Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

NEUTON XAVIER DE OLIVEIRA

DINÂMICAS DE JOGOS APLICADAS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Goiânia-GO
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação   [ ] Tese   [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Neuton Xavier de Oliveira

3. Título do trabalho

Dinâmicas de jogos aplicadas no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade na Educação Básica

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/09/2024, às 17:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Neuton Xavier De Oliveira**, **Discente**, em 04/09/2024, às 17:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4787717** e o código CRC **FA429C76**.

Referência: Processo nº 23070.037638/2024-53 SEI nº 4787717

NEUTON XAVIER DE OLIVEIRA

DINÂMICAS DE JOGOS APLICADAS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior

Goiânia-GO
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Neuton Xavier de
Dinâmicas de jogos aplicadas no ensino de análise combinatória e probabilidade na educação básica [manuscrito] / Neuton Xavier de Oliveira. - 2024.
88 f.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.
Bibliografia.
Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Matemática. 2. Combinatória. 3. Probabilidade. 4. Raciocínio lógico. I. Júnior, Valdivino Vargas, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **20** da sessão de Defesa de Dissertação de Neuton Xavier de Oliveira, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte e seis dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro, às 15:00h, no Auditório do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Os jogos matemáticos como contribuidores do ensino da Matemática na educação básica"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG) e o membro titular externo **o** Professor Doutor Éder Silva de Brito (IFG- Anápolis). Durante a arguição os membros da banca sugeriram a alteração do título do trabalho para "**Dinâmicas de jogos aplicadas no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade na Educação Básica**". A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e seis dias do mês de agosto de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/08/2024, às 14:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/09/2024, às 16:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Éder Silva de Brito**, **Usuário Externo**, em 02/09/2024, às 19:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Referência: Processo nº 23070.037638/2024-53 SEI nº 4709560

Dedico este trabalho a Deus e à minha família.

Agradecimentos

- A DEUS, por ter me concedido saúde e força para superar as dificuldades;
- Ao corpo docente da UFG / IME, por ter compartilhado conhecimentos tão importantes para a minha formação;
- Ao meu orientador, Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior, pela dedicação e paciência na correção e orientação para a boa execução deste trabalho;
- À minha família pelas palavras de incentivo que me impulsionaram seguir adiante;
- E a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito dessa minha empreitada.

“Tanto que fazer! E fizemos apenas isto. E nunca soubemos quem éramos, nem para quê.”

Cecília Meireles,

.

Resumo

Oliveira, Neuton Xavier de. **DINÂMICAS DE JOGOS APLICADAS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. Goiânia-GO, 2024. 88p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho está voltado para o desenvolvimento de propostas, para os anos finais do Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio, buscando implementar o ensino de conceitos básicos de combinatória em sala de aula, utilizando jogos matemáticos que desenvolvam o raciocínio lógico e que explorem, por meio de aplicações desafiadoras, o ensino de análise combinatória e da probabilidade. Tem como um dos objetivos tornar o ensino da matemática menos mecânico e mais estimulante, chamando o aluno para ser parte ativa do processo de ensino-aprendizagem, por meio de algumas dinâmicas aplicadas em sala de aula, com a intervenção do professor.

Palavras–chave

Matemática; Combinatória; Probabilidade, Raciocínio lógico

Abstract

Oliveira, Neuton Xavier de. **Mathematics, Combinatorics, Probability, Logical reasoning**. Goiânia-GO, 2024. 88p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work is aimed at developing proposals for the final years of Elementary School II and High School, seeking to implement the teaching of basic concepts of combinatorics in the classroom, using mathematical games that develop logical reasoning and explore, through challenging applications, teaching combinatorial analysis and probability. One of its objectives is to make the teaching of mathematics less mechanical and less discouraging, calling on the student to be an active part of the teaching-learning process, through some dynamics applied in the classroom, with the intervention of the teacher.

Keywords

Mathematics, Combinatorics, Probability, Logical reasoning

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Neste trabalho buscamos desenvolver o ensino de análise combinatória e probabilidade, aplicados ao Ensino Fundamental e Ensino Médio, utilizando da formulação de alguns jogos explorados em sala de aula.

Muitas vezes o ensino da Matemática não é bem assimilado pelos alunos em geral, ou por terem dificuldades específicas ou mesmo porque os alunos já trazem da Matemática o estigma de que é uma disciplina difícil. Dessa forma, buscamos transmitir os conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade por meio de atividades lúdicas e descontraídas, através da aplicação de alguns jogos.

O ensino de combinatória, pouco explorado no Ensino Médio, muitas vezes é abordado como um conjunto de fórmulas, aplicadas mecanicamente, sem uma análise mais aprofundada. Mas o aluno deve ser levado a questionar de onde vêm tais fórmulas e um ensino-aprendizagem desafiador considera envolver o aluno como parte ativa do seu aprendizado, levando-o a tomar decisões acertadas diante dos problemas matemáticos.

Nesse propósito de levar o aluno a pensar soluções sem precisar decorar fórmulas, desenvolve-se o estudo do princípio multiplicativo, inclusive os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), assim recomenda:

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (Brasil, 1998, p. 52).

A grande importância da utilização de jogos na construção de uma abordagem criativa, é bem destacada pelo Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluçıes vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situaçıes sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação;sem deixar marcas negativas (Brasil, 1998, p. 46).

Diante do exposto acima, buscamos aliar a aplicação de jogos ao ensino da combinatória e ao desenvolvimento do raciocínio lógico, com propostas que despertem a atenção do aluno, desafiando-o a buscar, com criatividade, saída para problemas propostos.

O presente trabalho encontra-se organizado em três capítulos: o primeiro destinado à História da Probabilidade e Probabilidade no Ensino Médio. No Capítulo 2 apresentamos o Referencial Teórico discorrendo sobre Análise Combinatória e Probabilidade. Já no Capítulo 3 propomos quatro dinâmicas: montagem de tabelas de campeonato de futebol, campo minado, jogos envolvendo contagem de dedos e contagem no jogo de Poker.

Por fim apresentamos as considerações finais sobre o trabalho aqui apresentado.

CAPÍTULO 1

Probabilidade

1.1 História da Probabilidade

Para Viali (2008, p.143, apud Calabria e Cavalari, 2013, p.4) a probabilidade pode ser conceituada como "[...] o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel preponderante" (Viali, 2008, p.143). Ainda de acordo com Viali (2008, p.144), entende-se por "acaso" como "[...] um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno."

Na Antiguidade, com o objetivo de prevenir riscos de naufrágios em rotas com altos índices de acidentes, os comerciantes marítimos mesopotâmicos e fenícios já se debruçavam sobre a análise do "acaso" (Silva, s/d).

Para Melo (2017, p.22) "Diante do exposto, percebe-se que originalmente, o cálculo de probabilidade era voltado para a previsão de ganhar em jogos de azar. Nos dias atuais, a probabilidade está frequente em diversas áreas como na Economia, Informática, Física, Biologia".

Para Calabria e Cavalari (2013, p.8, apud SILVEIRA, 2001):

> Os primeiros cálculos probabilísticos foram realizados por estudiosos italianos dos séculos XV e XVI, dentre os quais destacamos frei Luca Pacioli (1445 - 1517), Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles realizaram estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar nos jogos de azar, mas não apresentaram teoremas que se baseassem em alguma teoria.

Considera-se, pois, que a origem da probabilidade remonta à Idade Média, nascendo da preocupação voltada para os jogos de azar. Destacam-se as questões postas a Pascal (1623-1662) pelo célebre cavaleiro Chevalier Méré; tais questões eram mais voltadas para a parte teórica da probabilidade. Importante avanço para o estudo da probabilidade ocorreu quando os matemáticos franceses Blaise Pascal

(1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665) trocaram correspondências buscando uma solução matemática para o jogo da divisão dos pontos, em caso de jogos interrompidos, chegando ambos à uma solução para tal desafio.

Para Calabria e Cavalari (2013, p.10) "Este problema foi apresentado a Pascal por Antoine Gombauld (1610 - 1685), um homem que ganhava a vida jogando e era conhecido como cavaleiro de Méré". As setes cartas trocadas entre ambos, a princípio com posições divergentes para a solução, ao final trouxeram ideias convergentes, onde Pascal atribui a Fermat o mérito pela solução do problema dos pontos.

Para Calabria e Cavalari (2013, p.44):

> Destacamos que Huygens é considerado o primeiro cientista a apresentar de forma sistemática os problemas já discutidos por Pascal e Fermat, adotando regras e concedendo a primeira ideia de expectativa matemática (cálculo da quantidade média de perdas ou ganhos) (DAVID, 1962).

De acordo com Calabria e Cavalari (2013, p.47):

> Destacamos que o suíço James Bernoulli (1654 - 1705), na obra póstuma intitulada Ars Conjectandi, datada de 1713, apresenta uma reedição comentada do tratado de Huygens e expõe a solução de seus problemas, elabora considerações sobre a teoria de permutações e combinações e, ainda, propõe a aplicação da Teoria das Probabilidades a situações econômicas e morais (Todhunter, 1965).

As contribuições de Bernoulli destacaram os grandes números[1], abordando as combinações, permutações e a classificação binomial. Laplace (1749-1827) desenvolveu a regra de sucessão e Gauss (1777- 1855) estabeleceu o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades.

Para De Paula, Samira Moreira (2015, p.13) "Perpassando os trabalhos de Leibniz (1646-1716), Jaques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1701), a teoria das probabilidades foi sendo desenvolvida". No entanto, segundo Boyer (1196, p. 334, apud De Paula):

> A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774, ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico livro Teoria Analítica das Probabilidades, de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis.

[1]Foi através da Lei dos Grandes Números, formulada por Bernoulli, que se relacionou o conceito frequencista de probabilidade com o conceito clássico de probabilidade: para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de cada um desses resultados tende a estabilizar.

1.2 Probabilidade no Ensino Básico

Começamos analisando o que trazem a respeito desse assunto as seguintes legislações: Lei de Diretrizes Bases da Educação Nacional-LDB (Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996); Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's); Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio (BNCC); Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), e, especialmente o que traz sobre o tema o Currículo Referência da Rede Estadual de Educação do Estado de Goiás.

No PCN de 1997 (p.36), o bloco Tratamento da Informação destaca as noções de estatística, de probabilidade e de combinatória, dizendo que:

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

É fato que os PCN's não tem natureza normativa. Todavia, o ensino de probabilidade e estatística no ensino fundamental é recomendado no bloco "Tratamento da Informação". Por outro lado, esta abordagem em sala de aula nem sempre ocorre de forma efetiva, sendo na verdade aplicada com maior efetividade no Ensino Médio. No Ensino Fundamental ocorre uma abordagem superficial, limitando-se ao estudo de tabelas, gráficos e médias; e mesmo assim com ênfase nos anos finais.

De acordo com Carvalho (2004, p.2), quanto ao ensino da probabilidade no Ensino Fundamental, conforme sugerido pelo PCN:

> Os PCN's sugerem que nesses dois primeiros ciclos sejam desenvolvidas atividades relacionadas a assuntos cotidianos aos alunos, sempre partindo de situações-problema em que eles possam desenvolver um estudo investigativo. Isso porque, durante as situações-problema, cabe ao professor dar oportunidade a seus alunos de elaborar hipóteses, ter estratégias próprias, estabelecer relações, observar para fazer previsões e que algumas noções de probabilidade sejam desenvolvidas.

Conforme a BNCC, que possui caráter normativo, os conteúdos do ensino de Matemática estão dispostos em cinco unidades temáticas: i) Números; ii) Álgebra; iii) Geometria; iv) Grandezas e medidas e v) Probabilidade e estatística. Na unidade Probabilidade e Estatística são estudadas as incertezas e o tratamento de dados. Ela traz a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. No tocante ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis (BNCC, p.272).

Assim a BNCC destaca o foco do estudo de probabilidade no Ensino Fundamental (p. 276):

> No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis[..] No Ensino Fundamental Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem.

A BNCC do Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias (p.94), ao destacar a progressão do conhecimento que deverá ocorrer do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, traz:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental [...]. No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Nesse sentido, assim diz a a BNCC do Ensino Médio na área de Matemática e suas Tecnologias (p.103) em relação ao esperado para a competência específica 3 no Ensino Médio

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, demodo a construir argumentação consistente [...] Resolver e elaborar

> problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

O Currículo Referência da Rede Estadual de Educação do Estado de Goiás (p.119) reproduz a recomendação do PCN em relação ao Tratamento da Informação:

> A proposta Currículo Referência para a área de matemática apresenta uma estrutura de 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio, com conteúdos explicitados a partir das expectativas de aprendizagem, organizados em quatro eixos temáticos - números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação - definidos a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais e do texto de concepção de área do Caderno 3 da Reorientação Curricular.

Ainda de acordo com o Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás (p.664).

> A unidade temática Probabilidade e Estatística tem como foco o estudo da incerteza e do tratamento de dados/informações. Ela propõe uma abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações do cotidiano dos estudantes, das ciências e da tecnologia. É essencial o desenvolvimento das habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas [...] A probabilidade e estatística nos anos finais, antecipa alguns conhecimentos que sempre foram desenvolvidos no Ensino Médio e agora estão sendo priorizados no Ensino Fundamental.

Importante destacar a importância de desenvolver o ensino de probabilidade desde o ensino fundamental, dada a relevância do tema em vários campos de aplicações práticas, bem como a utilização em situações do dia a dia do estudante de modo que o mesmo possa despertar interesse pelo tema ora estudado.

Historicamente, os alunos têm dificuldades na disciplina de Matemática. Portanto, uma boa estratégia a ser desenvolvida pelo professor será o ensino de conteúdos por meio de atividades lúdicas, que prendam a atenção do aluno, utilizando jogos e desafios com números.

Nesse sentido, o Documento curricular de Goiás ressalta que "Aula baseadas em jogos de raciocínio podem ajudar a desenvolver habilidades cognitivas e socioemocionais, ou seja, a tomada de decisão, o planejamento, o gerenciamento de recursos, a resolução de problemas, a compreensão e aceitação de regras pelos estudantes, a autonomia e o pensamento lógico, possibilitando a mobilização de conhecimentos prévios"(DCGO, p.376).

Da mesma forma, o Documento Curricular de Goiás para o Ensino Médio orienta que é um dos objetivos "Compreender os conceitos essenciais da análise combinatória identificando características específicas dos princípios aditivo e multiplicativo para resolver problemas do cotidiano que envolvam contagem [..]. Resolver problemas de contagem, aplicando os princípios multiplicativo e/ou aditivo para avaliar propostas de intervenção na realidade. [...] . Elaborar problemas de contagem que envolvem os princípios multiplicativo e/ou aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore, entre outros, para analisar resultados, adequar soluções, construir argumentação e tomar decisões (DCGOEM, 2021, p.366).

Ao ensinar os conceitos de probabilidade e combinatória é comum os alunos receberem tais conteúdos com desinteresse e apatia, não só pela própria dificuldade do conteúdo em si, como também pela falta de criatividade em geral dos professores na forma de fazê-lo. É preciso que sejam desenvolvidas formas lúdicas com a construção, por exemplo de jogos de azar, explorando conceitos de bingos, de jogos de cartas, de dados, de moedas, de tabuleiros.

Essa forma lúdica de aprendizagem desenvolve o interesse do aluno, principalmente quando o mesmo se vê envolvido na construção em sala de aula do desenvolvimento de tais jogos, utilizando conhecimentos comuns disponíveis aos estudantes. Dessa forma, há troca de saberes entre alunos e professores, o que gera uma ressignificação do processo de ensino e aprendizagem e acaba despertando o raciocínio lógico nos alunos. Desse modo, a Matemática, obedecendo ao preceito dos documentos oficiais de Educação (BNCC, PCN's) acaba por formar cidadãos, preparando o aluno para o mundo do trabalho, além de contribuir para a construção das relações sociais no meio em que vive.

CAPÍTULO 2

Referencial Teórico

Nesse capítulo discutiremos a teoria elementar de Análise Combinatória e Probabilidade. Apresentamos os resultados básicos da teoria com aplicação via exemplos.

2.1 Análise Combinatória

2.1.1 Princípio multiplicativo

O Princípio Multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem, aplica-se a eventos ocorridos em etapas sucessivas e busca encontrar o número total de possibilidades que é o produto dos números de possibilidades em cada etapa.

Exemplo 2.1. Consideremos os conjuntos $X = \{x_1, x_2 ...... x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2 ..... y_k\}$. É possível formamos $m.k$ pares ordenados (x_i, y_j) em que $x_i \in X$ e $y_j \in Y$.

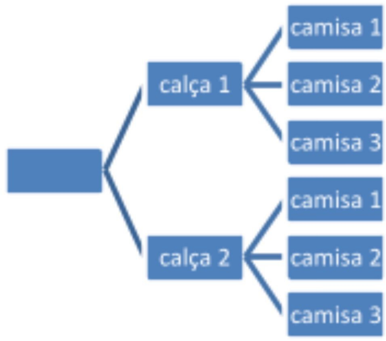
Demonstração. Ao fixarmos o primeiro elemento do par e fazermos variar o segundo, temos:

$$
\begin{aligned}
&(x_1, y_1), (x_1, y_2) \ldots (x_1, y_k) \to k \text{ pares} \\
&(x_2, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_2, y_k) \to k \text{ pares} \\
\ldots \\
&(x_m, y_1), (x_m, y_2) \ldots (xm, yk) \to k \text{ pares}
\end{aligned}
$$

O número total de pares ordenados é então: $k + k + k + \ldots k = m \times k$. □

Exemplo 2.2. José, ao se vestir para ir ao trabalho, tem como opções 2 calças e 3 camisas. Analisemos de quantas maneiras ele pode se arrumar. Para isso usaremos o diagrama de árvore da Figura 2.1.

Figura 2.1: Diagrama de árvore



Fonte: Elaborada pelo autor.

O princípio multiplicativo, ilustrado no Exemplo 2.2, também pode ser enunciado da seguinte forma: Se uma decisão W_1 pode ser tomada de m maneiras e, em seguida, outra decisão W_2 puder ser tomada de k maneiras, o número total de maneiras de tomadas as decisões W_1 e W_2 será $m \times k$. No Exemplo 2.2 havia duas decisões a serem tomadas: W_1: escolher uma dentre as 2 calças e W_2: escolher uma dentre as 3 camisas. Dessa forma, José dispõe de $2 \times 3 = 6$ maneiras de tomar as decisões W_1 e W_2, ou seja, 6 possibilidades diferentes de se vestir.

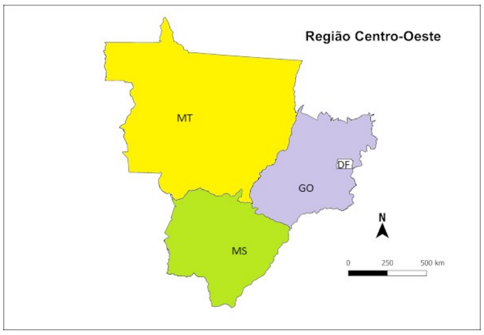
Exemplo 2.3. Um grande jogo será realizado no Estádio dos Ipês. Nele existem 4 portões para que a torcida possa entrar no estádio. Estando dentro do estádio, existem 6 acessos para as arquibancadas.
(a) Há 24 possibilidades para um torcedor chegar ao local de assitir o jogo.
(b) Cada torcedor tem 576 modos de entrar e sair do estádio, usando um dos portões e um dos acessos, considerando como percursos diferentes aqueles em que haja, pelo menos, um portão ou um acesso diferente na entrada ou na saída.

Demonstração.
(a) Como as possibilidades de escolha dos portões e dos acessos são independentes (por qualquer portão que se entre, é possível chegar a qualquer acesso à arquibancada), pode-se aplicar o Princípio Multiplicativo e concluir que o número total de possibilidades de entrada no estádio até o local de assistir o jogo é: $4 \times 6 = 24$ possibilidades.
(b) Temos 24 possibilidades de entrada no estádio até o local de assistir o jogo. Para sair, podemos utilizar o mesmo raciocínio e concluir que temos também $6 \times 4 = 24$ possibilidades de saída do estádio. Como o torcedor entra e sai, escolhendo o per-

curso de saída qualquer que tenha sido o de entrada, podemos aplicar novamente o Princípio Multiplicativo e concluir que ele terá 24 x 24 = 576 possibilidades para entrar e sair do estádio. □

Exemplo 2.4. Considere o mapa da Região Centro Oeste dado a seguir. Um estudante deseja colorir esse mapa de modo que territórios adjacentes sejam coloridos de cores distintas. Por exemplo, já que Goiás e o distrito Federal têm fronteira em comum, terão de ser coloridos de forma diferente. Supondo que o estudante dispõe de quatro cores distintas e cada território seja colorido de uma única cor, existem 72 maneiras dele os territórios do mapa. (a região externa à região Centro Oeste não será colorida; a palavra território refere-se à extensão considerável de terra, e não à competência administrativa).

Figura 2.2: Mapa da Região Centro Oeste



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. De fato, esse resultado pode ser obtido pelo Princípio Multiplicativo. Escolhendo uma cor para colorir o estado de Goiás, restam três opções para colorir o Distrito Federal. A cor usada para colorir Goiás não pode ser usada para colorir o Mato Grosso do Sul, porém a cor usada no Distrito Federal pode. Sendo assim, coloridos Goiás e Distrito Federal há três opções para colorir o Mato Grosso do Sul. Coloridos Goiás, Distrito Federal e Mato Grosso do Sul restam duas opções para colorir o Mato Grosso (as cores usadas em Goiás e Mato Grosso não podem ser usadas, enquanto a do Distrito Federal pode). Logo, usando o Princípio Multiplicativo temos $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ modos de colorir o mapa. □

2.1.2 Princípio aditivo das partes disjuntas

Considerando A e B como conjuntos finitos disjuntos, ou seja, com a sua interseção vazia, o número de elementos presentes na união (elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B) entre A e B é dado por: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

De um modo geral, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos (Lebensztayn, 2012, p.9)):

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i).$$

Exemplo 2.5. A figura a seguir apresenta os escudos dos 20 times que disputaram o campeonato brasileiro de futebol em 2007.

1. Há 1.024 maneiras distintas de escolher cinco dos escudos da Figura 2.3 de modo que seja escolhido um escudo em cada uma das cinco colunas.
2. Há 5.000 maneiras distintas de escolher cinco dos escudos da Figura 2.3 de modo que seja escolhido pelo menos um escudo de cada uma das quatro linhas.

Figura 2.3: Escudo das equipes do Brasileirão 2007

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. 1. Basta usar o princípio multiplicativo. Para cada coluna há quatro escolhas possíveis. Assim, o número de escolhas possíveis é $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1.024$.
2. Nesse caso, de uma das linhas serão escolhidos dois escudos (essa linha pode ser escolhida de quatro modos diferentes) e de cada uma das três outras um escudo. Fixada a linha da qual serão escolhidos dois escudos temos dez possibilidades de escolha. Para cada linha onde será escolhido um escudo há cinco possibilidades. Logo, usando o princípio multiplicativo temos $4 \times 10 \times 5 \times 5 \times 5 = 5.000$ escolhas possíveis. $\square$

2.1.3 Princípio da inclusão - exclusão

O princípio da inclusão-exclusão cuida de contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. De início, consideremos os conjuntos A e B. Queremos achar $n(A \cup B)$. Seja a: número de elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B; seja b: número de elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A e seja w: número de elementos que pertencem tanto a A quanto a B. De tal modo temos que $n(A) = a+w; n(B) = b+w$. Daí $n(A \cup B) = (a + w) + (b + w) - w = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Generalizando, conforme (Lebensztayn, 2012, p.30), temos:

Teorema 2.6. Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ temos que

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} n(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n n\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Exemplo 2.7. Uma pesquisa realizada com entrevista de uma amostra de torcedores em Anápolis teve os seguintes resultados: Pela tabela podemos concluir que 600

Tabela 2.1: Número de torcedores

Goiás	Anapolina	Anápolis	Goiás e Anapolina	Goiás e Anápolis	Nenhum
310	190	185	70	60	45

Fonte: Elaborada pelo autor.

torcedores foram entrevistados.

Demonstração. Basta usar o Princípio da Inclusão-Exclusão. Defina A como o conjunto dos torcedores do Goiás, B como o conjunto dos torcedores do Anapolina e C como o conjunto dos torcedores da Anápolis.

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 300 + 190 + 185 - 70 - 60 - 0 + 0 = 555.$$

Logo, o número de entrevistados foi $555 + 45 = 600$. □

2.1.4 Permutações, Combinações e Arranjos

Definição 2.8. A permutação é uma técnica de contagem utilizada para determinar quantas maneiras existem para ordenar os elementos de um conjunto finito. Permutar significa trocar os elementos de lugar, considerando a ordenação desses.

Observação 2.9. Representamos o número de permutações de n elementos por P_n. Para calcular o número de permutações de um conjunto com n elementos todos distintos, aplicamos o princípio multiplicativo. Basta calcular o valor do fatorial de n, ou seja, $P_n = n!$.

Definição 2.10. Permutação com repetição
Existem casos particulares de permutação em que há elementos repetidos no conjunto, por exemplo, na formação de anagramas de palavras que possuem pelo menos duas letras repetidas. São as chamadas permutações com repetição.

Teorema 2.11. Considere um conjunto com n elementos onde os elementos $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ aparecem $k_1, k_2, \ldots k_m$ vezes, respectivamente. O número de permutações com repetição, nesse caso, é dado por

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

Demonstração. Temos n posições para colocar k_1 elementos α_1. Escolhidas essas k_1 posições, restam $n - k_1$ posições dos quais escolhemos k_2 posições para colocar os elemementos α_2 e assim por diante. A prova é então, consequência da aplicação do princípio multiplicativo. □

Exemplo 2.12. A palavra ARARAQUARA possui 5.040 permutações.

Demonstração. De fato, temos 10 letras, onde a letra A repete 5 vezes, a letra R três vezes e as letras Q e U aparecem cada uma, uma única vez. Logo, o número de permutações é dado por

$$\frac{10!}{5!3!1!1!} = 5.040.$$

□

Definição 2.13. Permutação circular é um tipo de permutação composta por n elementos distintos em ordem cíclica, formando uma circunferência. Nessa contagem interessa apenas a posição relativa dos objetos entre si.

Exemplo 2.14. Uma família é composta por cinco pessoas : o pai, a mãe e três filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

Demonstração. Usando o princípio multiplicativo é possível ver que o número de permutações circulares para n elementos é $PC_n = (n-1)!$. Logo, as pessoa em questão podem se sentar de $PC_5 = (5-1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$ maneiras diferentes em volta da mesa. □

Definição 2.15. Considere um conjunto com n elementos distintos. Qualquer sequência de p desses elementos (todos distintos) é chamada de Arranjo Simples ($0 \leq p \leq n$, com n e p naturais). O número de arranjo simples de n elementos tomados p a p, é simbolizado por $A_{n,p}$.

Teorema 2.16. O número de arranjo simples de n elementos tomados p a p, $A_{n,p}$, é dado por

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Demonstração. De fato, suponha que dispomos de n objetos distintos, e escolheremos p desses objetos pra serem colocados em uma fila, com p posições. Dessa forma a fila terá p objetos. Pelo princípio Multiplicativo, temos n objetos para ocupar a primeira posição. Ocupada a primeira posição com um objeto, a segunda posição pode ser ocupada por qualquer um dos $(n-1)$ objetos restantes. Daí, ocupada a segunda posição, a terceira posição pode ser ocupada por qualquer um dos $n-2$ objetos restantes. Repetindo esse raciocínio até a posição de número p, teremos para ela $n-p+1$ objetos disponíveis para ocupá-la. Pelo Princípio Multiplicativo teremos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p+1)) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p-1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

$\square$

Exemplo 2.17. Suponha uma modalidade de aposta lotérica fictícia onde a cada semana uma cartela virtual com escudos de 20 equipes do futebol brasileiro é sorteada. Há 10 equipes participantes em cada estado. Numa cartela sorteada cada equipe pertence a unidade federativa diferente das demais. Há $2,16048997032110161192 \times 10^{44}$ possibilidades de cartelas, se uma vez definida as 20 equipes a ordem das equipes na cartela mudam (os 20 escudos podem ser permutados e cada permutação gera diversas cartelas diferentes). Logicamente, não é possível fazer a impressão física de um conjunto de cartelas onde há de todas as cartelas possíveis.

Figura 2.4: Exemplo de cartela com escudos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Nesse caso, há 27 unidades federativas para escolher 20 de forma que a ordem das unidades seja relevante. O número de modos de escolher as 27 unidades federativas, importando a ordem, é $A_{27,20} = \frac{27!}{7!} = 2,1604899703211016192 \times 10^{24}$. Fixada, a escolha das 20 unidades federativas para cada uma delas há dez escolhas possíveis de equipes. Logo, o tal de cartelas pode ser obtida pelo princípio multiplicativo resultando em $A_{27,20} \times 10^{20} = 2,1604899703211016192 \times 10^{44}$. □

Observação 2.18. É importante enfatizar que nos problemas que envolvam a ferramenta de arranjo, a ordem dos termos agrupados importa, uma vez que uma sequência será diferente de outra se seus respectivos termos estiverem ordenados de forma distinta.

Definição 2.19. Considere um conjunto com n elementos distintos. Qualquer sequência de p desses elementos é chamada de Arranjo com repetição ($0 \leq p \leq n$, com n e p naturais). Note que os p elementos pode ser distintos ou não, ou seja, pode haver elementos repetidos. O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p é simbolizado por $AR_{n,p}$.

Teorema 2.20. O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p, $AR_{n,p}$, é dado por

$$AR_{n,p} = n^p.$$

Demonstração. De fato, suponha que dispomos de n objetos distintos, e escolheremos p desses objetos pra serem colocados em uma fila, com p posições. Dessa forma a fila terá p objetos. Pelo princípio Multiplicativo, temos n objetos para ocupar a primeira posição. Ocupada a primeira posição com um objeto, como os objetos na fila podem ser repetidos, para a segunda posição ainda temos n objetos disponíveis. Repetindo esse raciocínio até a última, que é a posição de número p, como os objetos podem ser repetidos, ainda temos n objetos disponíveis para essa posição. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$$AR_{n,p} = n \times n \times n \times \ldots \times n = n^p$$

□

Exemplo 2.21. Considere placas dos veículos formadas por três letras seguidas por quatro números. Assim, é possível formar 1.757.600.000 placas distintas.

Demonstração. Observe que o alfabeto é composto por 26 letras, e há 10 possibilidades de números. Vamos separar em dois arranjos completos e encontrar o número de arranjos possíveis para as letras e para os números. Para as letras temos $AR_{26,3} = 26^3 = 17.576$ possibilidades e para os números $AR_{10,4} = 10^4 = 10.000$ possibilidades. Usando o princípio multiplicativo temos que o total de arranjos possíveis é: $17.576 \times 10.000 = 1.757.600.000$. □

Definição 2.22. Combinações
Combinações são todos os subconjuntos que podemos formar com uma quantidade de elementos de um conjunto maior. Por exemplo, todas as combinações possíveis com 5 cartas, entre as 52 cartas do baralho.

Teorema 2.23. O número de $K-$subconjuntos de um n-conjunto é

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo 2.24. Suponha uma modalidade de aposta lotérica fictícia onde a cada semana uma cartela virtual com escudos de 20 equipes do futebol brasileiro é sorteada. Há dez equipes participantes em cada estado. Numa cartela sorteada cada equipe pertence a unidade federativa diferente das demais. Há $8,8803 \times 10^{25}$ possibilidades de cartelas, se uma vez definida as 20 equipes a ordem das equipes na cartela não mudam (há apenas uma cartela com as 20 equipes). Logicamente, não é possível fazer a impressão física de um conjunto de cartelas onde há de todas as cartelas possíveis.

Figura 2.5: Exemplo de cartela com escudos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Nesse caso há 27 unidades federativas para escolher 20. O número de modo de escolher as 27 unidades federativas é $C_{27,20} = \frac{27!}{20!7!} = 888.030$. Fixada, a escolha das 20 unidades federativas para cada uma delas há dez escolhas possíveis de equipes. Logo, o tal de cartelas pode ser obtida pelo princípio multiplicativo resultando em $C_{27,20} \times 10^{20} = 8,8803 \times 10^{25}$. $\square$

Observação 2.25. A quantidade $C_{n,k}$ é chamada coeficiente binomial. Esses números podem ser arrumados em uma disposição triangular, conhecida como Triângulo de Pascal. (Lebensztayn, 2012, p.10).

Definição 2.26. Combinações completas de n elementos, tomados p a p, são combinações de n elementos dos quais escolhemos p não necessariamente distintos.

Observação 2.27. Em vista disso, quando vamos calcular as combinações completas devemos levar em consideração as combinações com elementos distintos (combinações simples) e as combinações com elementos repetidos.

Teorema 2.28. O número de Combinações completas de n elementos, tomados p a p é dado por

$$CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}.$$

Demonstração. Calcular o número de Combinações completas de n elementos, tomados p a p é o mesmo que encontrar o número de soluções da equação:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots n.$$

Daí, usamos o esquema bola-traço, onde usamos bolas e traços, como o próprio nome sugere. A ideia é desenhar bolas idênticas, alinhadas horizontalmente, para representar os objetos que serão distribuídos e separá-las em regiões, de acordo com a quantidade de incógnitas, utilizando traços. Assim,

- a quantidade de bolas será igual à soma das incógnitas, para que cada bola represente uma unidade no valor da incógnita;
- a quantidade de traços será uma unidade a menos que a quantidade de incógnitas, para que cada traço separe duas incógnitas.

Cada solução do sistema está associada a uma permutação de bolas e traços e vice-versa (há bijeção entre as soluções e a distribuição da fila). O total de filas com essa característica pode ser calculado utilizando a ideia de permutação com elementos repetidos. São p bolas e $n-1$ traços. E então estabelecemos o resultado. □

Exemplo 2.29. Há 210 modos de comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos.

Demonstração. Temos

$$CR_{7,4} = C_{10,6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!4!} = 10.9.8.74.3.2.1 = 210.$$

Portanto, podemos comprar 4 salgadinhos de 210 modos diferentes. □

Exemplo 2.30. Há 28 soluções inteiras e não negativas da equação: $x_1+x_2+x_3 = 6$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 2.28 com $n = 6; p = 3$. Logo,

$$CR_{6,3} = \frac{8!}{6!2!} = 28 \text{ soluções.}$$

□

2.2 Probabilidade

Definição 2.31. (Lebensztayn, 2012, p.27) Um experimento é aleatório se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente o resultado.

Definição 2.32. (Lebensztayn, 2012, p.27) Um experimento é determinístico se, quando repetido nas mesmas condições, conduz ao mesmo resultado.

Definição 2.33. (Lebensztayn, 2012, p.27) Definimos espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e o denotamos por Ω. Um subconjunto A é chamado evento.

Segundo RIFO (2015,p.13),"chamamos evento qualquer conjunto observável de possíıveis resultados do experimento, ou seja, qualquer subconjunto observável do espaço amostral Ω. Cada vez que o experimento é realizado, diremos que um evento A ocorre se o resultado observado for um elemento de A, e diremos que não ocorre se o resultado observado não for um elemento de A. Em particular, são eventos o próprio espaço amostral Ω, que por definição é o evento que sempre ocorre, e o conjunto vazio $\emptyset$, que por definiçao é o evento que nunca ocorre".

Ainda conforme RIFO (2015, p.15), "Consideremos um experimento aleatório ϵ com espaço amostral Ω. Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma classe de eventos observáveis se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^C \in \mathcal{F}$
3. se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$, e mais geralmente
4. Se $A_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Operações entre eventos

Definição 2.34. Dados dois eventos A e B, dizemos que $A \subset B$ se $\omega \in A$ implica que $\omega \in B$. Em outras palavras : a ocorrência de A implica a ocorrência de B.

Definição 2.35. A união de dois eventos A e B é $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ ou $\omega \in B\}$ e representa o evento onde pelo menos um dos dois eventos A e B ocorre.

Definição 2.36. A interseção de dois eventos A e B é $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in a$ e $\omega \in B\}$ e representa o evento onde ambos A e B ocorrem.

Definição 2.37. Dois eventos A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos se $A \cap B = \emptyset$. Isso significa que A e B não ocorrem simultaneamente.

Definição 2.38. Para qualquer evento A, o complementar de A é $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ e representa o evento de que A não ocorre. (Lebensztayn, 2012, p.27)

Definição 2.39. Definição clássica de probabilidade (Cardano (1663), De Moivre (1718), Laplace (1812))
Seja Ω finito, não vazio, e suponhamos que cada subconjunto elementar de Ω é equiprovável. Então, para qualquer $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade de A como

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Exemplo 2.40. Considere um jogo com uma cartela de escudos. O jogador escolhe três escudos em cada linha. É realizado um sorteio com um escudo de cada linha. O jogador recebe o prêmio se dentre os doze escudos que escolheu estiverem os quatro escudos sorteados. A probabilidade do jogador ser premiado é $\frac{81}{625} = 0,1296$.

Figura 2.6: Escudos de 20 agremiações brasileiras

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Pelo Princípio Multplicativo o número de sorteios possíveis é $n(\Omega) = 5\times5\times5\times5 = 625$. Novamente usando o Princípio Multiplicativo temos que o número de composições onde o jogador vence é $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Sendo A o evento onde o jogador é premiado temos $n(A) = 81$. Usando a Definição Clássica temos que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{81}{625}.$$

$\square$

Observação 2.41. A Definição 2.39 formaliza a primeira definição conhecida de probabilidade: "relação entre o número de casos favoráveis ao acontecimento (evento) e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis" (Lebensztayn, 2012, p.28).

Definição 2.42. Definição frequentista de probabilidade
Define-se probabilidade (definição frequentista) de um acontecimento A e representa-se por $\mathbb{P}(A)$, como sendo o valor obtido para a frequência relativa com que se observou A, num grande número de realizações da experiência aleatória.

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Exemplo 2.43. Considere a próxima partida entre Goiás e Vila Nova. O histórico do confronto mostra as seguintes estatísticas:

Goiás	Empate	Vila Nova	Total
153	89	83	325

Figura 2.7: Clássico Derby do Cerrado: Escudos das Equipes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma pessoa fez as seguintes estimativas:

$$\mathbb{P}(G) = \frac{153}{325} = 47,08\%, \mathbb{P}(E) = \frac{89}{325} = 27,38\% \text{ e } \mathbb{P}(V) = \frac{83}{325} = 25,54\%.$$

onde G é o evento vitória do Goiás, E empate e V vitória do Vila Nova. Um questionamento que surge é se essas estimativas são válidas. Na realidade, estão incorretas. A definição frequentista jamais poderia ser aplicada nesse caso, já que cada jogo não é uma repetição em mesmas condições do experimento em questão. Observe que a definição clássica também não é uma solução adequada. Isto implica na necessidade de uma outra definição, a definição subjetiva de probabilidade.

Exemplo 2.44. Uma urna contém 10 bolas idênticas exceto pela cor, dentre as quais algumas são verdes outras vemelhas. São feitas mil retiradas da urna, uma a uma ao acaso e com reposição, obtendo os resultados da Tabela 2.44.

Bolas verdes	Bolas vermelhas	Total
805	195	1.000

Seja G o evento retirar uma bola verde na urna. Neste exemplo podemos aplicar a Definição Frequentista e a Definição Clássica de Probabilidade. Usando a Definição frequentista

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} \text{ donde } \mathbb{P}(A) \approx \frac{805}{1.000} = 0,805.$$

Por outro lado, da definição clássica

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(\text{bolas verdes})}{n(\text{total de bolas})} = \frac{n(\text{bolas verdes})}{10} \Rightarrow n(\text{bolas verdes}) = 10 \times \mathbb{P}(A).$$

Assim, com alta probabilidade, há 8 bolas verdes 2 bolas vermelhas na urna.

Definição 2.45. Definição Subjetiva de Probabilidade
A probabilidade subjetiva é baseada em julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento e experiência do pesquisador. Pode ser útil quando não há possibilidade de utilização da probabilidade clássica ou frequentista. A definição subjetiva pode ser vista como uma estimativa do que o indivíduo pensa que seja a viabilidade de ocorrência de um evento.

Observação 2.46. Exemplos de eventos que só podem ter Probabilidade atribuída pela definição subjetiva:

1. Probabilidades associadas ao resultado do próximo clássico Goiás contra Vila Nova;
2. Probabilidade de título para cada seleção na próxima copa do mundo;
3. Probabilidade de ocorrer um terremoto numa dada região num dado dia;
4. etc.

Definição 2.47. Definição axiomática de probabilidade: Kolgomorov (1933)
Um probabilidade é uma função $\mathbb{P}(.)$ a valores reais definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos de um espaço amostral, que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{F}$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

3. Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos em $\mathcal{F}$ dois a dois disjuntos,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Observação 2.48. A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ é chamada um espaço de probabilidade.

Observação 2.49. No caso de um espaço amostral finito ou infinito enumerável, podemos definir a probabilidade na classe $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de Ω, a qual é usualmente denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Neste caso, escrevendo Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, associamos a cada $\omega_i, i = 1, 2, \ldots$, um número $p(\omega_i)$ tal que

1. $p(\omega_i) \geq 0$;
2. $\sum_i p(\omega_i) = 1$.

Para cada i, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples ω_i. A probabilidade de um evento A é definida por:
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Exemplo 2.50. Considere uma urna com sete bolas verde e três bolas vermelhas. Três bolas são retiradas simultaneamente. É de interesse saber o número de bolas verdes extraídas. Temos $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ e $\mathbb{P}$ tal que $\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{120}), \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{21}{120}, \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{63}{120}, \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{35}{120}$. Se A é o evento onde sai pelo menos duas bolas verdes, temos $A = \{2, 3\}$ e então
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{63}{120} + \frac{35}{120} = \frac{98}{120} = 0,817.$$

Observação 2.51. Quando Ω é infinito não enumerável, é em geral impossível associar uma probabilidade bem definida a todos os subconjuntos de Ω. Define-se então uma probabilidade em uma classe mais restrita de subconjuntos de Ω; apenas esses subconjuntos são denominados eventos. O ponto essencial é que essa classe contém todos os subconjuntos (eventos) de interesse prático. Um exemplo importante é quando Ω é a reta real, para o qual se considera a classe de subconjuntos conhecida como σ-álgebra de Borel (Lebensztayn, 2012, p.28).

Proposição 2.52. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Então

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Definição 2.53. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Considere A e B dois eventos em $\mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(B) > 0$. A probabilidade condicional do evento A dado que B ocorreu é definida por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Teorema 2.54. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatórios em $\mathcal{F}$.
$a)$ (Teorema da Multiplicação) Se $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ então

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2|A_1).\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

$b)$ (Fórmula da Probabilidade Total) Suponha que os eventos aleatórios $A_i, i = 1, 2, \cdots n$ formem uma partição do espaço amostral Ω, isto é

$i) A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j;$
$ii) \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega;$
$iii) \mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i.$

Temos:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i).$$

Exemplo 2.55. Considere uma urna com sete bolas verdes e três bolas vermelhas. Três bolas são retiradas da urna uma a uma ao acaso e sem reposição.

1. A probabilidade de saírem três bolas verdes é $\frac{1}{24}$.
2. A probabilidade de sair bola verde na segunda extração é $\frac{7}{10}$.

Demonstração. Defina os eventos A_i : "Sair bola verde na i-ésima extração", $i = 1, 2, 3$.

1. $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8} = \frac{1}{24}$.
2. $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2|A_1^C) = \frac{7}{10}\frac{6}{9} + \frac{3}{10}\frac{7}{9} = \frac{7}{10}$.

$\square$

Teorema 2.56. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $C, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatórios em $\mathcal{F}$.

a) (Teorema da Multiplicação Condicional) Se $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap C) > 0$ então

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|C) = \mathbb{P}(A_1|C) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap C) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap C).$$

b) (Fórmula da Probabilidade Total) Suponha que os eventos aleatórios $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ formem uma partição do espaço amostral Ω, isto é

$i)A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j;$

$ii)\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega;$

$iii)\mathbb{P}(A_i) > 0 \; \forall i.$

Temos:

$$\mathbb{P}(B|C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i \cap C).\mathbb{P}(A_i|C).$$

Exemplo 2.57. Considere uma urna com sete bolas verdes e três bolas vermelhas. Três bolas são retiradas da urna uma a uma ao acaso e sem reposição.

1. Dado que saiu bola verde na primeira extração, a probabilidade de saírem bolas verdes na segunda e terceira extração é $\frac{5}{12}$.
2. Dado que saiu bola verde na primeira extração, a probabilidade de sair bola verde na terceira extração é $\frac{7}{10}$.

Demonstração. Defina os eventos A_i : "Sair bola verde na i-ésima extração", $i = 1, 2, 3$.

1. $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3|A_1) = \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{9}\frac{5}{8} = \frac{5}{12}$.
2. $\mathbb{P}(A_3|A_1) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2^C)\mathbb{P}(A_2^C|A_1) = \frac{5}{8}\frac{6}{9} + \frac{6}{8}\frac{3}{9} = \frac{1}{4}$.

□

Definição 2.58. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em $\mathcal{F}$ são ditos *independentes* se e somente se:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}).\mathbb{P}(A_{i_2}).\ldots.\mathbb{P}(A_{i_k})$$

para todo $k = 2, 3, 4, \cdots n$ com $i_j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ para $j = 1, 2, \cdots k$.

Teorema 2.59. (Sequências monótonas de eventos) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência crescente de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$, isto é,

$A_n \subset A_{n+1}$ para todo n. Então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n, \text{ logo } \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

De forma análoga, se $\{A_n\}$ é uma sequência decrescente de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$, ou seja, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n, \text{ logo } \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Teorema 2.60. (Continuidade da Probabilidade) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência monótona de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$ (crescente ou decrescente). Se

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

então

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Exemplo 2.61. Considere uma urna com sete bolas verdes e três bolas vermelhas. Bolas são retiradas indefinidamente da urna uma a uma ao acaso e com reposição. Sejam os eventos B_n : sair apenas bola verde até a $n-$ésima extração e V_n : sair bola verde na $n-$ésima extração. Temos

1. $$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$
2. Os eventos $V_1, V_2, \ldots$ são independentes.
3. $\{B_n\}_{\{n\geq 1\}}$ é uma sequência decrescente de eventos.
4. $$\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{7}{10}\right)^n$$
5. Se B é o evento onde saem bolas verdes indefinidamente, $\mathbb{P}(B) = 0$.

Demonstração.
1. B_n ocorre se e somente se ocorrerem bolas verdes desde a primeira até a n-ésima extração.
2. Como a bola é devolvida após cada extração no momennto da retirada a configuração da urna é a mesma e não depende do que ocorreu em retiradas anteriores.
3. Note que

$$B_{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n+1} V_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i = B_n.$$

4. Pela independência.

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{7}{10} = \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

5. Temos

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Pela Continuidade da Probabilidade

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^n = 0.$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Dinâmicas Aplicadas ao Ensino Básico

Neste momento passamos a apresentar quatro propostas relacionadas ao estudo da teoria da análise combinatória e probabilidade no ensino básico, a partir de dinâmicas de jogos. Buscamos desenvolver no aluno as habilidades de análise combinatória e de raciocínio lógico.

3.1 Montagens de Tabelas de Campeonato de Futebol

Nos campeonatos de futebol de pontos corridos cada time enfrenta todos os outros em jogos de ida e volta. Assim, cada time enfrenta um dado adversário duas vezes. Portanto, se n é o número de equipes num toneio de pontos corridos ocorrerão

$$A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) \text{ partidas .}$$

O campeonato brasileiro da Série A, por exemplo, tem 20 equipes. Assim, em cada ano ocorrem $20 \times 19 = 380$ partidas.

Nesta seção desenvolvemos a dinâmica de montar uma tabela de Campeonato de futebol, cujas regras, entre outras, são as seguintes:

1. Cada equipe enfrenta seu adversário uma única vez;
2. A classificação das equipes é dada em ordem decrescente de pontuação;
3. O vencedor de uma partida recebe três pontos, em caso de empate cada equipe recebe um ponto, quando uma equipe perde ganha zero ponto;
4. Critério de desempate: segue a seguinte ordem de prioridade:
   (a) Número de Pontos;
   (b) Número de Vitórias;
   (c) Saldo de gols (SG);
   (d) Número de gols feitos (GP).

Importante destacar que usaremos as regras do campeonato de futebol para na parte final da dinâmica realizar uma competição de conhecimentos na área da matemática.

PÚBLICO-ALVO:
Alunos do Ensino Fundamental;
Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO:
Para a conclusão das atividades serão necessárias quatro horas aula.

PRÉ-REQUISITOS:
O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS:
Aplicar na prática a Teoria de Análise de Combinatória.

CONTEÚDOS:
Análise combinatória.

METODOLOGIA:
Por meio da montagem de uma tabela de campeonato de futebol, com participação dos alunos, buscaremos desenvolver um campeonato de conhecimentos matemáticos.

3.1.1 Primeira Aula: Montando uma Tabela de Futebol

Comecemos tomando um exemplo de um campeonato com quatro equipes de futebol. Imaginemos que as equipes sejam: Goiás, Atlético, Anápolis e Anapolina.

Considerando tratar-se de quatro competidores, haverá seis partidas em três rodadas. A primeira rodada será montada pelo professor, enquanto que para as outras duas rodadas, há a participação dos alunos. Nesse ponto, o aluno é levado a utilizar noções de combinatória e raciocínio lógico, pois há várias possibilidades de montagem. O professor deve destacar que a primeira rodada apresentada poderia ser outra. Por exemplo, na primeira rodada a equipe Anápolis poderia iniciar jogando tanto com a equipe Goiás, como com Atlético ou Anapolina. Isso permite várias opções de combinação de tabela, o que desperta no aluno a capacidade de raciocínio lógico e de trabalho em equipe. O professor deve pedir que os alunos apresentem variações de montagem desta tabela. Nesse ponto o professor deverá ressaltar que em campeonatos onde há jogos de ida e volta, o número de partidas é o dobro, havendo turno e returno. Por fim o professor apresenta a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Montagem de Tabela com 4 equipes

Primeira Rodada	Anápolis x Goiás	Atlético x Anapolina
Segunda Rodada	Goiás x Atlético	Anapolina x Anapólis
Terceira Rodada	Anapólis x Atlético	Anapolina x Goiás

Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor agora propõe uma atividade para a turma num contexto onde há jogos de ida e volta. A Tabela 3.1 apresenta o turno. Agora o aluno terá que propor o returno. No returno, os jogos ocorrem com mando de campo invertido. Por exemplo, se no turno houve o jogo Anápolis x Goiás, no returno o jogo será Goiás x Anápolis. Mas o professor coloca uma dificuldade adicional. Ele pede que os alunos formem grupos com três ou quatro alunos e montem variações da tabela acima, de modo que cada time jogue no máximo duas partidas seguidas fora ou em casa ao longo de seis partidas. Além disso, nas duas primeiras rodadas (também nas duas últimas rodadas), cada time deverá jogar uma vez como mandante e uma vez como visitante. Não necessariamente os jogos do returno devem seguir a ordem dos jogos do turno. Após as discussões o professor passa pelos grupos observando as soluções dos alunos. Por fim, o professor apresenta uma possível solução para a turma. A Tabela 3.2 apresenta uma possível solução para a atividade.

Tabela 3.2: Montagem de Tabela com 4 equipes

Primeira Rodada (turno)	Anápolis x Goiás	Atlético x Anapolina
Segunda Rodada (turno)	Goiás x Atlético	Anapolina x Anapólis
Terceira Rodada (turno)	Anapólis x Atlético	Anapolina x Goiás
Primeira Rodada (returno)	Atlético x Anápolis	Goiás x Anapolina
Segunda Rodada (returno)	Atlético x Goiás	Anapólis x Anapolina
Terceira Rodada (returno)	Goiás x Anapólis	Anapolina x Atlético

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.2 Segunda Aula: Fazendo a Classificação

Partindo das regras e critérios apresentados no início da seção, os alunos são levados a fazerem uma espécie de verificação com uma classificação de um campeonato oficial de futebol. Para tanto será utilizada a tabela do grupo do Brasil na primeira fase da Copa do Mundo de 2002, com as seguintes seleções: Brasil, China, Costa Rica e Turquia. Antes de montar a tabela, o professor pergunta aos alunos quantas vezes cada seleção jogou. Uma vez que os alunos tenham respondido que cada seleção jogou três vezes (se algum aluno responder diferente o professor retoma a aula anterior), o professor monta a tabela, utilizando os critérios utilizados na primeira aula. Em seguida registra na tabela os resultados ocorridos em tais partidas, conforme a Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Primeira Fase- Grupo do Brasil-Copa 2002

Primeira Rodada	Brasil 2 x 1 Turquia	China 0 x 2 Costa Rica
Segunda Rodada	Brasil 4 x 0 China	Costa Rica 1 x 1 Turquia
Terceira Rodada	Costa Rica 2 x 5 Brasil	Turquia 3 x 0 China

Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor monta no quadro uma tabela com as quatro seleções em ordem alfabética, onde são colocadas as colunas: Pontos (PG), Jogos(J), número de vitórias(V), número de empates(E), número de derrotas(D), número de gols marcados(GP), número de gols sofridos(GC) e saldo de gols(SG). Aqui $SG = GP - GC$. A coluna de classificação deverá ser preenchida ao final, na etapa seguinte. O professor explica para os alunos o significado de cada uma dessas nomenclaturas.

O professor pede aos alunos que preencham a tabela nas colunas J, V, E, D e dá um tempo para os alunos preencherem no caderno. Em seguida o professor corrige o preenchimento feito pelos alunos e esclarece eventuais dúvidas.

Na etapa seguinte o professor explica os critérios de pontuação, com base nos números de vitórias, empates, derrotas e novamente o professor dá um tempo para os alunos preencherem em seus cadernos a pontuação de cada time. Após todos terminarem, o professor preenche a tabela com os resultados, obtendo a Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Tabela de Classificação incompleta- Copa 2002-Grupo C

Classificação Final	Seleção	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
	Brasil	9	3	3	0	0			
	China	0	3	0	0	3			
	Costa Rica	4	3	1	1	1			
	Turquia	4	3	1	1	1			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na etapa seguinte, o objetivo é definir a classificação. Para tanto, o professor explica o que é GP, GC e SG, esclarecendo o papel de cada parâmetro nos critérios de desempate da classificação. Então o professor pede para os alunos preencherem nos seus cadernos as colunas de gols marcados, gols sofridos e saldo de gols. Após dar um tempo, o professor corrige a atividade.

Finalmente, o professor explica as regras de classificação, levando em conta pontos, gols marcados, gols sofridos e saldo de gols. O professor dá um tempo para os alunos preencherem a coluna de classificação, descobrindo quem foi o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto colocados. Ao final, o professor preenche no quadro a Tabela 3.5, que é a conferência da atividade desta aula.

Tabela 3.5: Tabela de Classificação- Copa 2002-Grupo C

Classificação	Equipe	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1°	Brasil	9	3	3	0	0	11	3	+8
2°	Turquia	4	3	1	1	1	5	3	+2
3°	Costa Rica	4	3	1	1	1	5	6	-1
4°	China	0	3	0	0	3	0	9	-9

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.3 Terceira Aula e Quarta Aula: Competição via Conhecimentos Matemáticos

Na terceira aula a turma será dividida em grupos de alunos para que os conceitos das aulas anteriores sejam aplicados em um campeonato de perguntas de matemática. Na realidade as perguntas não precisam necessariamente ser sobre conteúdo de Matemática. Essa dinâmica poderia envolver multidisciplinaridade. Seria interessante uma competição envolvendo múltiplas disciplinas, com uso de questões de outras áreas. Cada grupo representa uma equipe de futebol, formando cada time uma mesa redonda para discussão e resolução das questões. Para fixar ideias, vamos supor que a turma tenha trinta alunos e que formamos cinco equipes com seis pessoas.

Designemos cada grupo de alunos com o nome de alguns dos times goianos: Goiás, Vila Nova, Atlético, Anápolis e Anapolina (Figura 3.1). Como agora são cinco times, em cada rodada um time deixa de jogar, ou seja, folga. Cada equipe joga quatro partidas, duas como mandante e duas como visitante. A equipe que folga faz as anotações das respostas obtidas nas perguntas feitas às outras quatro equipes que estão jogando.

Figura 3.1: Escudos das equipes goianas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os alunos são orientados a montar a tabela das rodadas, conforme estudado nas aulas anteriores. Um tempo é dado para cada grupo. O professor verifica entre as equipes se eles conseguiram realizar a atividade. Passada esta etapa, o professor propõe a tabela para a competição. Uma das possibilidades é a Tabela 3.6. Dessa forma, o aluno desenvolve a capacidade de raciocínio lógico e trabalho em equipe.

Tabela 3.6: Tabela da Competição via Conhecimentos Matemáticos

Rodada	Jogo 1	Jogo 2	Time que folga
1°	Goiás x Anápolis	Vila Nova x Atlético	Anapolina
2 °	Anápolis x Goiás	Vila Nova x Anapolina	Atlético
3°	Atlético x Anapolina	Anápolis x Vila Nova	Goiás
4 °	Goiás x Vila Nova	Anapolina x Atlético	Anápolis
5 °	Anapolina x Goiás	Atlético x Anápolis	Vila Nova

Fonte: Elaborada pelo autor.

O campeonato consiste, para cada rodada, de um grupo de cinco perguntas de matemática que são feitas aos quatro times que jogam naquela rodada. Nas rodadas seguintes, faz-se novo grupo de cinco questões para os quatro times. Suponha que na primeira rodada sejam feitas aos quatro times as seguintes perguntas:

1. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?
2. Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?
3. Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?
4. Quantos números de dois algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
5. De quantas maneiras 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

Ao todo serão feitas vinte e cinco perguntas, em cinco grupos de cinco. Feitas as perguntas, no caso da primeira rodada, às equipes de alunos Goiás x Anápolis, Vila Nova x Atlético estarão se enfrentando. A equipe da Anapolina, estará de folga nesta rodada, e fará todas as anotações das respostas e passará para o professor corrigir. Cada rodada durará vinte minutos. Conta como gol de uma equipe quando essa equipe acerta e o seu adversário erra uma dada pergunta. Não conta como gol quando ambos erram a resposta ou quando ambas acertam.

Da mesma forma que foi feito na primeira rodada, repete-se o processo até a quinta rodada, lembrando que muda o grupo de perguntas em cada rodada. De posse dos resultados das partidas realizadas, os alunos voltam a reunir-se em suas equipes para montar a tabela da classificação final, a qual será submetida ao professor para conferência.

Após a conferência, o professor encerra essas duas últimas aulas. Com a aplicação de tal dinâmica, o aluno é incentivado a utilizar suas capacidades de raciocínio lógico e desenvolve conhecimentos de combinatória, ao mesmo tempo em que participa de trabalho em equipe, o que resulta numa contribuição positiva para a construção do seu conhecimento. O professor pode ao seu critério montar as perguntas envolvendo outros conceitos de Matemática. É possível ainda trabalhar interdisciplinaridade, usando questões de outras áreas como Física, Química, Biologia etc. Nesse caso, deveria existir atuação conjunta com outros professores.

3.2 Campo Minado

Nessa seção definiremos o jogo “campo minado” e idealizaremos uma aplicação do mesmo para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A aula projetada faz uso de computadores. O objetivo é desenvolver no aluno a capacidade de utilizar-se de estratégias probabilísticas para alcançar êxito no referido jogo.

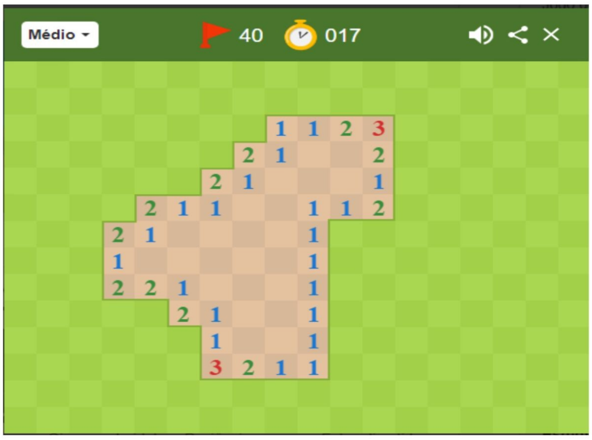
3.2.1 O Campo Minado

Campo minado é um conhecido jogo realizado em computador, podendo ser realizado individualmente, em dupla ou com variações que permitem por exemplo, desafiar e ser desafiado, ou até mesmo impor limite de tempo para cada jogada. Há diversas versões deste jogo nas mais diversas plataformas, vindo sempre incorporada ao sistema operacional Windows. Sua criação deve-se a Robert Donner em 1989 e tem como objetivo descobrir um campo de minas sem que alguma seja detonada. Nesse trabalho utilizaremos do jogo na modalidade individual para um jogador e sem limitação de tempo para efetuar cada jogada. O Campo Minado não é apenas jogo de sorte, mas também de lógica.

O jogo consiste em um tabuleiro retangular, de largura e altura variáveis, formado por pequenos quadradinhos de tamanhos iguais, onde são distribuídas minas em quantidades variáveis, de acordo com o nível escolhido de dificuldade: fácil, médio ou difícil (Veja Figura 3.2).

Na Figura 3.2, temos um tabuleiro de 18 por 14, com 252 "quadradinhos", onde são distribuídas aleatoriamente 40 minas, de nível de dificuldade médio, conforme podemos ver na parte superior da imagem.

Figura 3.2: Captura de tela do Campo Minado



Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo do jogo é descobrir todos os quadrados que não contêm mina. Após o primeiro movimento aparece um contorno poligonal, dentro do qual aparecem números inseridos dentro de alguns quadradinhos. Cada número deste representa a quantidade de minas que existem adjacentes a este número, ou seja, nos quadrados localizados à direita, à esquerda, acima, abaixo e na diagonal de onde figura o referido número. O jogo é ganho quando são revelados todos os quadrados que não têm mina.

No primeiro clique (com o botão esquerdo do mouse) não aparecem minas. Nas jogadas seguintes, ao ser escolhido um quadradinho para ser clicado, caso conclui-se que ali não tem uma mina, clicamos com o botão esquerdo do mouse. Por outro lado, se entendemos que ali existe uma mina, o clique deve ser feito com o botão direito do mouse. Caso seja clicado com o botão esquerdo onde há uma minha, o jogo acaba ali, o jogador perde o jogo. Porém, se ao clicar num quadradinho e não houver ali uma mina, pode ocorrer uma das duas situações a seguir:

1. Um número entre 1 e 8 aparece indicando a quantidade de quadradinhos

adjacentes que contêm minas. Na Figura 3.3, na área destacada, observamos que há 2 minas na região adjacente ao número 2.

Figura 3.3: Minas adjacentes à casa com número 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Nenhum número aparece, o que significa que não há mina ao redor do quadradinho clicado que contenha mina. Isso faz com que o jogo abra automaticamente todas as casas ao redor da mesma até encontrar alguma casa que contenha mina ao redor. Na Figura 3.4, ao clicar no quadrado destacado, não aparece indicação de minas, então o jogo abre quadrados vizinhos em que surgem quadrados com indicação de minas.

Figura 3.4: Clique na casa 3: não há mina

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o número de quadrados não descobertos ao redor de um quadrado numerado é igual ao número mostrado, todos os quadrados adjacentes são minas. Em contrapartida, quando o número de quadrados com minas descobertas ao redor de um quadrado numerado é igual ao número mostrado, qualquer outro quadrado adjacente não possui mina, está seguro.

Há ainda uma situação específica onde o jogador pode aumentar a chance de sucesso no jogo conhecendo a teoria de probabilidade. É o caso onde há determinado número de minas vizinhas a uma casa, mas o número de vizinhos ainda cobertos é maior do que o número de minas. Observe a Figura 3.3 onde há duas casas com o número 3. A casa com número 3 mais a direita tem três minas ao seu redor. Duas já estão localizadas. Porém, há 4 casas fechadas ao redor onde em uma há uma mina. Nesse caso, ainda não há como definir onde está a mina. Podemos descartar duas casas, mas resta a dúvida em qual das outras duas estaria a mina. Pode ser que trabalhando com outras casas consiga se chegar a uma conclusão mais a frente. Entretanto, há alguns casos onde é preciso apelar para a probabilidade tentando achar a casa menos provável de ter uma mina.

3.2.2 Atividade Proposta

Utilizando o jogo campo minado conforme anteriormente explicado, proporemos atividades para alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio. O foco será desenvolver a habilidade de lógica. Aplicaremos numa situação prática os conceitos de probabilidade. O objetivo é que o aluno sinta-se desafiado pelas variações que a estratégia do jogo impõe. O desenvolvimento dessa proposta deve ser realizado numa sala com computadores. O projeto visa que sejam alcançados os objetivos trazidos nos documentos oficiais da Educação, em especial o seguinte:

Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás (p.664)

> A unidade temática Probabilidade e Estatística tem como foco o estudo da incerteza e do tratamento de dados/informações. Ela propõe uma abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações do cotidiano dos estudantes, das ciências e da tecnologia. É essencial o desenvolvimento das habilidades para coletar,, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas [...] A probabilidade e estatística nos anos finais, antecipa alguns conhecimentos que sempre foram desenvolvidos no Ensino Médio e agora estão sendo priorizados no Ensino Fundamental.

No que segue descrevemos nossa proposta como foco em alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

PÚBLICO-ALVO

Alunos do Ensino Fundamental;
Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para a conclusão das atividades serão necessárias cinco horas aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória, probabilidade, estatística, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS

Utilizar o campo minado como instrumento de atividades didáticas. O que se pretende é o que o aluno desenvolva as seguintes habilidades:

- Desenvolver estratégias, fazer escolhas e tomar decisões no jogo;
- Raciocínio lógico;
- Cálculo de probabilidade;
- Utilização prática do conceito de "pouco provável", "provável" e "mais provável";
- Comparar frações, ordenando-as em ordem crescente ou decrescente;
- Lidar com conceitos de eventos, espaços amostrais;
- Avaliar o risco e ponderar resultados em decisões tomadas para certa estratégia.
- Anotar e discutir estatísticas.

CONTEÚDOS

Porcentagem, Frações, Estatística, Análise combinatória e Probabilidade.

METODOLOGIA- Aplicação das Atividades

Os alunos jogarão campo minado num tabuleiro 18 por 14 (252 quadrados) com 40 minas, em duas aulas: na primeira e quarta aula da atividade. Na primeira aula o professor descreve todas as regras do jogo. Utilizando computador cada aluno joga o campo minado cinco vezes. Cada aluno ficará responsável por anotar as estatísticas de seus resultados: quantas vezes venceu, quantas minas tinha aberto quando perdeu (no caso de não conseguir vencer o jogo). Na quarta aula da atividade, cada aluno jogará novamente cinco vezes e também anotará as estatísticas (as mesmas da primeira aula). As estatísticas serão anotadas em duas cartelas, uma entregue pelo professor no início da primeira aula e outra no início da quarta aula. Cada cartela terá o formato dado pela Tabela 3.7. Porcentagem de vitórias e número médio de minas abertas serão calculadas na quinta aula.

Tabela 3.7: Cartela com Estatísticas do Jogo Campo Minado

Número de vitórias	
Número de derrotas	
Porcentagem de vitórias	
Número de minas abertas no primeiro jogo	
Número de minas abertas no segundo jogo	
Número de minas abertas no terceiro jogo	
Número de minas abertas no quarto jogo	
Número de minas abertas no quinto jogo	
Número médio de minas abertas	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na segunda aula os alunos discutem entre si quais as estratégias usaram nos jogos, as dificuldades que tiveram, quais as justificativas para as escolhas que fizeram quando o jogo parecia não ter mais saída.

Passada esta etapa, algumas questões serão colocadas pelo professor para serem analisadas entre os alunos. Essas questões serão baseadas no tabuleiro da Figura 3.5 que será entregue para cada aluno. Trata-se de um tabuleiro de 18 por 14 (252 quadrados), com 40 minas.

Figura 3.5: Tabuleiro 18x14

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A																		
B																		
C																		
D																		
E																		
F									5									
G																		
H																		
I																		
J																		
K			2															
L																		
M												3						
N																		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na terceira aula, o professor corrige as atividades. São elas:

1. Quanto por cento das casas estão com minas?
2. Qual é a probabilidade de logo de início o jogador abrir uma mina?
3. Qual é a probabilidade de logo de início o jogador não abrir uma mina?

4. É possível vencer o jogo sem contar com a sorte, ou seja, o jogo depende unicamente de estratégia? Dito de outro modo, se tiver com uma estratégia tida como correta, consegue vencer independente de qualquer coisa?
5. Suponha um tabuleiro com apenas três casas abertas: $F9$, $M12$ e $K3$. Do ponto de vista probabilístico, qual das jogadas a seguir é menos arriscada?
   - Jogada X: clicar num quadrado vizinho de $F9$;
   - Jogada Y: clicar num quadrado vizinho de $M12$;
   - Jogada Z: clicar num quadrado vizinho de $K3$;
   - Jogada W: clicar em um quadrado qualquer que não seja $F9$, $M12$ ou $K3$.

A correção apresentada pelo professor seguirá o seguinte roteiro (o professor nas explicações deve abrir espaço para os alunos apresentarem suas respostas).

Questão 1: Quanto por cento das casas estão com mina?

Nesta atividade, o aluno deve aplicar os conceitos de porcentagem. O professor explica que, sendo 252 o total de quadradinhos e o total de minas 40, então a porcentagem procurada é 15,87 %, obtido pela divisão de 40 por 252.

Questão 2: Qual é a probabilidade de logo de início o jogador abrir uma mina?

O professor explica que tal probabilidade é o resultado da divisão de 40 por 252, ou seja 15,87 % porque todas as 40 minas ainda não foram reveladas e ainda existem 252 quadradinhos. Cabe ressalatar que o jogo, em algumas plataformas, está programado para não abrir uma mina no primeiro movimento do jogador. Assim, estamos considerando versões do jogo onde este não é o caso.

Questão 3: Qual é a probabilidade de logo de início o jogador não abrir uma mina?

O professor explica que tal porcentagem é o resultado da divisão do número de casas que não têm minas (252-40=212) pelo total de casas (252), ou seja 84,13 %.

Questão 4: É possível vencer o jogo sem contar com a sorte, ou seja, o jogo depende unicamente de estratégia? Dito de outro modo, se tiver com uma estratégia tida como correta consegue vencer independente de qualquer coisa?

O professor deve dizer que na maioria das vezes o jogo não depende unicamente de estratégia, é preciso cálculo da probabilidade para avaliar a melhor jogada. Principalmente quando se aproxima do seu final, onde pode ocorrer de ser impossível se ter certeza de onde está determinada mina na vizinhança de alguma casa numerada. Como exemplo, o professor apresenta a Figura 3.3.

Questão 5: Suponha um tabuleiro com apenas três casas abertas: $F9$, $M12$ e $K3$. Do ponto de vista probabilístico, qual das jogadas a seguir é menos arriscada?

- Jogada X: clicar num quadrado vizinho de $F9$;
- Jogada Y: clicar num quadrado vizinho de $M12$;
- Jogada Z: clicar num quadrado vizinho de $K3$;
- Jogada W: clicar em um quadrado qualquer que não seja $F9$, $M12$ ou $K3$.

O professor usa a Definição Clássica de Probabilidade para responder a esta questão

- **Jogada** X: clicar num quadrado vizinho de $F9$;
  Nas adjacências do número 5, há 5 minas em 8 quadradinhos possíveis. Por outro lado, nos outros 3 quadradinhos restantes não há minas. Logo, a probabilidade de encontrar mina é $\frac{5}{8}$ e a probabilidade de não encontrar mina é igual a $\frac{3}{8}$. Isso significa que ao clicar nas adjacências deste número 5 é mais provável encontrar mina do que não encontrar.

- **Jogada** Y: clicar num quadrado vizinho de $M12$;
  Nas adjacências do número 3, há 3 minas em 8 quadradinhos possíveis. Por outro lado, nos outros 5 quadradinhos restantes não há minas. Logo, a probabilidade de encontrar mina é igual a $\frac{3}{8}$ e a probabilidade de não encontrar mina é igual a $\frac{5}{8}$. Isso significa que ao clicar nas adjacências deste número 5 é mais provável não encontrar mina do que encontrar. Logo, a jogada Y é melhor que a jogada X, ou seja menos arriscada, pois $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.

- **Jogada** Z: clicar num quadrado vizinho de $K3$;
  Nas adjacências do número 2, há 2 minas em 8 quadradinhos possíveis. Por outro lado, nos outros 6 quadradinhos restantes não há minas. Logo, a probabilidade de encontrar mina é igual a $\frac{2}{8}$ e a probabilidade de não encontrar mina é igual a $\frac{6}{8}$. Isso significa que ao clicar nas adjacências deste número 2 é mais provável não encontrar mina do que encontrar. Comparando com as jogadas X e Y, temos que Z é melhor que Y, que por sua vez é melhor que X. Isso porque $\frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.

- **Jogada** W: clicar em um quadrado qualquer que não seja $F9$, $M12$ ou $K3$.
  Como já temos 10 minas nas adjacências das casas $F9$, $M12$ e $K3$ (5 minas, 3 minas e 2 minas, respectivamente) então restam 30 minas $(= 40 - 10)$, não reveladas, que estão nos 225 quadradinhos que restam ao retirar os 27 quadradinhos das casas $F9$, $M12$ e $K3$ e suas adjacências $(= 252 - 3.9)$. Portanto, a probabilidade de encontrar mina no restante do

tabuleiro é $\frac{30}{225}$, enquanto que $\frac{195}{225}$ é a probabilidade de não encontrar mina no restante do tabuleiro. Dessa forma, podemos comparar a probabilidade $\frac{195}{225}$ com as probabilidades de não abrir minas nas jogadas X, Y e Z. Dividindo a fração, no numerador e no denominador, por 28,125 estaremos colocando 8 no denominador da fração $\frac{195}{225}$. Obtemos: $\frac{195}{225} = \frac{6{,}933}{8}$. Agora, comparamaos as quatro probabilidades associadas as jogadas X, Y, Z e W. Como: $\frac{6{,}933}{8} > \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, concluímos que as melhores jogadas são, nesta ordem: W, Z, Y e X.

No início da quarta aula o professor explica que a melhor estratégia do jogo é:

1. Abrir todas as casas onde se tem certeza que não há minas;
2. Toda vez que não houver mais como localizar com certeza uma casa sem mina, o jogador parte para a estratégia probabilística: buscar a casa onde é mais provável localizar uma casa sem mina em sua vizinhança. Localizada tal casa, o jogador terá que abrir uma casa na sua adjacência, de forma aleatória. Assim, ele estará correndo risco de perder, mas um risco menor já que não há como não correr risco, nesse caso.

Estabelecida as estratégias, cada aluno usa a quarta aula para jogar as cinco partidas e anotar na cartela as estatísticas obtidas.

Na quinta aula professor e alunos farão um apanhado geral dos resultados. O professor ensina para a turma como realizar o cálculo da porcentagem de vitórias e como fazer o cálculo da média de minas abertas. Cada aluno terá então ideia da melhora (ou piora) no desempenho obtido no jogo campo minado. O professor montará uma tabela no quadro contabilizando algumas estatísticas.

1. Quantos alunos melhoram o desempenho na segunda aula de jogos;
2. Será calculado o número total de vitórias obtidos por todos os alunos na primeira e quarta aula. Será avaliado se este número aumentou e quanto aumentou da primeira para a segunda sequência de cinco jogos (percentualmente).
3. Será calculado a média global de minas abertas por todos os alunos nas duas etapas. Será avaliado se este número médio aumentou e quanto aumentou da primeira para a segunda sequência de cinco jogos (percentualmente).

3.3 Dinâmicas envolvendo Contagem de Dedos das Mãos

Muitas vezes, principalmente em brincadeiras de crianças, para que seja escolhido um vencedor (ou perdedor) de um grupo, utilizam-se jogos que envolvam a contagem dos dedos das mãos. Nesse trabalho analisaremos três modalidades desses jogos:

1. Jogo do dois ou um;
2. Par ou ímpar americano;
3. Jogo do par ou ímpar (em quatro versões).

Cada um desses jogos possui suas especificidades e diferentes análises quanto aos aspectos probabilísticos. Analisaremos as probabilidades de ganho nessas disputas e discorreremos sobre o aspecto de cada modalidade ser ou não justa para sortear um ganhador (ou perdedor). Dizemos que há justiça quando as probabilidades de ganhar (ou perder) são iguais para todos os jogadores. Nesse caso, a utilização de estratégia não altera as chances do ganhador.

3.3.1 Jogo do dois ou um

Nesse jogo, três ou mais crianças ficam organizadas em uma roda e assim que o grupo fala “dois ou um”, todos, simultaneamente, mostram um ou dois dedos. Vence o jogo aquele jogador que mostrar um número de dedos diferente do que os outros jogadores mostraram. Por exemplo, num grupo de cinco crianças, uma delas venceria se colocou um dedo e as outras quatro crianças colocaram dois dedos (venceria também a criança que tenha colocado dois dedos e todas as demais um dedo). Caso nenhuma criança seja a única a mostrar uma dada quantidade de dedos o jogo fica empatado e a dinâmica é repetida. Essa dinâmica pode ser utilizada não apenas para obter o primeiro vencedor mas também para estabelecer uma ordem. Por exemplo, imagine que cinco crianças queiram decidir em qual ordem elas baterão pênalti numa brincadeira de futebol. Nesse caso, o jogo do dois ou um poderia ser repetido até formar uma ordenação das três primeiras crianças. O jogo continuaria dessa forma até que ficasesem apenas duas crianças. A ordem das duas últimas poderia ser estabelecida a partir de um par ou ímpar.

Essa dinâmica é uma dinâmica justa, ou seja, as chances são iguais para todos e a utilização de estratégia não altera a chance de ganhar. Embora não seja justa no caso de algumas crianças combinarem o jogo. Importante também destacar que o jogo pode demorar muito tempo para ser decido se o grupo for formado por um número grande de crianças.

Proposição 3.1. Considere uma disputa do jogo de dois ou um entre $n(n \geq 3)$ crianças. Suponha que cada criança nas repetições escolhe entre um ou dois dedos de forma aelatória. A probabilidade de se demorar exatamente k repetições da disputa do jogo para se ter o primeiro vencedor é

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

onde A_k é o evento em que se demoram k repetições do jogo para se ter o primeiro vencedor.
Além disso, a probabilidade de se demorar pelo menos k repetições até sair o primeiro ganhador é

$$\mathbb{P}(B_k) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

onde B_k é o evento em que se demoram pelo menos k repetições do jogo para se ter o primeiro vencedor.

Demonstração. Note que para n crianças usamos o Princípio Fundamental da Contagem para obter que existem $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ possibilidades de configurações de dedos (cada criança coloca um ou dois dedos). Em cada uma dessas 2^n configurações há vencedor quando uma criança coloca um dedo e as outras $n-1$ crianças colocam dois dedos ou quando uma criança coloca dois dedos e as outras $n-1$ crianças colocam um dedo. Isso ocorrre em $n + n = 2n$ configurações. Logo,

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Assim, para que o jogo tenha o primeiro vencedor na k-ésima repetição é preciso que não haja vencedor nas $k-1$ primeiras rodadas e haja vencedor na k-ésima. Usando a independência entre as repetições a probabilidade fica

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$$

Por outro lado, note que,

$$B_k = \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$$

Logo,

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{m-1} = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}.$$

□

Observação 3.2. Em teoria de Probabilidade chamamos os característicos numéricos de variáveis aleatórias e definimos o valor médio dessas variáveis. No caso, do jogo do dois ou um, se chamarmos de X o número de repetições até sair o primeiro vencedor, o número médio de repetições até sair o primeiro vencedor será

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Tabela 3.8: Número médio de repetições até sair o primeiro vencedor

Número de crianças	4	8	10	16	32
Média de repetições	2	16	51,2	2.048	67.108.864

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.3. Considere uma disputa do jogo de dois um entre 3 crianças. Suponha que cada criança nas repetições escolhe entre um ou dois dedos de forma aelatória. A probabilidade de se demorar exatamente k repetições da disputa do jogo para se ter o primeiro vencedor é

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

Além disso, a probabilidade de se demorar pelo menos k repetições até sair o primeiro ganhador é

$$\mathbb{P}(B_k) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

No caso de dez crianças, a probabilidade de se demorar pelo menos 20 repetições até sair o primeiro ganhador é

$$\mathbb{P}(B_{20}) = \left(1 - \frac{10}{512}\right)^{19} \approx\ 0,68745 = 68,745\%.$$

3.3.2 Jogo do par ou ímpar Americano

O jogo do par ou ímpar americano é muito utilizado para se estabelecer uma ordenação entre crianças. O escolhido pode ser o primeiro a fazer parte de um jogo, ou aquele que ficará de fora de alguma brincadeira. As crianças organizam-se em uma roda e dizem "par ou ímpar americano". Em seguida, cada participante mostra, simultaneamente, o número de dedos que escolher, que pode ser 1,2,3,4 ou 5. Um participante faz a soma (S) de todos os dedos mostrados, enquanto aponta para cada um, começando dele próprio, num mesmo sentido, digamos horário. Após somar todos os dedos, ainda no mesmo sentido (horário), começa a contar em sequência (iniciando do mesmo participante que fez a soma), partindo de 1, até ver em quem recai a soma S. Este participante, onde recai a soma S, é o escolhido.

Este jogo não é um jogo justo, ou seja, os participantes não possuem todos as mesmas chances, há um pequeno viés em relação às probabilidades, conforme veremos a seguir.

Imaginemos um jogo de par ou ímpar americano com três crianças para decidir qual criança irá fechar os olhos numa brincadeira de esconder. Será selecionada aquela que for escolhida no jogo do par ou ímpar americano. Para ser um jogo justo, os três participantes deveriam ter a mesma probabilidade de ganhar, ou seja $\frac{1}{3}$.

Admita que os três participantes, digamos J_1, J_2, J_3 apresentem num mesmo instante, com os dedos, um número de 1 a 5. Suponha ainda que os três participantes escolham os números de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido. Admita que o participante J_1 comece a contagem. Um espaço amostral para este experimento é:

$$\Omega = \{(i,j,k); i,j,k \in \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Pelo princípio multiplicativo : $n(\Omega) = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Agora para $i = 1,2,3$, defina os eventos A_i : participante J_i é o escolhido. Temos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(i,j,k); i+j+k = 3k+1 \text{ para } k = 1,2,3,4\}.\\
A_2 &= \{(i,j,k); i+j+k = 3k+2 \text{ para } k = 1,2,3,4\}.\\
A_3 &= \{(i,j,k); i+j+k = 3k \text{ para } k = 1,2,3,4,5\}.
\end{aligned}$$

Assim: $n(A_1) = 42; n(A_2) = 42$ e $n(A_3) = 41$. Usando a definição clássica de probabilidade:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \frac{42}{125}\\
\mathbb{P}(A_2) &= \frac{42}{125}\\
\mathbb{P}(A_3) &= \frac{41}{125}.
\end{aligned}$$

Portanto, o participante J_3 tem menor probabilidade de ser a criança a fechar os olhos, enquanto que para os outros dois participantes a probabilidade é a mesma, o que fica demonstrado não ser justo o jogo, por não terem todos a mesma probabilidade de ganhar.

3.3.3 Jogo do par ou ímpar

O jogo do par ou ímpar é jogado por duas pessoas quando há necessidade de se escolher uma entre ambas. Cada uma delas escolhe, uma após a outra, uma paridade diferente (par ou ímpar). Um jogador ficará com par, o outro necessariamente com ímpar. Em seguida, apresentam, simultaneamente, suas mãos com uma certa quantidade escolhida de dedos. Ganha aquele que a paridade resultante da soma dos dedos recair na paridade escolhida.

Dependendo da versão do jogo par ou ímpar jogado de forma aleatória, pode haver um viés de sorte, sendo que se uma pessoa joga de forma aleatória e outra joga de acordo com estratégia, essa pessoa que joga de acordo com estratégia tem maior probabilidade de ganho.

Para ser justo (jogando de forma aleatória), é necessário que se for jogar com uma mão, possa se admitir o uso de zero dedos, porque aí teremos três opções para par e três opções para ímpar. Isso, equilibra as probabilidades e aí não tem como usar estratégias. Se usa cinco dedos, mas não pode colocar zero dedos, aí são três números ímpares e dois números pares como possibilidades. Nesse caso de alguém jogar de forma aleatória e outro de forma estratégica, o que joga de forma estratégica tem maior chance.

Se jogar com duas mãos, o ideal é não colocar zero dedos porque aí não teria como adotar estratégia porque seriam cinco possibilidades ímpares (1,3,5,7,9) e cinco possibilidades pares (2,4,6,8, 10). Ainda no caso de jogar com duas mãos e colocar zero dedo, aí já muda, seriam onze possibilidades: seis pares (0,2,4,6,8,10) e cinco ímpares (1,3,5,7,9), aí pode usar estratégia e o jogo par ou ímpar deixa de ser justo. A quantidade de dedos mostrados depende da versão do jogo. Existem quatro versões:

1. Com uma só mão, sem a possibilidade de usar zero dedos;
2. Com uma só mão, com a possibilidade de usar zero dedos;
3. Com duas mãos, sem a possibilidade de usar zero dedos;
4. Com duas mãos, com a possibilidade de usar zero dedos.

Agora vamos fazer uma análise das quatro versões do jogo par ou ímpar. Vamos representar o jogo do par ou ímpar por $PI(m; M; s)$ onde m representa o número mínimo de dedos usado por cada jogador e M representa o número máximo de dedos usado por cada jogador. Temos $m = 0$ ou $m = 1$ e $M = 5$ ou $M = 10$. Já s indica se é usada estratégia ou não. Assim, $s = S$ se é adotada estratégia e $s = N$ se nenhum dos jogadores adotam estratégia.

Com uma só mão, sem a possibilidade de usar zero dedos

Situação 1 (Os dois jogadores jogam aleatoriamente).

Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, o que tem a maior chance de ganhar é aquele que escolher par.

Proposição 3.4. Considere o jogo $PI(1;5;n)$. Seja o evento A: "jogador que escolhe par ganha". Temos $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{25}$.

Demonstração. Nesse caso, nenhum dos dois jogadores joga estrategicamente, ambos jogam aleatoriamente. Cada jogador poderá escolher números entre 1 e 5. O conjunto de casos possíveis é:

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Pelo princípio multiplicativo, temos que $n(\Omega) = 5 \times 5 = 25$. Sendo A: "jogador que escolhe par ganha" temos $A = \{(i,j); i + j \text{ par }\}$. As combinações de jogadas que totalizam soma par são: (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5). No total são 13 possibilidades, ou seja: 3.3 + 2.2 = 13.

Portanto , $n(A) = 13$. Logo, utilizando a definição clássica de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{25} = 0,52 = 52\%.$$

Assim, considerando que os dois jogadores jogam aleatoriamente, terá maior chance de ganhar aquele que escolher par, que terá uma probabilidade de 52 % de ganhar e 48 % de probabilidade de perder. □

Situação 2(Um jogador joga estrategicamente e outro aleatoriamente).

Suponha que, o jogador que escolheu par assuma que o outro jogará aleatoriamente. Então, a estratégia adotada para maximizar suas chances de ganho será de colocar um número ímpar de dedos.

Proposição 3.5. Considere o jogo $PI(1;5;s)$. Sejam os eventos: A: "Estrategista (que escolheu par) vence o jogo"B: "Estrategista coloca um número ímpar". Temos $\mathbb{P}(A|B) = \frac{3}{5}$.

Demonstração. Seja Ω o espaço amostral. temos

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Logo, $n(\Omega) = 5 \times 5 = 25$. Temos $B = \{(i,j); i \text{ ímpar } \}$. Logo, $n(B) = 3 \times 5 = 15$. Além disso, $A \cap B$ ocorre se e somente se os dois jogadores colocam um número ímpar de dedos.

$$A \cap B = \{(i;j); i,j \text{ números ímpares } \}.$$

Logo, $n(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$ e então $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{25}$. Além disso, $\mathbb{P}(B) = \frac{15}{25}$. Logo, a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que ocorreu o evento B será:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{15}{25}} = 0.6 = 60\%.$$

□

Com uma só mão, podendo utilizar zero dedos

Situação 1 (Os dois jogadores jogam aleatoriamente)

Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos seis números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, as chances de ganhar são iguais para ambas e o jogo é um jogo justo.

Proposição 3.6. Considere o jogo $PI(0;5;n)$. Seja o evento A: "jogador que escolhe par ganha". Temos $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Seja Ω o espaço amostral. Cada jogador pode escolher números entre 0 e 5. O conjunto de casos possíveis é:

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$$

Pelo princípio multiplicativo, temos que $n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. Seja o evento A: "jogador que escolher par ganhar". Então, $A = \{(i,j), i+j \text{ par}\}$. Sabendo que a soma de dois números pares é par e que a soma de dois números ímpares também é par, obtemos o total de combinações que totalizam par: $3.3 + 3.3 = 18$ possibilidades. Portanto, $n(A) = 18$. Logo, utilizando a definição clássica de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega} = \frac{18}{36} = 0,50 = 50\%.$$

Assim, considerando que os dois jogadores jogam aleatoriamente, as chances de ganhar são iguais para ambos, ou seja, probabilidade de 50 % de ganhar e 50 % de perder, o que torna justa essa versão do jogo. □

Situação 2 (Um jogador joga estrategicamente e outro aleatoriamente).

Suponha que, o jogador que escolheu par assuma que o outro jogará aleatoriamente. Ainda assim, o jogo é justo e as probabilidades iguais, ou seja 50 %.

Proposição 3.7. Considere o jogo $PI(0;5;s)$. Sejam os eventos: A: "Estrategista (que escolheu par) vence o jogo" B: "Estrategista coloca um número ímpar". Temos $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Seja Ω o espaço amostral. Então

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{0,1,2,3,4,5\}\}.$$

Temos $B = \{(i,j); i \text{ ímpar }\}$, donde $n(B) = 3 \times 6 = 18$. Além disso, $A \cap B$ é o evento onde o estrategista vence o jogo colocando um número ípar de dedos. Logo, $A \cap B = \{(i;j); i+j; \text{ par, com } i;j \text{ números ímpares }\}$ e então $n(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$. Daí, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{25}$ Por fim, $\mathbb{P}(B) = \frac{18}{25}$. Logo, a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que ocorreu o evento B será:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{18}{25}} = 0,50 = 50\%.$$

□

Com as duas mãos, sem poder utilizar zero dedos

Situação 1 (Os dois jogadores jogam aleatoriamente)

Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos dez números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, as chances de ganhar são iguais para ambas e o jogo é um jogo justo. Nesse caso nenhum dos dois jogadores joga estrategicamente, ambos jogam aleatoriamente.

Proposição 3.8. Considere o jogo $PI(1;10;n)$. Seja o evento A: "jogador que escolhe par ganha". Temos $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52}$.

Demonstração. Cada jogador pode escolher números entre 1 e 10. O conjunto de casos possíveis é:

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\}.$$

Pelo princípio multiplicativo, temos que $n(\Omega) = 10 \times 10 = 100$. Dado o evento A: "jogador que escolhe par ganha", temos: $A = \{(i,j), i+j \text{ par}\}$. Sabendo que a soma de dois números pares é par e que a soma de dois números ímpares também é par, obtemos o total de combinações que totalizam par: $5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$ possibilidades. Portanto , $n(A) = 50$.

Logo, utilizando a definição clássica de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega} = \frac{50}{100} = 0,50 = 50\%.$$

Assim, considerando que os dois jogadores jogam aleatoriamente, cada jogador tem probabilidade 50 % ganhar e 50 % de perder. □

Situação 2(Um jogador joga estrategicamente e outro aleatoriamente)

Suponha que, o jogador que escolheu par assuma que o outro jogará aleatoriamente. Ainda assim as probabilidades de vitória são iguais para ambos, 50%, e o jogo é justo, não adiantando estratégia para ser jogado.

Proposição 3.9. Considere o jogo $PI(1; 10; s)$. Sejam os eventos: A: "Estrategista (que escolheu par) vence o jogo" e B: "Estrategista coloca um número par". Temos $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Nesse caso, o espaço amostral Ω é dado por

$$\Omega = \{(i, j); i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$$

Logo, $n(\Omega) = 10 \times 10 = 100$.

Temos $B = \{(i, j); i \text{ ímpar } \}$. Logo, $n(B) = 5 \times 10 = 50$. Por outro lado, $A \cap B$ é o evento onde o estrategista vence o jogo colocando um número par. Isto é, $A \cap B = \{(i; j); i + j; \text{ par, com } i; j \text{ números ímpares } \}$. Temos $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{25}{100}$, pois no caso de ambos os jogadores tirarem ímpar, dará soma par nas seguintes quantidades de casos: $5 \times 5 = 25$. Além disso, $\mathbb{P}(B) = \frac{50}{100}$. Logo, a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que ocorreu o evento B será:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{50}{100}} = 0.5 = 50\%.$$

□

Com as duas mãos, podendo utilizar zero dedos

Situação 1 (Os dois jogadores jogam aleatoriamente)

Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos onze números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, as chances de ganhar são maiores para o jogador que escolher par. Nesse caso nenhum dos dois jogadores jogam estrategicamente, ambos jogam aleatoriamente.

Proposição 3.10. Considere o jogo $PI(0;10;n)$. Seja o evento A: "jogador que escolhe par ganha". Temos $\mathbb{P}(A) = \frac{61}{121}$.

Demonstração. Cada jogador poderá escolher números entre 0 e 10, onze números ao todo, sendo 6 números pares e 5 números ímpares. O conjunto de casos possíveis é:

$$\Omega = \{(i,j); i,j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\}.$$

Pelo princípio multiplicativo, temos que $n(\Omega) = 11 \times 11 = 121$. Seja o evento A: "jogador que escolher par ganhar". Temos $A = \{(i,j), i+j, \text{ par }\}$. Sabendo que a soma de dois números pares é par e que a soma de dois números ímpares também é par, obtemos o total de combinações que totalizam par: $6 \times 6 + 5 \times 5 = 61$ possibilidades de dar par. Portanto, $n(A) = 61$. Logo, utilizando a definição clássica de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{61}{121} = 0,5041 = 50,41\%.$$

Assim, considerando que os dois jogadores jogam aleatoriamente, as chances de ganhar são maiores para o jogador que escolher par, ou seja, probabilidade de 50,41% de chance de ganhar e 49,59% de chance de perder. Nesse caso, o jogo deixa de ser um jogo justo e permite utilizar-se de estratégia para ser jogado.

□

Situação 2 (Um jogador joga estrategicamente e outro aleatoriamente)

Suponha que, o jogador que escolheu par assuma que o outro jogará aleatoriamente. Então, a estratégia adotada para maximizar suas chances de ganho será de colocar um número par de dedos.

Proposição 3.11. Considere o jogo $PI(0;10;s)$. Sejam os eventos: A: "Estrategista (que escolheu par) vence o jogo"B: "Estrategista coloca um número par". Temos $\mathbb{P}(A|B) = \frac{18}{33}$.

Demonstração. Nesse caso, o espaço amostral Ω é dado por:

$$\Omega = \{(i, j); i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}.$$

Daí, $n(\Omega) = 11 \times 11 = 121$. Temos $B = \{(i, j); i \text{ par } \}$. Logo, $n(B) = 6 \times 11 = 66$. Além disso, $A \cap B$ é o evento onde o estrategista vence o jogo colocando um número par de dedos. Matematicamente, $A \cap B = \{(i; j); i+j; \text{ par, com } i; j \text{ números pares } \}$. $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{36}{121}$, pois no caso de ambos os jogadores tirarem par, dará soma par nas seguintes quantidades de casos : $6 \times 6 = 36$. Logo, $\mathbb{P}(B) = \frac{66}{121}$. Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que ocorreu o evento B será:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B))} = \frac{\frac{36}{121}}{\frac{66}{121}} = 0,5454 = 54,54\%.$$

$\square$

No restante da seção vamos apresentar dinâmicas usando contagem de dedos das mãos. Nelas, o professor pode aplicar conceitos de análise combinatória e probabilidade. As dinâmicas permitem que o estudante possa participar ativamente da sua aprendizagem.

3.3.4 Associação de probabilidades no Jogo 2 ou 1

Nome da atividade: Jogo dois ou um

PÚBLICO-ALVO

Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para a conclusão das atividades serão necessárias três horas aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS

Aplicação prática da teoria de análise de combinatória.

CONTEÚDOS

Análise combinatória.

METODOLOGIA

A dinâmica consistirá em aplicar tais conceitos a um grupo de crianças. Nesse caso para que haja vencedor, é preciso que uma criança mostre 1 dedo, enquanto as outras mostrem 2. Ou que uma criança mostre 2 dedos, enquanto as outras mostrem 1 dedo. Se tiver demorando muito tempo, o professor para o jogo, simula com a turma a duração das rodadas e calcula a probabilidade de serem necessárias k repetições até sair um vencedor. Calculada a probabilidade, constata-se que esta é igual para todos, independente de estratégias, sendo por esta razão um jogo justo.

A aula se inicia com o professor explicando o que é um jogo justo. A seguir a dinâmica do dois ou um é explicada. O professor toma o caso de três alunos. Os alunos jogam algumas vezes para compreender o funcionamento do jogo. Um tempo é dado para os alunos estabelecerem as probabilidades de vitória para cada um dos jogadores. Passado esse tempo o professor faz os cálculos e mostra a probabilidade de cada jogador sair vencedor. Para isso, o professor constroi o espaço amostral

$$\Omega = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,1,1),(2,2,1),(2,1,2),(2,2,2)\}.$$

Supondo que os valores sejam colocados aleatoriamente, o professor mostra que dos oito resultados possíveis dois fazem com que não haja vencedor. São eles $(1,1,1)$ ou $(2,2,2)$. Se os jogadores são J_1, J_2, J_3, J_1 vence se ocorre $(1,2,2)$ ou $(2,1,1)$, J_2 vence se ocorre $(1,2,1)$ ou $(2,1,2)$ e J_3 vence se ocorre $(1,1,2)$ ou $(2,2,1)$. Claramente, cada jogador tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de vencer e além disso, há probabilidade $\frac{1}{4}$ do jogo não ter vencedor.

Passada essa etapa, o professor pede a turma para considerar o jogo agora com 4 jogadores J_1, J_2, J_3 e J_4. Inicialmente, os alunos realizam a dinâmica algumas vezes. Depois o professor pede aos alunos que obtenham a probabilidade de vitória de cada jogador se eles jogam de forma aleatória. Dado o tempo suficiente o professor monta o espaço amostral equivalente

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1,1),(1,1,2,1),(1,1,1,2),(1,1,2,2),(1,2,1,1),(1,2,2,1),(1,2,1,2),\\ &(1,2,2,2),(2,1,1,1),(2,1,2,1),(2,1,1,2),(2,1,2,2),(2,2,1,1),(2,2,2,1),(2,2,1,2),\\ &(2,2,2,2)\}\end{aligned}$$

Assim, não há vencedor se o resultado estiver no conjunto { (1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,2,2,1), (1,2,1,2), (2,1,2,1), (2,1,1,2),(2,2,1,1), (2,2,1,2), (2, 2,2,2) }.

- J_1 vence se o resultado for (1,2,2,2) ou (2,1,1,1),
- J_2 vence se o resultado for (1,2,1,1) ou (2,1,2,2),
- J_3 vence se o resultado for (1,1,2,1) ou (2,2,1,2),
- J_4 vence se o resultado for (1,1,1,2) ou (2,2,2,1).

Daí conclui com a turma que cada jogador tem probabilidade $\frac{1}{8}$ de sair vencedor. Além disso, a probabilidade de que não haja vencedor na partida é $\frac{1}{2}$.

Passada essa etapa o professor sugere um jogo de 2 ou 1 com dez jogadores. Um tempo é dado para eles realizarem a experiência. Avalia-se após algum tempo quantas vezes os alunos jogaram e quantas vezes houve (se houve) vencedor. Feita essa avaliação o professor pede que os alunos em grupos respondam as seguintes questões, supondo que os jogadores joguem de forma aleatória:

1. Qual é o número de resultados possíveis para uma partida de 2 ou 1?
2. Qual é a probabilidade de vitória para cada jogador?
3. Qual é a probabilidade de em uma partida não haver vencedor?

Passado um tempo, o professor corrije a atividade apresentando os seguintes resultados:

1. Pelo P.F.C há $2^{10} = 1024$ resultados possíveis.
2. O professor fixa um dos dez jogadores, digamos J_1 e argumenta que ele vence se o resultado for (1,2,2,2,2,2,2,2,2,2) ou (2,1,1,1,1,1,1,1,1,1). Logo, cada jogador terá a mesma probabilidade de vitória que é $\frac{1}{512}$.
3. Como cada jogador tem probabilidade de vitória $\frac{1}{512}$, a probabilidade de sair vencedor em uma partida será $10 \times \frac{1}{512} = \frac{5}{256}$. Assim, em uma partida, a probabilidade de não sair vencedor será $1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256} = 0.98046875$.

Vencida essa etapa o professor propõe a montagem de uma tabela com os resultados obtidos. A Tabela 3.9 mostra a tabela a ser apresentada pelo professor.

Tabela 3.9: Tabela a ser apresentada pelo professor

Número de jogadores	3 jogadores	4 jogadores	10 jogadores
Número de resultados possíveis	2^3	2^4	2^{10}
Probabilidade de vitória por jogador	$\frac{2}{2^3}$	$\frac{2}{2^4}$	$\frac{2}{2^{10}}$
Probabilidade de ninguém vencer	$1 - 3 \times \frac{2}{2^3}$	$1 - 4 \times \frac{2}{2^4}$	$1 - 10 \times \frac{2}{2^{10}}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

No que segue, o professor pede para que os alunos considerem o caso de n jogadores no jogo do dois ou um. Ele pede que os alunos se organizem em grupos e respondam as seguintes questões, supondo que os n jogadores joguem de forma aleatória:

1. Qual é o número de resultados possíveis para uma partida de 2 ou 1?
2. Qual é a probabilidade de vitória para cada jogador?
3. Qual é a probabilidade de em uma partida não haver vencedor?

Passado um tempo, o professor corrije a atividade apresentando os resultados a seguir:

1. Pelo P.F.C há 2^n resultados possíveis.
2. O professor fixa um dos n jogadores, digamos J_1 e argumenta que ele vence se o resultado for (1,2,2,2,2,2,...,2,2,2) ou (2,1,1,1,...,1,1,1,1,1). Logo, cada jogador terá a mesma probabilidade de vitória que é $\frac{2}{2^n}$.
3. Como cada jogador tem probabilidade de vitória $\frac{2}{2^n}$, a probabilidade de sair vencedor em uma partida será $n \times \frac{2}{2^n}$. Assim, em uma partida, a probabilidade de não sair vencedor será $1 - n \times \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}$.

A última parte da atividade consiste em avaliar a demora para sair o primeiro vencedor no jogo dois ou um. Um pré-requisito para fazer as contas é compreender o conceito de independência. O professor faz uma revisão desse conceito antes de avançar. Realizada essa revisão, ele volta à atividade e começa o cálculo com três jogadores. Então, define o evento A_1 onde sai vencedor logo na primeira tentativa. A probabilidade é $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Daí define o evento A_k onde o primeiro vencedor sai na k-ésima repetição. O professor mostra que, por independência a probabilidade é,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \ldots \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

para todo inteiro positivo k.

O professor define também o evento B_k onde se demora pelo menos k repetições até sair o primeiro vencedor. Para que B_k ocorra é necessário e suficiente que as $k-1$ primeiras repetições terminem sem vencedor. O professor mostra que, por independência a probabilidade é,

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \ldots \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

para todo inteiro positivo k.

O professor pede então que os alunos repitam os cálculos para quatro e dez jogadores. Após dar um tempo, para os alunos trabalharem, apresenta a correçãodada na Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Correção apresentada pelo professor

Número de jogadores	3 jogadores	4 jogadores	10 jogadores
$\mathbb{P}(A_k)$	$\frac{6}{8}\left(\frac{2}{8}\right)^{k-1}$	$\frac{8}{16}\left(\frac{8}{16}\right)^{k-1}$	$\frac{5}{256}\left(\frac{251}{256}\right)^{k-1}$
$\mathbb{P}(B_k)$	$\left(\frac{2}{8}\right)^{k-1}$	$\left(\frac{8}{16}\right)^{k-1}$	$\left(\frac{251}{256}\right)^{k-1}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor então explora valores particulares de k mostrando que quando o número de jogadores é grande fica muito provável que seja necessário repetir o jogo várias vezes até sair o primeiro vencedor. O professor apresenta a Tabela 3.11.

Tabela 3.11: Correção apresentada pelo professor

Número de jogadores	3 jogadores	4 jogadores	10 jogadores
$\mathbb{P}(B_2)$	$\frac{1}{4} = 0,250$	$\frac{1}{2} = 0,500$	$\frac{251}{256} = 0,980$
$\mathbb{P}(B_5)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0,004$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,062$	$\left(\frac{251}{256}\right)^4 = 0,924$
$\mathbb{P}(B_{10})$	$\left(\frac{1}{4}\right)^9 = 4.10^{-6}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0,002$	$\left(\frac{251}{256}\right)^9 = 0,837$
$\mathbb{P}(B_{30})$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{29} = 3.10^{-18}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{29} = 2.10^{-9}$	$\left(\frac{251}{256}\right)^{29} = 0,564837$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, o professor propõe que os alunos montem uma fórmula para os eventos A_k e B_k para o caso de n jogadores. O professor pede que os alunos observem os casos particulares com atenção para induzirem as fórmulas. Dado um tempo para discussão a atividade é corrigida. O professor então faz a prova formal do resultado argumentando que para que o jogo tenha o primeiro vencedor na k-ésima repetição é preciso que não haja vencedor nas $k-1$ primeiras rodadas e haja vencedor na k-ésima. Usando a independência entre as repetições a probabilidade fica

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

Para que B_k ocorra é necessário e suficiente que as $k-1$ primeiras repetições terminem sem vencedor. O professor mostra que, por independência a probabilidade é,

$$\mathbb{P}(B_k) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

Para finalizar a dinâmica, o professor encerra a aula fazendo uma lista com ass conclusões obtidas:

Resultados:

No jogo do dois ou um com n jogadores:

- Há 2^n resultados possíveis;
- A probabilidade que cada jogador tem de vencer é

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

- A probabilidade de não ter vencedor numa disputa é

$$1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

- A probabilidade do primeiro vencedor sair na k-ésima repetição do jogo é

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

- A probabilidade de ser necessário repetir o jogo pelo menos k vezes para se ter o primeiro vencedor é

$$\mathbb{P}(B_k) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

3.3.5 O jogo do par ou ímpar americano é justo?

Nome da Atividade: O jogo do par ou ímpar americano é justo?

PÚBLICO-ALVO

Alunos da segunda série do Ensino Médio. Alunos em preparação para olimpíadas

DURAÇÃO

Para a conclusão das atividades serão necessárias duas horas aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória e probabilidade, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS

Aplicação prática da teoria de análise de combinatória e probabilidade.

CONTEÚDOS

Análise combinatória e probabilidade.

METODOLOGIA

O professor propõe a disputa do par ou ímpar americano para decidir qual criança será a primeira a fazer parte de um jogo. A turma é então dividida em grupos de quatro crianças. Três jogam e uma fica responsável por anotar os resultados. Em cada roda o jogo será repetido trinta vezes. Em cada grupo, as crianças organizam-se em uma roda e dizem "par ou ímpar americano". Em seguida, cada participante mostra, simultaneamente, o número de dedos que escolher, que pode ser 1,2,3,4 ou 5. Um participante faz a soma (S) de todos os dedos mostrados, enquanto aponta para cada um, começando dele próprio, num mesmo sentido, digamos horário. Após somar todos os dedos, ainda no mesmo sentido (horário), começa a contar em sequência (iniciando do mesmo participante que fez a soma), partindo de 1, até ver em quem recai a soma S. Este participante, onde recai a soma S, é o escolhido. Após cada grupo jogar 30 vezes, anota-se no quadro os resultados obtidos em cada grupo. Verifca-se em cada grupo frequência de vitórias dos jogadores. No fim algumas perguntas são propostas aos jogadores:

1. O jogo do par ou ímpar americano é um jogo justo, ou seja, todos os participantes tem a mesma chance de vencer?
2. A soma S pode assumir quais valores?
3. Seria possível construir um espaço amostral equiprovável para o par ou ímpar americano?
4. Cada valor possível da soma S tem a mesma probabilidade de ocorrer?
5. Após responder as três questões anteriores você mantém sua opinião sobre a primeira pergunta?

Após um tempo dado a turma o professor procede a análise dessas questões. A ideia é começar pela segunda pergunta. O professor deve convencer a turma que a soma S pode assumir valor no conjunto

$$\mathcal{S} = \{3, 4, 5, 6, \dots, 15\}.$$

Para a terceira pergunta o professor constroi o espaço amostral

$$\Omega = \{(i, j, k); i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Assim, cada possibilidade é um trio de valores (i, j, k) onde i, j e k representam a quantidade de dedos mostrados pelas crianças. Assim, $\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), \ldots, (5, 5, 5)\}$. Portanto, pelo princípio multiplicativo : $n(\Omega) = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Assim, se as crianças mostram os dedos de forma aleatória cada configuração tem probabilidade $\frac{1}{125}$.

Prosseguindo a análise o professor chega a quarta pergunta. Começando com casos particulares o professor lista:

$$\{S = 3\} = \{(1, 1, 1)\}; \{S = 15\} = \{(5, 5, 5)\}; \{S = 4\} = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}.$$

Daí,

$$\mathbb{P}(S = 3) = \mathbb{P}(S = 15) = \frac{1}{125} \text{ e } \mathbb{P}(S = 4) = \frac{3}{125}.$$

Seguindo lista

$$\begin{aligned}\{S = 9\} =& \{(2, 2, 5), (5, 2, 2), (2, 5, 2), (1, 3, 5), (3, 1, 5), (5, 1, 3), (5, 3, 1), (3, 5, 1),\\ &(1, 5, 3), (4, 4, 1), (1, 4, 4), (4, 1, 4), (3, 3, 3), (4, 3, 2), (4, 2, 3), (2, 3, 4),\\ &(2, 4, 3), (3, 4, 2), (3, 2, 4)\}\end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{P}(S = 9) = \frac{19}{125}.$$

Fica claro, então que as possíveis somas não têm probabilidades iguais de ocorrência.

Com relação a última pergunta, fica claro que caso o jogo fosse justo, cada jogador teria probabilidade $\frac{1}{3}$ de ocorrer. Como são 125 resultados possíveis equiprováveis, isso não é possível já que 125 não é divisível por 3. Logo, com 3 jogadores não temos um jogo justo. Para obter o valor correto das probabilidades, o professor define os eventos A_1 (J_1 é o escolhido), A_2 (J_2 é o escolhido) e A_3 (J_3 é o escolhido). Então

$$\begin{aligned}A_1 &= \{S = 4\} \cup \{S = 7\} \cup \{S = 10\} \cup \{S = 13\}\\ A_2 &= \{S = 5\} \cup \{S = 8\} \cup \{S = 11\} \cup \{S = 14\}\\ A_3 &= \{S = 3\} \cup \{S = 6\} \cup \{S = 9\} \cup \{S = 12\} \cup \{S = 15\}\end{aligned}$$

O professor divide a sala em treze grupos de forma que o i-ésimo grupo obtém os resultado onde $\{S = i\}$. Contabilizados os casos, o professor corrige e faz o cálculos das probabilidades obtendo

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\{S = 4\} \cup \{S = 7\} \cup \{S = 10\} \cup \{S = 13\}) = \frac{42}{125}$$
$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\{S = 5\} \cup \{S = 8\} \cup \{S = 11\} \cup \{S = 14\}) = \frac{42}{125}$$
$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\{S = 3\} \cup \{S = 6\} \cup \{S = 9\} \cup \{S = 12\} \cup \{S = 15\}) = \frac{41}{125}$$

Para segunda aula o professor propõe a repetição da atividade para quatro jogadores, com exceção do cálculo exato da probabilidade. Primeiramente eles jogam em grupos, os resultados são anotados em tabela e colocados no quadro. Após discussão, o professor dá tempo para os alunos responderem as cinco perguntas propostas para o caso de três jogadores (agora para quatro jogodores). Passado o tempo faz a correção.

A ideia é começar pela segunda pergunta. O professor deve convencer a turma que a soma S pode assumir valor no conjunto

$$\mathcal{S} = \{4, 5, 6, \ldots, 20\}.$$

Para a terceira pergunta o professor constroi o espaço amostral

$$\Omega = \{(i, j, k, l); i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Assim, cada possibilidade é uma quadra de valores (i, j, k, l) onde i, j, k e l representam a quantidade de dedos mostrados pelas crianças. Assim, $\Omega = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1), \ldots, (5, 5, 5, 5)\}$. Portanto, pelo princípio multiplicativo : $n(\Omega) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. Assim, se as crianças mostram os dedos de forma aleatória cada configuração tem probabilidade $\frac{1}{625}$.

Prosseguindo a análise o professor chega a quarta pergunta. Começando com casos particulares o professor lista:

$$\{S = 4\} = \{(1, 1, 1, 1)\}; \{S = 20\} = \{(5, 5, 5, 5)\};$$
$$\{S = 5\} = \{(1, 1, 1, 2), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 1)\}.$$

Daí,

$$\mathbb{P}(S = 4) = \mathbb{P}(S = 20) = \frac{1}{625} \text{ e } \mathbb{P}(S = 5) = \frac{5}{625}.$$

Fica claro, então que as possíveis somas não têm probabilidades iguais de ocorrência.

Com relação a última pergunta, fica claro que caso o jogo fosse justo, cada jogador teria probabilidade $\frac{1}{4}$ de ocorrer. Como são 625 resultados possíveis equiprováveis, isso não é possível já que 625 não é divisível por 4. Logo, com 4 jogadores não temos um jogo justo.

3.3.6 Jogo do par ou ímpar

Nome da Atividade: Jogo do par ou ímpar

PÚBLICO-ALVO
Alunos da segunda série do Ensino Médio/ Alunos em preparação para olimpíada de Matemática.

DURAÇÃO
Para a conclusão das atividades serão necessárias duas horas aula.

PRÉ-REQUISITOS
O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS
Aplicação prática da teoria de análise de combinatória.

CONTEÚDOS Análise combinatória/ Probabilidade/ Relações de Reccorrência.

METODOLOGIA
Incialmente, o professor monta dois grupos A e B com o mesmo número de alunos. O grupo A é de estrategistas e o grupo B de leigos. Obviamente isto não é informado aos alunos. O professor conversa com cada grupo em separado. Cada aluno pode, em uma disputa apresentar 1,2,3,4 ou 5 dedos. Ao grupo A instrui os alunos a colocar um número par de dedos quando pedir ímpar e um número ímpar de dedos quando pedir par. Nesse caso, terá 0,6 de probabilidade de vencer se o adversário jogar de forma aleatória. Para o grupo B apenas explica as regras do jogo. Monta-se então disputas entre alunos dos dois grupos, simulando uma aposta. Cada aluno inicia com três unidades monetárias. A disputa entre dois alunos termina quando um deles ficar sem undiades monetárias. Cada repetição do par ou ímpar vale uma unidade monetária.

Ao final de todas as disputas verifica-se quantos vencedores teve o grupo A e quantos vencedores teve o grupo B. Se os estrategistas usam estratégia sempre e os leigos jogam sempre de forma aleatória a probabilidade de cada estrategista em vencer é de quase 0,80. Espera-se então uma ampla maioria de vencedores no grupo A. De fato, se há, digamos 20 disputas, pelo modelo binomial espera-se, em média, quase 15 vencedores no grupo A.

Terminada as disputas, os alunos são chamados a discussão para falarem sobre os resultados. Verifica-se se algum aluno compreendeu por que os estrategistas tinham maior chance de vitória em cada confronto. Passada essa etapa, o profesasor mostra em detalhes por que, em cada disputa, a probabilidade de vitória do estrategista é 0,6 (se, é claro, o leigo joga de forma aleatória). O professor questiona aos alunos do grupo B se algum usou algum tipo de estratégia.

Passada essa etapa o professor mostra qual era a probabilidade de um estrategista vencer uma disputa. O professor apresenta a seguinte prova.

Suponha que A seja o evento onde o estrategista vence o leigo na disputa. Suponha que o estraegista começou com i unidades e o leigo com $N - i$ unidades. Escreva $p_i = \mathbb{P}(A)$. Defina E como o evento em que o estrategista vence a primeira rodada. Condicionado na primeira rodada, temos:

$$p_i = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E).\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|E^C)\mathbb{P}(E^C) = 0,6.\mathbb{P}(A|E) + 0,4.\mathbb{P}(A|E^C).$$

Note que, uma vez que a primeira rodada resulta em vitória do estrategista, após a primeira aposta o estrategista fica com $i + 1$ unidades enquanto o leigo fica com $N - (i + 1)$. Por outro lado, se o leigo vence a primeira aposta o estrategista fica com $i - 1$ unidades enquanto o leigo fica com $N - (i - 1)$. Como os resultados das apostas sucessivas são independentes temos

$$\mathbb{P}(A|E) = p_{i+1} \text{ e } \mathbb{P}(A|E^C) = p_{i-1}.$$

Logo, podemos escrever

$$p_i = 0,6.p_{i+1} + 0,4.p_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Temos ainda as condições de contorno $p_0 = 0$ e $p_N = 1$.
Assim,

$$p_{i+1} - p_i = \frac{2}{3}(p_i - p_{i-1}), i = 1, 2, \ldots, N - 1.$$

Logo, como $p_0 = 0$:

$$p_2 - p_1 = \frac{2}{3}(p_1 - p_0) = \frac{2}{3}$$

$$p_3 - p_2 = \frac{2}{3}(p_2 - p_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 p_1$$

$$\vdots$$

$$p_i - p_{i-1} = \frac{2}{3}(p_{i-1} - p_{i-2}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} p_1$$

$$\vdots$$

$$p_N - p_{N-1} = \frac{2}{3}(p_{N-1} - p_{N-2}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} p_1$$

Somando as $i-1$ primeiras equações:

$$p_i - p_1 = p_1 \left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\right]$$

Assim, aplicamos a soma dos termos de uma progressão geométrica finita e obtemos

$$p_i = \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \frac{2}{3}}\right] p_1.$$

Como $p_N = 1$ temos

$$p_1 = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N}$$

e assim

$$p_i = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N}.$$

De modo inteiramente similar, o professor define q_i como a probabilidade de que o leigo termine com todo o dinheiro, quando o estrategista começa com i unidades e o leigo com $N-i$ unidades. O professor pede que os alunos resolvam uma nova recorrência usando raciocínio análogo ao anterior. Os alunos devem obter:

$$q_i = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{N-i}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^N}$$

Por fim, o professor enfatiza que que existem três possibilidades: o estrategista vence, o leigo vence ou o jogo continua indefinidamente sem que ninguém vença. Daí ele define r_i como a probabilidade de que o jogo nunca termina e argumenta que $p_i + q_i + r_i = 1$. mostra que $r_i = 0$ pois

$$p_i + q_i = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N} + \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{N-i}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^N} = 1.$$

Ou seja, o jogo termina com probabilidade 1.

Agora, o professor retorna a dinâmica realizada pelos alunos e mostra que a probabilidade de vitória do estrategista (quando o leigo joga de forma aleatória)

era
$$p_3 = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \frac{513}{665} = 0,7714.$$

Logo, se há n confrontos entre estrategistas e leigos, a probabilidade $P(k)$ de exatamente k estrategistas vencerem é

$$P(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{513}{665}\right)^k\left(\frac{152}{665}\right)^{n-k}, k = 0,1,2,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Para argumentar isso, o professor explica que em n confrontos há $\binom{n}{k}$ modos de escolher k estrategistas dentre n estrategistas. Fixada uma sequência de k estrategistas, a probabilidade destes k vencerem e os outros $n-k$ perderem é

$$\left(\frac{513}{665}\right)^k\left(\frac{152}{665}\right)^{n-k},$$

o que estabelece (3.1).

O professor mostra um exemplo numérico. Se há 20 pares de confrontos a probabilidade dos estrategistas ganharem pelo menos 15 é dada por

$$\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{513}{665}\right)^k\left(\frac{152}{665}\right)^{20-k} = 0,70196168.$$

Para finalizar o professor pede para a turma montar uma tabela com a probabilidade de vitória de um estrategista e de um leigo em função dos valores apostados em unidades monetárias (u.m.). O professor pede para os alunos considerarem os casos 4 unidades monetárias (u.m.), 5 unidades monetárias (u.m.) e 10 unidades monetárias (u.m.). Dado um tempo para resolução, o professor apresenta como correção a Tabela 3.12.

Tabela 3.12: Correção apresentada pelo professor

Capital apostado	4 u.m.	5 u.m.	10 u.m.
Probabilidade de vitória do estrategista	$\frac{81}{97} = 0,835$	$\frac{243}{275} = 0,884$	$\frac{59.049}{60.073} = 0,983$
Probabilidade de vitória do leigo	$\frac{16}{97} = 0,165$	$\frac{32}{275} = 0,116$	$\frac{1.024}{60.073} = 0,017$

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Análise Combinatória e o jogo Poker

Um jogo de baralho muito famoso é o poker. A compreeensão deste jogo pode ser usada para explorar conceitos de análise combinatória. Um baralho possui 52 cartas, distribuídas em 4 grupos chamados naipes, os quais possuem 13 cartas de valores numéricos diferente. Os valores numéricos vão de 2 a 10, além de um "Ás", que corresponde a 1, um valete (representado pela letra J, vale 11), uma Rainha (letra Q, vale 12) e um Rei (letra K, vale 13).

Os naipes (símbolos) do baralho são: espadas ($\spadesuit$), paus ($\clubsuit$), copas ($\heartsuit$) e ouro ($\diamondsuit$). Acredita-se que o baralho foi criado pelo francês Jacquemin Gringonneur, sob encomenda do rei Carlos VI da França. Assim, Gringonneur teria criado o baralho para representar as divisões sociais da França através dos naipes. Copas representaria o clero; o ouro, a burguesia; a espada, os militares; e os paus, os camponeses.

Para Dantas (site Brasil Escola):

> "As cartas do baralho têm um lado com diversas cores e símbolos, chamado de face, e o outro com um padrão comum a todas as cartas, além disso, existe a carta coringa (joker), que possibilita vantagens especiais a quem fica com ela. Os jogos de baralho ficaram famosos na Idade Média, onde os senhores feudais começaram a apostar terras e escravos, promovendo a riqueza de alguns e a pobreza de outros, de forma quase instantânea e iniciando aí a compulsão pelos jogos de azar".

Para Polesi (2017, p.22),

> O Poker pode ser um jogo de grande importância, pois envolve estratégias, a tomada de diferentes tipos de decisão, a análise dos erros, o discernimento de como proceder com as perdas e os ganhos, a análise da jogada dos adversários e a capacidade de mudar o seu padrão de jogo mediante as ações tomadas pelos oponentes.

Ainda de acordo com Polesi (2017, p.32),

> A classificação das mãos nada mais é que a combinação que se pode formar utilizando cinco cartas; tal classificação será apresentada em ordem decrescente, por meio da probabilidade de ocorrência de tal combinação acontecer, que é o total de combinações da ocorrência da mão dividido pelo total de combinações possíveis no jogo.

A seguir apresentamos algumas combinações interessantes do Poker (Veja POLESI, 2017, páginas 33 a 36).

- Sequência Real (Royal Straight Flush): a combinação das cinco cartas consecutivas de maior valor do baralho e de mesmo naipe, ou seja, as cartas do dez ao ás;

- Straight Flush: a combinação de cinco cartas consecutivas de mesmo naipe, que não seja do dez ao ás. No caso de mais de um jogador ter essa combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas;
- Quadra (Four of a Kind): a combinação de quatro cartas de mesmo valor. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas;
- Flush: a combinação formada por cinco cartas de mesmo naipe que não sejam consecutivas. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com a carta mais alta;
- Full House: a combinação formada por três cartas de mesmo valor acrescentadas a outras duas cartas de mesmo valor, ou seja, uma trinca e um par. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que tiver a trinca mais alta. Se persistir o empate, vence quem tiver o par mais alto;
- Para o Flush tem-se a combinação dos treze valores possíveis tomados cinco a cinco, lembrando que é necessário subtrair os trinta e seis casos particulares do straight flush e os quatro da sequência real;
- Sequência (Straight): a combinação formada por cinco cartas em sequência de naipes diferentes. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com a carta mais alta; Trinca (Three of a Kind): a combinação de três cartas de mesmo valor. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas;
- Dois Pares (Two Pairs): a combinação de duas cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor, ou seja, dois pares. No caso de mais de um jogador fazer essa ombinação, vence o jogador que a fizer com o um par mais alto. Se persistir o empate, vence quem tiver a carta mais alta;
- Par (One Pair): a combinação de duas cartas de mesmo valor, ou seja, um par. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com o um par mais alto. Se persistir o empate, vence quem tiver a carta mais alta;
- Carta Alta (High Card): se não houver nenhuma combinação anterior, vence quem tiver a carta mais alta.

O jogo de Poker é um jogo de cartas que envolve muita estratégia. Conforme mencionado anteriormente, há uma grande quantidade de sequências no jogo. As combinações formadas pelas cartas podem ser objeto de estudo em sala de aula visando aplicar conceitos de contagem. Dadas as combinações, há como calcular as probabilidades associadas a cada tipo de sequência (é uma sugestão que não implementamos em nossa proposta de atividade). A seguir apresentamos uma rápida proposta de aula de exercícios usando a dinâmica do Poker.

Dinâmica em sala de aula

O propósito deste tópico é a montagem de uma aula de exercícios explorando o jogo de Poker.

PÚBLICO-ALVO
Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO
Para a conclusão das atividades serão necessárias duas horas aula. Uma aula para os alunos resolverem a atividade e outra aula para correção.

PRÉ-REQUISITOS
O aluno deve estar familiarizado com os conceitos de combinatória, bem como com os fundamentos de lógica.

OBJETIVOS
Aplicação prática da teoria de análise de combinatória.

CONTEÚDOS
Análise combinatória.

METODOLOGIA
Inicialmente o professor descreve o jogo de poker apresentando a formação de um baralho e falando sobre as combinações específicas de cartas. A seguir, fazendo uso de um baralho, mostra sequências especiais de cartas. Após essa familiarização, o professor propõe as questões a seguir.

Questões
Considere um baralho com 52 cartas, distribuídas em 4 grupos chamados naipes, os quais possuem 13 cartas de valores numéricos diferentes. Os valores numéricos vão de 2 a 10, além de um "Ás", que corresponde a 1, um valete (representado pela letra J, vale 11), uma Rainha (letra Q, vale 12) e um Rei (letra K, vale 13). Os naipes (símbolos) do baralho são: espadas ($\spadesuit$), paus ($\clubsuit$), copas ($\heartsuit$) e ouro ($\diamondsuit$). Suponha que cinco cartas são escolhidas ao acaso do baralho de 52 cartas. Mostre que:

1. Podemos escolher um flush (uma mão é chamada de flush se todas as 5 cartas são do mesmo naipe) de 5.148 maneiras diferentes.

2. Podemos escolher um par (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, b, c, d, onde a, b, c, d são números distintos) de 183.040 maneiras diferentes.
3. Podemos escolher dois pares (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, b, b, c, onde a, b, c são números distintos) 123.552 maneiras diferentes.
4. Podemos escolher uma Trinca (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, a, b, c , onde a, b, c são números distintos) 54.912 maneiras diferentes.
5. Podemos escolher uma Quadra (que ocorre quando as cartas são do tipo a, a, a, a, b, onde a, b são números distintos) 624 maneiras distintas.

Os alunos são divididos em cinco grupos para discussão das questões. Para cada grupo é fornecido um baralho para análise da estrutura do baralho. Após um tempo suficiente para discussão dos grupos e solução das questões, o professor parte para as correções. Cada grupo vai a frente do quadro para discutir a solução de uma questão. Os resultados devem ser os dados a seguir.

Solução

1. Para o obter o número de maneiras de obter 5 cartas do mesmo naipe, primeiro devemos calcular de quantas maneiras pode ser escolhido o naipe, ou seja $C_{4,1}$, ou seja de 4 maneiras. Escolhido o naipe existem $C_{13,5} = 1287$ maneiras de serem escolhidas 5 cartas de um mesmo naipe. O que, pelo Princípio Fundamental da Contagem, vai nos dar $4 \times 1287 = 5.148$ maneiras de escolher cartas em um flush.
2. O valor numérico "a" pode ser escolhido de treze maneiras. Daí, a seleção dos números "b", "c" e "d" pode ser feita de $C_{12,3}$ modos. As duas cartas de mesmo valor numérico podem ser escolhidas de $C_{4,2}$ maneiras. Por fim, cada carta cujo número aparece uma única vez pode ser escolhida de 4 modos. Usando, o Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$13.C_{12,3}.C_{4,2}.4.4.4 = 183.040 \text{ maneiras diferentes .}$$

3. Há $C_{13,2}$ modos de escolher o valor numérico das duplas. Escolhido esses valores, o valor numérico da outra carta pode ser escolhido de 11 maneiras. Fixado os valores numéricos, cada par pode ser escolhido de $C_{4,2}$ modos. Por fim, a carta cujo número aparece uma única vez pode ser escolhida de 4 modos. Usando, o Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$C_{13,2}.11.C_{4,2}.C_{4,2}.4 = 123.552 \text{ maneiras diferentes .}$$

4. Há 13 modos de escolher o valor numérico das trinca. Escolhido o valor

numérico da trinca, há $C_{12,2}$ modos de escolher os valores numéricos das cartas cujo número aparece uma única vez. Dado valor o valor numérico da trinca, as três cartas podem ser escolhidas de $C_{4,3} = 4$ modos. Por fim, cada carta cujo número aparece uma única vez pode ser escolhida de 4 modos. Usando, o Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$13.C_{12,2}.C_{4,3}.4.4 = 54.912 \text{ maneiras diferentes }.$$

5. Temos 13 maneiras de escolher o valor numérico da quadra. Escolhido o número da quadra, há 12 maneiras de escolher o valor numérico da outra carta. Dado o valor numérico da quadra, há $C_{4,3}$ modos de escolher os três naipes. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, temos um total de $13.12.4 = 624$ mãos possíveis.

CAPÍTULO 4

Considerações Finais

Com enfoque nos anos finais do Ensino Fundamental II e médio, este trabalho buscou realizar aplicações práticas em sala de aula objetivando tornar menos tediosa a aprendizagem da matemática, especialmente na aplicação dos conceitos de combinatória e probabilidade.

Para a maioria dos alunos, a matemática é considerada uma disciplina de difícil assimilação, o que pode chegar inclusive a rejeitar a tentativa de aprendê-la. Dessa forma, discutir os conceitos de combinatória e probabilidade de forma descontraída e apresentando desafios instigantes constitui-se numa forma estratégica de alcançar a grande maioria dos estudantes. Quando, por exemplo, o aluno calcula combinação ou arranjo, utilizando o conceito de princípio multiplicativo, ele descobre o porquê da existência da fórmula, sem a necessidade de memorizá-la.

Apresentamos a história da probabilidade buscando compreender sua trajetória, os desafios enfrentados e vencidos, a contribuição de diferentes cientistas, o que não deixa de ficar evidente que o conhecimento é uma construção e que pode continuar sendo edificado.

Nossa expectativa é que as dinâmicas em sala de aula, resultado de aplicações práticas dos conceitos estudados, possam produzir aprendizado sem a necessidade de utilização mecânica de fórmulas, tornando a transmissão do conteúdo mais fácil de ser apropriado pelo aluno.

Na nossa primeira dinâmica, o aluno é desafiado a desenvolver o raciocínio lógico, montando tabelas à vista das diversas possibilidades, fazendo escolha entre caminhos diversos e opções variadas. No jogo do "campo minado", o aluno conclui que utilizando estratégias, as probabilidades de vencer são maiores. Aqui o aluno aprende a fazer escolhas, a tomar decisões no jogo, a calcular probabilidade, além de utilizar na prática os conceitos de "pouco provável", "provável" e "mais provável". Ainda no jogo do "campo minado", o aluno aplica os conhecimentos de comparar frações, ordenando-as em ordem crescente e decrescente, bem como utiliza os conceitos de eventos e espaços amostrais, além de avaliar riscos e ponderar resultados em decisões tomadas para cada estratégia.

Na próxima dinâmica os alunos trazem a aplicação prática dos conceitos de combinatória e probabilidade por meio de jogos que utilizam os dedos da mão, por meio de três modalidades diferentes: i) jogo do “dois ou um” ; ii) jogo do par ou ímpar americano e iii) jogo do par ou ímpar (nas suas quatro versões). Em cada uma dessas modalidades, o aluno busca compreender se a dinâmica é ou não uma dinâmica justa. Sendo justa as chances são iguais para todos e a utilização de estratégia não altera a chance de ganhar. Utilizando os conceitos de princípio multiplicativo e cálculo de probabilidade (inclusive probabilidade condicional), o aluno é desafiado a fazer escolhas estratégicas que lhe gerem maiores chances de vitória se comparado com jogar aleatoriamente.

A última dinâmica consistee de aulas de exercícios usando o jogo Poker. Nessa dinâmica, o aluno aprende a configuração do baralho do jogo e usa esse conhecimento para aplicar técnicas de contagem.

Por fim, cabe ressaltar que em todas as dinâmicas acima o aluno é parte ativa na construção do processo-aprendizagem, participando diretamente das experiências práticas, encarando desafios e sendo provocado a vencer desafios. Desse modo, este trabalho busca atender aos objetivos maiores das normas de educação, para as quais o aluno deve aprender participando, e não passivamente, como um mero repetidor mecânico de fórmulas.

CAPÍTULO 5

Referências Bibliográficas

BORGES, Pablo dos Santos. **Jogo do par ou ímpar**. Goiânia –GO. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base**. Brasília, DF, 2017.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M.F. **Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades**. Campinas: 2013.

CARVALHO, R.P.F. **Formação de Conceitos Probabilísticos em Crianças de 4ª série do Ensino Fundamental**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife-PE, 2004.

DANTAS, T. **"Baralho"**; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/baralho.htm. Acesso em 27 de julho de 2024.

DE PAULA, S.M.C. **Modelos elementares de percolação**. Goiânia: Universidade Federal de Goiàs, 2015. HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, 2013.

LEBENSZTAYN, Élcio. **Exercícios de Probabilidade**. IME-USP, 2012.

LEOCÁDIO, Luhan Antônio Lopes; **Uma proposta de Ensino de Probabilidade por meio do jogo Campo Minado em dispositivos móveis**. Ouro Preto – MG , 2021.

MELO, E.W.S. **História da probabilidade e o conhecimento de futuros professores de matemática**. Caruaru: Universidade Federal de Pernambuco, 2017.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 3.4 Análise Combinatória e o jogo Poker

OCTAVIANO, Daniel Polacchini. **Espaços finitos de probabilidade**. USP – São Carlos. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

POLESI, Rafael Andrade Pereira; **A Matemática do Poker**. São Paulo: IFSP, 2017.

RIFO, Laura L.R. **Análise Combinatória, Probabilidade, Noções de Estatística**. Universidade Estadual de Campinas, 2015.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre-RS. Bookman Editora 2010. Marcos Noé. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia probabilidade.htm. Acessado em 21 de maio de 2023.

"Origem das probabilidades" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2024. Consultado em 18/04/2024 às 18:57. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/probab.php

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **"Propriedades da Probabilidade"**; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades probabilidade.htm. Acesso em 01 de maio de 2024.