 \Rightarrow 0 <a^2 < a < 1$, portanto, $a^2 \in A$ e ainda $a^2 < a$, logo a^2 seria o menor elemento. (Contradição). $\square$

Corolário 1. *Dado um número inteiro n qualquer, não existe nenhum número inteiro* m *tal que* $n < m < n + 1$.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por absurdo. Suponha que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n < m < n + 1$, logo

$$n - n < m - n < n + 1 - n$$

assim,

$$0 < m - n < 1$$

que contradiz a proposição 1.

$\square$

Corolário 2. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Se* $ab = 1$ *então* $a = b = \pm 1$

Demonstração. Temos que $ab = 1$ logo $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Vamos supor que $a > 0$, como $ab = 1 > 0$, o que implica que $b > 0$. Segue assim $1 = ab \geq b \geq 1$ logo, $b = 1$ e $a = 1$. Analogamente mostramos quando $a < 0$.

$\square$

Teorema 1. *(Princípio da Indução Matemática) Sejam* A *um subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *e* $a \in \mathbb{Z}$ *tais que:*
(i) $a \in A$.
(ii) A *é fechado com relação à operação de "somar 1"a seus elementos, ou seja:* $\forall n, n \in A$ *implica que* $n + 1 \in A$ *então,* $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\} \subset A$.

Demonstração. Seja $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\}$ e vamos supor que $B \not\subset A$.
Assim $B - A \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, $B - A$ é limitado inferiormente, logo existe um menor elemento c em $B - A$.
Como $c \in B$ e $c \notin A$, temos que $c > a$. Portanto, $c - 1 \in B$ e $c - 1 \in A$.
Usando a hipótese sobre A, $c = (c - 1) + 1 \in A$, como $c \in B$, temos que $c \in B - A$ (Contradição) $\square$

Exemplo 4. *Mostre que*

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

com $n \in \mathbb{N}$, *por indução.*

Resolução:
Base de indução: $n = 1$.

$$\frac{1(1 + 1)(2.1 + 1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

logo vale para $n = 1$

Hipótese de indução: Vamos supor que vale para $n = k$, ou seja,

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Supondo que vale para $n = k$, vamos provar que vale para $k+1$. Assim,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = & \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ = & \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ = & \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ = & \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ = & \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Logo é válido para $k+1$. Assim,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

é válido $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Exemplo 5. *Demonstre, por indução, que*

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall\ n \geq 1$$

Resolução:

Base de indução: $n = 1$

$$1.2 = \frac{1.2.3}{3} = 2$$

logo vale para $n = 1$

Hipótese de indução: Vamos supor que vale para $n = k$, ou seja,

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

vamos provar que vale para $k + 1$

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

logo é válido para $k + 1$. Assim,

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

é válido $\forall\ n \geq 1$.

Exemplo 6. *Use indução para mostrar que*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

com $n \in \mathbb{N}$

Resolução:

Base de indução: Vamos mostrar que vale para $n = 1$

$$\frac{1}{4}.2^2 = 1$$

logo vale para $n = 1$

Hipótese de indução: Vamos supor que vale para $n = k$, *ou seja,*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

Vamos provar que vale para $k + 1$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2.[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2.[k^2 + 4k + 4]}{4} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2
\end{aligned}$$

logo é válido para $k + 1$. *Assim,*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

é válido $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Definição 2. *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}$, *dizemos que a divide b (escreveremos* $a|b$*) se existir* $c \in \mathbb{Z}$ *tal que* $b = c.a$. *Caso contrário, dizemos que a não divide b e escreveremos* $a \nmid b$.

Exemplo 7. *Podemos observar que:*

$$2|6 \textit{ pois } 6 = 3.2$$

$$1|8 \textit{ pois } 8 = 8.1$$

$$3|9 \textit{ pois } 9 = 3.3$$

Proposiçao 2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:*

(i) $1|a, a|a, a|0$

(ii) $0|a$ *se, e somente se* $a = 0$

(iii) *Se* $a|b$ *e* $b|c$ *então* $a|c$.

Demonstração. (i) Pela definição $a|b$ implica $b = ca$ com $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Vamos determinar o valor de c em cada caso:
$a = a.1$ logo $1|a$.
$a = 1.a$ logo $a|a$.
$0 = 0.a$ logo $a|0$.

(ii) Se $0|a$ logo existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 0.c$ o que implica que $a = 0$.

Agora suponha $a = 0$, basta observar que $a|a$.

(iii) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que:
$a|b$ logo $b = k_1.a$ (1)
$b|c$ logo $c = k_2.b$ (2)
Substituindo 1 em 2, temos:
$c = k_2.k_1.a = (k_2.k_1).a$ como $c = (k_2.k_1).a$ temos que $a|c$

□

Proposiçao 3. *Dado $a \in \mathbb{Z}$ e $a|1$, então $a = \pm 1$.*

Demonstração. Se $a|1$, por definição temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = k.a$, logo $k = 1$ e $a = 1$ ou $k = -1$ e $a = -1$, logo $a = \pm 1$.

□

Proposiçao 4. *Sejam a e b inteiros com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Se $a|b$ e $b|a$ então $a = \pm b$.*

Demonstração. Como $a|b$ e $b|a$, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que:
$b = a.q_1$ e $a = b.q_2$ logo $a = a.(q_1.q_2)$ assim $q_1.q_2 = 1$ logo $q_2|1$ o que implica que $q_2 = 1$ ou $q_2 = -1$ logo $a = b$ ou $a = -b$

□

Proposiçao 5. *Se* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *então* $a|b$ *e* $c|d$ *o que implica que* $ac|bd$.

Demonstração. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, logo teremos:
$a|b$ então $b = k_1.a$
$c|d$ então $d = k_2.c$
Portanto,
$b.d = k_1.a.k_2.c = (k_1k_2).a.c$, assim temos que $ac|bd$

□

Proposiçao 6. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *tais que* $a|b$ *e* $a|c$, *então para todo* $x, y \in \mathbb{Z}$ $a|(xb+yc)$

Demonstração. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, logo
$a|b$ logo $b = k_1.a$
$a|c$ logo $c = k_2.a$
Substituindo em $xb + yc$, temos:
$x(k_1a) + y(k_2a) = (xk_1 + yk_2)a$, logo, $a|(xb + yc)$

□

Exemplo 8. *Veja que* $3|15$ *e* $3|30$, *logo, pela proposição dada* $3|(2.15 + 3.30)$, *ou seja,* $3|120$.

2.4 Números Primos

Definição 3. *Dado um número* $n > 1$, *dizemos que* n *é um número primo se seus únicos divisores positivos são 1 e* n. *Caso contrário dizemos que* n *é composto.*

Notação: Vamos definir D_n o conjunto formado pelos divisores de n.

Exemplo 9. *a)* $D_5 = \{\pm 1, \pm 5\}$ *logo 5 é primo;*
b) $D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ *logo* 10 *é um número composto.*
c) $D_7 = \{\pm 1, \pm 7\}$ *logo* 7 *é primo.*
Evidentemente o único número primo e par é o 2. *Podemos listar os primeiros números primos:* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$

Teorema 2. *Seja* $n \geq 2$ *um número natural, então* n *possui um divisor que é número primo.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução:
Para $n = 2$ o resultado é válido.
Suponha que vale para algum k. Para $k + 1$, teremos:
(i) Se $k + 1$ for primo não há o que demonstrar, é válido.
(ii) Se $k + 1$ for composto, tem um divisor d tal que $1 < d < k + 1$.
Pela hipótese de indução temos que dado um número entre 2 e k esse número possui um divisor primo que também é divisor de $k + 1$, logo vale para $k + 1$. Portanto, o teorema é válido.

□

Proposiçao 7. *Seja $n \in \mathbb{N}$ com n não primo, logo n possui pelo menos um divisor primo (p) tal que $p \leq \sqrt{n}$.*

Demonstração. Considerando n um número composto logo existem $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $n = ab$. Se $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$, teríamos que:
$n = ab > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$ (absurdo!)
Logo um dos divisores deve ser menor ou igual a $\sqrt{n}$. Considerando que $a \leq \sqrt{n}$, pelo teorema anterior temos que a possui um divisor que é número primo. Concluímos assim que n possui um divisor primo menor ou igual a $\sqrt{n}$. □

O matemático grego Eratóstenes criou a primeira tabela de números primos, o método utilizado foi denominado crivo de Eratóstenes e consistia do seguinte procedimento, considerando que queremos determinar os números primos de 1 a 100. A descrição do método utilizado se encontra em VIEIRA [14], com o passo a passo das tabelas desenvolvidas/organizadas pela autora.

1. Cria-se uma lista com os números de 2 a 100;

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabela 2: Listagem de números primos menores que 100 - Etapa 1

2. Pela proposição anterior, precisamos verificar até a raiz do maior limite. Como $\sqrt{100} = 10$, esse será o maior valor para checagem.

3. Encontramos o primeiro número primo que é o 2. Após isso, retiramos da lista todos os múltiplos de 2 (exceto o próprio número);

2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

Tabela 3: Listagem de números primos menores que 100 - Etapa 2

4. O próximo número primo é o 3, realizamos o mesmo procedimento;

2	**3**	5	7	11	13	17	19	23
25	29	31	35	37	41	43	47	49
53	55	59	61	65	67	71	73	77
79	83	85	89	91	95	97		

Tabela 4: Listagem de números primos menores que 100 - Etapa 3

5. Realizamos o mesmo procedimento com o número primo 5;

2	**3**	**5**	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43
47	49	53	59	61	67	71
73	77	79	83	89	91	97

Tabela 5: Listagem de números primos menores que 100 - Etapa 4

6. O próximo número da lista é o 7;

2	**3**	**5**	**7**	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Tabela 6: Listagem de números primos menores que 100 - Etapa 5

7. Como o próximo número é o 11 e $11 > 10$, finalizamos a lista. Todos os números não excluídos são primos.

2	**3**	**5**	**7**	**11**
13	**17**	**19**	**23**	**29**
31	**37**	**41**	**43**	**47**
53	**59**	**61**	**67**	**71**
73	**79**	**83**	**89**	**97**

Tabela 7: Lista dos números primos menores que 100

Sobre a quantidade de números primos, Euclides no livro IX dos Elementos já nos trouxe a resposta: Há infinitos números primos.

2.5 Máximo Divisor Comum

A ideia de máximo divisor comum é um ponto de partida para o estudo de Equações Diofantinas, sendo esta a principal aplicação do Máximo Divisor Comum.

Definição 4. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, um número d é considerado um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.*

Exemplo 10. *Vamos determinar os divisores comuns de 120 e 24.*

Primeiramente vamos determinar os divisores de 120:

$D_{120} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm40, \pm60, \pm120\}$

Agora vamos determinar os divisores de 24:

$D_{24} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$

Logo, os divisores comuns são:

$D_{120} \cap D_{24} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$

Definição 5. *Diremos que um número inteiro $d \geq 0$ é o máximo divisor comum (mdc) de a e b, com a e $b \in \mathbb{Z}$ se satisfaz as propriedades:*
(i) $d|a$ e $d|b$
(ii) Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$. Vamos denotar por $mdc(a, b)$

Exemplo 11. *Vamos determinar o $mdc(16, 6)$.*
Os divisores de 16 são $D_{16} = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16\}$
Os divisores de 6 são $D_6 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$
Fazendo a intersecção $D_{16} \cap D_6$, temos:
$D_{16} \cap D_6 = \{\pm1, \pm2\}$*, como o maior elemento é o 2, temos que* $mdc(16, 6) = 2$

Exemplo 12. *Retornando ao exemplo 10, temos que:* $mdc(120, 24) = 24$

Definição 6. *Se a e b são inteiros e $mdc(a, b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si.*
$mdc(10, 9) = 1$, logo 10 e 9 são primos entre si.

$mdc(15,20) = 5 \neq 1$, logo 15 e 20 não são primos entre si.

Lema 1. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b-na)$ então $mdc(a, b)$ existe e $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$*

Demonstração. Vamos considerar $d = mdc(a, b - na)$, daí segue que $d|a$ e $d|(b - na)$. E ainda d divide $b = b - na + na$, logo d é divisor comum entre a e b. Considere c um divisor comum de a e b, o que implica que c é divisor comum entre a e $b - na$, logo $c|d$, logo $d = mdc(a, b)$.

□

Teorema 3. *Sejam a e b números inteiros e $d = mdc(a, b)$, então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$.*

Demonstração. Seja $S = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Se $c|a$ e $c|b$, segue que $c|(ax + by)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$. Como $c|d$, pois $d = mdc(a, b)$ segue que $d \in S$. □

Proposiçao 8. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Temos que $mdc(a, b) = 1$ se, e somente se, existem inteiros x e y tais que $1 = ax + by$.*

Demonstração. Vamos considerar $mdc(a, b) = 1$. Pelo teorema 4, $d = 1$ e $1 = ax + by$. Se $1 = ax + by$ e $d = mdc(a, b)$ logo $d|a$ e $d|b$. Assim $d|(ax + by)$ ou seja $d|1$, logo $d = 1$ e temos $mdc(a, b) = 1$

□

Proposiçao 9. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, as seguintes propriedades do máximo divisor comum são válidas:*

(i) Se mdc(a,b) = d então mdc $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

(ii) Se $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$ então $a|c$

Demonstração. (i) Se $mdc(a, b) = d$ existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax+by$ e ainda temos que $d|a$ e $d|b$ logo, $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são números naturais, logo $1 = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y$ e, pela proposição anterior temos que $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

(ii) Se $a|bc$, logo existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$ e ainda $mdc(a, b) = 1$, logo existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = 1$.
Multiplicando $ax + by = 1$ por c, temos:
$c = axc + byc = axc + bcy$, como $bc = ak$, logo $c = axc + aky$ o que implica que $c = a(xc + ky)$, como $(xc + ky) \in \mathbb{Z}$ temos que $a|c$.

$\square$

Exemplo 13. *Sabemos que* $mdc(50, 20) = 10$ *logo,*

$$mdc\left(\frac{50}{10}, \frac{20}{10}\right) = mdc(5, 2) = 1$$

2.6 Divisão Euclidiana

Nesta etapa vamos conhecer um pouco da História de Euclides de Alexandria com base nas leituras das informações encontradas em BORGES [1], OLIVEIRA [9], e ainda enunciar Teoremas e Lemas a as suas demonstrações.

2.6.1 Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria foi um escritor e matemático grego considerado o "Pai da Geometria". Os dados relacionados a vida de Euclides são escassos mas acredita-se que ele nasceu no século III a.C., formou na escola platônica de Atenas, fundou e lecionou na "Escola Real de Alexandria". Sua produção e contribuição era tão ampla que gera dúvidas sobre a verdadeira autoria de alguns trabalhos.

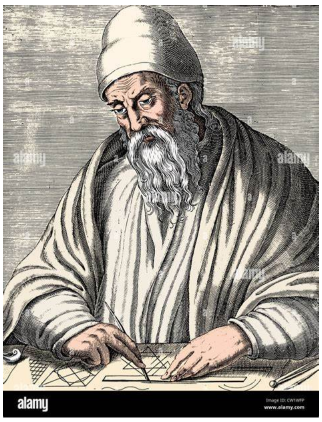

Figura 1: Imagem de Euclides de Alexandria. Fonte: internet

Sua principal obra é intitulada Stoichia (Os Elementos), composta por treze volumes, obra essa que é um compilado de tudo que tinha conhecimento relacionado à Matemática na época, tendo assuntos relacionados a Geometria, Teoria dos Números e Álgebra Elementar.

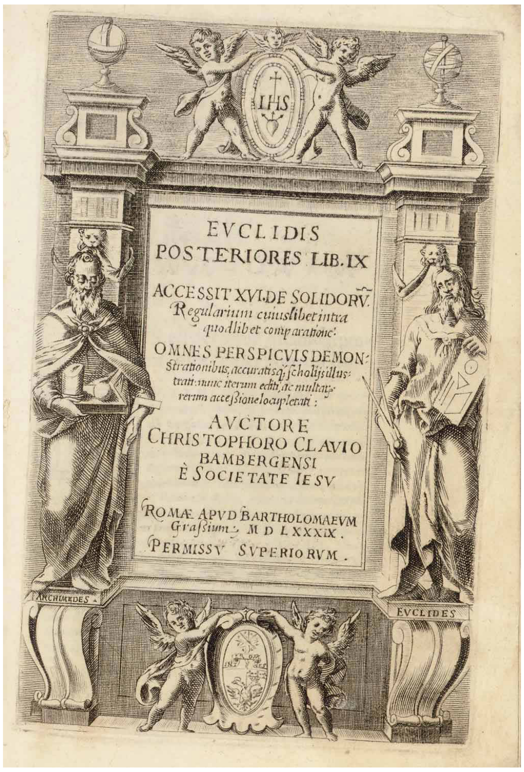

Figura 2: Capa do livro Os Elementos. Fonte: internet

Euclides de Alexandria nos proporcionou várias contribuições para o trabalho realizado. Foram atribuídos a ele: o método para avaliar o máximo divisor comum entre dois ou mais números, o teorema sobre a infinitude dos números primos, a regra para descobrir números perfeitos. Entre os volumes de Os Elementos", o livro VII nos traz o algoritmo euclidiano juntamente com o método de determinar *mdc* e ainda de verificar se dois números são primos entre si. Os livros VII, VIII e IX são sobre Teoria dos Números.

Lema 2. *(Lema de Euclides) Dados dois números inteiros a e b, com $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$ sendo q (quociente) e r (resto) únicos.*

Demonstração. Devemos mostrar a existência e a unicidade.
Demonstrando a existência.
Vamos considerar $b \in \mathbb{Z}$ tal que $b > 0$. Se $a \in \mathbb{Z}$, temos que a é múltiplo de b ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, logo:

$$b.q \leq a < b(q+1)$$

Se $bq \leq a$ então $a = bq + r, r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$,
Se $a < b.(q+1)$, temos $bq + r < bq + b$, logo $r < b$. Portanto, podemos afirmar que:

$$a = bq + r, 0 \leq r < b.$$

Provado a existência, agora devemos provar a unicidade. Vamos considerar a existência de q_1, q_2, r_1 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bq_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < b$ e $a = bq_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < b$. Se $r_1 \neq r_2$, como $\mathrm{bq}_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ o que implica que $b(q_2 - q_1) = r_1 - r_2$ logo $b|(r_1 - r_2)$ assim $b \leq (r_1 - r_2)$.
Mas se $b > r_1$ e $b > r_2$, logo $b > r_1 - r_2$, portanto temos uma contradição, logo $r_1 = r_2$.
Se $r_1 = r_2$ temos que $b(q_2 - q_1) = 0$ como $b \neq 0$, logo $q_2 - q_1 = 0$ o que implica que $q_2 = q_1$.

□

Exemplo 14. *Vamos determinar o quociente e o resto de cada divisão dada:*

1. *O quociente e o resto da divisão de 21 por 5 são* $q = 4$ *e* $r = 1$ *pois* $21 = 5.4 + 1$

2. *O quociente e o resto da divisão de* -10 *por* 3 *são* $q = -4$ *e* $r = 2$ *pois* $-10 = 3.(-4) + 2$

3. *O quociente e o resto da divisão de 30 por 7 são* $q = 4$ *e* $r = 2$ *pois* $30 = 7.4 + 2$

Exemplo 15. *Mostre que se* $a \in \mathbb{N}$ *então* a^2 *é da forma* $3k$ *ou* $3k + 1$*, com* $k \in \mathbb{N}$*.*
Solução: Seja $a \in \mathbb{N}$*, logo a pode ser escrito como:* $a = 3q$, $a = 3q + 1$ *ou* $a = 3q + 2$.
Se $a = 3q$ *então* $a^2 = 9q^2 = 3.(3q^2) = 3k$
Se $a = 3q + 1$ *então* $a^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3.(3q^2 + 2q) + 1 = 3k + 1$
Se $a = 3q + 2$ *então* $a^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3.(3q^2 + 4q + 1) + 1 = 3k + 1$

Lema 3. *Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demonstração. Temos que $a = bq + r$ logo $r = a - bq$. Se k é um divisor comum entre a e b, temos que $k|a, k|b$ e $k|r$. Como $a = bq + r$ temos que todo divisor comum de b e r é divisor comum de b e a. Portanto o conjunto de divisores de a e b é igual ao conjunto de divisores de b e r, logo $mdc(a, b) = mdc(b, r)$. □

Exemplo 16. *Vamos determinar o $mdc(525, 180)$.*
Vamos utilizar o resultado anterior para determinar o resultado:

$525 = 2.180 + 165$, $\quad mdc(525, 180) = mdc(180, 165)$,

$180 = 1.165 + 15$, $\quad mdc(180, 165) = mdc(165, 15)$,

$165 = 11.15 + 0$, $\quad mdc(165, 15) = mdc(15, 0) = 15$.

O último resto diferente de zero é o resultado, logo $mdc(525, 180) = 15$.

Exemplo 17. *Vamos determinar o $mdc(720, 340)$.*
Utilizando as divisões sucessivas

$720 = 2.340 + 40$, $\quad mdc(720, 340) = mdc(340, 40,$

$340 = 8.40 + 20$, $\quad mdc(340, 40) = mdc(40, 20)$,

$40 = 2.20 + 0$, $\quad mdc(40, 20) = mdc(20, 0) = 20$.

Logo, $mdc(720, 340) = 20$.

Teorema 4. *(algoritmo de Euclides): Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*, a \geq b$ e $a = bq + r$. Usando o algoritmo da divisão de forma sucessiva, temos que o $mdc(a, b)$ se reduz a achar o o $mdc(b, r)$.*

Demonstração. Fazendo as divisões sucessivas, temos:

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$$
$$b = r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4, 0 \leq r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}, r_{n+1} = 0$$

Ou seja, fazemos divisões sucessivas até o resto se tornar zero. Pelo lema anterior, temos: $mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_2, r_3) = ... = mdc(r_{n-1}, r_n)$. Como $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, temos que $r_n | r_{n-1}$, logo $mdc(r_{n-1}, r_n) = r_n$, concluímos assim que $mdc(a, b) = r_n$ onde r_n é o último resto não nulo.

□

Vamos apresentar abaixo um dispositivo prático para determinar o $mdc(a, b)$:

	q_1	q_2	q_3	q_4	...	...	q_n	$q_n + 1$
a	b	r_1	r_2	r_3	...	$r_n - 2$	$r_n - 1$	r_n
	r_1	r_2	r_3	r_4	...	...	r_n	0

Exemplo 18. *Determine o* $mdc(300, 125)$ *pelo dispositivo prático:*

	2	*2*	*2*
300	*125*	*50*	*25*
	50	*25*	*0*

Assim, $mdc(300, 125) = 25$

3 Equações Diofantinas Lineares Com Duas Incógnitas

Nesse capítulo será apresentado o conteúdo que será trabalhado na sequência didática. Iniciamos com a História do matemático que nomeou esse tipo de equação, Diofanto de Alexandria. Temos ainda a condição de existência de soluções para as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

3.1 Diofanto de Alexandria

Diofanto de Alexandria, segundo BOYER [2] foi um matemático grego que nasceu em Alexandria aproximadamente em 200 d.C., o mesmo é percursor da Teoria dos Números e sua principal obra é intitulada "Arithmetica"que é composta por 13 livros que apresentam problemas com soluções numéricas para equações. Entre os problemas podemos encontar soluções numéricas determinadas e indeterminadas, dando destaque as equações diofantinas. As informações referentes a vida de Diofanto são mínimas, o único dado pessoal se encontra em forma de problema:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 1996, p.121)

A equação que representa o enigma dado será:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Concluindo assim que ele viveu 84 anos.

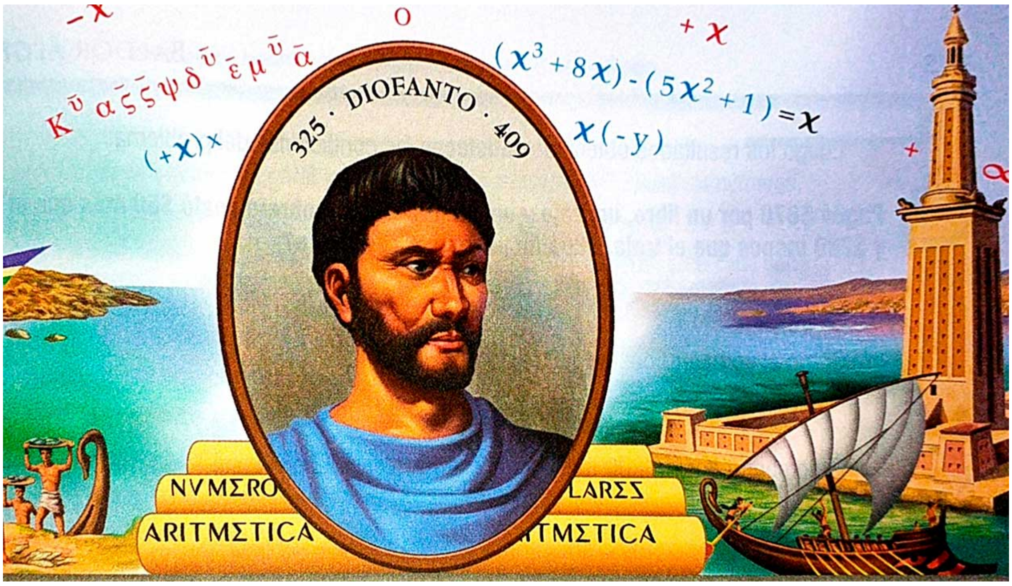

Figura 3: Diofanto de Alexandria. Fonte: Internet

Uma das equações que leva o nome de Diofanto é $x^n + y^n = z^n$, ele demonstrou que existem inúmeras soluções quando $n = 2$. No século XVII Pierre de Fermat (1601 - 1654) estabeleceu o "Último Teorema de Fermat"que afirma que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução no conjunto dos números inteiros quando $n > 2$. O "Último Teorema de Fermat"foi demonstrado apenas em 1994 pelo matemático britânico Andrew Wiles.

3.2 Condição de existência e soluções

As Equações Diofantinas Lineares surgem da necessidade de representar algebricamente situações problemas do nosso cotidiano. Foram equações estudadas pelo matemático grego Diofanto de Alexandria que restringiu as soluções destas ao conjunto dos números inteiros e com um foco voltado para duas incógnitas (x e y), cuja forma geral é: $ax + by = c$, onde a, b e $c \in \mathbb{Z}$. Com a restrição que a e b não podem ser, simultaneamente, nulos.

O grande questionamento é: como determinar uma solução inicial para uma equação diofantina linear?

A solução para as equações da forma $ax + by = c$, pode ser obtida por tentativa (escolhendo valores aleatórios até encontrar um valor que satisfaz a equação) ou pelo

Algoritmo de Euclides. Nesse capítulo vamos trabalhar com o método formal de resolução dessas equações.

Definição 7. *Dada uma Equação Diofantina Linear* $ax + by = c$*, um par de inteiros* (x_0, y_0) *será solução se* $ax_0 + by_0 = c$*.*

Exemplo 19. *Considere a Equação Diofantina Linear* $2x + 3y = 12$*, podemos determinar algumas soluções particulares:*

(*i*) *2.0 + 3.4 = 12,*

(*ii*) *2.3 + 3.2 = 12,*

(*iii*) *2.6 + 3.0 = 12,*

(*iv*) *2. (-3) + 3.6 = 12.*

Assim, os pares de inteiros (0,4), (3,2), (6,0) e (-3,6) são soluções da equação $2x + 3y = 12$*.*

Exemplo 20. *Considere a Equação Diofantina Linear* $5x - 2y = 11$*, podemos determinar algumas soluções particulares:*

(*i*) *5.1 - 2. (-3) = 11,*

(*ii*) *5.3 - 2. 2 = 11,*

(*iii*) *5.(-1) - 2. (-8) = 11.*

Assim, os pares de inteiros (1,-3), (3,2) e (-1,-8) são soluções da equação $5x - 2y = 11$

Exemplo 21. *Vamos resolver a Equação Diofantina* $2x + 4y = 11$*.*

Algebricamente podemos notar que não há solução, pois:

$2x + 4y = 11$ *que podemos escrever como* $2(x + 2y) = 11$ *que indica que não existe solução pois* 11 *é ímpar.*

A seguir vamos determinar uma condição necessária para que a equação

$$ax + by = c$$

tenha solução.

Teorema 5. *A Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, d divide c, onde $d = mdc(a, b)$.*

Demonstração. Vamos supor que $ax + by = c$ tenha solução, logo existem inteiros (x_0, y_0) tais que: $ax_0 + by_0 = c$ (**i**).
Tome $d = mdc(a, b)$.
Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = k_1.d$ e $b = k_2.d$ (**ii**)
Substituindo (**ii**) em (**i**):
$c = k_1.d.x_0 + k_2.d.y_0 = d(k_1.x_0 + k_2.y_0)$.
como $(k_1.x_0 + k_2.y_0) \in \mathbb{Z}$ logo d divide c

Agora vamos supor que $d|c$, logo existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $c = d.t$ (**iii**) ,
logo existem $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que:
$d = a.x_1 + b.y_1$, substituindo em (**iii**), temos:
$c = (a.x_1 + b.y_1).t$ logo $c = a.(t.x_1) + b.(t.y_1)$
Como $t.x_1$ e $t.y_1 \in \mathbb{Z}$, temos que $(t.x_1, t.y_1)$ é solução de $ax + by = c$.

□

Proposiçao 10. *Seja (x_0, y_0) solução particular da equação $ax + by = c$, com $mdc(a, b) = 1$. Então, as soluções $x, y \in \mathbb{Z}$ da equação são:*

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Se (x_0, y_0) é solução, logo $a.x_0 + b.y_0 = c$ (i).
Se (x, y) é solução, logo $a.x + b.y = c$ (ii)
De (i) e (ii), temos: $a.x_0 + b.y_0 = a.x + b.y = c$ logo temos que $a.(x - x_0) = b(y_0 - y)$ (iii)
Como $(a, b) = 1$, temos $b|(x - x_0)$, logo existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = bt$ substituindo em (iii), temos: $abt = b(y_0 - y)$ o que implica que $at = y_0 - y$, logo a solução de $a.x + b.y = c$ será $y = y_0 - at$, conforme o enunciado.
Por outro lado $x = x_0 + tb$ e $y = y_0 - ta$ é solução, pois: $ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta) = ax_0 + atb + by_0 - atb = ax_0 = by_0 = c$

□

Observação: Pela proposição acima podemos notar que a equação Diofantina $a.x + b.y = c$ quando $(a, b) = 1$ possui infinitas soluções.

Observação: Dada a equação $ax + by = c$ com $mdc(a, b) \neq 1$, sabemos que $mdc(a, b)|c$, logo podemos resolver a seguinte equação de forma equivalente:

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ onde}$$

$$\mathrm{a}_1 = \frac{a}{mdc(a,b)}, \quad \mathrm{b}_1 = \frac{b}{mdc(a,b)}, \quad \mathrm{c}_1 = \frac{c}{mdc(a,b)}$$

Exemplo 22. *Vamos resolver a equação* $3x + 4y = 10$.
Primeiramente a equação tem solução pois $mdc(3, 4) = 1$ *e* $1|10$.
A solução particular (x_0, y_0) *será encontrada pelo algoritmo de Euclides.*
$4 = 3.1 + 1$ *o que implica que* $1 = 4 - 3.1(*)$.
Multiplicando $(*)$ *por 10, temos:*

$$10 = 4.10 - 3.10$$

Uma solução particular da equação dada é $x_0 = -10$ *e* $y_0 = 10$*, logo a solução geral será dada por:*

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = -10 + 4t \\ y = 10 - 3t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 23. *Vamos resolver a equação* $6x + 10y = 14$.
A equação tem solução pois $mdc(6, 10) = 2$ *e* $2|14$. *Podemos resolver por meio da equação* $3x + 5y = 7$
Usando o Algoritmo de Euclides para encontrar uma solução particular.

$$5 = 3.1 + 2 \Longrightarrow 2 = 5 - 3.1$$
$$3 = 2.1 + 1 \Longrightarrow 1 = 3 - 2.1$$
$$1 = 3 - (5 - 3.1).1$$
$$1 = 2.3 - 5$$

logo 1 = 2.3 - 5 (multiplicando por 7)

7 = 3.14 - 5.7, logo $x_0 = 14$ *e* $y_0 = 7$ *é solução particular. E a solução geral é gerada por:*

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 14 + 5t \\ y = 7 - 3t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Falando sobre sua complexidade: Resolver Equações Diofantinas, especialmente quando não são lineares, pode ser bastante desafiador. Muitas vezes, técnicas avançadas e teorias profundas são necessárias, como teoria algébrica e a geometria aritmética. A não linearidade introduz complexidade, tornando sua resolução mais difícil que as lineares. Não existe um método geral que possa resolver todas as instâncias, cada equação pode exigir abordagens e técnicas específicas.

Provar que uma Equação Diofantina não possui soluções inteiras pode ser extremamente difícil. O Último Teorema de Fermat, por exemplo, levou mais de 350 anos para ser provado. Mas, independente de complexidade, essa é uma área rica e fascinante da Matemática, com profundas implicações teóricas e aplicações práticas. Seu estudo revela muito sobre a estrutura dos números inteiros e as relações entre eles.

3.3 Problemas envolvendo Equações Diofantinas

Nessa etapa vamos propor situações problemas que são modeláveis por Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, assim como as propostas de solução que podem ser utilizadas pelos professores da modalidade para a melhor compreensão do conteúdo ou no planejamento das suas aulas. A maioria das situações problemas abaixo foram criadas pela autora.

Problema 1) Determine todos os múltiplos positivos de 3 e todos os múltiplos positivos de 5 cuja soma é igual a 60. (*Retirado de VIEIRA, em [14], p.71, questão 4*)
Solução: Vamos escrever o problema em forma de equação diofantina
$3x + 5y = 60$
Devemos encontrar soluções tais que $x > 0$ e $y > 0$.
Temos que $mdc(3, 5) = 1$ e $1|60$, logo existe solução. Encontrando uma solução particular:

$$5 = 1.3 + 2 \Longrightarrow 2 = 5 \text{ - } 1.3$$
$$3 = 1.2 + 1 \Longrightarrow 1 = 3 \text{ - } 1.2$$
$$1 = 3 - 1.(5 - 1.3)$$
$$1 = 2.3 - 1.5$$

Assim, $1 = 2.3 - 1.5$ (multiplicando por 60)

$$3.120 - 5.60 = 60.$$

Logo uma solução particular é $x_0 = 120$ e $y_0 = -60$.
Vamos encontrar a solução geral

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120 + 5t \\ y = -60 - 3t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Agora vamos encontrar t que satisfaz $x > 0$ e $y > 0$
Para $x > 0$ temos $120 + 5t > 0$ logo $5t > -120$ assim $t > -24$
Para $y > 0$ temos $-60 - 3t > 0$ logo $-3t > 60$ assim $t < -20$
Portanto t pode ser igual a: $-21, -22$ ou -23
Para $t = -21$ temos $x = 15$ e $y = 3$
Para $t = -22$ temos $x = 10$ e $y = 6$
Para $t = -23$ temos $x = 5$ e $y = 9$

Problema 2) Podemos encontrar soluções positivas para a equação $6x + 7y = 8$?
Solução: Temos que $mdc(6, 7) = 1$ e como $1|8$ logo a equação tem solução inteira.
Vamos encontrar uma solução particular.
$7 = 1.6 + 1$ logo $1 = 7 - 1.6$ multiplicando por 8, temos:
$8 = 7.8 - 8.6$ logo $x_0 = -8$ e $y_0 = 8$ é solução particular.
Para encontrar solução geral, temos:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = -8 + 7t \\ y = 8 - 6t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x > 0$ e $y > 0$, logo $t > \frac{8}{7}$ e $t < \frac{8}{6}$.
Como não existe valor de t que satisfaz as condições $t \in \mathbb{Z}, t > \frac{8}{7}, t < \frac{8}{6}$, logo não há solução inteira e positiva para a equação dada.

Problema 3) Determinar todas as soluções inteiras e positivas da equação diofantina $16x + 5y = 21$.

Solução: Vamos determinar o $mdc(16, 5)$ pelo Algoritmo de Euclides.

$$16 = 3.5 + 1 \text{ logo temos que } mdc(16, 5) = mdc(5, 1),$$
$$5 = 5.1 + 0\ ,\ mdc(5, 1) = mdc(1, 0) = 1.$$

Assim $mdc(16, 5) = 1$ e $1|21$, portanto, a equação tem solução.
Encontrando uma solução particular:
$16 = 3.5 + 1$ logo $1 = 16 - 3.5$ (multiplicando por 21)
$16.21 - 5.63 = 21$, logo $x_0 = 21$ e $y_0 = -63$ é uma solução particular.
Solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 21 + 5t \\ y = -63 - 16t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Para $x > 0$ temos $21 + 5t > 0$ logo $5t > -21$ assim $t > -4,2$
Para $y > 0$ temos $-63 - 16t > 0$ logo $-16t > 63$ assim $t < -3,9$
Como $t \in \mathbb{Z}$ a única solução possível é quando $t = -4$.
Para $t = -4$ temos $x = 1$ e $y = 1$.

Problema 4) Encontrar todas as soluções da equação diofantina linear $10x - 8y = 20$.

Solução: Vamos determinar o $mdc(10, 8)$,
$10 = 2.8 + 2$ logo $mdc(10, 8) = mdc(8, 2)$,
$8 = 4.2 + 0$ logo $mdc(8, 2) = mdc(2, 0) = 2$.
Assim, $mdc(10, 8) = 2$ e $2|20$ logo existe solução. Resolver a equação $10x - 8y = 20$ é equivalente a resolver a equação $5x - 4y = 10$.
Encontrando uma solução particular,
$5 = 1.4 + 1$ logo $1 = 5 - 1.4$ (multiplicando por 10), temos:
$5.10 - 4.10 = 10$ assim, $x_0 = 10$ e $y_0 = 10$ é solução particular.
Vamos determinar a solução geral

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 - 4t \\ y = 10 - 5t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 5) Verificar se a equação diofantina $3x + 6y = 49$ tem solução inteira.
Solução: Como $6 = 2.3 + 0$, logo $mdc(3, 6) = 3$. Como $3 \not| 49$ a equação dada não possui solução no conjunto dos números inteiros.

.

Exemplo 6) Determine as soluções naturais para a equação diofantina linear
$30x - 12y = 60$.
Solução: Vamos determinar $mdc(30, 12)$

$$30 = 2.12 + 6 \text{ logo } mdc(30, 12) = mdc(12, 6)$$
$$12 = 2.6 + 0, \text{ assim } mdc(12, 6) = mdc(6, 0) = 6$$
$$\text{logo } mdc(30, 12) = 6 \text{ e } 6|60, \text{ portanto existe solução.}$$

Resolver a equação $30x - 12y = 60$ é equivalente a resolver a equação $5x - 2y = 10$.
Vamos encontrar uma solução particular,
$5 = 2.2 + 1$ logo $1 = 5 - 2.2$ (multiplicando por 10)
$5.10 - 2.20 = 10$, assim $x_0 = 10$ e $y_0 = 20$ é uma solução particular.
Vamos determinar a solução geral:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2t \\ y = 20 - 5t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Para soluções naturais, temos:
Para $x \geq 0$ temos $10 - 2t \geq 0$ logo $-2t \geq -10$ assim $t \leq 5$
Para $y \geq 0$ temos $20 - 5t \geq 0$ logo $-5t \geq -20$ assim $t \leq 4$
Logo a solução é:

$$\begin{cases} x = 10 - 2t \\ y = 20 - 5t \end{cases} t \in \mathbb{Z}, t \leq 4$$

Problema 7) Um cinema da cidade vendia um combo com pipoca e refrigerante por R\$ 50,00 e um combo com pipoca e suco por R\$ 40,00. Sabendo que o valor arrecadado com os combos no final do dia foi de R\$ 1200,00 determine a quantidade mínima de pessoas que compraram o combo.
Solução: A equação diofantina que representa o problema apresentado é:
$50x + 40y = 1200$
Calculando $mdc(50, 40)$, temos:

$$50 = 1.40 + 10 \text{ assim } mdc(50, 40) = mdc(40, 10)$$
$$40 = 4.10 + 0 \text{ logo } mdc(40, 10) = mdc(10, 0) = 10$$

Temos que $mdc(50, 40) = 10$ e $10|1200$, logo existe solução.
Resolver a equação $50x + 40y = 1200$ é equivalente a resolver a equação $5x + 4y = 120$
Vamos encontrar uma solução particular:

$$5 = 1.4 + 1 \text{ logo } 1 = 5 - 1.4 \text{ (multiplicando por 120)}$$
$$5.120 - 4.120 = 120,$$
$$\text{logo uma solução particular é } x_0 = 120. \text{ e } y_0 = -120.$$

Solução geral

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120 + 4t \\ y = -120 - 5t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \geq -30$ e $t \leq -24$.
Assim $t \in \mathbb{Z}; t \geq -30$ e $t \in \mathbb{Z}; t \leq -24$.
Assim, $t \in \{-30, -29, -28, -27, -26, -25, -24\}$
Vamos organizar uma tabela considerando Combo A (pipoca e refrigerante) e Combo B (pipoca e suco).

Valor de t	**x (Combo A)**	**y (Combo B)**	$x + y$
-30	0	30	30
-29	4	25	29
-28	8	20	28
-27	12	15	27
-26	16	10	26
-25	20	5	25
-24	24	0	24

Tabela 8: Soluções possíveis para o problema 7

Logo devemos considerar o valor mínimo de $x + y$, portanto no mínimo 24 pessoas compraram os combos.

Problema 8) Numa papelaria uma caneta custa R$ 2,00 e uma fita corretiva R$ 3,00. Sabendo que Suzana, durante a manhã, vendeu R$ 70,00 desses dois produtos, qual a quantidade mínima de produtos vendidos?

Solução: A equação diofantina que representa o problema apresentado é:
$2x + 3y = 70$. Como $mdc(2, 3) = 1$ e $1|70$, temos soluções inteiras.
Vamos determinar uma solução particular:
$3 = 1.2 + 1 \Longrightarrow 1 = 3 - 1.2$ (multiplicando por 70)
$70 = 3.70 - 70.2$, logo $x_0 = -70$ e $y_0 = 70$ é solução particular.
Encontrando a solução geral.

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = -70 + 3t \\ \\ y = 70 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}; t \geq 23,3$ e $t \leq 35$, logo $t \in \{24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$
Organizando a tabela:

Valor de t	**Canetas (x)**	**Fitas (y)**	$x + y$
24	2	22	24
25	5	20	25
26	8	18	26
27	11	16	27
28	14	14	28
29	17	12	29
30	20	10	30
31	23	8	31
32	26	6	32
33	29	4	33
34	32	2	34
35	35	0	35

Tabela 9: Soluções possíveis para o problema 8

O valor mínimo é quando $t = 24$. Foram vendidos, no mínimo 24 produtos.

Problema 9) Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível? (*Retirado de HEFEZ[7], p.107, questão 6.7*)

Solução: A equação diofantina que representa o problema apresentado é:
$4x + 2y = 400$.
Como $mdc(4, 2) = 2$ e $2|400$, temos soluções inteiras.
Resolver a equação $4x + 2y = 400$ é equivalente a resolver a equação $2x + y = 200$
Uma solução particular é $x_0 = 100$ e $y_0 = 0$.
A solução geral será dada por.

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 100 + t \\ \\ y = -2t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}; t \geq -100$ e $t \in \mathbb{Z}; t \leq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}; -100 \leq t \leq 0$.
A menor diferença será dada quando $x = y$ ou próxima a essa condição.
$x = y \Longrightarrow$100 + t = -2t$\Longrightarrow$3t = -100$, assim$t $\approx -33, 3$.
Vamos analisar os seguintes valores: $t = -32, t = -33, t = -34$
Para $t = -32$ temos $x = 68$ e $y = 64$.
Para $t = -33$ temos $x = 67$ e $y = 66$.
Para $t = -34$ temos $x = 66$ e $y = 68$.
Logo a menor diferença entre x e y se dá quando $t = -33$. Assim, há 67 coelhos e 66 galinhas.

Problema 10) De quantas maneiras pode-se comprar selos de R$ 3,00 e R$ 5,00 de modo que se gaste R$ 50,00? (*Retirado de HEFEZ[7], p.108, questão 6.10*)

Solução: A equação diofantina que representa o problema apresentado é:
$3x + 5y = 50$.
Como $mdc(3, 5) = 1$ e $1|50$, temos soluções inteiras.
Vamos determinar uma solução particular:

$$5 = 1.3 + 2 \text{ logo } 2 = 5 - 1.3,$$
$$3 = 1.2 + 1 \text{ logo } 1 = 3 - 1.2 = 3 - 1.(5 - 1.3),$$
$$\text{logo } 1 = 2.3 - 1.5 \text{ (multiplicando por 50).}$$

$50 = 3.100 - 50.5$, logo $x_0 = 100$ e $y_0 = -50$ é solução particular.
Encontrando a solução geral.

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 100 + 5t \\ y = -50 - 3t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}$;
t ≥ -20 e $t \in \mathbb{Z}$;
Assim, $t \leq -16,6$; logo $t \in \{-20, -19, -18, -17\}$:
Para $t = -20$ temos $x = 0$ e $y = 10$,
Para $t = -19$ temos $x = 5$ e $y = 7$,
Para $t = -18$ temos $x = 10$ e $y = 4$,
Para $t = -17$ temos $x = 15$ e $y = 1$.
Logo, existem 4 maneiras para comprar os selos.

Problema 11 (Caixa eletrônico): Paulo deseja retirar R$ 60,00 de um caixa eletrônico que possui notas de R$ 10,00 e R$ 20,00. De quais formas ele pode realizar esse saque?
Solução: A equação diofantina que representa o problema apresentado é:
$10x + 20y = 60$.
Como $mdc(10, 20) = 10$ e $10|60$, temos soluções inteiras.
Resolver a equação $10x + 20y = 60$ é equivalente a resolver a equação $x + 2y = 6$
É fácil ver que $x_0 = 2$ e $y_0 = 2$ é solução particular.
Encontrando a solução geral.

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}; t \geq -1$
e $t \in \mathbb{Z}; t \leq 2$, logo $t \in \{-1, 0, 1, 2\}$:
Para $t = -1$ temos $x = 0$ e $y = 3$,
Para $t = 0$ temos $x = 2$ e $y = 2$,
Para $t = 1$ temos $x = 4$ e $y = 1$,
Para $t = 2$ temos $x = 6$ e $y = 0$.
Assim, podemos fazer o saque das seguintes maneiras:

- Três cédulas de R$ 20,00;

- Duas cédulas de R$ 10,00 e duas cédulas de R$ 20,00;

- Quatro cédulas de R\$ 10,00 e uma cédulas de R\$ 20,00;

- Seis cédulas de R\$ 10,00.

Problema 12) Sandro deseja comprar uma caderneta que custa R\$ 9,00. Sabendo que Sandro dispõe apenas de cédulas de R\$ 2,00 e a vendedora possui cédulas de R\$ 5,00, é possível que aconteça a compra?

Solução: A equação que corresponde a situação problema é $2x - 5y = 9$.
Como o mdc(2,5) = 1 e 1|9, logo existe solução inteira.
Vamos determinar uma solução particular:
$5 = 2.2 + 1$ logo $1 = 5 - 2.2$ (multiplicando por 9).
$9 = 5.9 - 18.2$ logo $x_0 = -18$ e $y_0 = -9$ é solução particular.
Assim, a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = -18 - 5t \\ \\ y = -9 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Como condição temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, logo $t \in \mathbb{Z}; t \leq -\frac{18}{5}$ e $t \in \mathbb{Z}; t \leq -\frac{9}{2}$
Considerando $t \in \mathbb{Z}$, temos que $t \leq -5$. Fazendo $t = -5$ temos $x = 7$ e $y = 1$. Assim uma forma que torna a compra possível é: Sandro entrega 7 cédulas de R\$ 2,00 e recebe uma cédula de R\$ 5,00 de troco.

4 Sequência Didática para o Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos

A sequência didática apresentada nesse capítulo é uma sugestão para o 3º semestre da III etapa da Educação de Jovens e Adultos. Primeiramente vamos fazer uma retomada de conteúdos devido as peculiaridades desta modalidade de ensino. A introdução ao estudo das Equações Diofantinas se dará por meio da atividade intitulada "saques no caixa eletrônico", nessa etapa o aluno utilizará seus conhecimentos do cotidiano, sem se preocupar com as formalidades. Logo após é a etapa de formalização do conteúdo, definindo e caracterizando as Equações Diofantinas, fazendo uma ligação com a atividade inicial. Serão trabalhados os dois métodos de resolução desse tipo de equação (tentativa e erro e método prático). Por fim, teremos sugestões de atividades práticas para avaliar o desenvolvimento e a aprendizagem sobre o conteúdo proposto.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA		
Objetivo Geral: Resolver problemas que envolvam Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.		
Etapas	**Objetivos Específico**	**Tempo previsto**
1. Revisão dos pré requisitos.	• Revisar os conceitos de múltiplos e divisores. • Compreender a divisão euclidiana. • Calcular o MDC (Máximo Divisor Comum) entre dois ou mais números.	3 aulas 2 horas
2. Aplicação das Equações Diofantinas.	• Resolver situações problemas que envolvam saque em caixa eletrônico.	1 aula 40 minutos

3. Definição e método de resolução das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.	• Definir Equação Diofantina Linear com duas incógnitas; • Determinar solução para as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas; • Aplicar o método prático de resolução de situações problemas.	3 aulas 2 horas
4. Avaliação por meio de jogos.	• Estimar os conhecimentos adquiridos por meio de jogos.	1 aula 40 minutos
Tempo total previsto		8 aulas

Tabela 10: Síntese da sequência didática para o Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos

O tempo estimado para a realização da sequência didática é de 8 aulas, o que corresponde a cinco horas e vinte minutos de duração, levando em consideração o tempo estimado de aula da modalidade que é de 40 minutos.

4.1 Retomada de conteúdos básicos

A primeira etapa da sequência didática será uma retomada dos conteúdos do Ensino Fundamental que é indispensável para compreender o conceito e a resolução das Equações Diofantinas. Essa revisão é necessária devido as características existentes na modalidade de ensino escolhida para a aplicação da sequência didática. A previsão de conclusão da primeira etapa é de 3 aulas, o que corresponde a 2 horas de aula.

Passo 1: Retomada de conteúdo - Operações com conjuntos numéricos.

Cabe aqui uma rápida e simples revisão do conteúdo, levando em consideração que o mesmo se encontra no currículo para o 1° semestre do Ensino Médio. Aqui se encontram as duas principais operações com conjuntos numéricos.

Resolução de atividade:

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{5, 1, 7, 6, 9\}$, $C = \{2, 7, 4, 5\}$, $D = \{1, 9, 11\}$ e $E = \{1, 3, 5\}$, determine:

(a) $A \cup B$

(b) $C \cup E$

(c) $A \cup D$

(d) $B \cap C$

(e) $E \cap A$

Passo 2: Retomada de conteúdo - Múltiplos de um número inteiro.

Compreender os múltiplos ajuda a identificar os fatores de um número, que é importante para a resolução de equações e problemas que envolvam divisibilidade. Um conteúdo fundamental para resolver Equações Diofantinas, além de reforçar a compreensão da Matemática básica.

Resolução de atividade:

1) Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

(a) ( ) 10 é múltiplo de 20;

(b) ( ) 30 é múltiplo de 6;

(c) ( ) 51 é múltiplo de 17;

(d) ( ) 100 é múltiplo de 4;

2) Escreva os cinco primeiros múltiplos de:

(a) 3

(b) 5

(c) 7

(d) 11

Passo 3: Retomada de conteúdo - Divisores de um número inteiro.

Outro conteúdo indispensável para a resolução de Equações Diofantinas, além de ser uma base necessária para o estudo de tópicos mais avançados da Matemática.

Resolução de atividade:

1) Classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) ( ) 3 é divisor de 6;

(b) ( ) 10 é divisor de 5;

(c) ( ) 8 é divisor de 8;

(d) ( ) 1 é divisor de 17.

2) Vamos determinar os divisores de 60.

3) Vamos determinar os divisores de 12.

Passo 4: Retomada de conteúdo - Números primos.

Os números primos possuem propriedades únicas que são essenciais para entender a estrutura dos números inteiros e a teoria dos números. Aqui, podemos sugerir que os alunos façam pesquisas relacionadas ao conteúdo para aprofundar sobre o assunto.

Resolução de atividade:

1)Classifique os números abaixo como primo ou composto:

(a) 6

(b) 9

(c) 19

(d) 21

(e) 41

(f) 51

Passo 5: Retomada de conteúdo - Máximo Divisor Comum.

É uma aplicação direta da fatoração em números primos. Dependendo das características da turma que será aplicada a sequência didática, essa parte exigirá um pouco mais de atenção. Pode-se ainda fazer a resolução das atividades por meio de conjuntos numéricos e suas operações ou fatoração em números primos.

Resolução de atividade:

1) Usando o método que achar mais conveniente, determine:

(a) $mdc(20, 25)$

(b) $mdc(100, 40)$

(c) $mdc(300, 120)$

(d) $mdc(10, 42)$

Passo 6: Retomada de conteúdo - Divisão Euclidiana.

Resolução de atividade:

1) Determine a divisão euclidiana na forma $a = bq + r$, dados:

(a) $a = 15$ e $b = 2$

(b) $a = 20$ e $b = 6$

(c) $a = 70$ e $b = 15$

(d) $a = 100$ e $b = 21$

Observação: Todas as definições e condições utilizadas nessas etapas podem ser retiradas do texto desse mesmo trabalho, ou ainda de outros autores, de acordo com a preferência do professor.

4.2 Saques no Caixa Eletrônico

A segunda etapa consistirá na realização de uma atividade em que os alunos devem pensar em como podemos retirar cédulas de um caixa eletrônico, dadas algumas condições. A atividade pode ser realizada individualmente ou em duplas, com duração de 1 aula, que corresponde a 40 minutos.

Figura 4: Cédulas fictícias para usar na atividade. Fonte: internet

Descrição da atividade: Iniciamos entregando cédulas fictícias para os alunos e uma folha para anotações. Explicamos que só podem retirar os valores solicitados pela professora. A quantidade de cédulas entregues foram:

1. 10 cédulas de R$ 2,00;

2. 10 cédulas de R$ 5,00;

3. 10 cédulas de R$ 10,00;

4. 10 cédulas de R$ 20,00;

5. 10 cédulas de R$ 50,00;

Solicitação 1: Retirar R$ 60,00 do caixa eletrônico utilizando cédulas de R$ 5,00 e R$ 20,00.

Espera-se com essa solicitação que o aluno entenda como funcionará a atividade proposta, faça testes e tenha a percepção que não há uma única resposta para a situação dada.

Solicitação 2: Retirar R$ 150,00 do caixa eletrônico utilizando cédulas de R$ 50,00 e R$ 10,00.

Solicitação 3: Retirar R$ 70,00 do caixa eletrônico utilizando cédulas de R$ 20,00 e R$ 10,00.

Solicitação 4: Retirar R$ 16,00 do caixa eletrônico utilizando cédulas de R$ 2,00 e R$ 5,00.

Espera-se assim a ampliação do conceito trabalhado, uma maior agilidade na resolução dos itens e que o aluno consiga visualizar todas as soluções possíveis.

Solicitação 5: Retirar R$ 27,00 do caixa eletrônico utilizando cédulas de R$ 2,00 e R$ 10,00.

Nesse último item o aluno deve identificar que há a necessidade de determinar uma condição para que os saques eletrônicos possam ser realizados, conforme a solicitação indicada. Caso contrário, no mínimo deve constatar que não é possível realizar o saque solicitado.

4.3 Equações Diofantinas e Resolução de Problemas

A terceira etapa da sequência didática consiste na definição de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas e o método de resolução por meio da tentativa e erro. Logo após temos um trabalho voltado para o método prático de resolução de situações problemas. O tempo destinado para essa etapa é de 3 aulas que corresponde a 2 horas.

Passo 1: Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

Definição: É uma equação da forma $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$. É considerada solução dessa equação um par de inteiros (x_0, y_0) tal que $ax_0 + by_0 = c$

Exemplos:

1. Considerando a equação diofantina $3x + 2y = 16$, temos:
   (a) 3.4 + 2.2 = 16,
   (b) 3.0 + 2.8 = 16,
   (c) 3.2 + 2.5 = 16,
   (d) 3.6 + 2. (-1) = 16.

   Assim, os pares de inteiros (4,2), (0,8), (2,5) e (6,-1) são soluções da equação $3x + 2y = 16$.

2. Considere a equação diofantina $3x - 2y = 10$, temos:
   (a) 3.2 - 2.(-2) = 10,
   (b) 3.0 - 2.(-5) = 10,
   (c) 3.4 - 2.1 = 10,
   (d) 3.(-2) -2.(-8) = 10.

Assim, os pares de inteiros (2,-2), (0,-5), (4,1) e (-2,-8) são soluções da equação $3x - 2y = 10$.

Resolução de atividade:

1. Considerando a equação diofantina $4x + y = 10$, determine três soluções inteiras.

2. Considerando a equação diofantina $3x - 4y = 15$, determine três soluções inteiras.

3. Determine uma solução inteira para a equação diofantina $2x + 4y = 11$.

Passo 2: Método prático de resolução

Definição: Dada uma equação diofantina $ax + by = c$, com $mdc(a, b) = 1$ e considerando (

uma solução particular $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, podemos determinar a solução geral:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Condição de existência: Uma equação diofantina $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$

tem solução se $d|c$, sendo $d = mdc(a, b)$.

Retomando o problema anterior (Passo 1) $2x + 4y = 11$, temos que $mdc(2, 4) = 2$ e 2 não divide 11. Logo a equação não tem solução no conjunto dos números inteiros.

Vamos fazer exemplos com resoluções detalhadas:

1. Determine a solução geral da equação diofantina $3x + y = 9$.

   Etapa I - Verificando se existe solução:
   $mdc(3, 1) = 1$ e $1|9$, logo existe solução.

   Etapa II - Vamos encontrar uma solução particular utilizando a divisão euclidiana.

   $a = 3$ e $b = 1$ temos que $3 = 1.3 + 0$

   Comparando $\begin{cases} 1.3 + 0 = 3 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

   Vamos multiplicar a primeira expressão por 3.

$$\begin{cases} 3.3 + 0 = 9 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Verificamos assim que $x_0 = 3$ e $y_0 = 0$ é solução particular.

Observação: Podemos determinar uma solução particular por meio da tentativa e erro.

Etapa III - Determinando a solução geral:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$$

2. Determine a solução geral da equação diofantina $3x + 6y = 12$:

   Etapa I- Verificando se existe solução:
   $mdc(3, 6) = 3$ e $3|12$, logo existe solução.

   Etapa II- Vamos encontrar uma solução particular.
   $mdc(3, 6) = 3 \neq 1$ logo podemos "simplificar"a equação por 3.

   Vamos resolver a equação $x + 2y = 4$.
   É evidente que $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ é solução particular da equação dada.

   Etapa III- Determinando a solução geral:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$$

3. Determine a solução geral da equação diofantina $3x + 9y = 14$.
   Etapa I - Verificando se existe solução:

$mdc(3,96) = 3$ e $3 \not| 14$, logo a equação dada não possui solução inteira.

Passo 3: Resolução de Problemas.

Problema 1- O cinema de um shopping de Goiânia disponibilizou ingressos de R$ 10,00 para o período vespertino e R$ 15,00 para o período noturno. Sabendo que a bilheteria rendeu R$ 1.200,00, determine de quantas maneiras podem ter vendido os ingressos.
Etapa I - Escrever o problema algebricamente.

$$10x + 15y = 1.200.$$

Identificando as variáveis: sendo x a quantidade de ingressos vendidos que custam R$ 10,00 e y a quantidade de ingressos vendidos que custam R$ 15,00.

Etapa II - Verificando se existe solução:
$mdc(10,15) = 5$ e $5|1200$, logo existe solução inteira.

Etapa III - Vamos encontrar uma solução particular:
Como $mdc(10,15) = 5$ vamos "simplificar"a equação por 5.

$$10x + 15y = 1200 \Longrightarrow 2x + 3y = 240$$

Usando a divisão euclidiana, temos:
$3 = 2.1 + 1 \Longrightarrow 1 = 3 - 2.1$ (multiplicando por 240)
240 = 3.240 - 2.240, logo $x_0 = -240$ e $y_0 = 240$ é solução particular.

Etapa IV - Determinando a solução geral:

$$\begin{cases} x = x_0 + b.t \\ y = y_0 - a.t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} x = -240 + 3t \\ y = 240 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Etapa V - Condições necessárias:
Como x e y são quantidades de ingressos vendidos, temos como condições necessárias $x \geq 0$ e $y \geq 0$, assim temos que:

$t \geq 80$ e $t \leq 120$. Logo $t \in \mathbb{Z}$ com $80 \leq t \leq 120$.

Etapa VI - Analisando as condições obtidas e finalizando a resposta.
A quantidade de maneiras de vender os ingressos depende da quantidade de valores que t pode assumir. Como $t \in \mathbb{Z}$ com $80 \leq t \leq 120$, temos 41 maneiras que podem ser vendidos os ingressos.

Abaixo temos algumas situações problemas como sugestão para trabalhar com a modalidade de ensino na qual é destinada essa trabalho.

Problema 2- Na recepção de uma clínica veterinária se encontram cães e gatos. Sabemos que há 60 patas desses animais. Determine quantos cães e gatos se encontram na recepção sabendo que a diferença entre a quantidade de animais é a menor possível.

Problema 3- Na turma de Josiane há 25 alunos. A professora de matemática deseja organizar grupos com 2 ou 3 integrantes. De quantas maneiras a professora poderá organizar os grupos?

Problema 4- Numa papelaria, uma borracha custa R\$ 2,00 e um apontador custa R\$ 3,00. Sabendo que Lydia gastou exatamente R\$ 26,00 com esses itens, determine a quantidade de borracha e apontador que Lydia comprou, sabendo que a diferença entre essas quantidades é a menor possível.

Problema 5- Tiago deseja retirar R\$ 70,00 do caixa eletrônico que possui cédulas de R\$ 20,00 e R\$ 10,00. De quantas formas possíveis Tiago pode realizar esse saque?

Problema 6- Determine os múltiplos positivos de 2 e 5 cuja soma seja igual a 30.

Problema 7- Numa loja o preço de um modelo de sandália é de R\$ 60,00 e o preço de um tênis é de R\$ 50,00. Qual o mínimo de pares vendidos de forma que a loja tenha um lucro de R\$ 550,00?

Problema 8- Em um grupo de amigos do 6º ano, alguns integrantes possuem 11 anos e os demais integrantes 12 anos. Sabendo que a soma das idades equivale a 93 anos, quantos integrantes têm esse grupo?

4.4 Adaptação do jogo africano Seixos

A quarta etapa consiste num método diferente de avaliar se os objetivos propostos ao longo da sequência didática foram alcançados. Será realizada por meio de jogo, adaptado pela autora. Seixos é um jogo africano que faz referência ao "plantio"e trabalha com o princípio da contagem. O tabuleiro normalmente dá referência a multiplicação.

Figura 5: Tabuleiro de Seixos. Fonte: RODRIGUES, em [12]

Para trabalhar com a adição, basta trocar a operação no centro do tabuleiro. No trabalho em questão a adaptação foi realizada para avaliar os conhecimentos adquiridos por meio das equações diofantinas lineares. Os números que aparecem no jogo foram substituídos por equações.

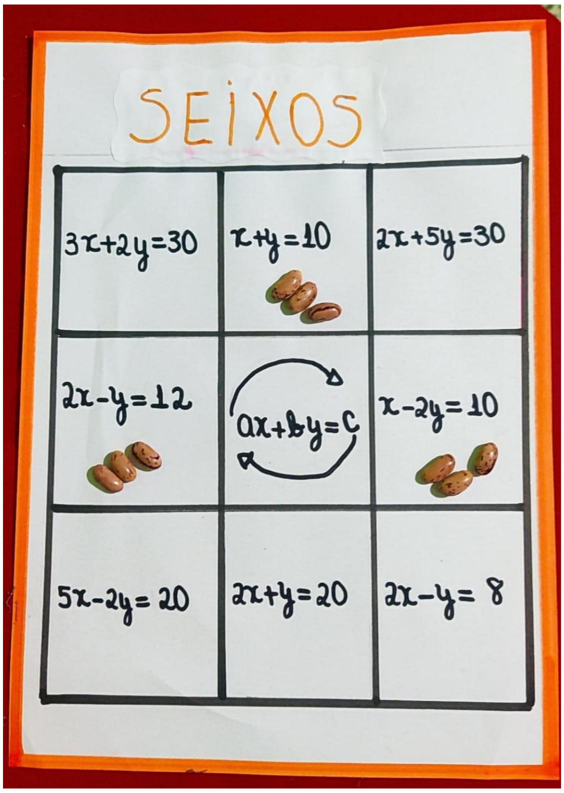

Figura 6: Seixos adaptado. Fonte: autora

Material que pode ser produzido o jogo: normalmente os jogos africanos são produzidos com madeira, mas, devido a alto custo, podemos adaptar para a realidade em sala de aula, utilizando papelão ou papel A_4. Ainda precisamos de nove peças menores que pode ser: sementes, pedras, tampa de garrafa, grãos diversos.

Regras do jogo:

1. O jogo será jogado em duplas;
2. A escolha de quem inicia se faz de forma aleatória, já que isso não interfere no resultado final;
3. As nove peças (conhecidas como sementes) são agrupadas a cada três sementes e colocadas em três casas do tabuleiro aleatoriamente;
4. O jogador que inicia escolhe uma das casas (que possui sementes) e distribui uma a uma no sentido horário;

5. Na casa onde a última semente parar o jogador conta a quantidade de sementes na casa (n). Logo após deve definir se n será o valor de x ou y da equação diofantina da casa.

6. Se o jogador considerar $n = x$ deve encontrar o valor de y.

7. Se o jogador considerar $n = y$ deve encontrar o valor de x.

8. O valor encontrado (de x ou y) é a pontuação do jogador na rodada, sendo que essa pontuação pode ser positiva, negativa ou zero;

9. O valor encontrado pelo jogador deve ser um número inteiro, caso contrário, o adversário ganha 5 pontos.

10. Logo, a estratégia e cálculos iniciam antes mesmo da distribuição de sementes.

11. Ganha o jogador que somar mais pontos em cinco rodadas;

12. Os cálculos podem ser manuscritos ou mentais.

5 Relato de experiência

Este relato de experiência é resultado da aplicação de uma sequência didática (apresentada no capítulo 4), no Ensino Médio da modalidade de ensino Educação de Jovens e Adultos. O trabalho foi realizado no final do ano de 2023 numa cidade que se situa no interior do estado de Goiás. Foram selecionados seis alunos com diversas idades para participar, constando um total de oito aulas com acompanhamento.

O grande objetivo foi introduzir um conceito desafiador da Teoria dos Números, enquanto estimulava as habilidades voltadas para a resolução de problemas. Vale ainda ressaltar a análise do desempenho dos alunos mediante a aplicação da sequência didática proposta, descrevendo suas principais potencialidades e dificuldades ao longo do processo.

No contexto de ensino apresentado, busquei uma abordagem mais dinâmica e colaborativa entre os participantes, desde a retomada dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental até a formalização dos conceitos necessários para a resolução dos problemas. Na sala de aula forneci uma apostila com a teoria e as atividades aplicadas ao longo do processo e um ambiente propício para a aplicação das atividades que foram realizadas em duplas - saque no caixa eletrônico e a adaptação do jogo Seixos.

O estudo dos pré-requisitos no início da sequência didática foi um dos pontos positivos que resultou em um ganho de tempo para a etapa de definição e resolução das Equações Diofantinas. Ponderamos nessa etapa o fato de que os alunos da modalidade de ensino escolhida, normalmente se encontram fora do sistema de ensino por algum tempo.

A revisão dos conceitos matemáticos pertinentes para trabalhar com equações diofantinas foi realizada por meio de aula expositiva dialogada e resolução de atividades. Nessa etapa grande parte dos alunos não recordaram dos conceitos que trabalhamos, no entanto, rapidamente entenderam e conseguiram realizar as atividades propostas. Ao longo do processo, observei um aumento significativo na participação e na confiança dos alunos com relação à sequência proposta. Vale ressaltar a memória curta dos alunos com relação aos conteúdos estritamente teóricos, uma dificuldade a ser trabalhada e aperfeiçoada ao longo das etapas propostas.

Tendo como próxima atividade o saque no caixa eletrônico, no intuito de tornar o conteúdo matemático mais tangível e envolvente para os alunos. No seu desenvolvimento observei uma intensa colaboração entre os alunos. Eles discutiram ideias, comprometeram-se, respeitaram as contribuições de cada participante. Os participantes inicialmente receberam figurinhas de cédulas para manipular, até que houve a internalização do conceito.

O grupo ao se deparar com uma situação que não havia solução, gerou uma intensa movimentação, na busca por argumentos para justificar e garantir que a situação de fato não tinha resposta possível. Ainda acreditando que existia algum artifício, levaram o problema e as orientações da dinâmica realizada para as suas respectivas turmas, envolvendo assim um grupo maior na busca pela solução.

De fato, ao levarem a situação para os demais alunos da Unidade Escolar, os integrantes da equipe mostraram uma notável melhoria ou despertaram a habilidade da comunicação, tendo em vista que precisam descrever a situação que eles buscavam solucionar. E ainda podemos destacar o fato de que os alunos que estavam sendo mediados pela pesquisadora, se tornaram mediadores momentâneos. A resposta para essa situação proposta aconteceu no dia posterior.

O desenvolvimento da atividade do caixa eletrônico facilitou no momento de introduzir a definição de equações diofantinas e o método de resolução por tentativa e erro. Mostrei aos alunos exemplos simples de resolução e fazendo associação as ideias associadas a dinâmica anterior, sempre os desafiando na resolução. Como já era esperado, tiveram dificuldades nas primeiras questões mas, à medida que avançamos com situações mais complexas, houve uma evolução nas estratégias e raciocínio.

A utilização do jogo como método avaliativo foi eficaz e encarado como uma novidade pelos participantes. O seu uso estimulou o cálculo mental e a estratégia para gerar a melhor pontuação possível em cada rodada. Nessa etapa fiquei impressionada com o desempenho, compromisso, envolvimento e a concentração com a atividade proposta, mostrando que os conceitos trabalhados anteriormente foram compreendidos.

Assim, além de consolidar os conceitos apresentados, proporcionou aos alunos demonstrar se compreenderam os conceitos matemáticos. Eles expressaram maior confiança em suas novas habilidades matemáticas e, mais uma vez, utilizaram o conceito da atividade "saque no caixa eletrônico"como estratégia para resolver as equações encontradas na adaptação do jogo Seixos.

Durante toda aplicação da sequência didática, os integrantes enfrentaram os desafios coletivamente, debatendo e trocando ideias, colaborando de forma respeitosa, discutindo estratégias e possibilidades na tentativa de solucionar os problemas juntos, compartilhando diversas abordagens da resolução dos problemas.

Essa experiência destacou a importância de estimular os alunos com conceitos desafiadores, ao mesmo tempo em que oferece apoio, recursos e orientação adequada para facilitar a sua compreensão. Pretendo continuar explorando abordagens que envolvam teoria e práticas interativas para o ensino da Matemática, reconhecendo o valor de envolver os alunos em atividades que geram reflexão sobre situações práticas para promover uma aprendizagem mais consistente.

6 Considerações Finais

Esperamos que o trabalho possa auxiliar professores de Matemática que ministram aulas para o Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos, e ainda evidenciar os alunos desta modalidade de ensino, afim de que também possam almejar uma boa formação acadêmica. E que o leitor tenha uma nova concepção quanto ao estudo do conteúdo proposto.

A sequência didática apresentada possui partes teóricas, indispensável para o processo de ensino-aprendizagem, e ainda a aplicação do conteúdo proposto por meio de resolução de problemas, situações cotidianas (saque no caixa eletrônico) e o uso de jogos como um método de avaliação, um manual com diversidades que pode ser utilizado de forma integral ou parcialmente.

A modalidade de ensino escolhida é uma iniciativa essencial para garantir que todos tenham acesso à educação ao longo da vida, independente de idade ou histórico educacional prévio. Ao mesmo tempo podemos ressaltar que esse alunado possui metas ou precisam de conhecer as possibilidades que lhes são permitidas, que passam longe de simplesmente concluir o Ensino Médio.

Para o desenvolvimento da sequência didática foi realizado um estudo detalhado sobre a Educação de Jovens e Adultos e o currículo vigente para um melhor entendimento de como introduzir as Equações Diofantinas de forma dinâmica e objetiva. As habilidades trabalhadas no Ensino Fundamental, que constam no Currículo Referência do estado, se tornaram nosso fundamento para a ampliação dos conceitos no Ensino Médio.

A sequência didática foi uma ferramenta essencial para garantia de um ensino organizado e eficaz, permitindo com que os alunos construíssem conhecimento de forma lógica e progressiva. Ao longo do estudo para elaboração da parte teórica, desenvolvimento das atividades e até a aplicação das mesmas, foi um processo valioso e produtivo. Sendo as Equações Diofantinas um campo fascinante e desafiador para a Matemática. Para complementar o trabalho realizado, vale ressaltar que ao aumentar a quantidade de incógnitas, sua resolução se torna instigadora pois, em muitos casos, não há métodos para encontrar todas as soluções ou para demonstrar que não existe solução inteira.

A chave está em adaptar as metodologias às necessidades dos alunos, oferecendo suporte constante e valorizando cada avanço. Essa experiência reforçou minha crença no potencial de cada indivíduo para aprender e crescer, independente da idade ou do ponto de partida, assim como a modalidade de ensino que o sujeito se encontra. É importante buscar a confiança dos alunos em sua capacidade de aprender Matemática e utilizar esses conhecimentos em situações diversas.

Referências

[1] BORGES, F. V. A., *Equações Diofantinas Lineares em duas incógnitas e suas aplicações, Goiânia, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.*

[2] BOYER, C. B., História da Matemática; tradução Elza F. São Paulo: EDGARD BLUCHER LTDA, 3º Edição (1996).

[3] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, *Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 12 mar. 2024.*

[4] BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 23 dez. 1996.

[5] BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais. ensino médio. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ matemática Acesso em 12 de nov. de 2023.*

[6] GOIAS, Secretaria de Estado da Educação. Reorientação Curricular do 6º ao 9º ano. Currículo em Debate. Caderno 3. Goiânia: 2005

[7] HEFEZ, A., Aritmética. SBM, (Coleção PROFMAT) - Rio de Janeiro, (2016).

[8] OLIVEIRA, M. M., *Sequência didática interativa no processo de formação de professores. Petrópolis, RJ: Vozes (2013).*

[9] OLIVEIRA, S. B., As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio. 2006. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[10] POZO, J. I., *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, (1998).*

[11] *Resolução CNE/CEB nº. 2 de 11 de setembro de 2001. Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica. Brasília: MEC, 2001.*

[12] RODRIGUES, S. J. R., O jogo pedagógico Seixos: Uma análise piagetiana do desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, Goiânia, Dissertação, 2020.

[13] YIN, R. K., *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos.*, *Porto Alegre: Bookman, 2º Edição (2001).*

[14] Vieira A. C., Fundamentos de Algebra I; Belo Horizonte: Editora UFMG (2001).