UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jhonata Willame Cordeiro de Vasconcelos Ferreira Barros

Explanação de modelos geradores de Ternos Pitagóricos

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jhonata Willame Cordeiro de Vasconcelos Ferreira Barros

Explanação de modelos geradores de Ternos Pitagóricos

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

B277e Barros, Jhonata Willame Cordeiro de Vasconcelos Ferreira.
Explanação de modelos geradores de ternos pitagóricos / Jhonata Willame Cordeiro de Vasconcelos Ferreira Barros. – Recife, 2024.
105 f.; il.

Orientador(a): Thiago Dias Oliveira Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências.

1. Pitágoras, Teorema de. 2. Modelos matemáticos. 3. Geométrico analítica. 4. Geometria euclidiana 5. Sequências (Matemática). I. Silva, Thiago Dias Oliveira, orient. II. Título

CDD 510

À minha família

Agradecimentos

A Deus, por me dar forças e sabedoria ao longo dessa jornada.

À minha amada esposa, Fabiola, pelo amor, paciência e incentivo constantes, fundamentais para que eu pudesse alcançar este momento. Sem o seu apoio incondicional, esse sonho não seria possível.

À minha filha, Maria Fernanda, que com sua alegria e carinho tornou todos os desafios mais leves e me motivou a seguir adiante.

Ao meu orientador, professor Thiago Dias, pela orientação precisa, pelos ensinamentos e pela confiança depositada ao longo dessa caminhada.

Aos meus colegas de curso, Cleilton, Jadson, Nelson e Douglas, pelos momentos de troca de conhecimento, apoio e companheirismo no PROFMAT, que enriqueceram essa jornada acadêmica.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu sincero agradecimento.

"Bendize, ó minha alma, ao Senhor, e tudo o que há em mim bendiga o seu santo nome. Bendize, ó minha alma, ao Senhor, e não te esqueças de nenhum de seus benefícios. É ele quem perdoa todas as tuas iniquidades e sara todas as tuas enfermidades; quem redime a tua vida da perdição e te coroa de benignidade e de misericórdias.

(Bíblia Sagrada, Salmo 103:1-4)

Resumo

A proposta desse trabalho é abordar as conhecidas ternas pitagóricas do ponto de vista algébrico e geométrico. Essa dissertação tratará de vários aspectos relevantes em relação a esse tema. Desenvolvemos algumas maneiras de obtenção de ternas pitagóricas, desde as mais conhecidas generalizações clássicas de Pitágoras e Platão até apresentação mais moderna, onde os ternos são dados por $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$. Estudamos também métodos de obtenção de ternos pitagóricos provenientes da geometria analítica e Euclidiana. Provados algumas relações de círculos notáveis de raio inteiro ao triângulo pitagórico e retratamos algumas sequências especiais como a de Fibonacci e Progressões aritméticas relacionadas aos ternos pitagóricos. Conclui-se essa dissertação com uma proposta de sequência didática para ser trabalhada em três momentos, com a utilização de ferramentas como o geogebra e o portugol studio, que são softwares muito utilizados por professores de matemática da educação básica. Por fim, apresentamos uma lista de exercícios resolvidos com vários níveis de complexidade e dificuldade, dos mais elementares até o nível olímpico.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Ternos pitagóricos; método geométrico dos ternos pitagóricos; sequência e ternos pitagóricos.

Abstract

The purpose of this work is to approach the well-known Pythagorean triples from an algebraic and geometric point of view. This dissertation will address several relevant aspects in relation to this topic. We developed some ways to obtain Pythagorean triples, from the best-known classical generalizations of Pythagoras and Plato to a more modern presentation, where the triples are given by $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$. We also study methods for obtaining Pythagorean terms from analytical and Euclidean geometry. We proved some relationships of notable circles of integer radius to the Pythagorean triangle and portrayed some special sequences such as Fibonacci and Arithmetic progressions related to Pythagorean triples. This dissertation concludes with a proposal for a didactic sequence to be worked on in three moments, using tools such as geogebra and portugol studio, which are software widely used by mathematics teachers in basic education. Finally, we present a list of solved exercises with various levels of complexity and difficulty, from the most basic to the Olympic level.

Keywords: Pythagorean theorem; Pythagorean suits; geometric method of Pythagorean suits; sequence and Pythagorean suits.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Apresentação

Muitos filósofos da antiguidade realizaram estudos sobre os números inteiros em triângulos. Os babilônios mostraram que, ao construímos um triângulo com lados 3, 4 e 5, para qualquer unidade dada, podemos ter certeza de que os lados 3 e 4 formam um ângulo reto, em um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 5. Esse conhecimento foi aplicado por carpinteiros babilônios para criar ângulos retos precisos. Essa é uma ilustração prática do teorema de Pitágoras. Esse teorema estabelece que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados "catetos", a reciprocidade desse teorema também é valida.

Segundo o (WIKIPEDIA, 2021). "O mais famoso exemplo de matemática babilônica é a tabela Plimpton 322". Em que a mesma é uma antiga tábua de argila babilônica, datada de aproximadamente 1800 a.C., que contém uma tabela de números esculpidos em escrita cuneiforme.

Figura 1 – Plimpton 322, Fonte: (WIKIPEDIA, 2021)

Considerada uma das mais notáveis relíquias matemáticas do mundo antigo, a Plimpton 322 é famosa por suas colunas de números que representam, de forma sistemática, soluções de triângulos retângulos, o que implica um conhecimento avançado da matemática, incluindo os números pitagóricos, muito antes de Euclides e do desenvolvimento formal da geometria na Grécia Antiga.

Portanto, a aplicação prática do teorema de Pitágoras como método para construir ângulos retos era conhecida muito antes de Pitágoras. Embora seja possível que Pitágoras tenha introduzido essa técnica na Grécia, não há evidências concretas que comprovem isso.

Pitágoras foi um matemático, filósofo e estudioso grego que viveu por volta do século VI aC. Ele é conhecido por suas contribuições para a matemática, especialmente pelo famoso Teorema de Pitágoras.

Acredita-se que Pitágoras tenha nascido na ilha de Samos, na Grécia antiga, e fundado uma escola de pensamento conhecida como a Escola Pitagórica. No entanto, muitos detalhes de sua vida e obras foram perdidos ao longo do tempo, e grande parte do que se sabe sobre ele foi transmitido através de relatos de outros estudiosos.

Segundo (KAHN, 2007) fala que:

> "Uma das associações do teorema ser aplicado a Pitágoras pode ter sido por simplesmente um reflexo da condição mítica de Pitágoras na tradição posterior, na qual ele é representado como fonte de todas as coisas essenciais na filosofia e na matemática. Por outro lado, é concebível que Pitágoras (ou um de seus seguidores) tenha sido o primeiro a formular a relação entre os lados e os quadrados como regra geral, sem prova. Alguns historiadores da matemática têm até estado dispostos a atribuir a Pitágoras várias provas intuitivas do teorema."

Este trabalho se aprofundará nesse tema, abordando principalmente os ternos Pitagóricos e focando no conjunto dos números inteiros. A problemática principal reside no manejo dos elementos aritméticos necessários para compreender melhor as demonstrações dos modelos geradores dos ternos pitagóricos. Nosso estudo está estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, faremos uma revisão da aritmética, demonstrando conceitos essenciais para a interpretação das demonstrações dos modelos geradores, trabalhando majoritariamente com o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Utilizaremos o livro (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020), abordando o princípio de indução, o algoritmo da divisão, múltiplos e divisores, entre outros conceitos.

No segundo capítulo, discutiremos alguns modelos de ternos pitagóricos, como o triângulo retângulo de Pitágoras e Platão, além das ternas pitagóricas primitivas, definindo a, b e c como comprimentos dos lados de um triângulo retângulo com lados inteiros. Demonstramos que os lados são dados por $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$, com m e n sendo números inteiros positivos, com $m > n > 0$.

No terceiro capítulo, apresentaremos outra abordagem para encontrar as triplas pitagóricas gerais utilizando a geometria analítica. Para suporte teórico, utilizaremos o livro (NETO, 2013). Estudaremos também círculos notáveis do triângulo pitagórico que têm uma relação importante com os números inteiros.

O quarto capítulo explorará padrões desenvolvidos por Fibonacci para gerar ternos pitagóricos, relacionando esses ternos com a sequência de Fibonacci e progressões aritméticas.

No quinto e último capítulo, propomos uma sequência didática dividida em três momentos: uma aula expositiva, uma aula prática utilizando régua e compasso e utilizamos como suporte a essa aula o software GeoGebra, e uma aula utilizando o Portugol Studio para a construção de um programa que gera ternos primitivos. Examinaremos também questões de olimpíadas de matemática, OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), SAEPB (Sistema de Avaliação de Ensino da Paraíba), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), IMO (Olimpíada Internacional de Matemática), ENA (Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT) e ENQ (Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT), visando aplicar o conteúdo abordado e oferecer uma perspectiva prática para os leitores.

Objetivos

Objetivo Geral:

Explanar o teorema de Pitágoras e modelos geradores de ternos pitagóricos.

Objetivos Específicos:

1. Explicar métodos geradores de ternos pitagóricos, demonstrando como desenvolver e a diferença entre o triângulo retângulo de Pitágoras e Platão e uma caracterização geral.

2. Descrever o método geométrico para gerar ternos Pitagóricos e os círculos notáveis do triângulo pitagórico.

3. Propor uma proposta de aplicação para o teorema de Pitágoras e ternos pitagóricos.

Justificativa

A importância do teorema de Pitágoras é vasta e abrange várias áreas do conhecimento. Algumas das principais aplicações incluem a geometria como medições e construções; na mecânica ela é utilizada para definição da distância euclidiana em sistemas de coordenadas cartesianas; na engenharia o Teorema de Pitágoras é aplicado para determinar ângulos e proporções corretas em construções.

Os ternos pitagóricos são conjuntos de três números inteiros que satisfazem o teorema de Pitágoras. Em outras palavras, são combinações de três números inteiros (a, b, c) que, quando colocados nos lugares certos na fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, tornam a igualdade verdadeira.

Os ternos pitagóricos tem uma importância histórica e estética, pois estão ligados à descoberta do teorema de Pitágoras. Além disso, eles têm aplicação em teoria dos números e pode ser aplicado em jogos de tabuleiros.

Um exemplo de aplicação dos ternos pitagóricos em jogos de tabuleiro é o jogo “settlers of Catan” (ou colonizadores de Catan).

Figura 2 – Jogo colonizadores de Catan, Fonte: (LOPES, , 27 deagosto , 2015)

Nesse jogo, os jogadores devem construir assentamentos e expandir, utilizando recursos naturais como madeira, tijolo, trigo, ovelha e pedra. O tabuleiro de Catan é composto por hexágonos que representam diferentes tipos de terrenos, e cada terreno está associado a um número que indica a probabilidade de obter recursos desse terreno em uma jogada. A distribuição dos números no tabuleiro de Catan segue uma distribuição estatística baseada em ternos pitagóricos fazendo com que cada recurso sejam mais valiosos e desejáveis do que outros. Portanto, os ternos pitagóricos são utilizados para equilibrar e diversificar a distribuição dos recursos no jogo, tornando mais desafiador e estratégico.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos, trazem habilidades que os alunos tem que desenvolver ao longo de sua vivencia curricular onde umas das competências que o estudante tem que desenvolver é a habilidade (EF09MA14) consiste em: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes e a habilidade (EF09MA13) consiste em: Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

No que tange as provas internas do estado de Pernambuco, desde o ano 2000, a fim de acompanhar o ensino ofertado por suas redes - estadual e municipais -, a Secretaria de Educação do Estado implementa o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE. Segundo (CAED, 2023):

> ”A partir de 2008, o SAEPE iniciou sua parceria com o Centro de

> Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF), e, até 2015, manteve seu modelo avaliativo, aferindo o desempenho em Língua Portuguesa - Leitura - e Matemática dos estudantes dos 3º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio/Normal Médio. Em 2016, o sistema passou a focar no 2º ano do Ensino Fundamental para avaliar o desempenho na alfabetização, mantendo também os testes para os demais segmentos de escolaridade."

O CAEd divide sua matriz de referencia para o acompanhamento do aprendizado segue uma matriz de conteúdo que é disponibilizado no seu site, o mesmo é dividido em descritores. Com respeito ao teorema de Pitágoras na matriz referente ao 9° ano do ensino fundamental temos:

Descritor 09 - Resolver problema utilizando relações métricas no triângulo retângulo.

Descritor 10 - Resolver problema utilizando razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Metodologia

A principio, o texto dessa dissertação teve um caráter bibliográfico onde exploramos textos e livros como (MOREIRA C. G.; MARTíNEZ, 2021), (ANDRADE, 2013), (KAHN, 2007), (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020), (NETO, 2013), (NETO, 2022) e (BEZ, 1997). Essa pesquisa foi de extrema importância para o desenvolvimento de todo este trabalho, pois proporcionou um enriquecimento sobre o tema proposto para essa dissertação.

Uma parte dessa pesquisa foi de caráter aplicado onde focamos na aplicação de teorias e métodos matemáticos para resolver problemas práticos. Nesta parte, verificamos outro circulo de raio inteiro relacionado ao triângulo pitagórico. No nosso melhor conhecimento, este resultado é inédito.

Partimos do princípio de que a matemática é uma ciência exata que se dedica ao estudo de padrões, quantidades, estruturas e mudanças, utilizando a lógica e a abstração para formular conjecturas e demonstrar teoremas. Desse modo, apresentamos os ternos pitagóricos como ferramenta que possa ajudar professores na tarefa de conduzir os estudantes para solucionar problemas interessantes.

1 Resutados de Aritmétca

Neste capítulo, exploraremos alguns teoremas e definições da aritmética que são importantes para o entendimento das propriedades dos ternos pitagóricos. As demonstrações apresentadas aqui serão cruciais para o desenvolvimento posterior do trabalho, fornecendo uma base sólida para o entendimento dos conceitos abordados. Ao compreender esses teoremas básicos, podemos explorar de forma mais profunda e significativa as propriedades e relações dos ternos pitagóricos.

1.1 Axiomas dos números inteiros

Neste trabalho assumiremos como axiomas a propriedades da soma, produto e ordem em $\mathbb{Z}$. Para consultar tais axiomas o leitor pode utilizar o livro (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020).

O axioma que tem um papel fundamental na caracterização do conjunto dos números inteiros é o Princípio da Boa Ordem. Para enuncia-lo precisamos da seguinte definição:

Definição 1.1. Dizemos que a é o menor elemento de um subconjunto não vazio S de $\mathbb{N}$ quando $a \in S$ e para todo $b \in S$ vale $a \leq b$.

Como uma consequência do princípio da boa ordem (PBO) obteremos o princípio da indução que discutiremos na próxima sessão.

Axioma 1.2 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.*

1.2 Princípio de indução

Uma das ferramentas mais utilizadas em demostrações matemáticas é Princípio de Indução que provaremos a seguir:

Teorema 1.3. *Seja $d \in \mathbb{N}$ e $P(j)$ uma afirmação que envolva números naturais onde*

a) $P(d)$ é verdadeira.

b) Para todo $j \in \mathbb{N}$, com $j \geq d$, se $P(j)$ é verdade, então $P(j+1)$ é verdade.

Então $P(j)$ é verdadeira para todo $j \leq d$

Demonstração. Suponha que existe um $k_0 > d$ com $P(k_0)$ falsa. Desse modo o conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{N} : k > d \text{ e } P(k) \text{ é falsa } \}.$$

Como k_0 pertence a S temos que S é conjunto não vazio de números naturais. Pelo PBO, S admite menor elemento $m > d$. Agora, examinaremos o valor lógico de $P(m-1)$.

Se $P(m-1)$ é verdadeira, como $m-1 \geq d$. Pelo item b), $P(m)$ é verdadeira, o que é um absurdo.

Se $P(m-1)$ é falsa então $m-1 \in S$ e $m-1 < m$. Isso contraria a minimalidade de m. Novamente um absurdo.

A contradição veio de supor que existe $k_0 > d$ com $P(k_0)$ falsa. Desse modo, obtemos o resultado.

□

O princípio da indução fornece um método de prova que é bastante conhecido e tem sido utilizado por vários matemáticos durante seus estudos. No exemplo a seguir detalharemos essa técnica:

Exemplo 1.4. Suponha que queremos provar uma afirmação vale para todo número natural maior ou igual a um certo número maior ou igual a d.

Para provarmos por indução devemos seguir os seguintes passos:

a) Demonstra-se que a afirmação é verdadeira para d. esse fato é chamado de passo base.

b) Supõe-se que a afirmação seja verdadeira para um natural k com $d \leq k$ (hipótese de indução) e, partindo disso, prova-se que a afirmação vale para seu sucesso, $k+1$. Esse é chamado passo de indução.

Se $d = 0$ então a afirmação valerá para todo número natural.

Exemplo 1.5. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n.$$

Denote S o subconjunto dos números naturais que satisfazem essa propriedade. Observe que $S \subseteq \mathbb{N}$ e $1 \in S$, pois

$$8 \cdot 1 - 5 = 3 = 4 \cdot 1^2 - 1,$$

ou seja, quando $n = 1$, obtemos $3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n$.

Mostraremos agora que $K \in S \Rightarrow K+1 \in S$, ou seja, que

$$3 + 11 + ... + (8K - 5) = 4K^2 - K$$

implica

$$3 + 11 + ... + (8K - 5) + [8(K + 1) - 5] = 4(K + 1)^2 - (K + 1) = 4k^2 + 7K + 3.$$

Com efeito,

$$3 + 11 + ... + (8K - 5) + [8(K + 1) - 5] = (4K^2 - K) + [8(K + 1) - 5] =$$
$$4K^2 - K + 8K + 8 - 5 = 4K^2 + 7K + 3 = 4(K + 1)^2 - (K + 1).$$

Assim $K+1 \in S$ e, portanto, pelo Princípio de Indução, $S = \mathbb{N}^*$. Com isso, demonstramos que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n.$$

1.3 Algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$

Os números negativos foram objetos de estudos por vários pesquisadores durantes os seculos. Segundo (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020), "foram os Indianos no século VII, mais especificamente Brahmagupta, que definiram as primeiras regras envolvendo números negativos". Os números negativos foram utilizados para representar débitos ou prejuízos e os números positivos foram representados como receita ou lucro. Essa distinção refletia-se na contabilidade e em transações comerciais, onde os números negativos indicavam valores devidos ou perdas, e os números positivos indicavam ganhos ou ativos. Essa dualidade de significados ainda persiste hoje, sendo comum darmos exemplos desses números utilizando esses mesmos contextos.

Teorema 1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então existe único par de números $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < |b|$ tais que $a = bq + r$.*

Demonstração. Para começar a demostração iremos considerar dois casos: $b > 0$ e $b < 0$. No primeiro caso, tomemos o seguinte conjunto

$$B = \{a - bx : x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}.$$

Podemos perceber que B é não vazio, pois $a - b(-|a|) \in B$:

$$a - b(-|a|) = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0.$$

Note que B é limitado inferiormente pelo 0 e, Daí, B possui um menor elemento, chamaremos de r. Portanto, $\exists\ q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - bq$, ou seja, $a = bq + r$. Iremos mostrar que

$r < |b| = b$.
Para isso iremos usar a tricotomia:
Se $r = b$:

$$a = bq + b \Rightarrow a = b(q+1) \Rightarrow a - b(q+1) = 0 \in B$$

e, como r é o menor elemento de B, temos r = 0. Disso segue que b = 0, que é um absurdo.
Se $r > b$ então $\exists t \in \mathbb{N}$ tal que r = b + t, onde $0 < t < r$. Assim

$$b + t = a - bq \Rightarrow t = a - b(q+1) \in B,$$

que é um absurdo, pois r é o menor elemento de B. logo, $0 \leq r < |b|$.
Agora, vamos demonstrar que q e r são exclusivamente definidos. Suponha que existam q, r, q_1, r_1 tais que $a = bq + r = bq_1 + r_1$, com $0 \leq r, r_1 < |b| = b$. Dessa desigualdade chegaremos a conclusão que $0 \leq |r - r_1| < b$. Daí,

$$bq + r = bq_1 + r_1 \Rightarrow b(q_1 - q) = r - r_1 \Rightarrow b\,|q - q_1| = |r - r_1|\,.$$

Note que se tivéssemos $r \neq r_1$, teríamos $|q - q_1| \geq 1$. Então,

$$b \leq b\,|q - q_1| = |r - r_1| < b,$$

que nós dará um absurdo. Portanto $r = r_1$ e, consequentemente, $q = q_1$.
Para o segundo caso ($b < 0$), basta aplicar o caso anterior para a e $|b|$. □

Exemplo 1.7. Para $a = 5$ e $b = 13$, segue que:

$$5 = 13 \cdot 0 + 5.$$

Note que $5 < 13$.

Exemplo 1.8. Para $a = 7$ e $b = 4$, segue que:

$$7 = 4 \cdot 1 + 3.$$

E de fato, $3 < 4$.

1.4 Múltiplos e divisores

Quando nos referimos ao Algoritmo da Divisão em $\mathbb{Z}$, estamos explorando o método pelo qual, ao dividir um número a por outro b, obtemos resultados únicos q e r, onde q é o quociente e r é o resto. Tais que

$$a = bq + r$$

neste contexto, nosso foco de estudo recai sobre situações onde o resto r é igual a zero. Essas situações são particularmente relevantes, pois representam casos em que a divisão é exata, ou seja, não há sobra ou resíduo.

Definição 1.9. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que b é divisor de a, quando existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bn$. A notação para dizer que b é divisor de a é $b|a$.

Note que n como na definição acima também é um divisor de a. Também segue que, quando b é divisor de a e $a \neq 0$, temos $|b| \leq |a|$.

Simbolicamente, temos

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b|a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : a = bn.$$

Quando b não é divisor de a, denotamos $b \nmid a$. Por exemplo $2 \nmid 5$ e $(-7) \nmid 11$.

Exemplo 1.10. Note que o número 36 é divisor de 180 pois $180 = 36 \cdot 5$

Exemplo 1.11. Como $35 = 7 \cdot 5$, temos $7|35$

Observação 1.12. Uma análise interessante caso fosse permitido $b = 0$.

1) Se $a \neq 0$, temos que $a = 0 \cdot n$ nunca acontece. Assim, concluímos que $0 \nmid a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$.

2) Se $a = 0$, vale $0|0$, afinal $0 = 0 \cdot n$ é verdade $\forall n \in \mathbb{Z}$. O fato, porém, de n poder assumir qualquer valor, leva-nos à impossibilidade de definir, de forma única, o que seria "0 dividido por 0".

Algumas propriedades a respeito da divisibilidade.

Proposição 1.13. *Seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

a) $a|a$.

b) $b|a$ *e* $a|b \Rightarrow a = b$ *ou* $a = -b$.

c) $c|b$ *e* $b|a \Rightarrow c|a$.

Demonstração. a) De fato, $a = a \cdot 1$.

b) vamos dividir a demonstração em dois casos. Se $a = 0$, como $a|b$ então $b = 0$ e daí $a = b$.

Agora trataremos do caso $a \neq 0$. Por definição, a hipótese $b|a$ implica que $a = bn$ para algum número inteiro, assim como $a|b$ implica $b = am$ para algum inteiro m.

Então $a = amn$, e, como $a \neq 0$, pela propriedade do cancelamento obtemos $1 = mn$. Em $\mathbb{Z}$ temos, portanto, que $n = m = 1$ ou $n = m = -1$. Logo, $a = b$ ou $a = -b$, respectivamente.

c) A hipótese $c|b$ significa, por definição, que existe número inteiro n tal que $b = cn$, assim como $b|a$ implica a existência de um número inteiro m tal que $a = bm$. Daí obtemos

$$a = (cn)m = c(nm)$$

e disto segue que $c|a$.

$\square$

Proposição 1.14. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) $c|a \Rightarrow c|ab$ *e* $cb|ab$.

b) $c|a$ *e* $c|b \Rightarrow c|a + b$ *e* $c|a - b$.

c) $c|a + b$ *e* $c|a \Rightarrow c|b$.

Demonstração. a) De $c|a$ segue que existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $a = cn$ e, portanto, $ab = cbn$. Daí, obtemos $c|ab$ e $cb|ab$. Em particular, $c|a \Leftrightarrow c|(-a)$.

b) De $c|a$ e $c|b$ concluímos a existência de $n, m \in \mathbb{Z}$, tais que $a = cn$ e $b = cm$. Logo $a + b = cn + cm = c(n + m)$, que implica $c|a + b$ e $a - b = cn - cm = c(n - m)$, que significa $c|a - b$.

c) De $c|a + b$ e $c|a$ temos $n, m \in \mathbb{Z}$, tais que $a + b = cn$ e $a = cm$. Logo $b = a + b - a = cn - cm = c(n - m)$ e, portanto, $c|b$.

$\square$

Exemplo 1.15. Pelas proposições anteriores, valem as implicações.

a) $5|35 \Rightarrow 5|(35 \cdot 2) \Rightarrow 5|70$.

b) $-3|15 \Rightarrow -3(-6)|(15(-6)) \Rightarrow 18| - 90$.

c) $5|15$ e $5| - 90 \Rightarrow 5|(15 + (-90)) \Rightarrow 5| - 75$.

d) $-3|15$ e $-3|21 \Rightarrow -3|(15 - 21) \Rightarrow -3| - 6$.

e) $8|(16 + 48)$ e $8|16 \Rightarrow 8|48$.

f) $5|(10 + 45)$ e $5|10 \Rightarrow 5|45$.

1.5 Números Primos

Os números primos têm sido objeto de estudo há mais de 2200 anos, segundo (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020) "tendo sido formalmente introduzidos pelos gregos". Sua importância foi notável no trabalho do matemático Eratóstenes de Cirene, que desenvolveu um algoritmo para determinar números primos, conhecido hoje como Crivo de Eratóstenes. Outro matemático de destaque que contribuiu significativamente para o estudo dos números primos foi Pierre de Fermat. Além de suas contribuições para a teoria dos números, Fermat também formulou conjecturas importantes sobre números primos. Segundo (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020) "uma de suas conjecturas dizia que $2^n + 1$ era sempre um número primo, se $n \in \mathbb{N}$ fosse uma potência de 2". Esses números são conhecidos como números de Fermat.

Definição 1.16. Um número inteiro p é primo quando:

a) $p \neq 0$, $p \neq -1$ e $p \neq 1$.

b) os únicos divisores de p são $-1, 1, -p$ e p.

Definição 1.17. Um número inteiro será chamado de composto se for diferente de 0, -1 e 1 é não for primo.

Exemplo 1.18. Assim, temos que:

a) $2, 3$ e 43 são primos em $\mathbb{N}$.

b) 4 e 6 são compostos em $\mathbb{N}$.

c) $-2, -7$ e -43 são primos em $\mathbb{Z}$.

d) -4 e 6 são compostos em $\mathbb{Z}$.

Exercício 1.19. (31° OBM - 2009) A famosa Conjectura de Goldbach diz que todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, 18 pode ser representado por 5 + 13 ou, ainda, por 7 + 11. Considerando todas as possíveis representações de 126, qual a maior diferença entre os dois primos que a formam?

Resolução: Basta verificar quais os números primos de 1 até 126.

Listando temos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127.

Verificando que o maior primo antes de 126 é o número 113 e somando ela ao primo 13 teremos 126. logo a diferença entre os dois primos é 100.

1.6 Máximo divisor comum

Nesta seção, exploraremos o conceito de máximo divisor comum entre dois números inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$ denotado por $mdc(a, b)$. Em essência, estamos buscando identificar o maior número que divide ambos simultaneamente. A compreensão deste conceito é crucial para a construção de frações irredutíveis e possui aplicações variadas, incluindo a análise musical, onde é fundamental para o estudo da frequência fundamental ausente e outras áreas da teoria dos números.

Definição 1.20. Dados números inteiros positivos a e b não ambos iguais a zero, definimos o máximo divisor comum entre a e b, denotado por $mdc(a, b)$, como sendo o maior número inteiro que divide tanto a quanto b.

Exemplo 1.21. Temos que $mdc(8, 14) = 2$ pois

divisores de 8: 1, 2, 4, 8
divisores de 14: 1, 2, 7, 14.

Exemplo 1.22. Temos que $mdc(0, 15) = 15$ pois

divisores de 0: todos os números inteiros
divisores de 15: 1, 3, 5, 15.

Proposição 1.23. *Sejam $a, p \in \mathbb{Z}$ com p primo. Assim $p \nmid a \Leftrightarrow mdc(a, p) = 1$*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Note que os únicos divisores positivos de p são 1 e p, e como p não divide a, só é possível $mdc(a, p) = 1$.
($\Leftarrow$) Se o mdc entre a e p é 1 e $p > 1$, só é possível que p não seja divisor de a. □

Exemplo 1.24. O número primo 7 não divide o número 25, logo, pela proposição anterior,

$$mdc(7, 25) = 1.$$

Definição 1.25. Dois números $a, b \in \mathbb{Z}$ são ditos coprimos, ou relativamente primos, ou primos entre si, quando $mdc(a, b) = 1$.

Assim, a proposição anterior nos diz que se um número primo p não divide um número inteiro a, eles são coprimos.

Exemplo 1.26. Os números 16 e 35 são coprimos. Pois o $mdc(16, 35) = 1$.

Um dois teoremas mais importantes da aritmética quando falamos sobre mdc é o conhecido como Identidade de Bézout. Esta identidade é essencial para compreender as relações entre os números inteiros e é enunciada da seguinte forma:

Teorema 1.27. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos com $d = mdc(a, b)$. Então existem números inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$ax + by = d.$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos. Considere o conjunto G a combinação de todos os inteiros positivos de a e b, ou seja ,

$$G = \{c \in \mathbb{N}^* : c = am + bn, com \;\; m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que $G \neq \emptyset$. teremos 4 casos,

1) $a > 0 \Rightarrow |a| = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in C.$

2) $a < 0 \Rightarrow |a| = a \cdot (-1) + b \cdot 0 \in C.$

3) $b > 0 \Rightarrow |b| = a \cdot 0 + b \cdot 1 \in C.$

4) $b < 0 \Rightarrow |b| = a \cdot 0 + b \cdot (-1) \in C.$

e, como $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, teremos $|a| \in G$ ou $|b| \in G$, ou seja, $G \neq \emptyset$. Logo $G \subset \mathbb{N}^*$ e pelo Princípio da Boa Ordem, teremos que G tem um menor elemento , chamaremos de d. Assim, $d = au + bv$, para alguns $u, v \in \mathbb{Z}$. Tome $c \in G$. Pelo Algoritmo da Divisão, $c = dq + r$ e $0 \leq r < d$.
Suponha agora $d \nmid c$. Então $c \neq dq$ e $0 < r$. Mas como $c \in G$, $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $c = am + bn$. Portanto,

$$r = c - dq = (am + bn) - (au + bv)q = a(m - qu) + b(n - qv).$$

Logo, $r \in G$. Porem $r < d$, contradizendo o fato que d ser o menor elemento de G. Logo, $\forall c \in G$ temos que $d|c$. Em particular $d||a|$ e $d||b|$, portanto $d|a$ e $d|b$. Daí podemos concluir que $d|mdc(a, b)$.
Por outro lado, o $mdc(a, b)$ divide a e b, usando a proposição 1.14, teremos que $mdc(a, b)|(au+bv)$, ou seja, $mdc(a, b)|d$. Pela proposição 1.13 e pelo fato de d e $mdc(a, b)$ serem números naturais temos que $d = mdc(a, b)$. □

Teorema 1.28. *Sejam a, b inteiros. Um inteiro positivo d é máximo divisor comum de a e b se e somente se verificar as condições:*

1. *$d|a$ e $d|b$*

2. *Se $d^{'}|a$ e $d^{'}|b$, então $d^{'}|d$.*

Demonstração. Seja $d = mdc(a, b)$. Então, teremos que $d|a$ e $d|b$, assim 1) é verdadeira. Pelo Teorema de Bézout, existem números inteiros x e y de modo que $d = xa + yb$. Se $d^{'}|a$ e $d^{'}|b$ então $d^{'}|xa + yb = d$, desse modo 2) é verdadeira.
Reciprocamente, se um inteiro positivo d verifica 1) , então d é divisor comum de a e b. Para ver que d é o maior divisor comum note que se $d^{'}$ é outro divisor comum de a e b, por 2) então $d^{'}|d$; logo, $d^{'} \leq |d^{'}| \leq d$, donde segue que d é o maior dos divisores comuns. Portanto, $d = mdc(a, b)$. □

A identidade de Bézout desempenha um papel crucial na compreensão de outra propriedade fundamental da divisão dos números inteiros, uma dessas propriedade que podemos explorar é a conhecida como Lema de Euclides. A seguir, apresentaremos e demostraremos esse lema:

Lema 1.29. *(Lema de Euclides) Seja $a, b, p \in \mathbb{Z}$ com p primo. Se p divide ab então p divide a ou p divide b.*

Demonstração. Se p dividir ab, então $ab = pk$ com $k \in \mathbb{Z}$.
Agora teremos dois casos:

1) Se p dividir a, então teremos que $a = pm$ com $m \in \mathbb{Z}$. Substituindo $a = pm$ em $ab = pk$, teremos que, $pm \cdot b = pk$. cancelando p em ambos os lados teremos $mb = k$, o que significa que p divide b.

2) Se p não dividir a, então p e a são primos entre se e o $mdc(p, a) = 1$. Usando a identidade de Bézout, temos
$$px + ay = 1$$
multiplicando ambos os lados por b teremos.
$$bpx + bay = b.$$
Como $ab = pk$, substituindo ab por pk.
$$bpx + pky = b$$
Reorganizando os termos, obtemos $p(bx + ky) = b$ que implica dizer que p divide b. Portanto, em ambos os casos se p dividir ab, então p divide a ou p divide b.

□

Exemplo 1.30. O número 5 divide o número 40, que pode ser escrito como $10 \cdot 4$. De fato, conforme o Lema anterior, 5 divide também o número 10.

Finalizaremos essa sessão definindo o máximo divisor de 3 ou mais números. Isto será feito recursivamente. Dados inteiros $a_1, ..., a_m$ tal que existe algum $i = \{1, ..., n\}$ com $a_i \neq 0$, definimos

$$mdc(a_1, ..., a_n) = mdc(mdc(a_1, ..., a_{n_1}), a_n).$$

Exemplo 1.31. $mdc(21, 35, 28) = mdc(mdc(21, 35), 28) = mdc(7, 28) = 7.$

1.7 Teorema Fundamental da Aritmética

Teorema 1.32 (Teorema Fundamental da Aritmética em $\mathbb{N}$)**.** *Todo número natural maior que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração. Começaremos a demonstração estabelecendo a existência dessa fatoração em números primos.

Vamos provar por absurdo, considere que S, o conjunto de todos os números naturais maiores que 1 que não podem ser representados por um produto de fatores primos, não seja vazio. Observe que $S \subset \mathbb{N}$. Pelo Princípio da Boa Ordem, S possui um menor elemento, chamaremos de b. Note que $b > 2$, pois 2 é primo e, portanto, admite tal fatoração. Note ainda que b é composto. Assim existem c e d inteiros com $1 < c < b$ e $1 < d < b$ e $c = b.d$. Assim, $\exists c, d \notin S$, logo admitem fatoração em primos. Consequentemente, temos $b = cd$ tem fatoração em números primos, contradizendo o fato de b ser um elemento de S. Absurdo e, portanto, $S = \emptyset$.

Agora,passamos para a demostração de unicidade. Vamos denotar por

$$p_1p_2p_3 \cdots p_k$$

$$q_1q_2q_3 \cdots q_n$$

duas fatorações de um mesmo número natural. Assim $p_1|(q_1q_2 \cdots q_n)$ e sabendo que quando p primo, $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$ existe um índice l entre 1 e n tal que $p_1|q_1$. Consequentemente, pela definição de números primos, concluímos que $p_1 = q_1$. Por extensão, para cada $1 \leqslant j \leqslant k$, existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $p_j|p_i$ e, portanto, $p_j = p_i$. Agora, devemos demostrar que $k = n$. Para isso, assuma $K < n$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \cdots, p_k = q_k$. Nesse cenário teríamos,

$$q_1q_2 \cdots q_kq_k + 1 \cdots q_n = p_1p_2 \cdots p_k = q_1q_2 \cdots q_k;$$

isso, pela propriedade do cancelamento da multiplicação, implica que $q_k + 1 \cdots q_n = 1$, o que é um absurdo, pois $q_k + 1 \cdots q_n$ são primos e, consequentemente, maiores que 1. De forma análoga, se assumirmos $k > n$ encontraremos um absurdo. Portanto, K = n e os conjuntos dos p_i e dos q_j têm exatamente os mesmos elementos. $\square$

Exemplo 1.33. Temos 540 pode ser fatorado em fatores primos temos, $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Exemplo 1.34. Vamos obter o menor inteiro positivo não nulo b tal que $6615 \cdot b$ seja um quadrado perfeito.
Já que $6615 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ é precisamos que todas potências dos fatores primos sejam números pares, devemos escolher b de tal forma que, em sua fatoração, tenha potências ímpares em 3 e de 5. Assim, podemos tomar $b = 3 \cdot 5 = 15$. daí

$$6615 \cdot b = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$6615 \cdot b = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$6615 \cdot b = (3^2 \cdot 5 \cdot 7)^2$$

$$6615 \cdot b = 315^2.$$

Proposição 1.35. *Prove que, se um número inteiro k é igual à raiz quadrada do produto de u e v, sabendo que $u, v \in \mathbb{Z}$ com $mdc(u, v) = 1$, então u e v são quadrados perfeitos:*

Demonstração. Vamos assumir que k é um número inteiro e $k = \sqrt{u \cdot v}$. Queremos provar que u e v são quadrados perfeitos. Começamos elevando ambos os lados da equação $k = \sqrt{u \cdot v}$ ao quadrado:

$$k^2 = (\sqrt{u \cdot v})^2$$

$$k^2 = u \cdot v$$

O número k é inteiro, então k^2 é um número inteiro e, especificamente, um quadrado perfeito.

Agora, considere a fatoração prima de k^2. Suponha que:

$$k^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_n^{2a_n}$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números primos distintos, e $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ são os expoentes desses primos na fatoração de k^2.

A equação $k^2 = u \cdot v$ implica que a fatoração prima de k^2 é igual à multiplicação das fatorações primas de u e v.

Para concluir que u é quadrado perfeito é suficiente obter que todo fator primo de u parece com potência par. Suponha que existe um primo q cuja potência que aparece na fatoração de u é impar. Como $u.v$ é quadrado perfeito, q deve aparecer com potência impar na fatoração de v. Logo $q | mdc(u, v)$ e isso contraria $mdc(u, v) = 1$.

□

1.8 Mínimo múltiplo comum

Assim como estudamos o maior divisor entre dois números, queremos definir algum conceito que envolva os múltiplo. Embora não seja possível calcular o maior múltiplo comum entre dois números. portanto, o que fazemos é definir, para $a, b \in \mathbb{Z}$, o mínimo múltiplo comum, denotado por $mmc(a, b)$.

O conceito de mínimo múltiplo comum, representado por (mmc), refere-se ao menor número positivo não nulo que é múltiplo de dois ou mais números simultaneamente. Sua presença é observada na natureza, muitas vezes associada aos números primos, segundo (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020) "em cenários como o ciclo de vida de insetos que evitam compartilhar o mesmo ambiente, ou no período fértil de presas em relação aos seus predadores".

Exemplo 1.36. Vamos encontrar o menor número inteiro não nulo divisível simultaneamente por 6 e 14.
Para isso basta listar os múltiplos positivos e procurar o menor que está em ambas listagens:

múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ...,
múltiplos de 14: 14, 28, 42, 56, ...

Assim o menor múltiplo comum é 42.

Definição 1.37. Dados dois inteiros a e b não-nulos o mínimo múltiplo comum de a e b é o menor número natural que é múltiplo tanto de a quanto de b.

Proposição 1.38. *Dados inteiros a e $b \in \mathbb{Z}*$. As seguintes afirmações a respeito de um inteiro positivo m são equivalentes:*

1. $m = mmc(a, b)$
2. *m satisfaz as seguintes propriedades:*
   a) *m é múltiplo de a e de b.*
   b) *Se c é múltiplo positivo de a e de b então c é múltiplo de m.*

Demonstração. Se m é o mínimo múltiplo comuns de a e b, então m satisfaz o item a) da condição 2). Vamos mostrar que m divide qualquer outro múltiplo comum positivo c de a e b. Divida c por m obtendo $c = mq + r$ com $0 \leq r < m$. Suponha por absurdo que $r \neq 0$. Como m e c são múltiplos comuns de a e b segue que existem inteiros s, t, u e v com $as = m$, $bt = m$, $au = c$ e $bv = c$. Logo,

$$r = c - mq = a(u - qs) = b(v - qt).$$

Desse modo r é múltiplo comum positivo de a e b menor do que $m = mmmc(a, b)$. Isso é um absurdo. Logo $m|c$ e assim m satisfaz o item b). Isso conclui a demonstração.

Reciprocamente se m satisfaz 2., pela condição a), m é múltiplo comum de a e b. Pela condição b), m é divisor de qualquer múltiplo de comum positivo c de a e b. Como m e c são positivos, $m|c$ implica em $m \leq c$. Logo, $m = mmmc(a, b)$. □

Note que, para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos

$$mmc(a, b) = mmc(|a|, |b|).$$

Para calcular o *mmc* entre dois ou mais números, é necessário fatorá-los e, em seguida, multiplicar todos os fatores primos que aparecem em pelo menos uma das fatorações, considerando os maiores expoentes possíveis.

Exemplo 1.39. Para saber o $mmc(825, 315)$, temos:

$$\begin{aligned} 825 &= 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \\ 315 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Portanto $mmc(825, 315) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 17325$.

O resultado a seguir estabelece uma relação entre *mmc* e o *mdc*. Ele é uma simples consequência da decomposição em fatores primos, dada no Teorema Fundamental da Aritmética em $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.40. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Então*

$$|a| \cdot |b| = mdc(a, b) \cdot mmc(a, b).$$

Assim, para determinar o *mmc* entre dois números inteiros quaisquer, devemos primeiramente, calcular o *mdc* entre eles. Daí, podemos então aplicar a proposição para encontramos seu *mmc*.

Exemplo 1.41. Vamos calcular o $mmc(21, 14)$.
facilmente concluímos que $mdc(21, 14) = 7$. Portanto, pela proposição temos

$$21 \cdot 14 = 7 \cdot mmc(21, 14) \Rightarrow mmc(21, 14) = 21 \cdot 2 = 42.$$

Podemos definir mínimo múltiplo comum de 3 ou mais números. Dados inteiros $a_1, ..., a_m \in \mathbb{Z}^*$, definimos

$$mmc(a_1, ..., a_n) = mmc(mmc(a_1, ..., a_{n_1}), a_n).$$

Exercício 1.42. (38º OBM - 2016)Dona Maria fez uma grande pizza para seus filhos no dia das mães, mas não tinha certeza se viriam visitá-la dois, três ou cinco filhos. Ela quer deixar a pizza dividida em pedaços iguais antes da chegada dos filhos e faz questão de que aqueles que vierem comam a mesma quantidade de pizza. Qual é o menor número de pedaços em que ela deve dividir a pizza?
Resposta: Basta calcular o $mmc(2, 3, 5)$ que será 30.

1.9 Congruência

Para falarmos um pouco sobre esse assunto é de suma importância sabermos o seu papel ao longo do tempo, segundo (VIEIRA F.; CARVALHO, 2020)"juntamente com números primos, as congruências foram cruciais para o desenvolvimento da criptografia, que nos permite transmitir dados sigilosos ou acessar contas bancárias pela internet".

Sua definição não tem fatos novos, ela apenas apresenta uma maneira de se relacionar três números inteiros utilizando a divisibilidade de uma forma especial. Observemos essa definição.

Definição 1.43. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Dizemos que

$$a \text{ é côngruo a } b \text{ módulo } m$$

se m divide $a - b$ ou, analogamente, se $a - b$ é múltiplo de m.

Notação: $a \equiv b \pmod m$. As congruências são um conceito fundamental na teoria dos números, e há diversas propriedades que regem as operações de soma e produto com elas. Aqui estão as principais propriedades das congruências em relação à soma e ao produto:

Proposição 1.44. *Propriedades da Soma*

Se $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$, *então:*

Soma: $a + c \equiv b + d \pmod m$

Isso significa que a soma de dois números congruentes a outros dois, módulo m, também é congruente à soma desses outros dois números, módulo m.

Proposição 1.45. *Propriedades do Produto*

Se $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$, *então:*

Produto: $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$

Isso significa que o produto de dois números congruentes a outros dois, módulo m, também é congruente ao produto desses outros dois números, módulo m.

Exemplo 1.46. 1. **Soma**:

$$\text{Se } 7 \equiv 2 \pmod 5 \text{ e } 13 \equiv 3 \pmod 5, \text{ então } 7 + 13 \equiv 2 + 3 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$$

2. **Produto**:

$$\text{Se } 7 \equiv 2 \pmod 5 \text{ e } 13 \equiv 3 \pmod 5, \text{ então } 7 \cdot 13 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$$

Exemplo 1.47. Perceba que $27 - 6 = 21$ é múltiplo de 7, pois sabemos que $21 = 7 \cdot 3$. Logo

$$27 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Exercício 1.48. (28º OBM - 2006) Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5? Resposta: Para resolver este problema usando congruências, podemos seguir estes passos:

1. Represente o número inteiro positivo desconhecido como n.
2. Escreva a congruência que descreve a divisão de n por 15: $n \equiv 7 \pmod{15}$.
3. Determine as congruências para as divisões de n por 3 e por 5.
4. Calcule os restos das divisões de n por 3 e por 5.
5. Some os restos.

$$\begin{aligned}
&n \equiv 7 \pmod{15} \\
&n = (5 \cdot 3 \cdot k) + (2 \cdot 3 + 1) \quad \text{para algum inteiro } k \\
&n = (3 \cdot (5k + 2)) + 1
\end{aligned}$$

Note que se fizermos n modulo 3 teremos com resto da divisão 1.

$$\begin{aligned}
&n \equiv 7 \pmod{15} \\
&n = (5 \cdot 3 \cdot p) + (1 \cdot 5 + 2) \quad \text{para algum inteiro } p \\
&n = (5 \cdot (3p + 1)) + 2.
\end{aligned}$$

Note que se fizermos n modulo 5 teremos com resto da divisão 2. Logo a soma dos restos das divisões de n por 3 e por 5 é $1 + 2 = 3$.

1.10 Progressões aritméticas

No dia a dia, existem grandezas que sofrem variações iguais em períodos de tempo iguais, por exemplo: o custo de uma corrida de táxi, o crescimento de uma árvore e a distância entre as pegadas de um mesmo animal.
Se listarmos tais valores que essas grandezas assumem ao longo do tempo, teremos uma sequência cujo nome é progressão aritmética.

Definição 1.49. Seja $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência de números reais. Tal sequência é dita progressão aritmética (PA) quando existe $r \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = r.$$

O númmero real r denominado razão da PA.
O termo a_n é chamado termo geral da PA.

Assim, uma PA é uma sequência de números reais cuja diferença entre um termo e seu antecessor é constante.

Exemplo 1.50. A sequência dos números naturais ímpares

$$1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1...$$

é uma PA com razão 2 e termo geral $a_n = 2n - 1$.

Proposição 1.51. *Seja a_1 o primeiro termo de uma PA e r a razão comum. O termo geral a_n de uma PA pode ser calculado pela fórmula:*

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Demonstração. Seja a_1 o primeiro termo de uma progressão aritmética (PA) e r a razão comum.

Passo 1: Base da Indução

Para $n = 1$, o termo geral deve ser igual ao primeiro termo da PA. Substituindo $n = 1$ na fórmula:

$$a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r = a_1 + 0 = a_1.$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = 1$.

Passo 2: Hipótese de Indução

Suponha que a fórmula seja válida para $n = k$, ou seja, que o k-ésimo termo da PA possa ser escrito como:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r.$$

Passo 3: Passo Indutivo

Agora, precisamos provar que a fórmula é válida para $n = k+1$. Ou seja, queremos mostrar que:

$$a_{k+1} = a_1 + k \cdot r.$$

Sabemos que, em uma progressão aritmética, cada termo é obtido somando a razão r ao termo anterior. Portanto:

$$a_{k+1} = a_k + r.$$

Substituindo a hipótese de indução $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$ na equação acima, temos:

$$a_{k+1} = (a_1 + (k-1) \cdot r) + r.$$

Simplificando:

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r.$$

Portanto, a fórmula também é válida para $n = k+1$. **Conclusão** Pelo princípio da indução matemática, a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

é válida para todo $n \geq 1$. □

Exemplo 1.52. Vamos descobrir o vigésimo quinto termo da PA com razão -2 e primeiro termo 64:

$$a_1 = 64$$
$$r = -2$$
$$n = 25$$

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$\begin{aligned} a_{25} &= 64 + (25-1) \cdot (-2) \\ &= 64 + 24 \cdot (-2) \\ &= 64 - 48 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Portanto, o vigésimo quinto termo da PA é 16.

Proposição 1.53. *A soma dos n primeiros termos de uma PA com primeiro termo a_1 e N-ésimo termo a_n é*

$$S_n = \frac{(a_1 + an) \cdot n}{2}.$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que se $i + j = n + 1$ então

$$a_i + a_j = a_1 + (i-1).r + a_1 + (j-1).r = a_1 + a_1 + (i+j-2)r = a_1 + a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n.$$

Seja, então , uma PA cujos termos denotados por $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ e com razão r. Denote S_n a soma dos n primeiros termos. Assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Somando essas duas igualdades, obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1)$$

Em cada uma das parcelas acima temos uma soma da forma $a_i + a_j$ com $i + j = n + 1$. Logo, $2S_n$ é uma soma com n parcelas iguais. Explicitamente:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n.$$

Portanto $S_n = \dfrac{(a_1 + an) \cdot n}{2}$. □

2 Teorema de Pitágoras e ternos pitagóricas

Um dos princípios fundamentais da geometria euclidiana é o Teorema de Pitágoras, que relaciona o comprimento dos lados de um triângulo quando um dos ângulos é reto. Neste capítulo, abordaremos o Teorema de Pitágoras com a restrição adicional de que os comprimentos dos lados dos triângulos retângulos são números inteiros. Vamos conduzir a demonstração deste teorema significativo, ressaltando que há várias abordagens para sua prova. Optaremos por usar o seguinte método:

Teorema 2.1. *(teorema de Pitágoras) Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo. O ângulo oposto ao lado c é reto se, e somente se, $a^2 + b^2 = c^2$.*

Demonstração. Para a prova deste teorema, faremos uso do desenho a seguir, no qual temos colocado quatro triângulo retângulos de catetos a e b e hipotenusa c ao redor de um quadrado de lado c.

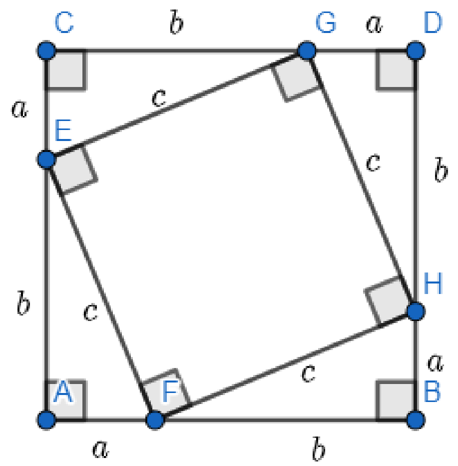


Figura 3 – Quadrado de lado $a + b$ que seus lados passam pelos vértices de outro quadrado de lado c.

Observe que, o contorno exterior da figura forma também um quadrado de lado $a + b$, por conta dos ângulos agudos dos triângulos. Podemos observar que os ângulos internos dos quatro triângulos são congruentes, essa afirmação pode ser observada por semelhança. A área desse quadrado pode ser calculada de duas formas maneiras distintas: uma é a abordagem direta, elevando o comprimento do lado ao quadrado, resultando em

$(a+b)^2$, e a outra calculando a área como soma das áreas dos quarto triângulos mais a área do quadrado de lado c, isto é,

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2.$$

Subtraindo $2ab$ dos dois lados da igualdade, obtemos a relação desejada. $\square$

A recíproca a esse teorema pode ser observar da seguinte forma:

Teorema 2.2. *Seja ABC um triângulo tal que $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é retângulo em C.*

Demonstração. Considere um triângulo ABC, cujas medidas de seus lados são, $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Suponha que $a \leq b < c$, e a relação $a^2 = b^2 + c^2$ seja satisfeita. colocar a figura.

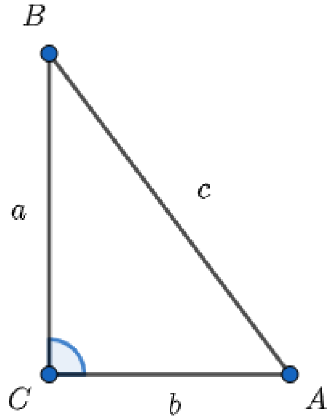


Figura 4 – Triângulo ABC.

Construiremos um triângulo $A'B'C'$ com $A'C'$ perpendicular a $B'C'$, e cujas medidas dos lados $A'C' = b$ e $B'C' = a$, como mostra a figura a seguir:

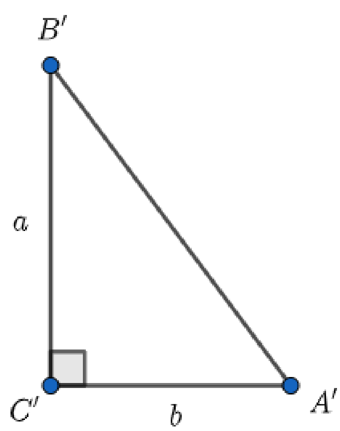


Figura 5 – Triângulo retângulo $A'B'C'$.

Como o triângulo $A^{'}B^{'}C^{'}$ é retângulo por construção, podemos aplicar a relação de Pitágoras. Assim teremos:

$$(B^{'}A^{'})^2 = (B^{'}C^{'})^2 + (A^{'}C^{'})^2 \text{ ou } (B^{'}A^{'})^2 = a^2 + b^2.$$

Como, por hipótese, no triângulo ABC vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então temos:

$$B^{'}A^{'} = c \text{ e como } BA = c, \text{ temos que } B^{'}A^{'} = BA.$$

Assim os triângulos ABC e $A^{'}B^{'}C^{'}$ são congruentes pelo critério lado-lado-lado. Como o triângulo $A^{'}B^{'}C^{'}$ é retângulo por construção, o triângulo ABC também será. $\square$

Essa relação demonstra a dependência de um lado em relação aos outros dois. Assim, é fácil encontrar exemplos de triângulos que possuem exatamente dois lados com comprimento inteiro, como $(1, 1, \sqrt{2})$ e $(2, 3, \sqrt{13})$, entre outros. No entanto, identificar triângulos onde todos os lados têm comprimentos inteiros, conforme a restrição inicial estabelecida, é uma tarefa menos evidente. Este processo será analisado detalhadamente ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.3. Encontre todos os triângulos retângulos com lados inteiros e um cateto igual a 20.
Solução. Precisamos encontrar inteiros positivos b e c tais que $400 + b^2 = c^2$. Tal igualdade pode ser reescrita da seguinte forma

$$2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = (c + b)(c - b).$$

Observe que os números $c + b$ e $c - b$ têm a mesma paridade, logo os dois são pares, e como $c + b$ é maior que $c - b$, as únicas formas de distribuir os fatores de 400 entre esse fatores são

$$\begin{cases} c + b = 200 \\ c - b = 2 \end{cases} \begin{cases} c + b = 100 \\ c - b = 4 \end{cases} \begin{cases} c + b = 50 \\ c - b = 8 \end{cases} \text{e} \begin{cases} c + b = 40 \\ c - b = 10 \end{cases}$$

que geram as soluções (20, 99, 101), (20, 48, 52), (20, 21, 29) e (20, 15, 25).

Exemplo 2.4. Encontre todos triângulos retângulos com lados inteiros e a hipotenusa igual a 65.
Solução. Nesse caso, precisamos encontrar dois números inteiros a e b, que podemos supor, sem perda de generalidade, satisfazem $a < b$ (note que inicialmente $a \leq b$, porém $a = b$ não fornece soluções inteira), tais que $a^2 + b^2 = 65^2 = 4225$. Como $b^2 + (b - 1)^2 \geqslant 4225$ (o conjunto solução para essa equação $b \geq 46, 66$), logo temos que $64 \geqslant b \geqslant 47$. Assim, temos 18 possíveis valores de b que precisamos testar se verificam que $4225 - b^2$ é um quadrado perfeito. De fato, esse número é quadrado perfeito quando b é igual a 52, 56, 60, 63, que

gera os triângulos com lados de comprimento (39, 52, 65), (33, 56, 65), (25, 60, 65) e (16, 63, 65).

As duas caracterizações destacadas acima são: uma que trata da descoberta de ternos pitagóricos a partir de um cateto e a outra que trata da determinação dos catetos de um triângulo pitagórico a partir da hipotenusa. Esta será a abordagem utilizada, reservando a discussão do caso geral desses métodos para trabalhos futuros.

2.1 Triângulo retângulo de Pitágoras e Platão

Nota-se que é possível gerar infinitos ternos pitagóricos a partir de um único terno. Por exemplo, considerando que $3^2 + 4^2 = 5^2$, temos que (3, 4, 5) é uma terno pitagórico. A partir dela, podemos gerar infinitos ternos multiplicando todos os seus elementos por um inteiro positivo:

$$(6, 8, 10), (9, 12, 15), ..., (3k, 4k, 5k).$$

Os ternos nesta lista são conhecidas como ternos pitagóricos não primitivos, pois são obtidas multiplicando (3, 4, 5) por um número inteiro maior que 1. Enquanto isso, (3, 4, 5) é chamada de terno pitagórico primitivo, pois não hà inteiro $d > 1$ que divida esse terno. Em termos mais simples, um terno pitagórico (a, b, c) é considerado primitivo se não puder ser dividida por nenhum número inteiro maior ou igual a 2. Isso significa que os três números a, b e c não têm fatores inteiros em comum além de 1.
A algumas generalizações dos ternos foram observadas por Pitágoras e Platão onde serão destacadas a seguir:

A observação de Pitágoras foi que existe uma família infinita de ternos pitagóricos primitivos, como (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40,41) e assim por diante. Nesses casos estudados por ele, notou-se que um dos catetos e a hipotenusa são inteiros consecutivos. Pensando nisso podemos gerar uma fórmula onde todas as ternos do tipo $(a, b, b + 1)$ serão primitivos. Esses ternos são chamados de *ternos pitagóricos clássicos de primeiro tipo*. Podemos observar a caracterização para tal:

$$a^2 = (b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1.$$

Logo, podemos concluir que a é um número ímpar, e portanto pode ser representado como $a = 2k + 1$ com k um número natural. Substituindo essa expressão na fórmula anterior, obtemos $4k^2 + 4k + 1 = 2b + 1$, Isso nos leva $b = 2k^2 + 2k$ e $c = 2k^2 + 2k + 1$. Em resumo, conseguimos obter a família de triplas pitagóricas $(2k + 1, 2k^2 + 2k, 2k^2 + 2k + 1)$.

Por outro lado, a observação feita por Platão foi a existência de outra família de ternos primitivos, na qual a diferença entre a hipotenusa e um cateto é 2, essa família de ternos é conhecida com *ternos pitagóricos clássicos de segundo tipo*, ou seja, ternos

da forma $(a, b, b+2)$. Seguindo o argumento que foi feito no caso anterior, temos que $a^2 = (b+2)^2 - b^2 = 4b + 4$. Assim, a é par. Escrevendo $a = 2p$ e substituindo na equação anterior, vamos ter que $p^2 = b + 1$. Como estamos interessados somente em ternos pitagóricos primitivos, então b não pode ser par (pois já temos o cateto a sendo par assim no mínimo o mdc entre (a, b, c) seria 2) , assim p não pode ser ímpar, assim $p = 2k$ com k inteiro, e nesse caso obtemos a família de ternos pitagóricos $(4k, 4k^2 - 1, 4k^2 + 1)$.
Aqui está uma tabela que podemos mostrar os ternos obtidas a partir das equações de Pitágoras e Platão:

k	$(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$	$(4k, 4k^2-1, 4k^2+1)$
1	(3, 4, 5)	(4, 3, 5)
2	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)
3	(7, 24, 25)	(12, 35, 37)
4	(9, 40, 41)	(16, 63, 65)
5	(11, 60, 61)	(20, 99, 101)

Tabela 1 – Ternos de Pitágoras e Platão.

Em síntese, as equações de Pitágoras e Platão oferecem perspectivas distintas sobre os ternos pitagóricos. Essas abordagens complementares enriquecem nosso entendimento dos ternos pitagóricos, evidenciando uma diversidade de padrões e relações subjacentes a serem investigadas na geometria e na matemática em geral.

2.2 Ternos pitagóricos primitivos

Conforme discutido ao longo deste trabalho, ao caracterizar os triângulos retângulos com lados inteiros, o problema se resume a encontrar todos os ternos de números inteiros positivos (a, b, c) que satisfaçam a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Como destacado anteriormente, esses ternos são conhecidas como ternos pitagóricos.
Para isso, vamos supor que temos um terno pitagórico (a, b, c). Podemos assumir que esses três números não têm fatores em comum entre si dois a dois, pois se a e b compartilham um fator comum d, então d^2 divide $a^2 + b^2 = c^2$, portanto d também divide c, assim $\left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}, \dfrac{c}{d}\right)$ também é terno pitagórico, dai basta que 2 termos sejam coprimos. Um terno pitagórico na qual seus ternos não têm fator em comum dois a dois é denominado terno pitagórico primitivo.
Observe que a e b não podem ser simultaneamente ímpares e nem simultaneamente par, pois se isso acontecer (a, b, c) terá um fator comum maior ou igual a 2. De fato se tivermos um número ímpar $2k + 1$, ao elevá-lo ao quadrado, obtemos:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

É fácil perceber que o quadrado de um número ímpar é sempre congruente a 1 módulo 4. Assim, se somarmos dois quadrados de números ímpares obtemos um número que é congruente a 2 módulo 4, mais o quadrado de um número inteiro é sempre congruente a 1 ou 0 modulo 4. Enquanto o quadrado de um número par é sempre divisível por 4. Portanto, concluímos que a e b não podem ser simultaneamente ímpares e nem pares. Podemos supor então que a é ímpar e b é par, e consequentemente, c é ímpar. teremos, então,

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a).$$

mas c e a não tem fator em comum. Portanto podemos definir um inteiro u como sendo $\dfrac{c+a}{2}$ e um inteiro v como $\dfrac{c-a}{2}$, note que u e v não podem ter fator em comum (caso contrário, se tivemos um d que divide simultaneamente u e v, então d também dividirá a $u+v=c$ e $u-v=a$). A partir daqui podemos perceber que $b^2 = 4uv$, o que significa que o produto uv tem que ser o quadrado de um número inteiro. O que ajuda a provar isso é o teorema fundamental da aritmética (com foi feito na proposição 1.35). Como u e v não tem fator em comum, cada um deles tem que ser o quadrado de um número inteiro, daí teremos,

$$\frac{c+a}{2} = u = m^2,\ \frac{c-a}{2} = v = n^2,\ b = 2mn,$$

onde m e n não tem fator comum. Podemos concluir que todos os ternos pitagóricos primitivos são dada pelas fórmulas

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn \text{ e } c = m^2 + n^2$$

com m e n sem fator comum e $m+n$ ímpar. Todos os ternos pitagóricos podem ser obtidas a partir de um terno pitagórico primitivo, multiplicando por uma constante.
Podemos observa que os ternos encontradas por Pitágoras, correspondem ao caso em que $m = k+1$ e $n = k$, e os ternos encontradas por Platão são resumidas ao caso em que $m = 2k$ e $n = 1$. A seguir, apresentamos uma tabela com alguns ternos que não são encontrados pelos métodos anteriores:

m	**n**	**(a, b, c)**
5	2	(21, 20, 25)
7	2	(45, 28, 53)
7	4	(33, 56, 65)
8	3	(55, 48, 73)
8	5	(39, 80, 89)
9	2	(77, 36, 85)

Tabela 2 – Ternos que não são encontrados pela generalização de Pitágoras e Platão.

Consideremos também os seguintes teoremas:

Teorema 2.5. *(x, y, z) é um terno pitagórico se e somente se existem inteiros m e n tais que $m > n > 0$, m e n têm a mesma paridade, mn é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{mn}, y = \dfrac{m-n}{2}$ e $z = \dfrac{m+n}{2}$.*

Demonstração. Suponha que (x, y, z) é um terno pitagórico. como $x^2 + y^2 = z^2, x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. sejam $m = z + y$ e $n = z - y$. Então m e n são inteiros tais que $m > n > 0$, m e n têm a mesma paridade, mn é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{mn}$, $y = \dfrac{m-n}{2}$ e $z = \dfrac{m+n}{2}$.
Reciprocamente, suponha que m e n satisfazem ás condições do teorema. Como m e n têm a mesma paridade e $m > n > 0$, então $y = \dfrac{m-n}{2}$ e $z = \dfrac{m+n}{2}$ são inteiros positivos. Como mn é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{mn}$ também é um inteiro positivo. Assim,

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{mn})^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \frac{4mn + m^2 - 2mn + n^2}{4} = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4} = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = z^2,$$

e (x, y, z) é um terno pitagórico. □

Teorema 2.6. *Sejam x, y e z inteiros positivos. Então são equivalentes:*

1. $(x, y) = 1$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

2. $x = 2ab, y = a^2 - b^2$ ou vice-versa e $z = a^2 + b^2$, com a e b inteiros tais que $a > b > 0$, $(a, b) = 1$ e a e b têm paridade distinta.

Demonstração. $1 \Longrightarrow 2)$ pelo teorema 2.4, existem inteiros m e n tais que $m > n > 0$, m e n têm a mesma paridade, mn é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{mn}, y = \dfrac{m-n}{2}$ e $z = \dfrac{m+n}{2}$.

Suponha que m e n sejam ambos pares. Escreva $m = 2u$ e $n = 2v$ de modo que $x = \sqrt{mn} = 2\sqrt{uv}$ e $y = \dfrac{m-n}{2} = u - v$. Como $(x, y) = 1$, resulta que $(u, v) = 1$. Com efeito, se $d = (u, v)$, então $d|u$ e $d|v$. Logo, $d|x$ e $d|y$, e como $(x, y) = 1$ temos que $d = 1$. Além disso u e v têm paridade distinta, pois caso contrário, $2|x$ e $2|y$, contradizendo $(x, y) = 1$. Como $x^2 = 4uv$ e $(u, v) = 1$, resulta que u e v são quadrados perfeitos e portanto existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > b > 0$ tais que $u = a^2$ e $v = b^2$ e a e b têm paridade diferente. Além disso, $x = 2\sqrt{uv} = 2ab$, $y = u - v = a^2 - b^2$ e como $z^2 = x^2 + y^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2$, segue que $z = a^2 + b^2$.

Suponha agora que m e n sejam ambos ímpares. Como $(x, y) = 1$, resulta que $(m, n) = 1$. Com efeito, se $d = (m, n)$ então $d|m$ e $d|n$. Logo, $d|x$ e $d|y$ e como $(x, y) = 1$ temos que $d = 1$. Como $x^2 = mn$ e $(m, n) = 1$, resulta que m e n são quadrados perfeitos e portanto existem $u, v \in \mathbb{Z}$, $u > v > 0$ tais que $m = u^2$ e $n = v^2$. Como m e n são ímpares, u

e v também são ímpares. Assim, $y = \dfrac{m-n}{2} = \dfrac{u^2-v^2}{2} = 2\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\left(\dfrac{u-v}{2}\right) = 2ab$, onde $a = \dfrac{u+v}{2}$ e $b = \dfrac{u-v}{2}$. Além disso, $x = \sqrt{mn} = uv = \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2 = a^2 - b^2$ e como antes $z = a^2 + b^2$.

Resta mostrar que a e b têm paridade distinta. Se $u \equiv v \equiv 1$ ou $u \equiv v \equiv 3 mod 4$, então $u + v \equiv 2$ e $u - v \equiv 0 mod 4$, de modo que $a = \dfrac{u+v}{2}$ é ímpar e $b = \dfrac{u-v}{2}$ é par. Se $u \equiv 1$ e $v \equiv 3 mod 4$ ou $u \equiv 3$ e $v \equiv 1 mod 4$, então $u + v \equiv 0$ e $u - v \equiv 2 mod 4$, de modo que $a = \dfrac{u+v}{2}$ é par e $b = \frac{u-v}{2}$ é ímpar.

$2 \implies 1)$ Como $x = 2ab, y = a^2 - b^2$ e $z = a^2 + b^2$, temos que $x^2 + y^2 = z^2$. Resta mostrar que $(x, y) = 1$. Observe $x = 2ab$ é par enquanto que $y = a^2 - b^2$ é ímpar, uma vez que a e b têm paridade diferente. Suponha que $(x, y) \neq 1$ e seja p um primo ímpar tal que $p|x$ e $p|y$. Como $p|x$ que é $p|2ab$, assim temos que $p|a$ ou $p|b$. Como $p|y$, $p|(a^2 - b^2)$, e consequentemente $p|a$ e $p|b$. Assim, $(a, b) \neq 1$, uma contradição. $\square$

3 O método geométrico para o triângulo pitagórico

Neste capítulo, abordamos o universo dos ternos pitagóricos e sua conexão com a geometria subjacente. Baseando-nos na estrutura sólida da geometria euclidiana, descobrimos diversas relações entre os ternos pitagóricos e aspectos notáveis do triângulo retângulo, incluindo os círculos notáveis associados a esse triângulo. Além disso, exploramos as conexões entre os ternos pitagóricos e a geometria analítica, iniciando o capítulo com uma análise dessas relações fundamentais, como será detalhado adiante.

3.1 Forma geral dos ternos pitagóricos com a geometria analítica

Nesta sessão, nosso propósito é demostrar como conceitos da geometria analítica nos permite obter a forma geral dos ternos pitagóricos. Além disso, compreenderemos suas propriedades e relações matemáticas por um caminho diferente do aritmético. Para isso vamos observar que $a^2 + b^2 = c^2$ é equivalente à equação $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, isto é, o ponto $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ é um ponto com coordenadas racionais da circunferência C com centro na origem e raio 1, ou, equivalentemente, $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ é uma solução da equação $x^2 + y^2 = 1$ com coordenadas que são números racionais.

Podemos perceber que os pontos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ são pontos que pertencem á circunferência. Agora, se temos outro ponto sobre a circunferência que tem coordenadas racionais, digamos (r, s), então a reta γ que passa pelos pontos$(0, -1)$ e (r, s) corta a circunferência exatamente nesses pontos e tem inclinação $\dfrac{s+1}{r}$, que é um número racional.

Podemos dar uma outra visão dessa situação: tome uma reta γ que passa por $(0, -1)$ e tem inclinação racional $\dfrac{m}{n}$. Ela cortará a circunferência C no ponto $(0, -1)$, e outro ponto qualquer onde podemos fazer o calculo resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ y & = & \dfrac{m}{n}x & - & 1 \end{cases}$$

Assim, substituindo y por $\dfrac{m}{n}x - 1$, obtemos

$$1 = x^2 + \left(\tfrac{m}{n}x - 1\right)^2$$

$$1 = x^2 + \frac{m^2}{n^2}x^2 - 2\frac{m}{n}x + 1$$
$$0 = x^2 + \frac{m^2}{n^2}x^2 - 2\frac{m}{n}x$$

O gráfico que melhor representa a situação acima é o seguinte:

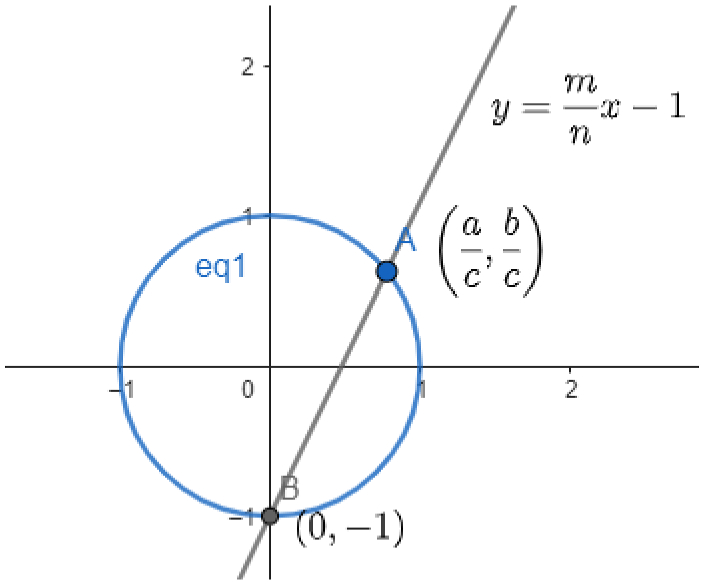


Figura 6 – Circunferência de raio 1.

Esta equação possui como uma solução $x = 0$. A segundo solução é dada por $\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) x = 2\frac{m}{n}$, isto é, $x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$, e portanto

$$\frac{a}{c} = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ e } \frac{b}{c} = \frac{m}{n}\frac{2mn}{m^2 + n^2} - 1 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

agora como as frações são iguais, supondo que $mdc(m, n) = 1$, segue-se que, no caso em que $m + n$ é ímpar, existe um inteiro k tal que

$$a = 2mnk,\ b = (m^2 - n^2)k,\ c = (m^2 + n^2)k.$$

E, no caso em que $m + n$ é par, existe um inteiro k tal que $a = mnk$, $b = \frac{(m^2 - n^2)}{2}k$, $c = \frac{(m^2 + n^2)}{2}k$.

Explorar o caso, utilizando geometria analítica, para geramos os ternos pitagóricos, pode nos fornecer percepções valiosas para a resolução de equações do tipo quadrática mais gerais, como ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo 3.1. Determine todas as soluções inteiras da equação $a^2 + 3b^2 = 13c^2$.

Solução. Dividindo por c^2 teremos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 13$, daí o problema se resume em encontrar as soluções racionais da equação $x^2 + 3y^2 = 13$, que é uma elipse centrada na origem no plano cartesiano. Encontrando uma solução particular, temos os pontos $(\pm 1, \pm 2)$ são soluções. A equação da reta que passa pelos ponto $(-1, -2)$ e tem inclinação $\frac{m}{n}$ é $y = \frac{m}{n}(x+1) - 2 \Rightarrow y = \frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}$.

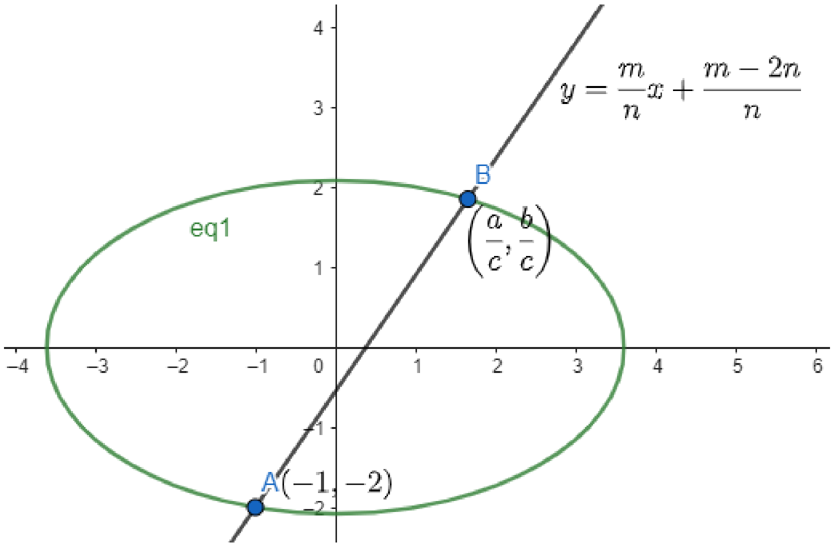


Figura 7 – Elipse cortada pela reta de equação $y = \frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}$.

Os pontos de interseção da reta com a elipse são as soluções obtidas quando resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ y = \frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}; \end{cases}$$

Agora, substituindo y na equação da elipse, obtemos que

$$\begin{aligned}
13 &= x^2 + 3\left(\frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}\right)^2 \\
13 &= x^2 + 3\left[\frac{m^2}{n^2}x^2 + 2\frac{m-2n}{n} \cdot \frac{m}{n}x + \frac{m^2 - 4nm + 4n^2}{n^2}\right] \\
13 &= x^2 + \frac{3m^2}{n^2}x^2 + \frac{6m^2 - 12mn}{n^2}x + \frac{3m^2 - 12nm + 12n^2}{n^2} \\
x^2 + \frac{3m^2}{n^2}x^2 &+ \frac{6m^2 - 12mn}{n^2}x + \frac{3m^2 - 12nm + 12n^2}{n^2} - 13 = 0 \\
\frac{3m^2 + n^2}{n^2}x^2 &+ \frac{6m^2 - 12mn}{n^2}x + \frac{3m^2 - 12nm + 12n^2}{n^2} - 13 = 0 \\
\frac{3m^2 + n^2}{n^2}x^2 &+ 3 \cdot \frac{m(2m-4n)}{n^2}x + \frac{3m^2 - 12nm - n^2}{n^2} = 0 \\
\frac{3m^2 + n^2}{n^2}x^2 &+ 3 \cdot \frac{m(2m-4n)}{n^2}x + (-1) \cdot \frac{n^2 + 12mn - 3m^2}{n^2} = 0
\end{aligned}$$

Como $(-1,-2)$ é um dos pontos de intersecção da elipse com a reta, é possível comprovar diretamente que $x=-1$ deve ser solução dessa equação. Agora podemos usar o fator de que o termo independente de uma equação quadrática é o produto das raízes, temos que a outra raiz é

$$\frac{a}{c} = x = \frac{n^2+12mn-3m^2}{3m^2+n^2},$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{b}{c} &= y = \frac{m}{n}\cdot\frac{n^2+12mn-3m^2}{3m^2+n^2}+\frac{m-2n}{n}\\
\frac{b}{c} &= y = \frac{mn^2+12m^2n-3m^3+(3m^2+n^2)(m-2n)}{n(3m^2+n^2)}\\
\frac{b}{c} &= y = \frac{mn^2+12m^2n-3m^3+3m^3-6m^2n+n^2m-2n^3}{n(3m^2+n^2)}\\
\frac{b}{c} &= y = \frac{2mn^2+6m^2n-2n^3}{n(3m^2+n^2)}\\
\frac{b}{c} &= y = \frac{6m^2+2mn-2n^2}{3m^2+n^2}
\end{aligned}$$

Como as frações que aparecem em cada igualdade são iguais, então existirá um inteiro k tal que $a=\frac{k}{d}(n^2+12mn-3m^2)$, $b=\frac{k}{d}(6m^2+2mn-2n^2)$ e $c=\frac{k}{d}(3m^2+n^2)$(onde $d=mdc(n^2+12mn-3m^2, 6m^2+2mn-2n^2, 3m^2+n^2)$, que pertence a $\{1,\ 3,\ 13\ \}$, caso $mdc(m,n)=1$) e usando a simetria da elipse podemos considerar os valores positivos de a, b e c.

3.2 Triângulo com lados inteiros e ângulos em progressão aritmética

Nesta seção pretendemos fazer uma caracterização de todos os triângulos $\triangle ABC$ com lados de comprimentos inteiros a, b, e c que tenham seus ângulos em progressão aritmética. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, se a razão da progressão é α, então os ângulos terão medidas $60°-\alpha, 60°$ e $60°+\alpha$.
Suponhamos que o ângulo em B meça 60° e o ângulo em A seja o maior, e seja D o pé da altura desde o vértice A. Observemos que o triângulo $\triangle DAB$ é, de fato, metade de um triângulo equilátero, assim $BD=\frac{c}{2}$.
Como os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ são retângulos, aplicando o teorema de Pitágoras temos que

$$c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2 = AD^2 = b^2-\left(a-\frac{c}{2}\right)^2$$

que equivale a

$$\frac{3}{4}c^2 = b^2 - a^2 + ac - \frac{1}{4}c^2,$$

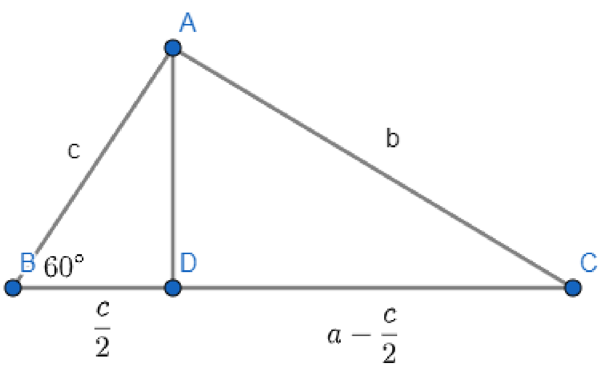


Figura 8 – Triângulo ABC de Altura AD.

ou seja, os triângulos que têm os ângulos em progressão aritmética são os triângulos que têm lados que satisfazem a relação

$$a^2 - ac + c^2 = b^2,$$

que equivale usando o método geométrico, a determinar as soluções racionais da equação $x^2 - xy + y^2 = 1$, que representa no plano uma elipse rotacionada. Observe que uma solução particular para essa equação é $(0, -1)$. Consideremos a interseção da elipse com a reta $y = \dfrac{m}{n}x - 1$.

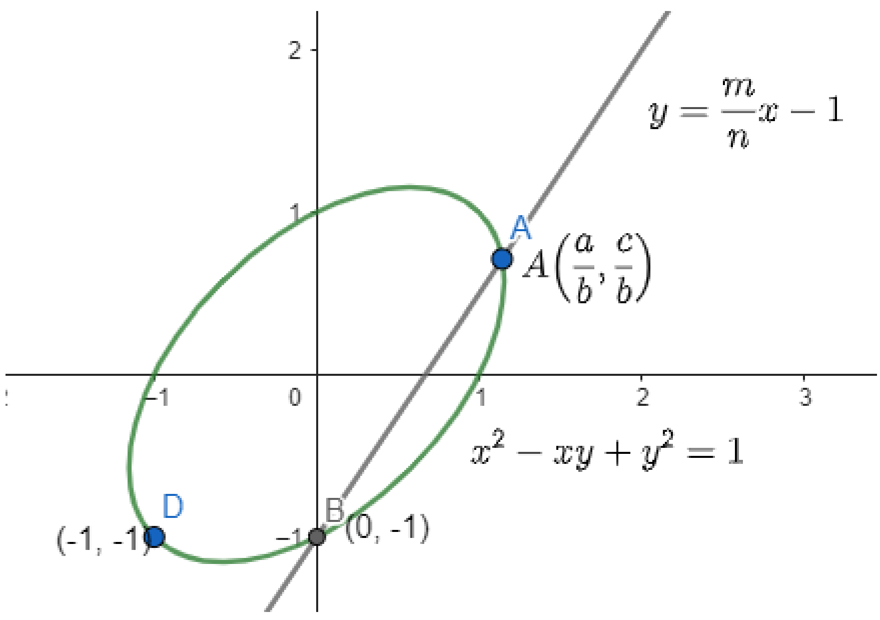


Figura 9 – Elipse rotacionada 45 graus.

A interseção da reta com a elipse é formada por pontos cuja coordenada x satisfaz a equação, ao substituir as coordenas iremos ter:

$$x^2 - x \cdot \left(\frac{m}{n}x - 1\right) + \left(\frac{m}{n}x - 1\right)^2 = 1$$

$$x^2 - \frac{m}{n}x^2 + x + \frac{m^2}{n^2}x^2 - 2 \cdot \frac{m}{n}x + 1 = 1$$

Multiplicando toda equação por n^2 teremos:

$$n^2x^2 - mnx^2 + m^2x^2 + n^2x - 2mnx = 0$$

Reorganizando a equação nos dará,

$$(m^2 - mn + n^2)x^2 - (2m - n)nx = 0.$$

Assim,

$$\frac{a}{b} = \frac{2mn - n^2}{m^2 - mn + n^2}, \ \frac{c}{b} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 - mn + n^2}.$$

Concluímos que os comprimentos dos lados dos triângulos com um ângulo de 60° onde seus ângulos estão em progressão aritmética são

$$a = k(2mn - n^2),\ b = k(m^2 - mn + n^2) \text{ e } c = k(m^2 - n^2),\ k \in \mathbb{Z}.$$

3.3 Círculo inscrito em um triângulo pitagórico

Todo triângulo retângulo de medidas a, b, e c, com a e b sendo os catetos e c, a hipotenusa, com lados inteiros e positivos, ou seja, os elementos do terno pitagórico (a, b, c) são lados do triângulo.

De acordo com os estudos de (BEZ, 1997), um problema interessante envolvendo ternos pitagóricos é o que nos leva a demonstrar que "todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico, tem como medida de seu raio um número inteiro positivo".

(BEZ, 1997) apresenta esse problema de ternos pitagóricos por meio da qual subsidiamos a seguinte demonstração.

Seja o triângulo retângulo ABC, reto em C, de medidas $AB = c, AC = b$ e $BC = a$, sendo AC e CB os catetos e AB a hipotenusa, circunscrito à circunferência de centro I e raio r.

Será mostrado que todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico, tem como medida de seu raio um número inteiro e positivo.

Sendo (a, b, c) um terno pitagórico primitivo, temos que a, b e c são números inteiros e positivos, onde $a^2 + b^2 = c^2$.

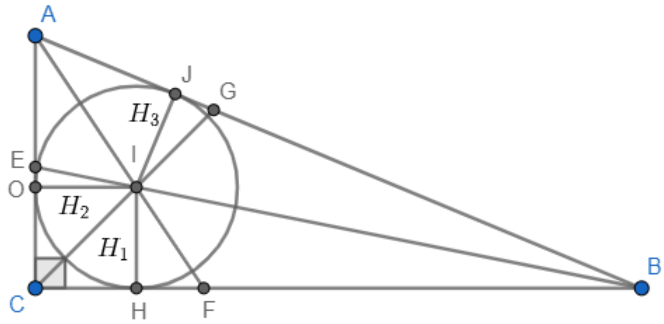


Figura 10 – Triângulo ABC com circulo inscrito de centro I.

Calculando a área do triângulo retângulo ABC:

$$\text{Área} = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow A = \frac{AC \cdot BC}{2} \Rightarrow A = \frac{b \cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{a \cdot b}{2} \tag{3.1}$$

Observe que o triângulo ABC foi dividido em 3 triângulos menores, $[AIB]$, $[AIC]$ e $[BIC]$, e a área do triângulo maior é igual á soma das áreas dos triângulos menores, ou seja:

$$[ABC] = [AIB] + [AIC] + [BIC]$$

$$\Rightarrow [ABC] = \frac{CB \cdot H_1}{2} + \frac{AC \cdot H_2}{2} + \frac{AB \cdot H_3}{2}$$

$$\Rightarrow [ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$\Rightarrow [ABC] = \frac{a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r}{2}$$

$$\Rightarrow [ABC] = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2} \tag{3.2}$$

Comparando (3.1) e (3.2), teremos:

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2} \Rightarrow a \cdot b = r \cdot (a + b + c) \tag{3.3}$$

Lembrando o que já mencionamos neste trabalho que dados os lados de um triângulo retângulo "(a, b, c) é um terno pitagórico primitivo se e somente se existem inteiros positivos m e n, $m > n$, m e n primos entre si e não ambos ímpares, tas que $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$".
Fazendo $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$ e substituindo em (3.3), teremos:

$$a \cdot b = r \cdot (a + b + c) \Rightarrow (m^2 - n^2) \cdot 2mn = r \cdot (m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)$$

$$\Rightarrow (m^2 - n^2) \cdot 2mn = r \cdot (2m^2 + 2mn)$$

$$\Rightarrow (m^2 - n^2) \cdot 2mn = r \cdot 2m(m + n)$$

$$\Rightarrow r = \frac{(m^2 - n^2) \cdot 2mn}{2m(m+n)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{(m+n) \cdot (m-n) \cdot 2mn}{2m(m+n)}$$

$$\Rightarrow r = n \cdot (m-n)$$

Observe que , como m e n são números inteiros e positivos, com $m > n$, temos que $m - n$ também será inteiro e positivo e, desse modo temos que R será um número inteiro e positivo.
Desse modo, temos que "todo círculo inscrito num triângulo retângulo pitagórico tem como medida de seu raio um número inteiro positivo".

3.4 Círculos Ex-inscritos em um Triângulo Pitagórico

Vamos agora explorar os casos em que todos os círculos ex-inscritos de um triângulo pitagórico têm como raio um número inteiro. Ao examinar as propriedades desses triângulos, um aspecto intrigante é o comportamento de seus círculos ex-inscritos. Esses círculos, que são tangentes aos lados do triângulo e é formado pelo encontro de duas bissetrizes externas e uma interna, exibem características únicas, especialmente quando seus raios são inteiros. Investigar tais casos não apenas lança luz sobre as propriedades geométricas dos triângulos pitagóricos, mas também revela conexões com a teoria dos números.
Para darmos sequência a essa outra afirmação teremos que usar um importante teorema da geometria Euclidiana, onde é conhecido por muitos como teorema do bico.

Teorema 3.2 (Teorema do Bico)**.** *Seja P um ponto e λ uma circunferência de centro O e raio r tal que $OP > r$.*
Se PT_1 e PT_2 são tangentes a λ nos pontos T_1 e T_2. Então

$$PT_1 = PT_2.$$

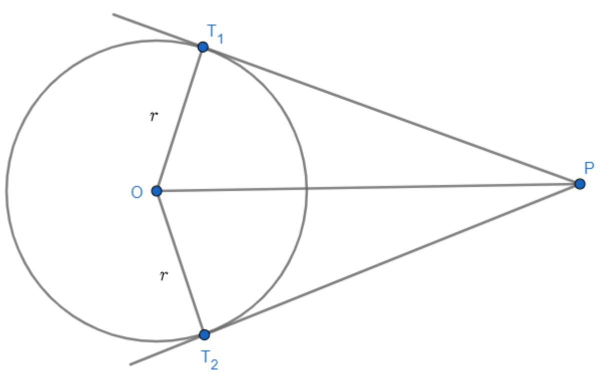


Figura 11 – Circulo de centro O com duas retas tangente a ele passando por um ponto P.

Demonstração. Note que pela figura temos $OT_1 = OT_2 = r$.

Note também que o ângulo em T_1 e T_2 são retos, pois o segmento PT_1 e PT_2 são tangentes a circunferência λ.
O segmento OP é hipotenusa dos triângulos OPT_1 e OPT_2. Daí segue pelo caso especial de congruência em triângulos retângulos, se dois triângulos retângulos, tem um cateto e uma hipotenusa são iguais, então os triângulos são congruentes. Logo

$$PT_1 = PT_2.$$

□

Para demonstrarmos que todos os raios dos círculos ex-inscritos de um triângulo pitagórico são inteiros, iremos dividir a análise em três casos distintos. Em cada caso, examinaremos individualmente os círculos ex-inscritos do triângulo, demonstrando essa particularidade de seus raios.

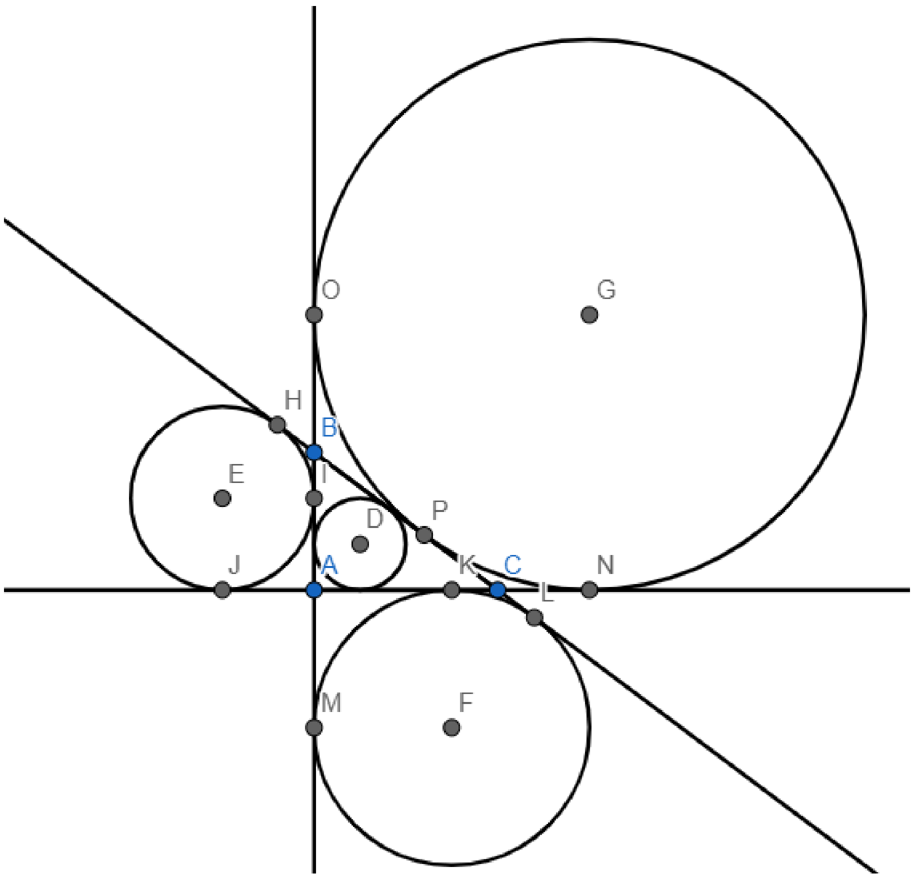


Figura 12 – Triângulo ABC com seus ex-círculos.

Como estamos trabalhando com triângulos pitagóricos vamos adotar que o segmento $AB = a$, $AC = b$ e $BC = c$. Como vimos ao longo desse trabalho temos que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$ e $m > n > 0$.

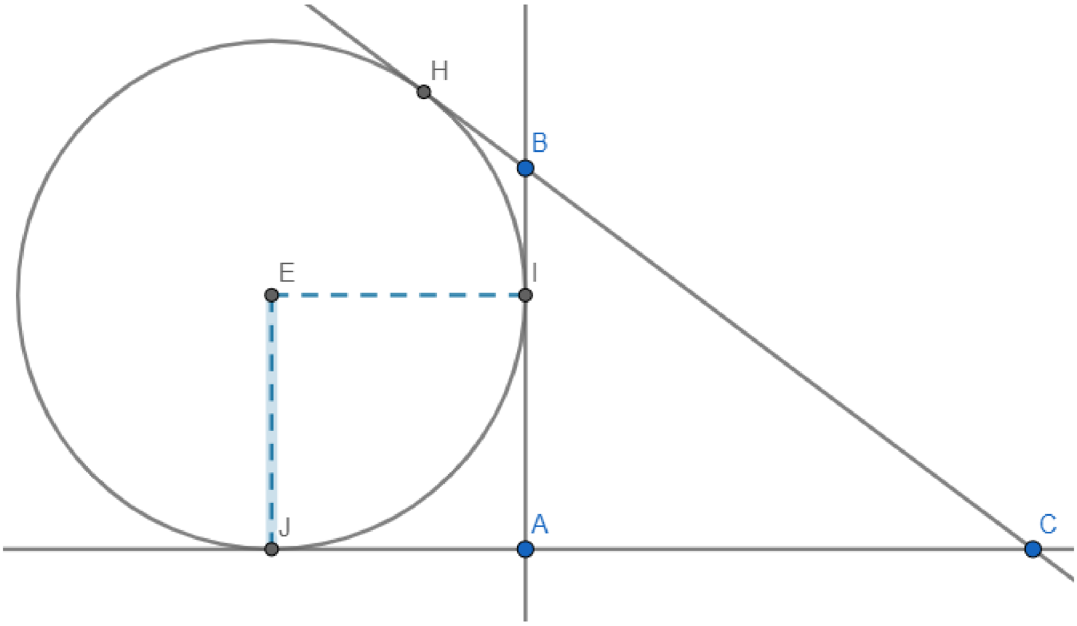


Figura 13 – Triângulo ABC com seu ex-círculo tangente ao lado AB .

Caso 1: Vamos mostrar aqui que o círculo ex-inscrito que fica ao lado do segmento AB seu raio é um número inteiro.

Note que ao traçarmos o segmento EJ e EI que será o raio do círculo ex-inscrito que chamaremos de R_1. É fácil perceber que o ângulo formado em J e I serão retos em relação as retas em que os segmentos AI e AJ fazem parte. Sabemos que o segmento $AB = a$ tem um ponto de tangência com o círculo ex-inscrito que chamamos de I. Iremos chamar o segmento $BI = x$, logo $BH = x$ pelo teorema do bico. Observe que $BI = x$, então $IA = a - x$. Podemos notar que o polígono formado pelos pontos $AIEJ$ é um quadrado pois seus ângulos internos são todos 90 graus e seus lados são todos iguais. Logo $R_1 = a - x$. Note também pelo teorema do bico que o segmento CJ e CH são iguais, isto é,

$$b + a - x = c + x$$

Daí,

$$x = \frac{b + a - c}{2}$$

Como $R_1 = a - x$ substituindo o valos de x teremos,

$$R_1 = a - \frac{b + a - c}{2}$$

$$R_1 = \frac{a - b + c}{2}.$$

Agora já sabemos que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$ fazendo a substituição teremos que $R_1 = m(m - n)$ e como temos $m > n > 0$, R_1 será um número inteiro como queríamos demonstrar.

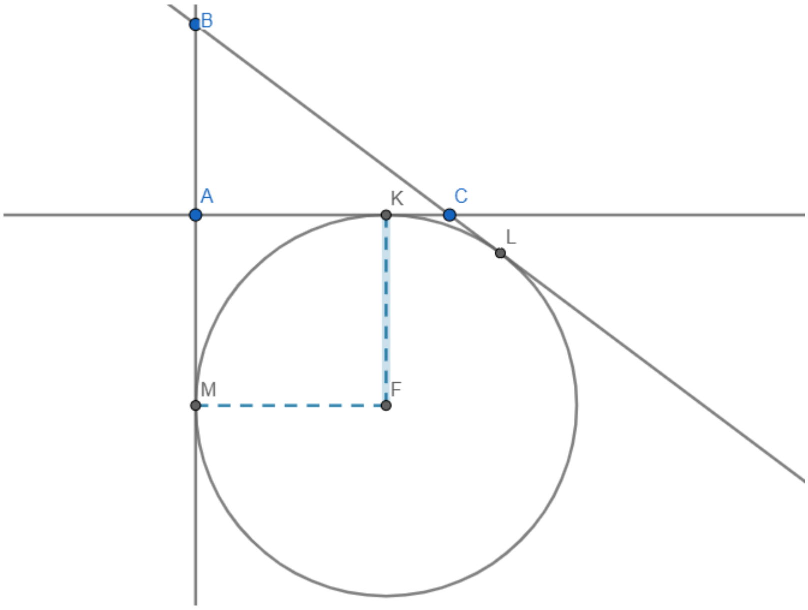


Figura 14 – Triângulo ABC com seu ex-círculo tangente ao lado AC .

caso 2: Vamos mostrar aqui que o círculo ex-inscrito que fica ao lado do segmento AC seu raio é um número inteiro.

Note que ao traçarmos o segmentos MF e KF que será iguais ao raio R_2 do círculo ex-inscrito. Como vimos no caso 1 o procedimento aqui será o mesmo, o ângulo formado por K e M são retos em relação aos segmentos AM e AK que pertence a reta AB e AC tangentes ao círculo ex-inscrito. Veja que o segmento $AC = b$ tem um ponto de tangência com o círculo ex-inscrito de centro F que chamamos de K. Vamos chamar o segmento $CK = y$, logo $CL = y$ pelo teorema do bico. Observe que $CK = x$, então $AK = b-y$. Veja o polígono formado pelos pontos $AMFK$ é um retângulo pois seus ângulos internos são todos 90 graus e esse retângulo é especial, pois também será um quadrado. Logo $R_2 = b-y$. Note também pelo teorema do bico que o segmento $BM = a+b-y$ e $BL = c+y$ são iguais, isto é,

$$a + b - y = c + y$$

Daí,

$$y = \frac{b + a - c}{2}$$

Como $R_2 = b - y$ substituindo o valos de y teremos,

$$R_2 = b - \frac{b + a - c}{2}$$

$$R_2 = \frac{-a + b + c}{2}.$$

Agora substituindo os valores de (a, b, c) fazendo a substituição teremos que $R_2 = n(m+n)$ e como temos $m > n > 0$, R_2 será um número inteiro como queríamos demonstrar.

caso 3: Vamos mostrar aqui que o círculo ex-inscrito que fica ao lado do segmento BC, seu raio é um número inteiro.

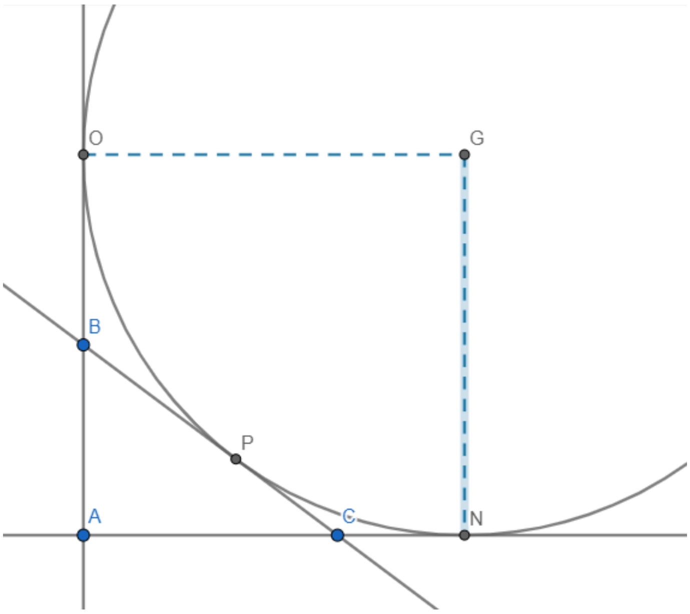


Figura 15 – Triângulo ABC com seu ex-círculo tangente ao lado BC .

Repetindo os procedimentos anteriores teremos o segmento GO e GN que será igual ao raio R_3. Os ângulo formado por O e N são retos em relação aos segmentos AN e AO. Veja que o segmento $BC = c$ tera o ponto de tangência com o círculo ex-inscrito de centro G que chamamos de P. Vamos chamar o segmento $BP = z$, logo $BO = z$ pelo teorema do bico. Se $BO = z$, então $CP = c - z$. Veja o polígono formado pelos pontos $ANGO$ é um quadrado pelos mesmos casos de R_1 e R_2. Logo $R_3 = a + z$. Note também pelo teorema do bico que o segmento $AO = a + z$ e $AN = b + c - z$ são iguais, isto é,

$$a + z = b + c - z.$$

Daí,

$$z = \frac{-a + b + c}{2}$$

Como $R_3 = a + z$ substituindo o valos de y teremos,

$$R_3 = a + \frac{-a + b + c}{2}$$

$$R_3 = \frac{a + b + c}{2}.$$

Agora substituindo os valores de (a, b, c) fazendo a substituição teremos que $R_3 = m(m+n)$ e como temos $m > n > 0$, R_3 será um número inteiro como queríamos demonstrar.
Com essas demonstrações, podemos afirmar de forma conclusiva que todos os raios dos círculos ex-inscritos são números inteiros.

3.5 Outro Círculo de Raio Inteiro

Nesta seção, examinaremos outro triângulo formado pelos centros dos círculos ex-inscritos do triângulo ABC.

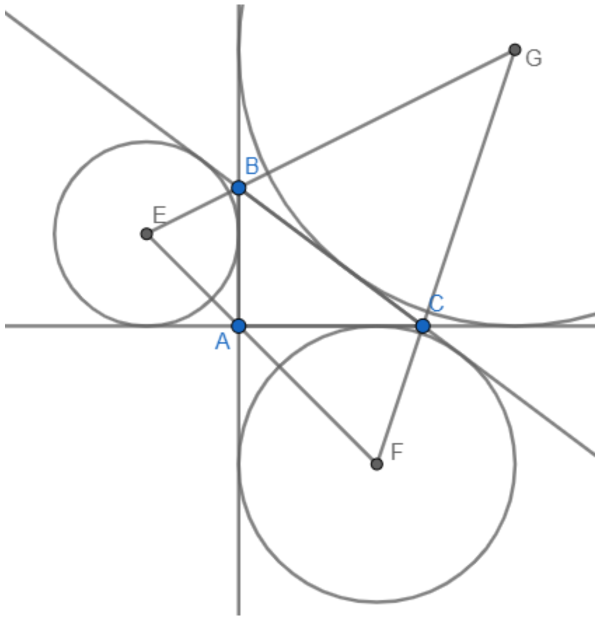


Figura 16 – Triângulo EFG formado pelos ex-inscritos do triângulo ABC .

Observamos que a circunferência circunscrita a este triângulo tem um raio que também é um número inteiro. Este triângulo, formado pelos centros E, F e G, é delimitado pelo encontro das bissetrizes externas do triângulo ABC. Notamos anteriormente que os círculos cujos raios provamos serem números inteiros tinham suas construções relacionadas às bissetrizes do triângulo ABC. Portanto, procuramos um outro círculo com raio inteiro que tenha alguma relação com as bissetrizes do triângulo ABC e notamos que o triângulo EFG seus segmentos é formados pelo encontro das bissetrizes externas do triângulo ABC, daí verificamos que existe outro círculo com raio inteiro, onde sempre podemos saber qual o seu raio dado os lados do triângulo ABC. Foi notado por casos particulares construídos no Geogebra que o circuncirculo do triângulo EFG sempre era um número inteiro, e melhor, o seu raio sempre seria igual ao valor da hipotenusa do triângulo ABC.

Para darmos inicio a essa demonstração vamos precisar utilizar algumas propriedades da geometria euclidiana, que serão a soma dos ângulos internos de um triângulo, teorema do ângulo externo e a lei dos senos.

Teorema 3.3. *(O Teorema da Soma dos Ângulos Internos) é uma propriedade fundamental dos triângulos na geometria euclidiana. Este teorema afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180 graus.*

Demonstração. Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$, com os ângulos $\angle A, \angle B$ e $\angle C$. Traçamos uma linha paralela ao lado BC que passa pelo vértice A.

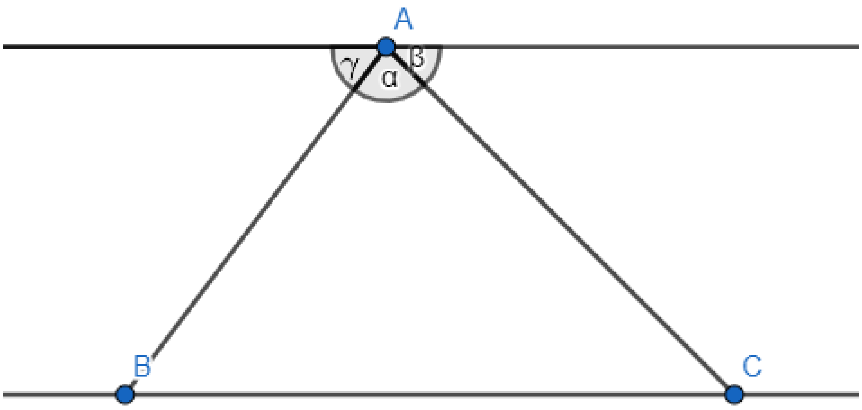


Figura 17 – Triângulo ABC com reta paralela ao segmento BC passando por A.

Podemos perceber pelo triângulo construindo que o $\angle B$ é igual a γ pois são alternos internos.

Pelo mesmo critério os ângulos $\angle C$ é igual a β.
Chamamos também o $\angle A$ de α.

É fácil verificar que a soma dos ângulos α, β e γ é 180°, logo $\angle A, \angle B$ e $\angle C$ sua soma será 180°. □

Teorema 3.4. *(O Teorema do Ângulo Externo) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Para essa demonstração tomemos o triângulo abaixo.

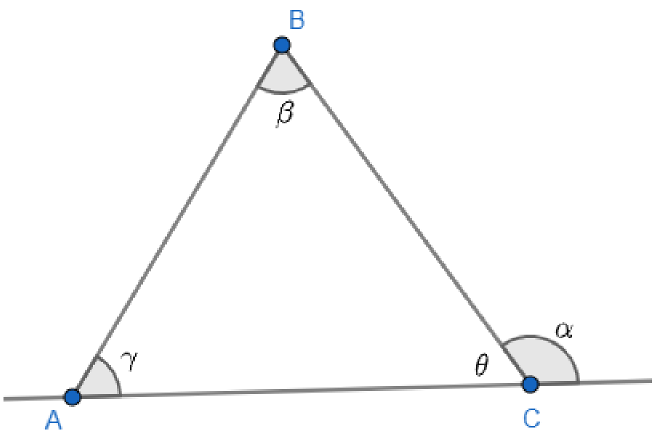


Figura 18 – Triângulo ABC com ângulo externo α.

Note que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é $\gamma + \beta + \theta = 180°$. É possível perceber que a soma dos ângulos $\alpha + \theta = 180°$ comparando as duas equações temos que $\gamma + \beta = \alpha$. Logo o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. $\square$

Teorema 3.5. *(Lei dos senos) ele é expresso pela razão* $\dfrac{a}{sen\angle A} = \dfrac{b}{sen\angle B} = \dfrac{c}{sen\angle C} = 2r$

Demonstração. Utilizaremos o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O e raio r, chamaremos o ângulo interno do triângulo ABC em A de α.

Traçando uma reta no ponto B passando pelo centro O da circunferência circunscrita, a intersecção desta reta com a circunferência chamaremos de D, note que o segmento BD sera igual a $2r$.

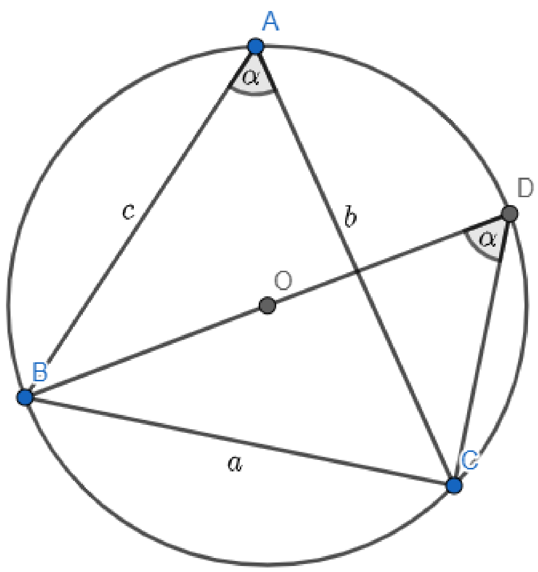


Figura 19 – Circuncirculo do triângulo ABC de centro O.

Note agora que traçando o triângulo DBC é retângulo em C, pois $\angle BCD$ é um ângulo inscrito associado ao arco BD que mede 180°.
É fácil perceber que o ângulo em A e D serão iguais pois eles enxergam o mesmo arco BC.
Agora aplicando a razão do seno teremos:

$$sen\alpha = \frac{a}{2r}$$

que será,

$$\frac{a}{sen\alpha} = 2r.$$

Analogamente $\dfrac{b}{sen\angle B} = \dfrac{c}{sen\angle C} = 2r.$ $\square$

Um resultado importante a ser destacado é:

Proposição 3.6. *Todo ângulo formado por uma bissetriz interna com uma bissetriz externa é sempre metade do ângulo interno do triângulo.*

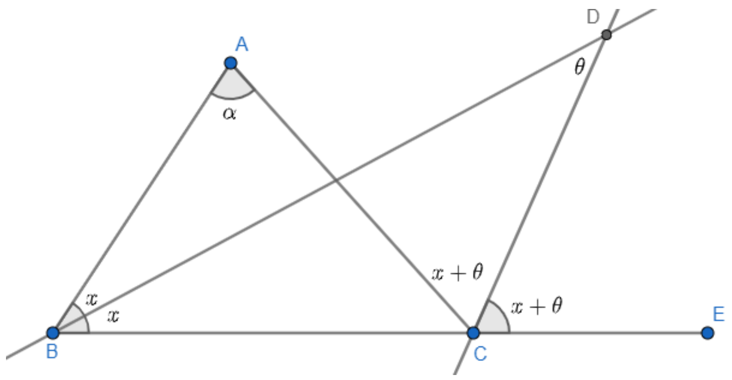


Figura 20 – Triângulo ABC com o encontro das bissetrizes interna e externa em D.

Demonstração. Note que CD é bissetriz externa e $\angle DCE$ ângulo externo que implica em $\angle DCE = x + \theta = \angle ACD$. Agora $\angle ACE$ é ângulo externo ao triângulo ABC que implica em,

$$2\theta + 2x = \alpha + 2x.$$

Logo temos $\alpha = 2\theta$. □

Teorema 3.7. *Todo circulo circunscrito a um triângulo formado pelo encontro dos ex-centros do triângulo pitagórico, sempre será igual a hipotenusa do triângulo pitagórico.*

Agora vamos observar a figura a seguir e demonstrar a afirmação que foi comentada no inicio dessa sessão.

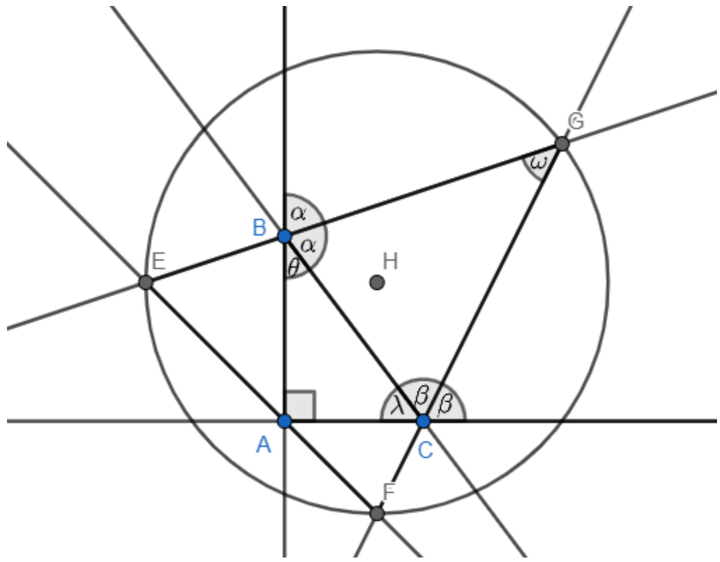


Figura 21 – Triângulo EFG com seu circuncirculo de centro H.

Demonstração. Vamos chamar os ângulos internos do triângulo ABC de θ e λ e sabemos que o ângulo em A é 90°, logo a soma dos ângulos θ e λ é igual a 90°. Vejamos também que o ângulos externo ao ângulo λ é igual aos ângulos $\theta + 90°$, chamaremos esse ângulo externo de $\beta + \beta$ pois esse ângulo externo é dividido pelo segmento FG que é uma bissetriz externa.Logo

$$\beta + \beta = \theta + 90°.$$

Observe também que o ângulo externo ao ângulo θ, terá as mesmas propriedades do ângulo externo anterior, daí

$$\alpha + \alpha = \lambda + 90°.$$

Podemos montar um sistema de equações com essas duas igualdade:

$$\begin{cases} \beta & + & \beta & = & \theta & + & 90° \\ \alpha & + & \alpha & = & \lambda & + & 90° \end{cases}$$

Somando as duas equações teremos:

$$2\beta + 2\alpha = \theta + \lambda + 180°$$

Como vimos que a soma dos ângulos θ e λ é igual a 90°, o que se resume a;

$$2\beta + 2\alpha = 90° + 180°$$

$$2\beta + 2\alpha = 270°$$

$$\beta + \alpha = 135°.$$

Agora vamos olhar para o triângulo GBC, temos que a soma dos seus ângulos internos é 180°, então teremos $\alpha + \beta + \omega = 180°$ como $\beta + \alpha = 135°$ teremos que $\omega = 45°$.
Usando a lei dos senos vamos ter que:

$$\frac{EF}{sen45°} = 2r \tag{3.4}$$

Note que como vimos na demonstração anterior os casos 1 e 2 dos raios dos círculos ex-inscritos, percebemos que o segmento AF e AE são diagonais do quadrado de lados R_1 e R_2, dai o segmento EF será a soma desses dois segmento onde,

$$AE = \frac{a - b + c}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$AF = \frac{-a + b + c}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Sua soma ficara

$$EF = c \cdot \sqrt{2}.$$

Daí nossa equação (3.4) nós dará:

$$\frac{c \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

$$2c = 2r$$

$$c = r.$$

$\square$

Assim, demonstramos que o raio de qualquer círculo circunscrito a um triângulo formado pelos encontros dos ex-centros de um triângulo pitagórico é sempre um número inteiro. Uma observação importante a destacar nessa construção é que o circuncirculo de ABC é o círculo de 9 pontos de EFG, pois ABC é o triângulo órtico de EFG (formado pelos pés das alturas de EFG). Existe uma homotetia de razão 2 que manda o circuncirculo de ABC no circuncirculo de EFG. Isso implica que o circunraio de $EFG = 2\cdot$ circunraio de ABC. Daí temos que $r = 2 \cdot \dfrac{c}{2} = c$.

4 Sequências e Ternos Pitagóricos

Neste capítulo, adotaremos uma abordagem focada no estudo de sequências relacionadas aos ternos pitagóricos, oferecendo uma nova perspectiva sobre esse tema. Destacaremos a importância da sequência de Fibonacci e alguns de seus padrões que exploram ternos pitagóricos. Além disso, investigaremos a possibilidade de identificar ternos pitagóricos em progressões aritméticas.

4.1 Padrões criados por Fibonacci

Os padrões matemáticos permeiam diversas áreas do conhecimento humano, desde a arte até a economia. Entre esses padrões, os criados por Fibonacci são particularmente fascinantes e têm sido objeto de estudo e admiração há séculos. Nesta sessão, exploraremos os padrões matemáticos concebidos pelo renomado matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Para tal padrões (BEZ, 1997) ”diz que Fibonacci se preocupou em criar padrões na busca de ternos pitagóricos de números inteiros”.
Para iniciamos as observações dos padrões criados por Fibonacci, podemos observar duas proposição importantes de números inteiros:

Proposição 4.1. *A soma dos n primeiros ímpares é n^2.*

Demonstração. Note que a sucessão de números ímpares é dada por: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...$
Esta sucessão de ímpares é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2.
O termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$ logo,

$$a_n = 2n - 1$$

Sua soma será dada por $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ o que nos dará,

$$S_n = n^2.$$

□

Proposição 4.2. *Se o último termo de uma sucessão de ímpares é M, então o número de termos é $\frac{(M+1)}{2}$.*

Demonstração. É evidente que se $a_n = M$, temos da fórmula do termo geral que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$M = 1 + (n-1)2$$
$$n = \frac{(M+1)}{2}$$

□

A partir dessas duas proposição vamos analisar padrões criados pelo próprio Leonardo de Fibonacci que estão no trabalho de (BEZ, 1997).

Proposição 4.3. *(Primeiro padrão) Considere uma sucessão de ímpares, cujo último termo seja um quadrado:*

$$1, 3, 5, 7, ..., (x^2 - 2), x^2.$$

Podemos também afirmar que x é ímpar caso contrário x^2 não seria ímpar.
Vamos agora, considerar uma sucessão de ímpares com um termo a menos que a anterior, ou seja:

$$1, 3, 5, 7, ..., (x^2 - 2).$$

Sabemos que a soma da primeira é um quadrado que chamaremos de z^2 e a soma da segunda também é um quadrado que chamaremos de y^2. E sabemos que a diferença das duas é x^2 e será dada por: $z^2 - y^2 = x^2$ donde tiramos claramente a relação pitagórica de inteiros que é: $x^2 + y^2 = z^2$

Exemplo 4.4. Tomemos $x = 9$; então o último termo da primeira sucessão é 81 e o número de termos da sucessão é dado por

$$z = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(81+1)}{2} = 41.$$

Agora o último termo da segunda sucessão é 79 e o número de termos da segunda sucessão é dado por

$$y = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(79+1)}{2} = 40.$$

Assim temos: $x = 9, y = 40, z = 41$. Logo, o terno pitagórico é $(9, 40, 41)$.

Proposição 4.5. *(segundo padrão) Vamos agora considerar nossa primeira sucessão de ímpares, com x par:*

$$1, 3, 5, 7, ..., (\frac{x^2}{2} + 1);$$

e a sucessão de ímpares com dois termos a menos que a primeira:

$$1, 3, 5, 7, ..., (\frac{x^2}{2} - 3).$$

Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio anterior, teremos:

$$z^2 - y^2 = (\frac{x^2}{2} - 1) + (\frac{x^2}{2} + 1)$$

ou então, $z^2 - y^2 = x^2$ donde tiramos claramente a relação pitagórica de inteiros que é: $x^2 + y^2 = z^2$

Exemplo 4.6. Tomemos $x = 12$; então o último termo da primeira sucessão é 73 e o número de termos da sucessão é dado por

$$z = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(73+1)}{2} = 37.$$

Agora o último termo da segunda sucessão é 69 e o número de termos da segunda sucessão é dado por

$$y = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(69+1)}{2} = 35.$$

Assim temos: $x = 12, y = 35, z = 37$. Logo, o terno pitagórico é $(12, 35, 37)$.

Proposição 4.7. *(Terceiro padrão) Vamos agora considerar como nossa primeira sucessão de ímpares, com x ímpar:*

$$1, 3, 5, 7, 9, ..., (3x^2 + 2);$$

e a sucessão de ímpares com três termos a menos que a primeira:

$$1, 3, 5, 7, 9, ..., (3x^2 - 4).$$

Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio anterior, teremos:

$$z^2 - y^2 = (3x^2 - 2) + 3x^2 + (3x^2 + 2) = 9x^2 \text{ ou } (3x)^2 + y^2 = z^2,$$

que também é terno pitagórico nos inteiros $3x, y$ e z; podemos notar pelos exemplo seguinte que esse resultado não nos dará um terno pitagórico primitivo.

Exemplo 4.8. tomemos $x = 5$; então o último termo da primeira sucessão é 77 e o número de termos da sucessão é dado por

$$z = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(77+1)}{2} = 39.$$

Agora o último termo da segunda sucessão é 71 e o número de termos da segunda sucessão é dado por

$$y = \frac{(M+1)}{2} = \frac{(71+1)}{2} = 36.$$

Assim temos: $x = 5; y = 36; z = 39$. Logo, o terno pitagórico que é dado por $(3x, y, z)$ é $(15, 36, 39)$, que nada mais é um múltiplo do terno $(5, 12, 13)$.

4.2 Ternos pitagóricos com sucessão de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma das mais conhecidas sequências numéricas na matemática, cuja história remonta ao século XII, na Europa medieval. Seu nome é uma homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci,

que a introduziu em sua obra ”Liber Abaci” (Livro do Ábaco) em 1202.
A sequência de Fibonacci é definida recursivamente, começando com os números 0 e 1 e, em seguida, cada número subsequente é a soma dos dois anteriores. Formalmente, a sequência é escrita como:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

A sequência rapidamente se tornou objeto de grande interesse devido às suas propriedades intrigantes e aplicações em diversas áreas, desde a biologia até a arte e a música. Por exemplo, ela descreve de forma precisa o crescimento populacional de coelhos (daí seu nome ”sequência de Fibonacci”), além de aparecer em muitos contextos naturais, como na disposição de folhas em algumas plantas, na formação de conchas de moluscos e até mesmo na disposição de sementes em algumas frutas.
Uma versão atual do problema dos coelhos, segundo (TITONELI, 2017), propõe a seguinte situação:

> ”Em um cercado fechado um homem coloca um par de filhotes de coelhos. Em um ano quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par se, considerarmos que, todo mês um par gera um novo par que é fértil a partir do segundo mês de seu nascimento?”

Veja abaixo uma forma de organizar a solução do problema:

1. No primeiro mês temos um par de coelhos que é filhote e por isso não é fértil ainda, logo temos um par de coelhos;
2. No segundo mês o par de coelhos inicial é adulto, portanto é fértil, continuamos com o mesmo par;
3. No terceiro mês o par de coelhos adulto gera um novo par, logo temos 2 pares;
4. No quarto mês o casal inicial gera um novo par de coelhos e o casal nascido no mês anterior fica adulto esse mês, portanto fértil. Assim temos o casal inicial, o casal nascido no mês anterior e o casal nascido nesse mês. Logo temos três pares;
5. No quinto mês o casal inicial gera um novo par e o casal nascido no terceiro mês também gera um novo par. Portanto temos os dois casais que geraram dois novos pares e o casal nascido no mês anterior que também fica adulto. Logo, temos 5 casais;
6. No sexto mês o casal inicial gera um novo par, o casal gerado no terceiro mês gera um novo par, o casal gerado no quarto mês, agora adulto, também gera um novo casal, e os dois casais nascidos no mês anterior ficam férteis. Portanto temos 8 casais;
7. No sétimo mês o primeiro casal gera um novo casal, o casal nascido no terceiro mês gera outro casal, o casal nascido no quarto mês gera outro, os dois casais nascidos no quinto mês geram um par cada e temos ainda os três casais nascidos no mês anterior que ficam adultos.

Observando a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., podemos notar que alguns termos desta sequência aparecem em ternos pitagóricos, correspondendo à hipotenusa desses ternos. Por exemplo, o termo 5 faz parte do terno (3, 4, 5); o termo 13 está no terno (5, 12, 13); e o termo 34 aparece no terno (16, 30, 34), que é derivado do terno primitivo (8, 15, 17), entre outros.

Segundo (BEZ, 1997), ao observar os quatro primeiros elementos da sequência de Fibonacci, ”não encontramos nenhum termo que corresponda à hipotenusa de um terno pitagórico. No entanto, o termo seguinte, 5, faz parte de um terno fundamental”.

Vamos considerá-los: 1, 1, 2, 3.

Se fizemos o produto dos extremos 1 e 3, ou seja,

- $1 \cdot 3 = 3$

e o dobro do produto entre 1 e 2 que é igual a 4,

- $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

obteremos os elementos do terno (3, 4, 5).

Analisando agora o grupo seguinte, de 4 consecutivos, na sucessão, ou seja, 1, 2, 3, 5.

faremos a mesma operação realizada anteriormente:

- produto dos extremos: $1 \cdot 5 = 5$.
- o dobro do produto dos intermediários: $2 \cdot (2 \cdot 3) = 12$.

Esses dois termos resultantes, completam o terno (5, 12, 13).

Examinando o próximo grupo de quatro números consecutivos: 2, 3, 5, 8:

- produto dos extremos: $2 \cdot 8 = 16$
- dobro do produto dos intermediários: $2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$.

Esses dois termos resultantes, completam o terno (16, 30, 34) que podemos deriva-lo para o terno primitivo (8, 15, 17).

Seguindo este mesmo raciocínio podemos dizer que num grupo de ordem n : $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}$, temos como primeiro cateto $f_n \cdot f_{n+3}$ (produto dos extremos) e como segundo cateto $2 \cdot (f_{n+1} \cdot f_{n+2})$ (dobro do produto dos intermediários).

Com base nestas observações, podemos encontrar a hipotenusa dentro da sequência de Fibonacci ; basta indicar por f_n o número de Fibonacci que ocupa ordem n na sequência. Considerando as subsequências:

- Quando $n = 1$, os termos f_1, f_2, f_3, f_4, produzem a hipotenusa $5 = f_5 = f_{2\cdot 1+3}$.
- Quando $n = 2$, os termos f_2, f_3, f_4, f_5, produzem a hipotenusa $13 = f_7 = f_{2\cdot 2+3}$.
- De f_3, f_4, f_5, f_6, o número $34 = f_9$.
- De f_4, f_5, f_6, f_7, o número $89 = f_{11}$.

Podemos então conjecturar que a sequência $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}$ produz uma terna pitagórica com hipotenusa f_{2n+3}.

Proposição 4.9. $(f_n \cdot f_{n+3})^2 + (2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2$

Demonstração. Observe que cada grupo de 4 números consecutivos na sucessão de Fibonacci é do tipo:
(x), (y), $(x + y)$ e $(x + 2y)$
Seguindo o padrão na obtenção dos catetos, teremos:
o primeiro cateto $= x \cdot (x + 2y)$
o segundo cateto $= 2 \cdot (y \cdot (x + y))$

$$[x \cdot (x + 2y)]^2 + [2 \cdot (y \cdot (x + y))]^2 = [x^2 + 2xy]^2 + [2xy + 2y^2]^2 =$$
$$x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4 = x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4 =$$
$$(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)+2x^2y^2+4xy^3+3y^4 = (x+y)^4+2y^2(x+y)^2+y^4 = [(x+y)^2+y^2]^2.$$

□

Averiguando que a soma dos quadrados de dois elementos possíveis para catetos é um quadrado e assim, este padrão sempre nos proporciona um terno pitagórico. com isso podemos afirmar que:

O elemento correspondente à hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos intermediários.
Todavia, precisamos provar que o número $(x + y)^2 + y^2$ é um número de Fibonacci. Para isso, devemos mostrar que:

$$f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$$

então,

$$f_{2n+3} = f_{n+(n+3)} \tag{4.1}$$

Para essa demostração precisaremos da proposição a segui:

Proposição 4.10. $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}, \forall m \geqslant 1, \forall n \geqslant 1 (f_1 = f_2 = 1)$ *da sequência de Fibonacci. Faremos a demostração desta proposição:*

Demonstração. (por indução sobre m)
$m = 1$; $f_{n+1} = f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_2 = f_{n-1} + f_n$ (verdadeira)
$m = 2$; $f_{n+2} = f_{n-1} \cdot f_2 + f_n \cdot f_3 = f_{n-1} + 2f_n = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_n + f_{n+1}$ (verdadeira)
Seja $r > 2$ e vamos supor que a propriedade é válida para todo k, com $2 \leqslant k \leqslant r$, e para todo $n > 1$. Supondo isto e mais o fato de que esta propriedade vale também para $k = 1$, temos as equações:

$$f_{n+(r-2)} = f_{n-1} \cdot f_{r-2} + f_n \cdot f_{r-1}, \tag{4.2}$$

$$f_{n+(r-1)} = f_{n-1} \cdot f_{r-1} + f_n \cdot f_r \tag{4.3}$$

Somando membro a membro (4.2) e (4.3), obtemos:

$$f_{n+(r-2)} + f_{n+(r-1)} = (f_{n-1} \cdot f_{r-2} + f_n \cdot f_{r-1}) + f_{n-1} \cdot f_{r-1} + f_n \cdot f_r$$

Pela fórmula recursiva de (f_n) teremos:

$$f_{n+r} = f_{n-1} \cdot f_r + f_n \cdot f_{r+1}$$

ou seja, é válido também para r, sempre que $n > 1$. O segundo princípio de indução nos leva a concluir que vale para todo $m \geqslant 1, \forall n \geqslant 1$.

□

Continuando a equação (4.1) e utilizando a proposição a cima, teremos

$$f_{n+(n+3)} = f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1}$$

assim,

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = (f_{n+1} - f_n) \cdot (f_{n+1} + f_{n+2}) + f_n \cdot (f_{n+2} + f_{n+3})$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+3} + f_n \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+2}$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+3}$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n+2} + f_n \cdot (f_{n+3} - f_{n+1})$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n+2} + f_n \cdot f_{n+2}$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$$

$$f_{n-1} \cdot f_{(n+3)} + f_n \cdot f_{(n+3)+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+2} \cdot f_{n+2} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$$

Logo, demonstramos que a soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, é um número de Fibonacci. Mais precisamente provamos que $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$. Uma vez que:

$$(f_n \cdot f_{n+3})^2 + (2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2})^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2,$$

obtemos que $(f_n \cdot f_{n+3}, 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}, f_{2n+3})$ é uma terna pitagórica

4.3 Ternos pitagóricos e progressões aritméticas

Nesta seção, exploraremos algumas características específicas dos ternos pitagóricos e das progressões aritméticas. Ao observarmos o terno $(3, 4, 5)$, percebemos que seus elementos formam uma progressão aritmética com razão 1. O objetivo nesse momento é de investigar se além desse terno existem outros ternos que também formam uma progressão aritmética e se há infinitos ternos que atendem a essa condição.
É fácil perceber que os múltiplos do terno $(3, 4, 5)$ também formam progressões aritméticas. Vejamos alguns exemplos: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20). Observe que todos esses ternos estão em progressão aritmética. Partindo dessa observação podemos escrever a seguinte generalização:

Proposição 4.11. *Para $m = 2$ e $n = 1$, temos que $\forall k \geq 1$ com $a = k \cdot (m^2 - n^2)$, $b = k \cdot (2mn)$ e $c = k \cdot (m^2 + n^2)$, teremos ternos pitagóricos onde seus termos estarão em progressão aritmética.*

Demonstração. Podemos empregar o método de indução para demonstrar essa afirmação:
Para $k = 1$ temos que $(3, 4, 5)$ é uma PA.
Supondo para $k = r$ seja verdade. Temos que provar que para $k = r + 1$ também seja verdade. temos:

$$a = (r + 1) \cdot (m^2 - n^2)$$

$$b = (r + 1) \cdot (2mn)$$

$$c = (r+1) \cdot (m^2 + n^2)$$

Por suposição temor que o terno $(3r, 4r, 5r)$ é um PA. agora queremos verificar se o terno $(3r+3, 4r+4, 5r+5)$ é uma PA, note que sim pois a razão dessa progressão é $r+1$. Logo $a = k \cdot (m^2 - n^2)$, $b = k \cdot (2mn)$ e $c = k \cdot (m^2 + n^2)$ com $m = 2$ e $n = 1$ é uma PA $\forall k \geq 1$. □

Concluímos que existem infinitos ternos pitagóricos em progressão aritmética, porém, esses ternos não são primários, que são o foco principal deste trabalho. Logo vamos verificar se temos outro ternos pitagóricos além do $(3, 4, 5)$ que estão em progressão aritmética.

Proposição 4.12. *Queremos encontra a, b e $c \in \mathbb{Z}$ que satisfazem o teorema $a^2 + b^2 = c^2$ onde (a, b, c) estarão em progressão aritmética. sabemos que o terno (a, b, c) pode ser escrito de uma forma geral como $a = (m^2 - n^2)$, $b = (2mn)$ e $c = (m^2 + n^2)$ para $m > n > 0$.*

Se a, b e c estão em PA.
Temos $b = a + r$ e $c = a + 2r$, note que em uma progressão aritmética a diferença de dois termos consecutivos é sempre igual a razão. Daí temos que:

$$b - a = c - b$$

$$2mn - m^2 + n^2 = m^2 + n^2 - 2mn$$

$$2m^2 = 4mn$$

$$m^2 = 2mn$$

Temos também que,

$$b = a + r$$

$$2mn = m^2 - n^2 + r$$

(como $m^2 = 2mn$)

$$2mn = 2mn - n^2 + r$$

Logo teremos que a razão dessa PA sera n^2.
Concluímos que para (a, b, c) estarem em PA teremos $a = m^2 - n^2$, $b = m^2$ e $c = m^2 + n^2$.

- Tome $m = 2$ e $n = 1$ teremos o terno (3, 4, 5).
- Tome $m = 3$ e $n = 2$ teremos o terno (5, 9, 13).

É fácil perceber que só teremos ternos realmente em PA no primeiro exemplo, mais a partir do segundo exemplo ele não satisfaz o teorema $a^2 + b^2 = c^2$, daí concluímos que realmente o único terno pitagórico primitivo em progressão aritmética é o terno (3, 4, 5). Segundo (MOREIRA C. G.; MARTíNEZ, 2021), podemos encontrar todas as triplas de números (a, b, c) tais que a^2, b^2, c^2 estão em progressão aritmética.

Proposição 4.13. *Se (a, b, c) é uma terna de números tal que a^2, b^2, c^2 estão em P.A. então existem inteiros m e n, com $m > n$ e $m + n$ ímpar tais que:*

$$a = |m^2 - n^2 - 2mn|,\ b = m^2 + n^2,\ c = m^2 - n^2 + 2mn.$$

Demonstração. Podemos observar que a terna (1, 5, 7) é solução particular desse problema. Note que, em uma progressão aritmética, a diferença de dois termos consecutivos é constante; logo, esse problema pode se reduz a encontrar todas as ternas de números (a, b, c) tais que

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2,$$

isto é, $a^2 + c^2 = 2b^2$. Daqui segue que a e c têm a mesma paridade e, portanto, existem inteiros r e s tais que $c = r + s$ e $a = r - s$ (basta fazer $r = \dfrac{c+a}{2}$ e $s = \dfrac{c-a}{2}$. Desse modo, substituindo teremos que

$$2b^2 = a^2 + c^2 = (r - s)^2 + (r + s)^2 = 2(r^2 + s^2),$$

donde (r, s, b) é uma tripla pitagórica, portanto existem inteiros m e n tais que $r = m^2 - n^2$, $s = 2mn$ e $b = m^2 + n^2$, e conclui-se que

$$a = |m^2 - n^2 - 2mn|, b = m^2 + n^2, c = m^2 - n^2 + 2mn,$$

com $m > n$ e $m + n$ ímpar, é uma tripla que satisfaz o pedido. □

A tabela a seguir mostra alguns valores para (a, b, c) com a^2, b^2 e c^2 em progressão aritmética.

m	**n**	**(a, b, c)**
2	1	(1, 5, 7)
3	2	(7, 13, 17)
4	1	(7, 17, 23)
4	3	(17, 25, 31)
5	2	(1, 29, 41)
5	3	(14, 34, 46)

Tabela 3 – Ternos que quando elevados a potência 2 formam uma PA.

Concluímos este capítulo destacando e provando que os ternos pitagóricos têm aplicações em diversos campos da matemática. Como foi abordado nas sequências relacionadas aos ternos pitagóricos, demonstrando sua relação com a sequência de Fibonacci e as progressões aritméticas.

5 Proposta de aplicação das ternas pitagóricas

5.1 Sequência didática

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática com uma abordagem prática para a sala de aula, destacando uma proposta que envolve os ternos pitagóricos. É importante ressaltar que adaptar essa sequência para diferentes contextos de ensino é essencial para enriquecer o conhecimento matemático dos alunos.

Para isso, dividiremos a sequência em três momentos distintos. No primeiro momento, abordaremos o conteúdo do teorema de Pitágoras e dos ternos pitagóricos de maneira mais tradicional. Nos segundos e terceiros momentos, exploraremos o conteúdo proposto utilizando ferramentas como o Geogebra e o Portugol Studio, visando uma abordagem mais interativa e prática.

5.1.1 Momento 1: Introdução ao Teorema de Pitágoras (2 aulas)

- Objetivo : Habilidade (EF09MA14) consiste em: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- Conteúdo : teorema de Pitágoras
- Duração : 2 aulas (50 minutos cada)
- Recursos didático : computador, datashow, material da aula impresso, slides em PowerPoint.
- Metodologia: A aula será ministrada de forma expositiva e seguira os passos como iremos descrever um pouco adiante.
- Avaliação: será a verificação se os alunos compreenderão o conteúdo, pode ser de forma formativa onde pode ser aplicada com estudos de caso, lista de exercícios, seminários, autoavaliação do conteúdo. Ficara a critério do professor que irá ministrar essa aula, mais a forma mais usual seria uma lista de exercício.

5.1.1.1 Desenvolvimento da aula:

Parte 1. Explique o teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são os catetos e c é a hipotenusa de um triângulo retângulo e fazer sua demonstração. (30 minutos).

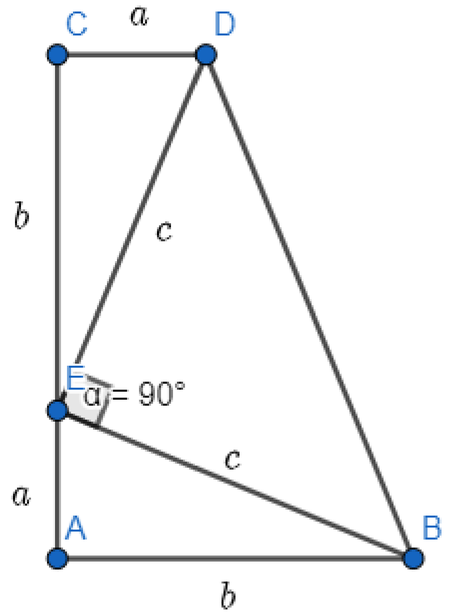


Figura 22 – Trapézio de altura $a + b$ com base a e b.

Proposição 5.1. *Mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$, para isso tome um trapézio reto conforme a figura a seguir:*

Demonstração. Podemos perceber que se pode calcular a área do trapézio a cima de duas maneiras, a primeira usando a formula da área do trapézio e a segunda a soma das áreas dos três triângulos retos.

$$\acute{a}rea_1 = \frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2}$$

$$\acute{a}rea_1 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} \tag{5.1}$$

e

$$\acute{a}rea_2 = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \tag{5.2}$$

Ao igualar (5.1) e (5.2) teremos:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \tag{5.3}$$

Que chegamos a formula $a^2 + b^2 = c^2$, note que a outras maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras, onde nesse trabalho só mostramos duas. □

Parte 2. Demonstre como aplicar o teorema em um exemplo prático. (20 minutos).

Exemplo 5.2. (Enem 2014) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.

b) Retirar 40 células.

c) Acrescentar 5 células.

d) Acrescentar 20 células.

e) Acrescentar 40 células.

Resolução: Para resolver este problema, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal das células solares e, em seguida, calcular a energia total que elas produzem. Aqui está o passo a passo:

1. **Calcular a diagonal de cada célula solar:**
Cada célula solar tem dimensões de 6 cm x 8 cm. Usamos o Teorema de Pitágoras para encontrar a diagonal (d):

$$d^2 = 6^2 + 8^2$$

$$d^2 = 36 + 64$$

$$d^2 = 100$$

$$d = \sqrt{100} = 10\,\text{cm}$$

2. **Calcular a energia produzida por cada célula solar:**
Cada centímetro de diagonal produz 24 Wh de energia. Portanto, a energia produzida por cada célula solar é:

$$\text{Energia por célula} = 10\,\text{cm} \times 24\,\text{Wh/cm} = 240\,\text{Wh}$$

3. **Calcular a energia total produzida pelas 100 células solares:**
Com 100 células solares, a energia total produzida é:

$$\text{Energia total} = 100 \times 240\,\text{Wh} = 24\,000\,\text{Wh}$$

4. **Comparar a energia produzida com o consumo diário:**
O consumo diário da residência é 20 160 Wh. Para produzir exatamente essa quantidade, precisamos ajustar o número de células.

5. **Calcular o número de células necessário:**
Para encontrar o número necessário de células (n) que produzirão exatamente 20 160 Wh, dividimos o consumo diário pela energia produzida por célula:

$$n = \frac{20\,160\,\text{Wh}}{240\,\text{Wh/célula}} = 84\,\text{células}$$

6. **Determinar a ação necessária:**
Atualmente, a residência tem 100 células solares. Para atingir o objetivo de produzir 20 160 Wh, o proprietário precisa ter 84 células solares.

A ação necessária é retirar células solares:

$$\text{Número de células a serem retiradas} = 100 - 84 = 16$$

Portanto, a resposta correta é:

a) Retirar 16 células.

Parte 3. Nesta parte, usaremos como referência a sessão 2.1 deste trabalho, onde discutimos os triângulos retângulos de Pitágoras e Platão.

Defina o que são ternos pitagóricos (trios de números inteiros positivo que satisfazem o teorema de Pitágoras). Mostre exemplos de ternos pitagóricos, como (3, 4, 5) e (5, 12, 13). (15 minutos). Neste momento, é importante enfatizar a diferença entre ternos pitagóricos primitivos e não primitivos, para que os estudantes possam identificá-los corretamente. Um terno pitagórico primitivo consiste em três inteiros positivos (a, b, c) que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$ e são coprimos (não têm divisor comum além de 1). Em contraste, um terno pitagórico não primitivo é obtido multiplicando-se cada elemento de um terno primitivo por um mesmo número inteiro.

Parte 4. A nossa referência nesta parte é a sessão 2.2. Explique como gerar ternos pitagóricos usando fórmulas, como $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ (onde $m > n > 0$ e m e n são inteiros), para tal o professor pode se utilizar da demonstrações mencionada nesse trabalho. (35 minutos). Para o enceramento dessa aula podemos adotar a caracterização feita aqui no capitulo 2 desse trabalho onde podemos chegar a conclusão que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ ainda sim temos os teoremas 2.4

e 2.5 para auxiliar nessa demonstração. Outra forma de poder fazer tal demonstração é utilizando um dos exercícios propostos na sessão 5.2 tais como o exercício 5.11 e 5.14.

5.1.2 Momento 2: Aplicações Práticas (2 aulas)

- Objetivo: habilidade (EF09MA13) consiste em: Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- Conteúdo: teorema de Pitágoras.
- Duração: 2 aulas (50 minutos cada).
- Recursos didático: Computador, datashow, compasso, régua, lápis grafite, software (o Geogebra), slides em PowerPoint.
- Metodologia: A aula será ministrada de forma expositiva e seguira os passos como descreveremos adiante.
- Avaliação: Para a avaliação dessa aula o professor pode dar outros exemplos de ternos pitagóricos e propor ao aluno que siga os passos feitos em sala das aplicações tanto com o uso da régua e compasso como o uso do geogebra.

5.1.2.1 Desenvolvimento da aula:

Nesta aula, exploraremos a afirmação sobre o círculo inscrito em um triângulo pitagórico, que nos diz que: “Todo círculo inscrito em um triângulo retângulo pitagórico possui um raio com medida de um número inteiro positivo”.

Durante a atividade em sala, cada estudante terá a oportunidade de construir triângulos com régua e compasso, utilizando medidas que formem ternos pitagóricos. Em seguida, eles poderão verificar empiricamente se os círculos inscritos nesses triângulos realmente possuem essa propriedade.

Parte 1. Construção da circunferência inscrita no triângulo pitagórico de lados (5, 12, 13) com régua e compasso (duração: 50 min):

- Passo 1: (Construção do triângulo) Marque com a régua os comprimentos de 5, 12, 13 centímetros na folha. Em seguida usando a régua construa uma reta na folha e com o auxílio do compasso transfira a medida do seguimento de tamanho 12 cm (destaque os pontos A e B nesse seguimento). Depois com o auxilio do compasso trace uma meia circunferência de tamanho 5 cm fixando a ponta seca do compasso no ponto A e outra de tamanho 13 cm fixando a ponta seca do compasso no ponto B na parte superior da reta. O encontro das duas meias circunferências marque o ponto C ao ligar o ponto C aos pontos A e B teremos o triângulo ABC.

- Passo 2: (Traçar o encontro das bissetrizes internas do triângulo):
  Com a ponta seca do compasso fixada no ponto A e uma abertura qualquer trace um arco de circunferência com que ele toque os seguimentos AC e AB, destaque esses dois pontos de 1 e 2. Com a ponta seca do compasso fixada no ponto 1 e um abertura maior do que a metade do arco da circunferência que liga os pontos 1 e 2 trace uma meia circunferência dentro do triângulo e repita esse processo no ponto 2, essas meias circunferências irão se tocar; dessa forma, marque um ponto 3 nesse encontro. Ligando o ponto A ao ponto 3 teremos a bissetriz interna dos seguimentos AB e AC. Repita esse procedimento para achar as outras duas bissetrizes.

- Passo 3: (Construção do círculo inscrito no triângulo):
  Observe que as bissetrizes internas desse triângulo irão se tocar no mesmo ponto, marque esse ponto como ponto D esse ponto será o incentro do triângulo ABC. Com o compasso fixando a ponta seca no ponto D abra o compasso com uma abertura que toque um dos lados do triângulo trace uma circunferência completa ela será o círculo inscrito no triângulo ABC.

- Passo 4: (Medição do raio do circulo inscrito):
  Esse passo é simples peça que os estudantes com a régua meçam a medida do raio da circunferência e verificar o tamanho dele (observação esse raio tem que ser de 2 cm).

Parte 2. Usar o software Geogebra para verificar se as especificações estão corretas, uma vez que as medições realizadas pelo programa são mais precisas do que as obtidas com uma régua comum (duração de 30 min).

Neste momento o professor mostrará aos alunos como será feita essa construção no software Geogebra. Recomendamos que o professor espelhe a construção em um retroprojetor. Alternativamente ele pode fazer a construção com o próprio aluno cada um em seu próprio computador (Observamos que a segunda alternativa possivelmente precisará de mais do que 30 minutos).

A seguir, faremos o passo a passo dessa construção, lembrando que utilizaremos a calculadora geometria do geogebra disponível no site (https://www.geogebra.org/calculator).

- Passo 1: Na barra de entra Digite $A(0,0,0)$ e de enter. Digite $B(12,0,0)$ e de enter e digite $C(0,5,0)$ o programa marcara os pontos A, B e C no visor. Em seguida vá para barra de ferramentas e click na opção segmento e ligue os pontos A, B e C, teremos o triângulo ABC.

- Passo 2: Também na barra de ferramentas vá na opção "mais", ela abrira novas ferramentas, procure pelo comando bissetriz ao clicar nela dando um click no seguimento AB e AC o programa construirá as bissetrizes interna e externa desses segmentos. Repita o passo nos outros segmentos. Para tirar as bissetrizes externas vá na barra álgebra e desmarque a opção onde estar essas bissetrizes. Na barra de ferramentas novamente selecione a opção ponto e marque o ponto D no encontro das bissetrizes internas.

- Passo 3: Vá na barra de ferramentas e procure pela opção Círculo: centro e raio ao clicar nela click no ponto D e aparecera a opção de colocar o valor do raio digite 2 e o programa construirá o círculo inscrito no triângulo ABC.

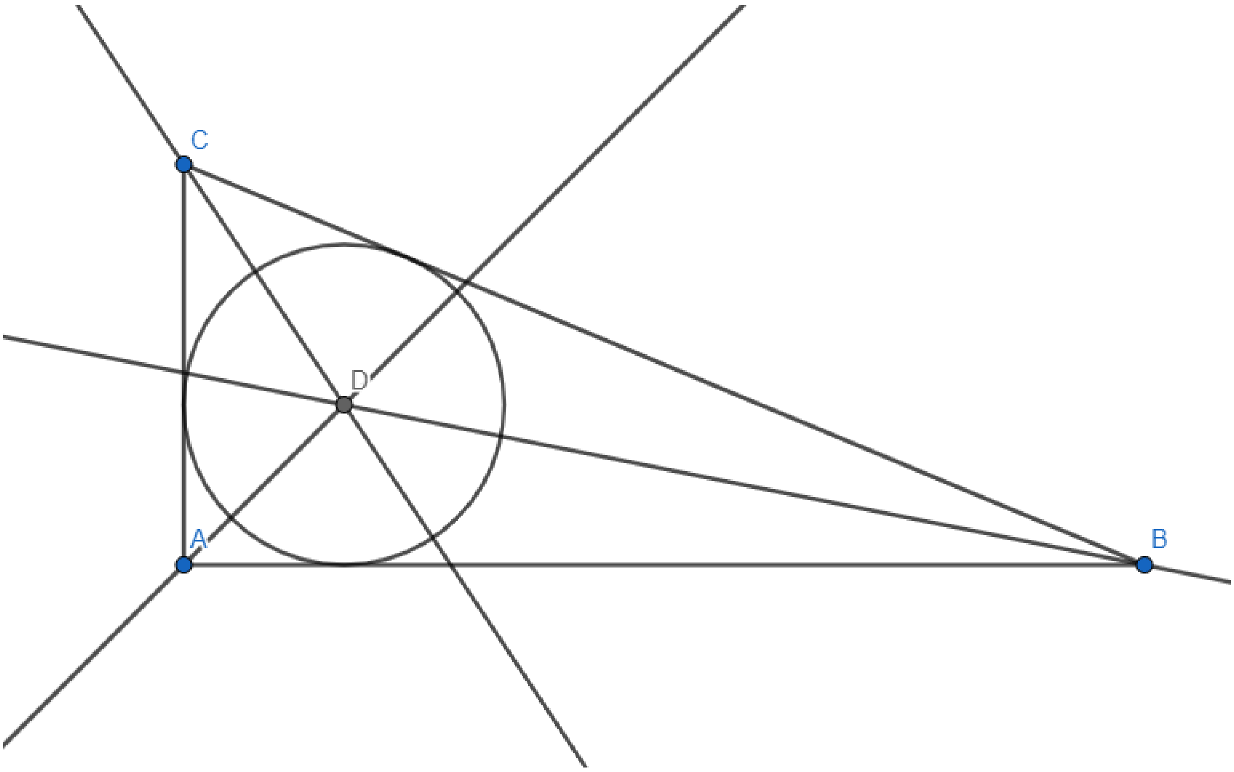


Figura 23 – Triângulo ABC e circulo inscrito de centro D.

Com a construção no geogebra ficara visível que a afirmação de todo circulo inscrito em um triângulo pitagórico é verdadeira.

Parte 3. Neste momento será realizado a demonstração da afirmação de (BEZ, 1997) detalhada na seção 3.4 . (duração 20 min).

Para isso podemos pegar a construção feita com a regua e compasso ou a feita no geogebra para realizar a demonstração ao aluno. Lembrando que o o triângulo retângulo ABC, reto em A, de medidas $AB = 12cm$ terá agora como medida a, $AC = 5cm$ será igual a b e $BC = 13cm$ será a medida igual a c, sendo AB e AC os catetos e BC a hipotenusa, circunscrito à circunferência de centro O e raio R. Sempre será bom enfatizar aos alunos que estamos trabalhando no triangulo pitagórico e que para o nosso estudo ele será caracterizado por:

Uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

Na qual Chamamos $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m > n > 0$.

5.1.3 Momento 3: Exploração e Descoberta (2 aulas)

- Objetivo : habilidade (EF09MA14) consiste em: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- Conteúdo : teorema de Pitágoras.
- Duração : 2 aulas (50 minutos cada).
- Recursos didático : Computador, datashow, slides em PowerPoint, software (portugol).
- Metodologia: A aula será ministrada de forma expositiva e seguira os passos como iremos descrever.
- Avaliação: Para essa avaliação iremos propor aos estudantes criar uma programação, na qual o aluno coloca os valores de m e n no console ele gerar o raio de algum círculo de raio inteiro que são relacionados com o triângulo pitagórico.

5.1.3.1 Desenvolvimento da aula:

Nesta aula, será utilizado a ferramenta Portugol Studio como uma introdução à prática exploratória desse software. Abordaremos os conceitos básicos da plataforma para que os estudantes adquiram um conhecimento inicial sobre os comandos fundamentais, tais como “escreva”, “leia” e “limpa”. Como a linguagem do Portugol é em português, queremos que os alunos identifiquem esses comandos, que serão essenciais para a utilização da plataforma.

Parte 1. O que é o Portugol Studio? (duração 5 minutos).

O Portugol Studio é uma ferramenta de programação projetada especificamente para iniciantes. Sua interface é em português, o que facilita a construção de diversos modelos de programas simples. Esta plataforma é ideal para aqueles que estão começando a aprender a programar, proporcionando um ambiente acessível e intuitivo.

Parte 2. Apresentar a interface do portugol. (duração 5 minutos).

A interface do Portugol Studio conta com diversos comandos que facilitam a programação. Os principais incluem:

1. Novo: Cria um novo arquivo de programa.
2. Abrir: Permite abrir arquivos de programas já existentes.
3. Salvar: Salva o programa atual.
4. Executar: Compila e executa o programa, exibindo os resultados na área de saída.
5. Depurar: Inicia o modo de depuração, permitindo a análise passo a passo do código.
6. Parar: Interrompe a execução ou depuração do programa.
7. Área de Mensagens: Mostra erros de compilação e mensagens do sistema.
8. Área de Código: Onde o usuário escreve e edita o código do programa.

Esses comandos, todos em português, tornam o desenvolvimento e a aprendizagem mais acessíveis para iniciantes.

Parte 3. Explicar os comandos de entrada e saída (escreva, leia e limpa). Essa explicação será feita usando um exemplo de apresentação. (Duração 20 minutos).

No Portugol Studio, o comando escreva é utilizado para exibir mensagens ou valores na tela, essencial para a interação com o usuário. O comando limpa serve para limpar a tela, removendo todo o texto previamente exibido, ajudando a manter a interface organizada. Já o comando leia permite a entrada de dados pelo usuário, capturando informações digitadas no teclado para serem usadas no programa.

Exemplo 5.3. Aqui iremos dar uma saudação.

Ao lado da palavra programa no console iremos escrever cadeia nome, essa escrita se trata de uma variável do Portugol Studio que será explicado no próximo exemplo.
Em seguida após funcao inicio () coloque os comandos a seguir
Escreva ("Diga seu nome: ")
Leia (nome)

Limpa()
Escreva (“Olá, ”)
Escreva (nome)
Escreva(“, bem – vindo!”)

O console ira ficar com a seguinte estrutura:

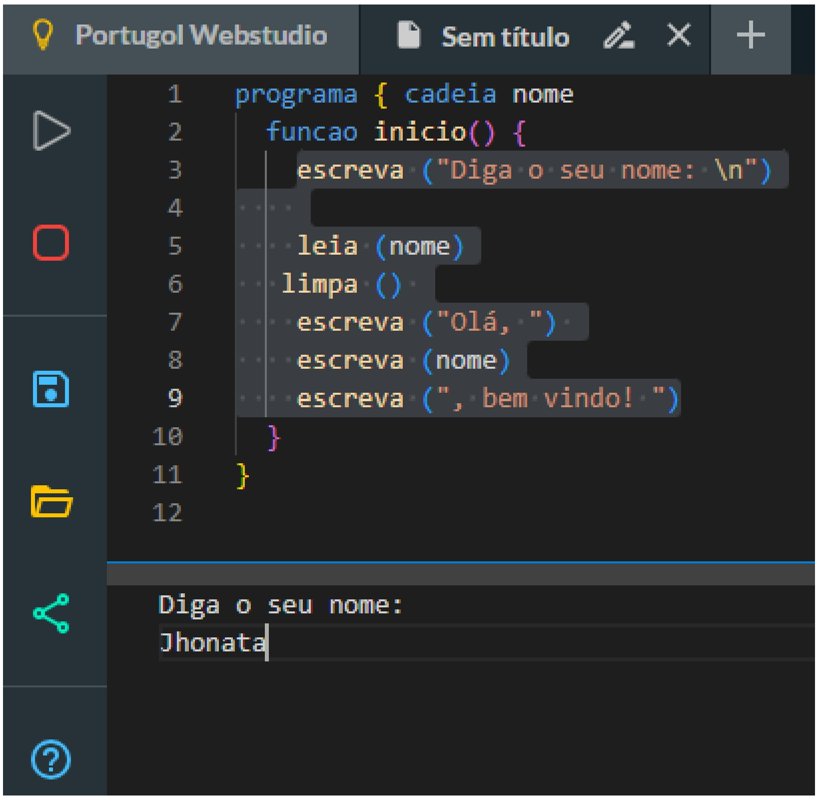


Figura 24 – Imagem do console do Portugol do exemplo 1.

Parte 4. Explicando os tipos de variáveis do Portugol Studio. (duração 20 minutos)
Uma variável é um nome atribuído a um espaço na memória onde se armazena uma determinada informação, que pode ser acessada a qualquer momento durante a execução do programa. Essas informações podem ser de três tipos: numéricas, literais e lógicas.

- **Numéricas:** Armazenam valores numéricos, como inteiros e reais. Exemplos incluem inteiro e real, usados para representar números sem e com casa decimal, respectivamente.
- **Literais:** Guardam sequências de caracteres, como palavras ou frases. O tipo cadeia é usado para representar esses textos. Também temos o tipo caracter que representamos com uma letra.

- **Lógicas:** Armazenam valores booleanos, que podem ser verdadeiro ou falso. O tipo logico é utilizado para operações que envolvem lógica condicional e decisões no programa.

Exemplo 5.4. Ao lado da palavra programa no console iremos escrever:
Inteiro idade = 32
Real saldo = 272,34
Caracter sexo = 'M' (usar aspas simples)
Cadeia nome = "Jhonata Willame"
Logico casado = verdadeiro
Agora depois de funcao inicio () coloque os comandos a seguir:
Escreva (nome, " tem ", idade, " anos, se identifica com o sexo ")
Escreva (sexo, " e tem ", saldo, " na sua conta bancária.")
Escreva ("", nome, " é casado? ", casado)

A estrutura no Portugol ficara da seguinte forma:

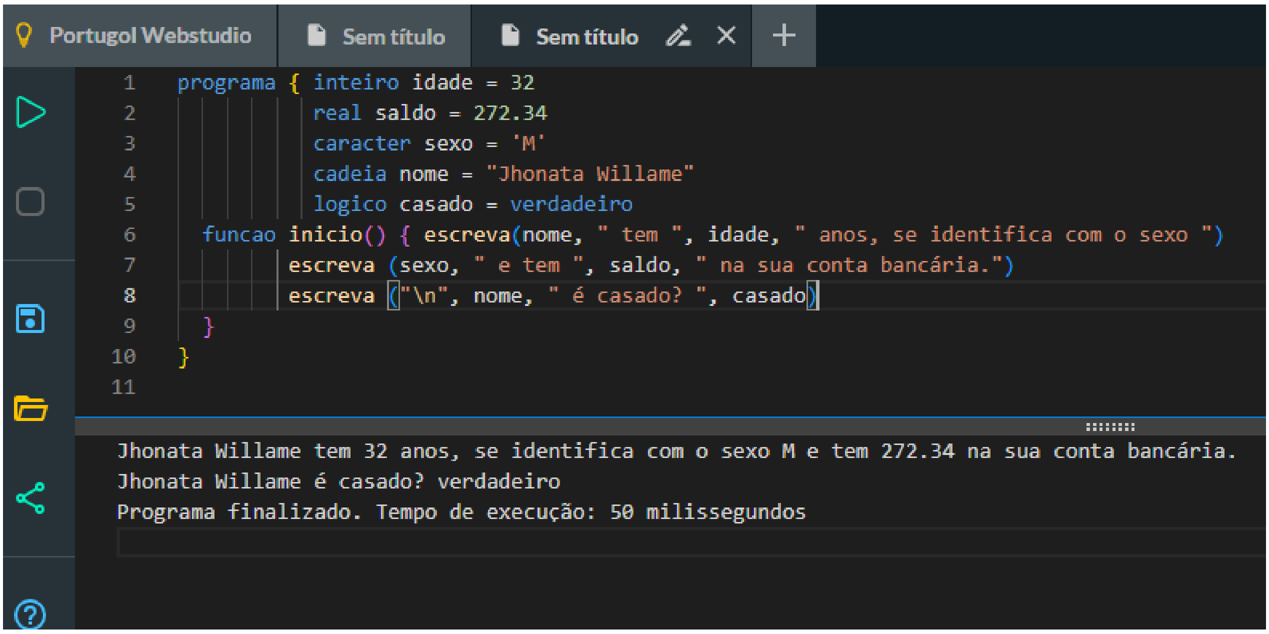


Figura 25 – Imagem do console do Portugol do exemplo 2.

Parte 5. Neste momento será construir com o uso do Portugol uma estrutura de programação que permita ao colocarmos inteiros m e n respeitando a condição m > n > 0 o console mostrara o terno (a, b, c). (Duração 30 minutos).

Exemplo 5.5. Para essa programação iremos iniciar com as variável inteiro m, n, a, b, c e inteiro condicao = 0.
Próximo passo iremos colocar após inicio.
Escreva("Qual o valor de m: ")

Leia(m)
Limpa()
Escreva (“Qual o valor de n: ”)
Leia(n)
Limpa()
a = m*m – n*n
b = 2*m*n
c = m*m + n*n
se (m>0 e n>0 e m>n)
escreva (“Terno pitagórico para m = ”, m “ e n = “, n, “é igual a “, “(“,a,”, “,b,”, ”,c,”)”)
Senão Escreva (“ condições m > n, m > 0 e n > 0 devem ser satisfeitas”)

A estrutura da programação ficara da seguinte forma:

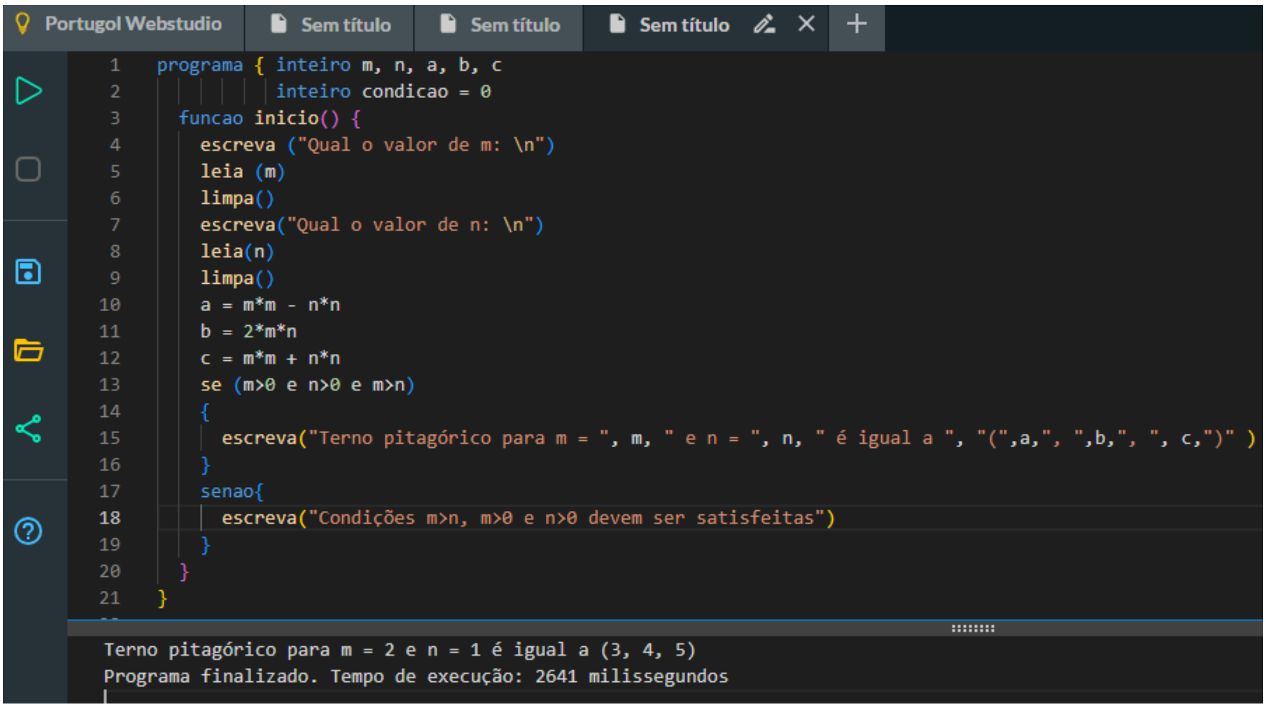


Figura 26 – Imagem do console do Portugol do exemplo 3.

Essa sequência didática proporciona uma introdução gradual ao teorema de Pitágoras, abordando conceitos básicos, gerando ternos pitagóricos, aplicando-os em situações práticas e estimulando a exploração e a resolução de problemas mais desafiadores. Adaptar as atividades de acordo com o nível e o interesse dos alunos é fundamental para o sucesso da aprendizagem.

5.2 Lista de Problemas resolvidos

Nesta sessão iremos acrescentar um pouco na construção de aprendizado para aqueles que buscam ampliar os conhecimentos na resolução de problemas, esse lista se torna autocontida.

Nesta lista de questões, mergulharemos em problemas que vão desde desafios propostos pela Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) até perguntas estimulantes da renomada Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Além disso, exploraremos questões de exames nacionais como o Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM), Exame Nacional de Qualificação (ENQ) e o Exame Nacional de Acesso (ENA), que desafiam os estudantes a aplicarem seus conhecimentos matemáticos em contextos diversos.

Para acrescentar também incluiremos questões selecionadas do site Art of Problem Solving (AoPS), uma comunidade online que reúne estudantes especializados em matemática ao redor do mundo.

Este conjunto diversificado de questões incentivará o estudante a desenvolver habilidades analíticas, criatividade e resiliência diante de problemas em matemática.

Exercício 5.6. Questão 1 (Exame Nacional do Ensino Médio - Enem, 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo $10cm$, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos $3cm$. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão fixados os doces.

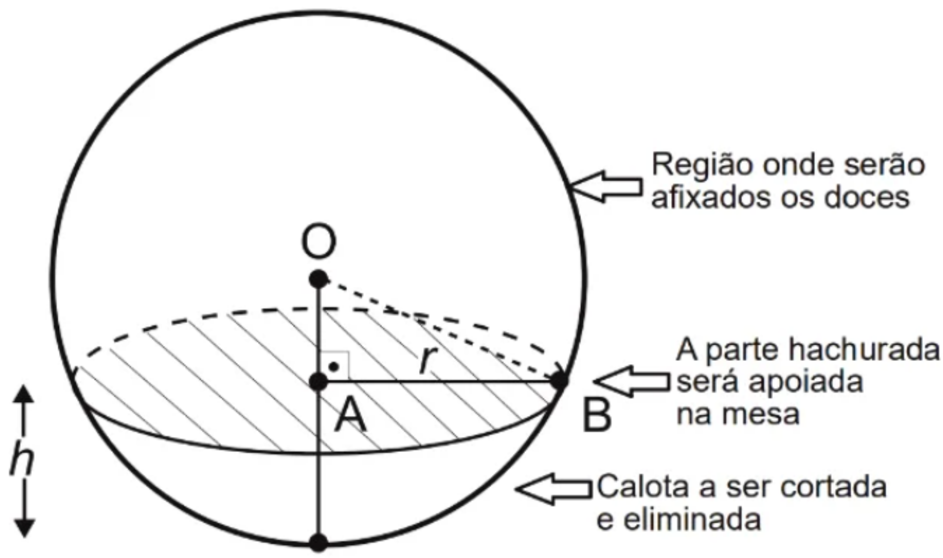


Figura 27 – Imagem do corte da calota. Fonte: (ASTH, 2023).

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

a) $5 - \dfrac{\sqrt{91}}{2}$

b) $10 - \sqrt{91}$

c) 1

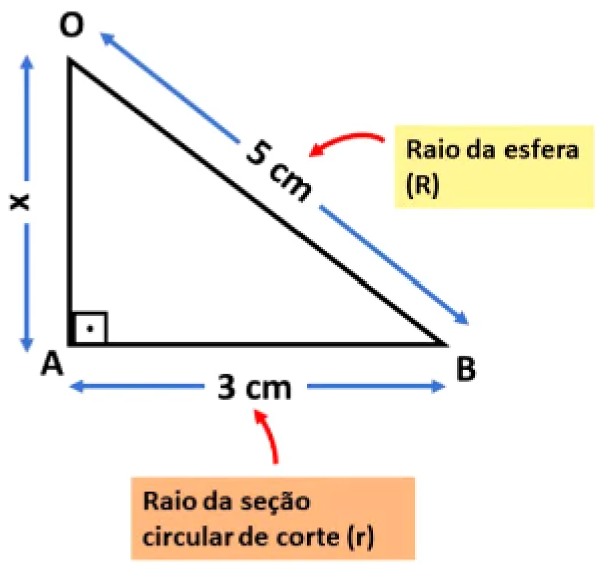
d) 4

e) 5

Solução.
Observando a figura apresentada na questão, identificamos que a altura h pode ser encontrada diminuindo-se a medida do segmento OA da medida do raio da esfera (R).

O raio da esfera (R) é igual a metade do seu diâmetro, que neste caso é igual a $5cm$ $(10 \div 2 = 5)$.

Portanto, precisamos encontrar o valor do segmento OA. Para isso, iremos considerar o triângulo OAB representado na figura abaixo e aplicar o teorema de Pitágoras.



Triângulo retângulo ABO. Fonte: (ASTH, 2023)

$$5^2 = 3^2 + x^2$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4cm$$

Poderíamos também encontrar o valor de x diretamente, observando que se trata do triângulo pitagórico 3, 4 e 5.

Assim, o valor de h será igual a:

$$h = R - x$$

$$h = 5 - 4$$

$$h = 1cm$$

Portanto, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura de $1cm$.

Exercício 5.7. Questão 2 (Sistema de Avaliação do Estado da Paraiba - SAEPB, 2017). Um observador, da janela de um edifício, avista um carro parado a 12 metros de distância da entrada da portaria do seu prédio, conforme ilustrado no desenho abaixo.

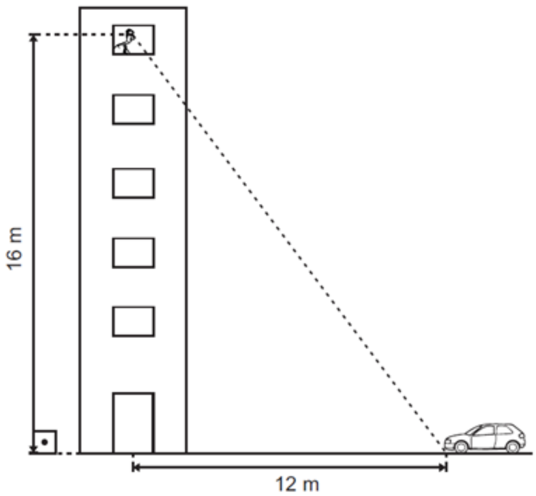


Imagem do problema. Fonte: (WARLES, 2020)

Considerando essa rua plana, a menor distância, em metros, entre o carro e observador, nesse momento, é:

Solução.
Para encontrar a hipotenusa de um triângulo retângulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Neste caso, temos:

$$a = 16\,\text{m}$$

$$b = 12\,\text{m}$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$c^2 = 16^2 + 12^2.$$

$$c^2 = 256 + 144,$$

$$c^2 = 400.$$

Para encontrar o valor de c, tiramos a raiz quadrada de ambos os lados da equação:

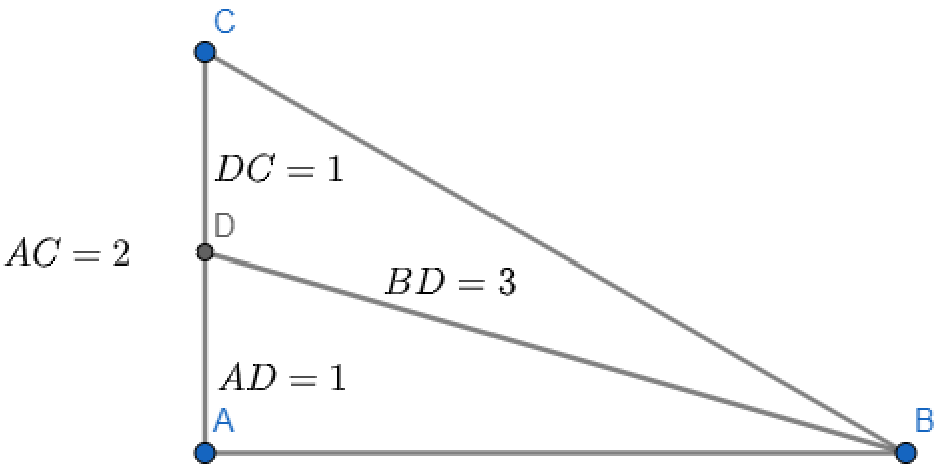
$$c = \sqrt{400}$$

$$c = 20$$

Portanto, a hipotenusa do triângulo é 20 metros.

Exercício 5.8. Questão 3 (Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM, 2013, primeira fase nível 3). Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

Solução.
Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$, daí teremos $BD = 3$.



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo DAB, temos

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$3^2 = 1^2 + AB^2$$

$$AB^2 = 9 - 1$$

$$AB = \sqrt{8}$$

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, agora no triângulo ABC, temos:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$BC^2 = 2^2 + (8)^2$$

$$BC^2 = 12$$

$$BC = \sqrt{12}$$

Exercício 5.9. Questão 4 (Exame Nacional de Acesso - ENA, 2017) As ternas abaixo são medidas dos comprimentos dos lados de triângulos. Em qual das alternativas temos, nessa ordem, as medidas de um triangulo acutângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo obtusângulo?

a. (2, 3, 4),(3, 4, 5) e (4, 7, 8).

b. (4, 7, 8),(5, 12, 13) e (4, 8, 9).

c. (6, 7, 9),(4, 5, 6) e (4, 8, 9).

d. (8, 9, 11),(3, 4, 5) e (4, 6, 7).

e. (8, 10, 13),(6, 8, 10) e (4, 5, 7).

Solução.
Vamos analisar algumas ternas que aparecem nas respostas e comparar o quadrado do maior lado com a soma dos quadrados dos dois lados menores. Se o quadrado do lado maior for maior, o triangulo é obtusângulo; se for igual ele é retângulo; e se for menor, é acutângulo.

$(4, 7, 8)$: $8^2 = 64 < 65 = 49 + 16 = 7^2 + 4^2$, assim temos um triangulo acutângulo e o item (A) está incorreto.

$(4, 5, 6)$: $62 = 36 < 41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$, assim temos um triangulo acutângulo e o item (C) está errado. ´

$(5, 12, 13)$: $132 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$, assim temos um triangulo retângulo.

$(4, 8, 9)$: $92 = 81 > 80 = 64 + 16 = 8^2 + 4^2$, assim temos um triangulo obtusângulo. Juntando os dois cálculos acima, segue ´ que o item (B) está correto. ´

$(4, 6, 7)$: $72 = 49 < 52 = 36 + 16 = 6^2 + 4^2$, assim temos um triangulo acutângulo e o item (D) está incorreto.

$(8, 10, 13)$: $132 = 169 > 164 = 100 + 64 = 10^2 + 8^2$, assim temos um triangulo obtusângulo e o item (E) está incorreto.

Exercício 5.10. Questão 5 (Exame Nacional de Qualificação - ENQ, 2020.1)

a. Quais são os possíveis restos da divisão do quadrado de um número inteiro por 5?

b. Uma tripla pitagórica é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Use o item (a) para mostrar que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 5.

Solução.

a. todo número inteiro deixa resto 0, 1, 2, 3 ou 4 quando dividido por 5. Desta forma, se n é um inteiro qualquer, temos uma, e apenas uma, das seguintes situações:

$$n \equiv 0 \pmod 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 5$$

$$n \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 5$$

$$n \equiv 2 \pmod 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \pmod 5$$

$$n \equiv 3 \pmod 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \pmod 5$$

$$n \equiv 4 \pmod 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 5$$

Isto é, um quadrado perfeito deixa resto 0, 1 ou 4 quando dividido por 5.

b. No caso em que um dos inteiros a ou b é múltiplo de cinco, não há o que provar. Suponhamos então que nem a nem b sejam múltiplos de 5. Então, deve ocorrer uma das possibilidades abaixo:

(1)

$$a^2 \equiv 1 \pmod 5 \text{ e } b^2 \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 2 \pmod 5.$$

(2)

$$a^2 \equiv 4 \pmod 5 \text{ e } b^2 \equiv 4 \pmod 5 \Longrightarrow a^2+b^2 \equiv 8 \pmod 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 3 \pmod 5.$$

(3)

$$a^2 \equiv 1 \pmod 5 \text{ e } b^2 \equiv 4 \pmod 5 \Longrightarrow a^2+b^2 \equiv 5 \pmod 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

(4)

$$a^2 \equiv 4 \pmod 5 \text{ e } b^2 \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow a^2+b^2 \equiv 5 \pmod 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

Pelo item (a) sabemos que os dois primeiros casos são impossíveis, já que os restos da divisão por 5 não podem ser 2 nem 3 e os dois últimos casos significam que c^2 e portanto c, é múltiplo de 5. Isso mostra que deve haver sempre um múltiplo de 5 entre os inteiros a, b e c.

Exercício 5.11. Questão 6 (Exame Nacional de Qualificação - ENQ, 2022.2). Uma tripla pitagórica é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

a. Mostre que para quaisquer inteiro $m > n > 0$ os números, $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ formam uma tripla pitagórica.

b. É possível provar que toda tripla pitagórica pode ser escrita da forma acima. Usando este fato, mostre que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 4.

Solução.

(a) Considere inteiros $m > n > 0$. Temos que, $m^2 - n^2$, $2mn$ e $m^2 + n^2$ são inteiros positivos e

$$(m^2 - n^2) + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

Portanto, $m^2 - n^2$, $2mn$ e $m^2 + n^2$ formam uma tripla pitagórica.

(b) Considere a, b e c uma tripla pitagórica. Logo, existem inteiros $m > n > 0$ tais que

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn \text{ e } c = m^2 + n^2$$

Temos duas possibilidades:

(1) m e n são ímpares

(2) m é par ou n é par

No primeiro caso, $m = 2k + 1$ e $n = 2t + 1$, com k e t inteiros. Daí

$$a = m^2 - n^2 = (2k + 1)^2 - (2t + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4t^2 - 4t - 1 = 4(k^2 + k - t^2 - t)$$

é múltiplo de 4. No segundo caso, $b = 2mn = 2(2k)n = 4kn$ ou $b = 2mn = 2m(2t) = 4mt$. Portanto, b é múltiplo de 4.

Exercício 5.12. Questão 7 (Fonte: site Art of Problem Solving (AoPS), jogo olímpico júnior Polonês - Eslovaco 2012). Inteiros positivos a, b e c que satisfazem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$. Mostre que o número $\frac{1}{2}(c - a)(c - b)$ é o quadrado de um número inteiro.

Solução.

Sabemos que existem números inteiros m, n tais que

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn \text{ e } c = m^2 + n^2$$

agora temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(c - a)(c - b) &= \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 2mn) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2n^2 \cdot (m^2 - 2mn + n^2) = n^2 \cdot (m - n)^2 = k^2. \end{aligned}$$

Exercício 5.13. Questão 8 (Fonte: site Art of Problem Solving (AoPS), teste de seleção de equipe da Bósnia e Herzegovina ano 2000). Chamamos de triplo pitagórico um triplo (x, y, z) de inteiros positivos tais que $x < y < z$ e $x^2 + y^2 = z^2$. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, o número 2^{n+1} está exatamente em n triplas pitagóricas.

Solução.
Defina um tripla pitagórica primitiva como um terno pitagórico no qual todos os três inteiros são relativamente primos entre si. Observe que um terno pitagórico é primitivo se quaisquer dois dos inteiros forem relativamente primos.
Agora, qualquer terno pitagórica primitiva correspondente a uma potência de 2. (Denote isso 2^k com k inteiro não negativo). temos dois casos:
caso 1: 2^k é o maior membro do terno.
Se for esse o caso, então temos $x^2 + y^2 = (2^k)^2 = 2^{2k}$. No entanto, se você usar $\pmod 4$, temos resto 2, mais os únicos restos de um número ao quadrado $\pmod 4$ são 0 ou 1, portanto não há soluções.
caso 2: 2^k é um dos membros menores do terno.
Se for esse caso, então os outros dois devem ser ímpares e devemos ter.

$$2^{2k} + y^2 = z^2 \Rightarrow 2^{2k} = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Em seguida, $z - y$ e $z + y$ ambos devem ser potências de 2. (Chamemos de 2^n e 2^m).
Isso da as soluções $z = 2^{n-1} + 2^{m-1}$ e $y = 2^{m-1} - 2^{n-1}$. Como z e y são relativamente primos, deve ser que as soluções sejam $z = 2^{k-1} + 1$ e $y = 2^{k-1} - 1$. Portanto, para cada $1 \leq k \leq n + 1$, há exatamente um terno pitagórico primitivo contendo 2^k, e $k = 0$ não há nenhuma solução.
Portanto, 2^{n+1} tem exatamente n ternos pitagóricos.

Exercício 5.14. Questão 9 (Fonte: site Art of Problem Solving (AoPS), teste de seleção IMO - 2017). Um tripla de inteiros positivos (a, b, c) é chamado de tripla pitagórica se $a^2 + b^2 = c^2$, chamamos a e b os braços da tripla. Um tripla pitagórica (a, b, c) é chamada de primitiva se o fator comum de a, b e c é igual a 1. Por exemplo (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica primitiva, mas (6, 8, 10) é uma tripla pitagórica não primitiva.
Dados inteiros positivos m e n, um par e um ímpar, com maior fator comum 1. Prove que $(|m^2 - n^2|, 2mn, m^2 + n^2)$ é uma tripla pitagórica primitiva.
Solução.
Note que

$$(m^2 - n^2) + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2.$$

Logo $(|m^2 - n^2|, 2mn, m^2 + n^2)$ é tripla pitagórica, basta ver agora se $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ são primos entre si.

Note que $mdc(m,n) = 1$ temos $mdc(m^2, m^2 + n^2) = 1$, portanto

$$mdc(b,c) = mdc(m^2 - n^2, m^2 + n^2) = mdc(2m^2, m^2 + n^2) = mdc(2, m^2 + n^2).$$

Que é igual a 1, pois $m^2 + n^2$ é ímpar.

Para verificar que a é relativamente primo com$b$ e c basta verificar que os divisores de a são 2, os divisores de m e os divisores de n, qual não dividem $b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$ pois, $mdc(m,n) = 1$.

Exercício 5.15. Questão 10 (Fonte: site Art of Problem Solving (AoPS), Olimpíada Júnior da Polônia - 2018 - Terceira Fase). Os números a, b e c são tais que $3a + 4b = 3c$ e $4a - 3b = 4c$. Mostre que $a^2 + b^2 = c^2$.

Solução.

Para encontrar as soluções dessa equação temos:

$$\begin{cases} 3a & + & 4b & = & 3c \\ 4a & - & 3b & = & 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a & + & 12b & = & 9c \\ 16a & - & 12b & = & 16c \end{cases}$$

Que é igual a $25a = 25c$, daí $a = c$ e

$$\begin{cases} 3a & + & 4b & = & 3c \\ 4a & - & 3b & = & 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a & + & 16b & = & 12c \\ -12a & + & 9b & = & -12c \end{cases}$$

Que é igual a $25b = 0$, Daí $b = 0$.

Logo todas as soluções dessa equação são do tipo $a = c$ e $b = 0$.

Exercício 5.16. Questão 11 (Fonte: site Art of Problem Solving (AoPS), Olimpíada Júnior da Polônia - 2018 - Segunda Fase). Existem números reais positivos a, b, c e x satisfazendo as equações $a^2 + b^2 = c^2$ e $(a + x)^2 + (b + x)^2 = (c + x)^2$?

Solução.

Suponha que exista

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a + x)^2 + (b + x)^2 = (c + x)^2$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2bx + x^2 = c^2 + 2cx + x^2$$
$$\Rightarrow 2ax + 2bx + x^2 = 2cx$$

Dividindo toda a equação acima por $2x$, teremos

$$a + b + \frac{x}{2} = c$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2} = c - (b + a)$$
$$\Rightarrow c > a + b$$
$$\Leftrightarrow c^2 > a^2 + b^2 + 2ab$$
$$\Leftrightarrow 0 > ab.$$

Mais isso é uma contradição. Logo não existem reais positivos a, b, c e x que satisfaz a equação do enunciado.

Exercício 5.17. Questão 12 (Exemplo livro Tópicos de Matemática Elementar (NETO, 2022)) Ache todas as soluções inteiras não nulas da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, com $x \neq \pm y$.

Solução.
Em uma das soluções devemos ter x e y ambos pares ou ambos ímpares, pois, caso contrário, $x^2 + y^2$ seria ímpar. Assim, tomando $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$, temos $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $x = a + b$, $y = a - b$. Substituindo tais expressões para x e y na equação original, concluímos que

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = z^2.$$

Mas, uma vez que essa última equação é a equação de Pitágoras, adotaremos a seguir, tais que

$$a = (m^2 - n^2)d,\ b = (2mn)d \text{ e } z = (m^2 + n^2)d$$

ou

$$a = (2mn)d,\ b = (m^2 - n^2)d \text{ e } z = (m^2 + n^2)d$$

.
com m, n e d inteiros não nulo e $(m, n) = 1$.
Portanto, as soluções (x, y, z) da equação original, com $x \neq \pm y$, são de um dos tipos a seguir, em que m, n e d satisfazem as condições acima descritas:

$$x = (m^2 - n^2 + 2mn)d,\ y = (-m^2 + n^2 + 2mn)d \text{ e } z = (m^2 + n^2)d$$

ou

$$x = (m^2 - n^2 + 2mn)d,\ b = (m^2 - n^2 - 2mn)d \text{ e } z = (m^2 + n^2)d$$

.

Exercício 5.18. Questão 13 (Exemplo livro Tópicos de Matemática Elementar (NETO, 2022)). Se n for um natural múltiplo de 4, então não existem inteiros não nulos x, y e z tais que $x^n + y^n = z^n$.

Solução.
Seja $n = 4k$, com k natural. De $x^n + y^n = z^n$, obtemos

$$(x^k)^4 + (y^k)^4 = (z^{2k})^2,$$

ou seja, (x^k, y^k, z^{2k}) é solução não nula da equação $a^4 + b^4 = c^2$. Assim, basta mostramos que essa última equação não admite soluções em inteiros não nulos.

Por absurdo, suponhamos que existam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a^4 + b^4 = c^2$. Podemos também supor que a, b, c foram escolhidos de tal modo que não haja outra solução positiva

(α, β, γ) com $\gamma < c$ (esta é a hipótese que vamos usar no método da descida). Como (a^2, b^2, c) resolve a equação de Pitágoras, juntamente com a minimalidade de c, garante que $mdc(a^2, b^2) = 1$ e que existem naturais m e n, primos entre si e de paridades distintas, tais que

$$a^2 = (m^2 - n^2)d,\ b^2 = (2mn)d \text{ e } c = (m^2 + n^2)d.$$

Analisando esse caso temos que a é ímpar e, como $a^2 + n^2 = m^2$, segue novamente da caracterização dor ternos pitagóricos a existência de naturais p e q, primos entre se e de paridades distintas, tais que

$$a = p^2 - q^2,\ n = 2pq,\ m = p^2 + q^2.$$

Mas aí,

$$b^2 = 2mn = 4pq(p^2 + q^2)$$

e como $mdc(p, q) = 1$, temos que ambos p e q são também primos com $p^2 + q^2$. Portanto, a fim de que $4pq(p^2 + q^2)$ seja um quadrado perfeito, devemos ter p, q e $p^2 + q^2$ quadrados perfeitos, digamos

$$p = \alpha^2,\ q = \beta^2,\ p^2 + q^2 = \gamma^2,$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Segue, então, que

$$\alpha^4 + \beta^4 = p^2 + q^2 = \gamma^2,$$

com

$$c = m^2 + n^2 > m = P^2 + q^2 = \gamma^2 \geq \gamma,$$

contrariando a minimalidade de c. Logo, não há soluções não nulas de $x^n + y^n = z^n$ quando $4|n$.

Referências

ANDRADE, J. F. S. *Tópicos Especiais em Álgebra*. Rio de Janeiro: 1° edição, SBM, 2013.

ASTH, R. C. *Exercícios sobre Teorema de Pitágoras*. 2023. Acessado em: 15 de junho de 2024. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras-exercicios/>.

BEZ, E. T. *Relacionando Padrões entre sequência de Fibonacci, Secção Áurea e Ternos Pitagóricos*. Florianopolis, SC, Brasil.: Licenciatura em matemática, Universidade Federal de Santa Catarina., 1997.

CAED. *Conheça o SAEPE*. 2023. Acessado em: 24 de junho de 2024. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/sistema>.

KAHN, C. H. *Pitágoras e os Pitagóricos, um breve história*. São Paulo, Brasil: Edição Loyola, 2007.

LOPES, R. J. *Jogo de Catan*. , 27 deagosto , 2015. Acessado em: 29 de agosto de 2024. Disponível em: <https://tabulaquadrada.com.br/colonizadores-de-catan-volta-a-ser-so-catan-e-tem-caixa-nova/>.

MOREIRA C. G.; MARTíNEZ, F. E. B. S. N. C. *Tópicos de Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: 2° edição, SBM, 2021.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar, V. 2*. Rio de Janeiro: 2° edição, SBM, 2013.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar, V. 5*. Rio de Janeiro: 2° edição, SBM, 2022.

TITONELI, L. M. B. *A observação de Padrões-Modelagem Matemática Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.: Pós-graduação em matemática, Pontifícia Universidade Catolica (PUC) Rio de Janeiro., 2017.

VIEIRA F.; CARVALHO, R. A. *Elementos de Aritmética e Álgebra*. Rio de Janeiro: 1° edição, SBM, 2020.

WARLES. *Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos*. 2020. Acessado em: 15 de junho de 2024. Disponível em: <https://profwarles.blogspot.com/2020/04/d10-quiz-por-descritor-mat-9-ano-ef.html#>.

WIKIPEDIA, F. A. . . N. . A. *Plimpton 322*. 2021. Acessado em: 13 de junho de 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>.