UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jaqueline Joviniano da Silva

Utilização de jogo de sinuca no ensino da Geometria Euclidiana no ensino médio

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jaqueline Joviniano da Silva

Utilização de jogo de sinuca no ensino da Geometria Euclidiana no ensino médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Ferreira Gomes Júnior

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Ana Catarina Macêdo – CRB-4 1781

S586u Silva, Jaqueline Joviniano da
Utilização de jogo de sinuca no ensino da geometria euclidiana no ensino médio / Jaqueline Joviniano da Silva. - Recife, 2024.
161 f.; il.

Orientador(a): Antônio José Ferreira Gomes Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências e apendece(s).

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Geometria 3. Sinuca 4. Jogos no ensino de matemática I. Gomes Júnior, Antônio José Ferreira, orient. II. Título

CDD 510

JAQUELINE JOVINIANO DA SILVA

"UTILIZAÇÃO DO JOGO DE SINUCA NO ENSINO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO MÉDIO"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior (Orientador) – UFRPE

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva – UEPB

Profa. Dra. KARLA FERREIRA SOUSA DE ARRUDA– PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças, sabedoria e orientação ao longo desta jornada acadêmica.

Aos meus pais, pelo amor, apoio incondicional e ensinamentos que foram fundamentais para minha formação pessoal e profissional.

Ao meu marido, Marcos Castro, pelo amor, compreensão e suporte constantes que foram essenciais durante toda a realização deste trabalho.

Ao meu professor orientador, Antônio José Ferreira Gomes Júnior, pela paciência, dedicação e valiosas orientações que contribuíram imensamente para a realização deste trabalho.

À minha família, pelo constante apoio e compreensão durante todo o período de pesquisa e redação desta dissertação.

Aos meus amigos, que sempre me incentivaram e apoiaram, em especial, a Rafael Brito e Jhonata, por sua amizade e apoio inestimável.

À CAPES, pelo suporte financeiro que viabilizou a realização desta pesquisa.

Ao Profmat-UFRPE, pelo programa de excelência e pelas oportunidades de aprendizado proporcionadas.

E, por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

Esse trabalho investigou a eficácia da utilização do jogo de sinuca como uma ferramenta pedagógica para o ensino de geometria plana no terceiro ano do ensino médio. O objetivo foi verificar se o uso de sequência didática baseada no jogo de sinuca pode melhorar a compreensão e o desempenho dos alunos em geometria. O estudo foi conduzido com quatro turmas do terceiro ano em uma escola pública de ensino integral, sendo três turmas experimentais e uma turma controle. As três turmas experimentais foram submetidas a aplicação de sequência didática utilizando o jogo de sinuca para o ensino da geometria, enquanto isso, a turma controle teve aulas tradicionais de geometria. A metodologia empregada incluiu a aplicação de avaliações diagnósticas antes e após à intervenção das aulas, além de autoavaliação dos estudantes para medir o progresso e a percepção individual sobre o aprendizado. Os resultados mostraram uma melhora significativa no desempenho dos alunos na avaliação pós-intervenção em comparação à avaliação antes da intervenção, indicando que o uso do jogo de sinuca como ferramenta didática foi eficaz no ensino da geometria. As autoavaliações dos alunos revelaram um aumento na concentração e no interesse pelo aprendizado da geometria, bem como uma melhor compreensão dos conceitos ensinados. A pesquisa concluiu que o jogo de sinuca pode ser uma estratégia pedagógica válida para o ensino de geometria no ensino médio, pois a aplicação da sequência didática que combinou teoria e prática, proporcionou uma experiência de aprendizado mais dinâmica e engajadora para os alunos, facilitando a assimilação dos conceitos estudados. Além disso, o uso de avaliações diagnósticas, junto com as autoavaliações, permitiu uma avaliação abrangente do progresso dos alunos e da eficácia do método utilizado.

Palavras-chave: Ensino; geometria; sinuca; sequência didática.

Abstract

This study investigated the effectiveness of using the game of snooker as a pedagogical tool for teaching plane geometry in the third year of high school. The objective was to verify whether the use of a didactic sequence based on the game of snooker can improve students' understanding and performance in geometry. The study was conducted with four third-year classes in a full-time public school, three experimental classes and one control class. The three experimental classes were subjected to the application of didactic sequence using the game of snooker for teaching geometry, while the control class had traditional geometry classes. The methodology employed included the application of diagnostic assessments before and after the intervention of the classes, in addition to self-assessment of the students to measure progress and individual perception of learning. The results showed a significant improvement in student performance in the post-intervention assessment compared to the assessment before the intervention, indicating that the use of the game of snooker as a didactic tool was effective in teaching geometry. Students' self-assessments revealed an increase in concentration and interest in learning geometry, as well as a better understanding of the concepts taught. The research concluded that the game of pool can be a valid pedagogical strategy for teaching geometry in high school, since the application of the didactic sequence that combined theory and practice provided a more dynamic and engaging learning experience for students, facilitating the assimilation of the concepts studied. In addition, the use of diagnostic assessments, together with self-assessments, allowed a comprehensive assessment of students' progress and the effectiveness of the method used.

Keywords: Teaching; geometry; snooker; didactic sequence.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O ensino de geometria no contexto do ensino médio apresenta desafios significativos tanto para alunos quanto para professores. A abstração dos conceitos geométricos, muitas vezes dissociados da realidade cotidiana dos estudantes, pode levar à falta de interesse e à dificuldade na compreensão dos conteúdos. Para enfrentar essas dificuldades, propomos a utilização da sinuca como ferramenta pedagógica atrelada a uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem, na qual o aluno se torna o protagonista do processo e o professor atua como mediador do conhecimento. Esta dissertação investiga o impacto dessa abordagem inovadora, buscando demonstrar como o uso da sinuca pode tornar a aprendizagem da geometria mais significativa, dinâmica e engajadora.

A sinuca, com suas regras e estratégias intrínsecas, oferece um contexto rico para explorar diversos conceitos geométricos, como ângulos, reflexão, trajetória e cálculo de distâncias. Ao incorporar essa atividade lúdica e prática ao currículo de geometria, é possível transformar a sala de aula em um ambiente de aprendizagem interativo e estimulante. Essa metodologia ativa de ensino e aprendizagem não apenas facilita a compreensão dos conteúdos, mas também promove habilidades críticas como pensamento estratégico, resolução de problemas e cooperação entre os alunos.

Ensinar geometria no ensino médio apresenta uma série de desafios, incluindo a dificuldade dos alunos em visualizar e compreender conceitos abstratos, o desinteresse pela matéria e a falta de motivação para se engajar ativamente nas aulas. Muitas vezes, as abordagens tradicionais de ensino, centradas na exposição teórica e exercícios mecânicos, não conseguem capturar a atenção dos estudantes ou tornar o aprendizado significativo para eles.

A sinuca, com seu apelo universal e natureza prática, pode ser uma ferramenta eficaz para superar esses obstáculos. Ao utilizar a sinuca como meio de ensino, os professores podem contextualizar os conceitos geométricos em situações reais e tangíveis, facilitando a compreensão e aplicação do conhecimento. O jogo de sinuca propõe que os alunos experimentem, observem e pensem de forma estratégica sobre ângulos, trajetórias e impactos, o que torna o aprendizado mais concreto e relevante. Além disso, a dinâmica do jogo promove a interação social, a cooperação e o engajamento, ajudando a criar um ambiente de aprendizagem mais disciplinado e motivador.

Esta dissertação tem como objetivo principal investigar a eficácia da utilização da sinuca como ferramenta pedagógica no ensino de geometria, dentro de uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem. Especificamente, busca-se:

- Propor e aplicar sequência didática utilizando a sinuca para consolidar conceitos de geometria;
- Avaliar os benefícios da metodologia ativa de ensino e aprendizagem na compreensão dos conceitos geométricos;
- Avaliar o impacto do uso da sinuca na motivação e no engajamento dos alunos;
- Verificar a melhora na capacidade dos alunos de visualizar e aplicar conceitos geométricos através de atividades práticas utilizando à sinuca;
- Analisar o efeito das intervenções didáticas com a sinuca no rendimento escolar dos alunos em geometria;
- Realizar avaliações diagnósticas com o intuito de averiguar o progresso da aprendizagem dos alunos;
- Identificar as percepções dos alunos sobre a integração da sinuca nas aulas de geometria.

A principal intervenção proposta é o ensino da geometria utilizando a sinuca como ferramenta pedagógica, aplicada durante cinco atividades da sequência didática. Essa sequência foi cuidadosamente planejada para abordar diferentes aspectos e conceitos da geometria, proporcionando aos alunos diversas oportunidades para explorar, experimentar e refletir sobre os conteúdos de forma prática e interativa, além de colocá-los no centro do processo educativo. Diante disso, a expectativa é que esta abordagem contribua significativamente para a melhoria dos resultados educacionais e para o desenvolvimento de competências essenciais nos estudantes.

Nosso estudo está dividido em 3 capítulos, no primeiro trataremos da fundamentação teórica, no segundo da metodologia e no terceiro das análises dos resultados.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo cita estudos de pesquisadores sobre ensino e as teorias de aprendizagem, principalmente aqueles que se relacionaram com o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de geometria, em especial, com a utilização do jogo de sinuca. Além disso, apresentaremos os conceitos de geometria que serão utilizados na elaboração da proposta educacional. Para facilitar a busca e a organização dos estudos, este trabalho será dividido em seções e subseções que serão fundamentadas em pesquisas e em livros específicos.

1.1 Ensino da geometria

A geometria está presente na vida das pessoas de formas variadas, práticas e facilmente perceptíveis. Na educação básica, podemos dividi-la em Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. Entretanto, historicamente, o ensino de geometria se mostra um fator bastante desafiador, onde, com base em relatos de professores atuantes em sala de aula, à medida que se vai avançando nas séries do ensino fundamental e, posteriormente, do ensino médio, o nível de compreensão que os estudantes demonstram ter nessa área vem diminuindo gradativamente (PEREIRA, 2023).

Há vários motivos que poderiam explicar esta condição, dentre eles os principais são: a falta de conhecimento e qualificação dos professores e o valor excessivo dado ao livro didático (PEREIRA, 2017).

Para se averiguar as possíveis causas da dificuldade de aprendizagem em matemática, em particular em geometria, deve-se compreender qual o real sentido que a matemática traz ao cotidiano dos estudantes. Portanto, é necessário investir em pesquisas sobre metodologias mais apropriadas para a abordagem da geometria e em medidas dispostas a assegurar aos professores possibilidades para o aperfeiçoamento deste ensino.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que a geometria clássica é essencial para formar cidadãos capazes de compreender e analisar criticamente o mundo que os cerca (BRASIL, 2018). Dessa forma, os alunos são incentivados a observar, descrever e representar formas, identificar suas características e estabelecer relações entre figuras planas ao estudar geometria.

Ainda convém citar, que o currículo nacional destaca a interdisciplinaridade como uma tática de ensino da geometria. Faz isso conectando-o a outras áreas do conhecimento, como artes e ciências da natureza, para obter uma aprendizagem mais aplicada e significativa. Ainda assim, embora a geometria seja considerada uma disciplina importante no currículo, existem vários obstáculos que impedem que ela seja usada de forma eficaz. A falta de recursos didáticos adequados, a abstração de conceitos geométricos e a necessidade de treinamento contínuo dos professores para implementar técnicas eficazes estão entre essas questões.

Portanto, a base curricular visa melhorar a interpretação e compreensão das unidades de conhecimento em seu campo por meio do desenvolvimento de competências específicas em matemática e suas tecnologias. As habilidades contempladas pela BNCC, no campo do ensino da geometria, relevantes neste trabalho são as seguintes:

- (EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano.
- (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares;
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos;
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles;
- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas;
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares;
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes;
- (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;
- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano;
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo os conceitos de seno, cosseno e tangente ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

O principal indicador de aprendizagem das habilidades proposto pela BNCC é o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Estudos e pesquisas sobre as teorias do desenvolvimento cognitivo são necessários para que os professores possam acompanhar adequadamente a evolução do discente. A teoria de Jean Piaget é uma das principais e tem um grande impacto na educação (RIZKY; SRITRESNA, 2021).

Piaget propôs, em sua teoria, que o desenvolvimento das formas de pensar desde a infância até a idade adulta inclui as seguintes fases: sensório-motora (0-2 anos), onde as crianças vivenciam este período por meio do movimento, maximizando os sentidos e a invariância dos objetos de aprendizagem; pré-operatória (3-6 anos), em que as crianças começam a usar suas habilidades motoras; operações concretas (7-12 anos), onde as crianças iniciam com o pensamento lógico; e operações formais (13-17 anos), quando ocorre o desenvolvimento do raciocínio abstrato (LISNANI; ASMARUDDIN, 2018).

O raciocínio formal é caracterizado pela capacidade de raciocinar ideias abstratas, organizá-las e inferir os resultados futuros. Os alunos que usam raciocínio abstrato podem elaborar hipóteses ou suposições baseadas em problemas (NURFADILAH; AFRIANSYAH, 2022). No entanto, de acordo com a experiência dos professores, os alunos do ensino médio podem enfrentar desafios ao estudar matemática, especialmente o conteúdo de geometria. Uma das causas desses desafios é a natureza abstrata da matemática, pois alguns alunos podem não ter alcançado com sucesso o estágio operacional formal (AROFAH; NOORDYANA, 2021).

Um psicólogo americano, chamado David Paul Ausubel (1918-2008), influenciado pela teoria de aprendizagem de Jean Piaget, estudou a ciência cognitiva e a aprendizagem educacional. Segundo, esse psicólogo e pesquisador: "As pessoas adquirem conhecimento principalmente sendo expostas diretamente a ele, e não por meio da descoberta". Diante disso, a teoria cognitiva de Ausubel propõe que a aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma parte relevante da estrutura de conhecimento de uma pessoa é conectada a novos conhecimentos. Assim, aprender significativamente é quando a nova informação se estabelece em conceitos ou proposições relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel destacou que a recepção também se torna significativa pelo uso apropriado de diferentes técnicas de ensino. Logo, a apresentação adequada dos materiais e dos conteúdos didáticos é fundamental (ADHIKARI, 2020).

Este ponto de vista sustenta que os alunos devem ser capazes de estabelecer um sistema de relações entre a prática cotidiana e a construção do conhecimento para que o processo de ensino e aprendizagem da geometria seja realmente significativo. O papel transformador que os professores desempenham na promoção de um método de ensino que valorize o "fazer matemática", ou seja, fazê-lo com compreensão, é novamente enfatizado.

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, apresentado por Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, também é um trabalho bastante relevante para o ensino da geometria.

Essa teoria está ligada aos aspectos pedagógicos e cognitivos do ensino de geometria e estabelece cinco níveis hierárquicos de dificuldade e compreensão. Isso significa que os alunos só podem alcançar um determinado nível de raciocínio em geometria depois de passar pelos níveis inferiores, tais como: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Além disso, com base nas habilidades demonstradas, é possível avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e do conhecimento de um aluno. Esse avanço entre níveis ocorre em ordem hierárquica, com os alunos progredindo de níveis mais simples para níveis mais complexos. (COSTA; SANTOS, 2020; LOPES, 2022).

Cada um dos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico apresenta características que expressam a estrutura do pensamento geométrico, começando com o reconhecimento de objetos geométricos com base em sua aparência geral e terminando com a análise de vários sistemas axiomáticos. O reconhecimento visual é o primeiro nível, onde os alunos aprendem a reconhecer e compreender figuras geométricas ou objetos com base em sua aparência física. O segundo nível é análise, neste nível usam os elementos e seus atributos para descrever e caracterizar figuras. A dedução informal é o terceiro nível, os alunos já são capazes de organizar classes de objetos geométricos, criar definições abstratas, diferenciar características e compreender deduções simples. No quarto nível, dedução formal, o aluno pode raciocinar, testar e entrelaçar redes de teoremas, além de manipular as relações que foram desenvolvidas no nível três. O rigor, o quinto nível, permite que os alunos estudem conceitos geométricos sem modelos concretos ou gráficos. Eles também podem trabalhar em vários sistemas axiomáticos. Além disso, terá a oportunidade de expandir e consolidar seu conhecimento sobre postulados e teoremas, bem como analisá-los e compará-los (COSTA; SANTOS, 2020; LOPES, 2022).

Os estudos de caso a seguir mostram a importância da implementação do modelo de Van Hiele desde o ensino fundamental até o ensino superior.

As descobertas de um estudo de Costa e Santos (2020) mostraram que 34 alunos do 6º período de Licenciatura em Matemática tinham conhecimento básico de geometria. Foram colocadas cinco perguntas para avaliar o conceito de quadriláteros notáveis. Os autores descobriram que quase metade dos alunos estava entre os dois primeiros níveis do pensamento geométrico. Isso indica que os alunos não conseguiram identificar quadriláteros notáveis com base em suas propriedades ou articulá-los entre si, uma característica do Terceiro Nível de Van-Hiele.

Santos e Mazzini (2021) afirmam que um estudo foi realizado com o objetivo de determinar os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele em alunos do 9º ano do ensino fundamental, baseado em experiências documentadas na literatura. Os principais resultados da pesquisa mostraram que, dos 122 alunos que participaram do estudo, a maioria estava no nível de visualização, o que significava que eles podiam identificar figuras geométricas visualmente e adquirir vocabulário, mas não conseguiam distinguir suas características.

Nusaibah, Pramudya e Subanti (2021) afirmam que os alunos da sétima série foram avaliados em relação ao conhecimento sobre triângulos e quadriláteros usando a teoria de aprendizagem de Van Hiele. Os estudos foram conduzidos usando dez questões correspondentes aos níveis de habilidade de raciocínio geométrico dos alunos. Os resultados revelaram que 56,62% dos alunos estavam no Nível 1, 17,39% estavam no Nível 2 e nenhum aluno atingiu o Nível 3.

Dessa forma, é fundamental a promoção de estratégias pedagógicas que priorizem atividades que desenvolvam a motivação para a aprendizagem, a concentração, o raciocínio lógico e o senso cooperativo de forma lúdica. Tendo em vista essa questão, a utilização de jogos matemáticos em sala de aula é uma estratégia bastante promissora, pois é possível utilizar jogos para desenvolver conhecimentos dos alunos ou consolidar conceitos matemáticos já estudados durante as aulas.

1.1.1 O uso de jogos no ensino da Matemática

Alguns estudantes veem a matemática como difícil. Acredita-se que essa percepção seja causada pelo histórico de altos índices de reprovação nessa disciplina, bem como por uma questão cultural, pois pode-se notar que os estudantes já demonstram aversão à disciplina mesmo que ainda não tenham enfrentado dificuldades significativas.

Muitos professores ainda oferecem um ensino de matemática fragmentado e descontextualizado, priorizando a mecanização, a memorização e a abstração. Isso se afasta do aprendizado significativo, que permite aos alunos pensar e analisar situações concretas ou mesmo relacionadas ao mundo real. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam, portanto:

> [...]o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998).

A busca por metodologias de ensino que realmente impactem os alunos e os envolvam no processo de construção do conhecimento visa contribuir para a mudança dessa situação em direção a um melhor aprendizado da matemática.

Os jogos podem ser usados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar os alunos para aprofundar os temas que já trabalharam. Para ajudar o estudante a aprender conceitos matemáticos significativos, eles devem ser escolhidos e preparados com cuidado. Portanto, o planejamento de uma sequência didática é uma parte importante do trabalho com jogos matemáticos. Inicialmente, o professor deve considerar quais caminhos propor aos alunos e quais resultados ele pretende obter por meio do lúdico (NOGUEIRA, 2005).

Vários pesquisadores educacionais, como Vigotsky (1984), D'Ambrósio (1991), Muniz (2010) e Nogueira (2005), estudaram o jogo e sua aplicação na educação. Os pesquisadores acreditam que sua aplicação é crucial para o desenvolvimento da compreensão e raciocínio lógico dos alunos, pois nessas circunstâncias os estudantes têm a capacidade de manipular objetos, encontrar descobertas e formular hipóteses sobre o conteúdo trabalhado.

Os jogos são considerados uma importante fonte de desenvolvimento e aprendizado, de acordo com Vigotsky (1984), pois permitem ao educando fazer suas atividades de forma lúdica. Assim, é evidente que os jogos matemáticos estimulam o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Jogos bem preparados são ferramentas pedagógicas eficazes na construção do conhecimento matemático. Existem vários fatores que justificam a introdução dessa ferramenta em sala de aula, de acordo com Nogueira (2005). O desenvolvimento intelectual, a formação de relações sociais e o caráter lúdico estão entre eles. Do ponto de vista do desenvolvimento intelectual, o uso de jogos nas aulas de matemática permite que os alunos desenvolvam o raciocínio lógico e superem as dificuldades de aprendizagem e construam seu conhecimento. Isso ocorre porque os alunos trabalham na resolução de problemas, criando estratégias e hipóteses durante os jogos.

De acordo com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), os jogos podem ser um recurso educacional significativo devido ao fato de:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (BRASIL, 1998).

Como resultado, os jogos são vistos como uma ferramenta que permite o planejamento de ações e estratégias, tomando em consideração o que acontecerá com as etapas subsequentes do processo. Portanto, pode ajudar os alunos a pensar em várias maneiras de resolver problemas. Diante do exposto, o jogo de sinuca é uma alternativa interessante para o ensino da geometria, uma vez que a sinuca pode ser relacionada a diversas situações que envolvem geometria.

1.1.2 O uso do jogo de sinuca no ensino da Geometria

A sinuca é um esporte de grande interesse para os jovens, que pode ser introduzida no ambiente escolar com base em seu potencial pedagógico. Por exemplo, na matemática, a sinuca pode ser usada para ensinar geometria, tornando o processo de ensino e aprendizagem atrativo, participativo e lúdico.

Tomando essa ideia como base, alguns pesquisadores vêm explorando como o jogo de sinuca poderia ser usado como ferramenta pedagógica para o ensino da geometria, conectando a matemática ao cotidiano dos estudantes e professores através do jogo (LEAHY, 2011; PAULA 2020).

Leahy (2011) analisou e resolveu problemas relacionados à lei de reflexão e semelhança de triângulo usando o jogo de sinuca durante as aulas de matemática. Além disso, o pesquisador enfatizou que a abordagem descrita levou em consideração a capacidade motivacional do contexto para o ensino e aprendizagem da matemática, bem como o desejo dos alunos de participar de atividades lúdicas. O autor afirmou que os problemas proporcionaram aos alunos oportunidades concretas de participar da aula. Ao trabalhar com pesquisas e problemas, os alunos foram incentivados a mobilizar seus recursos, investigar, experimentar, generalizar e provar, obtendo-se uma aprendizagem significativa em relação ao conteúdo de geometria estudado.

Paula (2020) sugeriram o uso do jogo de sinuca como um recurso educacional para ensinar geometria. Os autores relacionaram a teoria dos conceitos matemáticos com o conhecimento prévio dos alunos sobre a sinuca, permitindo que o potencial do jogo como um recurso educacional fosse explorado. Para isso, os pesquisadores sugeriram dois cenários de jogo de sinuca para criar, desenvolver e apresentar estratégias geométricas que poderiam ser aplicadas nas circunstâncias sugeridas. Utilizando essas estratégias, foi possível apresentar e desenvolver conceitos de geometria como retas, segmentos de retas, semirretas, ângulos, triângulos e suas propriedades por meio de representações em figuras criadas no software Geogebra. O estudo examinou como o jogo de sinuca pode ser usado para ensinar geometria e mostrar como os professores podem usá-lo. A proposta evidenciou que a sinuca pode ser usada como um recurso no ambiente escolar, considerando seu potencial pedagógico.

1.2 Geometria

Por se tratar de um conhecimento amplamente disseminado e acessível em livros didáticos, apenas descreveremos os principais teoremas, definições e conceitos que norteiam a base da geometria euclidiana, bem como sua importância para o desenvolvimento do pensamento matemático. Para isso, usaremos as referências a seguir: Fundamentos de matemática elementar: Geometria Analítica, volume 7 (IEZZI, 2013) e Geometria Plana, volume 9 (DOLCE; POMPEO, 2013); Geometria - coleção PROFMAT, 09 (MUNIZ NETO, 2013) e Geometria analítica: Um Tratamento Vetorial (BOULOS; CAMARGO, 2005).

1.2.1 Noções e proposições primitivas de geometria

A geometria é uma área da matemática que estuda as formas, tamanhos, posições e propriedades dos objetos do mundo real. Essa área da matemática tem muito a ver com o mundo físico e é por meio dela que o homem começou a utilizar suas formas geométricas em construções e obras de arte, identificá-las na natureza e resolver os problemas de sua vida cotidiana (MENDES; DELGADO, 2008).

Os primeiros conceitos geométricos surgiram antes da escrita e começaram a ter importância no antigo Egito. Surgiram como resultado da necessidade dos povos de medir a extensão das terras para construção de templos, monumentos e mapas para desenhos cartográficos, entre outras aplicações (NOGARI; MARTIN, 2021). Por volta do século III a. C., na Grécia, o matemático Euclides de Alexandria foi o primeiro a ensinar geometria em duas e três dimensões. Neste momento, Euclides introduziu o conceito de axiomas e postulados, tornando suas doutrinas mais sistemáticas, pois envolviam o estudo de pontos, retas, planos e espaços. No entanto, embora seja difícil descrever cada um deles, pois não há uma definição precisa, compreender seu papel no desenvolvimento da geometria e o comportamento dos sólidos e das figuras é fundamental para o ensino e aprendizagem de geometria (SILVA; MORAES, 2020).

A história da geometria euclidiana, acompanha a humanidade desde os primórdios das organizações sociais. Os primeiros registros de seu conhecimento remetem à antiguidade no Egito e na Grécia antiga, tornando-a uma das áreas mais antigas da matemática. Portanto, a geometria é fundamental para o desenvolvimento e formação do pensamento geométrico e matemático. O nome "geometria"vem das palavras gregas "geo", que significa "terra", e "metria", que significa "medição", que, combinadas, significam "medir a terra". Do ponto de vista histórico, a geometria tem aplicações filosóficas, científicas e sociais, bem como nos ajuda a entender números, reconhecer e comparar formas e tamanhos. (COSTA; MACHADO; QUARESMA, 2020).

A geometria abriu nossas mentes para uma melhor compreensão das várias formas do mundo que nos rodeia. Euclides foi o principal estudioso desse campo. Sua obra mais famosa, os Elementos, um tratado matemático e geométrico que consiste em 13 livros, sintetizava uma série de postulados e axiomas que serviram de base para a Geometria Euclidiana Plana, que é o foco deste estudo.

Na Grécia antiga, axioma significava, ao que tudo indica, uma verdade geral que se aplica a todos os campos de estudo, enquanto postulado significava uma verdade particular de um campo de estudo. Não é comum distinguir esses conceitos na matemática moderna. Em sua obra, os Elementos, Euclides assumiu cinco axiomas (DOLCE; POMPEO, 2013).

(I) Dois pontos dados estão conectados por um único segmento de reta;

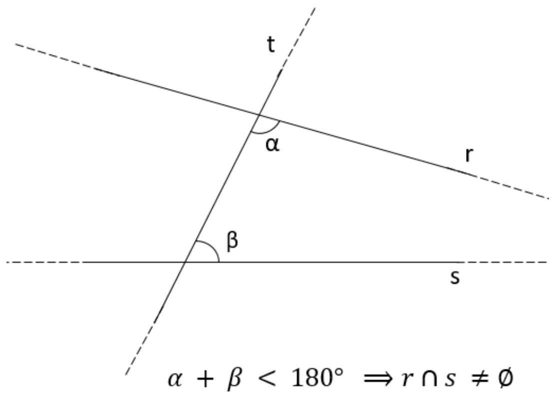
(II) Toda reta limitada pode ser prolongada indefinidamente em linha reta;

(III) Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e qualquer raio;

(IV) Todos os ângulos retos são idênticos;

(V) Se uma reta t, interceptando duas outras r e s, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos. Esse axioma é conhecido como axioma das paralelas de Euclides e pode ser exemplificado na Figura 1.

Figura 1 – Axioma das paralelas de Euclides.



Fonte: Autor, 2024.

1.2.1.1 Noções primitivas

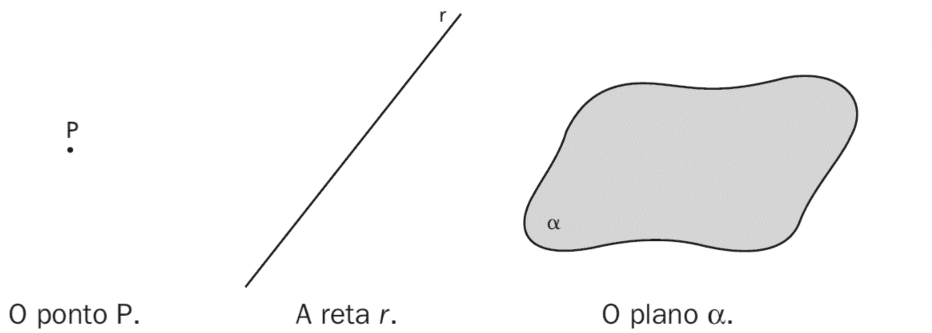
O ponto, a reta e o plano são os elementos básicos da geometria euclidiana. Esses conceitos são chamados de "noções ou entes primitivos", ou seja, aceitos sem definição porque cada um deles se baseia em conhecimento intuitivo que surge da experiência e da observação.

Para exemplificar, temos as considerações de ponto, reta e plano a seguir:

- **Ponto**: O ponto é um conceito primitivo e, como tal, não se define. É representado (notação) pelas letras maiúsculas do alfabeto latino. Como toda a Geometria é baseada no ponto, as figuras geométricas são formadas a partir de conjuntos deles.
- **Reta**: Também é um conceito primitivo que não se define, mas para fins didáticos, podemos conceituar retas como conjuntos de pontos que são considerados linhas infinitas sem curvas com uma única dimensão. A reta é representada (notação) pelas letras latinas minúsculas.
- **Plano**: Também é um conceito primitivo, logo não se define, mas podemos dizer que é um elemento primitivo com infinitos pontos de forma que não haja espaço entre eles, formando duas dimensões. O plano é representado (notação) pelas letras gregas minúsculas.

Podemos representar, graficamente, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Notações gráficas de ponto, reta e plano.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

1.2.1.2 Proposições primitivas

Iniciaremos a geometria plana com alguns postulados sobre as relações entre ponto, reta e plano.

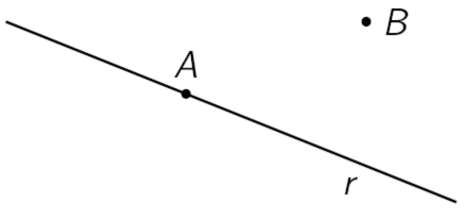
- **Postulado da existência:**

  a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;

b) Num plano há uma infinidade de pontos, ou seja, tantos pontos quanto quisermos.

Dados no plano um ponto P e uma reta r, só há duas possibilidades: ou o ponto P pertence à reta r ou não; no primeiro caso, escrevemos $P \in r$ (lê-se o ponto P pertence a reta r) e, no segundo, escrevemos $P \notin r$ (lê-se o ponto P não pertence a reta r). Na Figura 3, temos a representação de uma reta r e os pontos A e B, sendo que: A está em r, ou seja, a reta r passa por A e indicamos $A \in r$ e B não está em r, ou seja, r não passa por B, e indicamos $B \notin r$.

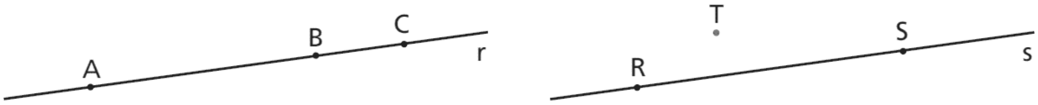
Figura 3 – Representação das posições relativas de pontos e reta.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013.

No postulado da existência, foi falado em pontos que estão e não estão numa mesma reta. Para descrever esta situação, dizemos que um conjunto de pontos é colinear se todos os pontos estão contidos em uma mesma reta, ou seja, todos estão alinhados. No caso contrário, isto é, quando nem todos os pontos estão contidos em uma reta, dizemos que o conjunto é não colinear, ou que não estão alinhados, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Representação da reta r com pontos A, B e C colineares e da reta s com pontos R, S e T não colineares.

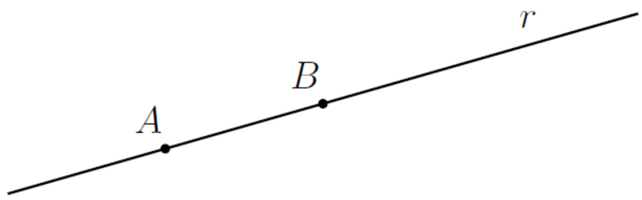


Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

- **Postulado da determinação:**

Retas são conjuntos de pontos compreendidos como linhas infinitas que não fazem curvas. Diante disso, é normal nos perguntarmos quantas retas podem ser traçadas por dois pontos. Em resumo, por dois pontos distintos A e B do plano, podemos traçar uma única reta (Figura 5). Nesse caso, sendo *r* a reta determinada por tais pontos, denotamos, alternativamente: $A \neq B,\ A \in r,\ B \in r \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$

Figura 5 – Representação da reta r passando pelos pontos A e B.



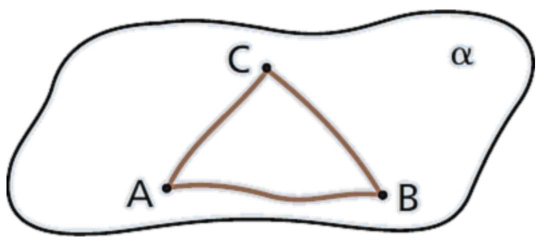
Fonte: MUNIZ NETO, 2013.

É importante salientar que duas retas distintas do plano possuem no máximo um ponto em comum. Suponha que existam dois pontos A e B distintos que pertençam simultaneamente as retas r e s. Então pelo que já foi dito, $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{AB}$. Logo $r = s$.

Concluímos que se as retas são distintas, não podem ter dois pontos em comum. Nestas condições, as retas r e s são coincidentes. No caso contrário, isto é, se r ≠ s dizemos que r e s são distintas ou não coincidentes. Se as retas possuem apenas um ponto em comum dizemos que são concorrentes.

Em relação à proposição primitiva de plano, podemos dizer que três pontos A, B e C não colineares determinam um único plano que passa por eles, conforme observado na Figura 6.

Figura 6 – Representação do plano α.



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

O plano α é o único plano que passa por A, B e C. Além disso, os pontos que se encontram em um mesmo plano são chamados como pontos coplanares.

1.2.1.3 Segmento de reta e semirreta

O conjunto de todos os pontos colineares que estão entre dois pontos distintos A e B, também colineares a estes, é um segmento da reta AB, e será denotado por $\overline{AB}$. Os pontos A e B são os extremos de $\overline{AB}$, e qualquer outro ponto do intervalo distinto de seus extremos é um ponto interior de $\overline{AB}$. Analogamente, todo ponto do plano que não pertence a $\overline{AB}$ é um ponto exterior ao segmento. A medida do segmento $\overline{AB}$ é a distância entre os seus extremos, cuja unidade usual é o centímetro (cm). Assim, o segmento $\overline{AB}$, pode ser visto na Figura 7.

Figura 7 - Segmento $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre A e B}\}$$

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

Se os pontos A e B coincidem, ou seja, $A = B$, podemos dizer que o segmento $\overline{AB}$ é um segmento nulo. A semirreta é um conjunto de todos os pontos colineares que começa em um ponto específico e se estende indefinidamente. Por exemplo, se houver dois pontos distintos chamados A e B, a semirreta AB (indicada $\overrightarrow{AB}$) é a união do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X, tais que B está entre A e X. A Figura 8 representa a semirreta que se origina no ponto A e se prolonga indefinidamente no sentido de B.

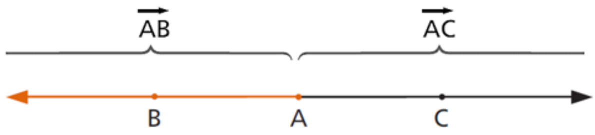
Figura 8 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid B \text{ está entre A e X}\}$$

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

Ainda convém lembrar, se o ponto de origem A está entre os pontos B e C, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ditas semirretas opostas, conforme ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Semirretas: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

- **Congruência de segmentos**

Para abordar a congruência em segmentos de reta, podemos partir da noção de superposição. Imagine que você tenha duas figuras distintas e possa "recortar" uma delas e tentar fazê-la encaixar sobre a outra, como em um quebra-cabeças. Essas figuras são "congruentes" se houver uma forma de encaixe que não deixe sobras.

Neste caso, a congruência em segmentos de reta pode ser definida como: Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dizemos que eles são congruentes se seus comprimentos são iguais, isto é, se AB = CD. A relação de congruência será denotada pelo símbolo (≡), ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

A diferença entre segmentos iguais e segmentos congruentes é que no primeiro caso os dois segmentos são iguais como conjuntos de pontos, e no segundo caso não precisam ser o mesmo conjunto, apenas compartilham da propriedade de terem a mesma medida.

Congruência de segmentos é um exemplo de relação de equivalência, isto é, satisfaz as seguintes propriedades para os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$:

1º) Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.

2º) Simétrica. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

3º) Transitiva. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

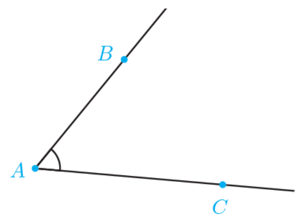
1.2.2 Ângulos

Os ângulos são elementos geométricos essenciais que estão presentes em muitas situações do nosso dia a dia. Apesar do fato de que muitas vezes não sabemos o quão importante são, eles têm uma gama de aplicações no mundo que nos cerca. No projeto e construção de edifícios, os ângulos são essenciais. Os engenheiros e arquitetos usam ângulos para calcular a inclinação dos telhados e rampas, para encontrar o posicionamento ideal de janelas e portas, para construir estruturas como pontes e torres e para determinar a resistência e a estabilidade das construções. Além disso, são utilizados na distribuição dos espaços, criando ambientes mais estéticos e funcionais. Na astronomia, são fundamentais na observação e estudo dos corpos celestes. Os ângulos também são utilizados na composição de fotografias e obras de arte. Além disso, é importante destacar que os ângulos são essenciais em várias disciplinas, incluindo a física, onde são usados para descrever movimentos e forças sobre objetos; por exemplo, podem ser usados para calcular a aceleração angular de um objeto em rotação, a direção de uma força aplicada a um objeto e a trajetória de um projétil. Portanto, aprender sobre ângulos é fundamental para entender as formas e estruturas geométricas.

- **Definição de Ângulo:**

Dadas, no plano, um par de semirretas com mesma origem, um ângulo é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas. As semirretas que formam um ângulo são os seus lados, e a origem delas é o vértice do ângulo. Se as semirretas são denotadas por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ denotamos o ângulo correspondente por $\angle BAC$ (Figura 10).

Figura 10 – Ângulo $B\hat{A}C$.



Fonte: Autor, 2024

Se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são coincidentes então dizemos que $\angle BAC$ é um ângulo nulo; e se são semirretas opostas de uma mesma reta, então o denominamos ângulo raso.

Vale notar que, embora existam várias unidades diferentes para medir ângulos, os termos grau (°), radiano (rad) e grado (gr) são os mais utilizados. As correspondências entre essas medidas são as seguintes: $180° = \pi$ rad $= 200$ gr. A medida de graus ainda é subdividida em minutos (′) e segundos (″), na base hexadecimal. Neste caso, 1° é equivalente a 60′. O grau, representado pelo símbolo (°), será a medida adotada neste estudo.

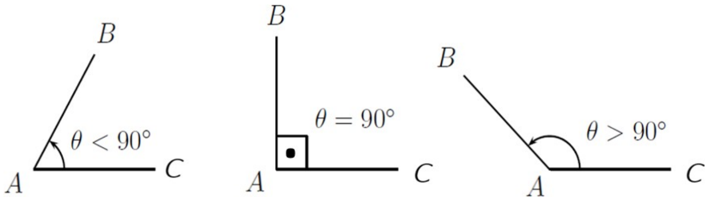
Muitas vezes usamos letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos; por exemplo, escrevemos $B\hat{A}C = \alpha$ (lê-se alfa) para significar que a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é α graus.

- **Classificação dos ângulos**

Um ângulo pode ser classificado de acordo com a sua medida. Raras vezes utilizaremos ângulos maiores que 180°. Assim, quando escrevermos $\angle BAC$, estaremos nos referindo ao ângulo $\angle BAC$ como menor que 180°, ou seja, ao ângulo $\angle BAC$ tal que

$0° < B\hat{A}C < 180°$. Diremos que um ângulo $\angle BAC$ é agudo quando $0° < B\hat{A}C < 90°$, reto quando $B\hat{A}C = 90°$ e obtuso quando $90° < B\hat{A}C < 80°$. Podemos observar, na Figura 11, a representação dos ângulos agudo, reto e obtuso, respectivamente. No ângulo reto, utiliza-se uma notação especial.

Figura 11 – Ângulos agudo, reto e obtuso.

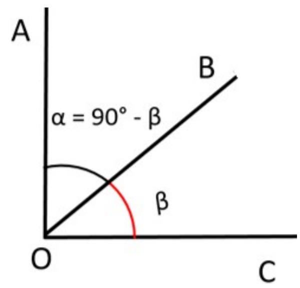


Fonte: Autor, 2024

- **Ângulos complementares e ângulos suplementares**

Definição: Dois ângulos são complementares quando a soma das medidas desses ângulos é igual a 90°. Assim, se α e β são as medidas de dois ângulos complementares, então $\alpha + \beta = 90°$. Ainda nesse caso, diremos que α é o complemento de β e a recíproca é verdadeira. Por exemplo, dois ângulos medindo 35° e 55° são complementares, uma vez que $35° + 55° = 90°$; por outro lado, o complemento de um ângulo de medida β ($\beta < 90°$) é um ângulo de medida $90° - \beta$, conforme mostrado na Figura 12.

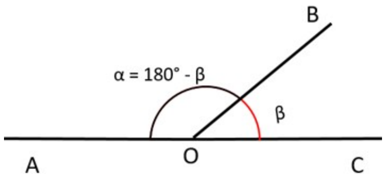
Figura 12 – Ângulos complementares



Fonte: Autor, 2024

Definição: Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°. Um deles é o suplemento do outro. Assim, se α e β são as medidas de dois ângulos suplementares, então $\alpha + \beta = 180°$. Analogamente, aos ângulos complementares, descreveremos que α é o suplemento de β e a recíproca neste caso também é verdadeira. O suplemento de um ângulo de medida β ($\beta < 180°$) é um ângulo de medida $180° - \beta$ (Figura 13).

Figura 13 – Ângulos suplementares



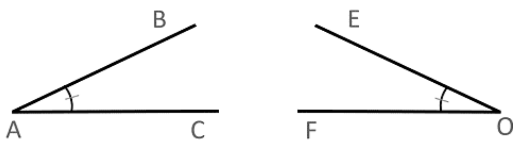
Fonte: Autor, 2024

- **Ângulos congruentes**

Definição: Quando as medidas de dois ângulos são idênticas, há congruência (símbolo ≡) entre eles. É importante lembrar que afirmar que ângulos congruentes são iguais não é geometricamente verdadeiro, pois seus lados e vértices não coincidem, ou seja, não apresentam posições iguais no plano.

Na Figura 14, temos os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{O}F$. Portanto, $B\hat{A}C$ e $E\hat{O}F$ são congruentes, ou seja, $B\hat{A}C \equiv E\hat{O}F$.

Figura 14 – Ângulos congrentes

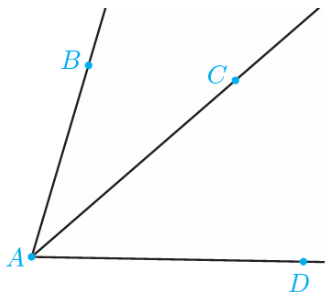


Fonte: Autor, 2024

- **Ângulos Adjacentes**

Definição: Dois ângulos são adjacentes se possuírem um lado em comum e consequentemente o mesmo vértice e interiores independentes (Figura 15).

Figura 15 – Ângulos Adjacentes

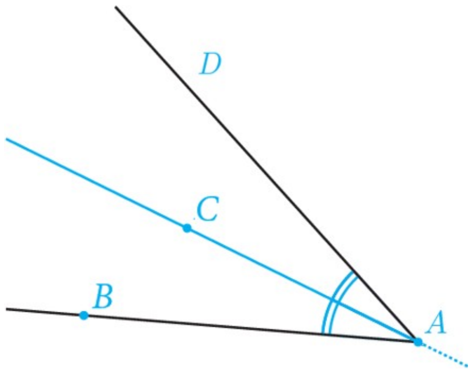


Fonte: Autor, 2024

Esta definição nos permite "juntar" ângulos da seguinte maneira: se $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ são ângulos adjacentes, então $\angle BAD$ é a soma dos dois ângulos.

Definição: Para o caso particular em que ângulos adjacentes apresentam uma semirreta interna a um ângulo $B\hat{A}D$, dizemos é bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$ se, e somente se, $B\hat{A}C \equiv C\hat{A}D$ (Figura 16).

Figura 16 – Bissetriz de um ângulo.



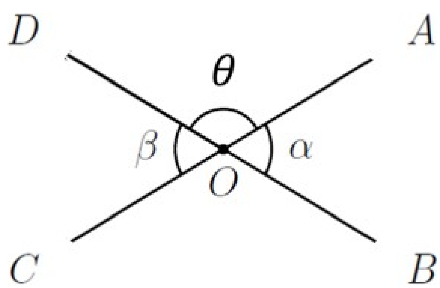
Fonte: Autor, 2024

Como podemos ver na Figura 16, a bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo com origem no vértice e que o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes.

- **Ângulos opostos pelo vértice (O.P.V.)**

Definição: Dois ângulos de mesmo vértice $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice se seus lados forem semirretas opostas (Figura 17).

Figura 17 – Ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ opostos pelo vértice.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013.

Como podemos verificar na Figura 17, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice, uma vez que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, bem como as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$, são respectivamente opostas.

Proposição: Portanto, podemos afirmar também que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.

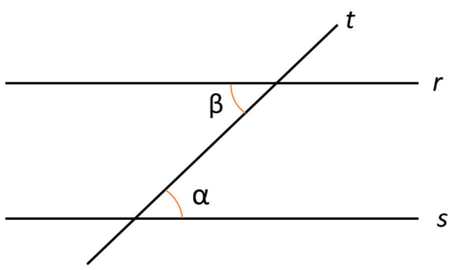
Para demostrar, observemos que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas, com isso, temos $\beta + \theta = 180°$. Analogamente, $\alpha + \theta = 180°$. Deste modo, $\beta = 180° - \theta = \alpha$.

Corolário: Ainda podemos concluir que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

- **Teorema da existência da paralela**

Se duas retas no mesmo plano e distintas e uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes, então essas duas retas são paralelas (Figura 18).

Figura 18 – Existência da paralela.



Se $\alpha = \beta$, então $r//s$

ou

Hipótese Tese

$\alpha \equiv \beta \implies r//s$

Fonte: Autor, 2024.

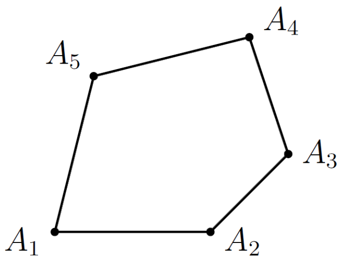
1.2.3 Polígonos

Os polígonos são fundamentais em muitos aspectos da matemática e têm uma importância significativa em várias áreas. Na Geometria, são usados para entender e descrever propriedades fundamentais de formas. Na engenharia e na arquitetura, são essenciais para projetar estruturas, calcular áreas e volumes, e garantir a estabilidade e a segurança de edifícios e outras construções. Na tecnologia, são usados para modelar objetos tridimensionais em ambientes virtuais e jogos. Nas ciências naturais, são utilizados para modelar fenômenos naturais e calcular propriedades de objetos e sistemas físicos. Na cartografia, são utilizados para representar áreas geográficas, calcular distâncias e direções, e criar mapas precisos e detalhados.

Esses são apenas alguns exemplos da importância dos polígonos em diversos campos. Eles fornecem uma base fundamental para a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos e têm uma série de aplicações práticas em nossa vida cotidiana. Do grego, a palavra polígono significa, *poly* muitos e *gono* ângulos, ou seja, muitos ângulos.

Definição: Seja n $\geq$ 3 um número natural, dada uma sequência de pontos de um plano A_1, A_2, ..., A_n, todos distintos, unindo esses pontos, formaremos os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 e vamos considerar que entre esses segmentos não existam dois segmentos consecutivos colineares. Se isso ocorrer, a figura formada pela união desses segmentos é um polígono (Figura 19).

Figura 19 – Polígono.

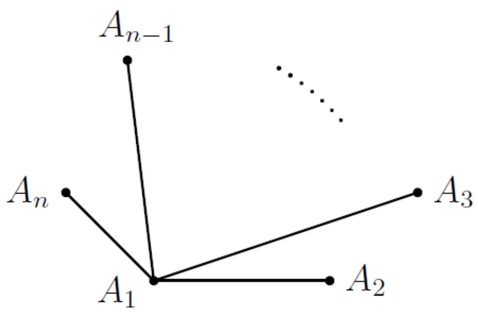


Fonte: Autor, 2024.

Os elementos de um polígono são: lado, vértice, diagonal e ângulo. Os lados (arestas) são exatamente os segmentos de reta que compõem a figura. Os vértices são os pontos A_1, A_2, ..., A_n do polígono. Uma diagonal de um polígono é um segmento que tem por extremidades dois de seus vértices que não pertencem a um mesmo lado e que todo polígono com ângulos internos menor que 180° com n lados possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Para demostrar à relação entre o número de diagonais com o número de lados, suponha $n \geq 4$, já que se $n = 3$ não há nada a provar, uma vez que triângulos não têm diagonais e $\frac{n(n-3)}{2} = 0$ para $n = 3$. Unindo o vértice A_1 aos $n-1$ vértices restantes A_2, ..., A_n obtemos $n-1$ segmentos; destes, dois são lados (A_1A_2 e A_1A_n) e os $n-3$ restantes (A_1A_3, ..., A_1A_{n-1}) são diagonais (Figura 20).

Figura 20 – Diagonais de um n-ágono convexo partindo de A_1.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013.

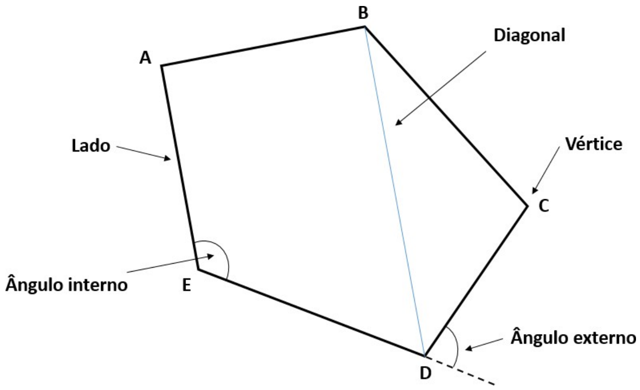
Como um raciocínio análogo é válido para qualquer outro vértice, segue que, de cada vértice do polígono, partem exatamente $n-3$ diagonais. Isso nos daria um total de $n(n-3)$ diagonais, porque cada diagonal A_iA_j foi contada duas vezes: uma quando contamos as diagonais que partem do vértice A_i e outra quando contamos as que partem do vértice A_j. Portanto, para obter o número correto de diagonais do polígono, devemos dividir por 2, o total $n(n-3)$, obtendo então, $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Definição: Perímetro é o comprimento do contorno de um polígono, portanto, para calcular o perímetro basta somar a medida de todos os lados desse polígono.

Definição: Por fim, os ângulos serão formados pelos lados consecutivos. Esses ângulos podem ser internos ou externos.

Os elementos dos polígonos descritos até aqui podem ser vistos na Figura 21.

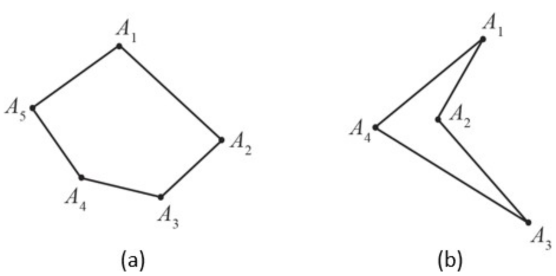
Figura 21 – Elementos do polígono.



Fonte: Autor, 2024.

Definição: Os polígonos podem ser classificados em convexos ou côncavos. Os polígonos são convexos quando todos os seus ângulos internos são menores que 180°. Isto é, um polígono é convexo somente se a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os vértices $(n-2)$ em um mesmo semiplano. Por outro lado, dizemos que os polígonos são côncavos quando possuem pelo menos um ângulo interno maior do que 180° (Figura 22).

Figura 22 – Polígono convexo (a) e polígono côncavo com $\hat{A}_2 > 180°$ (b).



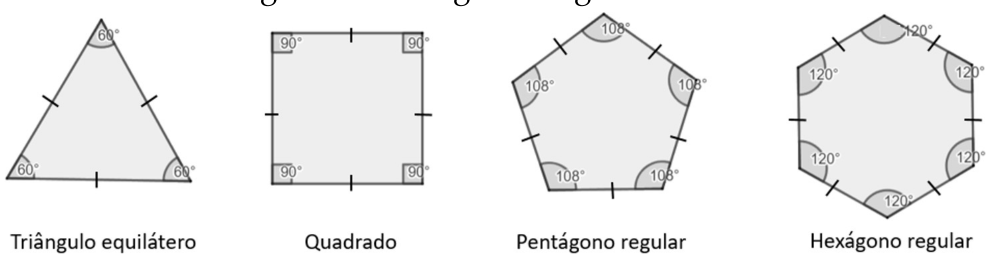
Fonte: Autor, 2024.

Definição: De acordo com o número n de arestas, com n ≥ 3, os polígonos têm nomenclatura específica. Em geral, dizemos que um polígono A_1, A_2, ..., A_n é um n-ágono, em referência a seu número n de lados (e de vértices). Contudo, são convencionais o uso dos nomes triângulo para n = 3, quadrilátero para n = 4, pentágono para n = 5, hexágono para n = 6, heptágono para n = 7, octógono para n = 8, eneágono para n = 9 e decágono para n = 10. Ainda no que concerne quantidades específicas de lados, é costume nomear os vértices de um polígono com letras latinas maiúsculas distintas. Por exemplo, um triângulo será, em geral, denotado por ABC e, nesse caso, sempre julgaremos, salvo menção explícita em contrário, que os lados do mesmo são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Observações equivalentes são válidas para os demais polígonos.

Os polígonos também podem ser classificados como regulares ou irregulares.

Definição: Os polígonos convexos são regulares quando possuem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes. Caso não atenda essas condições ele é classificado como polígono irregular. Na Figura 23, podemos observar alguns polígonos regulares.

Figura 23 – Polígonos regulares.

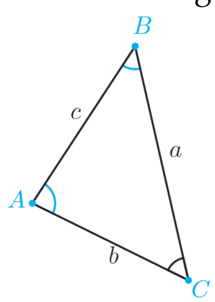


Fonte: Autor, 2024.

1.2.4 Triângulos

Definição: Considere três pontos A, B e C no plano. A figura de um triângulo é formada pela união dos três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, onde A, B e C são pontos não colineares. ΔABC é o símbolo para o triângulo formado pelos pontos A, B e C (Figura 24).

Figura 24 – Triângulo.

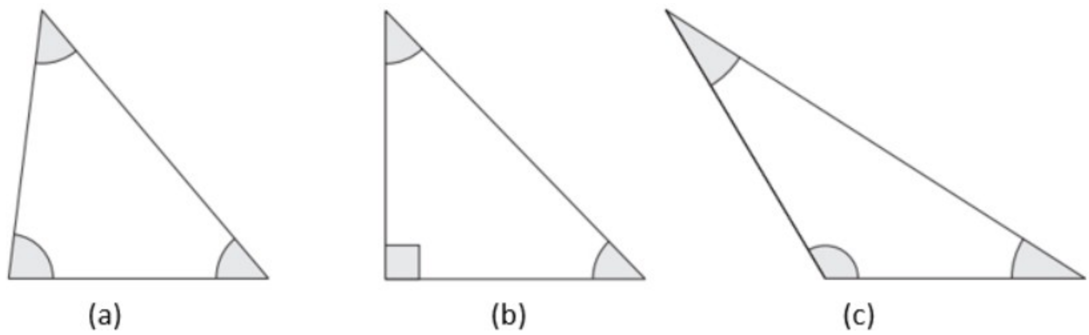


Fonte: Autor, 2024.

Os vértices do triângulo ABC são representados pelos pontos A, B e C. Seus lados são representados pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.e em geral, escreveremos $\overline{AB} =$ c, $\overline{AC} =$ b e $\overline{BC} =$ a para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC. Os ângulos internos correspondentes aos vértices de um triângulo serão designados pelas letras correspondentes $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ (ou suas medidas por $\hat{A}$=$B\hat{A}C$, $\hat{B}$=$A\hat{B}C$ e $\hat{C}$=$A\hat{C}B$).

Definição: Os triângulos podem ser classificados quanto à medida dos ângulos ou quanto aos lados. Em relação à medida dos ângulos, denominamos acutângulo (a) se todos os seus ângulos internos forem agudos. Para aquele que possuir um ângulo reto, define-se como retângulo (b) e obtusângulo (c) se tiver um ângulo obtuso, conforme podemos observar na Figura 25.

Figura 25 – Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus ângulos.

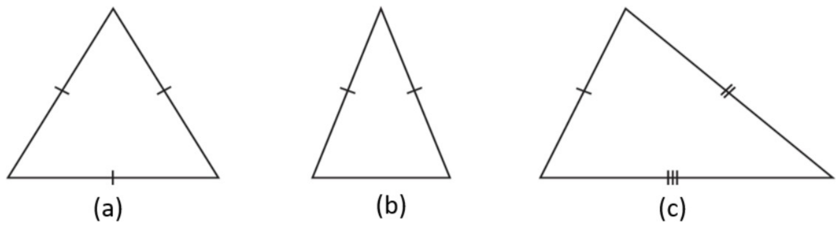


Fonte: Autor, 2024.

No caso de um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa do mesmo, enquanto os outros dois lados são seus catetos.

Definição: Já referente à medida dos lados, o triângulo que possui os três lados com a mesma medida, ou seja, se os segmentos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo será classificado como equilátero (a), consequentemente, os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60°. Quando a congruência existir apenas em dois lados denomina-se isósceles (b), ou seja, se ao menos dois dentre $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ forem iguais e o mesmo ocorrerá com dois de seus ângulos. Já aqueles que se difere em todos os lados classifica-se como escalenos (c), ou seja, se $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC} \neq \overline{AB}$ e novamente apresenta a mesma característica em relação aos ângulos (Figura 26).

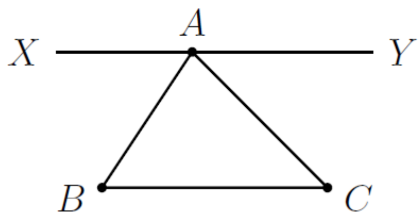
Figura 26 – Classificação de triângulos quanto às medidas dos seus lados.



Fonte: Autor, 2024.

Proposição: É importante salientar, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Para demonstrar essa proposição, temos a seguinte situação. Seja ABC um triângulo qualquer e $\overline{XY}$ uma reta paralela a $\overline{BC}$ e passando por A (Figura 27).

Figura 27 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013.

Demonstração: Pela existência da paralela, temos que $\hat{B} = B\hat{A}X$ e $\hat{C} = C\hat{A}Y$, de maneira que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{A}+B\hat{A}X+C\hat{A}X = 180°$.

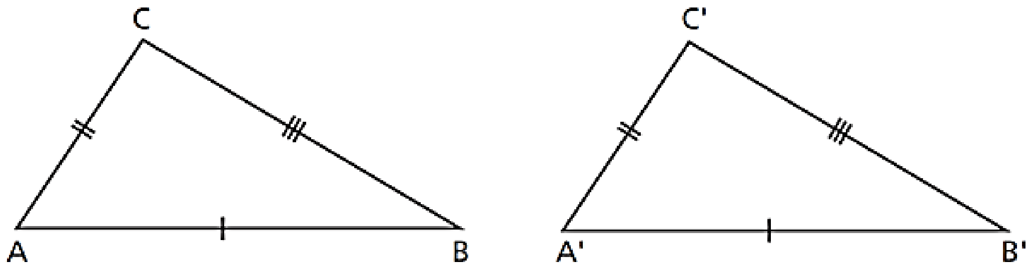
1.2.4.1 Congruência de triângulos

Definição: Dois triângulos podem ser congruentes quando comparados se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro; isso significa que um triângulo pode ser sobreposto ao outro por rotação ou reflexão. Consequentemente, podemos admitir que tanto os lados quanto os ângulos estão em congruência. Para atingir essa finalidade, é necessário estabelecer que seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro. Os triângulos congruentes não são iguais, pois eles se diferenciam por sua posição no plano.

Podemos determinar quatro situações de congruência: LLL (lado, lado, lado); LAL (lado, ângulo, lado); ALA (ângulo, lado, ângulo), e LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto).

- Caso LLL (lado, lado, lado): dois triângulos que têm todos os lados correspondentes congruentes (Figura 28).

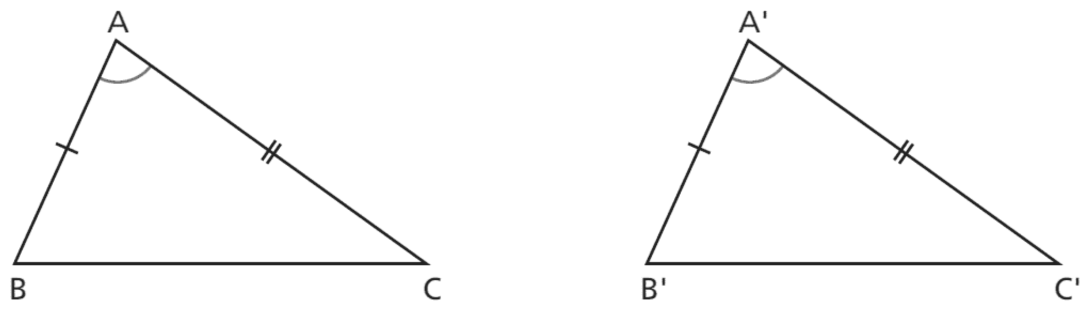
Figura 28 – Caso de congruência LLL.



Fonte: Autor, 2024.

- Caso LAL (lado, ângulo, lado): dois triângulos que tem dois lados correspondentes e o ângulo formado por eles forem congruentes (Figura 29).

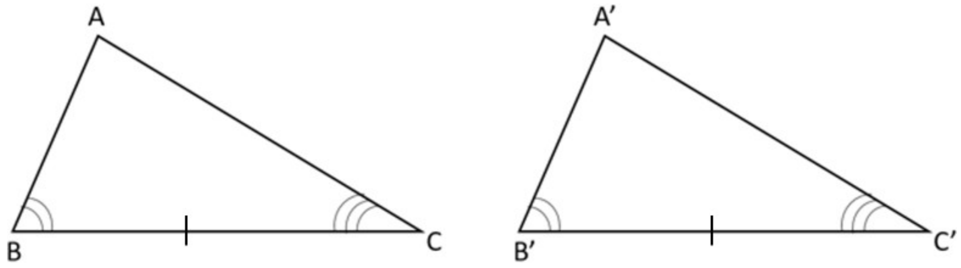
Figura 29 – Caso de congruência LAL.



Fonte: Autor, 2024.

- Caso ALA (ângulo, lado, ângulo): nessa condição os dois triângulos terão os dois ângulos correspondentes e o lado compreendido entre eles, todos congruentes (Figura 30).

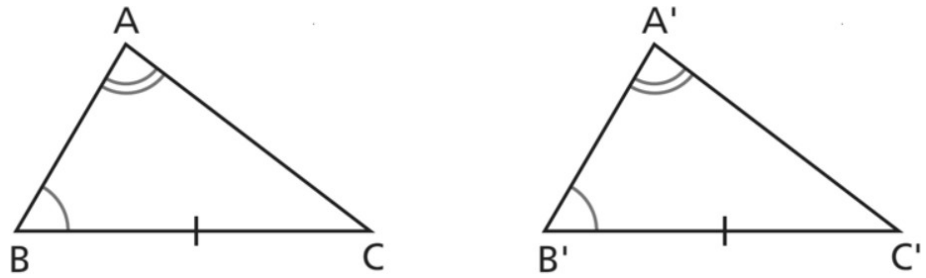
Figura 30 – Caso de congruência ALA.



Fonte: Autor, 2024.

- Caso LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto): Se dois triângulos têm de forma ordenada a congruência de um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes (Figura 31).

Figura 31 – Caso de congruência LAA_o.



Fonte: Autor, 2024.

1.2.4.2 Semelhança de triângulos

Quando existir uma correspondência entre os vértices das figuras planas, de forma que os ângulos são congruentes e os lados correspondentes estabelecem uma mesma razão k entre eles, ou seja, são proporcionais, denominamos como figuras semelhantes.

Definição: Desta forma, dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices dos triângulos, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre as dimensões de lados correspondentes seja sempre a mesma.

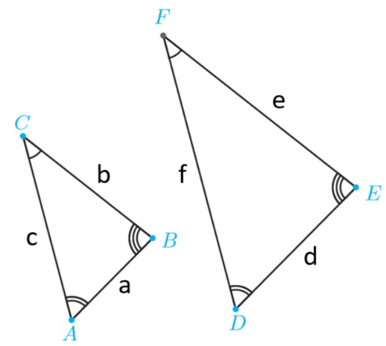
Com isso, definimos dois triângulos ΔABC e ΔDEF como semelhantes quando é possível estabelecer uma equivalência entre seus lados e ângulos de modo que:

$$\hat{A} \equiv \hat{D};\ \hat{B} \equiv \hat{E};\ \hat{C} \equiv \hat{F},$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

A relação de semelhança será denotada por "∼". No caso da definição acima escrevemos ΔABC ∼ ΔDEF (Figura 32).

Figura 32 – Triângulos semelhantes.



Fonte: Autor, 2024.

A proporção entre os lados dos triângulos é conhecida como razão de semelhança dos triângulos. Em outras palavras, para determinar se dois triângulos são semelhantes, verifica-se se existe uma correspondência entre seus vértices de forma que os ângulos correspondentes sejam congruentes. Se essa condição não for atendida, os triângulos não são semelhantes.

Observe que dois triângulos congruentes são também semelhantes, pois as medidas de seus lados opostos aos ângulos congruentes são iguais. Neste caso a razão de semelhança é 1.

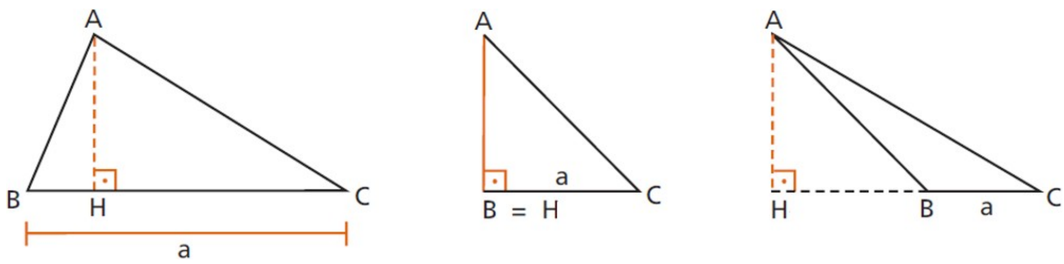
1.2.4.3 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma equação matemática muito utilizada no triângulo retângulo. Segundo esse teorema, em todo triangulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Para demostrar o teorema de Pitágoras, vamos definir inicialmente a altura de um triângulo.

Definição: A altura de um triângulo é o segmento de reta que liga, perpendicularmente, um vértice ao lado oposto a esse vértice, conforme Figura 33.

Figura 33 – Altura de um triângulo



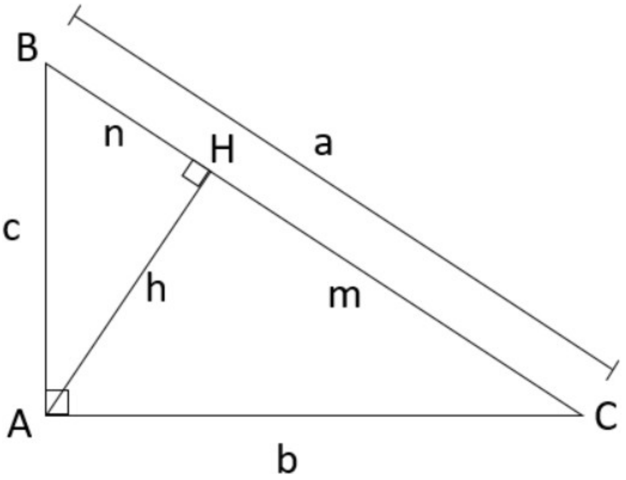
Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

H é a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a perpendicular a ela, conduzida por A, também é chamada "pé da altura".

Sendo assim, $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, ou $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado a, ou ainda $\overline{AH}$ é a altura relativa ao vértice A.

Dito isso, considere o triângulo retângulo ΔABC da Figura 34, cuja hipotenusa mede a e os catetos medem b e c.

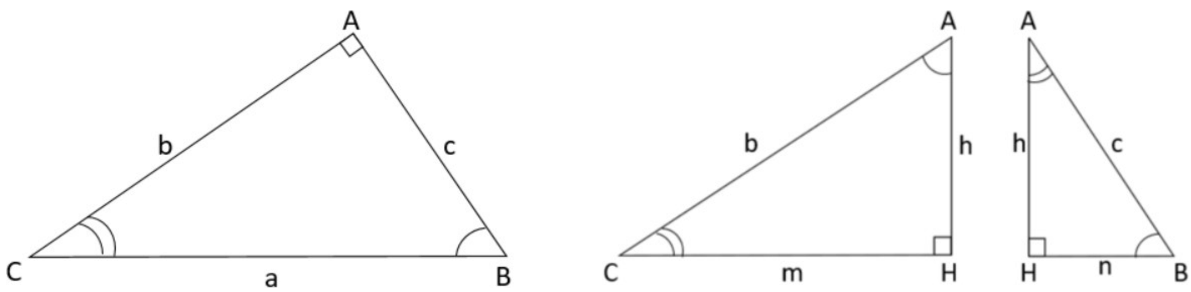
Figura 34 – Relações métricas num triângulo retângulo.



Fonte: Autor, 2024.

Seja h a altura do triângulo referente ao segmento $\overline{AH}$, b a medida do segmento $\overline{AC}$, c a medida do segmento $\overline{AB}$, n a medida do segmento $\overline{BH}$ e m a medida do segmento $\overline{CH}$, de modo que $m+n=a$. Assim, podemos considerar os triângulos ΔABC, ΔABH e ΔACH, conforme a Figura 35.

Figura 35 – Triângulos retângulos (subdivisões).



Fonte: Autor, 2024.

Observa-se que, os triângulos são semelhantes, pois têm os ângulos internos congruentes, respectivamente. Desse modo, temos:

$$I)\ \Delta ABC \sim \Delta ACH \ \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Longrightarrow a.m = b^2$$

$$II)\ \Delta ABC \sim \Delta ABH \ \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Longrightarrow a.m = c^2$$

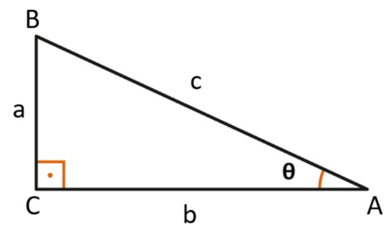
Ao somar I e II, obtemos: $(a \cdot m)+(a \cdot n)=b^2+c^2 \Rightarrow a \cdot (m+n)=b^2+c^2$. Sendo $(m+n)=a$, então $a \cdot a = b^2 + c^2 \therefore \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

1.2.4.4 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Definição: As razões trigonométricas no triângulo retângulo mais comuns são o seno, cosseno e tangente. O seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, o cosseno é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, e a tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Essas razões são úteis para resolver problemas envolvendo medidas de ângulos e comprimentos de lados no triângulo retângulo. Vale salientar, que o cateto oposto é o lado do triângulo que está oposto ao ângulo agudo de interesse, o cateto adjacente é o lado do triângulo que está adjacente ao ângulo de interesse, já a hipotenusa é o lado mais longo do triângulo retângulo e está sempre oposto ao ângulo reto.

Para melhor compreensão, dado um ângulo agudo $B\hat{A}C = \theta$ em um triângulo retângulo, conforme mostrado na Figura 36, as razões trigonométricas associadas ao ângulo θ são:

Figura 36 - Triângulo retângulo ΔABC com ângulo agudo θ.



Fonte: Autor, 2024.

$$Seno\ do\ ângulo\ \theta: \quad sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}, \quad sen\ \theta = \frac{a}{c}$$

$$Cosseno\ do\ ângulo\ \theta: \quad cos\ \theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}, \quad cos\ \theta = \frac{b}{c}$$

$$Tangente\ do\ ângulo\ \theta: \quad tg\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{a}{b}, \quad tg\ \theta = \frac{a}{b}$$

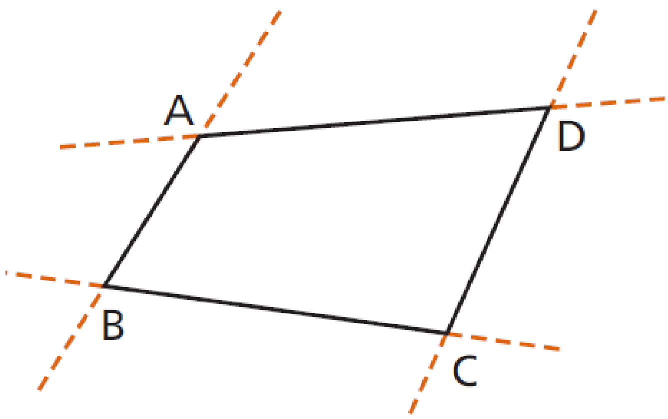
Assim, seno, cosseno e tangente são números associados a cada ângulo agudo de acordo com a definição mostrada anteriormente, já que os lados correspondentes ao ângulo agudo são proporcionais. Assim, quando pensarmos, por exemplo, no cosseno de 60° (cos 60°) estaremos nos referindo, na verdade, ao cosseno do ângulo cuja medida é 60°.

Atualmente, é comum escrever os símbolos das razões na notação em português (*sen*, *cos*, *tg*) ou na notação internacional (*sin*, *cos*, *tan*). Tanto docentes quanto discentes leem livros didáticos em português, mas também usam calculadoras com notação internacional para as razões trigonométricas.

1.2.5 Quadriláteros

Considere os pontos A, B, C e D no plano. Um quadrilátero é o polígono formado pela união de quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, denominados arestas, onde os quatro pontos A, B, C e D, denominados vértices, não são colineares três a três. O quadrilátero determinado desta forma será denotado simplesmente por $\square\, ABCD$ (Figura 37).

Figura 37 – Quadrilátero convexo ABCD



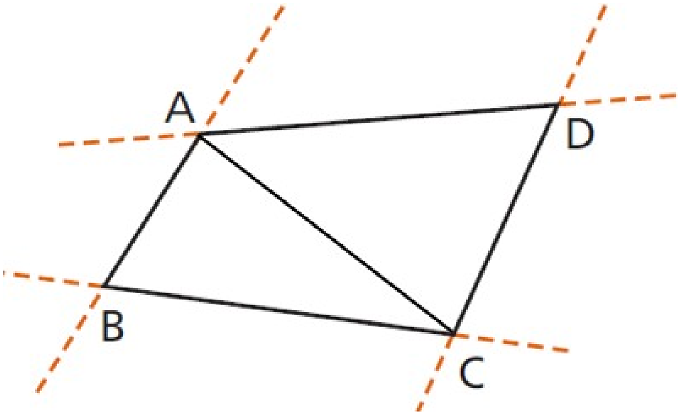
Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

Dois vértices de um quadrilátero são consecutivos se são extremos de um mesmo lado, caso contrário são não consecutivos ou são opostos. Os ângulos que correspondem a vértices consecutivos são chamados de ângulos consecutivos, e caso contrário são ângulos opostos. Consequentemente, dizemos que dois lados de um quadrilátero são consecutivos se compartilham de um vértice em comum; caso contrário são chamados de opostos. Os segmentos que ligam dois vértices não consecutivos de um quadrilátero são chamados de diagonais.

Propriedade: Um quadrilátero tem 2 diagonais e a soma dos seus ângulos internos é igual a 360°.

Demonstração: Para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, considere um quadrilátero qualquer $\square ABCD$. Se traçarmos uma das diagonais, por exemplo a diagonal $\overline{AC}$, o quadrilátero será dividido em dois triângulos: ΔABC e ΔACD (Figura 38).

Figura 38 – Quadrilátero dividido em dois triângulos pela diagonal $\overline{AC}$.



Fonte: Autor, 2024.

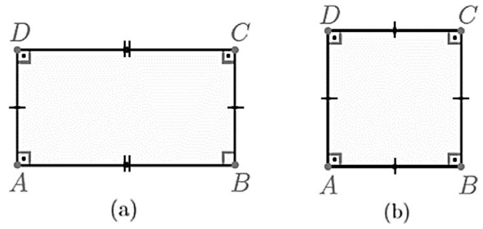
Sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, como demonstrado na seção 1.2.4 deste trabalho. Portanto, para os triângulos ΔABC e ΔACD, temos: a soma dos ângulos internos do triângulo ΔABC é igual a 180° e do triângulo ΔACD é igual a 180°. Como o quadrilátero $\square ABCD$ é formado pelos dois triângulos ΔABC e ΔACD, a soma dos ângulos internos do quadrilátero é a soma dos ângulos internos desses dois triângulos: $180° + 180° = 360°$. Portanto, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

1.2.5.1 Quadriláteros Notáveis

Existem alguns quadriláteros que possuem propriedades especiais, conhecidos como quadriláteros notáveis. Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

Definição: Um quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos e possui lados opostos de igual comprimento é um retângulo. Se, além disso, os lados são todos congruentes entre si, o quadrilátero é um quadrado (Figura 39).

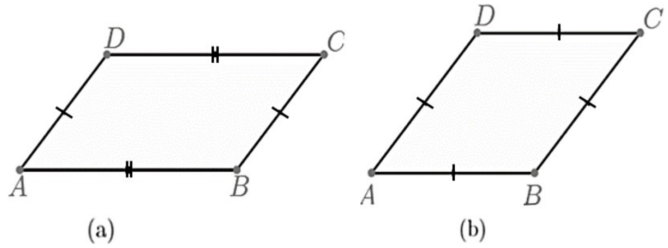
Figura 39 – Quadriláteros notáveis: (a) retângulo e (b) quadrado.



Fonte: Autor, 2024.

Definição: Já um quadrilátero cujos lados não consecutivos são paralelos entre si é um paralelogramo. Se, além disso, os lados são todos congruentes entre si, é um losango (Figura 40).

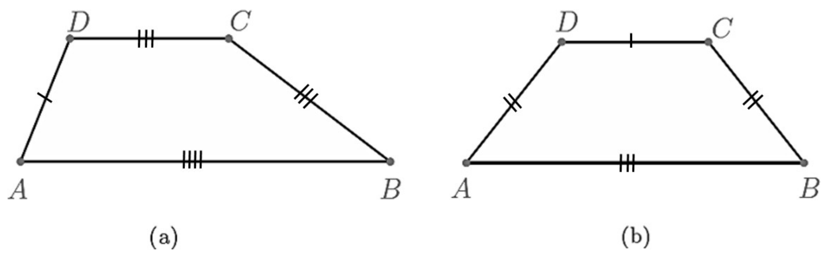
Figura 40 – Quadriláteros notáveis: (a) paralelogramo e (b) losango.



Fonte: Autor, 2024.

Definição: Quando um quadrilátero possui um par de lados não consecutivos paralelos entre si, e os outros dois lados não são paralelos entre si, é um trapézio. Os lados paralelos são chamados de bases do trapézio. Se os lados não paralelos forem congruentes entre si, o trapézio é chamado de isósceles. (Figura 41).

Figura 41 – Quadriláteros notáveis: (a) trapézio e (b) trapézio isósceles.



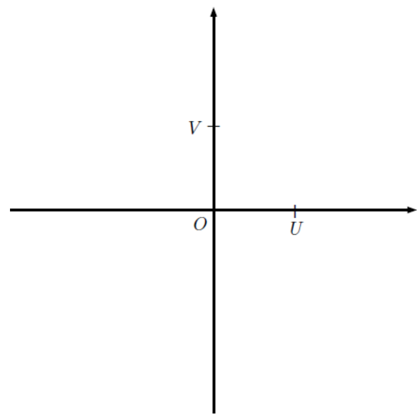
Fonte: Autor, 2024.

Observe que todo quadrado é um retângulo, e todo retângulo é um paralelogramo, no entanto, as relações recíprocas não são verdadeiras. Observe também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

1.2.6 Coordenadas cartesianas no plano

Ao estabelecer coordenadas em um plano, devemos considerar a seguinte configuração: sejam r e s duas retas perpendiculares, concorrentes em um ponto O com r na horizontal e s na vertical e escolhendo pontos $U \in r$ e $V \in s$, ambos diferentes de O, as retas r e s passam a ser eixos (Figura 42).

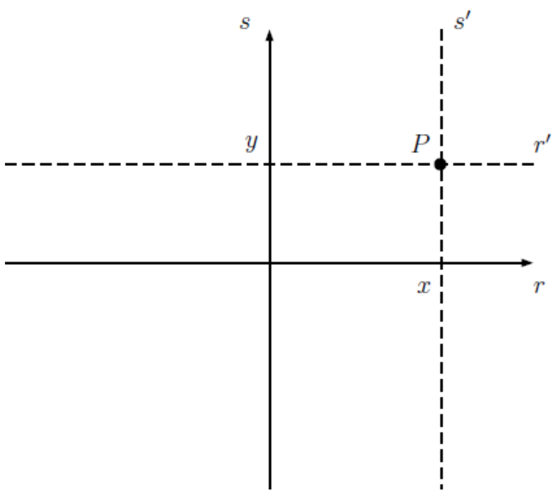
Figura 42 – Eixos perpendiculares com mesma origem.



Fonte: Autor, 2024.

Convencionalmente, escolhe-se U à direita de O e V acima de O. E também por questão de conversão consideramos $\overline{OU} = \overline{OV}$, ou seja, adota-se uma mesma escala sobre os eixos r e s. Um plano no qual foram escolhidos e fixados dois eixos perpendiculares, como descrito, é chamado plano cartesiano (Figura 43).

Figura 43 – Coordenadas cartesianas de um ponto no plano.



Fonte: Autor, 2024.

Definição: Dado um ponto P em um plano cartesiano, conforme observado na Figura 43, sejam r' e s' as retas passando por P e paralelas a r e s, respectivamente. Os números reais x e y são chamados coordenadas cartesianas do ponto P. O número x é chamado abscissa de P e o número y é chamado ordenada de P.

Propriedade: Em resumo, a cada ponto P de um plano cartesiano corresponde um único par ordenado (x, y) de números reais, onde x é a abscissa de P e y é a ordenada de P. Para justificarmos porque esse par ordenado (x, y) correspondente a um único ponto P, basta mostrarmos como é possível localizar o ponto P a partir de suas coordenadas.

Demonstração: Suponha, então, que conhecemos as coordenadas (x, y) de P. Pelo axioma das paralelas, existe uma única reta paralela a s e passando por x. A unicidade dessa reta paralela implica que ela é, necessariamente, a reta s'. De modo análogo, a reta r' é a única reta que passa por y e é paralela a r. O ponto P é, pois, recuperado a partir de x e y como sendo a interseção das retas r′ e s′. Isso mostra que o processo que usamos para obter x e y a partir de P pode ser revertido, de modo que a correspondência entre P e o par ordenado (x, y) é biunívoca.

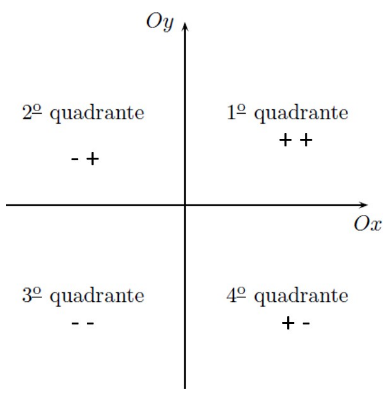
Em consequência disso, identificaremos um ponto P como o par ordenado (x, y) de suas coordenadas, isto é, escreveremos o ponto (x, y).

Definição: O eixo das abscissas é, por definição, o conjunto $Ox = \{(x, 0) \mid x \in R\}$ (isto é, o eixo horizontal). Analogamente, o eixo das ordenadas é, também por definição, o conjunto $Oy = \{(0, y) \mid y \in R\}$ (isto é, o eixo vertical).

Os pontos (x, y) do plano cartesiano que não pertencem a um eixo são tais que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Temos, assim, quatro possibilidades (Figura 44):

1. se $x > 0$ e $y > 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao primeiro quadrante.
2. se $x < 0$ e $y > 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao segundo quadrante.
3. se $x < 0$ e $y < 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao terceiro quadrante.
4. se $x > 0$ e $y < 0$ dizemos que o ponto (x, y) pertence ao quarto quadrante.

Figura 44 – quadrantes do plano cartesiano.



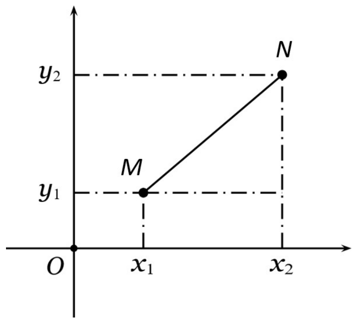
Fonte: Autor, 2024.

Diante disso, o primeiro quadrante é a interseção $X_+ \cap Y_+$, o segundo quadrante é a interseção $X_- \cap Y_+$, o terceiro é $X_- \cap Y_-$ e o quarto quadrante é $X_+ \cap Y_-$. Por uma questão de simplicidade, escreveremos ++, -+, - - e +- para denotar, respectivamente, o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto quadrantes.

1.2.6.1 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Definição: Dados os pontos $M(x_1, y_1)$ e $N(x_2, y_2)$ em um plano cartesiano, uma maneira de obter a distância entre esses pontos é calculando o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos (Figura 45).

Figura 45 – Distância entre dois pontos de um plano cartesiano.



Fonte: Autor, 2024.

Definição: Para tanto, observe que o segmento de reta que liga os pontos $M(x_1, y_1)$ e $N(x_2, y_2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância d entre esses pontos é, então, dada por

$$d(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(Note que não é necessário escrever os módulos sob a raiz quadrada, pois os comprimentos dos catetos são elevados ao quadrado.)

Propriedade: A distância entre pontos no plano cartesiano tem as seguintes propriedades:

(1) $d(M, N) \geq 0$, para quaisquer pontos M e N.

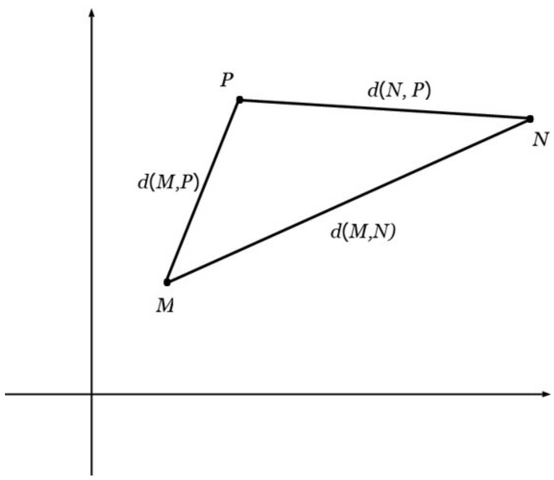
(2) $d(M, N) = 0$ se, e somente se, $M = N$.

(3) $d(M, N) = d(N, M)$, para quaisquer pontos M e N do plano cartesiano.

(4) Desigualdade triangular: d(M, N) ≤ d(M, P) + d(P, N)

para quaisquer pontos M, N e P do plano cartesiano (Figura 46). A igualdade ocorre se, e somente se, os pontos M, N e P são colineares e o ponto P estiver situado entre os pontos M e N.

Figura 46 – A desigualdade triangular.



Fonte: Autor, 2024.

Demonstrações:

(1) De fato, observe inicialmente que, como uma soma de quadrados de números reais é sempre maior ou igual a zero, a expressão $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ está bem definida e é um número real não negativo.

(2) Se $M = N$, então $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e, daí,

$$\begin{aligned} d(M,N) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $d(M,N) = 0$, então $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, o que implica $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$. Como uma soma de quadrados é zero somente se cada parcela é igual a zero, segue da última igualdade que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, logo, $M = N$. Isso prova os itens (1) e (2).

Para provarmos o item (3), basta percebermos que

$$d(N,M) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(M,N)$$

O item (4), pode ser verificado, usando uma justificativa geométrica. Na Figura 46, podemos ver que o caminho mais curto para se ir de M até N é ao longo do segmento de reta MN, com comprimento $d(M,N)$. Uma vez que o caminho que passa pelos segmentos MP e PN têm comprimento $d(M,P) + d(P,N)$, com isso, temos: $d(M,N) \leq d(M,P) + d(P,N)$.

Além do mais, os dois caminhos têm o mesmo comprimento se, e somente se, o caminho dos segmentos MP e PN se confundir com o segmento MN, o que ocorre se, e somente se, os pontos M, N e P forem colineares e P estiver entre M e N.

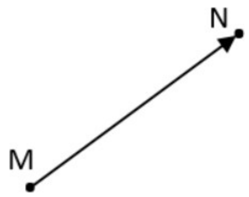
Logo, as propriedades (1), (2), (3) e (4) são condições que caracterizam a noção de distância.

1.2.7 Noções básicas de vetores no plano

Intuitivamente, vetor é um segmento para o qual se definiu uma orientação, isto é, adotou-se um sentido, e, por isso, o conceito de segmento orientado será usado para formalizar essa ideia.

Definição: Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento e o segundo chamado extremidade, ou seja, o segmento orientado de origem em M e extremidade N será representado por $\overline{MN}$. Dados dois segmentos orientados MN e PQ, então $\overline{MN} = \overline{PQ}$ se, e somente se, M = P e N = Q. Como mostra a Figura 47, geometricamente o segmento orientado MN será indicado por uma seta de M até N.

Figura 47 – Segmento orientado MN.



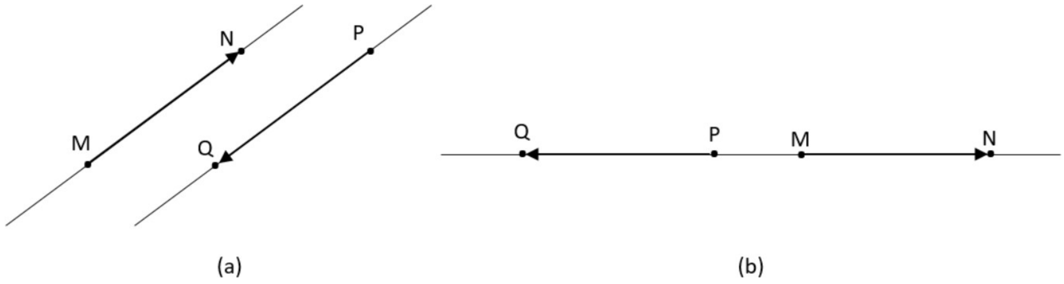
Fonte: Autor, 2024.

Definição: Um segmento é nulo quando a origem coincide com a extremidade, ou seja, é determinado por um par de pontos coincidentes. Dado um segmento orientado MN, o segmento orientado NM diz-se oposto de $\overline{MN}$.

Definição: Dados dois segmentos orientados não nulos MN e PQ, dizemos que eles têm mesma direção se as retas MN e PQ são paralelas ou coincidentes.

Só podemos comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção. A Figura 48 apresenta os segmentos MN e PQ opostos, portanto, com sentidos contrários.

Figura 48 – Segmentos orientados MN e PQ opostos em retas paralelas (a) e coincidentes (b).



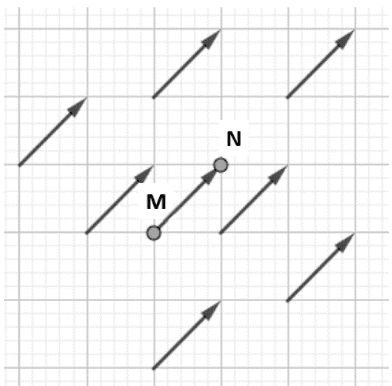
Fonte: Autor, 2024.

Definição: O segmento orientado MN é equipolente ao segmento orientado PQ se MN e PQ têm mesmo comprimento, direção e sentido. Indica-se $MN \sim PQ$.

Partindo do conceito de segmento orientado, podemos definir formalmente os vetores.

Definição: Sejam M e N pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ ou $\vec{v} = N - M$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a MN. Cada segmento equipolente a MN é um representante do vetor $\overrightarrow{MN}$ (Figura 49).

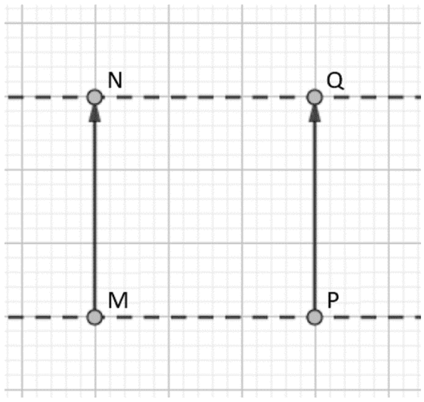
Figura 49 – Representantes $\overrightarrow{MN}$



Fonte: Autor, 2024.

Propriedade: Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ e um ponto P, existe um só ponto Q, conforme a Figura 50, tal que o segmento orientado PQ tenha o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de MN. Portanto, temos também $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, o que mostra o fato de que um representante de $\vec{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto P do plano.

Figura 50 – Segmentos orientados equipolentes MN e PQ



Fonte: Autor, 2024.

O módulo, a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes.

Definição: Indica-se o módulo (ou norma) de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$ e para se obter o valor do módulo do vetor, considere $\vec{v} = (x, y)$, tem-se $\sqrt{x^2 + y^2}$, que é a medida do segmento do vetor. Um vetor é unitário quando seu módulo é 1.

Na prática, os vetores são manipulados através de suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais conhecidos.

Definição: Dados os pontos $M = (x_M, y_M)$ e $N = (x_N, y_N)$, os números $x_N - x_M$ e $y_N - y_M$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, e escrevemos $\vec{v} = (x_n - x_M, y_n - y_M)$.

As coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

1.3 Jogo de sinuca

A sinuca é uma variação dos jogos de bilhar. As partidas podem ser jogadas por dois ou mais jogadores. O objetivo do jogo é encaçapar as bolas coloridas, dentro de uma sequência definida por regras. Para tanto, é usado um taco (CBBS, 2012).

A dificuldade está no fato de que o jogador não pode tocar diretamente nas bolas coloridas. Deve-se usar a bola branca, que é identificada como “tacadeira”, a única na qual o jogador pode dar suas tacadas, impulsionando as bolas coloridas em direção as caçapas. São utilizadas sete bolas coloridas e uma branca. As coloridas têm valores de 1 a 7 pontos, sendo a vermelha 1, amarela 2, verde 3, marrom 4, azul 5, rosa 6 e preta 7. As bolas devem ser encaçapadas nessa mesma sequência de pontos, da menor para a maior. A menor bola da mesa é chamada de “bola da vez”. Caso o jogador erre a tacada na bola da vez, não há “castigo”, ou seja, não perde pontos (CBBS, 2012).

Quando um jogador decide arriscar, pode jogar em uma bola maior, ao invés da bola da vez. Porém, em caso de erro há o castigo, ou seja, o jogador perde pontos.

O jogo pode terminar de três formas:

- quando a bola 7 for encaçapada com vantagem no placar ou convertida a bola 6 com diferença superior a 7 pontos favoráveis;
- quando um dos jogadores reconhecer a derrota na partida;
- quando a diferença de pontos entre os jogadores atingir valores maiores que 46 pontos com a bola 5 sendo a bola da vez, 27 pontos com a bola 6 sendo a da vez ou 7 pontos com a bola 7 sendo a da vez (CBBS, 2012).

A mesa em uso no Brasil reedita as medidas do bilhar francês: 2,84 m x 1,42 m no campo de jogo, de quina a quina das borrachas que guarnecem as tabelas. A altura em relação ao piso pode variar de 0,80 a 0,85 m, conforme o fabricante ou o interesse do adquirente (FARACO; DIAS, 2007).

Como já foi dito, a sinuca é uma variação do jogo de bilhar, por isso é importante conhecer mais sobre esse jogo.

O bilhar é um esporte com uma variedade de regras e objetivos. Nas últimas décadas, várias modalidades populares de bilhar foram desenvolvidas, como bilhar carambola, bilhar inglês, *snooker*, *trick shot* e *pool-billiard* e sinuca. Atualmente é um evento de competição comum nos jogos mundiais e com prêmios elevados em dinheiro. Além disso, é um dos esportes de lazer mais populares (KAVEH; KHANZADI; MOGHADDAM, 2020).

O bilhar é um esporte que integra habilidades e conhecimentos de geometria. Os participantes devem ser proficientes em várias técnicas de tacada para compreender com precisão a força da tacada, a trajetória da bola rolando após a colisão e a posição da bola branca. Ainda convém lembrar, que os competidores precisam ter um bom conhecimento de geometria para planejar uma estratégia de pontuação ou defesa (ELMAGD, 2017).

Algumas pessoas têm dúvidas sobre a diferença entre bilhar, sinuca, entre outros. O senso comum usa esses termos para descrever jogos profissionais e recreativos. Assim, é essencial distinguir, inicialmente, esses termos.

Existem tipos diferentes de jogos de bilhar e eles se enquadram em duas grandes categorias, o bilhar francês e o bilhar inglês. Os jogos de bilhar francês são jogados em mesas sem buracos, enquanto os jogos do bilhar inglês são jogados em mesas com buracos chamados de caçapas. O bilhar é um conjunto de jogos que envolvem a mesa, os tacos e as bolas. Já a sinuca é um desses jogos, a versão brasileira. Em comparação, podemos dizer que a sinuca está para o bilhar assim como o futebol de salão está para o futebol

(PORTILHO, 2024). Uma vez que, compreendemos um pouco mais sobre suas diferenças entre bilhar e sinuca, vamos entender a história do bilhar até o surgimento da sinuca.

1.3.1 História do jogo de bilhar

Existem muitas versões onde e como surgiu o bilhar. A teoria mais aceita é que o esporte tenha sido "inventado" pela nobreza Europeia, por volta do século. XIII - XIV. Uma teoria diz que a palavra *Billiards* vem do prefixo *Bill*, que significa "bola"em francês, e que esta é a origem do bilhar na França. Os registros indicaram que o rei da França Luís XI encomendou a primeira mesa de sinuca em 1470, atribui-lhe a origem do bilhar a esses registros (GARNO, 1904).

No século XIII, o bilhar já era considerado o entretenimento preferido da nobreza francesa e inglesa. Logo houve mudanças notáveis, como a retirada de obstáculos das mesas, a adição de uma bola e a retirada das caçapas. Assim, foi criado o Bilhar francês (Carom Billiards), também conhecido como carambola, com um novo sistema de pontuação baseado na quantidade de vezes que as bolas se chocam (GARNO, 1904).

Registros como livretos publicados pelo Congresso Americano de Bilhar narravam que a Inglaterra foi o país responsável pela origem do bilhar. Já na literatura, uma das primeiras ocasiões que se observou menção ao termo bilhar, foi na obra Antônio e Cleópatra (ato 11, cena V), de *Shakespeare*, em 1606. Onde a Rainha pede para que sua criada Charmian acompanhe-a no jogo. Além disso, há evidências de que o *croquet*, um jogo de grama que se trata de bater bolas de plástico ou de madeira com um martelo através de aros incorporados ao gramado, foi o jogo que deu origem ao bilhar. No início, o brilhar era jogado ao ar livre e após alguns anos, foi levado para os salões e praticado em mesas de madeira cobertas com panos verdes para se parecer com os gramados. A princípio, as mesas continham obstáculos e aros como no *croquet*, por isso o bilhar foi chamado de *croquet* de mesa por algum tempo. Em 1770, uma nova modalidade, o bilhar inglês, já era o jogo predominante na Grã-Bretanha, sendo jogada com 3 bolas e 6 caçapas. Em 1800, com a Revolução Industrial houve uma melhora nos instrumentos (como tacos, mesas, bolas. . .) e em 1873 o bilhar teve seu primeiro campeonato mundial (GARNO, 1904).

Ao longo do século XIX, o bilhar inglês começou a ganhar força à medida que os jogos eram disputados. Em 1875, essa categoria de bilhar deu origem ao snooker, que foi o precursor da sinuca.

1.3.1.1 Do snooker à sinuca

O trabalho publicado através do livro *Snooker*: Tudo Sobre Sinuca por Faraco e Dias, (2007) descreve os acontecimentos históricos que nortearam à origem da sinuca no Brasil. Logo, adotaremos essa referência nesta seção.

De acordo com Faraco e Dias (2007), o "jogo de *Snooker* 's"foi criado na Índia em 1875 por um jovem tenente do 11º regimento inglês em Jabalpur chamado Neville Chamberlain. Ao combinar as modalidades de bilhar já existentes, como o *Life Pool*, *Pyramids* e o *Black Pool*, Chamberlain teria "inventado"essa nova modalidade, a qual foi à precursora da sinuca que conhecemos atualmente.

Life Pool: era um tipo de bilhar britânico, mas com várias bolas coloridas. Cada jogador tinha uma bola branca e tentava encaçapar as bolas do adversário. Quando a bola branca era encaçapada o jogador perdia uma vida. Ao perder 3 vidas o jogador era eliminado do jogo e o último jogador com vidas ganhava a partida.

Black Pool: era uma variação do *life pool* onde a bola 8 significaria a pena. Ao matar a bola de um adversário você tinha direito a acertar a bola preta, caso conseguisse, os adversários perdiam uma vida, ou a aposta.

Pyramids Pool: (ou jogo de pirâmides) continha 15 bolas vermelhas e uma branca, onde cada jogador utilizava a branca como tacadeira e recebia um ponto por cada bola vermelha encaçapada.

O *snooker* surgiu como uma junção do jogo *Pyramids* que usava apenas bolas vermelhas e uma branca com o jogo *Life Pool* que utilizava bolas coloridas. Tendo assim o "Jogo de *Snooker*'s", 15 bolas vermelhas e 04 bolas coloridas, inicialmente. Essa modalidade *snooker* ganhou popularidade na Índia e no antigo império britânico. John Roberts, um jogador de bilhar famoso na época, viajou à Índia dez anos depois para conhecer o novo modelo de jogo e adotar em sua prática. Com a volta dos soldados de licença para casa, o jogo se espalhou ainda mais e se tornou popular na Inglaterra no final dos anos 80. Apesar de terem sido oficialmente fundadas no século XX, houve conflito sobre as regras, porque cada organização adotava seus próprios torneios e regras.

Em 1907 acontecia o primeiro campeonato de snooker profissional "*Snookers Pool Championship*"realizado em Londres, cujo vencedor foi o inglês Charles Dawson.

No Brasil, a chegada do bilhar ocorreu entre o final do século XIX e o início do século XX e teve duas vertentes distintas que foi a carambola e o *snooker*. Nesse momento, o *snooker* começava a ganhar importância pelo mundo e uniformização para disputas de campeonatos. Entretanto, após chegar ao Brasil, o jogo sofreu algumas adaptações para que as partidas se tornassem mais rápidas, como exemplo, podemos citar a alteração na quantidade de bolas vermelhas e no tamanho das bolas, que aumentaram. As mudanças na padronização do *snooker* que era jogado em todo o mundo dificultaram a participação dos jogadores brasileiros em campeonatos internacionais, levando à baixa adesão desta variação do *snooker* fora do Brasil.

Em 1930, a fábrica de mesas de bilhar da empresa Norte Americana *Brunswick* chega ao Brasil, no estado do Rio de Janeiro. No ano seguinte, a coletânea "*Brunswick* o ABC do Bilhar"é publicada no Brasil. Dez anos depois, as primeiras fábricas de mesas e tacos de sinuca no Brasil, a Tujague no estado do Rio de Janeiro e a Taco de Ouro em São Paulo, tornaram o acesso a sinuca mais fácil.

Os campeonatos disputados no Brasil eram amadores, até meados do século XX, mas em 1958, ocorreu em São Paulo, o primeiro campeonato organizado reconhecido no Brasil. Até os dias atuais, esse campeonato é disputado anualmente e se tornou uma tradição.

A primeira tentativa de organizar este esporte foi através da criação da Associação Metropolitana de Bilhar no Rio de Janeiro em 1944. Essa associação conseguiu se afiliar ao Conselho Nacional de Desportos (CND). Em 1956, a CND desfez esse vínculo devido a alegações de falta de interesse dos representantes do Conselho. Somente em 1973 a Federação de Sinuca e Bilhar do Estado do Rio de Janeiro conseguiu organizar esse esporte. Em 1978, eles organizaram o primeiro Campeonato Brasileiro de sinuca no Palácio São Cristóvão, no Rio de Janeiro. Nos anos posteriores, o campeonato foi disputado em Brasília e na cidade de São Paulo. A Federação Paulista de Sinuca e Bilhar foi fundada em 1979 e a Federação de Sinuca do Distrito Federal foi fundada em Brasília, em 1986. No mesmo ano, as três federações se uniram para formar a Confederação Brasileira de Bilhar e Sinuca (CBBS) em Brasília-DF. A padronização das regras, que antes eram conhecidas apenas informalmente, foi o primeiro passo após esta união. Esta padronização foi realizada durante uma reunião na cidade de Ubatuba, no estado de São Paulo, em 1988. Neste mesmo ano, Manoel *Tubino*, presidente do CND, assinou a Resolução nº 7, de 29 de fevereiro que reconheceu a sinuca como um esporte oficial do Brasil. Quando o Comitê Olímpico Brasileiro (COB) assumiu a responsabilidade de regulamentar os esportes no Brasil em 1993, a CND foi extinta.

Atualmente, o jogador de sinuca, com mais reconhecimento internacional, é Igor Figueiredo nascido em Niterói, em 11 de outubro de 1977. Igor é o único brasileiro campeão mundial de *snooker* (2018 e 2019) e sua melhor classificação no ranking mundial de *snooker* foi 65ª posição, conquistada em 2010.

1.3.2 Materiais e principais termos da sinuca

É fundamental fornecer uma descrição clara e concisa dos instrumentos e termos essenciais do jogo de sinuca para que o leitor tenha um melhor entendimento (CBBS, 2009).

O jogo possui três componentes fundamentais, os quais são descritos a seguir.

- **Bolas** - As bolas usadas na sinuca são componentes essenciais do jogo e possuem características específicas que garantem o equilíbrio, a precisão e a jogabilidade adequada. Elas são tradicionalmente feitas de resina fenólica, um material que oferece alta durabilidade e consistência. As bolas de sinuca têm um diâmetro padrão de 52,5 mm e um peso que varia entre 130 e 150 gramas. A consistência no tamanho e no peso é crucial para garantir que o jogo seja justo e previsível. No jogo de sinuca, as bolas são geralmente coloridas de maneira específica, na Figura 51, podemos ver o conjunto de bolas usadas na modalidade bola 8.

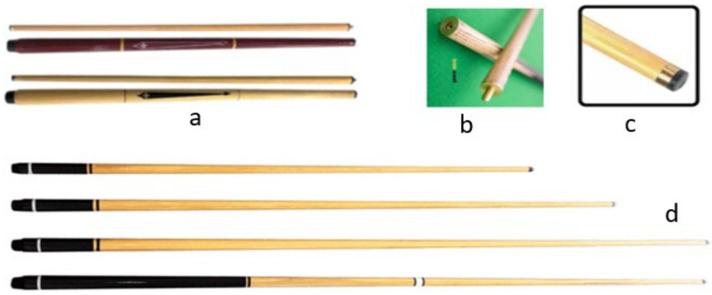
Figura 51 – Conjunto de bolas de bilhar usada na modalidade bola 8.

Fonte: CBBS, 2009.

Em uma tacada sem efeito, a bola de sinuca realiza um movimento retilíneo tangenciando a superfície da mesa com infinitos pontos de contato, essa observação empírica é análoga ao conceito de reta estudado na geometria. Neste trabalho, iremos adotar a bola como o ponto que tangencia a superfície da mesa.

- **Tacos** - Como mencionado anteriormente, a bola branca sobre a mesa de jogo deve impulsionar as bolas coloridas. No entanto, usando um taco, o jogador deve impulsionar a bola branca em direção às outras bolas. Normalmente, o taco de sinuca é feito de madeira e tem uma espécie de ponteiro de borracha na extremidade que deve entrar em contato com as bolas. Os tacos de melhor qualidade costumam ser desmontáveis em 2, 3 ou mesmo 4 peças, sendo a parte mais grossa e pesada, chamada de empunhadura e a parte mais fina e leve, chamada de flecha. Esses tacos podem ser feitos em diferentes tamanhos (Figura 52).

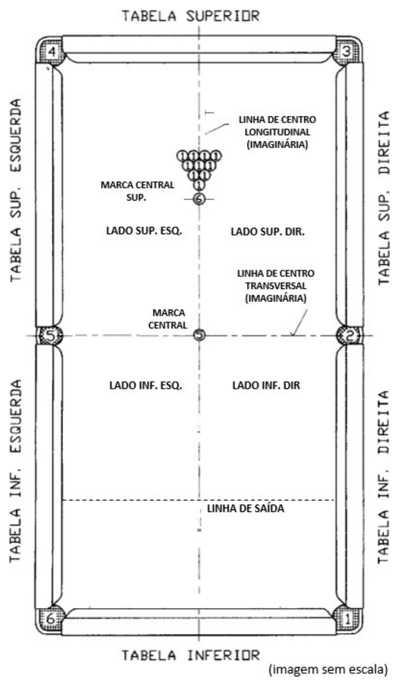
Figura 52 – Características dos tacos de bilhar: (a) desmontáveis, (b) tornilho, (c) suela e (d) de diferentes tamanhos.



Fonte: Adaptado do Google, 2024.

- **Mesa** - A mesa, ou "campo"de jogo, é o terceiro e último instrumento fundamental do jogo. Ela tem uma superfície plana coberta por um manto aveludado no formato retangular, geralmente, com uma proporção de comprimento e largura (2:1), na qual é delimitada por seis tabelas e seis caçapas em pontos pré-estabelecidos. Portanto, neste trabalho quando nos referirmos a mesa de sinuca, iremos considerar apenas a sua superfície. O formato oficial da mesa de sinuca com as marcações de linhas e a identificação das 6 caçapas e das 6 tabelas é mostrado na Figura 53.

Figura 53 – Mesa de sinuca com marcação oficial.



Fonte: CBBS, 2009.

A CBBS estabeleceu que o espaço mínimo ideal para instalar a mesa oficial brasileira é de 8,00 m x 6,50 m, mas pode-se fazer a instalação, sem maiores prejuízos, numa área de 6,00 m x 4,50 m.

Um detalhe crucial é que as mesas de sinuca devem ter uma borda emborrachada para que uma bola possa bater na borda quando chegar à extremidade da mesa e depois voltar para o interior da mesa. Além disso, as mesas de sinuca podem ter pé fixo ou regulável. Na Figura 54, apresentamos a mesa de sinuca usada durante as aulas.

Figura 54 – Mesa de sinuca usada nas aulas.

Fonte: CBBS, 2009.

Definição de alguns termos utilizados nos jogos de sinuca e que serão utilizados neste trabalho:

- Atacante ou jogador da vez – É aquele jogador que efetuará a jogada do momento. Esta ordem é definida antes do início da partida, por sorteio.
- Boca de caçapa – Espaço junto à caçapa, entre os bicos das tabelas ou muito próximo destes.
- Bola colada – Situação em que existe contato entre duas ou mais bolas paradas, ou entre bola(s) e tabela.
- Bola na boca – Bola parada na boca da caçapa, ou muito próximo dela.
- Caçapas – É como são chamados os 6 buracos existentes na sinuca.
- Carambolar – É a nomenclatura utilizada, quando um jogador consegue acertar outra bola com a tacadeira.

- Converter uma bola – É quando uma bola cai em uma das caçapas.
- Diamante - Cada uma das marcas em forma de losango situadas a intervalos regulares ao longo das tabelas, e que os jogadores utilizam como referência para calcular a trajetória das bolas.
- Efeito - A direção que tomam tanto a bola branca como as sucessivas bolas as que toca. Pode ser modificada se é golpeada com o taco em um lugar diferente de seu centro.
- Falta – A falta corresponde a alguma ocorrência em que o jogador que a comete sofre uma penalização. Existem vários tipos diferente de falta, mas as mais cometidas durante os jogos é a de suicidar, ou a de acertar outra bola que não seja a do grupo.
- Ponte - Posição do taco sobre a mão. A ponte clássica forma-se envolvendo a parte final da flecha com os dedos polegar e indicador formando um anel, enquanto os dedos médio, anular e mindinho se apoiam no tapete formando um tripé.
- Suicidar – É quando se é convertida a tacadeira.
- Tabela – São as laterais da mesa de sinuca que formam um retângulo.
- Tacadeira – É uma bola de tamanho maior que as demais, da cor branca.

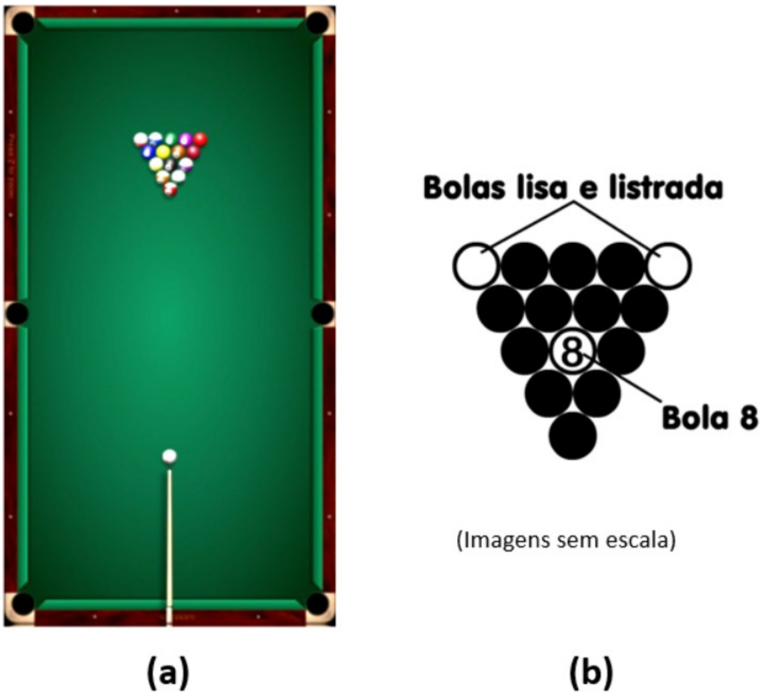
1.3.2.1 Modalidade Bola 8

A modalidade Bola 8 é uma das principais jogada no Brasil. Devido à sua regra simplificada, esta modalidade tem grande aceitação por sua boa jogabilidade. Essa modalidade não tem um sistema de pontuação e nem uma "bola da vez" que obrigatoriamente deverá ser visada. Nesta modalidade são utilizadas 16 bolas, sendo elas; 1 branca (a tacadeira), 2 vermelhas, 2 azuis, 2 verdes, 2 amarelas, 2 laranjas, 2 marrons, 2 roxas e 1 preta. As 15 bolas coloridas são enumeradas de 1 a 15, separadas de 1 a 7 para forma o grupo das bolas lisas (bolas "menores"), de 9 a 15 para forma o grupo das bolas listradas (bolas "maiores"), e a bola 8 conhecida como "bola do jogo". Cada jogador fica com um grupo de bolas. O objetivo do jogo é encaçapar a bola 8, porém, antes é preciso converter todas as bolas de seu grupo para ganhar a partida. O jogo terminará quando um dos jogadores atingir o número determinado de vitórias nas partidas, ou se um dos jogadores reconhecer a derrota no jogo (CBBS, 2009).

Segundo a CBBS (2009), as regras da modalidade Bola 8 no Brasil apresentam alguns princípios importantes e que respeitam normas internacionais e são complementadas pelo Regulamento Geral dos Jogos do Pool e pelo Regulamento dos Esportes de Bilhar, cuja integração e conhecimento são obrigatórios.

A modalidade Bola 8 tem uma regra no que se refere à organização das bolas na mesa no início da partida, que é referente a bola 8, a tacadeira e as bolas dos cantos inferiores do conjunto triangular que devem ter uma bola lisa e outra listrada. A Figura 55 esboça como deve ser esta organização.

Figura 55 – (a) Organização do início de partida na modalidade Bola 8 e (b) conjunto triangular.



Fonte: CBBS, 2009.

As regras da modalidade Bola 8 propostas pela Confederação Brasileira de Bilhar e Sinuca publicada em 2009 podem ser consultadas na integra no site: <https://snookercbbs.com/regras/>.

2 METODOLOGIA

Desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes no ensino da matemática no contexto da geometria, atualmente é um dos maiores desafios enfrentados pelos professores que trabalham esse conteúdo curricular junto aos estudantes.

Todavia, compete ao professor inovar em suas aulas, com o intuito de proporcionar ao aluno uma experiência mais agradável e produtiva, colocando-o como protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

Para isso, existem diversas metodologias centradas nos estudantes que podem tornar as aulas mais interativas, participativas e significativas. Elas são comumente chamadas de "metodologias ativas". Essas metodologias têm ganhado destaque, pois elas são estratégias de ensino que têm por objetivo incentivar os alunos a aprenderem de forma autônoma, dinâmica e participativa, por meio de problemas e situações reais, realizando tarefas que os estimulem a pensar além, tornando-se responsáveis pela construção do conhecimento (MÜLLER, 2017).

Vale salientar que, as metodologias ativas estão alinhadas com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e como modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, pois ambos deslocam o protagonismo da aprendizagem ao estudante, valorizando e propiciando uma aprendizagem prática, significativa, crítica e reflexiva.

Para aplicar a metodologia ativa, é fundamental que o professor atue como mediador, planejando estrategicamente suas aulas, incentivando a participação ativa dos alunos e promovendo a colaboração para uma compreensão sólida dos conceitos e, caso necessário, o professor deve ajustar as estratégias e os níveis de dificuldade das atividades e sempre que possível fornecer devolutivas para garantir o progresso dos alunos. Além disso, é fundamental criar um ambiente seguro e respeitoso, onde os estudantes possam expressar suas ideias e opiniões livremente, tanto em grupo quanto individualmente.

Neste trabalho, a metodologia ativa empregada se baseia na utilização do jogo de sinuca como ferramenta pedagógica para o ensino da geometria. A ideia é mostrar como o conteúdo de geometria contemplado na BNCC está presente na sinuca e como ele pode ser trabalhado através dos instrumentos e dos cenários propostos durante o jogo. Para isso, se faz necessário, apresentarmos um planejamento de sequência didática que nortearão nossos estudos.

Vale lembrar que, a sequência didática é um instrumento de planejamento no qual se organiza de forma metodologicamente sequencial a execução das atividades propostas, visando a aprendizagem. Sendo assim, a sequência proposta, neste estudo, apresenta 5 atividades atreladas ao propósito docente, que devem ter como prioridade, sempre, o aprendizado dos alunos.

2.1 Proposta da sequência didática

Antes de sugerir a sequência didática para subsidiar os professores no ensino de geometria plana no ensino médio, é importante entender o que é sequência didática e quais são as suas premissas.

De acordo com PERETTI e TONIN DA COSTA (2013):

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano.

Desse modo, uma sequência didática pode ser entendida também como um plano de aula mais delineado, contendo uma sequência de etapas metodológicas levando em consideração cada momento da aula, onde cada etapa está interligada, permitindo que o professor administre melhor o tempo de sua aula e, principalmente, que ele faça com que os conteúdos trabalhados façam sentido para os estudantes.

Nesse contexto, para uma melhor compreensão do nível de conhecimento consolidado pelos alunos antes, durante e após as aulas, adotaremos o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, já que esse modelo é um dos estudos mais relevante proposto na literatura para avaliar o ensino de geometria.

Nessa perspectiva, desenvolvemos a sequência didática usando a sinuca como ferramenta para o ensino do conteúdo de geometria plana contemplado na grade curricular do ensino médio da BNCC e, atrelado a isso, vamos revisar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais que foram desenvolvidas no ensino fundamental.

O trabalho foi realizado em uma escola de referência em ensino médio da rede pública estadual, localizada no município de Carpina-PE.

Iniciamos o planejamento da sequência didática em janeiro de 2024, precedendo a abertura do ano letivo da escola, no mês de fevereiro. O público-alvo foi de 4 turmas, com um total de 129 alunos, do 3º ano do ensino médio, da escola. As turmas foram divididas em turma controle (3A) e turmas experimentais (3B, 3C e 3D). Enquanto a turma controle, teve apenas a aplicação do método de ensino tradicional de geometria com aulas expositivas, as demais turmas foram submetidas a aplicação da sequência didática utilizando a sinuca para o ensino da geometria.

O trabalho foi realizado durante as aulas regulares das turmas, no turno integral, e ao longo do estudo, para o desenvolvimento das atividades pedagógicas, foram realizadas 5 aulas semanais de 50 minutos, totalizando 23 aulas, durante o período de 11 de março a 10 de maio de 2024, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Distribuição de aulas por conteúdo.

Aulas	**Conteúdos estudados**
1	Aplicação da avaliação diagnóstica antes das intervenções.
2	Introdução à sinuca (apenas turmas experimentais).
3 e 4	Noções e proposições primitivas de geometria.
5 a 10	Ângulos e polígonos.
11 a 16	Triângulos: congruência e semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo.
17 a 18	Coordenadas cartesianas no plano e distância entre dois pontos.
19 e 20	Noções básicas de vetores no plano.
21	Aplicação da avaliação diagnóstica após as intervenções.
22 e 23	Matemática recreativa na sinuca.

Fonte: Autor, 2024.

Durante o desenvolvimento das atividades, existiram situações comuns de um cotidiano escolar, tais como: eventos internos e externos na escola, avaliações internas e externas, palestras, feriados e outras ocorrências que justificam o período da aplicação da sequência didática ter se prolongado por mais tempo que o esperado.

Os estudantes foram submetidos a duas avaliações diagnósticas com 10 questões cada. Essas avaliações foram aplicadas antes e após as intervenções didáticas, e têm como objetivo nortear as ações a serem trabalhadas, de forma a fornecer subsídios e informações necessárias, para que os discentes fossem capazes de compreender o conteúdo estudado.

A avaliação aplicada antes das intervenções foi composta por questões sobre o conteúdo de geometria plana. Nesta etapa de aplicação, o objetivo principal foi investigar quais as principais dificuldades que os alunos apresentavam. No mesmo dia, os alunos foram submetidos a um questionário de autoavaliação com questões direcionadas à geometria para obter uma compreensão do perfil do aluno e sua percepção do grau de dificuldade das questões da avaliação diagnóstica.

A avaliação aplicada após as intervenções foi elaborada com o intuito de verificar quanto conhecimento os alunos absorveram durante as intervenções. Porém, nesta etapa, espera-se dos alunos respostas para as questões contendo conhecimento matemático apropriado. Neste momento, os alunos das turmas experimentais responderam um questionário composto por perguntas sobre as intervenções didáticas, onde avaliaram os conteúdos trabalhados, a qualidade e o conteúdo das atividades utilizando a sinuca como ferramenta pedagógica, além de avaliarem o grau de dificuldade das questões da avaliação diagnóstica, possibilitando assim, um respaldo sobre a eficácia das intervenções em seu aprendizado. Entretanto, os alunos da turma controle avaliaram apenas o grau de dificuldade das questões da avaliação diagnóstica.

Ao todo, os alunos tiveram 50 minutos para responder cada avaliação diagnóstica e o questionário.

Cabe ressaltar que, os conteúdos das intervenções foram previamente e detalhadamente planejados e selecionados, tomando como fundamento a experiência docente e o baixo rendimento dos estudantes no conteúdo de geometria em anos anteriores.

As avaliações aqui descritas, encontram-se nos Apêndices A e B desta dissertação.

É importante ressaltar que antes de iniciarmos a intervenção com a sequência didática, os alunos das turmas experimentais tiveram uma aula introdutória sobre a sinuca, pois é essencial que os estudantes compreendam os termos, regras e instrumentos usados no jogo de sinuca. Além disso, eles devem conhecer um pouco da história e das características desse esporte.

Estando consolidado esse estudo, torna-se possível à aplicação da sequência didática proposta neste trabalho.

Vale enfatizar que em cada atividade da sequência didática proposta a seguir estão especificados os conteúdos a serem trabalhados, a metodologia a ser aplicada, o tempo previsto da execução da aula, o público alvo, os recursos a serem utilizados, as habilidades da BNCC que estão sendo desenvolvidas, os objetivos da aula, os procedimentos metodológicos contendo o passo-a-passo da aula com a estimativa de duração de cada passo, a proposta de avaliação da aula, as referências bibliográficas utilizadas na construção da sequência e os comentários relevantes direcionados ao docente.

É válido ressaltar que, o professor tem a liberdade de fazer as adequações que entender necessárias na sequência didática proposta nesta dissertação, de acordo com a sua realidade.

Ao todo foram produzidas 5 atividades na sequência didática, cujos conteúdos estão distribuídos na seguinte ordem:

1. Noções básicas de geometria na sinuca;
2. Ângulos e polígonos na sinuca;
3. Trigonometria na sinuca;
4. Noções básicas de coordenadas cartesianas na mesa de sinuca;
5. Noções básicas de vetores e os movimentos das bolas de sinuca;

6.

Nas últimas duas aulas, foi realizado um torneio de sinuca na modalidade Bola 8. Essa atividade foi à culminância do trabalho e teve como objetivo integrar o ensino da geometria com a prática esportiva, promovendo a aplicação dos conhecimentos adquiridos em um contexto real de maneira lúdica e prática.

Após a implementação das cinco atividades da sequência didática sobre geometria aplicada à sinuca, cada turma participante do projeto, incluindo a turma controle, escolheu uma dupla para a competição. Durante o torneio, foi realizado um sorteio onde foram definidas quais duplas iriam se enfrentar no primeiro momento. Logo após, as duplas vencedoras se enfrentaram em uma partida final para decidir o vencedor.

As regras adotadas na competição foram as mesmas estabelecidas pela CBBS para a modalidade Bola 8.

2.1.1 Atividade 1

Noções básicas de geometria na sinuca

Essa atividade propõe uma forma de trabalhar os conceitos e proposições primitivas da geometria, a fim de revisar com os estudantes o que eles já estudaram, averiguar o que eles têm de aprendizado consolidado e dar uma base sólida para a compreensão dos entes primitivos da geometria por meio do jogo de sinuca.

Conteúdos: Conceitos e proposições primitivas de geometria; definições de segmento de reta e semirreta.

Metodologia: Utilizaremos o jogo de sinuca para demonstrar e explorar conceitos e proposições primitivas da geometria, oferecendo uma abordagem prática e interativa, a fim de facilitar a compreensão e aplicação dos conceitos geométricos de forma lúdica e envolvente.

Tempo de aula: 100 min.

Público alvo: 3ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, projetor multimídia, bolas, tacos e mesa de sinuca.

Habilidades BNCC: Os conceitos primitivos trabalhados foram alinhados com as habilidades da BNCC voltadas ao ensino da geometria.

Objetivos:

- Conhecer a origem da palavra geometria e como se relaciona com o que ela se propõe a estudar;
- Compreender o que são conceitos primitivos em geometria, quais são e suas características, fazendo uma analogia aos componentes da sinuca;
- Assimilar as proposições primitivas originadas dos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, relacionando aos elementos da sinuca;
- Entender os conceitos de segmento de reta e semirreta.

Procedimentos Metodológicos:

1. Inicialmente, o professor define geometria e em seguida explica o significado etimológico da palavra geometria. (5 min.)
2. O professor explica os conceitos primitivos de geometria. E logo após, faz vários questionamentos, deixando claro a relação entre ponto, reta e plano. (10 min.)

3. Uma vez consolidados os conceitos primitivos, o professor começa a construir com os estudantes todas as variantes que compõem as proposições primitivas. O professor explica os conceitos de pontos colineares e não colineares. Com isso, explica-se o postulado da existência. (5 min.)

4. O professor desenha agora um ponto e pergunta quantas retas podem passar por esse ponto. O professor pergunta, quantas retas distintas são possíveis passar por dois pontos. Depois, o professor desenha três pontos não colineares e pergunta quantos planos distintos passam por esses três pontos simultaneamente. Em seguida, explica-se o postulado da determinação. (5 min.)

5. Diante do exposto até o momento, o professor constrói o conceito de segmento de reta e o conceito de semirreta. (5 min.)

6. Com o intuito de vivenciar os conteúdos estudados, o professor direciona os estudantes para uma mesa de sinuca. Em seguida, o professor pede aos discentes que façam uma comparação entre os componentes da sinuca (bolas, taco e mesa) com os entes estudados. Em seguida, o professor debate a Questão 1 com os alunos. (20 min.)

7. Voltando a atenção para a reta, o professor auxilia os alunos na construção da definição segmento de reta e semirreta, usando as bolas de sinuca na explicação. (10 min.)

8. O professor treina os alunos a realizarem tacadas para melhorar a precisão a partir do conceito de pontos colineares. (20 min.)

9. O professor conclui a aula com um resumo e aplicação de lista de exercícios (Apêndice C). (20 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes e através da resolução do exercício proposto.

Referências:

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, 9ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. Coleção PROFMAT, 09 – Rio de Janeiro: SBM, 2013, 442p.

Comentários:

1. No item 6 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor colocar a bola branca sobre a mesa e pedir aos discentes que façam uma comparação com um dos entes estudados

(o ponto). Dando continuidade, o professor pode formar uma linha reta com bolas coloridas e pedir aos alunos que façam uma comparação com mais um ente primitivo estudado (a reta). O professor pode aproveitar para relacionar os conceitos de pontos colineares e não colineares, tirando uma bola da reta e pondo-a em outro lugar da mesa. Para dar sequência, o professor pode organizar bolas coloridas em um formato quadrado e questionar os alunos mais uma vez. "Qual ente se assemelha a figura formada pela organização das bolas?". Espera-se que os alunos respondam o plano. Além disso, o professor pode questionar do que é formada a reta e o plano. Espera-se que eles respondam pontos. Para isso, o professor pode usar três configurações com bolas sobre a mesa de sinuca, conforme ilustrada na Figura 56.

Figura 56 – Mesa de sinuca com a representação de ponto, reta e plano usando bolas.

Fonte: Autor, 2024.

2. No item 8 do procedimento metodológico, recomenda-se ao professor usar um posicionamento colinear entre a bola branca, uma bola colorida e a caçapa, em condições ideais, com o intuito de converter a bola colorida, conforme ilustrado na Figura 57.

Figura 57 – Posicionamento colinear entre a bola branca, uma bola colorida e a caçapa.

Fonte: Autor, 2024.

2.1.2 Atividade 2

Ângulos e polígonos na sinuca

Essa atividade propõe recapitular o estudo de ângulos e polígonos, suas classificações e propriedades e em seguida consolidar a aprendizagem através da sinuca de forma prática e visual.

Conteúdos: Ângulos e polígonos.

Metodologia: Utilizaremos a sinuca como recurso didático para o ensino de ângulos e polígonos, explicando os conceitos básicos de ângulos e polígonos e suas características, além de utilizar a superfície da mesa de sinuca para demonstrar as classificações dos ângulos e de alguns polígonos com o intuito de proporcionar aos alunos um aprendizado interativo e significativo conectado ao mundo real.

Tempo de aula: 300 minutos (dividido em 2 momentos de 150 minutos cada).

Público alvo: 3ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, projetor multimídia, transferidor, bolas, tacos e mesa de sinuca.

Habilidades BNCC:

Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais; verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal; reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e classificá-los em regulares e não regulares e demonstrar propriedades de quadriláteros.

Objetivos:

- Compreender a definição de ângulo e polígono e suas características;
- Assimilar, na prática, o que é um ângulo agudo, obtuso, reto e raso;
- Entender e diferenciar os conceitos de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares;
- Compreender e aplicar a relação existente entre ângulos opostos pelo vértice e definir ângulos congruentes;
- Aprender todas as características peculiares dos ângulos formados por duas retas paralelas cortados por uma transversal, identificando os pares de ângulos que são congruentes e os que são suplementares;
- Diferenciar polígonos côncavos de polígonos convexos;

- Entender como se nomeia um polígono;
- Identificar todos os elementos de um polígono e apreender o conceito de polígonos regulares.
- Aprender conceitos básicas de quadriláteros.

Procedimentos Metodológicos:

1º momento - Ângulos

1. O professor inicia a aula perguntando aos alunos se eles sabem definir o que é ângulo. Após ouvir as respostas, o professor define ângulo e ilustra no quadro. (10 min.)

2. O professor mostra vários exemplos de ângulos presentes no cotidiano dos alunos. (5 min.)

3. O professor pergunta aos estudantes se eles sabem quais as unidades utilizadas para medir ângulos. Após ouvir as respostas, o professor fala sobre as unidades de grau, radiano e grado e em seguida, faz a correspondência entre elas. (10 min.)

4. O professor entrega um transferidor para cada estudante e faz um breve resumo das características desse instrumento, e mostra como se traça um ângulo utilizando-o. Depois, solicita que os alunos tracem os ângulos 60°, 90°, 135° e 180°. (15 min.)

5. Após os alunos traçarem os ângulos, o professor classifica o ângulo de acordo com a sua medida. Em seguida, o professor pede para os alunos classificarem os ângulos traçados no item 4. (15 min.)

6. O professor explica o conceito de ângulos complementares e suplementares. (5 min.)

7. Partindo dos conceitos de ângulos complementares e suplementares, o professor define ângulos adjacentes e congruentes. Em seguida, fala sobre bissetriz de um ângulo. (10min.)

8. Aproveitando a temática ângulo, o professor recorda o conceito de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares e depois, define ângulos opostos pelo vértice e qual a relação entre eles. (10min.)

9. O professor explica o teorema da existência da paralela e suas propriedades. (10 min.)

10. Com a intenção de consolidar a aprendizagem dos conteúdos estudados, o professor direciona os estudantes para uma mesa de sinuca. Sem demora, o professor pede aos alunos para classificar os ângulos em relação à medida, usando os elementos da sinuca e através de jogadas. (15 min.)

11. Posteriormente, o professor usa o taco e a mesa para exemplificar ângulos complementares e suplementares. (5 min.)

12. Dando continuidade, o professor explorar o conceito de ângulo oposto pelo vértice e o conceito de ângulos congruentes usando dois tacos e a mesa de sinuca e em seguida, pede aos alunos identificarem os pares de ângulos opostos pelo vértice. Depois, pede para identificarem os pares de ângulos suplementares. (10 min.)

13. Em seguida, o professor mostra de forma concreta e interativa o teorema da existência da paralela observando os ângulos em pares, usando para isso, as tabelas paralelas da mesa de sinuca e um taco. (5 min.)

14. Depois de identificados os ângulos em seus devidos pares, o professor explica as relações existentes entre os pares de ângulos alternos, correspondentes e colaterais. (5 min.)

15. O professor conclui o primeiro momento com um resumo e aplicação da parte inicial da lista de exercícios (Apêndice D). (20 min.)

2º momento – Polígonos

16. O professor inicia o segundo momento perguntando aos alunos se eles conseguem dar exemplos de figuras planas do cotidiano, em seguida, o professor explica ou relembra o que são figuras planas. (5 mim.)

17. O professor define polígono e descreve os elementos que formam os polígonos. (10 mim.)

18. O professor explica à relação das diagonais de um polígono com o seu número de lados. (10 mim.)

19. Na sequência, o professor conceitua polígono convexo, distinguindo de polígono côncavo. (5 mim.)

20. Dando continuidade a aula, o professor classifica polígono quanto ao seu número de lados e explica como se nomeia. (10 mim.)

21. Posteriormente, o professor também classifica os polígonos como regulares e irregulares, dando a definição de cada caso. (5 mim.)

22. O professor explana sobre a relevância do estudo dos triângulos e quadriláteros, avisa que mais a diante tratará sobre o estudo do triângulo. (5 mim.)

23. O professor define quadriláteros, dando ênfase aos quadriláteros notáveis. (10mim.)

24. O professor define a expressão para obter o perímetro de um polígono e para calcular a área do retângulo, do quadrado, do losango e do trapézio. (10 mim.)

25. Com a intenção de solidificar a aprendizagem dos conteúdos estudados, o professor direciona os estudantes à mesa de sinuca. Imediatamente, o professor pede aos alunos para calcular o perímetro e a área da mesa de sinuca. (5 mim.)

26. Ao verificar a existência de uma proporção de 2:1 da tabela lateral e a tabela inferior/superior da mesa de sinuca, o professor pergunta aos estudantes o nome do quadrilátero formado pela superfície da mesa e a soma dos ângulos interno do quadrilátero de interesse, em seguida, pergunta o nome do quadrilátero formado após dividir a mesa usando um segmento que vai da caçapa 2 até a caçapa 5. (5 mim.)

27. O professor constrói a solução da Questão 2 com a participação dos alunos. (25 min.)

28. O professor proporciona um momento de jogo de sinuca em dupla. (25 min.)

29. Para finalizar, o professor conclui a aula com um resumo e continua à lista de exercícios (Apêndice D). (20 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução da questão solicitada no decorrer de toda a aula. Além de avaliar a habilidade dos alunos na aplicação dos conceitos durante o jogo e na resolução da lista de atividade com o intuito de verificar a compreensão teórica de ângulos e polígonos alcançada pelos alunos.

Referências:

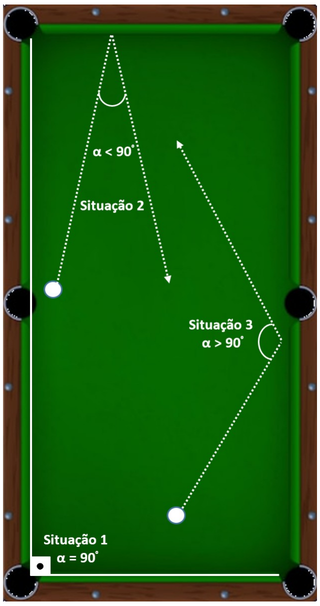
DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, 9ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. Coleção PROFMAT, 09 – Rio de Janeiro: SBM, 2013, 442p.

Comentários:

1. No item 10 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor propor jogadas usando a tabela superior para indicar a formação de ângulo agudo, a tabela lateral para indicar a formação de ângulo obtuso e as tabelas inferior e lateral ou superior e lateral para indicar a formação de ângulo reto, conforme a Figura 58.

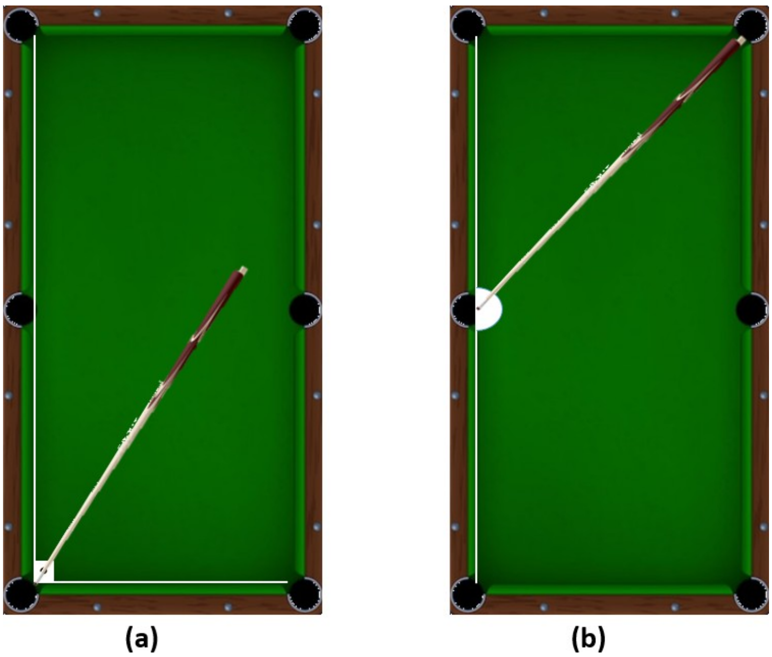
Figura 58 – Classificação dos ângulos na mesa de sinuca.



Fonte: Autor, 2024.

2. No item 11 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor usar caçapas como vértice, as tabelas como segmentos que formam os ângulos de 90° e 180° e o taco como segmento que corta esses ângulos, conforme ilustrado na Figura 59.

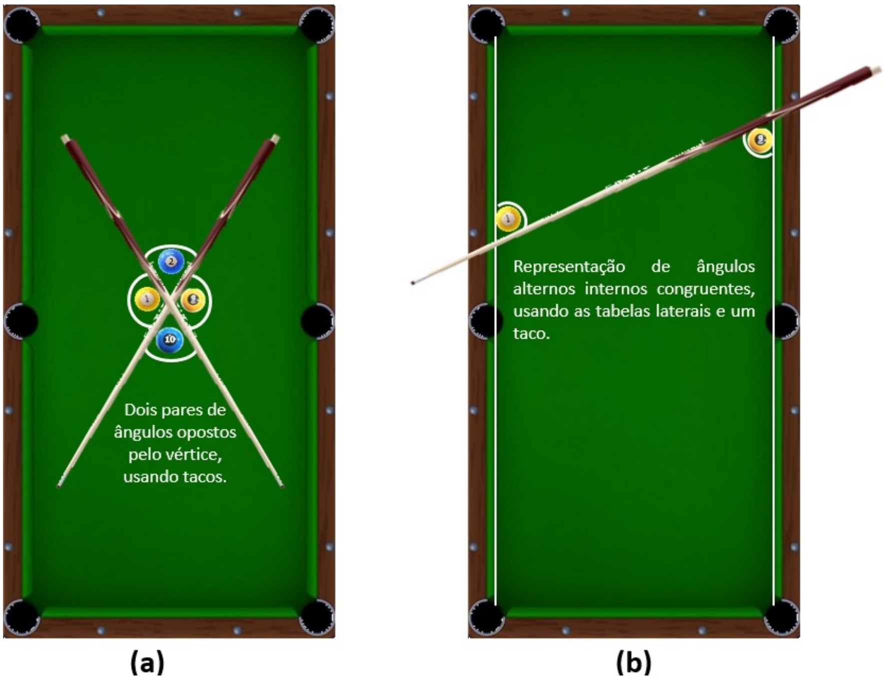
Figura 59 – Representação de ângulos complementares (a) e suplementares (b) na sinuca.



Fonte: Autor, 2024.

3. Nos itens 12, 13 e 14 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor usar as configurações (a) e (b) da Figura 60 para ilustrar o conceito de ângulos opostos pelo vértice e o teorema da existência da paralela, respectivamente, usando bolas das mesmas cores para indicar a correlação entre ângulos.

Figura 60 – Representação de ângulos O.P.V (a) e alternos internos (b) na sinuca.



Fonte: Autor, 2024.

2.1.3 Atividade 3

Trigonometria na sinuca

Essa atividade propõe um estudo sobre triângulos, buscando fixar a base desse assunto, pois é primordial para o estudo da geometria euclidiana no ensino médio. Nessa atividade, serão abordadas em três momentos: à definição de triângulo, suas classificações e propriedades; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo, que serão fixadas através de atividades práticas e interativa usando a sinuca como ferramenta de aprendizagem.

Conteúdos: Triângulos: congruência e semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Metodologia: Utilizaremos o jogo sinuca e seus elementos como recurso didático para o ensino da trigonometria a partir de problemas propostos.

Tempo de aula: 300 minutos (dividido em 3 momentos de 100 minutos cada).

Público alvo: 3ª Série - Ensino Médio.

Recursos: Pincel, quadro branco, projetor multimídia, bolas, tacos e mesa de sinuca.

Habilidades BNCC: Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°; reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes; resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras e aplicar as relações métricas, incluindo os conceitos de seno, cosseno e tangente ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetivos:

- Identificar um triângulo através de suas características;
- Compreender e pôr em prática a classificação de um triângulo de acordo com as medidas de seus lados e de acordo com as medidas dos ângulos internos;
- Apreender de forma prática que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
- Entender o que são triângulos congruentes;
- Reconhecer quando dois triângulos são semelhantes;
- Reconhecer e identificar os casos de semelhança e de congruência de triângulos.

- Identificar um triângulo retângulo e seus lados;
- Entender e aplicar na prática o teorema de Pitágoras;
- Aplicar as relações métricas, incluindo os conceitos de seno, cosseno e tangente.

Procedimentos Metodológicos:

1º momento – Triângulo: definição, classificação, congruência e semelhança

1. No início da aula, o professor define triângulo e apresenta exemplo no cotidiano. (5 min.)

2. Dando continuidade à aula, o professor classifica o triângulo quanto às medidas dos seus ângulos internos e dos seus lados. (10 min.)

3. O professor demonstra aos alunos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

4. O professor define triângulos congruentes. (5 min.)

5. Logo depois, o professor determina os casos de congruência de triângulos para os estudantes. (15 min.)

6. Após a explicação dos casos de congruência de triângulos, o professor introduz o conceito de semelhança de triângulos. (5 min.)

7. Dessa forma, o professor explica os casos de semelhança de acordo com a definição de semelhança de triângulos. (10 min.)

8. Com a finalidade de concretizar a aprendizagem dos conteúdos estudados, o professor leva os estudantes à mesa de sinuca. Antes de tudo, o professor organiza as 15 bolas coloridas no formato triangular usado no início de partida na modalidade Bola 8, conforme mostrado na Figura 55 desse trabalho e pede aos alunos para classificar esse triângulo quanto aos ângulos internos e aos lados. (5 min.)

9. Posteriormente, o professor traça jogadas usando o conceito de congruência e semelhança de triângulos, a fim de aperfeiçoar as tacadas. (15)

10. O professor proporciona uma ocasião de jogo em dupla na modalidade Bola 8. (20 min.)

11. O professor conclui o primeiro momento com um resumo e aplicação da parte inicial da lista de exercícios (Apêndice E). (10 min.)

2º momento – Teorema de Pitágoras

12. Ao iniciar o segundo momento, o professor desenha um triângulo retângulo e explica que os lados de um triângulo retângulo possuem nomes, sendo os lados que formam o ângulo reto, chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto, chamado de hipotenusa. Em seguida, explica que a hipotenusa é o lado maior do triângulo retângulo. (5 min.)

13. O professor desenha ou projeta triângulos retângulos em várias posições e identifica com os alunos os catetos e a hipotenusa de cada um deles. (5 min.)

14. O professor pergunta se os estudantes lembram do teorema de Pitágoras e o que ele diz. Com base nas respostas, o professor reforça que esse teorema só pode ser aplicado em triângulos retângulos e começa a demonstrar o teorema. (10 min.)

15. Diante disso, o professor propõe a Questão 3 sobre semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras aplicada à sinuca e constrói a solução com a participação dos alunos. (25 min.)

16. Ao solucionar a Questão 3, o professor discute com os estudantes a Questão 4, que contempla todo conteúdo estudo nesta atividade até o presente momento, resolvendo todos os itens. (35 min.)

17. O professor conclui o segundo momento com um resumo e continua à lista de exercícios (Apêndice E). (20 min.)

3º momento – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

18. Ao começar o terceiro momento, o professor revisa o conceito de triângulo retângulo. (5 min.)

19. O professor desenha um triângulo retângulo e identifica, em caráter de revisão, os catetos e a hipotenusa. (5 min.)

20. Em seguida, o professor introduz o conceito das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. (10 min.)

21. O professor calcula as razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45° e 60° em triângulos retângulos dados. (10 min.)

22. O professor utiliza os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° para encontrar medidas desconhecidas no triângulo retângulo, dada a medida de um lado conhecida. (10 min.)

23. O professor propõe a Questão 5 e utiliza os conhecimentos sobre relações trigonométricas aplicada à sinuca para construir a solução em parceria com os alunos. (20 min.)

24. Com a finalidade de consolidar a aprendizagem dos conteúdos estudados, o professor leva os estudantes à mesa de sinuca e proporciona uma ocasião de jogo em dupla na modalidade Bola 8. (20 min.)

25. Para finalizar, o professor conclui a aula com um resumo e à lista de exercícios (Apêndice E). (20 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula. Além de avaliar a habilidade dos alunos na aplicação dos conceitos durante o jogo e na resolução da lista de atividade com o intuito de verificar a compreensão teórica de congruência e semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo alcançada pelos alunos.

Referências:

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, 9ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. Coleção PROFMAT, 09 – Rio de Janeiro: SBM, 2013, 442p.

Comentários:

1. No item 9 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor traçar jogadas com a tabela, a fim de obter triângulos congruentes contendo a caçapa que se desejada converter a bola como um dos vértices. Para isso, observemos as seguintes etapas. Lembrando que essas jogadas são úteis quando não for possível realizar uma tacada direta.

Etapa 1 - Usar o taco para medir o segmento AB e BC, conforma a etapa 1 da Figura 61;

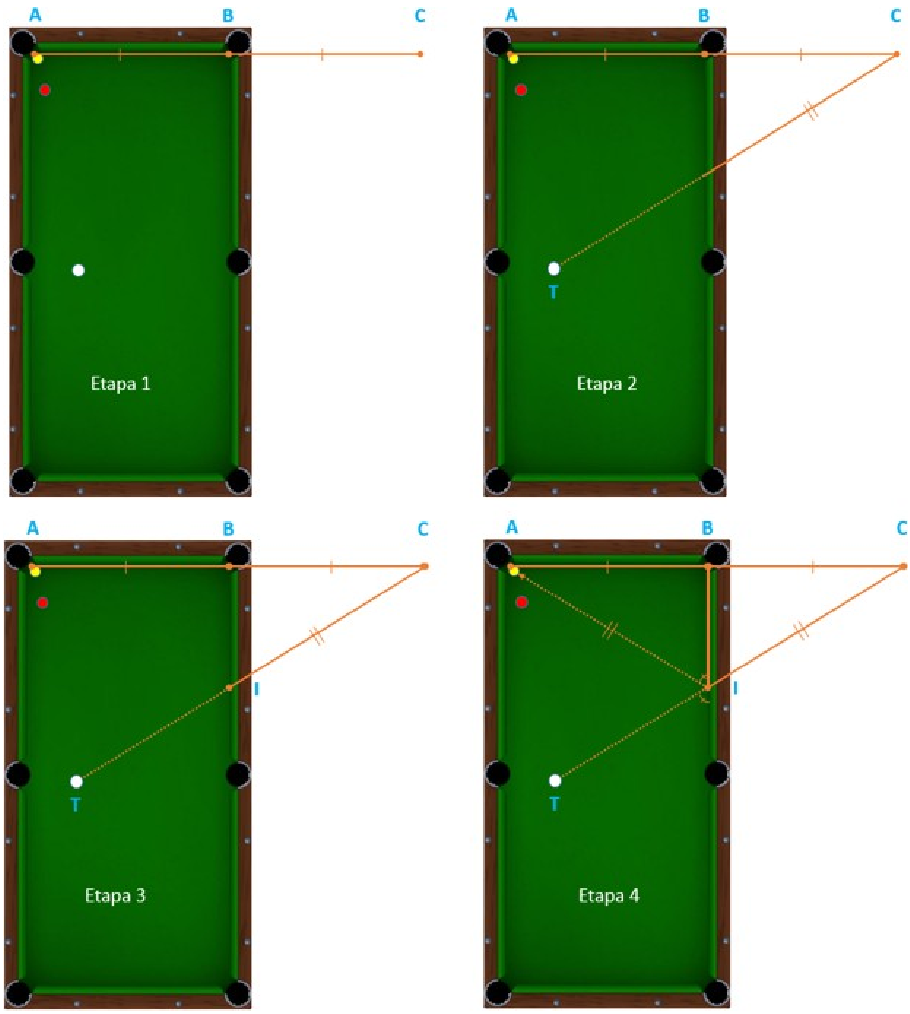
Etapa 2 - Em seguida, traçar um segmento do ponto C até a bola tacadeira (T), conforma a etapa 2 da Figura 61;

Etapa 3 - Depois, marque um ponto I colinear ao segmento CT na tabela, conforma a etapa 3 da Figura 61;

Etapa 4 – Traça um segmento do ponto I ao ponto A e do ponto I ao ponto B. Observe que serão formados dois triângulos retângulos congruentes. Em consequência disso, podemos traçar a trajetória da tacadeira em direção ao ponto A (caçapa onde se encontra a bola que pretendemos converter), conforma a etapa 4 da Figura 61.

Considere uma tacada sem efeito onde os ângulos formados pela trajetória da tacadeira com a tabela sejam iguais tanto na chegada quanto na saída. Veja o esquema na Figura 61.

Figura 61 – Ilustração da jogada usando congruência de triângulos.



Fonte: Autor, 2024.

2.1.4 Atividade 4

Noções básicas de coordenadas cartesianas na mesa de sinuca

A seguinte atividade propõe o estudo de localização de pontos no plano cartesiano e o cálculo da distância entre dois pontos no plano utilizando a mesa de sinuca como material didático.

Conteúdos: Coordenadas cartesianas no plano e distância entre dois pontos.

Metodologia: Utilizaremos o jogo sinuca e seus elementos como recurso didático para ensinar aos alunos a localizar pontos no plano cartesiano e a determinar a distância entre dois pontos a partir de situações propostos.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 3ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, projetor multimídia, bolas, tacos e mesa de sinuca.

Habilidades BNCC: Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano e determinar a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano.

Objetivos:

- Garantir que os alunos sejam capazes de identificar e associar pares ordenados no plano cartesiano;
- Desenvolver habilidades de raciocínio lógico através da prática de localização de pontos e interpretação de coordenadas;
- Calcular a distância entre dois pontos no plano;
- Incentivar a colaboração e o pensamento crítico entre os alunos durante atividades em grupo.

Procedimentos Metodológicos:

1. No início da aula, o professor pergunta aos alunos o que eles lembram sobre coordenadas cartesianas no plano. (5 min.)

2. Prontamente, o professor apresenta o plano cartesiano e suas características. (5 min.)

3. Em seguida, o professor apresenta os quadrantes e suas particularidades. (5 min.)

4. Dando continuidade à aula, o professor retoma o conceito de ponto e demonstra como cada ponto no plano pode ser descrito por um par de coordenadas (x, y). (5 min.)

5. O professor dá vários exemplos de localização de pontos no plano cartesiano e logo depois, pede aos alunos para localizar alguns pontos propondo a Questão 6. (15 min.)

6. Diante disso, o professor explica que é possível calcular a distância entre dois pontos no plano e demonstra como a distância pode ser calculada. (10 min.)

7. Com a finalidade de concretizar a aprendizagem dos conteúdos estudados, o professor leva os alunos à mesa de sinuca e pede para eles considerarem as bolas como ponto na mesa de sinuca. Com isso, o professor pede aos alunos que localizem os pares ordenados correspondentes a posição de cada bola, tomando como referência os diamantes e as caçapas. (10 min.)

8. Posteriormente, o professor pede para os alunos calcular a distância entre duas bolas na mesa de sinuca, tomando como referência os diamantes e as caçapas. (10 min.)

9. O professor proporciona uma ocasião de jogo em dupla na modalidade Bola 8. (20 min.)

10. Para finalizar, o professor conclui a aula com um resumo e à lista de exercícios (Apêndice F). (15 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula. Além de avaliar a habilidade dos alunos na aplicação dos conceitos durante o jogo e na resolução da lista de atividade com o intuito de verificar a compreensão teórica de localização de pontos no plano cartesiano e de distância entre dois pontos.

Referências:

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Analítica, Volume 7, 6ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2013.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. Geometria Analítica. Um Tratamento Vetorial. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

Comentários:

1. No item 7 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor colocar a origem das posições alternando entre as caçapas, com o objetivo de representar todos os quadrantes.

2.1.5 Atividade 5

Noções básicas de vetores e os movimentos das bolas de sinuca

---

A seguinte atividade propõe o estudo das noções básicas de vetores utilizando a mesa de sinuca como material didático.

Conteúdos: Noções básicas de vetores no plano.

Metodologia: Utilizaremos o jogo sinuca e seus elementos como recurso didático para ensinar aos alunos os conceitos básicos de vetores no plano.

Tempo de aula: 100 minutos.

Público alvo: 3ª Série - Ensino Médio

Recursos: Pincel, quadro branco, projetor multimídia, bolas, tacos e mesa de sinuca.

Habilidades BNCC: O estudo de vetores não está contemplado na BNCC, porém seu conhecimento é de fundamental importância para a formação básica dos alunos. Por isso, vamos fazer um estudo das noções básicas de vetores nessa atividade.

Objetivos:

- Compreender e definir o conceito de segmento orientado;
- Representar graficamente segmentos orientados, identificando os pontos de origem e extremidade;
- Definir vetores partindo do conceito de segmento orientado;
- Compreender e definir a direção, sentido e o módulo (norma) de um vetor;
- Representar graficamente vetores, indicando claramente a direção, o sentido e o módulo.

Procedimentos Metodológicos:

1. No início da aula, o professor recorda o conceito de segmento de reta com os alunos. (5 min.)

2. Prontamente, o professor explica o conceito de segmento orientado e suas características. (10 min.)

3. Em seguida, o professor apresenta a definição de vetores. (5 min.)

4. Dando continuidade à aula, o professor explica o conceito de direção, sentido e módulo. (10 min.)

5. O professor dá vários exemplos da aplicação do conceito de vetores na matemática, física e engenharia e logo depois, discute com os alunos a Questão 7. (10 min.)

6. Diante disso, o professor leva os alunos à mesa de sinuca e propõe um estudo de vetores na prática com o objetivo de consolidar a aprendizagem dos conteúdos estudados. (20 min.)

7. O professor proporciona uma ocasião de jogo em dupla na modalidade Bola 8 para colocar o conhecimento estudado em prática. (20 min.)

8. Para finalizar, o professor conclui a aula com um resumo e à lista de exercícios (Apêndice G). (20 min.)

Avaliação:

A avaliação será feita levando em consideração a participação dos estudantes, individualmente e em dupla, e através da resolução das questões solicitadas no decorrer de toda a aula. Além de avaliar a habilidade dos alunos na aplicação dos conceitos durante o jogo e na resolução da lista de atividade com o intuito de verificar a compreensão teórica das noções básicas de vetores.

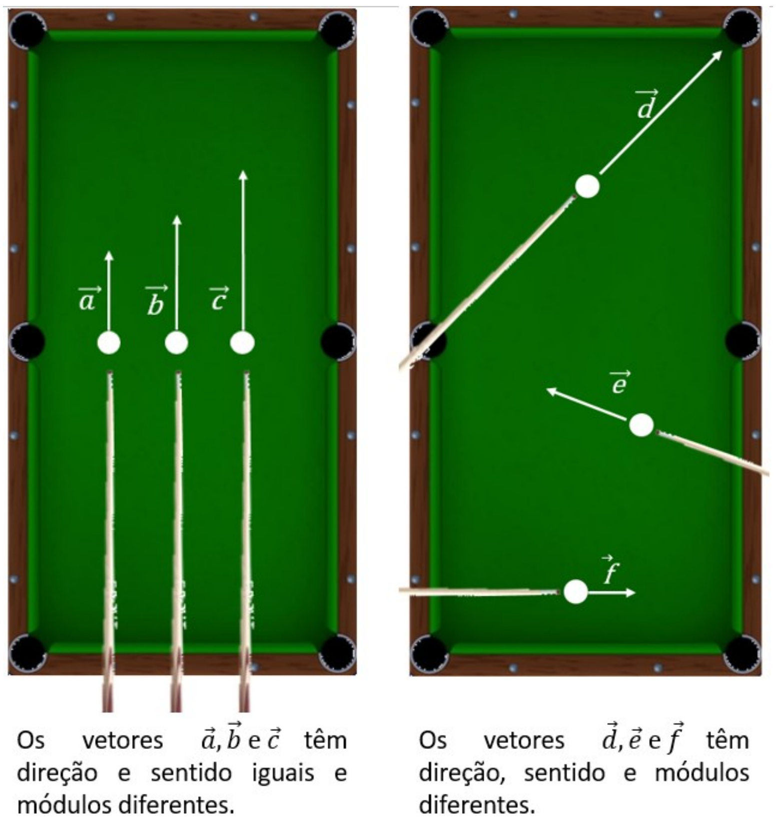
Referências:

BOULOS, P.; CAMARGO, I. Geometria Analítica. Um Tratamento Vetorial. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

Comentários:

1. No item 6 do procedimento metodológico, sugere-se ao professor treinar os alunos realizando tacadas com diferentes situações, a fim de evidenciar na prática os conceitos de direção, sentido e módulo por meio da sinuca, conforme ilustrado na Figura 62.

Figura 62 – Tacadas representadas por vetores.



Fonte: Autor, 2024.

2.1.6 Questões propostas na sequência didática

Nesta subseção, mostramos as questões aplicadas durante as atividades da sequência didática com suas respectivas soluções.

Questão 1: Quando pensamos em um jogo de sinuca, logo nos vem à mente a mesa, as bolas e o taco, pois estes são os elementos básicos da sinuca. Além de representar uma atividade lúdica, uma partida de sinuca pode ser uma bela aula de geometria plana para os mais interessados em melhorar suas jogadas. Para isso, é essencial conhecer os componentes básicos da sinuca e da geometria para entender melhor essa relação. Sendo assim, associe corretamente as colunas, relacionando os componentes da sinuca, mesa, bola e taco, aos conceitos primitivos da geometria, ponto, reta e plano.

Coluna I – componentes da sinuca

(a) Mesa;

(b) Bola;

(c) Taco.

Coluna II – conceitos primitivos

( ) O ponto é um conceito primitivo e, como tal, não se define. É representado pelas letras maiúsculas do alfabeto latino. Como toda a Geometria é baseada no ponto, as figuras geométricas são formadas a partir de conjuntos deles.

( ) A reta também é um conceito primitivo que não se define, podemos conceituar retas como conjuntos de pontos que são considerados linhas infinitas sem curvas com uma dimensão. A reta é representada pelas letras latinas minúsculas.

( ) O plano também é um conceito primitivo, logo não se define, mas podemos dizer que é um elemento primitivo com infinitos pontos de forma que não haja espaço entre eles, formando duas dimensões. O plano é representado pelas letras gregas minúsculas.

Solução:

Podemos associar o ponto, a reta e o plano com a bola, o taco e a mesa de sinuca, respectivamente, devido às suas propriedades geométricas e físicas que se correlacionam diretamente:

(b) Ponto e Bola: A bola de sinuca pode ser vista como um ponto em termos de sua posição na mesa.

(c) Reta e Taco: O taco de sinuca, utilizado para empurrar a bola, pode ser visto como uma reta na direção em que o jogador deseja que a bola se mova.

(a) Plano e Mesa: A mesa de sinuca é um exemplo de uma parte de um plano. Ela fornece o plano sobre o qual as bolas se movem.

Questão 2:

Carlos é o responsável pela administração de um novo clube de sinuca que está sendo inaugurado. O clube deseja oferecer aos seus membros a melhor experiência possível, instalando mesas usadas em diferentes campeonatos para atender a todos os gostos e modalidades de jogo. O clube possui uma área retangular com 20 metros de comprimento por 10 m de largura e planeja instalar:

- Mesas oficiais de snooker com medidas de 3,66 metros de comprimento por 1,83 metros de largura.

- Mesas oficiais de sinuca com medidas de 2,84 metros de comprimento por 1,42 metros de largura.

a) Calcule o perímetro da mesa de snooker e de sinuca, respectivamente.

b) Calcule a área retangular da mesa de snooker e de sinuca, respectivamente.

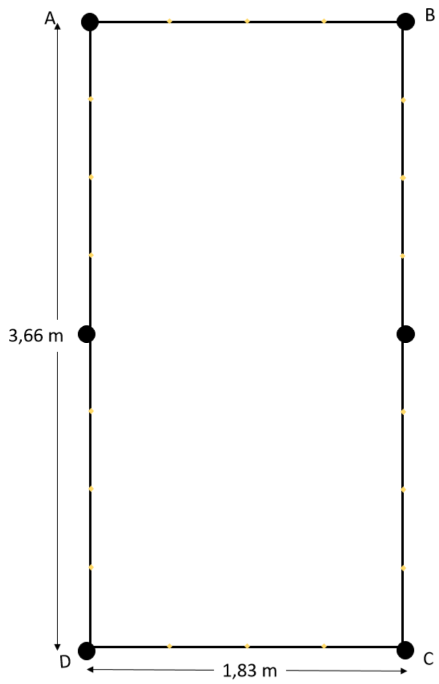
c) Qual o máximo de mesas de snooker daria para colocar nesse clube, caso Carlos desistisse de instalar o outro tipo de mesa. Considere na instalação, a parede de 20 metros do clube paralela a tabela lateral da mesa e uma distância mínima de 2 metros entre mesas e entre mesa e parede.

Solução

a) Calcule o perímetro da mesa de snooker e de sinuca, respectivamente.

Perímetro é o comprimento do contorno de um polígono, portanto, para calcular o perímetro basta somar a medida de todos os lados desse polígono (Figura 63). O perímetro da mesa de snooker no formato de retângulo ABCD é

Figura 63 – Representação de uma mesa de snooker com suas medidas.



Fonte: Autor, 2024.

$$P = AB + BC + CD + DA$$

Nota-se que, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$. Logo, podemos escrever o perímetro de um retângulo da seguinte forma: $P = 2AB + 2BC$. Sendo assim, o perímetro é igual a 10,98 m.

Analogamente, obtermos o perímetro da mesa de sinuca igual a 8,52 m, respectivamente.

b) Calcule a área retangular da mesa de snooker e de sinuca, respectivamente.

Para calcular a área de uma mesa de sinuca retangular, usa-se a fórmula básica para a área de um retângulo. A fórmula é: Área = Comprimento x Largura.

A mesa de sinuca de snooker tem um comprimento de 3,66 metros e uma largura de 1,83 metros, a área é aproximadamente a 6,70 m^2.

Analogamente, obtermos a área da mesa de sinuca de aproximadamente 4,03 m^2.

c) Qual o máximo de mesas de snooker daria para colocar nesse clube, caso Carlos desistisse de instalar o outro tipo de mesa. Considere na instalação, a parede de 20 metros do clube paralela a tabela lateral da mesa e uma distância mínima de 2 metros entre mesas e entre mesa e parede.

Para determinar o número máximo de mesas de snooker que podem ser colocadas em um clube com dimensões de 20 m x 10 m, precisamos levar em conta as dimensões das mesas e as distâncias mínimas necessárias entre as mesas e entre a mesa e a parede.

Dimensões do clube: 20 m x 10 m

Dimensões da mesa de snooker: 3,66 m x 1,83 m

Distância mínima entre mesas 2 metros

Distância mínima entre mesa e parede: 2 metros

Verificando o comprimento - mesas incluindo espaço livre:

Situação 1: 2 metros da parede até a borda da 1ª mesa + 3,66 metros da 1ª mesa + 2 metros livre da borda do outro lado = 3,66 m + 4 m = 7,66 m

Situação 2: Situação 1 + 3,66 metros da 2ª mesa + 2 metros livre da borda do outro lado = 7,66 m + 3,66 m + 2 m = 13,32 m

Situação 3: Situação 2 + 3,66 metros da 3ª mesa + 2 metros livre da borda do outro lado = 13,32 m + 3,66 m + 2 m = 18,98 m.

Isso significa que podemos colocar 3 mesas ao longo do comprimento de 20 m, deixando um espaço livre adicional de 1,02 m, o que não é suficiente para mais uma mesa.

Verificando a largura - mesas incluindo espaço livre:

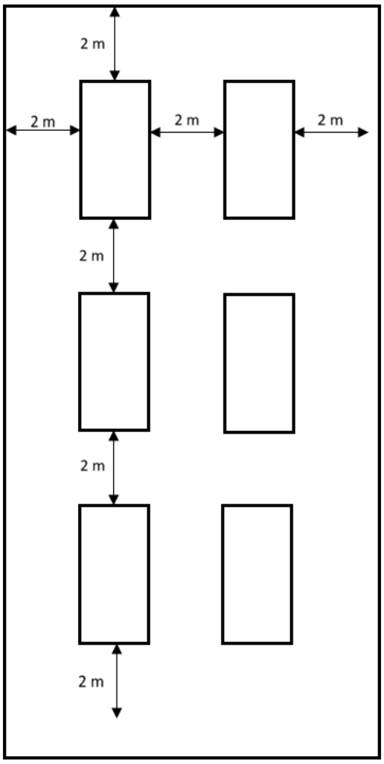
Situação 1: 2 metros da parede até a borda da 1ª mesa + 1,83 metros da 1ª mesa + 2 metros livre da borda do outro lado = 1,83 m + 4 m = 5,83 m

Situação 2: Situação 1 + 1,83 metros da 2ª mesa + 2 metros livre da borda do outro lado = 5,83 m + 1,83 m + 2 m = 9,66 m

Isso significa que podemos colocar 2 mesas ao longo da largura de 10 m, deixando um espaço livre adicional de 0,34 m, o que não é suficiente para mais uma mesa.

Com base nos cálculos, o número máximo de mesas que pode ser colocado no clube é 6, considerando a configuração proposta, as dimensões da mesa e as distâncias mínimas necessárias, conforme a Figura 64.

Figura 64 – Configuração das mesas no clube.



Fonte: Autor, 2024.

Questão 3:

Durante uma partida de sinuca na modalidade bola 8, restam na mesa apenas a bola 8, a bola 15 do adversário e a bola tacadeira posicionada na "boca" da caçapa 1. Para não sofrer uma falta, o jogador da vez precisa pelo menos acertar a bola 8, que está colada no centro da tabela superior. Entretanto, uma tacada direta não será possível, já que as bolas 8, 15 e tacadeira estão colineares. Sabendo que a mesa de sinuca é um retângulo com área de jogo de dimensões de 2 m x 1 m e que o jogador acertou a bola 8, após realizar uma jogada usando apenas a tabela superior esquerda. Considere a jogada sem efeito, as bolas como pontos e a marcação oficial da mesa de sinuca. Sendo assim:

a) Esboce a situação proposta.

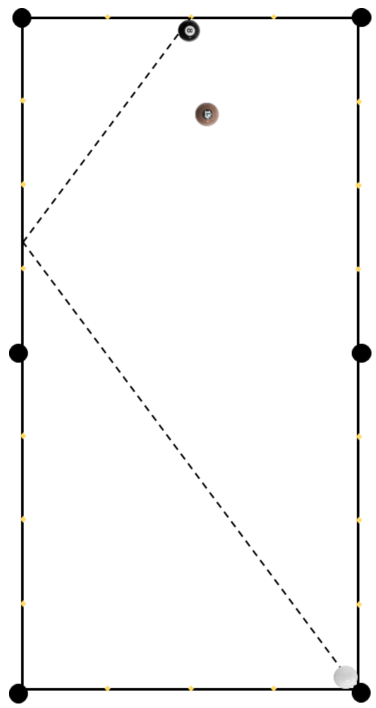
b) Calcule a distância da caçapa 6 ao ponto de contato (PC) da tacadeira na tabela superior esquerda na jogada proposta.

c) Calcule a distância (d) da bola 8 até a bola tacadeira antes da jogada.

Solução:

a) Esboce a situação proposta (Figura 65).

Figura 65 – Esboço da situação proposta



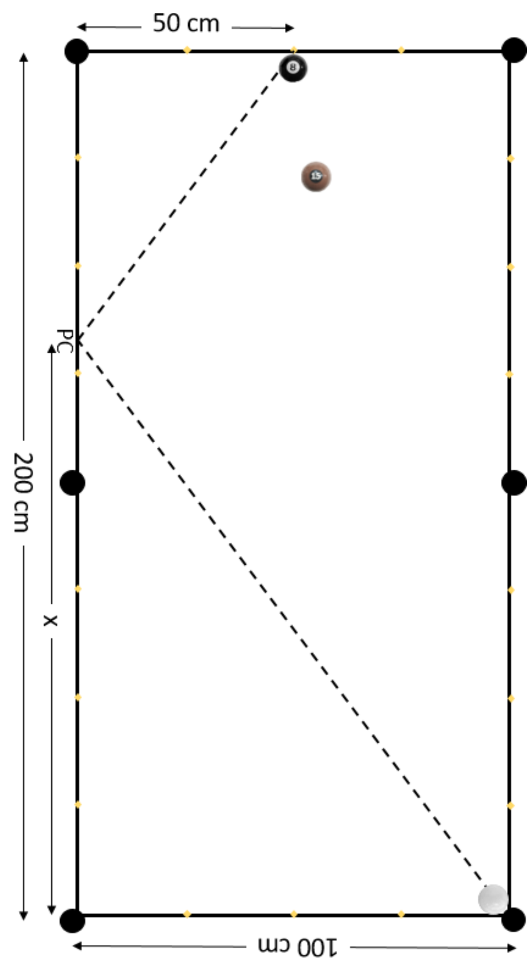
Fonte: Autor, 2024.

Há na mesa apenas a bola 8, a bola 15 do adversário e a bola tacadeira posicionada na “boca” da caçapa 1; a bola 8 colada no centro da tabela superior; as bolas 8, 15 e tacadeira em posições colineares. Mesa de sinuca retangular com proporção 2:1 e jogada usando apenas a tabela superior esquerda para acertar a bola 8.

b) Calcule a distância da caçapa 6 ao ponto de contato (PC) da tacadeira na tabela superior esquerda na jogada proposta.

De posse do esboço do item (a) e dos dados fornecidos na questão, temos as seguintes medidas: dimensões da mesa 200 cm x 100 cm, da bola 8 até a caçapa 4 mede 50 cm, pois a bola 8 está colada no centro da tabela superior. Sendo x a medida do segmento do ponto de contato até a caçapa 6, conforme a Figura 66.

Figura 66 – Esquema da jogada proposta.



Fonte: Autor, 2024.

Então podemos usar semelhança de triângulos, a fim de obter o valor de x.

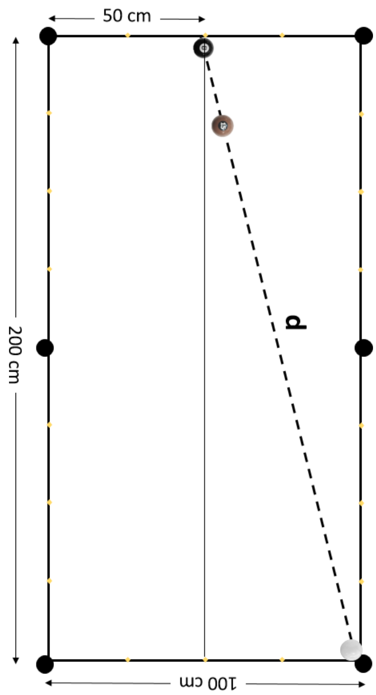
$$\frac{100}{50} = \frac{x}{200 - x} \Longrightarrow 2(200 - x) = x \Longrightarrow 200 - x = \frac{1}{2}x$$
$$x + \frac{1}{2}x = 200 \Longrightarrow \frac{3}{2}x = 200 \Longrightarrow x = \frac{400}{3}$$

Logo, a medida do segmento do ponto de contato até a caçapa 6 é aproximadamente 133,33 cm.

c) Calcule a distância (d) da bola 8 até a bola tacadeira antes da jogada.

Usaremos o teorema de Pitágoras para calcular a distância (d), conforme ilustrado na Figura 67.

Figura 67 – Ilustração usada para calcular a distância d.



Fonte: Autor, 2024.

Temos:

$$d^2 = 200^2 + 50^2$$
$$d^2 = 40000 + 2500$$
$$d = \sqrt{42500}$$
$$d \cong 206{,}15\ cm$$

Questão 4:

Durante uma partida de sinuca na modalidade bola 8, o jogador da vez observa que restam na mesa apenas a bola 8 e a bola 12 do adversário. Para ganhar a partida, esse jogador precisa encaçapar a bola 8 que se encontra na "boca" da caçapa 2. Entretanto, uma tacada direta não será possível, já que as bolas 8, 12 e tacadeira estão colineares. Contudo, o jogador traça uma jogada. Sabendo que a mesa de sinuca é um retângulo com área de jogo de dimensões de 2 m x 1 m e entre as caçapas há 3 diamantes distribuídos com distâncias iguais, o jogador realiza uma jogada usando apenas a tabela inferior esquerda convertendo a bola 8. Sabe-se que a tacadeira estava na posição: diamante central da tabela inferior esquerda e diamante da esquerda da tabela inferior. Considere a jogada sem efeito, as bolas como pontos e marcação oficial da mesa de sinuca. Sendo assim:

a) Esboce a situação proposta.

b) Calcule a medida do segmento formado da caçapa 5 ao ponto de contato da tacadeira na tabela inferior esquerda.

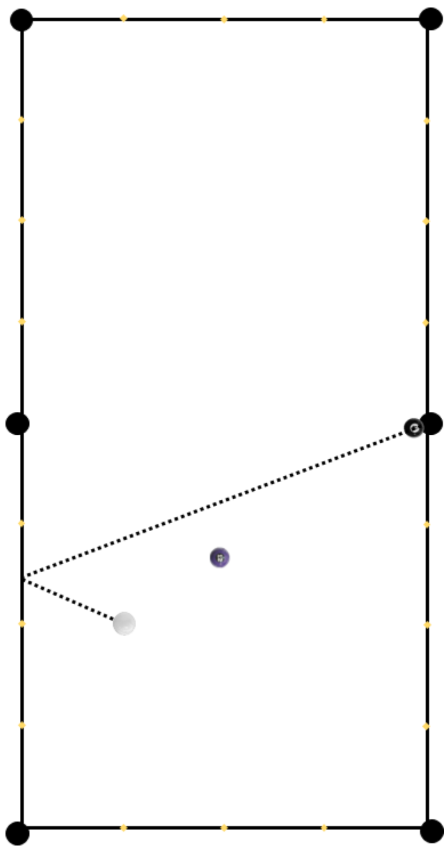
c) Calcule a distância percorrida pela tacadeira até a colisão com a bola 8.

d) Por que essa jogada funciona?

Solução:

a) Esboce a situação proposta (Figura 68).

Figura 68 – Esboço da situação proposta.



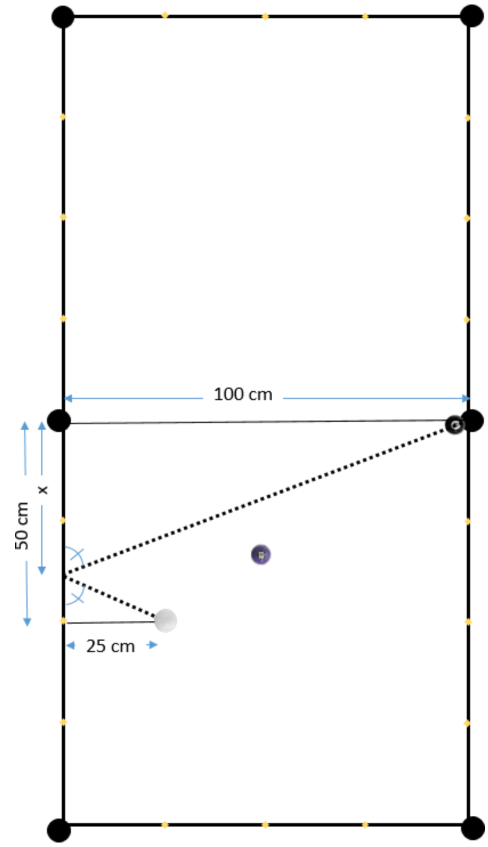
Fonte: Autor, 2024.

Esboçou-se o caminho percorrido pela tacadeira até a bola 8.

b) Calcule a medida do segmento formado da caçapa 5 ao ponto de contato da tacadeira na tabela inferior esquerda.

De posse do esboço do item (a) e dos dados fornecidos na questão, temos as seguintes medidas: entre as caçapas 2 e 5 = 100 cm; da tacadeira à tabela inferior esquerda = 25 cm e da caçapa 5 até o diamante central da tabela inferior esquerda = 50 cm. Sendo x a medida do segmento da caçapa 5 até o ponto de contato da tacadeira na tabela inferior esquerda, conforme o esquema presente na Figura 69.

Figura 69 – Esquema para calcular a medida x.



Fonte: Autor, 2024.

Logo, podemos usar semelhança de triângulos, a fim de obter o valor de x.

Então, temos:

$$\frac{100}{25} = \frac{x}{50 - x} \Longrightarrow 100(50 - x) = 25x \Longrightarrow 50 - x = \frac{1}{4}x$$

$$200 - 4x = x \Longrightarrow 200 = 5x$$

$$x = \frac{200}{5} = 40\ cm$$

Logo, a medida do segmento formado da caçapa 5 ao ponto de contato da tacadeira na tabela inferior esquerda é igual a 40 cm.

c) Calcule a distância percorrida pela tacadeira até a colisão com a bola 8.

Usaremos o teorema de Pitágoras para calcular o segmento da tacadeira até o ponto de contato (d_1) e o segmento do ponto de contato até a caçapa 2 (d_2). Temos:

Para d_1:

$$d_1{}^2 = 10^2 + 25^2$$
$$d_1{}^2 = 100 + 625$$
$$d_1 = \sqrt{725}$$
$$d_1 \cong 26{,}92\ cm$$

Para d_2:

$$d_2{}^2 = 100^2 + 40^2$$
$$d_2{}^2 = 10000 + 1600$$
$$d_2 = \sqrt{11600}$$
$$d_2 \cong 107{,}70\ cm$$

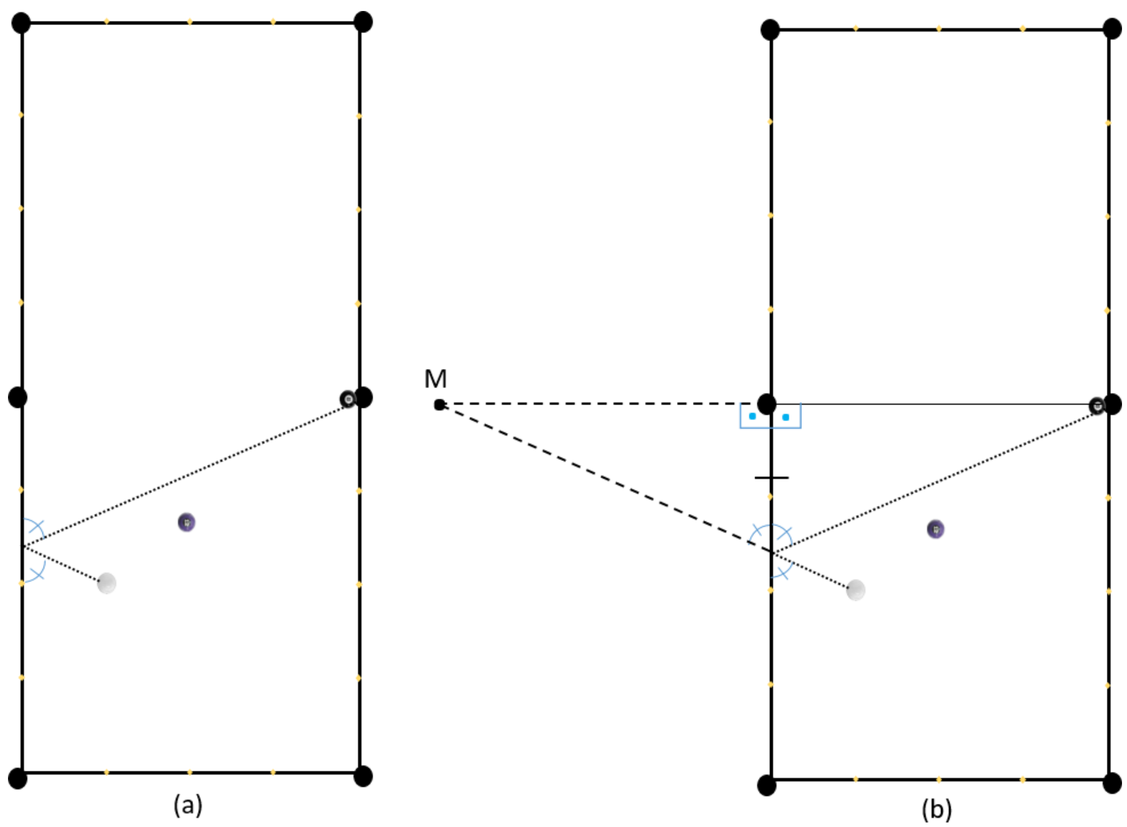
Logo, a distância percorrida pela tacadeira é o resultado da soma de d_1 e d_2, ou seja, é 134,62 cm.

d) Por que essa jogada funciona?

Para demostrar que a jogada proposta funciona, podemos provar pelo caso de congruência de triângulos, assumindo uma jogada sem efeito, como propõe o enunciado da questão.

A questão afirma que quando a tacadeira colide com a tabela no ponto de contato, a bola 8 é convertida. Para justificar essa jogada, podemos partir do prolongamento dos segmentos formados pela tacadeira e o ponto de contato e pelas caçapas 2 e 5. O ponto de interseção M formado por esses prolongamentos é a imagem especular da caçapa 2, ou seja, mirar no ponto de contato através da tacadeira é a mesma coisa que mirar no ponto M. Além disso, podemos verificar que o triângulo retângulo formado pelos vértices ponto de contato, caçapa 5 e caçapa 2 é congruente ao triângulo retângulo formado pelos vértices ponto de contato, caçapa 5 e M pelo caso ALA, conforme a ilustração presente na Figura 70.

Figura 70 – Jogada proposta(a) e representação do caso de congruência de triângulos ALA(b).



Fonte: Autor, 2024.

Ao observar a Figura 70, é importante salientar que em uma tacada sem efeito na sinuca, o ângulo de chegada é igual ao ângulo de saída e além disso, sabemos que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Desse modo, podemos provar pela congruência de triângulos que a jogada funciona.

Questão 5:

Em seu treino, um jogador de sinuca brasileira converteu a bola 7 na caçapa 2 através de uma jogada com a tabela superior. Essa jogada formou um ângulo de 60° com a tabela, tanto na entrada quanto na saída. Sabendo que a mesa de sinuca semioficial tem uma área de jogo retangular com dimensões 2,54 m x 1,27 m. Considere a jogada sem efeito, as bolas como pontos e a marcação da mesa de sinuca semioficial. Pede-se

a) Esboce a jogada da situação proposta.

b) Calcule a medida do segmento do ponto de contato da bola 7 na tabela superior até a caçapa 4. Considere o ponto de contato, a bola 7 e a tacadeira pontos colineares. Dado:

$\sqrt{3} = 1{,}73$.

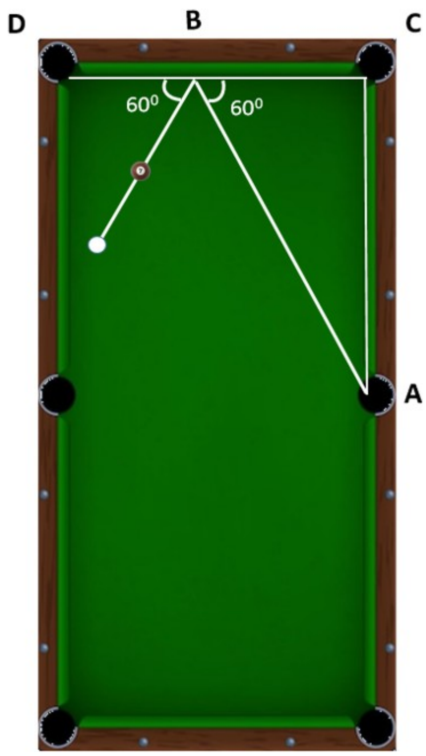
c) Classifique o triângulo cujos vértices são formados pelo ponto de contato, a caçapa 3 e caçapa 2, quanto aos ângulos e aos lados, respectivamente.

Solução:

a) Esboce a jogada da situação proposta.

Considerando a tacadeira, a bola 7 e o ponto de contato na tabela superior pontos colineares e que a bola 7 foi convertida na caçapa 2, temos o seguinte esboço (Figura 71):

Figura 71 – Esboço da jogada proposta.



Fonte: Autor, 2024.

b) Calcule a medida do segmento do ponto de contato da bola 7 na tabela superior até a caçapa 4. Considere o ponto de contato, a bola 7 e a tacadeira pontos colineares. Dado:
$\sqrt{3} = 1{,}73$.

Para calcular a distância do ponto de contato da bola 7 na tabela superior até a caçapa 4, devemos analisar a trajetória da bola, considerando que a mesa de sinuca tem uma forma retangular e que a jogada envolve um ângulo de 60° tanto na entrada quanto na saída da tabela e dados:

Os pontos importantes: caçapa 2 (A), ponto de contato na tabela superior (B); caçapa 3 (C) e caçapa 4 (D); as dimensões da mesa: comprimento de 2,54 metros e largura de 1,27 metros e de posse do esboço obtido no item (a). Temos,

1º Passo – Calcular o BC, usando razões trigonométricas no triângulo retângulo ABC.

Vamos usar o fato de que o ângulo de entrada e saída é 60° e que a bola 7 foi encaçapada, temos o segmento AC igual à 1,27 m. Sendo assim,

$$tg(60°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{1{,}27}{\overline{BC}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{BC} = \frac{1{,}27}{1{,}73} \quad \Longrightarrow \quad \overline{BC} \cong 0{,}73\ m$$

2º Passo – Calcular o $\overline{BD}$, subtraindo o $\overline{CD}$ de $\overline{BC}$.

$$\overline{BD} = \overline{CD} - \overline{BC}$$
$$\overline{BD} = 1{,}27 - 0{,}73$$
$$\overline{BD} \cong 0{,}54\ m$$

Portanto, a medida do segmento do ponto de contato da bola 7 na tabela superior até a caçapa 4 é de aproximadamente 0,54 metros.

c) Classifique o triângulo cujas vértices são formados pelo ponto de contato, a caçapa 3 e caçapa 2, quanto aos ângulos e aos lados, respectivamente.

Sabe-se que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°, como foram dados os ângulos de 60° e 90°, consequentemente, tem-se no vértice da caçapa 2 um ângulo de 30°.

Portanto, podemos classificar o triângulo:

Quanto aos ângulos: é um triângulo retângulo, pois possui um ângulo de 90°.

Quanto aos lados: é um triângulo escaleno, pois os lados possuem medidas diferentes.

Portanto, o triângulo formado é um triângulo retângulo e escaleno, respectivamente.

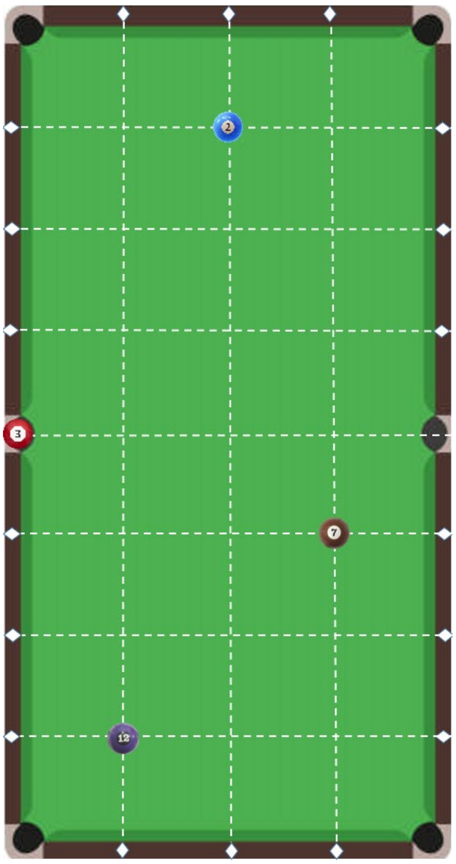
Questão 6:

O jogo de sinuca pode proporcionar uma alternativa interessante no ensino da geometria, pois mostra ser uma atividade atrativa que auxilia na compreensão dos conceitos estudados. Diante disso, um professor representou o plano cartesiano através da mesa de sinuca com 6 caçapas distribuídas igualmente entre as tabelas para ensinar localização de pontos aos alunos. Ele utilizou uma mesa de sinuca retangular com área de jogo de dimensões de 2 m x 1 m com 3 diamantes distribuídos com distâncias iguais, entre as caçapas. Sendo assim, o professor usou a caçapa 6 para indicar a origem (0, 0) e propôs aos alunos que respondessem as seguintes perguntas. Considere as bolas como pontos e marcação oficial da mesa de sinuca.

a) Qual quadrante do plano cartesiano foi representado pela situação proposta pelo professor?

b) Quais são as posições das bolas 2, 3, 7 e 12, respectivamente, na ilustração dada, usando os diamantes como unidade de referência (Considere as posições das caçapas como diamantes) (Figura 72).

Figura 72 – Coordenadas cartesianas na mesa de sinuca.



Fonte: Autor, 2024.

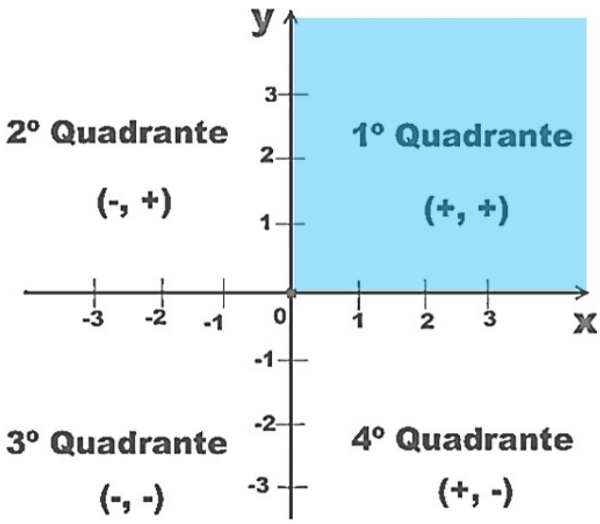
$B_2(\quad,\quad)$ $B_3(\quad,\quad)$ $B_7(\quad,\quad)$ $B_{12}(\quad,\quad)$

Solução:

a) Qual quadrante do plano cartesiano foi representado pela situação proposta pelo professor?

O sistema de coordenadas cartesianas é formado por quatro quadrantes. Em uma mesa de sinuca, se adotarmos a caçapa 6 como a origem (0,0), teremos x > 0 e y > 0 e com isso a região indicada na situação proposta representa o primeiro quadrante (Figura 73).

Figura 73 – Representação dos quadrantes no plano cartesiano.



Fonte: Autor, 2024.

b) Quais são as posições das bolas 2, 3, 7 e 12, respectivamente, na ilustração dada, usando os diamantes como unidade de referência (Considere as posições das caçapas como diamantes).

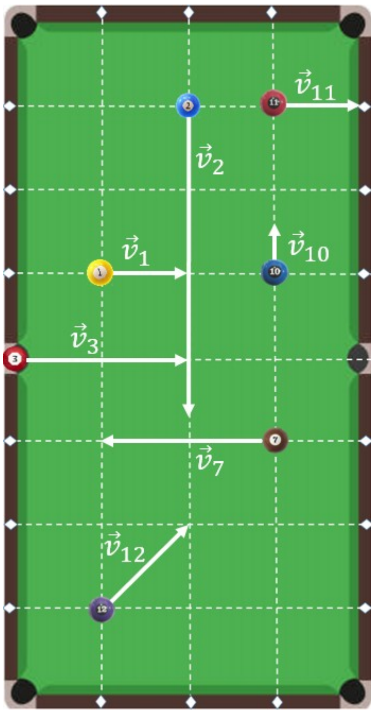
As posições das bolas são:

$B_2(2, 7)$ $B_3(0, 4)$ $B_7(3, 3)$ $B_{12}(1, 1)$

Questão 7:

Na sinuca, o movimento da bola é determinado por três fatores principais: direção, sentido e módulo. A direção refere-se ao movimento da bola após ser atingida pelo taco, por exemplo. O sentido indica para qual lado ao longo desse movimento a bola se move, podendo ser para frente ou para trás, dependendo do efeito aplicado. Já o módulo representa a intensidade do movimento da bola, sendo influenciado pela força com que o taco atinge a bola. Juntos, esses elementos são fundamentais para planejar jogadas precisas na mesa de sinuca. Ao correlacionar o movimento da bola de sinuca com o estudo de vetores, podemos determinar quais os vetores da figura a seguir: (Figura 74).

Figura 74 – Representação de vetores na mesa de sinuca.



Fonte: Autor, 2024.

a) tem a mesma direção.

b) tem o mesmo sentido.

c) tem a mesma intensidade (módulo).

d) são iguais.

e) tem o movimento de menor intensidade.

f) tem o movimento de maior intensidade.

Solução:

a) tem a mesma direção.

Os vetores: $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_7}$, e $\overrightarrow{v_{11}}$ tem a mesma direção horizontal e os vetores: $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_{10}}$ tem a mesma direção vertical.

b) tem o mesmo sentido.

Os vetores: $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_3}$ e $\overrightarrow{v_{11}}$ tem o mesmo sentido: da esquerda para direita.

c) tem a mesma intensidade (módulo).

Os vetores: $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_{11}}$; $\overrightarrow{v_3}$ e $\overrightarrow{v_7}$ tem a mesma intensidade (módulo).

d) são iguais.

Os vetores: $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_{11}}$, pois apresentam direção, sentido e módulo iguais.

e) tem o movimento de menor intensidade.

O vetor $\overrightarrow{v_{10}}$, pois apresenta o menor módulo.

f) tem o movimento de maior intensidade.

O vetor $\overrightarrow{v_2}$, pois apresenta o maior módulo.

3 ANÁLISES DOS RESULTADOS

Neste capítulo, abordaremos a análise dos resultados obtidos através das intervenções propostas na sequência didática para o ensino de geometria, utilizando o jogo de sinuca como ferramenta pedagógica. Inicialmente, iremos analisar os resultados da avaliação diagnóstica preliminar, que teve como objetivo identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos em relação aos conceitos geométricos e suas percepções em relação ao nível de dificuldade durante a resolução das questões. Em paralelo, analisaremos os dados obtidos por meio da autoavaliação, a fim de conhecer o perfil dos estudantes, permitindo uma compreensão mais aprofundada de suas percepções e atitudes em relação à aprendizagem da geometria. Em seguida, analisaremos os efeitos das intervenções através da sequência didática nas turmas experimentais no processo de ensino e aprendizagem da geometria. Após a análise das intervenções, analisaremos os resultados da avaliação diagnóstica aplicada após as intervenções, com o intuito de verificar o progresso e a consolidação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos. Complementando esta fase, verificaremos os dados obtidos através de uma segunda autoavaliação aplicada apenas aos alunos das turmas experimentais, que tem como propósito refletir sobre a eficácia do processo de ensino-aprendizagem.

Consequentemente, a análise dos dados coletados durante essas etapas nos permitirá avaliar a eficácia da sequência didática e identificar os impactos da utilização do jogo de sinuca como recurso educacional na compreensão e aplicação dos conceitos geométricos.

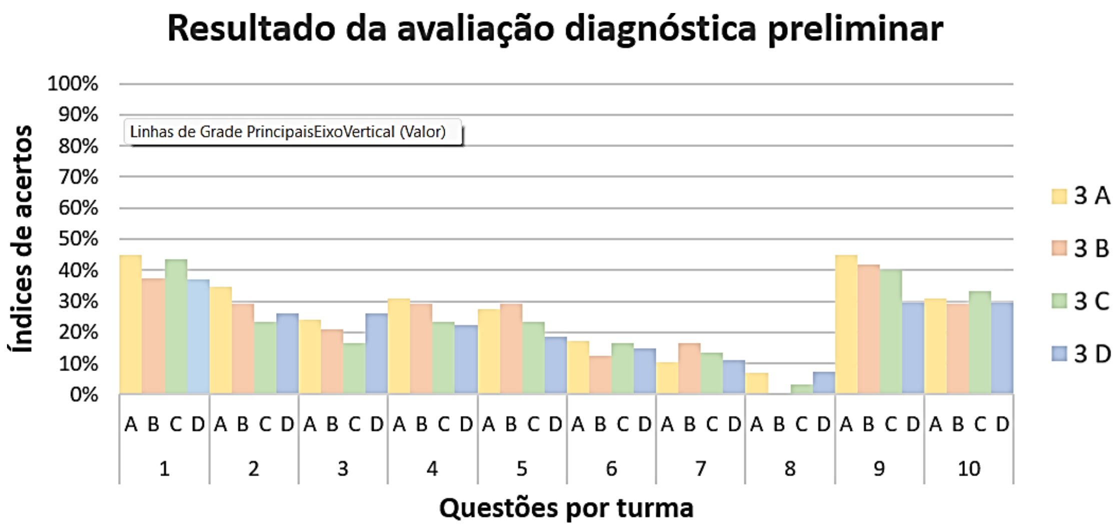
3.1 Análise da avaliação diagnóstica antes das intervenções.

O ensino e a aprendizagem de geometria frequentemente apresentam desafios tanto para os alunos quanto para os professores devido à abstração dos conceitos envolvidos. Essas dificuldades podem ser agravadas pela falta de conexão dos conceitos com situações práticas e cotidianas. Diante desse cenário, uma avaliação diagnóstica preliminar é fundamental para identificar os pontos de maior dificuldade dos alunos e planejar intervenções pedagógicas mais eficazes. Em vista disso, foi aplicada uma avaliação diagnóstica a 29, 24, 30 e 27 alunos dos terceiros anos A, B, C e D, respectivamente.

Essa avaliação é composta por 10 questões que cobrem uma ampla gama de tópicos, incluindo noções primitivas de geometria, ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros e suas características, teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo e noções de vetores (Apêndice A).

A análise dos resultados desta avaliação é crucial para identificar tanto os pontos fortes quanto as áreas de dificuldade dos alunos, permitindo que o planejamento das intervenções didáticas seja mais direcionado e eficaz. A seguir, é apresentada uma análise detalhada de cada questão, destacando os índices de acertos obtidos pelas quatro turmas e identificando as principais dificuldades encontradas pelos alunos em cada tópico abordado (Figura 75).

Figura 75 – Índices de acertos das questões da avaliação diagnóstica preliminar.



Fonte: Autor, 2024.

Ao observar os índices de acertos, é possível destacar que as turmas apresentaram desempenhos semelhantes em cada questão, com índices baixos, em geral. Essa homogeneidade no desempenho, apesar de indicar consistência, também destaca uma preocupação comum: a necessidade de fortalecer o entendimento dos conteúdos abordados. Identificar essas áreas de dificuldade é crucial para o planejamento pedagógico, permitindo que os professores ajustem suas estratégias de ensino e implementem intervenções necessárias para melhorar o aprendizado de todos os alunos. Para isso, vamos expor as considerações em relação ao desempenho da avaliação preliminar, que será feita questão por questão.

As questões 1 e 9 avaliam o entendimento básico das noções primitivas de geometria. Apesar de apresentarem os melhores índices de acertos, um número significativo de alunos ainda apresenta dificuldades em distinguir e exemplificar pontos, retas e planos, sugerindo uma necessidade de reforço nas noções primitivas e suas características.

Em relação aos resultados obtidos nas questões 2 e 10 sobre a capacidade dos alunos de classificar e reconhecer as características de ângulos, podemos observar que apenas 30% dos alunos, aproximadamente, responderam corretamente as questões, levando a entender que os alunos de todas as turmas apresentam uma dificuldade acentuada em relação a esses conteúdos. Logo, esses resultados indicam a necessidade de atividades práticas e significativas para fortalecer esses conceitos.

A abordagem do conteúdo de quadrilátero foi feita na questão 3 da avaliação diagnóstica, onde foi proposto um problema envolvendo quadriláteros notáveis e conhecimento sobre cálculo de área. Os alunos obtiveram um resultado preocupante associado aos conceitos de quadriláteros, necessitando de reforço, especialmente em interpretação de problemas matemáticos envolvendo propriedades dos quadriláteros.

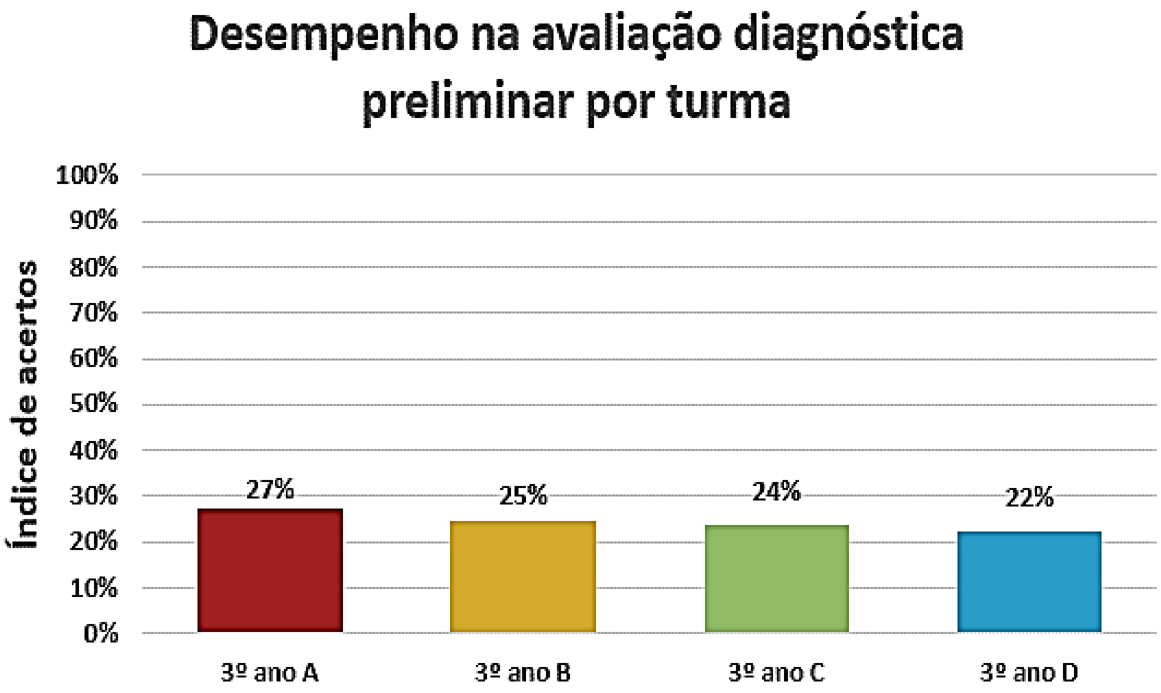
As questões 4, 5, 6 e 7 são referentes ao estudo dos triângulos. Na questão 4, teve como foco a classificação dos triângulos com base em seus lados e ângulos. Nessa abordagem, os baixos índices vistos no gráfico da Figura 75, refletem à dificuldade consistente entre os alunos em classificar os triângulos. Para melhorar esses índices, podemos propor uma abordagem com exercícios práticos e visuais, usando a sinuca como ferramenta pedagógica para ajudar a explicar as classificações dos triângulos. Já a questão 5, remete à habilidade dos alunos em aplicar o teorema de Pitágoras em situações práticas. Embora uma pequena parte dos alunos demonstrem compreensão do teorema, muitos ainda têm dificuldades em aplicá-lo corretamente em problemas práticos. Isso sugere a necessidade de mais exemplos contextualizados e exercícios práticos. Na questão 6, referente ao conteúdo de semelhança de triângulos, os índices de acertos abaixo de 20% indicam uma compreensão bastante limitada dos critérios de semelhança e suas propriedades, sendo necessário um reforço significativo, possivelmente com o uso de recursos visuais e atividades interativas para melhorar o entendimento, em especial, o uso de cenários preestabelecidos de jogadas durante partidas de sinuca.

Os resultados obtidos na questão 7, que testa a habilidade dos alunos em calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo, foram semelhantes aos resultados observados na questão 8, implicando que o cálculo de razões trigonométricas no triângulo retângulo signifique um problema tão preocupante quanto. A baixa pontuação indica que muitos deles não dominam o cálculo de razões trigonométricas, sugerindo a necessidade de introduzir esses conceitos de forma mais gradual e com apoio de material visual também.

Por fim, a questão 8, referente às noções básicas de vetores, avalia a compreensão de direção, sentido e módulo. Apesar de parecer uma questão relativamente simples, a baixa pontuação sugere que os conceitos de vetores são particularmente desafiadores para os alunos, pois dos 110 alunos avaliados apenas 5 responderam adequadamente, ou seja, menos de 5% dos alunos. Neste caso, é necessária uma intervenção mais detalhada, principalmente com o uso de exemplos práticos e visuais para facilitar a compreensão.

De modo geral, as turmas apresentaram resultados preocupantes, conforme podemos observar o gráfico presente na Figura 76.

Figura 76 – Desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica preliminar por turma.

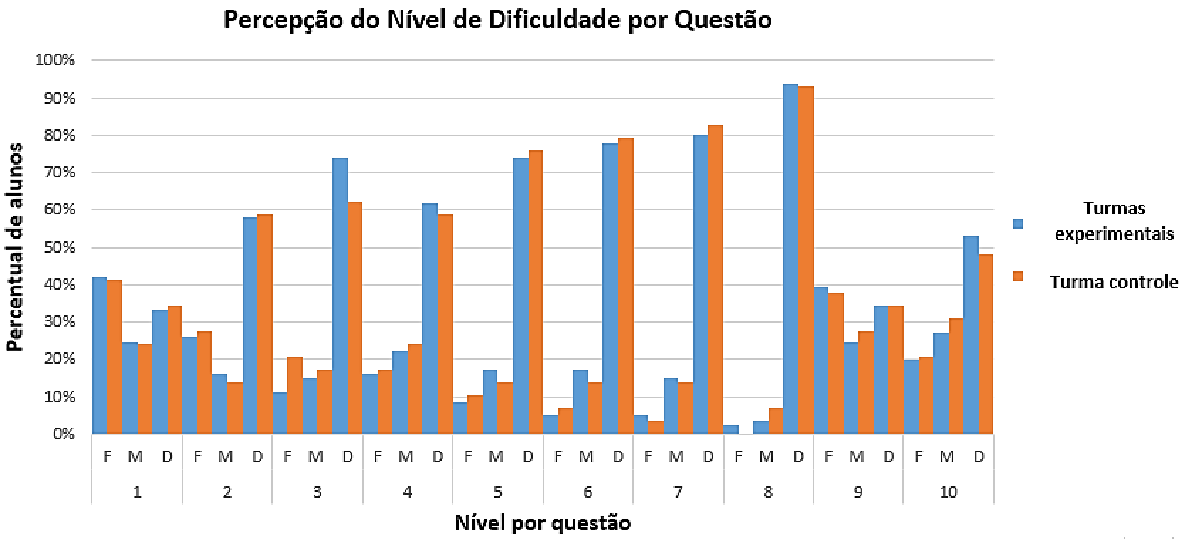


Fonte: Autor, 2024.

A percepção dos alunos é um indicador importante da eficácia do ensino e da adequação dos materiais didáticos utilizados. Para entender como os alunos enxergaram o nível de dificuldade das questões presentes na avaliação diagnóstica preliminar, foi realizado um questionário que classificou as questões como fáceis, moderadas ou difíceis, conforme observado na Figura 77. Nesse questionário, as turmas foram designadas como experimentais (3º anos B, C e D) e controle (3º ano A) a fim de avaliar o efeito das intervenções com mais clareza no decorrer do trabalho.

Neste contexto, o gráfico resultante revelou informações importantes sobre a percepção dos alunos em relação às questões propostas.

Figura 77 – Dados da percepção dos alunos do nível de dificuldade por questão na avaliação preliminar.



Fonte: Autor, 2024.

A análise dos dados do gráfico, que avaliou a percepção dos alunos sobre o nível de dificuldade das questões, indica uma predominância acentuada da percepção de dificuldade elevada. Tanto os alunos das turmas experimentais quanto os alunos da turma controle classificaram majoritariamente as questões como difíceis.

Essa predominância pode sugerir várias interpretações, pois os alunos, independentemente da turma, sentiram que as questões exigiam um nível de conhecimento ou habilidades acima do esperado ou da preparação recebida. Além disso, a semelhança na percepção entre os grupos experimentais e controle pode refletir uma uniformidade nas características das turmas, como o nível de preparação prévia ou métodos de ensino empregados.

Outros fatores relevantes que podem estar associados ao resultado são: falta de motivação em realizar a avaliação; dificuldade de concentração, estresse, ansiedade, entre outros.

Essa análise evidencia a necessidade de investigar mais a fundo as causas dessa percepção de dificuldade e considerar intervenções que possam auxiliar os alunos a se sentirem mais preparados e confiantes ao enfrentar questões semelhantes no futuro.

Ainda convêm lembrar que os dados da percepção dos alunos em relação ao nível de dificuldade por questão presentes no gráfico da Figura 77 foram bastantes coerentes quando comparados aos resultados presentes nos gráficos das Figuras 75 e76.

Os resultados anteriores revelam uma compreensão valiosa, mas insuficiente, para determinar as principais causas. Por esse motivo, o aluno foi submetido a mais um questionário complementar, a fim de esclarecer seu desempenho na avaliação. Na Tabela 1, verificamos as respostas das dificuldades apresentadas pelo aluno durante a resolução de cada questão.

Tabela 1 – Resposta do aluno em relação à dificuldade na resolução da questão (%).

	Questões									
	Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**	**Q10**
Nunca estudei o conteúdo.	5	2	5	23	15	25	39	89	8	21
Já estudei o conteúdo, mas não consegui resolver.	21	43	54	36	63	58	48	6	24	41
Tive dificuldade na resolução da questão, mas fiz.	19	41	20	18	15	12	9	4	27	18
Não tive dificuldade na resolução da questão.	55	15	21	23	8	5	4	1	41	20

Fonte: Autor, 2024.

Podemos observar na Tabela 1 que cerca de 50% dos alunos não tiveram dificuldade na resolução das questões 1 e 9 sobre noções primitivas de geometria, apresentando o melhor desempenho em comparação com as demais questões. Embora cerca de metade dos alunos tenha demonstrado uma boa compreensão das noções primitivas de geometria, esse resultado também indica que a outra metade ainda enfrenta dificuldades. Isso sugere que, apesar de ser o melhor resultado entre as questões avaliadas, há uma necessidade significativa de melhoria, pois a compreensão sólida dessas noções básicas é crucial, já que elas são fundamentais para o aprendizado de outros conceitos em geometria. Para fortalecer essa base, é importante revisar esses conceitos regularmente e incentivar a aplicação prática em diversos contextos, a fim de garantir que todos os alunos alcancem um nível de entendimento mais sólido e uniforme.

Em relação às questões de 2 até 7 e 10, a maioria dos alunos afirmou já ter estudado esses conteúdos, mas não sabia resolver as questões. Embora esses tópicos sejam conhecidos pelos alunos, a dificuldade em resolvê-los sugere que o entendimento pode ser superficial ou que faltam habilidades práticas de resolução de problemas. Isso pode estar relacionado a uma abordagem de ensino mais teórica e menos focada em exercícios práticos, o que pode ser um sinal de que a prática e a aplicação dos conceitos precisam ser reforçadas para melhorar o desempenho dos alunos.

Já a questão 8 sobre noções básicas de vetores, 89% dos alunos, aproximadamente, afirmaram que nunca estudaram o assunto. Indicando que a noção de vetores parece ser um tópico novo para a maioria dos alunos. Esse resultado sugere uma necessidade de incluir esse conteúdo nas aulas, começando com conceitos básicos para construir uma base sólida. A falta de conhecimento prévio pode exigir uma abordagem mais gradual e detalhada para garantir que os alunos compreendam os conceitos fundamentais antes de avançar para aplicações mais complexas.

Com base no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, é importante considerar que o baixo desempenho dos alunos do 3º ano do ensino médio, pode indicar uma lacuna na transição entre os níveis de compreensão geométrica. Isso sugere que muitos estudantes podem ainda estar em estágios iniciais, com a maioria no nível de visualização e alguns no nível de análise, já que no nível de visualização, o aluno deve ser capaz de reconhecer formas básicas como quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios, fazendo analogias e comparações com formas cotidianas e na análise, é necessário que o aluno tenha compreensões de alguns conceitos geométricos como ângulos, medidas congruentes e diagonais, sendo ainda que saiba identificá-los na figura através de comparações. Para exemplificar, um aluno nesse nível deve ser capaz de observar um quadrado e dizer que ele tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e diagonais congruentes, porém ainda não é capaz de fazer relações entre as propriedades dos quadrados e dos retângulos. Portanto, é essencial avaliar e reforçar os métodos de ensino, focando em atividades que estimulem o raciocínio lógico e a capacidade de abstração, partindo de aulas práticas e visuais, para facilitar a progressão dos alunos através dos níveis do modelo. Além disso, considerar uma abordagem pedagógica mais individualizada pode ser necessário para atender às diversas necessidades de aprendizado dos estudantes.

Essas análises destacam a importância de ajustar o foco do ensino conforme o nível de familiaridade e compreensão dos alunos em diferentes tópicos, equilibrando a teoria com a prática e introduzindo novos conteúdos de forma atrativa.

Vale salientar que o público desse trabalho são alunos do ensino médio, dito isso, acreditamos assim como Van Hiele, que o objeto de estudo deve estar nos três primeiros níveis. Portanto ter alunos, verdadeiramente, enquadrados no nível de dedução informal é o desejado. Deixando a necessidade de nível de dedução formal para o ensino superior e o nível de rigor, para os alunos dos cursos de formação matemática.

Diante disso, foi aplicado o questionário 1 para avaliar a viabilidade e a recepção do aluno em relação ao uso da sinuca como ferramenta pedagógica no ensino da geometria. Vale ressaltar que participaram do questionário todos os alunos presentes (110 alunos). O objetivo da aplicação do questionário 1 é conhecer a opinião do aluno sobre geometria e a aceitação e expectativas do aluno em relação ao uso da sinuca em aulas práticas. Os dados obtidos através do questionário podem ser observados no gráfico da Figura 78.

Figura 78 – Dados obtidos através do questionário 1.

Questionário 1

1. Você consegue identificar e relacionar figuras planas com objetos do seu dia a dia?

( ) Sim ( ) Não ( ) Algumas ( ) A maioria

2. Para resolver os problemas de geometria, você costuma planejar estratégias?

( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

3. Você tem dificuldade em aprender conteúdos de geometria?

( ) Sim ( ) Não

4. Você prefere aulas teóricas ou práticas?

( ) Teóricas ( ) Práticas

5. O que você acha de estudar os conteúdos presentes na avaliação diagnóstica usando o jogo de sinuca?

( ) ótimo ( ) bom ( ) tanto faz ( ) não gostaria

6. Você acha que o jogo de sinuca pode ajudar a entender conceitos de geometria?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

7. Qual a sua familiaridade com o jogo de sinuca?

( ) Alta ( ) moderada ( ) baixa

Fonte: Autor, 2024.

Verificou-se que menos de 20% dos alunos afirmaram não conseguir identificar e relacionar figuras planas com objetos do seu cotidiano. Em contrapartida, apenas 19% dos alunos afirmaram que costumam planejar estratégias para resolução de problemas envolvendo geometria. Outro dado importante mostra que grande parte dos alunos (83%, aprox.) sente dificuldade em aprender geometria, indicando que métodos alternativos podem ser benéficos. A preferência por aulas práticas sobre aulas teóricas é clara, com cerca de 94% dos alunos preferindo atividades práticas.

Os dados da pergunta 5 mostraram que existe uma aceitação de 93%, aproximadamente, em relação à utilização da sinuca para estudar os conteúdos de geometria. Além disso, a percepção geral sobre o uso da sinuca para o ensino de geometria é positiva, com aproximadamente 62% dos alunos, acreditando que a sinuca usada como ferramenta pedagógica, pode ajudar a entender os conceitos geométricos. Por fim, foi verificado que a familiaridade com a sinuca é baixa entre os alunos, já que apenas 27% dos alunos, aproximadamente, afirmaram que tem familiaridade alta e moderada.

Esses resultados forneceram uma base sólida para a implementação da sequência didática utilizando a sinuca como ferramenta de ensino da geometria, permitindo ajustar as abordagens conforme necessário para maximizar a eficácia.

É importante citar que, após a avaliação diagnóstica preliminar, os alunos das turmas experimentais tiveram uma aula introdutória sobre a história da sinuca, incluindo os elementos, termos e regras do jogo. Eles demonstraram grande interesse e receptividade à ideia de aprender geometria utilizando a sinuca como ferramenta pedagógica.

3.2 Intervenções nas turmas experimentais

Nesta seção, examinaremos à aplicação das atividades, destacando o engajamento e os impactos no desenvolvimento cognitivo dos alunos. Além disso, discutiremos em alguns casos como os alunos resolveram as questões contextualizadas com a sinuca, levando em consideração o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele em alguns casos. Nesta perspectiva, buscaremos evidenciar como a sinuca influenciou no processo de aprendizagem da geometria.

3.2.1 Diagnóstico da intervenção através da atividade 1.

No decorrer da atividade 1, estudou-se as noções primitivas de geometria, segmento de reta e semirreta, iniciando a aula debatendo com os alunos o significado da palavra geometria e depois os conceitos de ponto, reta e plano. Em seguida, foram debatidos os conceitos de pontos colineares, retas paralelas, concorrentes e coincidentes, além de discutir com os alunos as proposições primitivas, e logo após estudou-se os conceitos de segmento de reta e semirreta. Durante as aulas, observou-se um alto nível de engajamento dos alunos, que demonstraram uma participação ativa através de perguntas e respostas constantes.

Após o enfoque teórico, os alunos foram direcionados para a mesa de sinuca, com o objetivo de consolidar os conteúdos trabalhados da teoria por meio da prática usando a sinuca. Essa utilização da sinuca e seus elementos como ferramenta pedagógica foi um diferencial significativo, já que os alunos puderam aplicar e vivenciar os conceitos geométricos na prática. Nesse momento, pediu-se aos alunos que fizessem uma associação entre os elementos da sinuca com os conceitos de ponto, reta e plano. Imediatamente, os alunos associaram o ponto à bola, a reta e ao taco e o plano à superfície da mesa. Vale ressaltar que uma aluna completou dizendo: "mas o taco é um segmento de reta também professora, já que tem começo e fim". Mostrando uma compreensão dos alunos sobre o conceito de segmento de reta, mesmo que através de uma dedução informal.

Depois, pediu-se a um aluno para posicionar dois tacos na mesa e para associar aos conceitos de retas paralelas, concorrentes e coincidentes. As associações foram realizadas com clareza, demostrando um conhecimento sólido sobre o tema. Além disso, um detalhe chamou atenção, pois um aluno no momento da aula falou "a mesa de sinuca têm dois pares de retas paralelas". Essa observação contribuiu com a afirmação de que o aprendizado dos alunos é efetivo.

Diante disso, pode-se verificar que a abordagem prática facilitou a compreensão e a fixação dos conteúdos, por parte dos alunos.

Logo depois, os alunos foram submetidos a responder à questão 1 da seção 2.1.6 desta dissertação, que abordava noções primitivas de geometria como ponto, reta e plano em relação aos elementos da sinuca. Na Figura 79, podemos ver a resposta do aluno A da turma do 3º ano C.

Figura 79 – Resposta da questão 1 pelo aluno A.

Sendo assim, associe corretamente as colunas, relacionando os componentes da sinuca, mesa, bola e taco, aos conceitos primitivos da geometria, ponto, reta e plano.

Coluna I – componentes da sinuca

(a) Mesa;

(b) Bola;

(c) Taco.

Coluna II – conceitos primitivos

(b) O ponto é um conceito primitivo e, como tal, não se define. É representado pelas letras maiúsculas do alfabeto latino. Como toda a Geometria é baseada no ponto, as figuras geométricas são formadas a partir de conjuntos deles.

(c) A reta também é um conceito primitivo que não se define, podemos conceituar retas como conjuntos de pontos que são considerados linhas infinitas sem curvas com uma dimensão. A reta é representada pelas letras latinas minúsculas.

(a) O plano também é um conceito primitivo, logo não se define, mas podemos dizer que é um elemento primitivo com infinitos pontos de forma que não haja espaço entre eles, formando duas dimensões. O plano é representado pelas letras gregas minúsculas.

Fonte: Autor, 2024.

Verificou-se que além do aluno A, os alunos, no geral, demonstraram uma compreensão sólida. Eles responderam, corretamente, a essa questão com facilidade, evidenciando a eficácia do método utilizado. Além disso, a maioria dos alunos conseguiu relacionar corretamente os conceitos teóricos com a prática observada na sinuca, o que foi evidenciado após a aplicação e resolução da lista de exercícios do Apêndice C.

Vale ressaltar que o momento de treino de precisão na mesa de sinuca também foi bastante produtivo, com os alunos mostrando grande envolvimento e dedicação. Na Figura 80, podemos ver alguns alunos durante o treino.

Figura 80 – Alunos iniciantes na sinuca treinando tacadas.

Fonte: Autor, 2024.

Essa atividade prática não só reforçou os conceitos geométricos, como também desenvolveu habilidades de precisão e concentração.

3.2.2 Diagnóstico da intervenção através da atividade 2.

Durante as aulas da atividade 2, estudou-se ângulos e polígonos. Inici- almente, perguntou-se o que era ângulo. Um aluno do 3º ano B respondeu da seguinte forma "na quina dessa banca tem um ângulo de 90°, concluindo dizendo "só sei isso". Após a observação do aluno, foi perguntado a turma o nome dado ao ângulo de 90°, porém não souberam responder. Depois disso, foram dadas a definição e a classificação dos ângulos formalmente, em seguida, foram apresentados vários exemplos de casos de ângulos presentes no cotidiano deles. Depois os alunos traçaram alguns ângulos usando o transferidor. Nesse momento, foi solicitado aos alunos que eles fizessem a classificação. Na sequência, estudou-se vários conceitos importantes como ângulos complementares e suplementares; ângulos adjacentes, congruentes e opostos pelo vértice e o teorema da existência da paralela. Nesse primeiro momento, os alunos mostraram-se altamente participativos, tirando dúvidas, frequentemente e respondendo às perguntas orais.

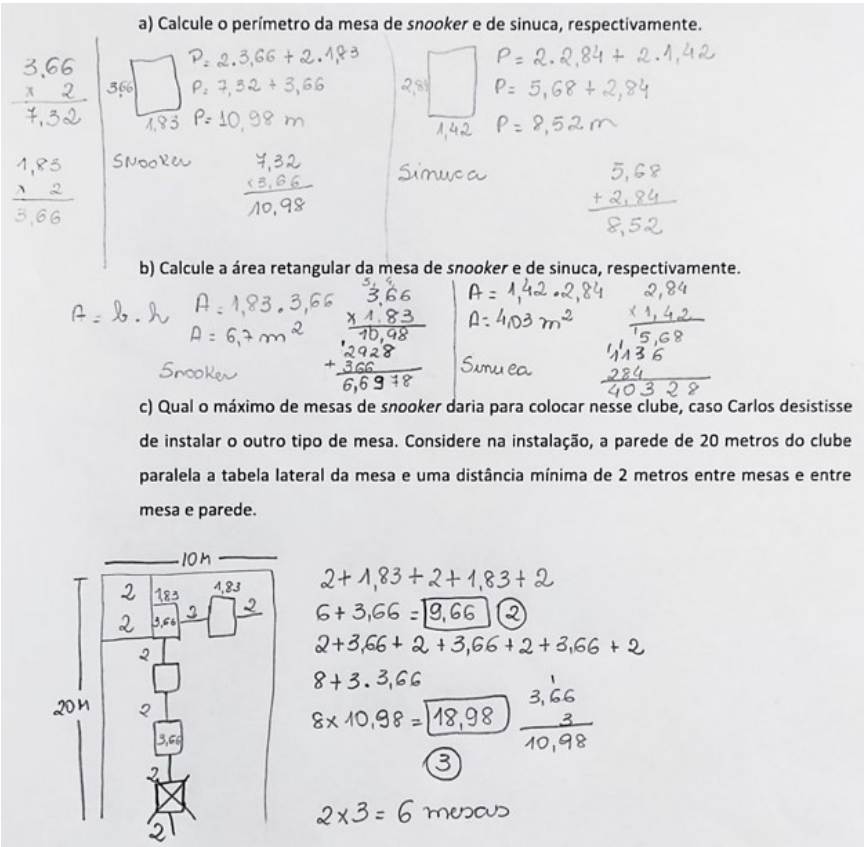
Depois da abordagem teórica, os alunos foram direcionados para a mesa de sinuca, com bastante entusiasmo. Na abordagem prática, utilizando a sinuca e seus elementos, foi novamente um ponto alto da metodologia, pois os alunos trabalharam todos os conceitos de forma dinâmica e concreta, conforme proposto nos comentários da atividade 2, facilitando a compreensão e fixação dos conteúdos. Depois os alunos iniciaram a resolução da lista de exercícios sem dificuldade.

O segundo momento da atividade 2 focou no estudo de polígonos. Primeiramente, pediu-se aos alunos exemplos de figuras planas. Observou-se que a maioria tinha noção de figuras, pois foram dados alguns exemplos. Sem demora, foram dadas a definição e a classificação de polígonos, em seguida, foram dados vários exemplos. Além disso, explicou-se à relação das diagonais de um polígono e o conceito de polígono convexo. Ainda com um enfoque teórico, porém participativo, definiu-se às expressões para calcular o perímetro e a área de alguns polígonos. Após um momento bastante dinâmico em sala de aula, os alunos foram entusiasmados para o local da mesa de sinuca. Chegando no local, pediu-se para 2 alunos de cada turma medirem com uma trena as dimensões da mesa, com o intuído dos demais alunos da turma, obterem o perímetro da mesa e a área de campo de jogo. Sem demora, a maioria dos alunos determinaram com precisão os valores pedidos. Vale salientar que os alunos que estavam realizando a medição, mediram apenas a dois lados, a largura e o comprimento, mostrando conhecimento sobre o tema.

Durante a medição, verificou-se uma proporção de 2:1. A partir desse conhecimento, perguntou-se aos alunos, "qual polígono forma a superfície da mesa e qual o seu nome? e se dividimos com um segmento de reta da caçapa 2 até a 5, qual o nome das figuras planas formadas?". Os alunos responderam corretamente as perguntas, dizendo: "o polígono é quadrilátero, porque têm quatros lados e os nomes são retângulo a mesa toda e dois quadrados a mesa dividida.". Em seguida, foi perguntado, "quais características são comuns no retângulo e no quadrado?". Mostrando domínio, a maioria dos alunos responderam têm quatro lados e quatro ângulos retos.

Em seguida, foi lida a questão 2 da seção 2.1.6 desta dissertação e com a mediação da professora, os alunos responderam com êxito todos os itens, que tratava de perímetro (item a) e área (item b) de retângulos representados por mesas de snooker e sinuca. No item c, alguns alunos tiveram a mediação da professora apenas como "ponta pé" inicial, mas não tirou o mérito do aluno na resolução do problema, conforme podemos ver na Figura 81, a resolução da aluna B do 3º D.

Figura 81 – Resposta da questão 2 pela aluna B.



Fonte: Autor, 2024.

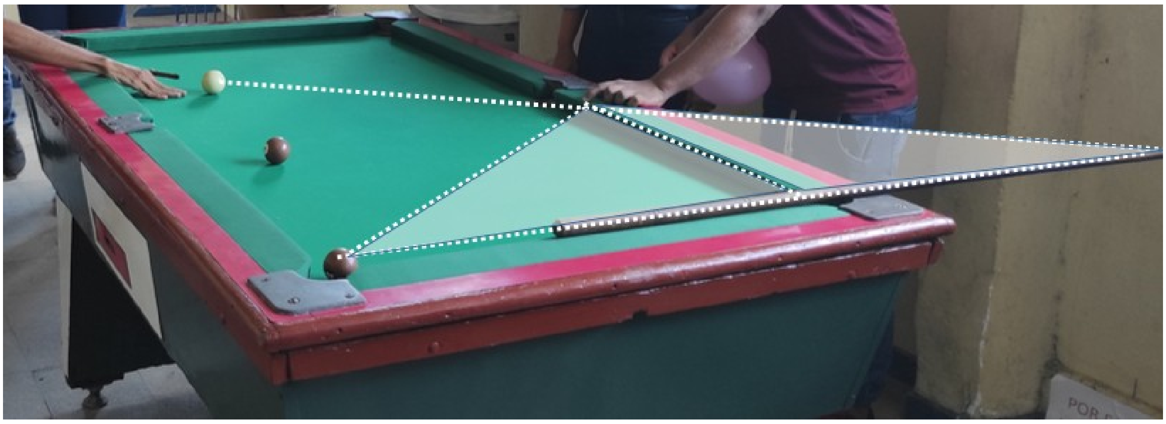
Os resultados foram bastante positivos, com os alunos respondendo corretamente à questão e solucionando a lista de exercícios do Apêndice D, completamente. Além disso, os alunos mostraram-se envolvidos, motivados e concentrados durante as aulas.

3.2.3 Diagnóstico da intervenção através da atividade 3.

Os encontros da terceira atividade ocorreram em 3 momentos. No primeiro momento foram trabalhados a definição de triângulos, suas classificações e propriedades, bem como os conceitos e os casos de congruência e semelhança de triângulos. Com isso, observou-se que os alunos tiveram uma participação ativa, deixando a aula dinâmica e envolvente.

Após as explicações, os alunos foram direcionados para a mesa de sinuca, onde puderam vivenciar esses conceitos na prática, como, por exemplo, a congruência de triângulos em jogadas, conforme mostrado na Figura 82.

Figura 82 – Aplicação do conceito de congruência de triângulos em jogados de sinuca.



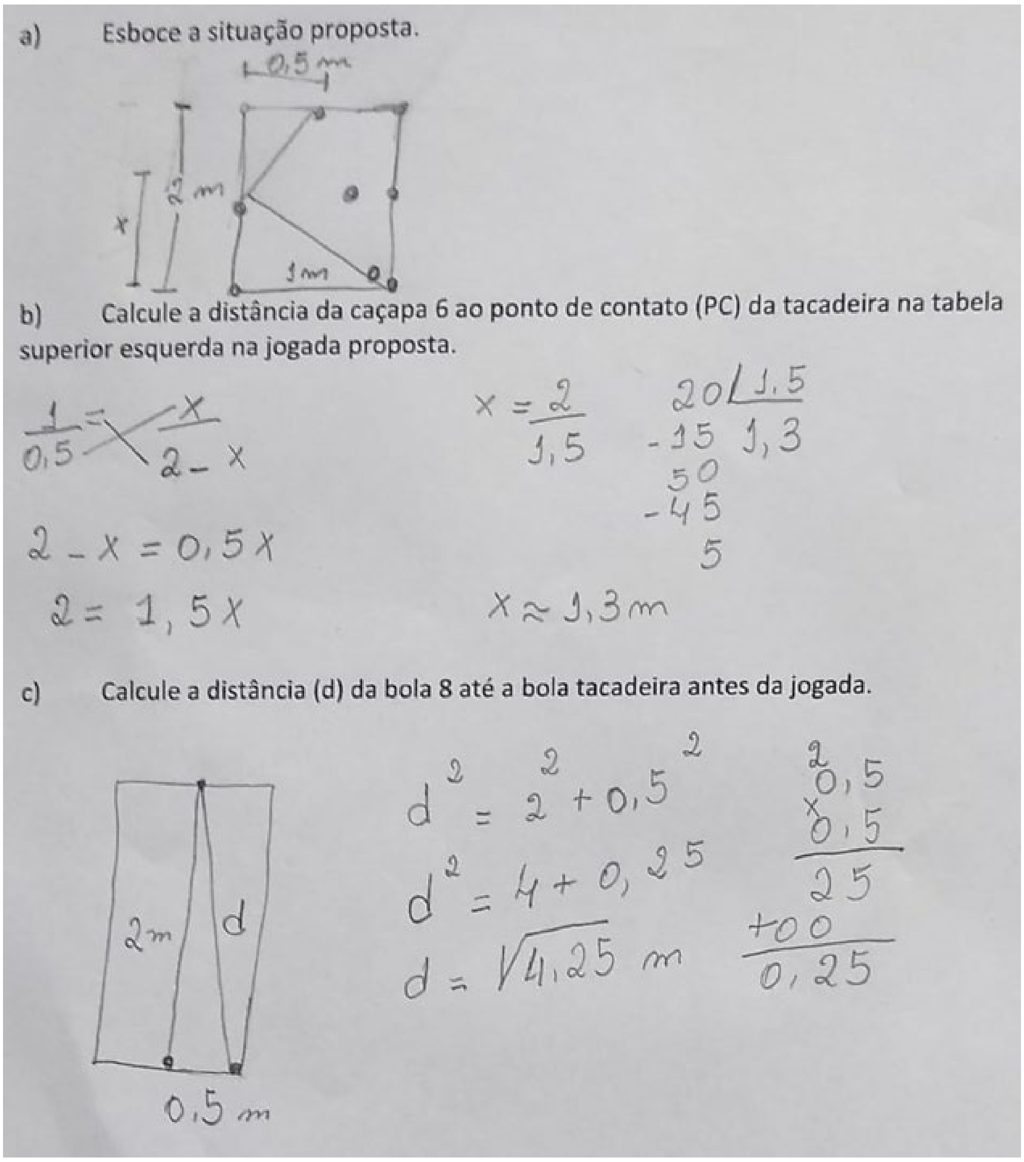
Fonte: Autor, 2024.

Nessa ocasião, pediu-se a uma aluna iniciante na sinuca que efetuasse a jogada. Ao realizar a tacada, a bola desejada foi convertida, deixando todos os demais alunos animados esperando a vez. Na sequência, verificou-se que a maioria dos alunos conseguiu converter a bola com apenas uma tacada, indicando que os alunos progrediram na concentração e nas habilidades motoras. Em seguida, os alunos responderam a parte inicial da lista de exercícios do Apêndice E, mostrando domínio dos conteúdos estudados.

Nesse primeiro momento, os resultados foram bastante positivos, com os alunos respondendo corretamente aos exercícios e demonstrando uma compreensão sólida dos conceitos abordados.

No segundo momento, focou-se no teorema de Pitágoras, iniciando com uma revisão sobre as características dos triângulos retângulos. Após as explicações teóricas, os alunos responderam à questão 3 sobre semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras, mostrando facilidade na resolução da pergunta, conforme podemos observar na Figura 83, a resolução da questão 3 pela aluna C da turma do 3º ano B.

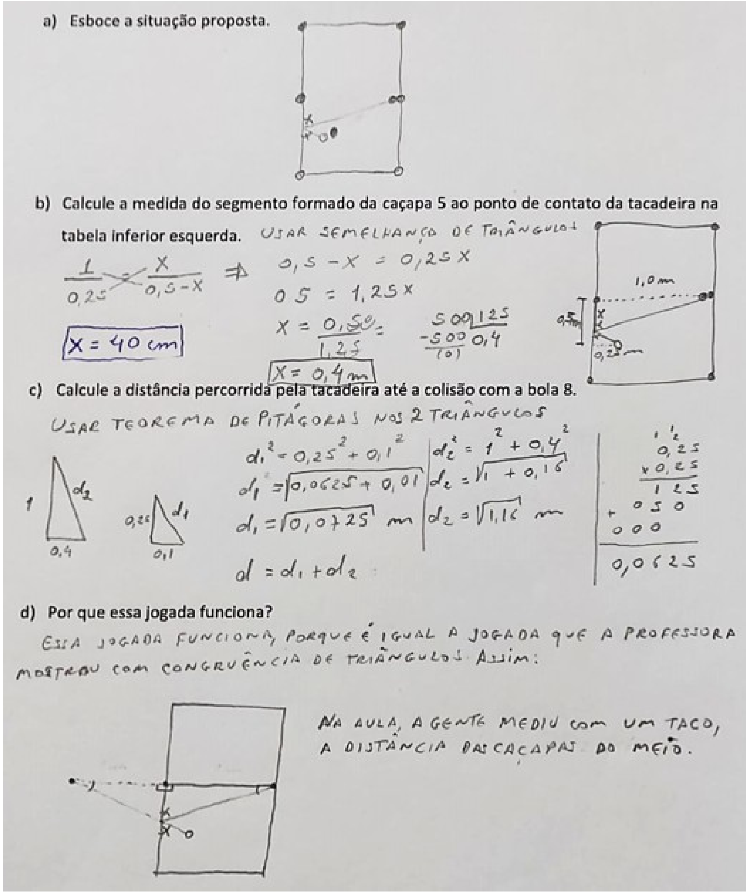
Figura 83 – Resposta da questão 3 pela aluna C.



Fonte: Autor, 2024.

Em seguida, a questão 4 foi apresentada aos alunos. Essa questão foi elaborada com o objetivo de avaliar o aluno sobre esboço de problema proposto, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e congruência de triângulos. Os resultados mostraram que a maioria dos alunos conseguiu resolver todos os itens com sucesso. Vale enfatizar que alguns alunos associaram o item d com a jogada demonstrada na aula prática de sinuca, evidenciando que a abordagem prática, verdadeiramente, facilita a aprendizagem dos conteúdos estudados. A resolução da questão 4 solucionada pelo aluno D da turma do 3º ano C pode ser vista na Figura 84.

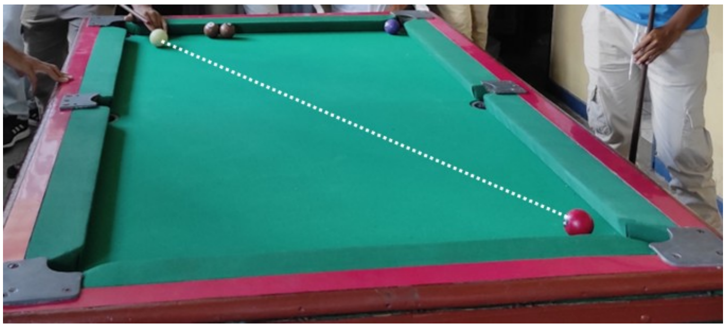
Figura 84 – Resposta da questão 4 pelo aluno D.



Fonte: Autor, 2024.

Com o intuito de consolidar o teorema de Pitágoras, os alunos foram à mesa de sinuca para calcular distância usando o teorema de Pitágoras na prática. Foram propostas várias situações. Na Figura 85, podemos ver uma das jogadas sugeridas, onde a bola tacadeira foi posta próxima à caçapa 4 e a bola da vez foi posta próxima à caçapa 1.

Figura 85 – Jogada sugerida para aplicação do teorema de Pitágoras.

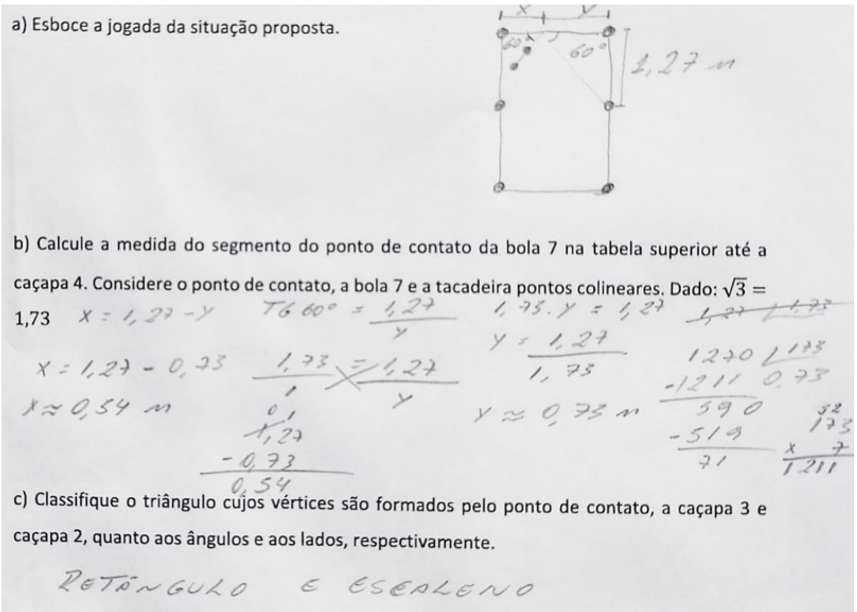


Fonte: Autor, 2024.

Na ocasião foi pedido aos alunos para calcular a distância da caçapa 4 a caçapa 1, dadas as dimensões da área de jogo. Constatou-se que a aprendizagem foi consolidada, pois os alunos calcularam corretamente todas as situações propostas. Em seguida, os alunos continuaram com a lista de exercícios do Apêndice E, reforçando ainda mais o conhecimento sobre o conteúdo trabalhado.

No terceiro momento, o estudo centrou-se nas razões trigonométricas no triângulo retângulo. Após a explicação dos conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, a maioria dos alunos respondeu corretamente à questão 5 sobre razões trigonométricas, mostrando uma clara compreensão do assunto. Na Figura 86, temos o registro da solução da questão 5 respondida pelo aluno E da turma do 3º ano C.

Figura 86 – Resposta da questão 5 pelo aluno E.


a) Esboce a jogada da situação proposta.

x y 60° 60° 1,27 m

b) Calcule a medida do segmento do ponto de contato da bola 7 na tabela superior até a caçapa 4. Considere o ponto de contato, a bola 7 e a tacadeira pontos colineares. Dado: $\sqrt{3} =$ 1,73

x = 1,27 − y
TG 60° = 1,27 / y
1,73 . y = 1,27
x = 1,27 − 0,73
1,73 / 1 = 1,27 / y
y = 1,27 / 1,73
x ≈ 0,54 m
y ≈ 0,73 m
1,27 − 0,73 = 0,54
1270 ÷ 173 = 0,73
−1211
590
−519
71
173 × 7 = 1211

c) Classifique o triângulo cujos vértices são formados pelo ponto de contato, a caçapa 3 e caçapa 2, quanto aos ângulos e aos lados, respectivamente.

RETÂNGULO E ESCALENO

Fonte: Autor, 2024.

Como podemos ver, o aluno respondeu corretamente à pergunta. Além dele, a maioria dos alunos respondeu corretamente à questão 5 e concluiu a lista de exercícios do Apêndice E, indicando que o conhecimento foi concretizado.

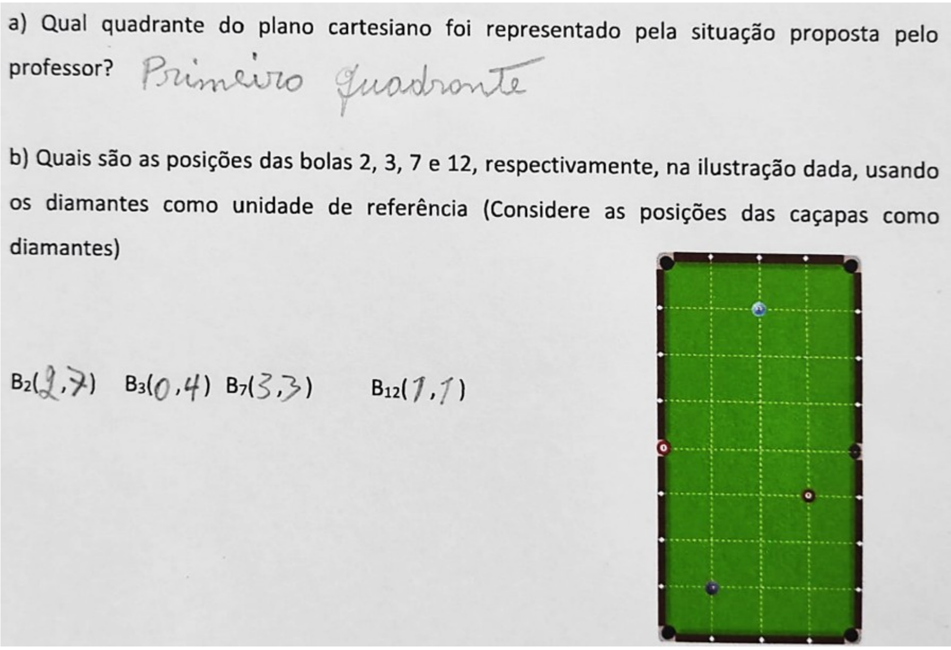
Os resultados positivos obtidos em todas as etapas da atividade 3 indicam que os objetivos foram plenamente alcançados. Os alunos demonstraram uma assimilação eficaz dos conceitos relacionados aos triângulos, aplicando-os tanto na teoria quanto na prática, e avançaram significativamente no desenvolvimento de seu pensamento geométrico.

3.2.4 Diagnóstico da intervenção através da atividade 4.

Após a intervenção da atividade 4 sobre coordenadas cartesianas no plano cartesiano e cálculo da distância entre dois pontos, observou-se uma assimilação satisfatória dos conteúdos por parte dos alunos. As explicações teóricas foram apresentadas de forma dinâmica, facilitando a compreensão dos conceitos. Como resultado, os alunos responderam corretamente algumas perguntas, demonstrando que entenderam o conteúdo.

Além disso, ao resolverem a questão 6 da seção 2.1.6, os alunos demonstraram facilidade, confirmando a assimilação dos tópicos discutidos. Na Figura 87, temos o registro da solução da questão 6 solucionada pelo aluno F da turma do 3º ano B.

Figura 87 – Resposta da questão 6 pelo aluno F.


a) Qual quadrante do plano cartesiano foi representado pela situação proposta pelo professor? Primeiro Quadrante

b) Quais são as posições das bolas 2, 3, 7 e 12, respectivamente, na ilustração dada, usando os diamantes como unidade de referência (Considere as posições das caçapas como diamantes)

$B_2(2,7)$ $B_3(0,4)$ $B_7(3,3)$ $B_{12}(1,1)$

Fonte: Autor, 2024.

Como pudemos constatar na Figura 87, o aluno F demonstrou um conhecimento adequado na solução da questão 6 sobre a localização de pontos. Ele conseguiu localizar todas as bolas corretamente, evidenciando sua compreensão do conteúdo.

Posteriormente, os alunos foram direcionados à mesa de sinuca, onde puderam consolidar o aprendizado em um contexto prático. Nesse ambiente, foram abordadas diversas situações que exigiam a localização de pontos e o cálculo da distância entre eles, usando como parâmetros de medida às caçapas e os diamantes da mesa de sinuca e as bolas, proporcionando uma aplicação concreta dos conceitos teóricos e reforçando a compreensão dos conteúdos trabalhados. Em seguida, os alunos responderam a lista de exercícios do

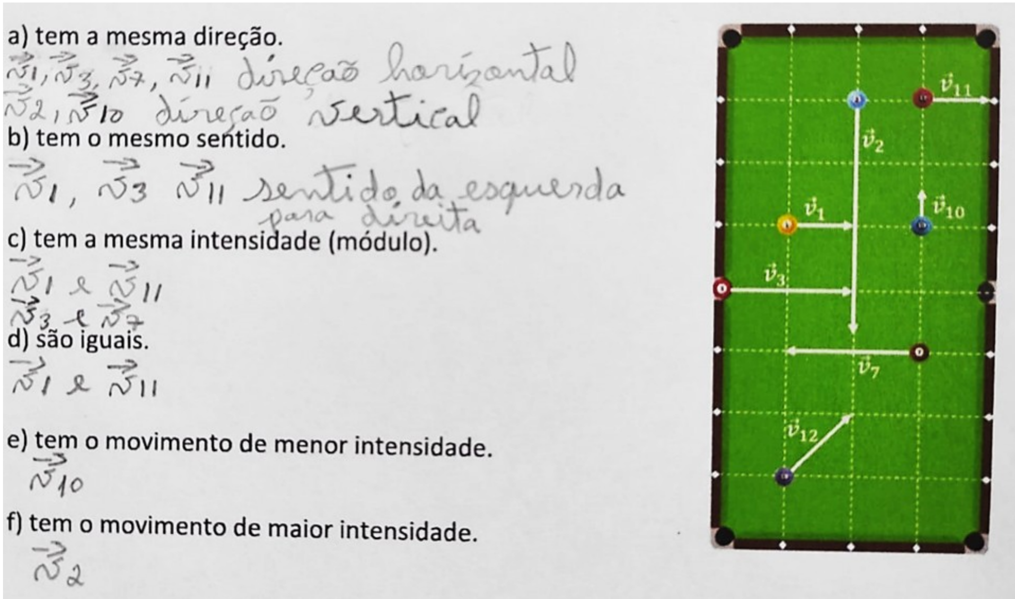
Apêndice F, reforçando ainda mais o conhecimento sobre o conteúdo trabalhado.

3.2.5 Diagnóstico da intervenção através da atividade 5.

Com a intervenção da atividade 5 sobre noções básicas de vetores no plano, observou-se um bom entendimento dos alunos sobre os conceitos de direção, sentido e módulo, apesar de estarem estudando esses tópicos pela primeira vez. As explicações teóricas foram apresentadas de forma ativa, facilitando a compreensão e o envolvimento dos alunos. Como resultado, os alunos responderam corretamente a algumas perguntas, indicando que aprenderam o conteúdo com certa facilidade.

Adicionalmente, a resolução da questão 7 da seção 2.1.6 mostrou que os alunos atingiram 100% de aproveitamento, confirmando que eles assimilaram os conceitos estudados. Uma evidência do sucesso dessa intervenção didática, pode ser verificado através da resolução da questão 7 pelo aluno G da turma do 3º ano C, conforme apresentado na Figura 88.

Figura 88 – Resposta da questão 7 pelo aluno G.



Fonte: Autor, 2024.

Posteriormente, os alunos foram direcionados à mesa de sinuca, onde consolidaram o aprendizado através de algumas jogadas associadas aos conceitos de direção, sentido e módulo. Esse ambiente prático permitiu que aplicassem os conceitos teóricos de maneira concreta, reforçando ainda mais a compreensão dos conteúdos trabalhados.

Portanto, a intervenção foi bem-sucedida e os alunos mostraram uma assimilação positiva dos conceitos básicos de vetores, indicando uma perspectiva promissora para o aprofundamento em tópicos futuros.

Com base no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, a resolução das questões propostas na seção 2.1.6 e das listas de exercícios, indica que a maioria dos alunos está no nível de dedução informal, já que nesse nível, os alunos são capazes de identificar e descrever as propriedades das figuras geométricas e relacioná-las entre si, o que foi claramente demonstrado na resolução das atividades e na forma como os alunos associaram os elementos da sinuca aos conceitos geométricos estudados. Com isso, podemos concluir que a estratégia de ensinar esses conceitos de forma dinâmica, aliada à prática na mesa de sinuca, mostrou-se eficaz.

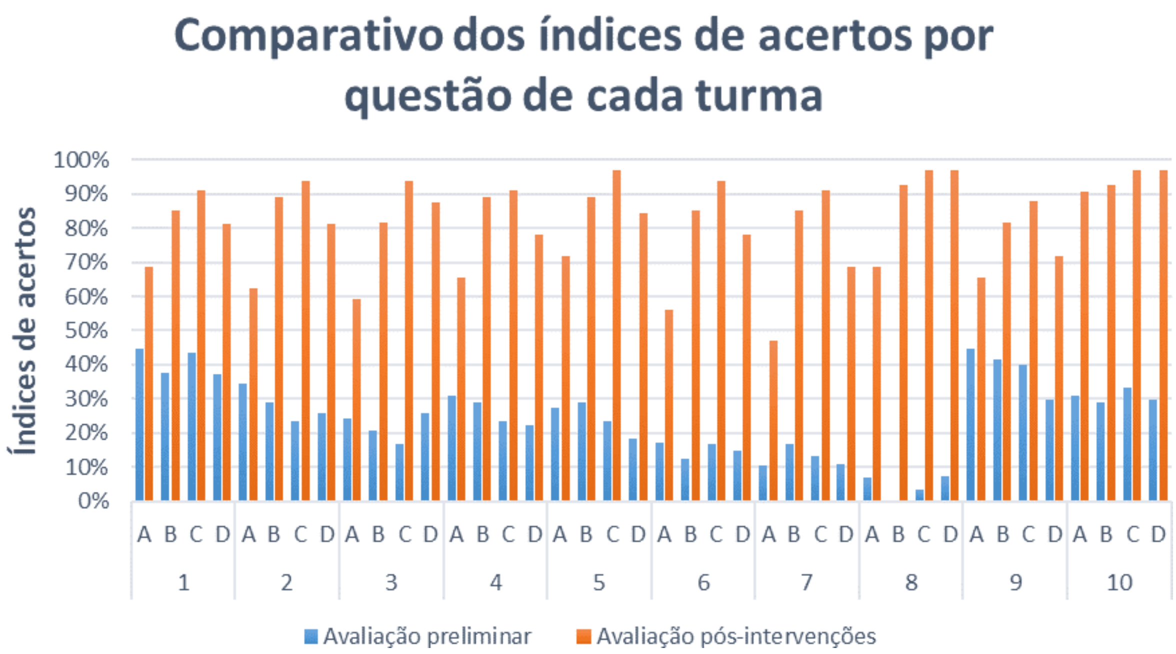
Vale destacar que os excelentes resultados alcançados têm uma relação direta com o trabalho docente. Em todos os momentos, os alunos foram direcionados, incentivados, respeitados e reconhecidos. Esse cuidado constante foi parte fundamental para o sucesso das intervenções através da sequência didática que utilizou a sinuca como ferramenta pedagógica. A dedicação em criar um ambiente de apoio e valorização foi crucial para engajar os alunos e maximizar os benefícios educacionais dessa abordagem inovadora, evidenciando à importância do papel docente nesse processo.

3.3 Análise da avaliação diagnóstica após as intervenções através da sequência didática.

A avaliação diagnóstica desempenha um papel crucial no processo educativo, especialmente quando aplicada antes e após as intervenções pedagógicas. Ela permite identificar e medir o impacto das intervenções, fornecendo dados sobre dificuldades e nível do progresso dos alunos, por exemplo. Esse tipo de avaliação ajuda a ajustar futuras estratégias de ensino e aprendizagem, garantindo que as necessidades dos alunos sejam atendidas de forma mais eficaz. Em vista disso, foi aplicada uma avaliação diagnóstica após as intervenções a 32, 27, 33 e 32 alunos dos terceiros anos A, B, C e D, respectivamente. Essa participação significa um aumento 13% em relação à aplicação da avaliação diagnóstica preliminar. Isso pode ser visto como um sinal de maior engajamento e comprometimento dos estudantes durante as intervenções.

Na Figura 89, é apresentado um gráfico comparativo dos índices de acertos por questão antes e depois das intervenções para cada turma, oferecendo uma visão clara das mudanças no desempenho dos alunos e ajudando a direcionar futuros esforços educativos.

Figura 89 – Comparativo dos índices de acertos por questão antes e após as intervenções para cada turma.



Fonte: Autor, 2024.

Após a aplicação das intervenções pedagógicas, observou-se um crescimento acentuado nos índices de acertos em todas as 10 questões da avaliação diagnóstica, comparado aos resultados da avaliação diagnóstica preliminar. Esse crescimento é particularmente notável em todas as turmas, mas especialmente nas turmas dos 3º anos B, C e D, destacando a eficácia das intervenções através da sequência didática usando a sinuca como ferramenta pedagógica.

Neste momento, mostraremos às considerações sobre as questões da avaliação diagnóstica aplicada após as intervenções.

A questão 1 tinha como objetivo específico avaliar o conhecimento do aluno sobre noções primitivas de geometria, como isso, verificou-se um aumento considerável no número de acertos (41%, aprox.), indicando que os alunos adquiriram uma base sólida em conceitos essenciais como ponto, reta, plano, segmento de reta e semirreta.

Nas questões 2 e 9, os alunos foram avaliados em relação à classificação e aos demais conceitos relacionados aos ângulos. Neste caso, os alunos demonstraram uma compreensão aprimorada na identificação e classificação dos diferentes tipos de ângulos, o que é crucial para o estudo de figuras geométricas mais complexas. Nesse caso, o índice de acertos teve um aumento de 53%, aproximadamente, mostrando uma assimilação consolidada, por grande parte dos alunos.

O índice de acertos na questão 3 reflete um domínio crescente sobre os conceitos de polígonos e cálculo de áreas, habilidades importantes para a resolução de problemas envolvendo figuras planas. Os alunos obtiveram um crescimento certa de 59%.

Em relação à questão 4, a melhora significativa nas respostas corretas indica que os alunos estão confortáveis em classificar triângulos com base em seus lados e ângulos, uma habilidade fundamental em geometria plana. Ainda sobre triângulos, a questão 5 avalia a compreensão do aluno em aplicar o teorema de Pitágoras. Os resultados mostraram um avanço notável de 61%, aproximadamente, com muitos alunos sendo capazes de resolver problemas que requerem o uso dessa importante relação matemática. Isso pôde ser verificado durante as aulas e na avaliação após as aulas. No caso de semelhança de triângulo (Questão 6 da avaliação pós-intervenções), como pode ser observado no gráfico da Figura 89, os alunos apresentaram um entendimento claro das condições para a semelhança de triângulos, o que é essencial para resolver uma variedade de problemas geométricos. Na última questão dentro dos estudos dos triângulos (Questão 7 da avaliação pós-intervenções), houve uma melhoria significativa no índice de acertos, mostrando que os alunos avançaram na compreensão das relações trigonométricas no triângulo retângulo, o que é crucial para o estudo adiantado de trigonometria e sua aplicação em situações práticas.

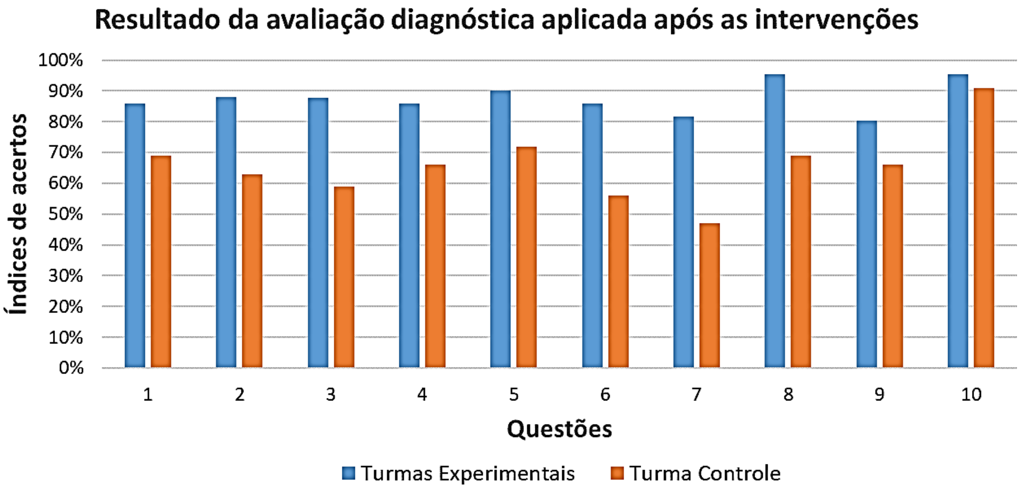
Na questão 8, que abordava noções básicas de vetores, foi observado o maior progresso entre os alunos das turmas B, C e D, atingindo uma diferença de 92%, aproximadamente. Inicialmente, na avaliação preliminar, os resultados foram extremamente baixos, e os alunos relataram que nunca haviam estudado o tópico de vetores. Após as intervenções através da sequência didática, houve uma melhoria significativa, indicando um progresso claro no entendimento desse conceito.

Na questão 10 da avaliação, o objetivo era avaliar o entendimento dos alunos sobre coordenadas cartesianas no plano. No entanto, não foi possível medir o progresso dos alunos em relação a este tópico, pois a avaliação diagnóstica preliminar não incluiu uma questão específica sobre coordenadas cartesianas. Apesar dessa limitação na comparação direta do progresso, é importante notar que o índice de acertos na questão 10 foi superior a 90%, em todas as turmas, o que sugere um bom entendimento do conteúdo por parte dos alunos.

Os resultados positivos observados nas turmas dos 3º anos B, C e D sugerem que a integração de atividades lúdicas e práticas, utilizando a sinuca no processo de ensino-aprendizagem, pode promover um maior engajamento e compreensão por parte dos alunos.

O gráfico da Figura 90 evidencia claramente essa diferença no desempenho entre a turma controle e as turmas experimentais na avaliação diagnóstica aplicada após as intervenções, reforçando a eficácia do uso de metodologias pedagógicas inovadoras.

Figura 90 – Resultado da avaliação diagnóstica aplicada após as intervenções.

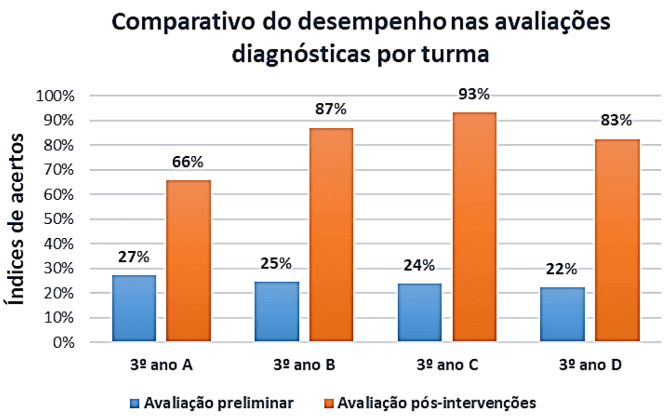


Fonte: Autor, 2024.

É importante lembrar que a turma do 3º ano A, atuou como grupo de controle, recebendo apenas aulas tradicionais expositivas, sem a introdução de métodos inovadores ou diferenciados. Em contrapartida, as turmas dos 3º anos B, C e D, atuaram como grupos experimentais, onde foi implementada a sequência didática que utilizou a sinuca como ferramenta pedagógica. Este método visa integrar conceitos práticos com o conteúdo curricular, potencializando a aprendizagem através de uma abordagem lúdica e interativa. Essa abordagem diferenciada parece ter sido especialmente eficaz, pois essas turmas apresentaram um aumento significativo nos índices de acertos, destacando-se em relação ao método tradicional.

No gráfico da Figura 91, podemos observar a comparação dos desempenhos das turmas A, B, C e D nas duas avaliações diagnósticas.

Figura 91 – Comparativo dos desempenhos por turma nas duas avaliações diagnósticas.



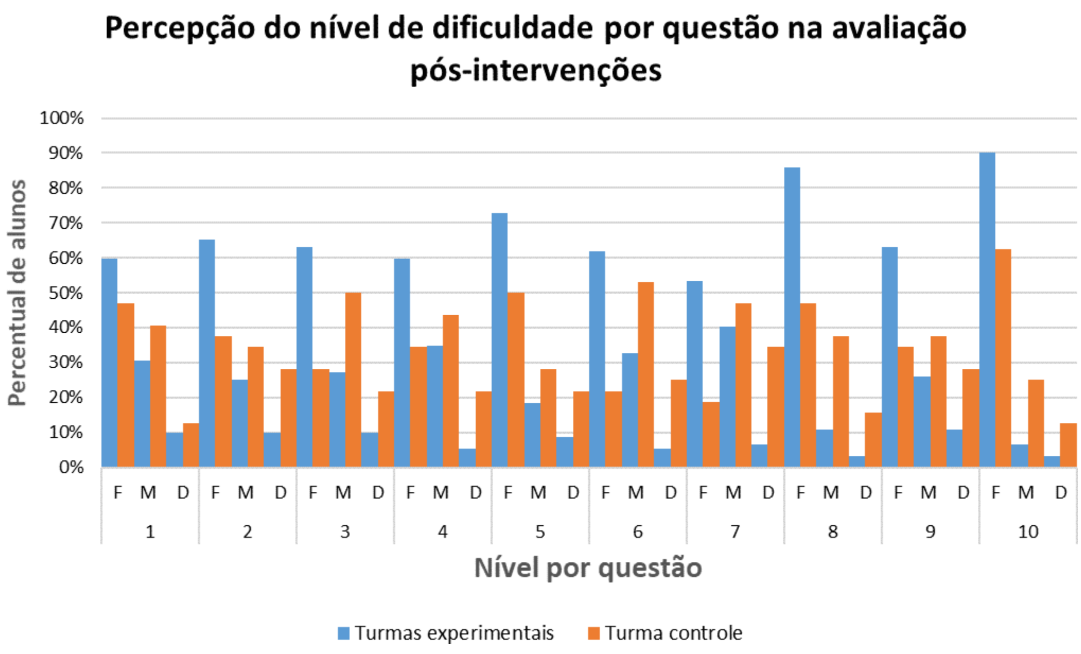
Fonte: Autor, 2024.

Podemos ver que todas as turmas demonstraram melhoria em seus desempenhos, comparando a avaliação preliminar e a avaliação após as intervenções, indicando um progresso geral no aprendizado.

O desempenho da turma controle (3º ano A), apesar da melhoria observada, esta foi relativamente menor que as demais turmas. Isso sugere que, embora o ensino tradicional tenha contribuído para o avanço dos alunos, faltou um elemento que potencializasse o engajamento e a compreensão profunda dos conteúdos. Por outro lado, os desempenhos das turmas experimentais (3º ano B, C e D), que participaram das aulas com a utilização da sinuca como ferramenta pedagógica, mostraram uma melhoria expressiva, com índices de acertos acima de 80%. Entre essas, a turma 3º ano C se destacou particularmente, apresentando o maior crescimento em desempenho, de acordo com o gráfico da Figura 91. Isso pode ser atribuído a fatores adicionais, como engajamento, a adaptação dos alunos à nova metodologia e o trabalho em grupo observado a todo instante entre os alunos dessa turma.

Com o objetivo de ter mais um indicador para explicar os resultados dos alunos na avalição diagnóstica após as intervenções, pedimos aos alunos, mais uma vez, que classificassem as questões como fáceis, moderadas ou difíceis, conforme observadono gráfico da Figura 92.

Figura 92 – Dados da percepção dos alunos do nível de dificuldade por questão na avaliação pós-intervenções.



Fonte: Autor, 2024.

Na contramão dos dados apresentados no gráfico da Figura 77, os dados sobre o nível de dificuldade das questões da avaliação após as intervenções mostrados na Figura 92 indicaram uma predominância acentuada da percepção de dificuldade baixa pelos alunos. Os alunos das turmas experimentais afirmaram majoritariamente as questões como fáceis, já os alunos da turma controle classificaram as questões como fáceis ou moderadas.

Essa percepção positiva dos alunos das turmas experimentais pode ser atribuída às intervenções realizadas através da sequência didática que empregarou o jogo de sinuca. Essa sequência proporciou aos alunos uma forma prática e divertida de aplicar conceitos teóricos, facilitando a compreensão e a solidificação do conteúdo abordado. Ao integrar o jogo de sinuca, os alunos puderam experimentar e visualizar na prática conceitos estudados, o que tornou o aprendizado mais acessível e envolvente.

Em consequência disso, os dados obtidos através do questionário 2 sobre o motive de possíveis dificuldades na resolução das questões, mostraram que os alunos das turmas experimentais, predominantemente, afirmaram que não tiveram dificuldades na resolução das questões dessa avaliação pós-intervenções, indicando que o nível de complexidade das perguntas estava adequado ou que eles estavam bem preparados para o conteúdo abordado.

Vale ressaltar que 86% dos alunos das turmas experimentais, aproximadamente, apontaram a questão 8 sobre noções básicas de vetores como fácil, indicando que a dificuldade enfrentada pelos alunos na avaliação preliminar, realmente estava associada ao fato de ser um tópico novo. Esse resultado sugere um aprendizado consolidado dos conceitos básicos de vetores debatidos na atividade 5.

A análise dos resultados obtidos após as intervenções baseada no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele é fundamental para compreender como os alunos progrediram na compreensão da geometria abordada neste trabalho. Os cinco níveis identificados por Van Hiele: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor representam estágios de complexidade crescentes na forma como os alunos percebem, compreendem e utilizam conceitos geométricos, facilitando a interpretação do nível de aprendizagem dos alunos.

Após as intervenções, observou-se um avanço significativo dos alunos que estavam nos níveis de visualização e análise para o nível de dedução informal. Indicando que os alunos não apenas reconheciam formas geométricas com base em suas características visuais e identificaram as propriedades das figuras geometrias, mas também passaram a entender e aplicar relações lógicas entre essas propriedades, começando a construir argumentos lógicos simples baseados nessas relações. Para exemplificar, um aluno no nível de dedução informal percebe que o quadrado é também um retângulo, pois tem todas as propriedades de um retângulo, percebe ainda que, dado um quadrilátero se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são congruentes. Sendo assim consegue resolver problemas usando uma argumentação lógica informal.

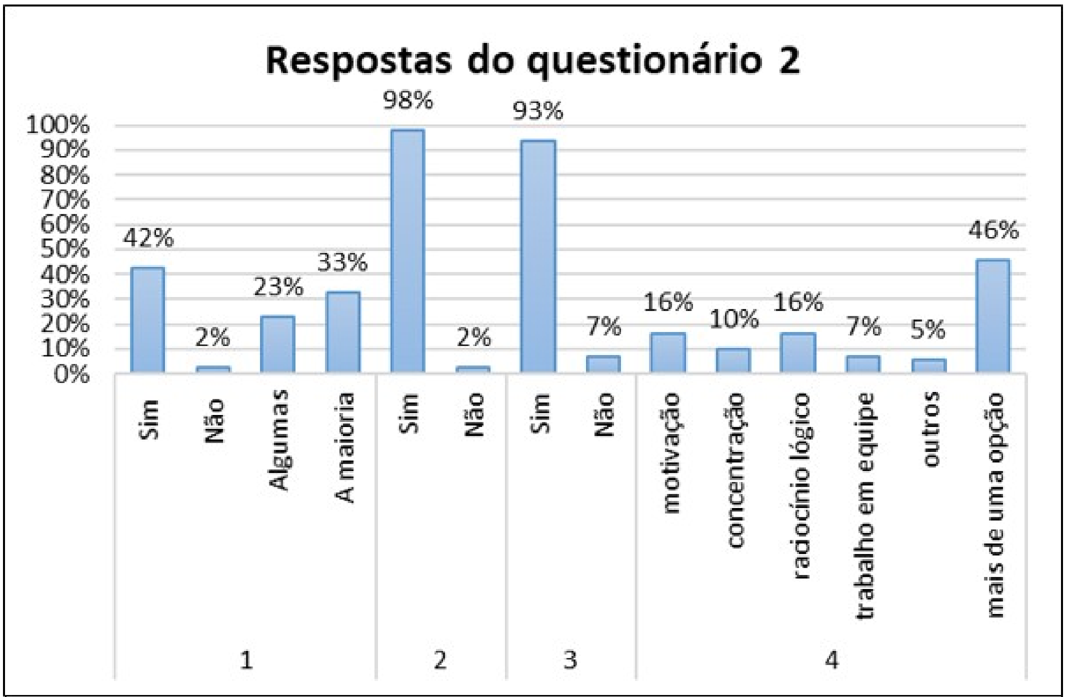
Os avanços mostrados após as intervenções usando o jogo de sinuca, foram possíveis devido a contextualização dos conceitos geométricos de maneira prática e envolvente. Essa abordagem contextualizada e ativa pode ter facilitado a maioria dos alunos a passar para o nível de dedução informal.

As atividades propostas, centradas na aplicação de conceitos geométricos em situações reais (como as jogadas de sinuca), incentivaram os alunos a desenvolverem habilidades de raciocínio lógico. Esse desenvolvimento é crucial para o avanço ao nível de dedução informal. Esses progressos destacam a importância de utilizar uma variedade de métodos de ensino, especialmente aqueles que incluem elementos práticos e lúdicos, pois verificamos que a aprendizagem ativa pode ser particularmente eficaz no ensino de conceitos abstratos como os da geometria.

Em resumo, os resultados observados nas turmas experimentais demonstram que intervenções didáticas inovadoras e contextualizadas, como o uso do jogo de sinuca, podem ter um impacto significativo no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Esse progresso, dos níveis de visualização e análise para o nível de dedução informal, indica uma melhoria na capacidade dos alunos de entender e aplicar conceitos geométricos básicos de forma lógica.

Colaborando com tudo o que foi dito acima, analisamos um segundo questionário de autoavaliação aplicado após as intervenções através da sequência didática nas turmas experimentais, com intuito de conhecer a opinião do aluno sobre a eficácia do processo de ensino-aprendizagem usando a sinuca. Essas informações podem ser vistas no gráfico da Figura 93.

Figura 93 – Dados obtidos através do questionário 2.



Questionário 2

1. - Depois das aulas de geometria usando o jogo de sinuca, você consegue identificar e relacionar figuras planas com objetos do seu dia a dia?

( ) Sim ( ) Não ( ) Algumas ( ) A maioria

2. - Você gostou de estudar geometria usando o jogo de sinuca?

( ) sim ( ) não

3. - O jogo de sinuca contribuiu na compreensão dos conteúdos estudados?

( ) Sim ( ) Não

4. - No estudo da geometria, o jogo de sinuca te ajudou (***assinale um ou mais itens***)*:*

( ) na motivação

( ) na concentração

( ) no raciocínio lógico

( ) no trabalho em equipe

Outro: ________________________________.

Fonte: Autor, 2024.

A análise do questionário 2 revelou que a maioria dos alunos afirmou conseguir identificar e relacionar figuras planas com objetos do cotidiano, indicando um entendimento prático dos conceitos geométricos.

Além disso, mais de 98% dos estudantes relataram ter gostado de estudar geometria utilizando a sinuca, destacando o caráter lúdico e motivador da metodologia. A grande maioria dos estudantes também indicou que o jogo de sinuca contribuiu significativamente para a compreensão dos conceitos estudados durante as aulas, atingindo 93%, aproximadamente, o índice de alunos convictos.

Os alunos também apontaram que o uso do jogo de sinuca teve um impacto positivo em diversas habilidades, destacando especialmente a motivação e o raciocínio lógico. O mais relevante é que 45% dos alunos, aproximadamente, mencionaram que a abordagem ajudou em mais de uma habilidade, sendo a motivação e o raciocínio lógico os aspectos mais enfatizados. Além disso, 5% dos alunos afirmaram que o jogo de sinuca ajudou a compreender a explicação da professora.

A experiência mostrou que os métodos ativos e lúdicos podem complementar o ensino tradicional, promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e envolvente, o que resulta em um aprendizado significativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo consistiu em ressaltar a eficácia das intervenções através da sequência didática usando a sinuca como ferramenta pedagógica para o ensino da geometria em turmas experimentais de 3º ano do ensino médio, comparando os resultados de uma turma controle que teve apenas aulas tradicionais expositivas. Os resultados obtidos foram expressivos, evidenciando que a abordagem prática e lúdica do jogo não apenas desperta o interesse dos alunos, mas também facilita a compreensão de conceitos geométricos de maneira significativa e envolvente.

Ao integrar a sinuca nas aulas de geometria, foi possível observar um aumento significativo no engajamento e na participação dos estudantes. A aplicação prática dos princípios geométricos no jogo permitiu uma visualização concreta dos conceitos, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Além disso, a utilização de sequência didática planejada de forma criteriosa, mostrou-se fundamental para guiar os alunos de maneira progressiva e estruturada, potencializando os benefícios do método. As atividades práticas aliadas às discussões teóricas promoveram um ambiente de aprendizado dinâmico e colaborativo, essencial para a assimilação dos conteúdos.

As avaliações diagnósticas aplicadas antes e após as intervenções didáticas foram fundamentais para avaliar o conhecimento prévio dos alunos e os avanços significativos obtidos. Essas avaliações permitiram um acompanhamento detalhado do desenvolvimento dos estudantes, identificando suas dificuldades e progressos. Adicionalmente, os questionários com autoavaliação foram essenciais para compreender a percepção e a recepção dos alunos em estudar geometria usando a sinuca como ferramenta pedagógica. Esses questionários forneceram informações valiosas sobre a motivação e o engajamento dos alunos, revelando uma recepção positiva e um aumento na confiança ao lidar com conceitos geométricos.

Os excelentes resultados das turmas experimentais, em comparação à turma controle, destacam ainda mais a eficácia desta metodologia. Os alunos das turmas que utilizaram a sinuca como ferramenta pedagógica apresentaram um desempenho significativamente superior nas atividades e na avaliação pós-intervenções, reforçando a viabilidade e os benefícios dessa abordagem inovadora. Este desempenho proporcionou um avanço da maioria dos alunos das turmas experimentais nos níveis do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, passando de visualização e análise para dedução informal.

É importante destacar que a eficácia das intervenções está diretamente relacionada ao trabalho docente, pois a dedicação e o preparo docente permitiram que a metodologia fosse aplicada de maneira eficaz, maximizando os resultados positivos.

Dado o sucesso das intervenções realizadas, sugere-se que essa metodologia também seja aplicada no ensino de jovens e adultos (EJA). A sinuca como ferramenta pedagógica poderia ajudar a combater a alta evasão e a baixa frequência dos alunos, proporcionando um ambiente de aprendizado mais atrativo e motivador. Consequentemente, melhorando o desempenho dos alunos em geometria, significativamente, além de contribuir para uma educação matemática mais inclusiva.

Portanto, conclui-se que a sinuca é uma ferramenta pedagógica valiosa para o ensino da geometria, recomendando a sua inclusão em currículos escolares e propondo a continuidade de pesquisas nesta área, visando aprimorar e expandir as metodologias de ensino.

Referências

Adhikari, Khagendra. (2020). Ausubel's learning Theory: Implications on Mathematics Teaching;

Arofah, M. N., & Noordyana, M. A. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Ditinjau dari Kemandirian Belajar Siswa pada Materi Lingkaran di Kelurahan Muarasanding. Plusminus: Jurnal Pendidikan Matematika, v. 1, p. 421-434, 2021;

BOULOS, P.; CAMARGO, I. Geometria Analítica. Um Tratamento Vetorial. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 19 abr. 2024;

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CBBS - CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE BILHAR E SINUCA (2009), Regras do Pool Modalidades: BOLA 8, BOLA 9 e 14x1. Disponível em <http://www.snookercbbs.com/regras/> Acesso em: 13 mai. 2024.

CBBS - CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE BILHAR E SINUCA (2012), Regras da Sinuca. Disponível em <http://www.snookercbbs.com/regras/> Acesso em: 13 mai. 2024.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. R. O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 4, p. 1-20, 2020.

COSTA, B. R.; MACHADO, S.; QUARESMA, A. A utilização da história da matemática como alternativa metodológica de ensino de geometria plana área e perímetro: área e perímetro. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 253-265, 2020;

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. São Paulo: Temas & Debates, 1991.

DIAS, Paulo Dirceu. História - os jogos do bilhar e o nascimento do snooker. 2012. Sorocaba - SP. Disponível em: <http://snookerclube.com.br/wp-content/uploads/2015/09/historiajogos dobilhar.pdf>. Acesso em: 13 mai. 2024.

Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana - 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013;

ELMAGD, M. A. Is Billiards considered a sport? International Journal of Physical Education, Sports and Health, v. 4, p. 248–251, 2017;

FARACO, Sergio; DIAS, Paulo Dirceu. Snooker: Tudo Sobre Sinuca, 2 ed. Porto Alegre, L&PM, 2007;

Garno, Benjamin. Modern billiards. A complete text-book of the game, containing plain and practical instructions how to play and acquire skill at this scientific amusement. [New York, Paris etc. The Brunswick-Balke-Collender co, 1904]. Disponível em: <https://www.loc.gov /item/04018618/>. Acesso em: 10 mai 2024;

Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica - 6. ed. – São Paulo: Atual, 2013;

KAVEH, A.; KHANZADI, M.; MOGHADDAM, M. R. Billiards-inspired optimization algorithm; a new meta-heuristic method. Structure, v. 27, p. 1722–1739, 2020;

LEAHY, J. (2011). Teaching Aspects of School Geometry Using the Popular Games Rugby and Snooker. In: Maasz, J., O'Donoghue, J. (eds) Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students. Chapter 12, p. 209-220, 2011.

LISNANI, L.; ASMARUDDIN, S. N. (2018). Desain Buku Ajar Matematika Bilingual Materi Bangun Datar Menggunakan Pendekatan PMRI Berkonteks Kebudayaan Lokal. Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika, 7(3), 345-356;

LOPES, A. B. Uma proposta de ensino fundamentada no desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a teoria de Van Hiele. 2022. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Itaqui/RS, 2022.

MENDES, M. F; DELGADO, C. C. Geometria: textos de apoio para educadores de infância. Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular -Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa, 2008, 90p.;

MÜLLER, M. G.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A; SCHELL, J. Uma revisão da literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino Peer Instruction (1991 a 2015). Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 39, p. 3403-3423, 2017.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. – Rio de Janeiro: SBM, 2013, 442p. (Coleção PROFMAT; 09).

MUNIZ, Cristiano Alberto. Brincar e Jogar – Enlaces teóricos e metodologias no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

NOGARI, M. C.; MARTIN, G. F. O software Geogebra e a pipa: possibilidades pedagógicas para o ensino de Geometria Plana. Research, Society and Development, v. 10, n. 11, p.1-15, 2021.

NOGUEIRA, Cléia Maria Ignatius. Tendências em Educação Matemática escolar: das relações aluno-professor e o saber matemático. In: ANDRADE, Doherty; NOGUEIRA, Cléia Maria Ignatius. org. Educação Matemática e as operações fundamentais. Maringá: EDUEM, 2005.

NURFADILAH, P.; AFRIANSYAH, E. A. (2022). Analisis Gesture Matematis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Open-Ended. Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME), 4(1), 14-29;

NUSAIBAH, N., PRAMUDYA, I., & SUBANTI, S. Geometric Thinking Skills of Seventh Grade Students on the Topic of Triangle and Quadrilateral Based on Van Hiele Geometry Learning Theory. Journal of Physics: Conference Series, v. 1, p. 1776, 2021;

PAULA, F. V; CARVALHO, T. S.; REIS, M. C. Jogo de sinuca: Uma possibilidade para o ensino de geometria. REVISTA Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 15, p. 01-16, 2020.

PEREIRA, Claudio Cesar Barbosa. Proposta de sequências didáticas para o ensino de Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio. 2023. 143 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, 2023.

PEREIRA, Lucas Rodrigues. Práticas de ensino em geometria plana. 2017. 171 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017.

PERETTI, L.; TONIN, C., G., M. Sequência didática na matemática. Revista de Educação do IDEAU, Getúlio Vargas, RS, v. 8, n. 17, p. 1-15, 2013.

Portilho, Gabriela - Mundo Estranho (Redação). Revista Super Interessante (2024). Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-a-diferenca-entre-bilhar-e-sinuca>. Acesso em: 20 abr. 2024.

RIZKY, E. N. F.; SRITRESNA, T. (2021). Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis dan Disposisi Matematis Siswa Antara Guided Inquiry dan Problem Posing. PLUSMINUS: Jurnal Pendidikan Matematika, 1(1), 33-46.

SANTOS, M.E. K. L.; MAZZINI, T. F. S. Teoria de Van Hiele: os níveis de pensamento geométricos de alunos concluintes do Ensino fundamental. Revista de Casos e Consultoria, [S. l.], v. 12, n. 1, e27013, p. 1-19, 2021.

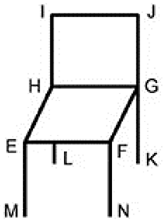
SILVA, N. F.; Morais Júnior E. F. O tratamento vetorial para conceitos de geometria analítica do ensino médio usando o GeoGebra. Instituto Federal de Pernambuco – Campus Pesqueira – PE. Curso de Licenciatura em Matemática. Pesqueira, p. 1-15, 2020;

VIGOTSKY, Lev Semyonovich. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

Apêndices

APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica aplicada antes da intervenção com autoavaliação.

01. Na aula introdutória de Geometria, a professora conceituou ponto, reta e plano e exemplificou através do seguinte desenho:



Analisando a imagem, alguns alunos fizeram as seguintes afirmações:

I) J, G e K são pontos colineares.
II) EFGH representa um plano.
III) $\overline{JK}$ e $\overline{IJ}$ são segmentos de retas paralelos.

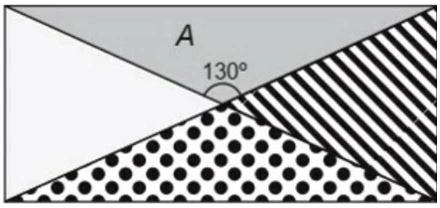
Está correto o que se afirma em:
a) I apenas
b) II apenas.
c) I e II.
d) II e III.
e) I, II e III.

02. Durante a elaboração de um projeto, um arquiteto coletou algumas medidas de ângulos na planta. As medições foram 90º, 120º e 75º. Na geometria sabemos que os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua medida. Nesse caso, os ângulos coletados pelo arquiteto são, respectivamente:
a) agudo, reto, obtuso
b) agudo, obtuso, reto
c) reto, agudo, obtuso
d) reto, obtuso, agudo
e) obtuso, obtuso, agudo

03. Tiago comprou um terreno que possui formato de um retângulo, com dimensões de 20 metros de comprimento e 5 metros de largura. Sua irmã Sara comprou um terreno com a mesma área, entretanto, com formato quadrado. A medida do lado do terreno da Sara é?

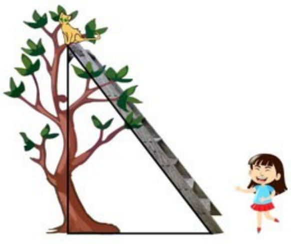
a) 5 metros
b) 8 metros
c) 10 metros
d) 15 metros
e) 20 metros

04. Uma colcha de retalhos, com formato retangular, é feita com quatro recortes triangulares de tecidos, conforme a figura.



Considere que as costuras nos sentidos das diagonais dessa colcha são perfeitamente retilíneas. O retalho A da colcha, que tem o formato de um triângulo, pode ser classificado quanto a seus ângulos internos e lados, respectivamente, como
a) acutângulo e isósceles.
b) obtusângulo e escaleno.
c) obtusângulo e isósceles.
d) retângulo e escaleno.
e) acutângulo e equilátero.

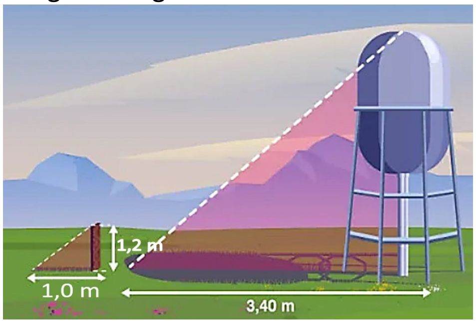
05. Carla ao procurar seu gatinho o avistou em cima de uma árvore. Ela então pediu ajuda a sua mãe e colocaram uma escada junto à árvore para ajudar o gato a descer.



Sabendo que o gato estava a 8 metros do chão e a base da escada estava posicionada a 6 metros da árvore, qual o comprimento da escada utilizada para salvar o gatinho?

a) 8 m b) 10 m c) 12 m d) 13 m e) 14 m

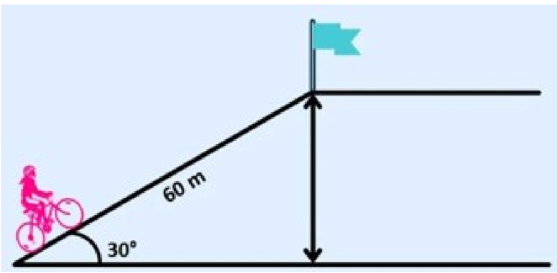
06. Renata quer calcular a altura da sua caixa d’água. Para isso, durante o dia, ela observou a sombra de um pedaço de madeira reto ao lado da caixa d’água e mediu o comprimento da sombra, que era de 1,0 metro. Já a sombra da caixa d’água era de 3,40 metros, conforme a imagem a seguir:



Sabendo que a altura do pedaço de madeira era de 1,2 metro, então a altura da caixa d’água é de:

a) 3,20 m
b) 3,52 m
c) 4,08 m
d) 4,40 m
e) 4,95 m

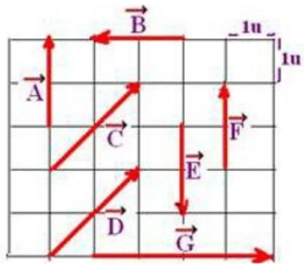
07. Uma ciclista participando de um campeonato se aproxima da linha de chegada que se encontra no alto de uma ladeira. O comprimento total dessa última parte da prova é de 60 m e o ângulo formado entre a rampa e a horizontal é de 30°. Sabendo disso, calcule a altura vertical que a ciclista precisa subir.



Dados: sen(30°) = 0,50; cos(30°) = 0,87 tg(30°) = 0,58

a) 20 metros.
b) 30 metros.
c) 35 metros.
d) 40 metros.
e) 46 metros.

08. Observe a figura a seguir e determine quais os vetores que:



a) tem a mesma direção.

b) tem o mesmo sentido.

c) tem a mesma intensidade (módulo).

d) são iguais

09. Sobre a posição relativa entre duas retas em um plano, associe corretamente as colunas a seguir:

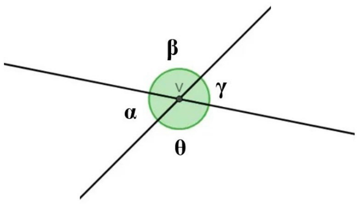
1. Retas concorrentes
2. Retas paralelas
3. Retas coincidentes

( ) Retas que não possuem pontos em comum.
( ) Retas que possuem infinitos pontos em comum.
( ) Retas que possuem um único ponto em comum.

Marque a alternativa que possui a ordem correta da associação entre as colunas:

a) 1 - 2 - 3
b) 2 - 3 - 1
c) 3 - 1 - 2
d) 1 - 3 - 2
e) 3 - 2 -1

10. Na imagem a seguir, estão destacados os ângulos α, β, γ e θ; analisando-a, podemos afirmar que:



a) α e β são complementares.
b) γ e α são suplementares.
c) β e γ são opostos pelo vértice.
d) θ e β são congruentes.
e) θ e α são replementares.

Autoavaliação

	Questões (marque com um x)									
Que nível de dificuldade você associa a questão:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Fácil										
Moderada										
Difícil										
Que dificuldades você teve na questão:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Nunca estudei o conteúdo.										
Já estudei o conteúdo, mas não consegui resolver.										
Tive dificuldade na resolução da questão, mas fiz.										
Não tive dificuldade na resolução da questão.										

Questionário 1

1- - Você consegue identificar e relacionar figuras planas com objetos do seu dia

adia? ( ) Sim ( ) Não ( ) Algumas ( ) A maioria

2- - Para resolver os problemas de geometria, você costuma planejar estratégias?

( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

3- - Você tem dificuldade em aprender conteúdos de

geometria? ( ) Sim ( ) Não

4- - Você prefere aulas teóricas ou

práticas? ( ) Teóricas ( ) Práticas

5- - O que você acha de estudar os conteúdos presentes na avaliação diagnóstica usando o jogo de sinuca?

( ) ótimo ( ) bom ( ) tanto faz ( ) não gostaria

6 - Você acha que o jogo de sinuca pode ajudar a entender conceitos de geometria?

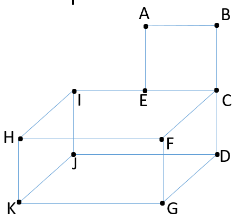
( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

7 - Qual a sua familiaridade com o jogo de sinuca?

( ) Alta ( ) moderada ( ) baixa

APÊNDICE B - Avaliação diagnóstica aplicada após a intervenção com autoavaliação.

01. Na aula introdutória de Geometria, a professora conceituou ponto, reta e plano e exemplificou através do seguinte desenho:



Analisando a imagem, alguns alunos fizeram as seguintes afirmações:

I) B, C e D são pontos colineares.
II) ABCF representa um plano.
III) $\overline{HK}$ e $\overline{FG}$ são segmentos de retas paralelas

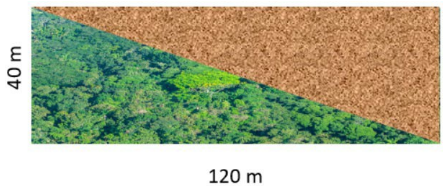
Está correto o que se afirma em:

a) I apenas.
b) I e II apenas.
c) I e III apenas.
d) II e III apenas.
e) I, II e III

02. Durante visita na obra, o engenheiro responsável constatou que havia uma distorção nos ângulos do desenho da garagem. A ideia é que a garagem tenha formato de retângulo. Entretanto, ele verificou que dois ângulos do quadrilátero que demarcam o desenho mediam 100° e os outros dois mediam 80° cada. Os ângulos de 100° e 80° são classificados respectivamente como:

a) agudo e obtuso.
b) reto e agudo.
c) agudo e reto.
d) obtuso e agudo.
e) reto e agudo.

03. Uma fazenda possui formato retangular de dimensões 120 m x 40 m. Durante a compra, um agricultor viu que, pela legislação vigente, ele não poderá desmatar metade desse terreno, sendo assim, ele o dividiu diagonalmente conforme a imagem a seguir:



A área que deve ser mantida preservada é de:

a) 1600 m² b) 2400 m² c) 3000 m²
d) 3600 m² e) 7200 m²

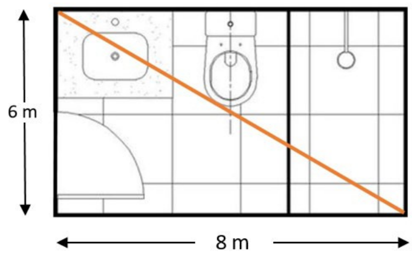
04. (ENEM 2018 - adaptada) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.
A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida de 170°.

A classificação quanto aos ângulos e aos lados do triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é:

a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo equilátero.
e) obtusângulo isósceles.

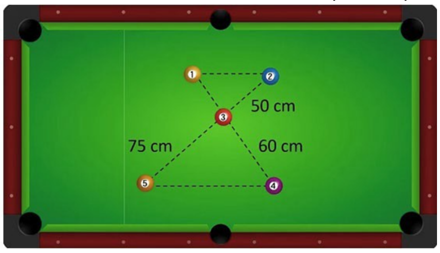
05. A área do banheiro de um clube possui formato de retângulo de dimensões 8 m x 6 m. Na diagonal do piso desse banheiro, será colocado um cano para a passagem de esgoto, conforme a imagem.



Nessas condições, o comprimento desse cano, em metros, deve ser de:

a) 6 m b) 8 m c) 10 m d) 14 m e) 15 m

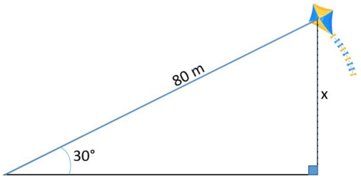
06. Em uma mesa de sinuca, existem 5 bolas dispostas. A reta formada entre as bolas 1 e 2 é paralela à reta formada entre as bolas 4 e 5. A bola 3 está entre as retas paralelas em um ponto na qual é possível formar dois triângulos semelhantes com as bolas 1, 2 e 4, 5.



Sabendo que as distâncias entre as bolas 2 e 3 mede 50 cm, 3 e 5 mede 75 cm e 3 e 4 mede 60 cm, conforme dispostas na imagem. Calcule a distância entre as bolas 1 e 3?

a) 20 cm
b) 40 cm
c) 60 cm
d) 50 cm
e) 90 cm

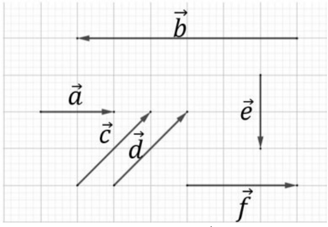
07. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 30° com o solo. O comprimento do fio é 80 m. determine a altura da pipa em relação ao solo.



Dados: sen(30°) = 0,5; cos(30°) = 0,87; tg(30°) = 0,58

a) 30 m b) 35 m c) 40 m d) 45 m e) 50 m

08. Observe a figura a seguir sobre vetores e julgue as afirmativas a seguir:



I – os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção.

II – os vetores $\vec{b}$ e $\vec{f}$ têm o mesmo sentido.

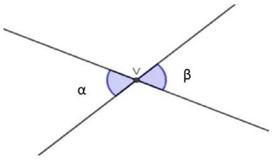
III – os vetores $\vec{a}$ e $\vec{e}$ têm a mesma intensidade (módulo).

IV – os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são iguais.

Marque a alternativa correta:

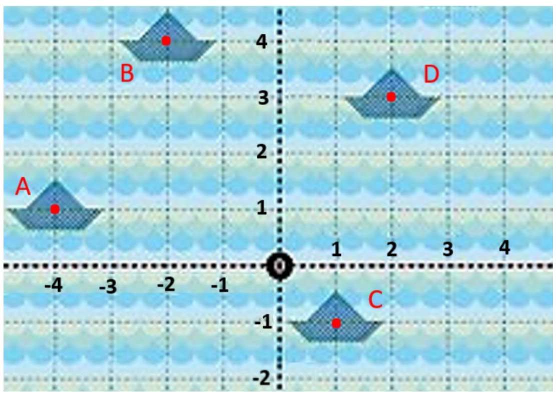
a) somente I e II são verdadeiras
b) somente I, II e III são verdadeiras
c) somente I, III e IV são verdadeiras
d) todas são verdadeiras
e) todas são falsas.

09. Analisando a imagem a seguir, podemos afirmar que os ângulos α e β são:



a) congruentes
b) suplementares
c) complementares
d) replementares
e) adjacentes

10. Os jogos inseridos no contexto escolar propiciam o desenvolvimento de habilidades, bem como auxiliam no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, permitindo um caminho de construção do conhecimento que vai da imaginação à abstração de ideias, mediadas pela resolução de problemas. O jogo batalha naval mostra que é possível amenizar as dificuldades de compreensão do conceito de localização de ponto no plano cartesiano. Diante disso, localize na figura os pontos que representam os barcos A, B, C e D, respectivamente.



a) (-4,1); (-2,4); (1,-1); (2,3)
b) (2,4); (1,-2); (-4,3); (-2,1)
c) (3,3); (2,-1); (-4,-1); (-2,4)
d) (2,4); (-1,-1); (-4,1); (-2,4)
e) (2,2); (1,-1); (-4,2); (-2,4)

Autoavaliação

	Questões (marque com um x)									
Que nível de dificuldade você associa a questão:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Fácil										
Moderada										
Difícil										
Que dificuldades você teve na questão	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Não tive dificuldade na resolução										
Tive um pouco de dificuldade na resolução, mas fiz										
Estudei o conteúdo, mas não consegui resolver										

Questionário 2

1- - Depois das aulas de geometria usando o jogo de sinuca, você consegue identificar e relacionar figuras planas com objetos do seu dia a dia?

( ) Sim ( ) Não ( ) Algumas ( ) A maioria

2- - Você gostou de estudar geometria usando o jogo de sinuca? ( ) sim ( ) não

3- - O jogo de sinuca contribuiu na compreensão dos conteúdos estudados? ( ) Sim ( ) Não

*4- - No estudo da geometria, o jogo de sinuca te ajudou (**assinale um ou mais itens**):*

( ) na motivação

( ) na concentração

( ) no raciocínio lógico

( ) no trabalho em equipe

Outro:__________________________________.

APÊNDICE C - 1ª lista de exercícios: Noções básicas de geometria.

1) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as afirmações:

( ) Por um ponto passam infinitas retas.

( ) Por dois pontos distintos passa uma reta.

( ) Uma reta contém dois pontos distintos.

( ) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.

( ) Por três pontos dados passa uma só reta.

2) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) Três pontos distintos são sempre colineares.

( ) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.

( ) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.

( ) Três pontos distintos não colineares pode formar um plano

( ) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.

3) Sobre uma mesa de sinuca há quatro bolas, sendo três delas colineares, usando essas bolas, quantas retas podemos construir? Considere as bolas como pontos distintos.

4) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
( ) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
( ) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
( ) Se duas retas distintas não têm ponto comum, então elas são paralelas.
( ) Du as retas são coincidentes se, e somente se, têm muitos pontos em comum.

5) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
( ) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
( ) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
( ) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
( ) Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
( ) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.
( ) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

6) Os segmentos AB e BC são adjacentes, de tal maneira que $\overline{AB}$ é o triplo de $\overline{BC}$, e $\overline{AC} = 32\ cm$. Determine as medidas dos segmentos AB e BC.

7) Assinale a afirmação verdadeira:

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.

b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.

c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.

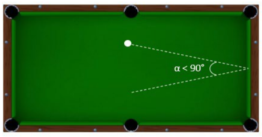
d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

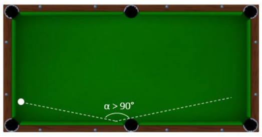
e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

APÊNDICE D - 2ª lista de exercícios: Ângulos e polígonos.

1) Marcos comprou uma mesa de sinuca brasileira com campo de jogo com as medidas livres de 2,54 m de comprimento e 1,27 m de largura e uma mini mesa para sua filha Ana com medidas livres de 1,27 m de comprimento e 0,635 m de largura. Calcule as áreas das mesas, em centímetros e obtenha a razão entre as áreas da mesa maior e menor.

2) Classifique os ângulos formados na mesa de sinuca a partir de jogadas com a tabela curta formando um ângulo menor que 90° e a tabela longa formando um ângulo maior que 90°, conforme ilustrado na figura.





3) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos medem 4 centímetro cada?

4) Quanto mede a altura de um triângulo equilátero de lado l?

5) Calcule o perímetro e a área do triângulo equilátero usado para arrumar as bolas no início da partida de um jogo de sinuca, sabendo que a medida do seu lado é de 31 cm.

6) O polígono que tem o número de lados igual ao número de diagonais é o:

a) hexágono

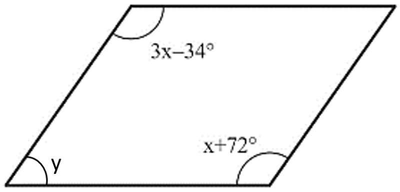
b) pentágono

c) triângulo

d) heptágono

e) não existe

7) Dado o paralelogramo, determine x e y.



8) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II. Existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural,

então o número de lados do polígono é ímpar.

a) Todas as afirmações são verdadeiras.

b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

c) Apenas (I) é verdadeira.

d) Apenas (III) é verdadeira.

e) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

APÊNDICE E - 3ª lista de exercícios: Trigonometria.

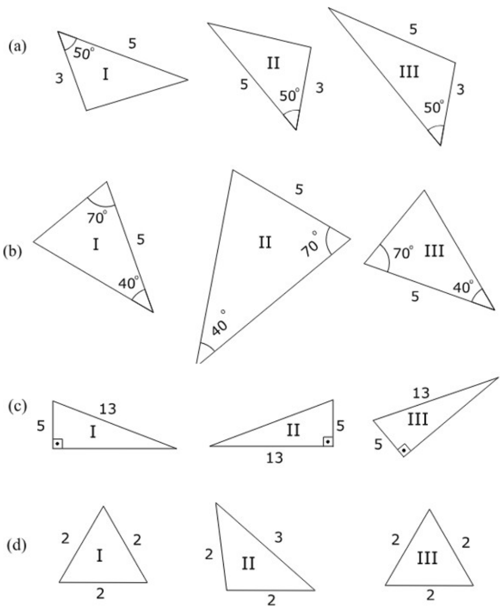
1) Uma mesa de sinuca brasileira possui dimensões específicas que variam de acordo com o tipo de jogo, mas para as mesas mais comuns usadas em competições de sinuca, as dimensões são as seguintes:

Dimensões da Mesa: Comprimento: 2,84 metros e largura: 1,42 metros

Área de Jogo (superfície útil): Comprimento: 2,54 metros e largura: 1,27 metros

Com base nessas dimensões de área de jogo, calcule a distância entre a bola branca e a bola 8, sabendo que a bola branca está na “boca” da caçapa inferior esquerda e a bola 8 está na “boca” da caçapa superior direita.

2) Em cada grupo de triângulos, verificar os congruentes e indicar o caso de congruência.



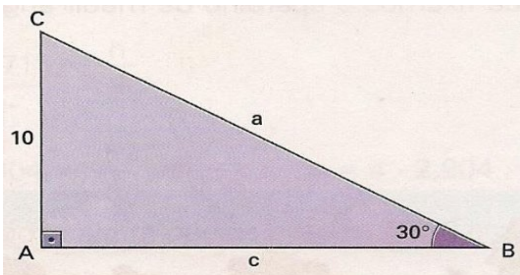
3) Para descobrir a altura de um prédio, Pedro mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luiz, que tem 1,8 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

4) O triângulo ABC é retângulo em A e tem catetos medindo 6 cm e 12 cm. Os pontos D, E e F são tomados em $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de tal forma que ADEF é um quadrado. A área desse quadrado, em cm², vale.

5) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede 80 cm?

6) Qual é a altura da árvore que faz uma sombra de 8,67 m de comprimento quando o sol está 30° acima do horizonte? Dado $\sqrt{3} = 1{,}73$.

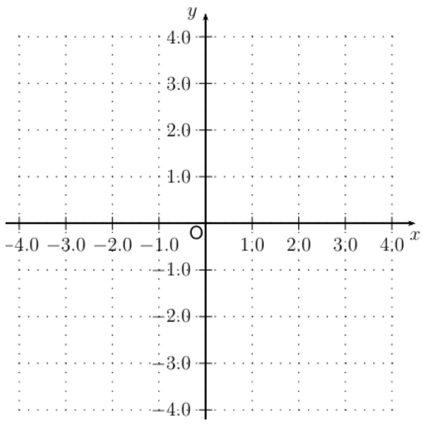
7) Determine no triângulo retângulo ΔABC as medidas a e c indicadas. Dado $\sqrt{3} = 1{,}73$.



8) Sabe-se que, num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 40 cm. Se cada ângulo da base desse triângulo mede 62°, determine:
a) a medida x da base; b) a medida h da altura.
(Use: sen 62° = 0,88; cos 62° = 0,47; tg 62° = 1,88)

APÊNDICE F - 4ª lista de exercícios: Coordenadas cartesianas no plano

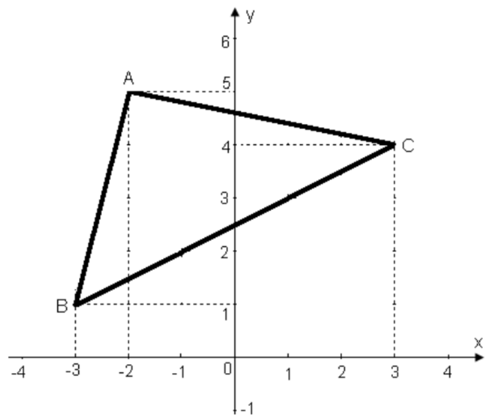
1) Localize os pontos de coordenadas A(4, 2), B(−3, 4), C(−3, −3), D(3, −4) e E(0, 2) no plano.



2) Considere a área de jogo de uma mesa de sinuca brasileira com comprimento de 2,54 metros e largura de 1,27 metros. A bola branca está na caçapa inferior esquerda, que será considerada a origem (0, 0) e a bola 8 está localizada no ponto (1,60, 1,20). Qual é a distância entre a bola branca e a bola 8?

3) Um rato sai de um ponto X, anda 6 metros para a esquerda, 5 metros para cima, 2 metros para a direita e 2 metros para baixo, chegando ao ponto Y. Qual a distância entre X e Y?

4) Localize os pontos A, B e C dos vértices do triângulo ΔABC representado no plano cartesiano, respectivamente:



5) Calcule a distância entre os pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a) $A(6,7)$ e B(9,11)

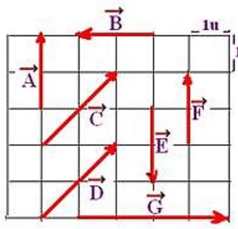
b) $A(-3,5)$ e B(3,13)

c) $A(0,3)$ e B(4,0)

6) Um paisagista ao projetar um jardim usando um programa de computador, usa os lados do terreno, que tem formato retangular, como eixos do plano cartesiano. Ele pretende colocar duas estátuas: a primeira no ponto A(1, 1) e a segunda no ponto B(9, 7) Calcule a menor distância entre as duas estátuas.

APÊNDICE G – 5ª lista de exercícios: Noções básicas de vetores no plano.

1) Em matemática, um vetor é um segmento de reta orientado que representa uma grandeza vetorial, como força, velocidade, aceleração ou distância. Os vetores têm módulo (tamanho), direção e sentido, e são representados geometricamente por setas que partem da origem. Observe a figura a seguir e determine quais os vetores que:



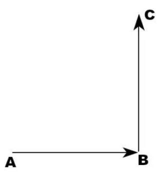
a) tem a mesma direção.

b) tem o mesmo sentido.

c) tem a mesma intensidade (módulo).

d) são iguais.

2) Os vetores a seguir mostram o deslocamento de uma partícula. Marque a alternativa correta sabendo que o caminho AB possui 3 mm, BC possui 4 mm e que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB}$ são perpendiculares.



a) O deslocamento vetorial da partícula é 7 mm.

b) A distância total percorrida pela partícula é 7 mm, e o deslocamento é 5 mm.

c) Tanto a distância total percorrida quanto o deslocamento da partícula são iguais a 7 mm.

A determinação do deslocamento vetorial é dada pela soma das distâncias AB e BC.

3) Mesmo que o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ fosse diferente, o deslocamento vetorial seria igual a 5 mm.

4) Quando dizemos que a velocidade de uma bola é de 20m/s, horizontal e para a direita,

estamos definindo a velocidade como uma grandeza:

a) escalar

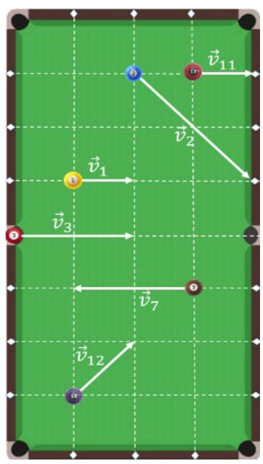
b) algébrica

c) linear

d) angular

e) vetorial

5) Ao correlacionar o movimento da bola de sinuca com o estudo de vetores, podemos determinar quais os vetores da figura a seguir:



a) tem a mesma direção.

b) tem o mesmo sentido.

c) tem o mesmo módulo.

d) são iguais.