Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DE GEOMETRIA PLANA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL, USANDO SCRATCH

Guilherme Gonçalves Felizardo

Uberlândia-MG
2024

Guilherme Gonçalves Felizardo

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DE GEOMETRIA PLANA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL, USANDO SCRATCH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Ciências e Humanidades para a Educação Básica
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador(a): Gustavo de Lima Prado

Uberlândia-MG
2024

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F316
2024

Felizardo, Guilherme Gonçalves, 1983-
Uma abordagem de ensino de Geometria Plana para os anos finais do Ensino Fundamental, usando Scratch [recurso eletrônico] / Guilherme Gonçalves Felizardo. - 2024.

Orientador: Gustavo de Lima Prado.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.498
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Prado, Gustavo de Lima,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Profissional, 04, PPGMPMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>Vinte e um de agosto de dois mil e vinte e quatro</td><td>Hora de início:</td><td>14:00</td><td>Hora de encerramento:</td><td>16:00</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12212PFT005</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">Guilherme Gonçalves Felizardo</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">Uma abordagem de ensino de Geometria Plana para os anos finais do Ensino Fundamental, usando Scratch</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Ciências e Humanidades para a Educação Básica</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Não há</td></tr>
</table>

Reuniu-se em webconferência pela plataforma *Google Meet* a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT), assim composta pelos professores doutores: Anderson Paião dos Santos - UTFPR-CP; Ana Paula Tremura Galves - IME/UFU e Gustavo de Lima Prado - IME/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Gustavo de Lima Prado, apresentou a Comissão Examinadora e juntamente com o candidato agradeceram a presença de todos. Posteriormente, o presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o senhor presidente concedeu a palavra para os examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Anderson Paião dos Santos**, **Usuário Externo**, em 21/08/2024, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo de Lima Prado**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/08/2024, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Tremura Galves**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/08/2024, às 16:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5601226** e o código CRC **80F400CC**.

Referência: Processo nº 23117.051616/2024-12 SEI nº 5601226

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.” (Johannes Kepler)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e à toda a minha família, em especial aos meus pais, José Humberto e Luzia, pelo amor incondicional, apoio e incentivo constantes. Seu amor me sustentou e permitiu a realização deste sonho.

Sou profundamente grato ao meu orientador, Gustavo, pelo conhecimento, dedicação, paciência, compreensão, confiança e parceria em cada etapa do processo. Suas contribuições e suporte acadêmico, desde as revisões detalhadas do conteúdo até o suporte com correções e incentivos, foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação. Agradeço também por me apresentar ao Scratch, plataforma que exploramos e aprendemos juntos, e por me introduzir ao $\LaTeX$ através da plataforma Overleaf, que possibilitou a escrita e conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos de mestrado, Adilson, Herbert, João, Karolline, Leonardo, Renato, Wellington, agradeço pela troca de conhecimentos, amizade e apoio mútuo. Vocês são incríveis! Aos meus professores, Aldicio, Ariosvaldo, Dulce, Evaneide, Germano, Marcus Bronzi, Rafael Rossato, Taciana, Wallisom, Walter, agradeço pelos valiosos ensinamentos e aos coordenadores, Ana Paula, Fábio, Francielle, Lígia, pelo acompanhamento e auxílio enquanto estiveram a frente do PROMAT-UFU. Cada um contribuiu de maneira única para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço à CAPES pela concessão da bolsa de estudos no primeiro ano, que auxiliou na continuidade dos meus estudos no mestrado. Agradeço também à Prefeitura Municipal de Uberlândia, por meio da Secretaria Municipal de Educação, pela liberação de quatro horas semanais para que eu pudesse me dedicar aos estudos ao longo de todo esse período.

Aos meus colegas e amigos da Escola Municipal Professor Domingos Pimentel de Ulhôa e da Escola Municipal de Sobradinho, sou grato pelo apoio, incentivo e compreensão a todo momento.

Gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos a todos que contribuíram e se envolveram, direta ou indiretamente, nesta trajetória.

Obrigado por fazerem parte desta conquista!

FELIZARDO, G. G. ***Uma abordagem de ensino de Geometria Plana para os anos finais do Ensino Fundamental, usando Scratch*****. 2024. 100p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

Considerando a crescente presença de smartphones, tablets e computadores na vida dos alunos, a integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) ao ambiente escolar faz-se necessária. Este trabalho propõe o uso das TIC para o ensino de tópicos de Geometria Plana, usando a linguagem de programação Scratch, que é visual, acessível e de fácil compreensão. Foram elaboradas sequências de atividades destinadas aos anos finais do Ensino Fundamental, alinhadas à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o objetivo de ajudar na compreensão dos conteúdos abordados e na aquisição das habilidades previstas em cada série, além de oferecer uma nova abordagem para o ensino de construções geométricas aos professores. Os tópicos abordados incluem ângulos, retas, polígonos, circunferências, e congruência e semelhança de triângulos. Com o uso do Scratch, além de explorar conceitos de Geometria Plana, os alunos também desenvolvem o raciocínio lógico e o pensamento computacional inerentes a linguagens de programação, de forma intuitiva e simplificada por meio de blocos de programação. Espera-se que a abordagem proposta neste trabalho contribua de forma efetiva para o processo de ensino-aprendizagem, estimulando a criatividade, promovendo a interação e consolidando os conceitos geométricos discutidos em sala de aula.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Ensino Fundamental, Geometria Plana, Scratch.

FELIZARDO, G. G. ***A teaching approach of Plane Geometry for the final years of Elementary School, using Scratch*****. 2024. 100p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

Considering the increasing presence of smartphones, tablets, and computers in students' lives, the integration of Information and Communication Technologies (ICT) into the school environment is necessary. This work proposes the use of ICT for teaching topics of Plane Geometry, using the Scratch programming language, which is visual, accessible, and easy to understand. Sequences of activities have been developed for the final years of Elementary School, aligned with the National Common Curricular Base (BNCC), with the aim of helping in the comprehension of the content covered and acquisition of the skills outlined for each grade, while also providing teachers with a new approach to teach geometric constructions. The topics covered include angles, lines, polygons, circles, and congruence and similarity of triangles. By using Scratch, students not only explore concepts of Plane Geometry but also develop logical reasoning and computational thinking inherent to programming languages, in an intuitive and simplified manner through programming blocks. It is expected that the approach proposed in this work will effectively contribute to the teaching-learning process, stimulating creativity, promoting interaction, and consolidating the geometric concepts discussed in classroom.

Keywords: Geometric Constructions, Elementary School, Plane Geometry, Scratch.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Geometria (Euclidiana) Plana, um ramo essencial da matemática, estuda as propriedades e relações entre pontos, retas, ângulos e figuras em um plano bidimensional. Baseada nos postulados de Euclides, essa área da matemática tem sido fundamental para muitos desenvolvimentos teóricos e aplicações práticas ao longo da história.

Nos anos finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º Ano), a Geometria Plana desempenha um papel crucial no desenvolvimento do pensamento espacial e na compreensão das propriedades das figuras geométricas, conforme destacado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo que estabelece um conjunto progressivo de aprendizagens essenciais para todos os alunos da Educação Básica, abrangendo Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A introdução das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ambiente escolar apresenta novas oportunidades para potencializar o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos. As TIC, que englobam uma variedade de tecnologias mediadoras nos processos comunicativos, no processamento e na transmissão de informações, são abordadas transversalmente na BNCC. Isso significa que, ao invés de se limitarem a uma única disciplina, as TIC permeiam todas as áreas do conhecimento, refletindo a compreensão de que habilidades relacionadas a seu uso são essenciais para a formação integral dos alunos e para sua inserção na sociedade contemporânea.

Este trabalho propõe uma abordagem para o ensino de tópicos de Geometria Plana, para os anos finais do Ensino Fundamental, por meio da aplicação de atividades, de acordo com a BNCC, explorando o potencial da plataforma ou linguagem de programação Scratch, que é uma TIC visual, acessível e de fácil compreensão, e destacando sua eficácia na integração entre programação e matemática.

No Capítulo 1, são apresentadas a BNCC, as TIC, em especial, na Educação, e o Scratch, proporcionando uma visão sobre como estes se integram ao currículo escolar para enriquecer o ensino da matemática.

No Capítulo 2, são apresentados conceitos e demonstrados resultados importantes de Geometria Plana, os quais, em geral, também podem ser encontrados em Barbosa (2001) e Neto (2013), que são as principais referências aqui utilizadas. Em particular, são explorados tópicos fundamentais como ângulos, retas, polígonos, circunferências, e congruência e semelhança de triângulos, fornecendo base para as atividades propostas no Capítulo 3.

No Capítulo 3, são propostas atividades de interesse para os anos finais do Ensino Fundamental, destacando como construções geométricas podem ser facilitadas através do uso de ferramentas digitais como o Scratch. Foram elaboradas sequências de atividades, alinhadas à BNCC, com o objetivo de ajudar na compreensão de conteúdos abordados e na aquisição de habilidades previstas em cada série, além de oferecer uma nova abordagem para o ensino de construções geométricas aos professores.

E, no Capítulo 4, são apresentadas considerações finais com relação ao trabalho.

Destaca-se que há vários trabalhos similares na literatura, em especial, entre dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como, por exemplo, Marques (2019) e Vaz (2021), os quais serviram de inspiração para este, mas com diferentes enfoques.

Por fim, espera-se que a abordagem apresentada neste trabalho contribua efetivamente para o processo de ensino-aprendizagem, estimulando a criatividade, promovendo a interação e consolidando conceitos geométricos discutidos em sala de aula.

CAPÍTULO 1

BNCC e TIC

Nesse capítulo, são apresentadas a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que motiva a escolha de tópicos fundamentais trabalhados no Capítulo 2 e direciona as sequências de atividades propostas no Capítulo 3, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), em especial, na Educação e a plataforma ou linguagem de programação Scratch, a qual é usada na aplicação das atividades apresentadas no Capítulo 3.

1.1 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de acordo com Brasil (2018), é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). Aplica-se à educação escolar, tal como a define o parágrafo 1º do artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)[1], e indica conhecimentos e competências que se espera que todos os alunos desenvolvam ao longo da escolaridade.

Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a BNCC soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

[1] Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 05 jul. 2024.

O Ministério da Educação (MEC) é responsável por coordenar a Política Nacional da Educação Básica, onde a BNCC desempenha um papel estratégico. Nas versões iniciais do documento em 2015, 2016 e 2017, o MEC designou parte dos especialistas encarregados da sua elaboração e forneceu assistência técnica às Unidades da Federação e aos Municípios para facilitar a implementação da BNCC em todo o país. Dessa forma, a BNCC foi implementada de forma gradual e complexa, começando com a homologação dos documentos da primeira versão para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental em 2017, seguida da versão para o Ensino Médio no final de 2018. Desde então, foi incorporada aos currículos das redes de ensino e alinhada com as competências essenciais definidas pelo MEC.

> Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (BRASIL, 2018, p. 8)

No Ensino Fundamental, tanto para anos iniciais (do 1º ao 5º Ano), quanto para anos finais (do 6º ao 9º Ano), a BNCC estrutura o conteúdo educacional em cinco elementos principais: áreas do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso), componentes curriculares, unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Cada um desses elementos desempenha um papel importante na organização e implementação do currículo escolar.

Os componentes curriculares são disciplinas que compõem o currículo escolar e organizam os conteúdos a serem ensinados em cada etapa. Eles são estruturados de maneira a garantir uma formação integral dos alunos, promovendo o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais para a vida pessoal, social e profissional. Abrangem, na área de Linguagens, as disciplinas Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa; na área de Matemática, apenas Matemática; na área de Ciências da Natureza, apenas Ciências; na área de Ciências Humanas, as disciplinas Geografia e História; e na área de Ensino Religioso, apenas Ensino Religioso.

As unidades temáticas são grandes blocos de conteúdo dentro de cada componente curricular que organizam os temas de maneira a facilitar a articulação e a progressão do aprendizado ao longo dos anos escolares. No componente curricular Matemática, as unidades temáticas são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

Os objetos de conhecimento são tópicos específicos dentro de cada unidade temática e detalham os conteúdos que os alunos devem aprender em cada etapa. Na unidade temática Geometria, há vários objetos de conhecimento, sendo um deles, de acordo com (BRASIL, 2018, p. 303), "Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados", o qual, por sua vez, trabalha algumas habilidades, como a habilidade EF06MA18[2] que trata de "Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros".

Essa estrutura permite que os professores planejem suas aulas de maneira coerente e consistente, garantindo que todos os alunos tenham acesso aos mesmos conteúdos e desenvolvam as mesmas competências gerais e específicas, e habilidades. Dentre as competências específicas de Matemática, destacamos:

> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BRASIL, 2018, p. 267)

Embora estabeleça um padrão nacional, a BNCC também apresenta flexibilidade para que o currículo seja adaptado às necessidades e contextos locais. As redes de ensino e os professores têm autonomia para contextualizar e aprofundar os conteúdos, promovendo uma educação significativa e relevante para seus alunos.

A BNCC estabelece uma progressão clara e articulada entre os componentes curriculares, unidades temáticas e objetos de conhecimento, assegurando que o aprendizado seja contínuo e cumulativo ao longo das etapas de escolarização. Nesse sentido, garante também uma educação de qualidade, igualitária e inclusiva para todos os alunos brasileiros, preparando-os para os desafios do século XXI.

[2] Código utilizado pela BNCC para indicar o nível, a série, a disciplina e o número da habilidade. Por exemplo, EF06MA18 indica que a habilidade deve ser desenvolvida no Ensino Fundamental (EF), no sexto ano (06), na disciplina de Matemática (MA) e corresponde à décima oitava habilidade proposta (18).

1.2 Tecnologias da Informação e Comunicação

A comunicação sempre foi uma necessidade fundamental na vida humana, presente desde os tempos mais remotos. Trocar informações, registrar eventos, expressar ideias e emoções têm sido elementos essenciais que impulsionaram a evolução dos meios de comunicação e refinaram as habilidades de interação ao longo do tempo.

Dessa forma, com o surgimento de novas necessidades, o ser humano utiliza sua capacidade racional para desenvolver tecnologias e mecanismos de comunicação. Tecnologia é definida como qualquer elemento que promova o progresso, melhoria ou simplificação, representando um processo contínuo de aprimoramento. Embora a evolução tecnológica da humanidade tenha passado por várias fases, é comum associar tecnologia apenas às inovações de ponta.

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), assim chamadas pela primeira vez em 1997, se desenvolveram em meados do século XX à medida que a tecnologia da informação e as telecomunicações começaram a convergir, com o uso cada vez mais frequente de computadores pessoais e da internet. As TIC abrangem uma variedade de tecnologias que atuam como mediadoras nos processos comunicativos, no processamento e na transmissão de informações, o que inclui *hardware*, *software*, sistemas de telecomunicações e ferramentas de rede que facilitam a coleta, armazenamento, processamento e troca de dados. Destaca-se que as TIC de natureza digital são também chamadas de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).

O uso das TIC foi potencializado pelo crescente acesso à internet. Essas tecnologias são utilizadas para acessar, armazenar, transmitir e manipular informações de diversas formas, por exemplo, com o uso de *smartphones*, *tablets*, servidores, sistemas de gestão de dados, redes sociais e aplicativos de mensagens, influenciando significativamente a maneira como interagimos, aprendemos, trabalhamos e nos comunicamos na sociedade contemporânea.

1.3 Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação

As TIC são utilizadas de diversas maneiras e em vários ramos de atividade, destacando-se na Indústria, no Comércio, no setor financeiro e de serviços, com impacto particularmente significativo na Educação. Nesse contexto, as TIC têm promovido uma transformação no processo de ensino-aprendizagem, facilitando o acesso ao conhecimento e ampliando sua democratização.

A presença das TIC na BNCC é um reflexo do reconhecimento de sua importância crescente na formação dos alunos, no contexto educacional contemporâneo. Das dez competências gerais previstas na BNCC para a Educação Básica, em pelo menos quatro são encontradas propostas de uso das TIC, ou mais especificamente das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC):

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 4. Utilizar diferentes linguagens - verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

Essas competências gerais da BNCC ressaltam a importância de desenvolver competências digitais nos alunos, incluindo a capacidade de utilizar diferentes recursos tecnológicos de forma crítica, ética e responsável. Isso inclui a habilidade de buscar, selecionar, analisar e compartilhar informações, bem como de resolver problemas utilizando as TIC. Essas competências digitais são importantes na preparação de indivíduos conhecedores de práticas seguras e éticas no uso da tecnologia, para que estejam aptos a navegar na internet e utilizar de maneira eficaz ferramentas tecnológicas e plataformas digitais, seja em casa, no ambiente educacional ou no mercado de trabalho.

Dessa forma, integrar as TIC no currículo escolar e desenvolver competências digitais nos alunos não é apenas uma necessidade do presente, mas também um investimento para as futuras gerações.

É fundamental que os professores tenham uma formação sólida, dominando tanto os conteúdos quanto as TIC, para utilizá-las como recurso e estratégias eficazes. Isso ressalta a importância de se manterem atualizados, especialmente com alunos cada vez mais imersos na tecnologia.

> Para a inclusão dessas tecnologias na educação, de forma positiva, é necessária a união de multifatores, dentre os quais, pode-se destacar como mais importantes: o domínio do professor sobre as tecnologias existentes e sua utilização na prática, e isso passa, necessariamente, por uma boa formação acadêmica; que a escola seja dotada de uma boa estrutura física e material, que possibilite a utilização dessas tecnologias durante as aulas; que os governos invistam em capacitação, para que o professor possa atualizar-se frente às mudanças e aos avanços tecnológicos; que o professor se mantenha motivado para aprender e inovar em sua prática pedagógica; que os currículos escolares possam integrar a utilização das novas tecnologias aos blocos de conteúdos das diversas disciplinas; dentre outros. (LEITE; RIBEIRO, 2012, p. 175)

As TIC são abordadas de forma transversal na BNCC, ou seja, não se limitam a uma disciplina específica, mas permeiam todas as áreas do conhecimento. Isso reflete a compreensão de que as habilidades relacionadas ao uso das TIC são essenciais para a formação integral dos alunos e para sua inserção na sociedade contemporânea. Nesse sentido, as TIC são consideradas recursos importantes para a promoção da aprendizagem significativa e para o desenvolvimento de competências e habilidades previstas e integradas em diversos aspectos da BNCC, principalmente nas áreas de Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

A BNCC incentiva a utilização das TIC como ferramentas para promover a investigação, a experimentação e a resolução de problemas, tanto de forma individual quanto colaborativa. Em especial, em Matemática, para os anos finais do Ensino Fundamental, as TIC podem auxiliar a fixar e aprofundar conhecimentos prévios dos alunos, bem como enriquecer práticas pedagógicas, permitindo uma maior interatividade e criatividade no processo de ensino-aprendizagem.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 266)

De acordo com a BNCC, em Matemática, o ensino de Geometria no Ensino Fundamental visa desenvolver a capacidade dos alunos de compreender e utilizar conceitos e propriedades geométricas em situações práticas e teóricas. Os alunos devem ser capazes de identificar, descrever e representar figuras geométricas planas e espaciais, bem como compreender suas propriedades e relações. Além disso, devem desenvolver habilidades para resolver problemas geométricos, utilizando raciocínio lógico e argumentação matemática. A BNCC enfatiza a importância de conectar a Geometria com outras áreas do conhecimento e com a realidade cotidiana, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 276)

No contexto educacional, essas competências se tornam ainda mais relevantes à medida que tecnologias desempenham um papel auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. O YouTube, por exemplo, oferece vários recursos, desde canais com tutoriais e aulas gravadas até palestras ao vivo. Estes canais permitem que alunos revisem conteúdos e também explorem conteúdos complementares ao currículo escolar. Plataformas como o Microsoft Teams e o Google Sala de Aula facilitam a gestão e a interação em ambientes de aprendizagem remota e híbrida. Essas plataformas permitem criação e organização de materiais de aula, comunicação em tempo real entre professores e alunos, e envio e correção de tarefas de forma eficiente. Ferramentas para videoconferências ou aulas remotas como o Google Meet e o WebConf RNP possibilitam a realização de reuniões ou aulas síncronas, mantendo o engajamento e a interação entre os participantes, mesmo à distância.

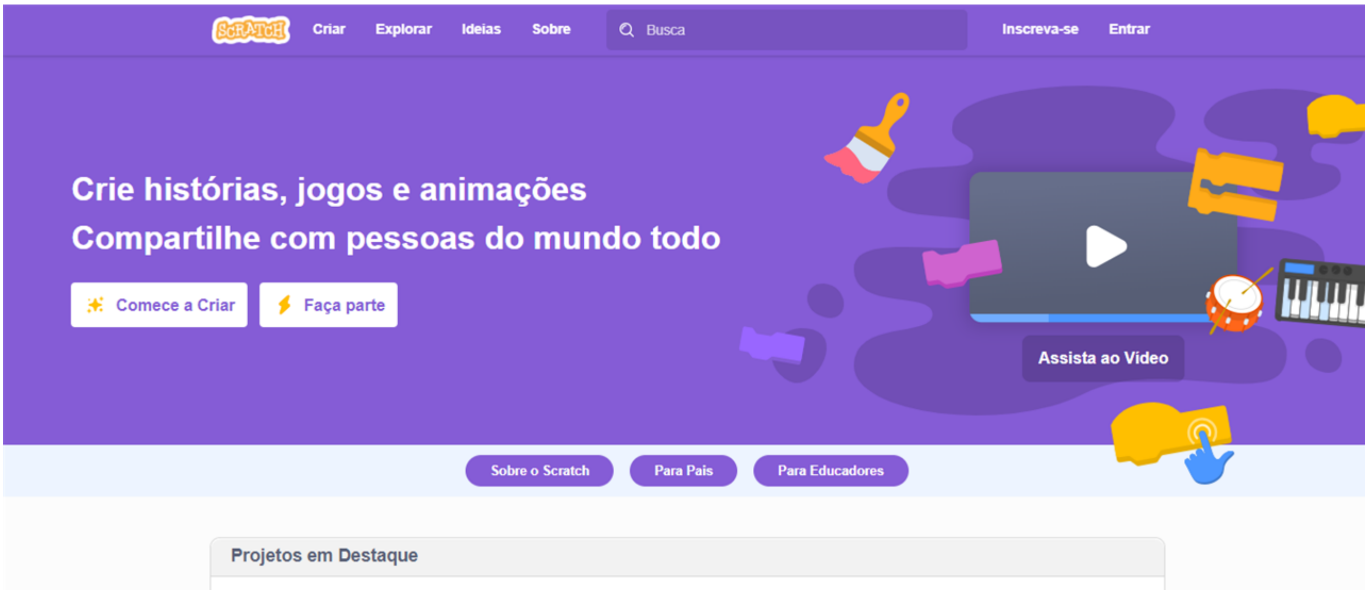
Nas transformações que as TIC têm causado na educação, especialmente no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, ferramentas como GeoGebra e Scratch têm papel de destaque. Ambas possuem aplicações específicas que facilitam o aprendizado de conceitos geométricos, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas.

1.4 Scratch

O Scratch é uma plataforma ou linguagem de programação visual desenvolvida pelo *Lifelong Kindergarten* no *Media Lab do Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, onde foi idealizado por Mitchel Resnick. Foi lançado pela primeira vez em maio de 2007 e, desde então, passou por diversas atualizações e melhorias, tornando-se uma ferramenta robusta e amplamente utilizada em todo o mundo. A versão mais recente, Scratch 3.0, lançada em janeiro de 2019, traz novas funcionalidades, uma interface de usuário melhorada e compatibilidade com maior variedade de dispositivos, podendo ser utilizada em computadores, *Chromebooks*, *smartphones* e *tablets*.

Uma das maiores vantagens do Scratch é ser totalmente gratuito, permitindo que qualquer pessoa interessada em aprender programação possa acessá-lo e utilizá-lo sem custos. Existem duas versões do Scratch, sendo: uma *online*, que pode ser acessada por meio de um navegador *web* no *site* https://scratch.mit.edu; e uma *offline*, que pode ser acessada através de um aplicativo baixado em https://scratch.mit.edu/download e instalado previamente.

Figura 1.1: Página inicial na plataforma Scratch



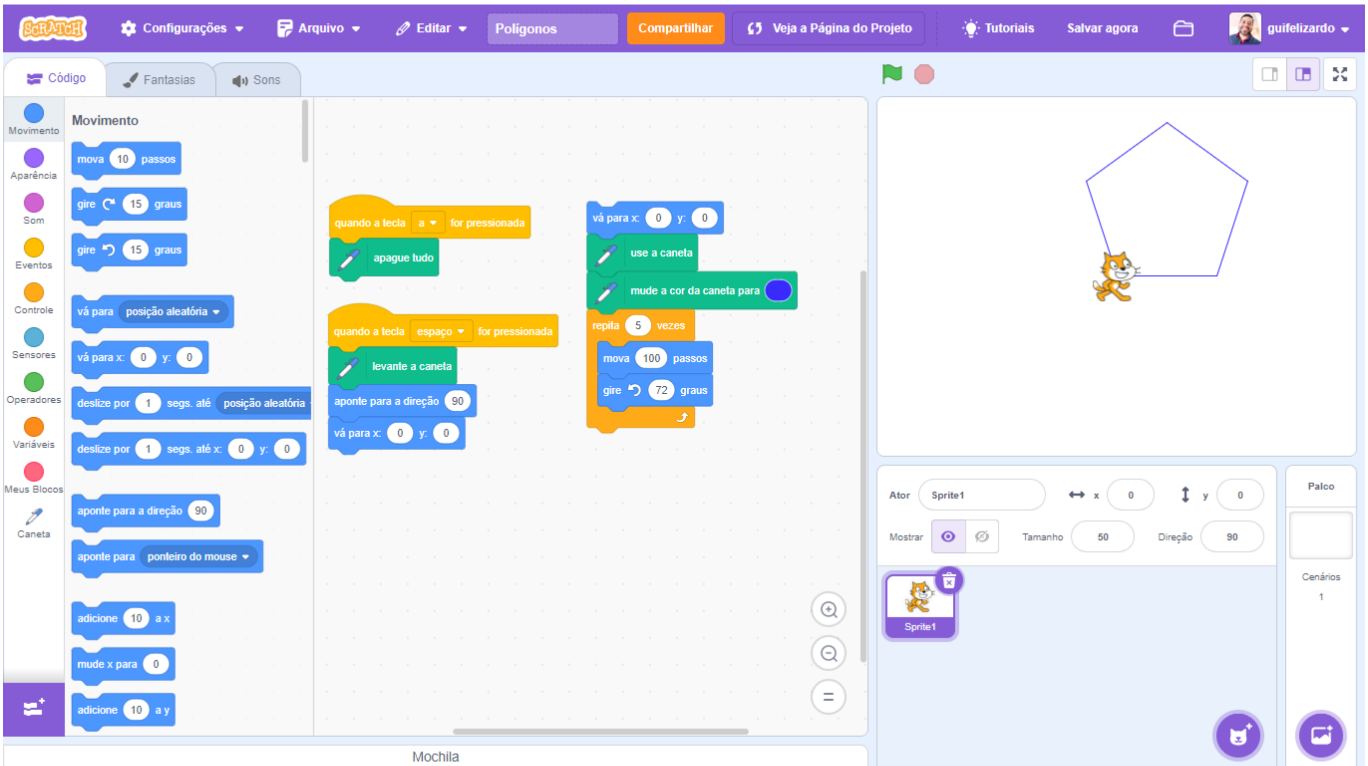
Fonte: https://scratch.mit.edu

Embora ambas versões apresentem o mesmo *layout* básico, a versão *online* da plataforma é mais interessante, pois oferece recursos e vantagens extras, como, por exemplo, criação de conta, salvamento automático em nuvem, acesso e compartilhamento facilitados, organização em estúdios, criação de conta de professor para gerenciamento de turmas e alunos, entre outros. Já a versão *offline* se faz mais necessária em ambientes sem acesso ou com acesso limitado à internet, garantindo que a programação possa ser realizada em qualquer circunstância.

No Scratch, a programação é feita ao arrastar e soltar blocos coloridos que representam diferentes comandos e estruturas de controle. Isso torna a programação mais acessível e intuitiva, permitindo que o usuário se concentre em resolver problemas e desenvolver sua criatividade, sem se preocupar com a digitação de linhas de código mais complexas. Em vez disso, o foco dos usuários se concentra em desenvolver habilidades de resolução de problemas e em exercitar sua criatividade, criando projetos interativos e dinâmicos. Desse modo, o Scratch é projetado principalmente para crianças e jovens, mas pode ser usado por pessoas de qualquer idade para o aprendizado de conceitos básicos de programação e criação de projetos interativos.

Os blocos de programação no Scratch são organizados por categorias, como Movimento, Aparência, Som, Eventos, Controle, Sensores, Operadores e Variáveis. Os blocos das diferentes categorias podem ser conectados entre si para criar programações que controlam personagens ou cenários. Essa modularidade facilita a compreensão, criação e modificação de projetos.

Figura 1.2: Página de um projeto na plataforma Scratch



Fonte: O autor.

Para mais informações sobre a plataforma ou linguagem de programação Scratch, bem como para manuais e/ou tutoriais, vide Souza e Costa (2018), Marques (2019) e Vaz (2021).

CAPÍTULO 2

Geometria Plana

A Geometria (Euclidiana) Plana é um ramo da matemática que estuda propriedades e relações entre pontos, retas, ângulos e figuras em um plano bidimensional. Fundada nos postulados estabelecidos por Euclides, essa geometria tem sido a base para muitos desenvolvimentos matemáticos e aplicações práticas ao longo dos séculos.

Nesse capítulo, são apresentados conceitos e são demonstrados resultados importantes de Geometria Plana, os quais, em geral, também podem ser encontrados em Barbosa (2001) e Neto (2013), que são as principais referências aqui utilizadas. Em particular, são explorados tópicos fundamentais como ângulos, retas, polígonos, circunferências, e congruência e semelhança de triângulos, fornecendo base para as atividades propostas no Capítulo 3.

Por fim, destacamos que as figuras presentes nesse capítulo foram elaboradas com o uso da versão *online* do GeoGebra.

2.1 Ângulos e retas

Nessa seção, vamos falar de ângulos, retas e algumas de suas propriedades.

Sejam A, B, C, D e O pontos distintos. Em todo o texto, são adotadas as seguintes notações:

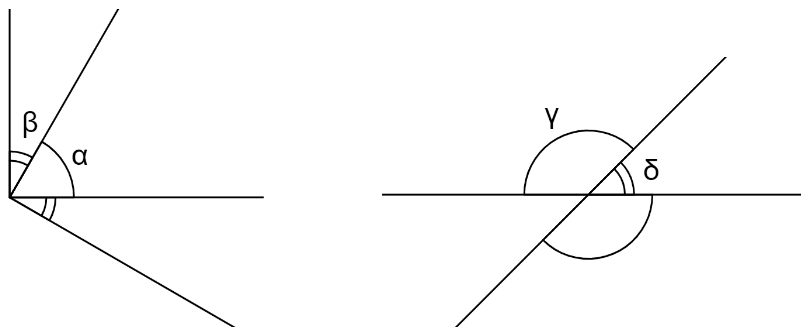
- AB: segmento de reta determinado por A e B;
- $\overline{AB}$: comprimento do segmento de reta AB;
- $\overrightarrow{AB}$: semirreta de origem A que passa por B;

- $\overleftrightarrow{AB}$: reta determinada por A e B;
- $\hat{O} = A\hat{O}B$: ângulo ou medida do ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$;
- $AB = CD$: segmentos congruentes, isto é, segmentos tais que AB e CD têm mesma medida;
- $\hat{A} = \hat{C}$: ângulos congruentes, ou seja, ângulos tais que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ têm mesma medida.

Ângulos podem ser classificados de diferentes formas. Entre elas, destacamos:

- **Agudo**, quando sua medida está entre $0°$ e $90°$; **reto**, quando é $90°$; **obtuso**, quando está entre $90°$ e $180°$; **raso**, quando é $180°$; **convexo**, quando está entre $0°$ e $180°$; e **não convexo** ou **côncavo**, quando está entre $180°$ e $360°$;
- **Complementares**, quando, dados dois ângulos, a soma de suas medidas é $90°$. Dizemos que os ângulos α e β são **complemento** um do outro, se são ângulos complementares;
- **Suplementares**, quando, dados dois ângulos, a soma de suas medidas é $180°$. Dizemos que os ângulos γ e δ são **suplemento** um do outro, se são ângulos suplementares.

Figura 2.1: Complementos e suplementos



Fonte: O autor.

Observamos que, se A, O e B são não colineares, então, considerando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, há dois ângulos formados por elas, sendo um convexo e um côncavo. A menos que se diga o contrário, em todo o texto, em geral, $A\hat{O}B$ denota o ângulo ou a medida do ângulo convexo.

Agora, dadas duas retas em um plano, elas podem ser classificadas quanto à posição relativa da seguinte forma:

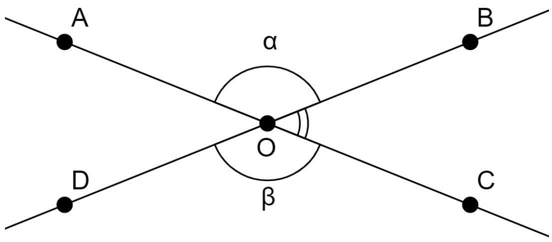
- **Paralelas**, quando não se interceptam;
- **Coincidentes**, quando se interceptam em mais de um ponto, ou seja, são a mesma reta;

- **Concorrentes**, quando se interceptam em um único ponto;

- **Perpendiculares**, quando são concorrentes e formam um ângulo reto entre si.

Quando duas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes em um ponto O, formam-se quatro ângulos: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$. Dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são **ângulos opostos pelo vértice**, assim como $B\hat{O}C$ e $D\hat{O}A$. Observe que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, pois dados α e β ângulos opostos pelo vértice, se $(180° - \alpha)$ é suplemento de α, então também o é de β, donde $\alpha = \beta$.

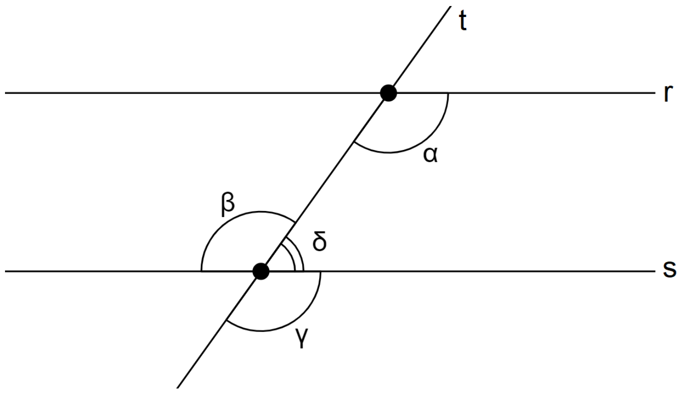
Figura 2.2: Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: O autor.

Dadas duas retas paralelas r e s, e uma reta t transversal a elas (isto é, t é concorrente com r e s), formam-se ângulos como na figura a seguir.

Figura 2.3: Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: O autor.

Os ângulos α, β, γ e δ, destacados na figura acima, são tais que:

- α e β chamam-se **alternos internos**;

- α e γ chamam-se **correspondentes**;

- α e δ chamam-se **colaterais internos**.

Note que ângulos alternos internos são congruentes, e ângulos correspondentes também são congruentes. Já ângulos colaterais internos são suplementares.

Uma curva formada por segmentos de reta consecutivos, dois a dois não colineares, é chamada de **linha poligonal**, a qual é dita:

- **Fechada**, quando começa e termina em um mesmo ponto, ou **aberta**, caso contrário;
- **Simples**, quando não possui autointerseção, ou **não simples**, caso contrário.

Figura 2.4: Linhas poligonais

(a) Fechada simples e fechada não simples **(b)** Aberta simples e aberta não simples

Fonte: O autor.

Uma linha poligonal fechada simples é chamada de **polígono (simples)**.

2.2 Polígonos

Nessa seção, vamos falar de polígonos e algumas de suas propriedades.

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos. Em todo o texto, são adotadas as seguintes notações:

- $A_1A_2\ldots A_n$: polígono de vértices A_i, lados A_iA_{i+1} e ângulos (internos) $\hat{A}_{i+1} = A_i\hat{A}_{i+1}A_{i+2}$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, subentendendo A_{n+1}, A_{n+2} como sendo, respectivamente, A_1, A_2.

Polígonos podem ser classificados de diferentes formas. Entre elas, destacamos:

- **Convexo**, se todos os ângulos são convexos, e **não convexo** ou **côncavo**, se pelo menos um é côncavo;
- **Triângulo**, se possui três lados; **quadrilátero**, se possui quatro lados; **pentágono**, se possui cinco lados; **hexágono**, se possui seis lados; **heptágono**, se possui sete lados; **octógono**, se possui oito lados; **eneágono**, se possui nove lados; **decágono**, se possui dez lados; e assim por diante;
- **Regular**, se é convexo e possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

De outra forma, um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois vértices consecutivos, a reta determinada por eles não o divide em regiões diferentes, e não convexo ou côncavo, caso contrário. A menos que se diga o contrário, em todo o texto, em geral, um polígono é um polígono convexo.

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento que liga dois vértices não consecutivos seus. Note que um polígono contém todas as suas diagonais.

De acordo com lados, **triângulos** podem ser classificados como:

- **Triângulo isósceles**, se possui pelo menos dois lados congruentes;
- **Triângulo equilátero**, se possui todos os lados congruentes;
- **Triângulo escaleno**, se não possui lados, dois a dois, congruentes.

Agora, de acordo com ângulos, **triângulos** podem ser classificados como:

- **Triângulo acutângulo**, se seus ângulos são agudos;
- **Triângulo retângulo**, se um de seus ângulos é reto;
- **Triângulo obtusângulo**, se um de seus ângulos é obtuso.

Em um triângulo retângulo, é importante destacar que o maior lado, oposto ao ângulo reto, é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**.

Por sua vez, de acordo com lados, **quadriláteros** podem ser classificados como:

- **Trapézio**, se apresenta dois lados opostos paralelos;
- **Paralelogramo**, se possui todos os lados opostos paralelos.

Lados opostos paralelos de um trapézio são chamados de bases (maior e menor, de acordo com as medidas, caso não sejam congruentes). Trapézios podem ser classificados como:

- **Trapézio isósceles**, se possui lados não paralelos congruentes;
- **Trapézio escaleno**, se possui lados não paralelos não congruentes;
- **Trapézio retângulo**, se possui ângulo reto.

Em particular, todo paralelogramo é um trapézio. Paralelogramos têm ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos, dois a dois, suplementares. Paralelogramos podem ser classificados como:

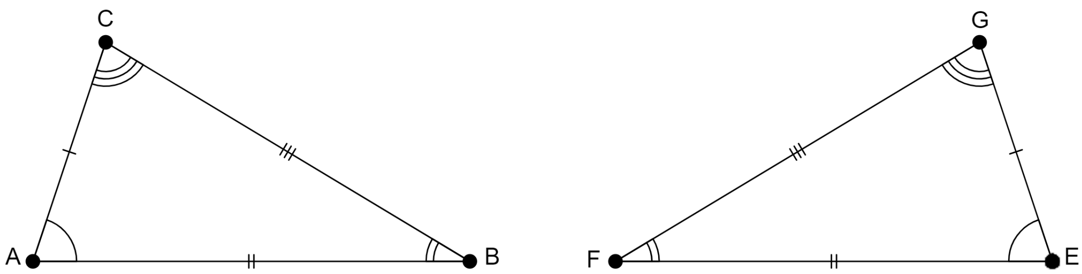
- **Retângulo**, em que todos os ângulos são congruentes (e consequentemente retos);
- **Losango**, em que todos os lados são congruentes;
- **Quadrado**, retângulo em que todos os lados são congruentes e, analogamente, losango em que todos os ângulos são congruentes (e consequentemente retos).

2.3 Congruência de triângulos

Nessa seção, vamos definir congruência de triângulos e obter resultados relacionados, como, por exemplo, os casos de congruência ALA, LAL e LLL, além de resultados sobre triângulos isósceles.

Definição 2.1. *Dois triângulos são congruentes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos e lados correspondentes são congruentes.*

Figura 2.5: Congruência de triângulos



Fonte: O autor.

Assim, se ABC e EFG são congruentes, de acordo com a correspondência biunívoca $A \longleftrightarrow E$, $B \longleftrightarrow F$, $C \longleftrightarrow G$, têm-se $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$, $\hat{C} = \hat{G}$, $AB = EF$, $BC = FG$, $AC = EG$ e, nesse caso, escrevemos $ABC = EFG$.

Note que a relação de congruência é uma relação de equivalência, conforme é visto mais adiante, na seção 2.6.

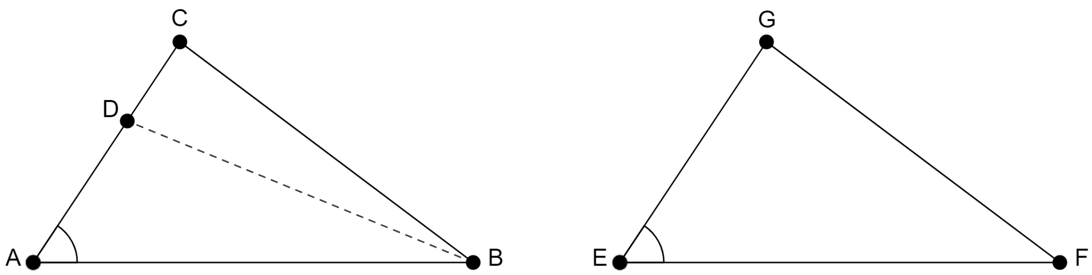
Agora, vamos ver resultados, conhecidos como casos de congruência, em que obtemos congruências entre triângulos a partir de apenas algumas congruências específicas.

Axioma 2.2 (**Caso ALA**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EF$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$.*

Teorema 2.3 (**Caso LAL (de congruência)**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $AC = EG$, então $ABC = EFG$.*

Demonstração.

Figura 2.6: Caso LAL de congruência



Fonte: O autor.

Sejam ABC e EFG triângulos, tais que $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $AC = EG$. Marque um ponto D na semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $A\hat{B}D = \hat{F}$. Comparando os triângulos ABD e EFG, temos que $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EF$ e $A\hat{B}D = \hat{F}$. Assim, pelo caso ALA (Axioma 2.2), temos que $ABD = EFG$. Por hipótese, $AC = EG$, então $AC = AD$. Logo, os pontos C e D são coincidentes. Portanto, conclui-se que $ABC = EFG$. ∎

Observe que, de acordo com Barbosa (2001), o caso LAL é tomado como um axioma e o caso ALA é obtido a partir dele.

Agora, o próximo resultado trata de triângulos isósceles. Destacamos que em um triângulo isósceles dois lados congruentes são chamados de **laterais**, e o outro é chamado de **base**.

Proposição 2.4. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo, tal que $AC = BC$. Vamos provar que $\hat{A} = \hat{B}$. Marque um ponto D em AB, tal que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$. Como $AC = BC$, por hipótese, $A\hat{C}D = B\hat{C}D$, por construção, e CD é comum, temos que $ACD = BCD$, pelo caso LAL (Teorema 2.3). Logo, $\hat{A} = \hat{B}$. ∎

Daí, como todo triângulo equilátero é também isósceles tendo como base qualquer um de seus lados, obtemos o resultado abaixo.

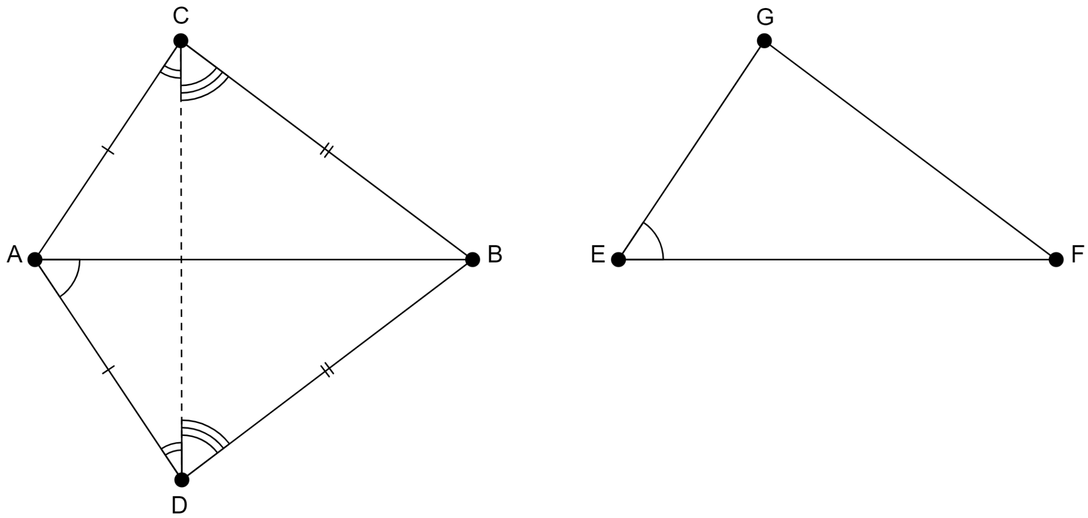
Corolário 2.5. *Em um triângulo equilátero os ângulos são congruentes entre si.*

A seguir, obtemos mais um caso de congruência.

Teorema 2.6 (**Caso LLL (de congruência)**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $AC = EG$ e $BC = FG$, então $ABC = EFG$.*

Demonstração.

Figura 2.7: Caso LLL de congruência



Fonte: O autor.

Sejam ABC e EFG triângulos, tais que $AB = EF$, $BC = FG$ e $AC = EG$. No semiplano oposto ao que contém C, determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$, marque um ponto D, tal que $AD = EG$ e $D\hat{A}B = \hat{E}$. Como, por hipótese, $AB = EF$ e, por construção, $AD = EG$ e $D\hat{A}B = \hat{E}$, então, pelo caso LAL (Teorema 2.3), $ABD = EFG$. Assim, basta mostrar que $ABD = ABC$. Como, por construção e hipótese, $AD = EG = AC$ e $BD = FG = BC$, temos que os triângulos ACD e BCD são isósceles de base CD e portanto, pela Proposição 2.4, $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $B\hat{D}C = B\hat{C}D$. Daí, $A\hat{D}B = A\hat{D}C + B\hat{D}C = A\hat{C}D + B\hat{C}D = A\hat{C}B$. Logo, pelo caso LAL (Teorema 2.3), como $AD = AC$, $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ e $BD = BC$, temos que $ABD = ABC$. Portanto, conclui-se que $ABC = EFG$. ■

Destacamos que um quarto caso de congruência, a saber, o caso LAA$_o$, é visto mais adiante, na seção 2.4.

Definição 2.7. *Sejam ABC um triângulo e D um ponto da reta que contém A e B. No triângulo ABC, o segmento CD chama-se:*

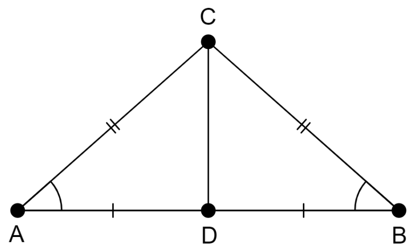
- ***mediana*** *relativa ao lado AB, se D é o ponto médio de AB;*
- ***bissetriz*** *do ângulo $\hat{C}$ (relativa ao lado AB), se CD divide $A\hat{C}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, $A\hat{C}D = B\hat{C}D$;*
- ***altura*** *relativa ao lado AB, se CD é perpendicular à reta que contém A e B.*

Por fim, o próximo resultado relaciona a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base de triângulos isósceles.

Proposição 2.8. *Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo isósceles de base AB e D o ponto médio de AB. Então CD é a mediana relativa à base AB. Vamos provar que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e que $A\hat{D}C$ é um ângulo reto.

Figura 2.8: Triângulo isósceles



Fonte: O autor.

Considere os triângulos ADC e BCD. Como $AD = BD$, pois D é ponto médio de AB, $AC = BC$, pois o triângulo ABC é isósceles de base AB, e CD é comum, segue que $ADC = BDC$, pelo caso LLL (Teorema 2.6). Daí, $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ e, portanto, CD é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Ainda, $A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90°$, visto que $A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180°$. Logo, CD é perpendicular a AB, ou seja, CD é a altura relativa à base AB. ■

2.4 Ângulo externo e ângulos internos

Nessa seção, vamos falar de ângulo externo e ângulos internos e obter resultados relacionados, como, por exemplo, o Teorema do ângulo externo, o caso LAA$_o$, o Teorema da desigualdade triangular e o resultado de que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é $180°$.

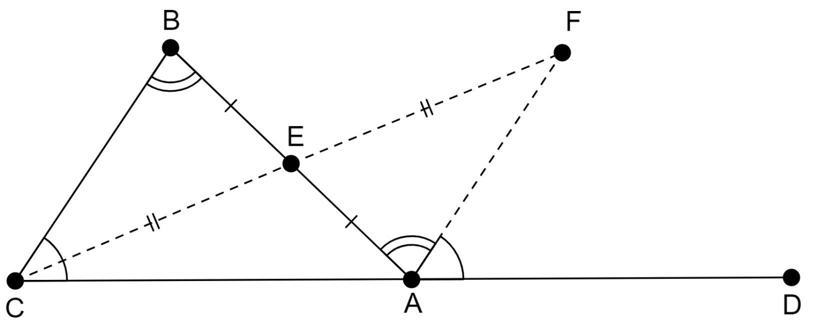
Definição 2.9. *Um ângulo externo de um polígono é um suplemento de um de seus ângulos internos.*

O resultado a seguir, conhecido como Teorema do ângulo externo, relaciona, em um triângulo, ângulos externos a ângulos internos a eles não adjacentes.

Teorema 2.10 (**Ângulo externo**)**.** *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, marque um ponto D, tal que A está entre C e D. Vamos mostrar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$.

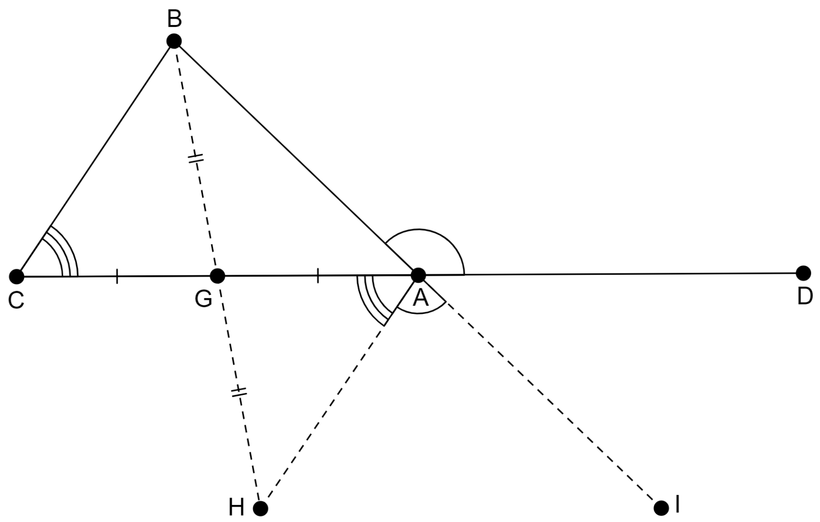
Figura 2.9: Teorema do ângulo externo - $B\hat{A}D > \hat{B}$



Fonte: O autor.

Seja E o ponto médio de AB. Na semirreta $\overrightarrow{CE}$, marque um ponto F, tal que $EC = EF$. Comparando os triângulos BEC e AEF, temos que $BE = AE$, pois E é ponto médio de AB, $B\hat{E}C = A\hat{E}F$, pois são opostos pelo vértice, e $EC = EF$, por construção. Portanto, $BEC = AEF$, pelo caso LAL (Teorema 2.3). Daí, $E\hat{A}F = \hat{B}$. Como a semirreta $\overrightarrow{AF}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $B\hat{A}D > E\hat{A}F$. Portanto, $B\hat{A}D > \hat{B}$.

Figura 2.10: Teorema do ângulo externo - $B\hat{A}D > \hat{C}$



Fonte: O autor.

Na semirreta $\overrightarrow{BA}$, marque um ponto I, tal que A está entre B e I. Note que $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}I$ são opostos pelo vértice. Seja G o ponto médio de AC. Na semirreta $\overrightarrow{BG}$, marque um ponto H, tal que $GB = GH$. Comparando os triângulos CGB e AGH, temos que $CG = AG$, pois G é ponto médio de AC, $C\hat{G}B = A\hat{G}H$, pois são opostos pelo vértice, e $GB = GH$, por construção. Portanto, $CGB = AGH$, pelo caso LAL (Teorema 2.3). Daí, $G\hat{A}H = \hat{C}$. Como a semirreta $\overrightarrow{AH}$ divide o ângulo $C\hat{A}I$, então $C\hat{A}I > G\hat{A}H$. Portanto, como $C\hat{A}I = B\hat{A}D$, então $B\hat{A}D > \hat{C}$.

Logo, todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes. ■

Agora, o próximo resultado trata de ângulos internos de triângulos.

Proposição 2.11. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* $180°$.

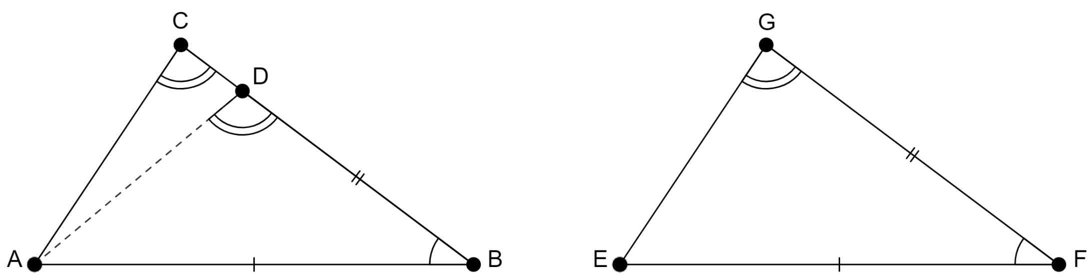
Demonstração. Seja ABC um triângulo. Vamos mostrar que $\hat{A} + \hat{B} < 180°$. Para tanto, seja β um suplemento de $\hat{A}$. Em particular, $\hat{A} + \beta = 180°$. Pelo Teorema do ângulo externo (Teorema 2.10), temos que $\beta > \hat{B}$. Portanto, $\hat{A} + \hat{B} < \hat{A} + \beta = 180°$. ■

A partir do Teorema do ângulo externo (Teorema 2.10), obtemos a seguir o quarto e último caso de congruência colocado nesse texto.

Teorema 2.12 (**Caso LAA$_o$**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{G}$, então $ABC = EFG$.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG triângulos, tais que $AB = EF$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{G}$. Comparando BC e FG, temos três possibilidades: $\overline{BC} < \overline{FG}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ ou $\overline{BC} > \overline{FG}$. As situações em que $\overline{BC} < \overline{FG}$ e $\overline{BC} > \overline{FG}$ são análogas, donde basta analisar apenas uma delas.

Figura 2.11: Caso LAA$_o$ de congruência



Fonte: O autor.

Suponha que $\overline{BC} > \overline{FG}$ e marque um ponto D, pertencente à semirreta $\overrightarrow{BC}$, tal que $\overline{BD} = \overline{FG}$. Assim, pelo caso LAL (Teorema 2.3), temos que $ABD = EFG$, pois $AB = EF$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $BD = FG$. Daí, por construção e hipótese, segue que $A\hat{D}B = \hat{G} = \hat{C}$, o que é uma contradição, pelo Teorema do ângulo externo (Teorema 2.10) no triângulo ACD, pois $A\hat{D}B > \hat{C}$.

Por fim, a única possibilidade restante é $\overline{BC} = \overline{FG}$, situação em que $ABC = EFG$, pelo caso LAL, pois $AB = EF$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $BC = FG$. ■

Agora, os próximos dois resultados dizem que, em um triângulo, ângulos maiores se opõem a lados maiores e vice-versa.

Proposição 2.13. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo, tal que $\overline{CB} > \overline{CA}$. Marque um ponto D em CB, tal que $CD = CA$. Visto que a semirreta $\overrightarrow{AD}$ divide o ângulo $C\hat{A}B$, então $C\hat{A}B > C\hat{A}D$. Agora, por construção, como ACD é um triângulo isósceles de base AD, então $C\hat{A}D = C\hat{D}A$, pela Proposição 2.4. Note que $C\hat{D}A > C\hat{B}A$, pelo Teorema do ângulo externo (Teorema 2.10) no triângulo ABD. Logo, $C\hat{A}B > C\hat{A}D = C\hat{D}A > C\hat{B}A$, isto é, o ângulo oposto a CB é maior do que o ângulo oposto a CA. ■

Proposição 2.14. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo, tal que $C\hat{A}B > C\hat{B}A$. Note que existem três possibilidades para os lados CB e CA, respectivamente, opostos a $C\hat{A}B > C\hat{B}A$: $\overline{CB} < \overline{CA}$, $\overline{CB} = \overline{CA}$ ou $\overline{CB} > \overline{CA}$. Se $\overline{CB} < \overline{CA}$, então pela Proposição 2.13, $C\hat{A}B < C\hat{B}A$, o que não ocorre por hipótese. Se $\overline{CB} = \overline{CA}$, segue que o triângulo ABC é isósceles de base AB, donde, pela Proposição 2.4, $C\hat{A}B = C\hat{B}A$, o que também não ocorre por hipótese. Logo, $\overline{CB} > \overline{CA}$. ■

A partir deste resultado, obtemos abaixo que, em triângulos, o comprimento de um lado qualquer é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois, o que é conhecido, nesse contexto, como desigualdade triangular.

Teorema 2.15 (**Desigualdade triangular**)**.** *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é maior do que o comprimento do terceiro.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Marque um ponto D na semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que B está entre A e D e $BD = BC$. Daí, segue que $B\hat{D}C = B\hat{C}D$, pois o triângulo BCD é isósceles de base CD. Como a semirreta $\overrightarrow{CB}$ divide o ângulo $A\hat{C}D$, temos que $B\hat{C}D < A\hat{C}D$. Assim, no triângulo ACD, segue que $A\hat{D}C = B\hat{D}C = B\hat{C}D < A\hat{C}D$ e, portanto, pela Proposição 2.14, $\overline{AC} < \overline{AD}$. Logo, como $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$, temos que $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Analogamente, temos que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$ e $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. ■

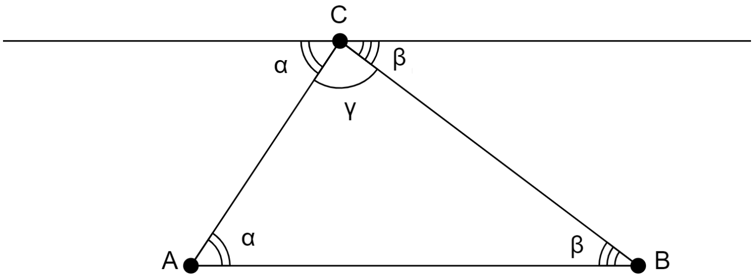
Note que, por Barbosa (2001, Teorema 5.11), dados três pontos A, B, C do plano, tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$, e a igualdade ocorre se, e somente se, B pertence ao segmento AC. Tal resultado é conhecido, de forma geral, como desigualdade triangular.

O próximo resultado trata da soma das medidas dos ângulos de um triângulo.

Teorema 2.16. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é* $180°$.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Considere a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, passando por C.

Figura 2.12: Soma das medidas dos ângulos de um triângulo



Fonte: O autor.

Considere os três ângulos α, β e γ, em C, cuja soma das medidas é $180°$. Como $\alpha = C\hat{A}B$, pois são alternos internos pela transversal $\overleftrightarrow{AC}$, $\beta = C\hat{B}A$, pois são alternos internos pela transversal $\overleftrightarrow{BC}$ e $\gamma = A\hat{C}B$, então a soma das medidas dos ângulos de ABC é $180°$. ■

Como consequência, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.17.

a) *A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é* $90°$*;*

b) *Cada ângulo de um triângulo equilátero mede* $60°$*;*

c) *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes;*

d) *A soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero é* $360°$*.*

Demonstração.

a) Sejam α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\alpha + \beta + 90° = 180°$. Logo, $\alpha + \beta = 90°$;

b) Sejam α, β e γ os ângulos de um triângulo equilátero ABC. Como seus lados são dois a dois congruentes, temos que ABC é isósceles de base qualquer um de seus lados, donde $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ e $\gamma = \alpha$, pela Proposição 2.4. Daí, $180° = \alpha + \beta + \gamma = 3\alpha$. Logo, $60° = \frac{180°}{3} = \alpha = \beta = \gamma$;

c) Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo e θ um ângulo externo no vértice do ângulo interno γ, ou seja, $\theta + \gamma = 180°$. Logo, como $180° = \alpha + \beta + \gamma$, então $\theta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ e, portanto, $\theta = \alpha + \beta$;

d) Seja $ABCD$ um quadrilátero. Daí, traçando a diagonal BC, temos que ABC e BCD são triângulos. Assim, $A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A + D\hat{A}B = A\hat{B}C + (B\hat{C}A + A\hat{C}D) + C\hat{D}A + (D\hat{A}C + C\hat{A}B) = (A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B) + (A\hat{C}D + C\hat{D}A + D\hat{A}C) = 180° + 180° = 360°$. Logo, a soma das medidas dos ângulos de $ABCD$ é $360°$. ■

Em particular, do item (a), obtemos que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares; e, do item (b), que todo triângulo equilátero é acutângulo.

Agora, o próximo resultado apresenta o número de diagonais de um polígono de n lados.

Teorema 2.18. *O número de diagonais de um polígono de n lados é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$.*

Demonstração. Vamos mostrar este fato por indução matemática em n, para $n \geq 3$.

Para $n = 3$, temos um triângulo e seu número de diagonais é dado por $0 = \frac{3(3-3)}{2}$, donde o passo base é válido.

Suponha, para algum $k \geq 3$, que o número de diagonais de um polígono de k lados é dado por $\frac{k(k-3)}{2}$.

Seja $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ um polígono de $k+1$ lados. Então $A_1A_2\ldots A_k$ é um polígono de k lados e seu número de diagonais, por hipótese de indução, é dado por $\frac{k(k-3)}{2}$. Como as diagonais de $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ são dadas pelas de $A_1A_2\ldots A_k$, mais A_1A_k, mais A_jA_{k+1}, com $2 \leq j \leq k-1$, então o número de diagonais de $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ é dado por $\frac{k(k-3)}{2} + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2} = \frac{k^2-3k+2k-2}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$, donde o passo indutivo é válido.

Logo, o número de diagonais de um polígono de n lados é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

A seguir, obtemos a soma das medidas dos ângulos de um polígono de n lados.

Teorema 2.19. *A soma S_i das medidas dos ângulos de um polígono de n lados é dada por $S_i = (n-2) \cdot 180°$.*

Demonstração. Vamos mostrar este fato por indução matemática em n, para $n \geq 3$.

Para $n = 3$, temos um triângulo e a soma das medidas de seus ângulos é dada por $180° = (3-2) \cdot 180°$, donde o passo base é válido.

Suponha, para algum $k \geq 3$, que a soma das medidas dos ângulos de um polígono qualquer de k lados é dada por $(k-2) \cdot 180°$.

Seja $A_1A_2...A_{k+1}$ um polígono de $k+1$ lados. Então $A_1A_2...A_k$ é um polígono de k lados e a soma das medidas de seus ângulos, por hipótese de indução, é dada por $(k-2)\cdot 180°$. Como a soma das medidas dos ângulos de $A_1A_2...A_{k+1}$ é dada pela de $A_1A_2...A_k$, mais de $A_kA_{k+1}A_1$, então a soma das medidas dos ângulos de $A_1A_2...A_{k+1}$ é dada por $(k-2)\cdot 180°+180° = (k-2+1)\cdot 180° = [(k+1)-2]\cdot 180°$, donde o passo indutivo é válido.

Logo, a soma S_i das medidas dos ângulos de um polígono de n lados é dada por $S_i = (n-2)\cdot 180°$. ■

Daí, os ângulos de um polígono regular de n lados medem $\frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Em particular, os de um pentágono regular medem $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$, os de um hexágono regular medem $\frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$ e assim por diante.

Por fim, obtemos a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer.

Corolário 2.20. *A soma S_e das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é dada por $S_e = 360°$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere um polígono qualquer de n lados. Temos que ele possui n vértices e, em cada vértice, a soma das medidas do ângulo interno e de um ângulo externo é $180°$. Daí, $S_i + S_e = n\cdot 180°$. Como $S_i = (n-2)\cdot 180°$, segue que $(n-2)\cdot 180° + S_e = n\cdot 180°$. Logo, $S_e = n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 2\cdot 180° = 360°$. ■

Observe que, como são dois ângulos externos (congruentes) por vértice, então a soma total das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é dada por $2\cdot S_e = 720°$.

2.5 Circunferências

Nessa seção, vamos falar de circunferências e obter resultados relacionados, como, por exemplo, o resultado de que cada ângulo inscrito de uma circunferência mede metade da medida de seu arco correspondente.

Definição 2.21. *Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. A* ***circunferência de centro (ou centrada em)*** *O* ***e raio*** *r é dada pelo conjunto dos pontos A do plano tais que $\overline{OA} = r$.*

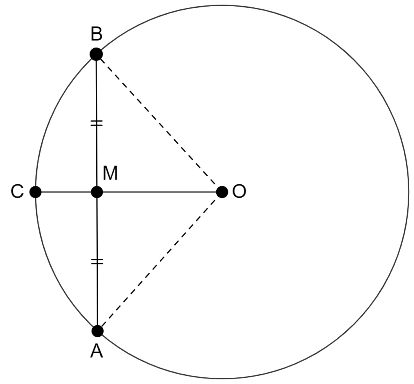
Em uma circunferência de centro O e raio r, chamamos de: **corda** um segmento que liga dois de seus pontos (ditos **extremidades da corda**); **diâmetro** a medida $2r$, assim como uma corda que passa por O; e **raio** um segmento que une O a um de seus pontos (dito **extremidade do raio**).

O próximo resultado relaciona raio com corda que não é diâmetro.

Proposição 2.22. *Um raio é perpendicular a uma corda que não é diâmetro se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.*

Demonstração. Considere uma circunferência de centro O. Sejam, nela, AB uma corda que não é diâmetro e OC um raio que intercepta AB em um ponto M.

Figura 2.13: Raio perpendicular a uma corda que não é diâmetro



Fonte: O autor.

Note que OAB é um triângulo isósceles de base AB, pois OA e OB são raios.

Por um lado, se OC é perpendicular AB, então, em OAB, OM é a altura relativa à base e, portanto, pela Proposição 2.8, é também a mediana relativa à base. Logo, $AM = BM$.

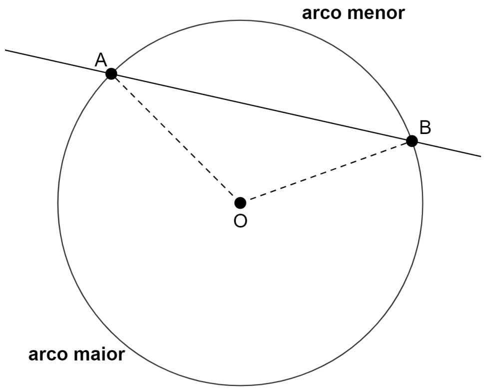
Por outro lado, se $AM = BM$, então, em OAB, OM é a mediana relativa à base e, daí, pela Proposição 2.8, é também a altura relativa à base. Portanto, OC é perpendicular a AB. ■

Dados dois pontos A e B de uma circunferência, cada semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ contém uma parte da circunferência, chamada de **arco** dado por A e B. Se A e B são extremidades de um diâmetro, cada arco é chamado de **semicircunferência** e mede $180°$. Caso contrário, o arco no semiplano contendo o centro é chamado de **arco maior** e o outro é chamado de **arco menor**.

Se O é o centro da circunferência, então o ângulo (convexo) $A\hat{O}B$ é chamado de **ângulo central** (da circunferência) e sua medida define a medida do arco menor, enquanto que $(360° - A\hat{O}B)$ define a medida do arco maior.

Dados três pontos A, B e C de uma circunferência, o ângulo $A\hat{B}C$ é chamado de **ângulo inscrito** (da circunferência). O arco determinado por A e C, que não contém B, é chamado de **arco correspondente** do ângulo inscrito $A\hat{B}C$.

Figura 2.14: Arco maior e arco menor



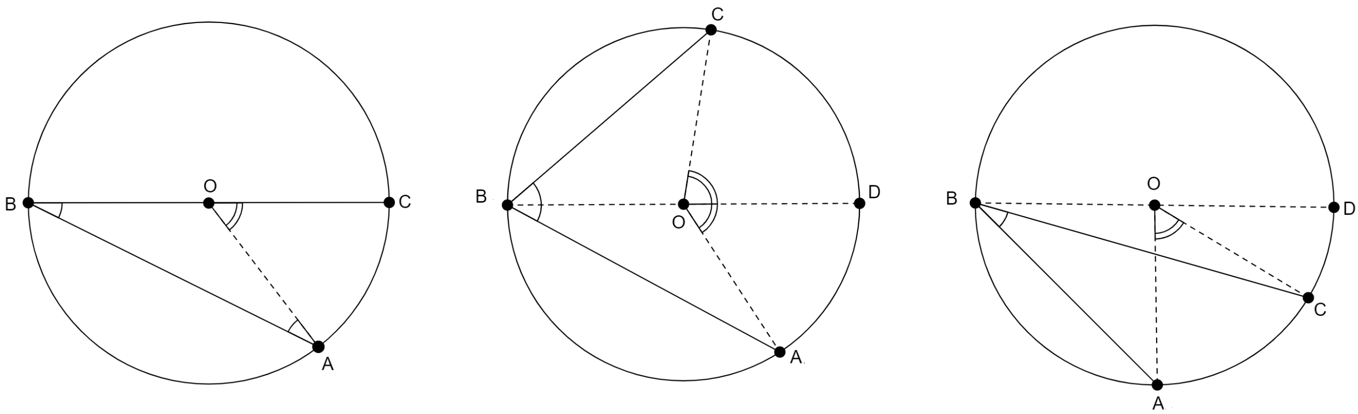
Fonte: O autor.

Por fim, os dois resultados a seguir tratam de ângulos inscritos, relacionando-os com seus arcos correspondentes.

Proposição 2.23. *Cada ângulo inscrito de uma circunferência mede metade da medida de seu arco correspondente.*

Demonstração. Considere A, B, C três pontos de uma circunferência de centro O. Vamos mostrar que o ângulo inscrito $A\hat{B}C$ mede metade da medida de seu arco correspondente, isto é, metade da medida do ângulo $A\hat{O}C$ correspondente. Observe que há dois casos para $A\hat{B}C$: ou um de seus lados é diâmetro, ou nenhum o é.

Figura 2.15: Ângulo inscrito e arco correspondente



Fonte: O autor.

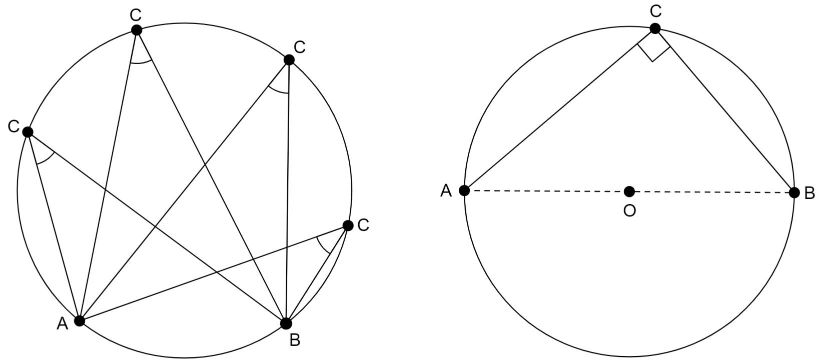
Se um de seus lados é diâmetro, por exemplo, se BC é diâmetro, então o triângulo AOB é isósceles de base AB, donde $\hat{A} = \hat{B}$. Daí, pelo corolário 2.17 (item c), $A\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B} = 2 \cdot \hat{B} = 2 \cdot A\hat{B}C$ e, portanto, $A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$.

Se nenhum deles é diâmetro, considere um ponto D na circunferência tal que BD é um diâmetro. Pelo caso anterior, temos que $C\hat{B}D = \frac{C\hat{O}D}{2}$ e $A\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2}$. Note que há duas possibilidades para BD:

ou BD divide $A\hat{B}C$, ou não o divide. Na primeira situação, $A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2} + \frac{C\hat{O}D}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2}$. Já na segunda, $A\hat{B}C = A\hat{B}D - C\hat{B}D = \frac{A\hat{O}D}{2} - \frac{C\hat{O}D}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2}$. ■

Corolário 2.24. *Ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco são congruentes. Em particular, ângulos inscritos que subtendem uma semicircunferência são retos.*

Figura 2.16: Ângulos inscritos congruentes



Fonte: O autor.

2.6 Semelhança de triângulos

Nessa seção, vamos definir semelhança de triângulos e obter resultados relacionados, como, por exemplo, o caso AA, o caso LAL (de semelhança), o caso LLL (de semelhança), além de resultados sobre relações de equivalência.

Definição 2.25. *Dois triângulos são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.*

Se ABC e EFG são semelhantes, então fixamos a correspondência biunívoca $A \longleftrightarrow E$, $B \longleftrightarrow F$, $C \longleftrightarrow G$ (obtendo $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$, $\hat{C} = \hat{G}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \kappa$) e escrevemos $ABC \sim EFG$, em que $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **razão de proporcionalidade** ou **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e EFG.

Observe que $ABC = EFG$ se, e somente se, $ABC \sim EFG$, com razão de semelhança $\kappa = 1$.

Agora, o próximo resultado diz que a relação de semelhança é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, é uma relação de equivalência.

Proposição 2.26. *A relação de semelhança é uma relação de equivalência.*

Demonstração. De fato, tal relação é: reflexiva, pois $ABC \sim ABC$, com razão de semelhança 1; simétrica, pois se $ABC \sim EFG$, com razão de semelhança κ, então $EFG \sim ABC$, com razão de semelhança $\frac{1}{\kappa}$; e transitiva, pois se $ABC \sim EFG$, com razão de semelhança $\kappa = m$ e $EFG \sim HIJ$, com razão de semelhança κ', então $ABC \sim HIJ$, com razão de semelhança $\kappa \cdot \kappa'$. ■

Daí, como triângulos são congruentes se, e somente se, são semelhantes, com razão de semelhança $\kappa = 1$, obtemos o resultado abaixo.

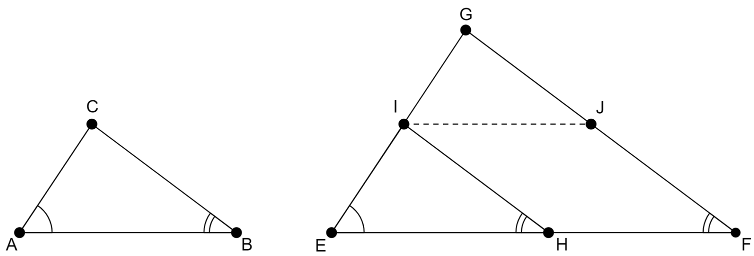
Corolário 2.27. *A relação de congruência é uma relação de equivalência.*

Agora, vamos ver resultados, conhecidos como casos de semelhança, em que obtemos semelhanças entre triângulos a partir de apenas algumas congruências e/ou igualdades específicas.

Teorema 2.28 (**Caso AA**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$ então $ABC \sim EFG$.*

Demonstração. Se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, temos como consequência $\hat{C} = \hat{G}$, pois a soma dos ângulos de cada triângulo é $180°$. Vamos mostrar que os lados são proporcionais. Seja H um ponto em $\overrightarrow{EF}$, tal que $EH = AB$.

Figura 2.17: Caso AA de semelhança



Fonte: O autor.

Trace a paralela a FG passando por H. Esta corta $\overrightarrow{EG}$ num ponto I. Como $E\hat{H}I = E\hat{F}G$, por paralelismo, e $\hat{B} = \hat{F} = E\hat{F}G$, por hipótese, então $\hat{B} = E\hat{H}I$. Logo, $ABC = EHI$, pelo caso ALA (Axioma 2.2), pois $\hat{A} = \hat{E}$, por hipótese, $AB = EH$, por construção, e $\hat{B} = E\hat{H}I$. Pelo Teorema de Tales (Barbosa (2001, Teorema 6.16)), $\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{EG}}$, pois $\overleftrightarrow{HI}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas. Como $EH = AB$ e $EI = AC$, pois $ABC = EHI$, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$.

Trace a paralela a EF passando por I. Esta corta $\overrightarrow{FG}$ num ponto J. Note que $FJ = HI$, pois $FHIJ$ é um paralelogramo. Como $ABC = EHI$, então $FJ = HI = BC$. Pelo Teorema de Tales (Barbosa (2001, Teorema 6.16)), $\frac{\overline{EI}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{FG}}$, pois $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas. Logo, $\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}$. Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}$. ■

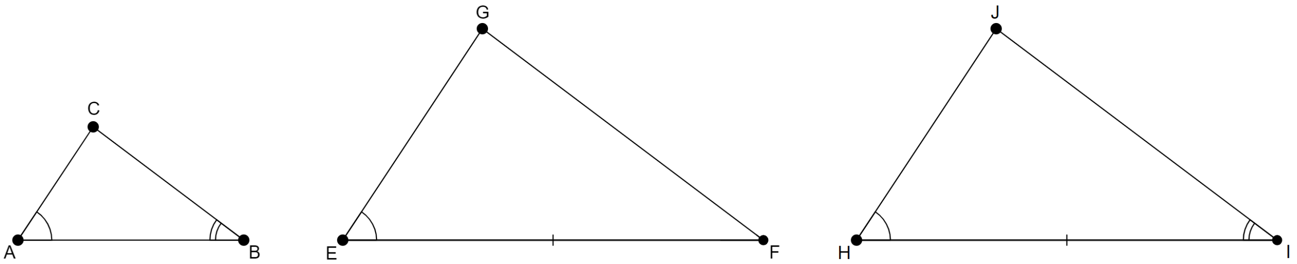
Quando o contexto não deixar claro se estamos falando de um caso de congruência ou de um caso de semelhança, isto deve ser destacado, para evitar confusão, conforme é feito nas próximas demonstrações.

A seguir, obtemos mais dois casos de semelhança.

Teorema 2.29 (**Caso LAL (de semelhança)**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$. então $ABC \sim EFG$.*

Demonstração. Construa um triângulo HIJ, tal que $HI = EF$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{B} = \hat{I}$.

Figura 2.18: Caso LAL de semelhança



Fonte: O autor.

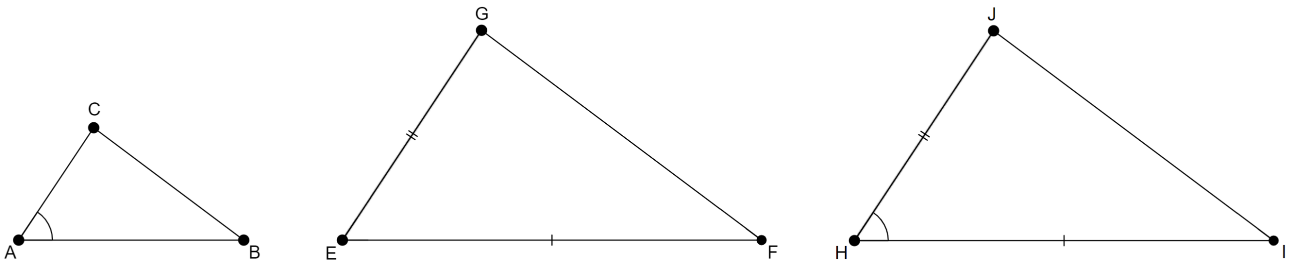
Por construção, de acordo como o caso AA (Teorema 2.28), $ABC \sim HIJ$. Daí segue que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Como $HI = EF$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$. Logo, $\frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e, portanto, $HJ = EG$. De acordo com o caso de congruência LAL (Teorema 2.3), $HIJ = EFG$, pois $HI = EF$, por construção, $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$, por construção e por hipótese, e $HJ = EG$, pelo que foi visto anteriormente. Portanto, como $ABC \sim HIJ$ e $HIJ = EFG$, temos que $ABC \sim EFG$. ■

Por fim, o próximo resultado apresenta o terceiro e último caso de semelhança colocado nesse texto.

Teorema 2.30 (**Caso LLL (de semelhança)**). *Dados triângulos ABC e EFG, se $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ então $ABC \sim EFG$.*

Demonstração. Construa um triângulo HIJ, tal que $\hat{H} = \hat{A}$, $HI = EF$ e $HJ = EG$.

Figura 2.19: Caso LLL de semelhança



Fonte: O autor.

Como, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, segue, por construção, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Daí, desde que $\hat{A} = \hat{H}$, então, pelo caso de semelhança LAL (Teorema 2.29), $ABC \sim HIJ$.

Note que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$, por semelhança, e $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}$, por construção e por hipótese. Logo, $IJ = FG$. Como, por construção, $HI = EF$ e $HJ = EG$, então, pelo caso de congruência LLL (Teorema 2.6), $HIJ = EFG$. Portanto, como $ABC \sim HIJ$, temos que $ABC \sim EFG$. ■

CAPÍTULO 3

Atividades

Nesse capítulo, são propostas atividades de interesse para os anos finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º Ano), com foco em tópicos fundamentais de Geometria Plana, a saber, ângulos, retas, polígonos, circunferências, e congruência e semelhança de triângulos, os quais são trabalhados no Capítulo 2.

Por fim, destacamos que as atividades foram elaboradas com o uso da versão *online* do Scratch, o que não impede o uso da versão *offline* pelo professor ou pelos alunos durante sua aplicação.

3.1 Estrutura e organização

As atividades aqui propostas contam com quatro documentos: "guia de aplicação da atividade" (para o professor), "aplicação da atividade" (para o aluno), "questionário da atividade" e "blocos de programação da atividade". O primeiro e o último destinam-se para o professor e têm como objetivo dar suporte na construção do planejamento da atividade e em seu desenvolvimento. Já o segundo é para o aluno e tem como objetivo proporcionar a aplicação da atividade. Por fim, o terceiro destina-se para ambos e tem como objetivos avaliar o aluno e subsidiar o professor na construção do planejamento das atividades futuras.

O "guia de aplicação da atividade" indica série, objetivo, pré-requisitos, passos da atividade, desafio criativo, além de uma proposta de discussão e reflexão. Já o documento "aplicação da atividade" indica apenas série, passos da atividade e desafio criativo. O "questionário da atividade" conta com questões referentes à aplicação da atividade, cujas respostas devem ser entregues ao professor. Finalmente, o documento "blocos de programação da atividade" conta com blocos de programação, soluções e links que podem auxiliar no planejamento da atividade e em seu desenvolvimento.

A série refere-se ao ano escolar a partir do qual a atividade é indicada e ajuda no direcionamento do planejamento do professor. O objetivo estabelece uma meta para a atividade, bem como apresenta conceitos e habilidades a serem desenvolvidos pelos alunos. Os pré-requisitos indicam o que é necessário para a aplicação da atividade. Os passos da atividade guiam professor e aluno no desenvolvimento da atividade. O desafio criativo propõe a aplicação de conceitos vistos previamente, estimulando a resolução de problemas. Por fim, a discussão e a reflexão conduzem à troca de experiências, consolidação e revisão do aprendizado, e avaliação do progresso do aluno na atividade.

As atividades podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial. A sequência geral de atividades apresentada está alinhada à BNCC, começando com atividades a partir do 6º Ano e terminando com atividades a partir do 9º Ano, no entanto propõe-se, na tabela 3.1, Sequências (específicas) de Atividades por Ano, aplicadas de forma gradual ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental.

Tabela 3.1: Sequências de Atividades por Ano

	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
Atividade 1 - Introdução e blocos básicos	X	X	X	X
Atividade 2 - Ângulos	X	X		
Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais	X	X	X	X
Atividade 4 - Polígonos	X	X	X	X
Atividade 5 - Triângulos	X	X	X	X
Atividade 6 - Quadriláteros	X	X		
Atividade 7 - Circunferências		X	X	X
Atividade 8 - Congruência de triângulos			X	X
Atividade 9 - Semelhança de triângulos				X

Observamos que o professor pode omitir algumas atividades das Sequências de Atividades por Ano em uma determinada série, caso já as tenha aplicado no ano anterior. Alternativamente, pode reaplicá-las se sentir a necessidade de revisar o conteúdo, por exemplo, a partir das discussões e reflexões realizadas ou das respostas ao “questionário da atividade”. Dessa forma, as atividades sugeridas podem ser adaptadas pelo professor conforme o nível de conhecimento da turma ou outras necessidades.

Recomendamos que o professor consulte os manuais e/ou tutoriais previamente de Souza e Costa (2018), Marques (2019) e Vaz (2021), pois é fundamental estar familiarizado com a plataforma ou linguagem de programação Scratch para aplicar as atividades de forma eficiente. Antes de iniciar a primeira atividade, sugerimos que o professor, utilizando computador e projetor, apresente o Scratch aos alunos, abordando o acesso à plataforma, suas funcionalidades e os comandos básicos.

3.2 Atividade 1 - Introdução e blocos básicos

3.2.1 Guia de aplicação da Atividade 1 - Introdução e blocos básicos

Série: a partir do 6º do Ensino Fundamental

Objetivo: introduzir e explorar a plataforma Scratch, incluir a categoria (extensão) Caneta e programar blocos básicos.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor.
- Conhecimentos necessários: ponto; plano cartesiano.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar o *site* da plataforma Scratch em https://scratch.mit.edu, criar uma conta, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 1 - Introdução e blocos básicos", e incluir a categoria (extensão) Caneta;
2. Orientar os alunos a explorar a plataforma Scratch, em especial, as categorias Movimento e Caneta;
3. Propor para os alunos a programação dos seguintes blocos básicos e, em seguida, sua inclusão na Mochila (ambiente para guardar blocos de programação) para uso em outros projetos:
   - **(Bloco apagar)** - fazendo o ator apagar tudo quando a tecla "a" for pressionada;
   - **(Bloco posição)** - fazendo o ator levantar a caneta, apontar para a direção 90° e ir para $(0, 0)$ quando a tecla "espaço" for pressionada;
4. Solicitar aos alunos a construção de retas e pontos, conforme desafio criativo;
5. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
6. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio Criativo:

- Selecione um novo ator, ajuste seu tamanho para 50% e escolha o cenário "Xy-grid" para exibir um plano cartesiano no Palco (área de visualização);

- Construa cinco pontos, mudando o tamanho da caneta para 10, com cores diferentes, nas posições $(0,0)$, $(0,100)$, $(100,0)$, $(100,100)$ e $(50,50)$.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Você já conhecia o Scratch? Se sim, cite algum projeto que você criou ou remixou.
2. Quais são as categorias de blocos de programação iniciais do Scratch?
3. Por que incluir blocos básicos antes de iniciar construções geométricas?
4. No Scratch, qual é a unidade de medida adotada para medir distâncias? Usando essa unidade, qual é a variação horizontal e vertical do Palco?

Reflexão:

1. É interessante que todos os alunos se familiarizem com o Scratch, por exemplo, criando projetos a partir de novas ideias ou remixando projetos já existentes na plataforma.
2. As categorias de blocos de programação iniciais são: Movimento, Aparência, Som, Eventos, Controle, Sensores, Operadores e Variáveis. É possível ainda incluir outras categorias (extensões) como fizemos, por exemplo, com a Caneta.
3. Os blocos básicos apagar e posição otimizam as ações no Palco, permitindo o uso de uma tecla dedicada para o ator apagar as construções geométricas e outra para retornar à posição central.
4. No Scratch, a unidade adotada para medir distâncias é “passo”. O Palco varia horizontalmente de -240 a 240 e verticalmente de -180 a 180.

3.2.2 Aplicação da Atividade 1 - Introdução e blocos básicos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse o *site* da plataforma Scratch em https://scratch.mit.edu, crie uma conta, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 1 - Introdução e blocos básicos”, e inclua a categoria (extensão) Caneta;

2. Explore a plataforma Scratch, em especial, as categorias Movimento e Caneta;

3. Programe os seguintes blocos básicos e, em seguida, inclua-os na Mochila (ambiente para guardar blocos de programação) para uso em outros projetos:

    - **(Bloco apagar)** - fazendo o ator apagar tudo quando a tecla “a” for pressionada;
    - **(Bloco posição)** - fazendo o ator levantar a caneta, apontar para a direção 90° e ir para $(0, 0)$ quando a tecla “espaço” for pressionada;

4. Construa retas e pontos, conforme desafio criativo;

5. Responda às questões propostas.

Desafio Criativo:

- Selecione um novo ator, ajuste seu tamanho para 50% e escolha o cenário “Xy-grid”, que representa o plano cartesiano no Palco;

- Construa cinco pontos, mudando o tamanho da caneta para 10, com cores diferentes, nas posições $(0, 0)$, $(0, 100)$, $(100, 0)$, $(100, 100)$ e $(50, 50)$.

3.2.3 Questionário da Atividade 1 - Introdução e blocos básicos

Escola: ____

Professor: ________________________________ **Data:** ____________

Aluno: ___________________________________ **Série:** ____________

1. Você já conhecia o Scratch? Se sim, cite algum projeto que você criou ou remixou.

2. Quais são as categorias de blocos de programação iniciais do Scratch?

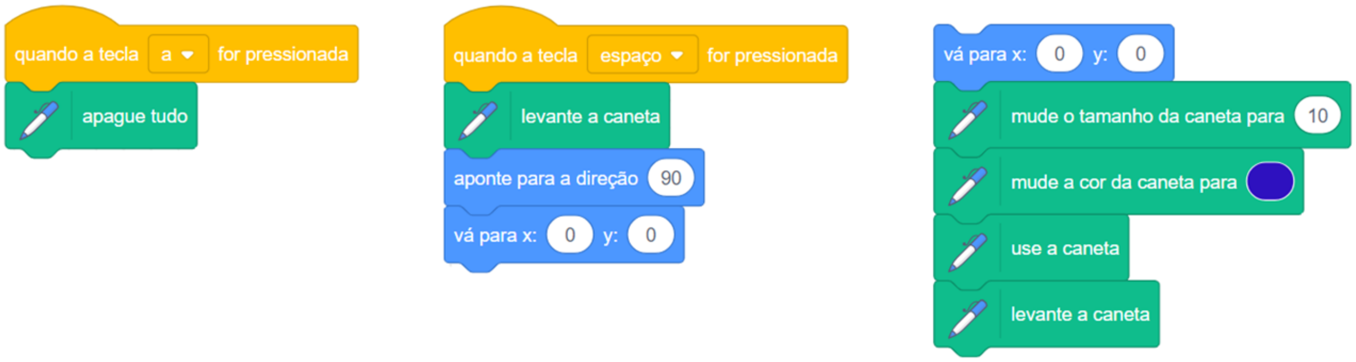
3. Por que incluir blocos básicos antes de iniciar construções geométricas?

4. No Scratch, qual é a unidade de medida adotada para medir distâncias? Usando essa unidade, qual é a variação horizontal e vertical do Palco?

3.2.4 Blocos de programação da Atividade 1 - Introdução e blocos básicos

A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para apagar as construções geométricas feitas no Palco (bloco apagar); ao centro, para colocar o ator na posição inicial (bloco posição); e à direita, para construir o ponto $(0, 0)$.

Figura 3.1: Programação de introdução e blocos básicos



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com um novo ator e cenário selecionados e cinco pontos.

Figura 3.2: Desafio criativo de introdução e blocos básicos

Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/1069655276

3.3 Atividade 2 - Ângulos

3.3.1 Guia de aplicação da Atividade 2 - Ângulos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir ângulos quaisquer, trabalhar propriedades e discutir classificações.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 1 - Introdução e blocos básicos.
- Conhecimentos necessários: ângulos; classificações de ângulos; ângulos complementares e suplementares.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 2 - Ângulos", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de ângulos quaisquer, por exemplo, fazendo o ator usar a caneta, mover 100 passos, girar $120°$ (no sentido anti-horário) e mover 100 passos;
3. Solicitar aos alunos a construção de ângulos, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio Criativo:

- Construa ângulos de $30°$, $90°$ e $135°$;
- Construa dois ângulos adjacentes ao ângulo de $30°$, sendo um de $60°$ e outro de $150°$;
- Construa um ângulo de $45°$ adjacente ao ângulo de $135°$.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. No desafio criativo, para a construção do ângulo de 30°, qual ângulo é usado na programação? O que este ângulo é do ângulo de 30° construído?

2. No desafio criativo, quais ângulos construídos são agudos? E retos? E obtusos?

3. Quais pares de ângulos construídos são complementares? E suplementares?

Reflexão:

1. No desafio criativo, para a construção do ângulo de 30°, é usado um ângulo de 150° na programação, que é suplemento do ângulo de 30° construído.

2. No desafio criativo, os ângulos de 30°, 45° e 60° construídos são agudos; o ângulo de 90° construído é reto; e os ângulos de 135° e 150° construídos são obtusos.

3. O par de ângulos complementares é $(30^\circ, 60^\circ)$. Já os pares de ângulos suplementares são $(30^\circ, 150^\circ)$ e $(45^\circ, 135^\circ)$.

3.3.2 Aplicação da Atividade 2 - Ângulos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 2 - Ângulos”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa ângulos quaisquer;
3. Construa ângulos, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio Criativo:

- Construa ângulos de $30°$, $90°$ e $135°$;
- Construa dois ângulos adjacentes ao ângulo de $30°$, sendo um de $60°$ e outro de $150°$;
- Construa um ângulo de $45°$ adjacente ao ângulo de $135°$.

3.3.3 Questionário da Atividade 2 - Ângulos

Escola: ____

Professor: ______________________________ **Data:** __________

Aluno: ______________________________ **Série:** __________

1. No desafio criativo, para a construção do ângulo de 30°, qual ângulo é usado na programação? O que este ângulo é do ângulo de 30° construído?

____

____

____

2. No desafio criativo, quais ângulos construídos são agudos? E retos? E obtusos?

____

____

____

3. Quais pares de ângulos construídos são complementares? E suplementares?

____

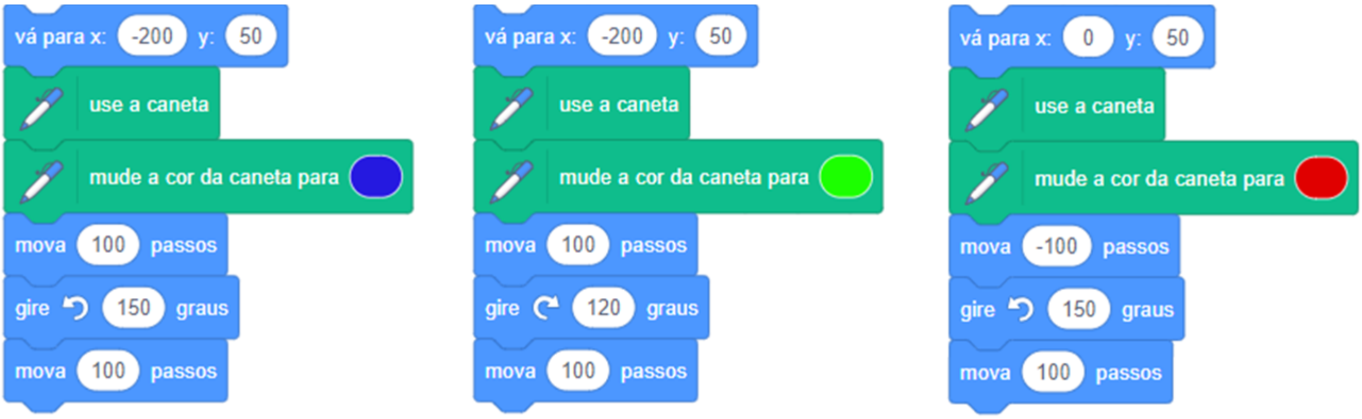
____

____

3.3.4 Blocos de programação da Atividade 2 - Ângulos

A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir um ângulo de 30°; ao centro, para construir um ângulo de 60° (complemento do ângulo de 30°); e à direita, para construir ângulo de 150° (suplemento do ângulo de 30°).

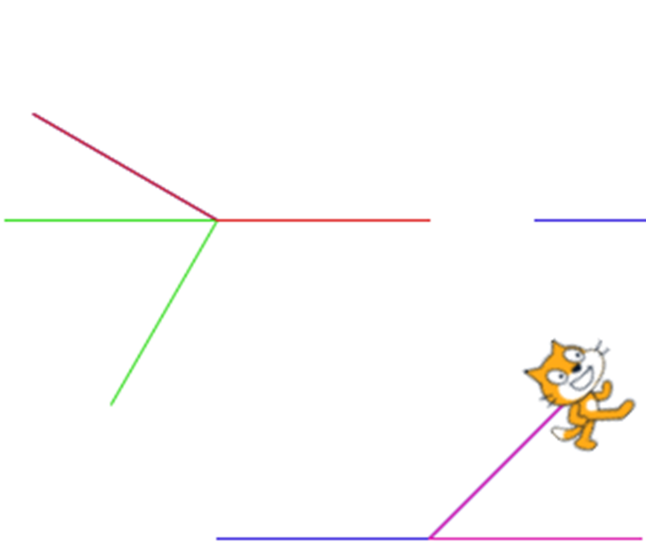
Figura 3.3: Programação de ângulos



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: à esquerda, com um ângulo de 30°, além de um complemento e um suplemento seu; à direita, com um de 90°; e abaixo, com um ângulo de 135°, além de um suplemento seu.

Figura 3.4: Desafio criativo de ângulos



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/943631087

3.4 Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais

3.4.1 Guia de aplicação da Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir segmentos de reta e linhas poligonais quaisquer, trabalhar propriedades e discutir classificações.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 2 - Ângulos, para o 6º ou 7º Ano; e Atividade 1 - Introdução e blocos básicos, para o 8º ou 9º Ano;
- Conhecimentos necessários: segmentos de reta; paralelismo; linhas poligonais; classificações de linhas poligonais.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de segmentos de reta quaisquer, por exemplo, fazendo o ator usar a caneta e mover 100 passos;
3. Solicitar aos alunos a construção de segmentos de reta e linhas poligonais, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio Criativo:

- Construa três segmentos de reta paralelos, com cores diferentes, medindo 50, 100 e 150;

- Construa uma linha poligonal aberta simples e, se possível, uma linha poligonal fechada simples, com três segmentos de reta congruentes aos anteriores.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Qual a diferença entre uma linha poligonal aberta e uma linha poligonal fechada?
2. Quando uma linha poligonal é simples?
3. É possível construir uma linha poligonal fechada simples com três segmentos de reta quaisquer?

Reflexão:

1. Uma linha poligonal é dita fechada, quando começa e termina em um mesmo ponto e é dita aberta, caso contrário.
2. Uma linha poligonal é dita simples quando não possui autointerseção.
3. Em geral, não. Uma linha poligonal fechada simples com três segmentos de reta forma um triângulo, no entanto a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo deve ser maior do que o comprimento do terceiro. Tal resultado é conhecido como desigualdade triangular (Teorema 2.14). Assim, se essa condição não é satisfeita, então não é possível construir tal linha poligonal fechada simples.

3.4.2 Aplicação da Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa segmentos de reta quaisquer;
3. Construa segmentos de reta e linhas poligonais, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio Criativo:

- Construa três segmentos de reta paralelos, com cores diferentes, medindo 50, 100 e 150;
- Construa uma linha poligonal aberta simples e, se possível, uma linha poligonal fechada simples, com três segmentos de reta congruentes aos anteriores.

3.4.3 Questionário da Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais

Escola: ____

Professor: ______________________________ **Data:** ____________

Aluno: ______________________________ **Série:** ____________

1. Qual a diferença entre uma linha poligonal aberta e uma linha poligonal fechada?

____

____

____

2. Quando uma linha poligonal é simples?

____

____

____

3. É possível construir uma linha poligonal fechada simples com três segmentos de reta quaisquer?

____

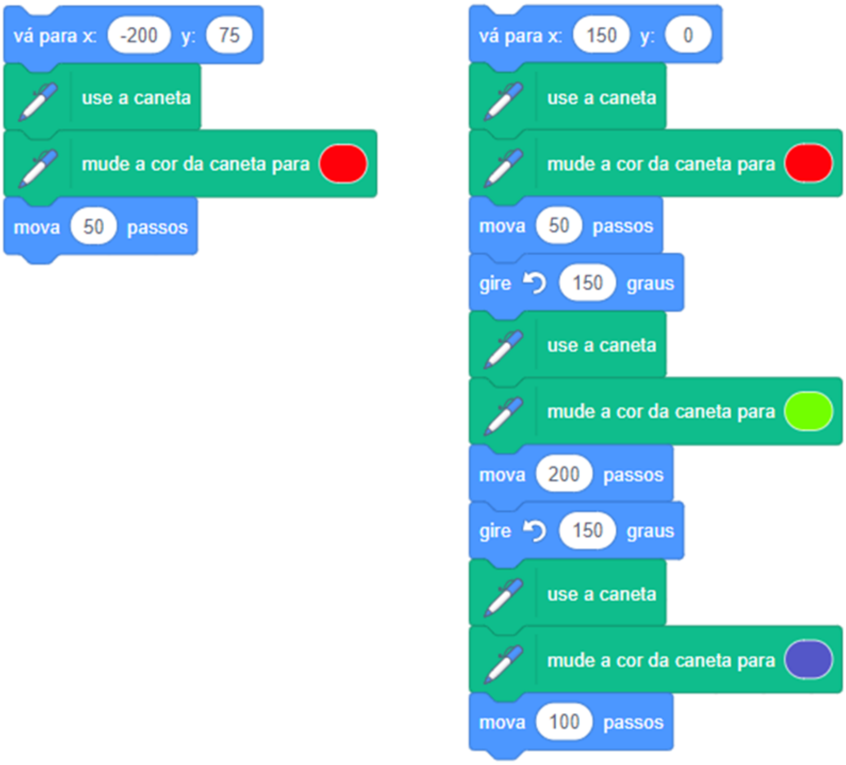
____

____

3.4.4 Blocos de programação da Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais

A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir um segmento de reta; e à direita, para construir uma linha poligonal aberta simples.

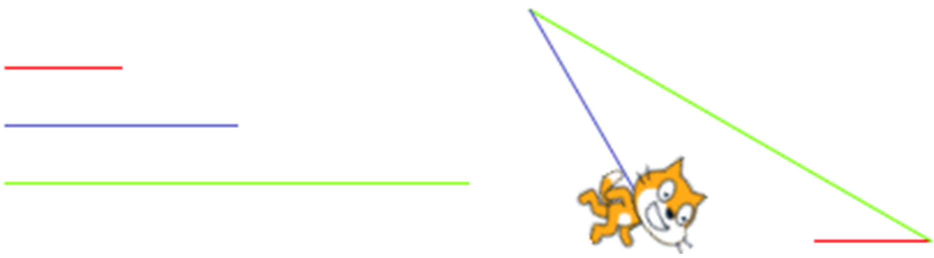
Figura 3.5: Programação de segmentos e linhas poligonais



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: à esquerda, com três segmentos de reta; e à direita, com uma linha poligonal aberta simples.

Figura 3.6: Desafio criativo de segmentos e linhas poligonais



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/1037768608

3.5 Atividade 4 - Polígonos

3.5.1 Guia de aplicação da Atividade 4 - Polígonos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir polígonos quaisquer, trabalhar propriedades e discutir classificações, quanto a lados, quanto a convexidade, e quanto a regularidade.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 3 - Segmentos e linhas poligonais;
- Conhecimentos necessários: polígonos; classificações de polígonos, quanto a lados, quanto a convexidade, e quanto a regularidade; soma das medidas dos ângulos de um polígono; soma das medidas dos ângulos externos de um polígono.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o “Atividade 4 - Polígonos”, e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de polígonos quaisquer, convexo ou côncavo, por exemplo, fazendo o ator mover 100 passos, girar 45° (no sentido anti-horário), mover 90 passos, girar 75° (no sentido anti-horário), mover 80 passos, girar 60° (no sentido anti-horário), mover 70 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 50 passos e retornar para o ponto inicial;
3. Solicitar aos alunos a construção de polígonos, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio criativo:

- Construa polígonos côncavos, sendo um deles um hexágono;
- Construa polígonos (convexos) não regulares, sendo dois deles um triângulo e um pentágono;

- Construa cinco polígonos regulares, sendo um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular, um hexágono regular e um octógono regular.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Quais são algumas diferenças na construção de polígonos regulares e não regulares?
2. Qual é a soma das medidas dos ângulos de um polígono (convexo) de n lados qualquer?
3. Como obter a medida dos ângulos de um polígono regular qualquer?
4. Qual é a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono (convexo) qualquer?

Reflexão:

1. A construção de polígonos regulares envolve usar apenas ângulos de mesma medida e lados de mesma medida, enquanto que a de não regulares envolve usar ângulos e/ou lados de medidas diferentes. Na programação feita no Scratch, sugere-se construir polígonos regulares, usando o bloco repita ou sempre na programação, exemplificando essa questão.
2. A soma das medidas dos ângulos de um polígono (convexo) de n lados é dada por $(n-2)\cdot 180^\circ$ (Teorema 2.19), pois é possível dividi-lo em $(n-2)$ triângulos e a soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é 180° (Teorema 2.16).
3. Para obter a medida dos ângulos de um polígono regular, basta dividir a soma das medidas de seus ângulos pelo número de lados. Assim, a medida dos ângulos de um um polígono regular de n lados é dada por $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.
4. A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é 360° (Corolário 2.20).

3.5.2 Aplicação da Atividade 4 - Polígonos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 4 - Polígonos”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa polígonos quaisquer;
3. Construa polígonos, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio criativo:

- Construa polígonos côncavos, sendo um deles um hexágono;
- Construa polígonos (convexos) não regulares, sendo dois deles um triângulo e um pentágono;
- Construa cinco polígonos regulares, sendo um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular, um hexágono regular e um octógono regular.

3.5.3 Questionário da Atividade 4 - Polígonos

Escola: ____________________

Professor: ____________________ **Data:** __________

Aluno: ____________________ **Série:** __________

1. Quais são algumas diferenças na construção de polígonos regulares e não regulares?

2. No Scratch, faça o ator mover 100 passos, girar $45°$ (no sentido anti-horário), mover 90 passos, girar $75°$ (no sentido anti-horário), mover 80 passos, girar $60°$ (no sentido anti-horário), mover 70 passos, girar $120°$ (no sentido anti-horário), mover 50 passos e retornar para o ponto inicial.

O polígono construído é um hexágono? É convexo ou côncavo? Justifique.

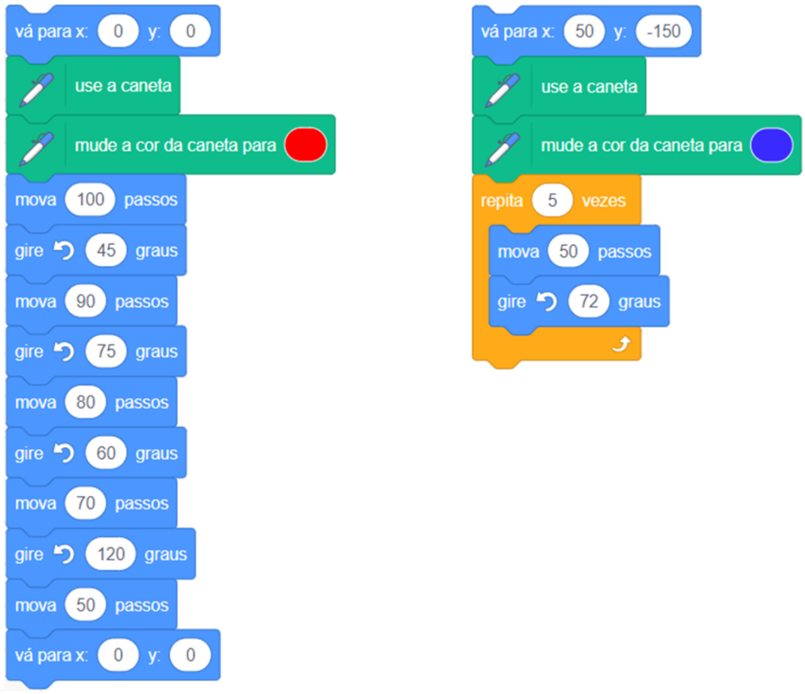
3. Qual é a soma das medidas dos ângulos de cada pentágono construído?

4. Como obter a medida dos ângulos de um polígono regular qualquer?

3.5.4 Blocos de programação da Atividade 4 - Polígonos

A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir um polígono côncavo; e à direita, para construir um polígono (convexo) regular.

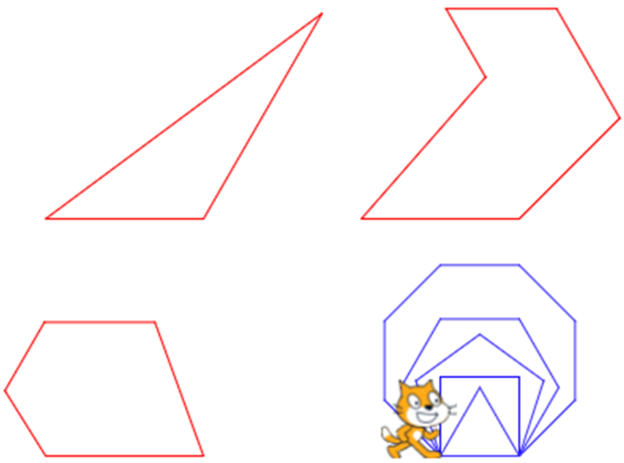
Figura 3.7: Programação de polígonos



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: à esquerda, para construir dois polígonos (convexos) não regulares; à direita acima, para construir um polígono côncavo; e à direita abaixo, para construir cinco polígonos (convexos) regulares.

Figura 3.8: Desafio criativo de polígonos



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/897391230

3.6 Atividade 5 - Triângulos

3.6.1 Guia de aplicação da Atividade 5 - Triângulos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir triângulos quaisquer, trabalhar propriedades e discutir classificações, quanto a lados e ângulos.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 4 - Polígonos;
- Conhecimentos necessários: triângulos; classificações de triângulos, quanto a lados e ângulos; soma das medidas dos ângulos de um triângulo.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 5 - Triângulos", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de triângulos quaisquer, por exemplo, fazendo o ator mover 200 passos, girar 30° (no sentido anti-horário), mover 100 passos e retornar para o ponto inicial;
3. Solicitar aos alunos a construção de triângulos isósceles e escalenos, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio criativo:

- Construa triângulos isósceles, sendo:
  1. um obtusângulo com um ângulo de 120°;
  2. um retângulo;
  3. um acutângulo com um ângulo de 60°;

4. um acutângulo com um ângulo de 30°.

- Construa triângulos escalenos, sendo:

1. um obtusângulo com um ângulo de 120°;
2. um retângulo;
3. um acutângulo com um ângulo de 30°.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Dentre os triângulos construídos, algum deles é equilátero? Se sim, quais?
2. Em um triângulo isósceles, qual é a relação entre o ângulo que não está na base e sua classificação em obtusângulo, retângulo ou acutângulo?
3. Qual é a relação entre os ângulos da base de um triângulo isósceles?
4. Qual é a soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer?

Reflexão:

1. Sim. No desafio criativo, o triângulo isósceles acutângulo com um ângulo de 60° é equilátero.
2. Como em um triângulo isósceles os ângulos da base são agudos, então o ângulo que não está na base determina se o triângulo é obtusângulo, retângulo ou acutângulo, ou seja, sendo:
    - obtuso, o triângulo é obtusângulo;
    - reto, o triângulo é retângulo;
    - agudo, o triângulo é acutângulo.
3. Os ângulos da base de triângulos isósceles são congruentes (Proposição 2.4).
4. A soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é 180° (Teorema 2.16).

3.6.2 Aplicação da Atividade 5 - Triângulos

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 5 - Triângulos”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa triângulos quaisquer;
3. Construa triângulos isósceles e escalenos, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio criativo:

- Construa triângulos isósceles, sendo:
  1. um obtusângulo com um ângulo de $120°$;
  2. um retângulo;
  3. um acutângulo com um ângulo de $60°$;
  4. um acutângulo com um ângulo de $30°$.
- Construa triângulos escalenos, sendo:
  1. um obtusângulo com um ângulo de $120°$;
  2. um retângulo;
  3. um acutângulo com um ângulo de $30°$.

3.6.3 Questionário da Atividade 5 - Triângulos

Escola: ____

Professor: ________________________________ **Data:** __________

Aluno: ________________________________ **Série:** __________

1. Dentre os triângulos construídos, algum deles é equilátero? Se sim, quais? Justifique.

____

____

____

2. Em um triângulo isósceles, qual é a relação entre o ângulo que não está na base e sua classificação em obtusângulo, retângulo ou acutângulo?

____

____

____

3. No triângulo isósceles obtusângulo com um ângulo de 120° construído no desafio criativo, qual é a medida de um de seus ângulos da base?

____

____

____

3.6.4 Blocos de programação da Atividade 5 - Triângulos

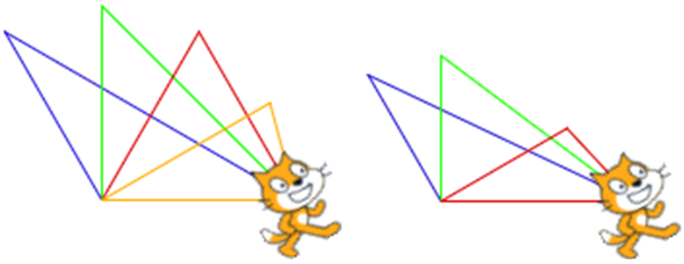
A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir um triângulo isósceles; e à direita, para construir um triângulo escaleno.

Figura 3.9: Programação de triângulos

Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: à esquerda, com quatro triângulos isósceles; e à direita, com três triângulos escalenos.

Figura 3.10: Desafio criativo de triângulos



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/971332950 - Triângulos escalenos

https://scratch.mit.edu/projects/915600947 - Triângulos isósceles

3.7 Atividade 6 - Quadriláteros

3.7.1 Guia de aplicação da Atividade 6 - Quadriláteros

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir quadriláteros quaisquer, trabalhar propriedades e discutir classificações, quanto a lados e ângulos, e quanto a convexidade.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 4 - Polígonos e Atividade 5 - Triângulos;
- Conhecimentos necessários: quadriláteros; paralelismo; classificações de quadriláteros, quanto a lados e ângulos, e quanto a convexidade; soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 6 - Quadriláteros", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de quadriláteros quaisquer, por exemplo, fazendo o ator mover 200 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 150 passos, girar 60° (no sentido anti-horário), mover 100 passos e retornar para o ponto inicial;
3. Solicitar aos alunos a construção de paralelogramos e quadriláteros convexo, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio criativo:

- Construa paralelogramos, sendo:

  1. um com lados medindo 100 e 200 e ângulos de 60° e 120°;

2. um com lados medindo 100 e 200 e ângulos de 90°;
3. um com lados medindo 100 e ângulos de 60° e 120°;
4. um com lados medindo 100 e ângulos de 90°.

- Construa quadriláteros, sendo:

  1. um convexo (não regular);
  2. um côncavo.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Dentre os paralelogramos construídos, algum deles é retângulo? Se sim, quais? Algum deles é losango? Se sim, quais? Algum deles é quadrado? Se sim, quais?
2. Em um paralelogramo, qual é a relação entre ângulos opostos? E entre ângulos consecutivos?
3. Qual é a soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero qualquer?
4. Qual é a diferença entre um quadrilátero côncavo e um convexo?

Reflexão:

1. Sim para todas. Os paralelogramos (2) e (4) construídos são retângulos, pois todos os ângulos são retos. Já os paralelogramos (3) e (4) construídos são losangos, pois todos os lados são congruentes. Por fim, o paralelogramo (4) construído é um quadrado, pois é um retângulo e um losango.
2. Em um paralelogramo, ângulos opostos são congruentes e ângulos consecutivos são suplementares.
3. A soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero qualquer é 360° (corolário 2.17), pois é possível dividi-lo em dois triângulos e a soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é 180° (Teorema 2.16).
4. Um quadrilátero convexo possui apenas ângulos convexos (ou seja, com medidas entre 0° e 180°), enquanto um quadrilátero côncavo possui pelo menos um ângulo côncavo (ou seja, com medida entre 180° e 360°).

3.7.2 Aplicação da Atividade 6 - Quadriláteros

Série: a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 6 - Quadriláteros”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa quadriláteros quaisquer;
3. Construa paralelogramos e quadriláteros, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio criativo:

- Construa paralelogramos, sendo:
  1. um com lados medindo 100 e 200 e ângulos de $60°$ e $120°$;
  2. um com lados medindo 100 e 200 e ângulos de $90°$;
  3. um com lados medindo 100 e ângulos de $60°$ e $120°$;
  4. um com lados medindo 100 e ângulos de $90°$.
- Construa quadriláteros, sendo:
  1. um convexo (não regular);
  2. um côncavo.

3.7.3 Questionário da Atividade 6 - Quadriláteros

Escola: ____________________

Professor: ____________________ **Data:** __________

Aluno: ____________________ **Série:** __________

1. Dentre os paralelogramos construídos, algum deles é retângulo? Se sim, quais? Algum deles é losango? Se sim, quais? Algum deles é quadrado? Se sim, quais?

2. Em um paralelogramo, qual é a relação entre ângulos opostos? E entre ângulos consecutivos?

3. Qual é a soma das medidas dos ângulos de cada paralelogramo construído?

4. Qual é a diferença entre um quadrilátero côncavo e um convexo?

3.7.4 Blocos de programação da Atividade 6 - Quadriláteros

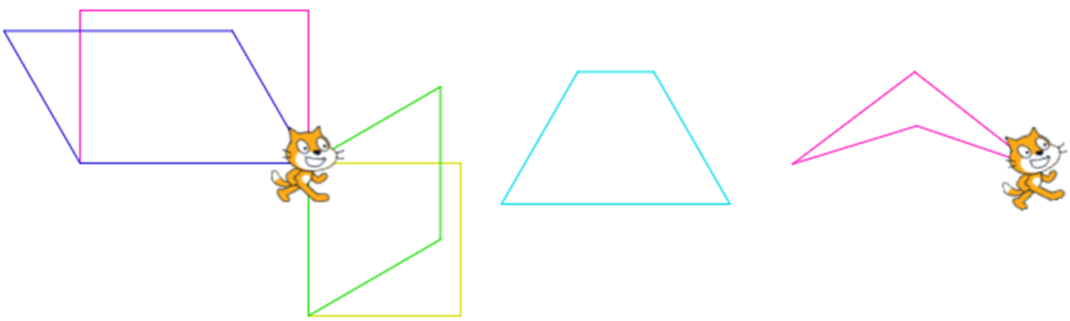
A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir um paralelogramo; ao centro, para construir um quadrilátero convexo (não regular); e à direita, para construir um quadrilátero côncavo.

Figura 3.11: Programação de quadriláteros

Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: à esquerda, com quatro paralelogramos; ao centro, com um quadrilátero convexo (não regular); e à direita, com um quadrilátero côncavo.

Figura 3.12: Desafio criativo de quadriláteros



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/962885256 - Paralelogramos

https://scratch.mit.edu/projects/983761307 - Quadriláteros

3.8 Atividade 7 - Circunferências

3.8.1 Guia de aplicação da Atividade 7 - Circunferências

Série: a partir do 7º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir circunferências quaisquer e trabalhar propriedades.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 6 - Quadriláteros, para o 7º Ano; e Atividade 5 - Triângulos, para o 8º ou 9º Ano;
- Conhecimentos necessários: circunferências; ponto médio; interseção de figuras; classificação de triângulos, de acordo com lados.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 7 - Circunferências", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a programação dos seguintes blocos auxiliares e, em seguida, sua inclusão na Mochila para uso em outros projetos:
    - **(Bloco circunferência)** - na posição $(0, 0)$, fazendo, dentro do bloco sempre, o ator levantar a caneta, mover 100 passos, usar a caneta, levantar a caneta, mover -100 passos e girar 7° (no sentido anti-horário);
    - **(Bloco ponteiro)** - fazendo o ator usar a caneta e ir para o ponteiro do mouse quando a tecla "seta para cima" for pressionada;
3. Solicitar aos alunos a construção de circunferências e um triângulo escaleno, conforme desafio criativo;
4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;
5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio Criativo:

- Construa duas circunferências, sendo uma centrada em $(0,0)$ com raio medindo 50 e outra centrada em $(130,0)$ com raio medindo 100;

- Usando as circunferências construídas anteriormente, construa um triângulo escaleno de lados 50, 100 e 130.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Dado um segmento, como podemos determinar seu ponto médio?

2. Porque a construção proposta no passo antes do desafio resulta, de fato, em uma circunferência?

3. Na construção proposta no passo antes do desafio, por que foi usado um ângulo de 7° e não um ângulo de 60°?

4. Como podemos usar circunferências para verificar se um triângulo é isósceles, equilátero ou escaleno?

Reflexão:

1. Dado um segmento de comprimento r, é possível determinar seu ponto médio traçando duas circunferências, com raio r, centradas em suas extremidades, e ligando os pontos em que elas se interceptam. A interseção entre os segmentos determina ponto médio procurado.

2. Porque a construção proposta resulta no lugar geométrico de todos os pontos equidistantes a um ponto fixo (centro da circunferência).

3. Porque, ao contrário de 60°, 7° não é divisor de 360°.

4. Isto pode ser feito traçando-se circunferências em seus vértices. Observe que, ao traçar circunferências centradas em um vértice qualquer de um triângulo, se ambos os lados que se encontram nesse vértice são raios da mesma circunferência, então eles são congruentes. Assim, se isso ocorrer em:

    - um vértice, então o triângulo possui pelo menos dois lados congruentes e portanto é isósceles;

    - dois vértices, então o triângulo possui todos os lados congruentes e portanto é equilátero;

    - nenhum vértice, então o triângulo não possui lados, dois a dois, congruentes e portanto é escaleno.

3.8.2 Aplicação da Atividade 7 - Circunferências

Série: a partir do 7º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir circunferências.

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o "Atividade 7 - Circunferências", e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Programe os seguintes blocos auxiliares e, em seguida, inclua-os na Mochila para uso em outros projetos:
    - **(Bloco circunferência)** - na posição $(0, 0)$, fazendo, dentro do bloco sempre, o ator levantar a caneta, mover 100 passos, usar a caneta, levantar a caneta, mover -100 passos e girar 7° (no sentido anti-horário);
    - **(Bloco ponteiro)** - fazendo o ator usar a caneta e ir para o ponteiro do mouse quando a tecla "seta para cima" for pressionada;
3. Construa circunferências e um triângulo escaleno, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio Criativo:

- Construa duas circunferências, sendo uma centrada em $(0, 0)$ com raio medindo 50 e outra centrada em $(130, 0)$ com raio medindo 100;
- Usando as circunferências construídas anteriormente, construa um triângulo escaleno de lados 50, 100 e 130.

3.8.3 Questionário da Atividade 7 - Circunferências

Escola: ____

Professor: ________________________________ **Data:** __________

Aluno: ________________________________ **Série:** __________

1. Dado um segmento, como podemos determinar seu ponto médio?

____

____

____

2. Por que a construção proposta no passo antes do desafio resulta, de fato, em uma circunferência?

____

____

____

3. Na construção proposta no passo antes do desafio, por que foi usado um ângulo de 7° e não um ângulo de 60°?

____

____

____

3.8.4 Blocos de programação da Atividade 7 - Circunferências

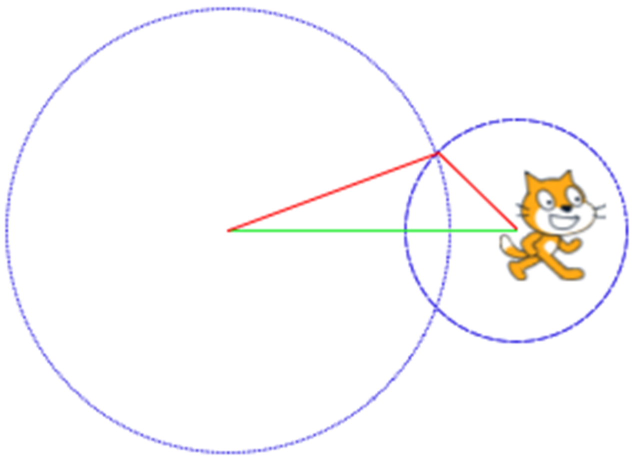
A figura a seguir apresenta blocos de programação: à esquerda, para construir uma circunferência (bloco circunferência); à direita acima, para construir um segmento de reta; e à direita abaixo, para construir um segmento de reta até o ponteiro do mouse (bloco ponteiro).

Figura 3.13: Programação de circunferências

Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo: com duas circunferências, um segmento de reta ligando seus centros e dois segmentos de reta, a partir de seus centros, até o ponteiro do mouse localizado em uma das interseções entre as circunferências.

Figura 3.14: Desafio criativo de circunferências



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/962863794

3.9 Atividade 8 - Congruência de triângulos

3.9.1 Guia de aplicação da Atividade 8 - Congruência de triângulos

Série: a partir do 8º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir triângulos congruentes quaisquer, trabalhar propriedades e reconhecer casos de congruência.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 5 - Triângulos e Atividade 7 - Circunferências;
- Conhecimentos necessários: congruência de triângulos; casos de congruência.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 8 - Congruência de triângulos", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Propor para os alunos a construção de um par de triângulos congruentes, de acordo com algum caso de congruência, em ordem crescente de complexidade[1], a seguir:
    - **Caso LAL** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0, 0)$, mover 100 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 50 passos e retornar para a posição $(0, 0)$;
    - **Caso ALA** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0, 0)$, mover 100 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 100 passos, retornar para a posição $(0, 0)$, girar 45° (no sentido anti-horário) e mover 100 passos;
    - **Caso LLL** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0, 0)$, mover 100 passos, construir duas circunferências, uma em cada extremidade do segmento traçado, sendo uma de raio 70 passos e outra de raio 50 passos, e ligar ambas extremidades do segmento traçado a um dos pontos de interseção entre as circunferências;
3. Solicitar aos alunos a construção de um terceiro triângulo congruente aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de congruência, conforme desafio criativo;

[1] Sugere-se ao professor seguir a ordem crescente de complexidade das construções propostas, executando todos os passos da atividade para cada construção. Caso não sejam feitas todas de uma vez, a atividade poderá ser reaplicada.

4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;

5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio criativo:

Construa um terceiro triângulo congruente aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de congruência, na posição $(0, -150)$, tendo lados com inclinação de $15°$ (no sentido anti-horário) em relação aos lados de um dos triângulos anteriores.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Quando triângulos são congruentes? Quais são alguns casos de congruência?

2. Qual caso de congruência você usou na construção do desafio criativo? Quais elementos, e em que ordem, foram usados para estabelecer esse caso?

3. Por que a posição e inclinação dos lados do terceiro triângulo não afetam ele ser congruente aos triângulos do par anterior?

4. Se dois triângulos têm, cada um, dois lados com mesmo comprimento comum, podemos afirmar que eles são congruentes?

Reflexão:

1. Triângulos são congruentes quando seis congruências podem ser verificadas (entre seus três lados e três ângulos), o que já é obtido com algumas congruências específicas, em determinada ordem, por meio de casos de congruência, como o caso ALA (Axioma 2.2), o caso LAL de congruência (Teorema 2.3), o caso LLL de congruência (Teorema 2.6) e o caso LAA$_o$ (Teorema 2.12).

2. A resposta segue a ordem crescente de complexidade das construções: **(1)** Caso LAL de congruência (Teorema 2.3); **(2)** Caso ALA (Axioma 2.2); e **(3)** Caso LLL de congruência (Teorema 2.6).

3. Porque a posição e a inclinação são colocadas antes da construção do triângulo em si.

4. Não, porque ter dois lados com mesmo comprimento comum não é condição suficiente para garantir a congruência de dois triângulos. Por exemplo, dois lados medindo 1, com ângulo entre eles, ora $60°$, ora $90°$, produzem dois triângulos não congruentes.

3.9.2 Aplicação da Atividade 8 - Congruência de triângulos

Série: a partir do 8º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o “Atividade 8 - Congruência de triângulos”, e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;
2. Construa um par de triângulos congruentes, de acordo com algum caso de congruência, em ordem crescente de complexidade, a seguir:
    - **Caso LAL**;
    - **Caso ALA**;
    - **Caso LLL**;
3. Construa um terceiro triângulo congruente aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de congruência, conforme desafio criativo;
4. Responda às questões propostas.

Desafio criativo:

Construa um terceiro triângulo congruente aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de congruência, na posição $(0, -150)$, tendo lados com inclinação de $15°$ (no sentido anti-horário) em relação aos lados de um dos triângulos anteriores.

3.9.3 Questionário da Atividade 8 - Congruência de triângulos

Escola: ______________________________

Professor: ______________________________ **Data:** ______________

Aluno: ______________________________ **Série:** ______________

1. Quando triângulos são congruentes? Quais são alguns casos de congruência?

____

____

____

2. Qual caso de congruência você usou na construção do desafio criativo? Quais elementos, e em que ordem, foram usados para estabelecer esse caso?

____

____

____

3. Por que a posição e inclinação dos lados do terceiro triângulo não afetam ele ser congruente aos triângulos do par anterior?

____

____

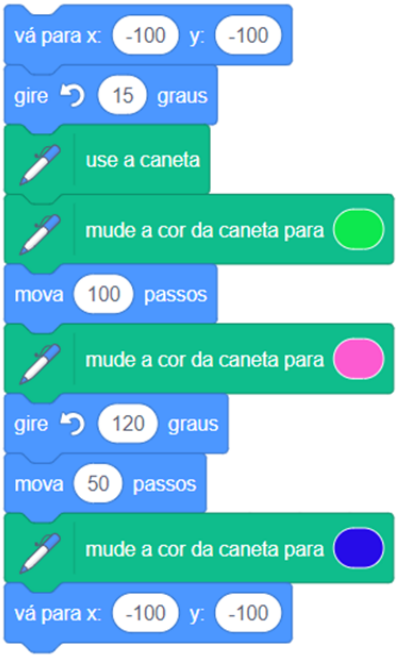
____

3.9.4 Blocos de programação da Atividade 8 - Congruência de triângulos

Caso LAL de congruência

A figura a seguir apresenta um bloco de programação para construir um triângulo, a partir dos elementos do caso LAL. Note que o terceiro lado é determinado pelo segmento de reta ligando as extremidades livres dos outros lados.

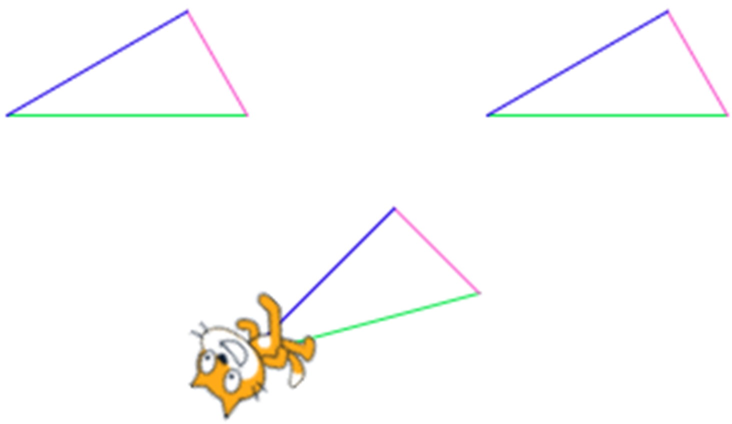
Figura 3.15: Programação de congruência de triângulos - Caso LAL



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos congruentes, pelo caso LAL.

Figura 3.16: Desafio criativo de congruência de triângulos - Caso LAL



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/948406135 - Caso LAL de congruência

Caso ALA

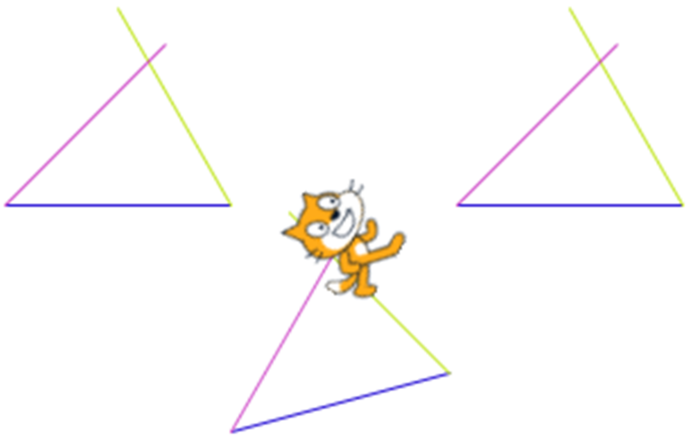
A figura a seguir apresenta blocos de programação para construir um triângulo, a partir dos elementos do caso ALA. Note que os lados são determinados pela interseção das semirretas dadas pelos ângulos conhecidos.

Figura 3.17: Programação de congruência de triângulos - Caso ALA

Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos congruentes, pelo caso ALA.

Figura 3.18: Desafio criativo de congruência de triângulos - Caso ALA



Fonte: O autor.

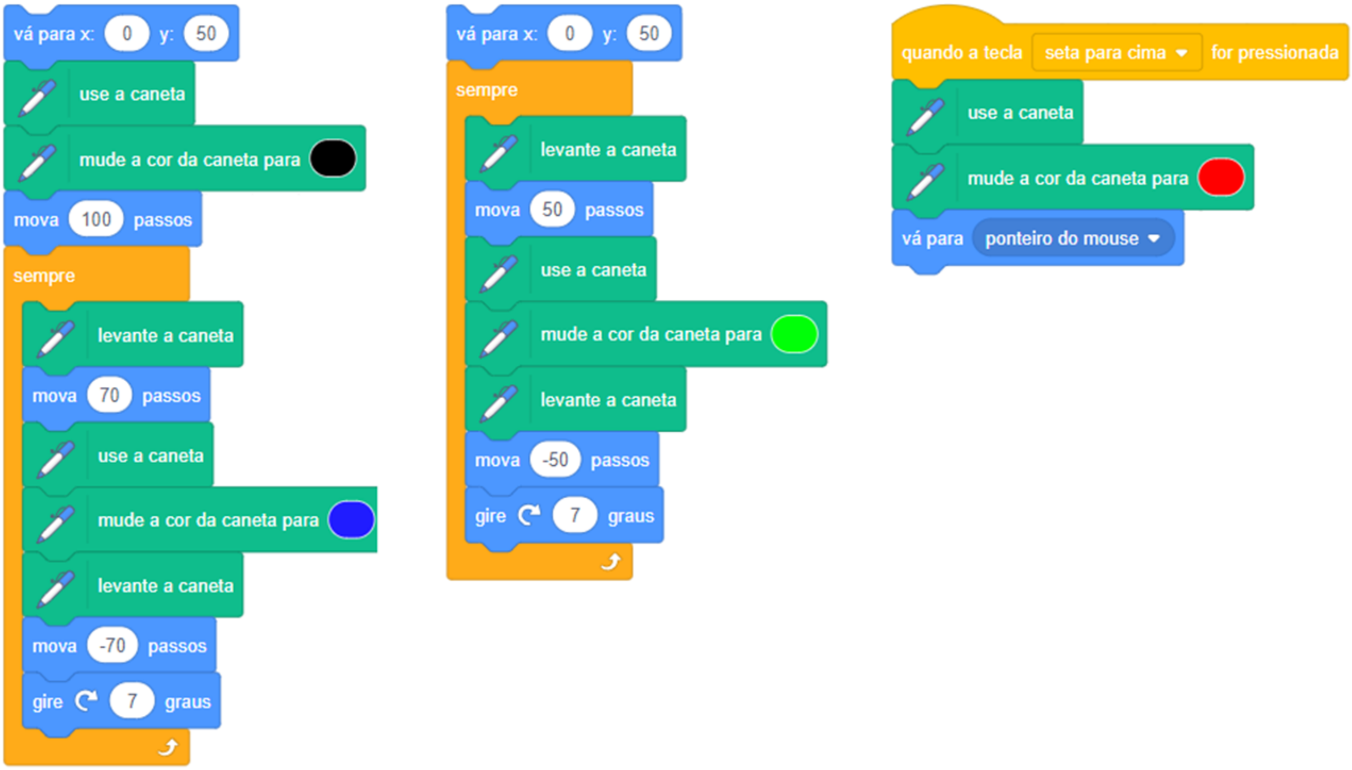
A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/948412842 - Caso ALA de congruência

Caso LLL de congruência

A figura a seguir apresenta blocos de programação para construir um triângulo (para mais detalhes, vide figuras 3.13 e 3.14), a partir dos elementos do caso LLL. Note que, com duas circunferências tendo dois lados como raios e as extremidades do terceiro lado como centros, tal triângulo pode ser determinado por seus centros e uma de suas interseções.

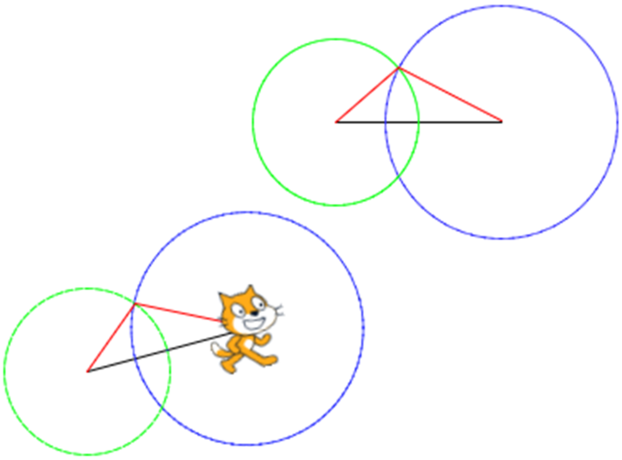
Figura 3.19: Programação de congruência de triângulos - Caso LLL



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos congruentes, pelo caso LLL.

Figura 3.20: Desafio criativo de congruência de triângulos - Caso LLL



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/967653287 - Caso LLL de congruência

3.10 Atividade 9 - Semelhança de triângulos

3.10.1 Guia de aplicação da Atividade 9 - Semelhança de triângulos

Série: 9º Ano do Ensino Fundamental

Objetivo: utilizar a plataforma Scratch para construir triângulos semelhantes quaisquer, trabalhar propriedades e reconhecer casos de semelhança.

Pré-requisitos:

- Computadores com acesso à internet e projetor para exibir a tela do professor;
- Atividade 8 - Congruência de triângulos;
- Conhecimentos necessários: congruência e semelhança de triângulos; razão de semelhança; casos de semelhança; ampliação e redução de figuras.

Passos da atividade:

1. Orientar os alunos a acessar sua conta na plataforma Scratch, criar um novo projeto, nomeando-o "Atividade 9 - Semelhança de triângulos", e incluir a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;

2. Propor para os alunos a construção de um par de triângulos semelhantes, não congruentes, de acordo com algum caso de semelhança, em ordem crescente de complexidade[1], a seguir:

    - **Caso LAL** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0,0)$, mover 100 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 50 passos e retornar para a posição $(0,0)$;
    - **Caso AA** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0,0)$, mover 100 passos, girar 120° (no sentido anti-horário), mover 100 passos, retornar para a posição $(0,0)$, girar 45° (no sentido anti-horário) e mover 100 passos;
    - **Caso LLL** - Por exemplo, fazendo o ator ir para a posição $(0,0)$, mover 100 passos, construir duas circunferências, uma em cada extremidade do segmento traçado, sendo uma de raio 70 passos e outra de raio 50 passos, e ligar ambas extremidades do segmento traçado a um dos pontos de interseção entre as circunferências;

[1] Sugere-se ao professor seguir a ordem crescente de complexidade das construções propostas, executando todos os passos da atividade para cada construção. Caso não sejam feitas todas de uma vez, a atividade poderá ser reaplicada.

3. Solicitar aos alunos a construção de um terceiro triângulo semelhante aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de semelhança, conforme desafio criativo;

4. Pedir que os alunos respondam às questões propostas;

5. Fazer a discussão e a reflexão da atividade com os alunos.

Desafio criativo:

Construa um terceiro triângulo semelhante aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de semelhança, na posição $(0,-150)$, tendo lados com inclinação de $15°$ (no sentido anti-horário), medindo metade das medidas dos lados de um dos triângulos anteriores.

Discussão:

Conduzir a discussão sobre a atividade, fazendo perguntas como:

1. Quando triângulos são semelhantes? Quais são alguns casos de semelhança?

2. Qual caso de semelhança você usou na construção do desafio criativo? Quais elementos, e em que ordem, foram usados para estabelecer esse caso?

3. Por que a posição e inclinação dos lados do terceiro triângulo não afetam ele ser semelhante aos triângulos do par anterior?

4. Conhecendo-se os lados de dois triângulos, é possível verificar se são semelhantes?

5. É possível dois triângulos semelhantes serem congruentes?

6. Se um triângulo é ampliado com razão de semelhança 2, como os lados e os ângulos do triângulo ampliado se comparam com os respectivos do triângulo original?

Reflexão:

1. Triângulos são semelhantes se ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais, o que já é obtido com algumas congruências e/ou igualdades específicas, em determinada ordem, por meio de casos de semelhança, como o caso AA (Teorema 2.28), o caso LAL de semelhança (Teorema 2.29) e o caso LLL de semelhança (Teorema 2.30).

2. A resposta segue a ordem crescente de complexidade das construções: **(1)** Caso LAL de semelhança (Teorema 2.29); **(2)** Caso AA (Teorema 2.28); e **(3)** Caso LLL de semelhança (Teorema 2.30).

3. Porque a posição e a inclinação são colocadas antes da construção do triângulo em si.

4. Sim, basta verificar se os lados são proporcionais, com mesma razão de proporcionalidade, pelo caso LLL de semelhança (Teorema 2.30).

5. Sim. Dois triângulos semelhantes são congruentes se a razão de semelhança entre eles é igual a 1.

6. Cada lado do triângulo ampliado tem o dobro do comprimento do lado correspondente do original e cada ângulo do ampliado permanece congruente ao correspondente do original.

3.10.2 Aplicação da Atividade 9 - Semelhança de triângulos

Série: 9º Ano do Ensino Fundamental

Passos da atividade:

1. Acesse sua conta na plataforma Scratch, no *site* https://scratch.mit.edu, crie um novo projeto, nomeando-o "Atividade 9 - Semelhança de triângulos", e inclua a categoria (extensão) Caneta e os blocos básicos;

2. Construa um par de triângulos semelhantes, não congruentes, de acordo com algum caso de semelhança, em ordem crescente de complexidade, a seguir:

    - **Caso LAL**;
    - **Caso AA**;
    - **Caso LLL**;

3. Construa um terceiro triângulo semelhante aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de semelhança, conforme desafio criativo;

4. Responda às questões propostas.

Desafio criativo:

Construa um terceiro triângulo semelhante aos triângulos do par anterior, usando o mesmo caso de semelhança, na posição $(0,-150)$, tendo lados com inclinação de 15° (no sentido anti-horário), medindo metade das medidas dos lados de um dos triângulos anteriores.

3.10.3 Questionário da Atividade 9 - Semelhança de triângulos

Escola: ____

Professor: ______________________________ **Data:** ____________

Aluno: ______________________________ **Série:** ____________

1. Quando triângulos são semelhantes? Quais são alguns casos de semelhança?

____

____

____

2. Qual caso de semelhança você usou na construção do desafio criativo? Quais elementos, e em que ordem, foram usados para estabelecer esse caso?

____

____

____

3. Por que a posição e inclinação dos lados do terceiro triângulo não afetam ele ser semelhante aos triângulos do par anterior?

____

____

____

4. Considere dois triângulos, sendo um de lados $5, 12, 13$ e o outro de lados $39, 15, 36$. Eles são semelhantes?

____

____

____

5. Se um triângulo é ampliado, com razão de semelhança 2, como os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos do triângulo ampliado se comparam com as do triângulo original? Explique.

____

____

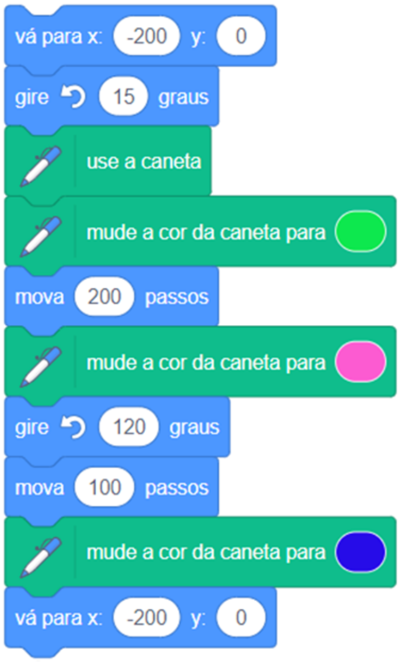
____

3.10.4 Blocos de programação da Atividade 9 - Semelhança de triângulos

Caso LAL de semelhança

A figura a seguir apresenta um bloco de programação para construir um triângulo, a partir dos elementos do caso LAL. Note que o terceiro lado é determinado pelo segmento de reta ligando as extremidades livres dos outros lados.

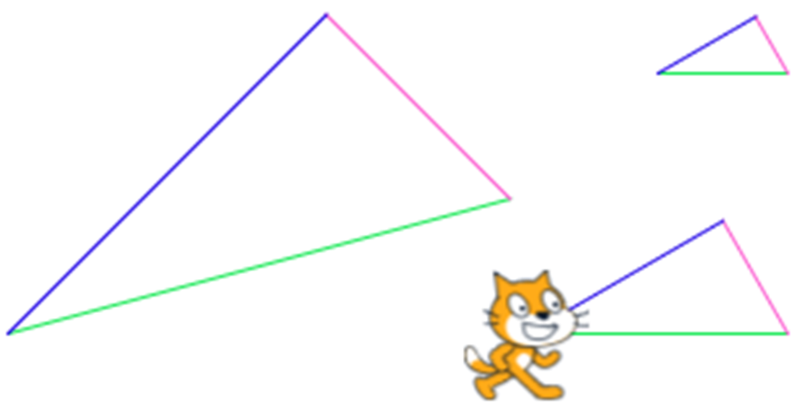
Figura 3.21: Programação de semelhança de triângulos - Caso LAL



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos semelhantes, pelo caso LAL.

Figura 3.22: Desafio criativo de semelhança de triângulos - Caso LAL



Fonte: O autor.

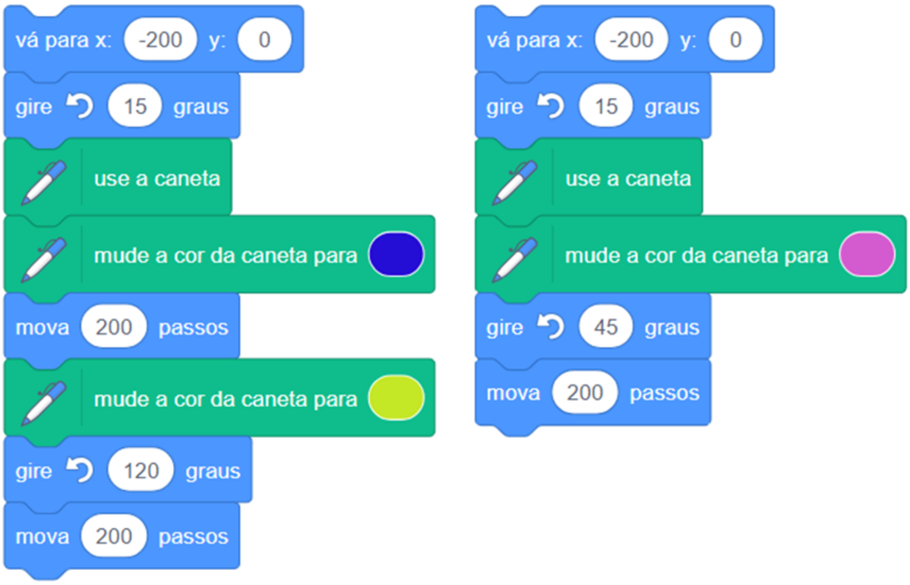
A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/969581459 - Caso LAL de semelhança

Caso AA

A figura a seguir apresenta blocos de programação para construir um triângulo, a partir dos elementos do caso AA. Note que os lados são determinados pela interseção das semirretas dadas pelos ângulos conhecidos.

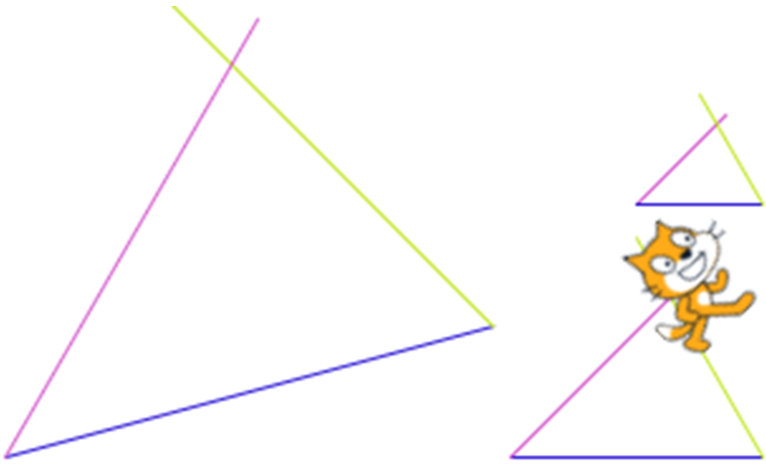
Figura 3.23: Programação de semelhança de triângulos - Caso AA



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos semelhantes, pelo caso AA.

Figura 3.24: Desafio criativo de semelhança de triângulos - Caso AA



Fonte: O autor.

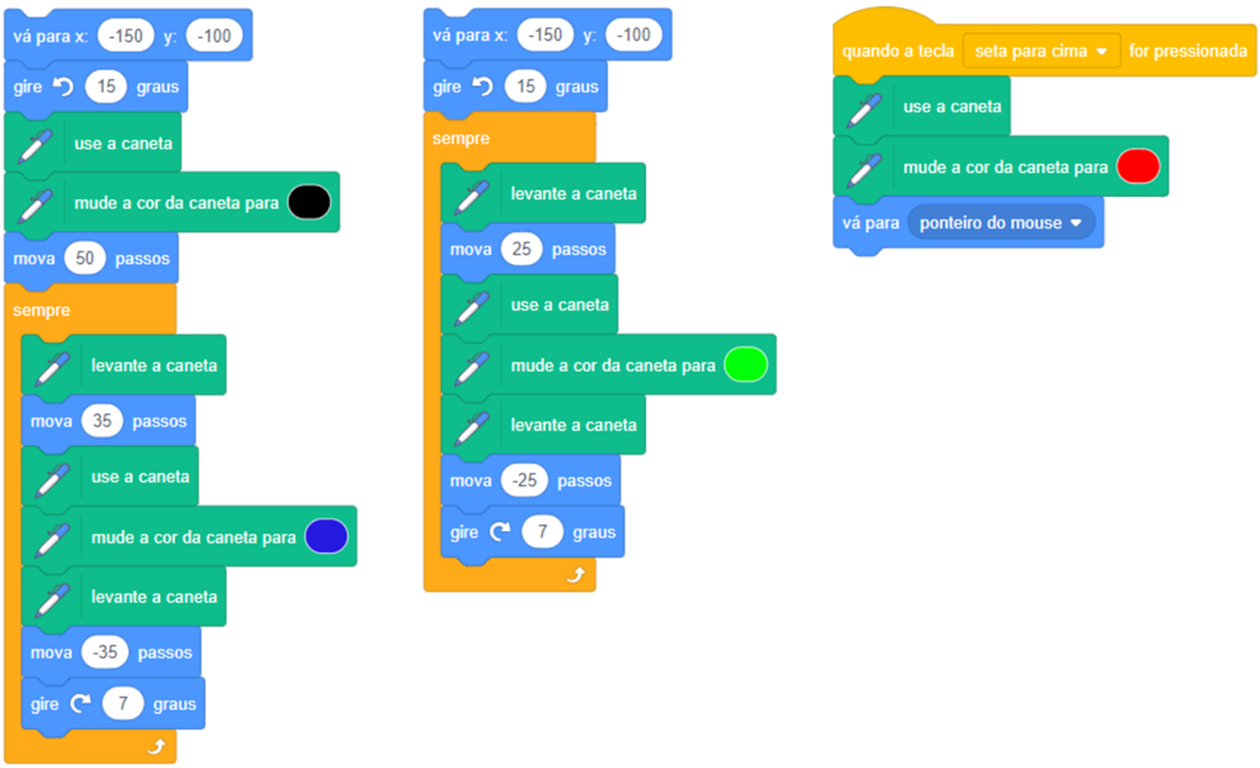
A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/969576438 - Caso AA

Caso LLL de semelhança

A figura a seguir apresenta blocos de programação para construir um triângulo (para mais detalhes, vide figuras 3.13 e 3.14), a partir dos elementos do caso LLL. Note que, com duas circunferências tendo dois lados como raios e as extremidades do terceiro lado como centros, tal triângulo pode ser determinado por seus centros e uma de suas interseções.

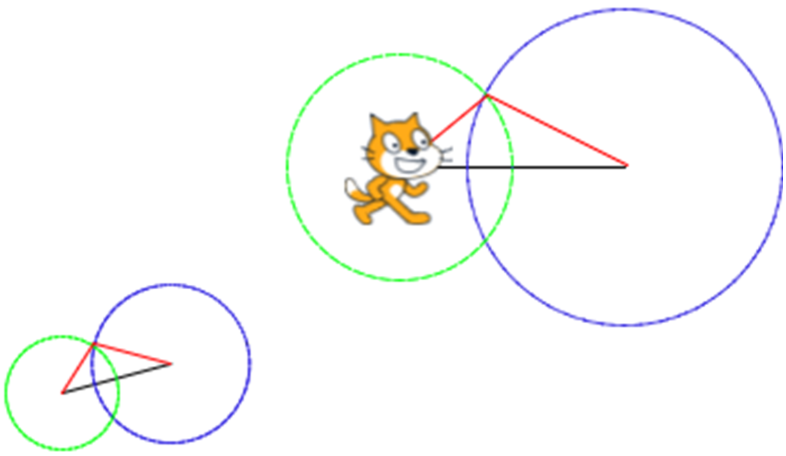
Figura 3.25: Programação de semelhança de triângulos - Caso LLL



Fonte: O autor.

Já a próxima figura apresenta uma solução para o desafio criativo, com triângulos semelhantes, pelo caso LLL.

Figura 3.26: Desafio criativo de semelhança de triângulos - Caso LLL



Fonte: O autor.

A resolução completa do desafio criativo pode ser acessada em:

https://scratch.mit.edu/projects/969583548/ - Caso LLL de semelhança

CAPÍTULO 4

Considerações finais

Nesta dissertação, foram propostas atividades para o ensino de tópicos de Geometria Plana, para os anos finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º Ano), explorando o potencial da plataforma ou linguagem de programação Scratch e destacando sua eficácia na integração entre programação e Matemática. Tais atividades podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial, cuja sequência geral está alinhada à BNCC.

Por questão de tempo, as atividades não foram aplicadas em sala de aula, mas espera-se que a abordagem apresentada, por meio de sua aplicação, contribua efetivamente para o processo de ensino-aprendizagem de Geometria Plana. O uso da linguagem de programação Scratch oferece uma experiência interativa e dinâmica, facilita a visualização e a manipulação de figuras geométricas, e torna a Matemática mais acessível e envolvente. Essa interatividade promete não apenas facilitar a compreensão dos conceitos, mas também incentivar discussões que promovam o pensamento crítico e a aplicação prática do conhecimento, motivando os alunos a explorar e a entender os conceitos geométricos. Além disso, a abordagem proposta contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais, como lógica, resolução de problemas e criatividade. Essas competências são fundamentais para a formação de alunos preparados para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, onde a tecnologia desempenha um papel crucial.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 15 set. 2023.

LEITE, W. S. S.; RIBEIRO, C. A. N. **A inclusão das TICs na educação brasileira: problemas e desafios**. *magis*, Revista Internacional de Investigación en Educación, v. 5, n. 10, p. 173–187, 2012. Disponível em: <https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS/article/view/4172> Acesso em: 18 set. 2024.

MARQUES, J. C. O. **Construção de mosaicos utilizando a linguagem de programação Scratch como ferramenta para o ensino de Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2019. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/5278>. Acesso em: 24 ago. 2023.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SOUZA, M. F.; COSTA, C. S. **Scratch: Guia prático para aplicação na Educação Básica**. Rio de Janeiro: Imperial, 2018. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/566023>. Acesso em: 06 dez. 2023.

VAZ, L. S. **Relações métricas no triângulo retângulo através da linguagem de programação Scratch: uma proposta de atividades**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2021. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/30161>. Acesso em: 24 ago. 2023.