UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
MATEMÁTICA

ADEMIR BISPO DOS SANTOS

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

CURITIBA
2024

ADEMIR BISPO DOS SANTOS

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Santos, Ademir Bispo dos
Frações contínuas e aproximação de números irracionais por números racionais / Ademir Bispo dos Santos. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Frações Contínuas. 2. Números Irracionais. 3. Fibonacci, Números de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). III. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. IV . Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ADEMIR BISPO DOS SANTOS** intitulada: **FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Setembro de 2024.

Assinatura Eletrônica
22/10/2024 11:07:10.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
22/10/2024 17:33:18.0
CRISTIAN SCHMIDT
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANA)

Assinatura Eletrônica
20/10/2024 21:16:04.0
LUCELINA BATISTA DOS SANTOS
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Este trabalho é dedicado àqueles que acreditam que o conhecimento liberta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos meus pais, José (em memória) e Jacina, por me darem condições para estudar e priorizarem, com muita dificuldade, a minha educação ;

Ao meu orientador, Dr. Luiz Santana, por todo o ensinamento e incentivo. Sem sua ajuda e seu conhecimento seriam impossível atingir esse tão sonhado objetivo;

À minha esposa Silmara e aos meus filhos, Enzo e Valentina, que sempre estiveram ao meu lado e sempre me incentivaram a continuar. Eu amo vocês;

Por fim, a todos os familiares e amigos que participaram, direta ou indiretamente dessa conquista.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar as frações contínuas conectadas com estudo dos Conjuntos Numéricos, que é um tema abordado no Ensino Médio. Veremos a possibilidade de representar um número real através de uma fração contínua, observando a diferença dessa representação para um número racional e para um número irracional. Mostraremos, também, uma relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci e uma aplicação para a aproximação de números irracionais por números racionais.

Palavras-chaves: Frações Contínuas, Números Irracionais, Sequência de Fibonacci

ABSTRACT

This work aims to present the continuous fractions connected with the study of numerical sets, which is a high school level subject.We will see forward the possibility to represent a real number by a conyinuous fraction, observing the difference between a rational and irrational numbers. Besides this, the current paper approaches the relationship between the golden number and the Fibonacci series and an application to aproximate irrational numbers to rational numbers.

Key-words: Continuous fraction, irrational numbers, Fibonacci series.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente a descoberta das frações contínuas é atribuída ao matemático italiano Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), Cataldi conseguiu escrever o número $\sqrt{18}$ na forma de fração contínua. Outro matemático que teve também importante contribuição dentro dessse assunto foi Jonh Wallis (1616-1703), ele foi o precursor no estudo das frações contínuas, no seu livro "Opera Mahematica"(1695) utilizou o termo Fração Contínua pela primeira vez e calculou também o e-nésimo convergente. Podemos citar ainda o trabalho "De Fraction Ious Continous"de Leonhard Euler, que mostra que cada número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita, além de uma expressão para o número "e". Há ainda contribuições de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Adolf Hurvitz (1859-1919) e Andreyvich Markov ((1856-1922), cujos teoremas serão abordados nesse trabalho.

Essa dissertação tem por finalidade apresentar ao leitor as frações contínuas, suas particularidades e uma utilidade dentro do estudo dos Conjuntos Numéricos, principalmente para os números irracionais. Os números irracionais são aqueles que não podem ser obtidos a partir da divisão de dois números inteiros e se apresentam, na forma decimal, com infinitas casas decimais sem que haja periodicidade. O texto ainda deixa uma sugestão da possibilidade de se trabalhar o assunto no Ensino Médio na parte de Conjuntos Numéricos.

O número $\sqrt{2} = 1,41421356...$ é um exemplo de irracional. Embora ele se apresente com infinitas casas decimais, em diversas situações para efeito de cálculo, necessitamos utilizar alguma aproximação, ou seja, usar um número racional no lugar do $\sqrt{2}$. Nesse momento, geralmente, surge a dúvida: Qual a aproximação utilizar? Observe que teríamos algumas possibilidades $\frac{141}{100} = 1,41$ e $\frac{1414}{1000} = 1,414$ seriam alguns exemplos. Entretanto, teríamos uma hipótese menos comum, o número $\frac{99}{70} \approx 1,4142$. Intuitivamente nos parece que a última fração aproxima melhor o número $\sqrt{2}$ do que as duas anteriores. Qual a origem dessa última fração? Como obtê-la? Existem outras frações como essa, cujo denominador não é uma potência de 10? Nas linhas seguintes, responderemos a essas e a outras questões.

No Capítulo 2 iremos definir as frações contínuas, diferenciar essas frações para números racionais e irracionais e apresentar um algoritmo para a obtenção dessas frações, mostrará, ainda, a periodicidade da fração contínua que representa um número irracional algébrico e falaremos sobre os convergentes de uma fração contínua que são partes ou subconjuntos de coeficientes consecutivos dessa fração, ainda nesse capítulo discorreremos sobre uma relação entre os convergentes de uma fração contínua, a sequência de Fibonacci e o número de ouro. Já no capítulo 3 abordaremos o a aproximação de números irracionais por números racionais, para tanto, fazendo uso de convergentes da fração contínua do número irracional. Finalmente no capítulo 4 veremos o Teorema de Hurwitz-Markov que nos auxiliará na estimativa do erro da aproximação do número irracionale também a apresentação do Teorema de Lagrange, que prova a periodicidade de um número irracional quadrático, isto é, um número irracional que é raiz de uma equação algébrica do segundo grau. No apêndice, faremos ainda, uma abordagem a respeito dos Conjuntos Numéricos, definindo e discorrendo sobre cada um dos conjuntos, dos Naturais aos Reais.

2 FRAÇÕES CONTÍNUAS

2.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Uma fração contínua é uma forma de se escrever um número real, utilizando a soma de um número inteiro com uma sequência de frações. Todo número real pode ser escrito na forma de uma fração contínua. Os números racionais correspondem a frações contínuas finitas e os irracionais são representados por frações contínuas infinitas. Veremos a seguir uma das possíveis estruturas de escrita dessas frações. Quando se tratar de um número racional ele poderá ser representado da seguinte maneira :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Exemplo 2.1

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}.$$

Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números inteiros e positivos e a_0 é um número natural. Portanto um número racional será representado por uma fração contínua finita. Um número irracional, quando escrito na forma decimal, terá infinitas casas decimais e não apresenta periodicidade. Logo inicialmente de maneira intuitiva e levando em consideração essa não finitude, já pensaríamos que a sua representação utilizando a fração contínua também seria uma sequência infinita, isso de fato ocorre e ficará mais claro no decorrer desse trabalho.

Um número irracional será representado por uma fração contínua da seguinte forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

Sendo a_1,a_2,$\cdots$,a_n números inteiros e positivos e a_0 é um número natural e b_1,b_2,$\cdots$,b_n números inteiros e positivos.

Exemplo 2.2

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

A estrutura para representar uma fração contínua que apresentamos anteriormente, em algumas situações nas quais temos que escrever muitas vezes as frações contínuas, não é muito prática. A seguir vamos denotar outra forma de representação que também pode ser utilizada.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Os números inteiros e positivos a_k, com $0 \leqslant k \leqslant n$ podem ser chamados de coeficientes da fração contínua, nessa representação O número a_0 é separado dos demais por ponto e vírgula e indica a parte inteira do número.

Exemplo 2.3

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} = [1; 2, 3, 4, 5]\cdot$$

Exemplo 2.4

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, ...]\cdot$$

Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita Essa afirmação nos parece bastante plausível intuitivamente e é reforçada depois que começamos a entender como escrever a expansão de uma fração contínua. Observemos a demonstração a seguir.

Demonstração: Consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ em que $p \geq 0$ e $q > 0$, utilizando o algoritmo da divisão, temos:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q},$$

onde $0 \leqslant r_0 < q$. Se $r_0 = 0$, então não há mais nada a se fazer, pois $\dfrac{p}{q}$ é inteiro e $\dfrac{p}{q}$ = $[a_0]$. Porém se $r_0 \neq 0$, então fazemos:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_0}}.$$

Repetindo o processo para $\dfrac{q}{r_0}$, temos:

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0},$$

onde $0 \leqslant r_1 < r_0$.Se r_1=0, temos que $\dfrac{q}{r_0} = a_1$ e:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

ou

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1]\cdot$$

Entretanto se $r_1 \neq 0$, repetimos o procedimento com a fração $\dfrac{r_1}{r_0}$, esse processo terminará quando $r_n = 0$ para algum n, pois $b > r_0 > r_1 > ...$ é uma sequência decrescente de números inteiros não negativos. Portanto:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Observe que a demonstração do teorema indica um algoritmo para a obtenção da representação de um número racional como uma fração contínua finita.

Exemplo 2.5

$$
\begin{aligned}
\frac{225}{157} &= 1+\frac{68}{157} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{157}{68}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{68}{21}}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{21}{5}}}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}.
\end{aligned}
$$

$$\frac{225}{157} = 1+\frac{68}{157},$$

$$\frac{225}{157} = 1+\frac{1}{\frac{157}{68}},$$

$$\frac{225}{157} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}},$$

$$\frac{225}{157} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{68}{21}}},$$

$$\frac{225}{157} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}},$$

$$\frac{225}{157} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{21}{5}}}}$$

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{21}{5}}}},$$

$$\frac{225}{157} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}.$$

Observação 2.4.1: Para os números irracionais procedemos da mesma maneira, porém obteremos uma fração contínua infinita.

Vimos anteriormente que a obtenção de uma fração contínua demanda um certo trabalho, iniciando por retirar a parte inteira do número e somar a parte decimal em forma de fração. A fração que representa a parte decimal será escrita como um sobre o inverso dessa fração que agora será um número maior que um , no qual novamente retiramos a parte inteira e somamos a parte decimal que escreveremos novamente como um sobre o inverso da fração que a representa, repetindo o processo até o fim, no caso de um número racional e até onde desejarmos quando o número for irracional. O algoritmo a seguir descreve passo a passo o procedimento anterior para obtenção de uma fração contínua qualquer.

O algoritimo:

Considere um número real α tal que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Sendo $a_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 0$. Chamaremos a_0 a parte inteira de α, isto é, $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $a_0 \leq \alpha < a_0 + 1$.

Se $\alpha = a_0$, paramos, senão , $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_0} > 1$, então $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$.

Continuando o processo para $n \geqslant 1$, $\alpha_n > 1$ e a_n=$\lfloor \alpha_n \rfloor$.

Se $\alpha_n = a_n$, para algum $n > 0$, paramos, senão $\alpha_{n+1} \doteq \dfrac{1}{\alpha_n - a_n} > 1$ e

$\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$.

Portanto, teremos:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}.$$

Que também podemos escrever, sem perda de generalidade, da seguinte forma:

$$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}] \cdot$$

2.2 NÚMEROS IRRACIONAIS ALGÉBRICOS

uma equação algébrica é uma equação que possui coeficientes reais e expoentes naturais, Um número real é algébrico quando satisfaz uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Caso contrário este número real será chamado de transcendente ou transcendental.

Por exemplo, temos que qualquer número racional é algébrico: Tomando $x = p/q$ com p e q números inteiros, com $q \neq 0$, temos que x é raiz da equação $qx - p = 0$. Portanto, concluímos que números trancendentes são necessariamente números irracionais. Porém, há números irracionais que são algébricos. Por exemplo, dado um número inteiro primo positivo p qualquer, podemos mostrar que $\sqrt{p}$ é um número irracional. Porém, notamos que tal número é raiz da equação $x^2 - p = 0$. O raciocínio dado acima também mostra que, como é sabido que há infinitos números primos, temos que há infinitos números algébricos não racionais.

Outros exemplos de números transcendentes são o número de Euler e, a constante euclidiana π,além das constantes de Liouville, Khinchin e Gelfond-Schneider, para saber mais a respeito da transcendência dessas constantes sugerimos o livro (Figueiredo, Guedes Djairo, Números Irracionais e Transcendentes).

As frações contínuas de irracionais algébricos são infinitas e periódicas. Vejamos como tal fato ocorre.

Exemplo 2.6 *Vamos obter a fração contínua para o número* $\sqrt{2}$*.*

Utilizando o algoritmo 2.5, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}] \, , \\
\alpha_n &= a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \\
a_n &= \lfloor \alpha_n \rfloor \, .
\end{aligned}$$

Essa última notação representa a parte inteira de α_n.

Como $\alpha = \sqrt{2}$ é irracional, a_n nunca será igual a α_n.

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{2},$$

$$a_0 = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$
$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$
$$a_2 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2,$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$
$$a_3 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2\cdot$$

Portanto:

$$\alpha = \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2...] = [1; \bar{2}] \, .$$

Ao escrever um número irracional algébrico utilizando essa última notação, sempre teremos uma sequência infinita e periódica. No Capítulo 8 faremos a demonstração para irracionais algébricos quadráticos, que são números irracionais que satisfazem equações algébricas do segundo grau com coeficientes inteiros. A periodicidade não ocorre quando o número é irracional transcendente. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.7 *Vamos obter a fração contínua correspondente ao número π.*

$$\alpha = \alpha_0 = \pi$$
$$a_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\pi - 3} \approx 7,06$$
$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 7$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} \approx 15,99$$
$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 15$$

Continuando o processo, encontraremos: $a_3 = 1, a_4 = 292, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 2$. Logo:

$$\alpha = \pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2...].$$

Notamos que até onde sabemos, o número π foi escrito não há periodicidade. E, seguindo um raciocínio semelhante ao que foi feito anteriormente, é possível obter a fração contínua do número e (https://oeis.org/A003417).

2.3 CONVERGENTES DE UMA FRAÇÃO CONTÍNUA

O convergente de uma fração nos dá a possibilidade de considerar parcialmente a expansão, isto é, escrever apenas uma parte da fração contínua, esse conceito será útil para fazermos aproximações de alguns números.

Considerando a fração contínua $X = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ o k-ésimo convergente C_k com $0 \leq k \leq n$ $C_0 = a_0$ é dado por $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$, ainda $C_n = X$.

Exemplo 2.8 *Como vimos no exemplo 2.1:*

$$\frac{225}{157} = [1; 2; 3; 4; 5].$$

Para essa fração contínua, temos os seguintes convergentes:

$$C_0 = 1.$$

$$C_1 = [1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$C_2 = [1; 2; 3] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{10}{7} \approx 1,4285.$$

$$C_3 = [1; 2; 3; 4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} \approx 1,433.$$

$$C_4 = [1; 2; 3; 4; 5] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} \approx 1,4331.$$

2.4 FRAÇÃO CONTÍNUA, RAZÃO ÁUREA E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O número de ouro, razão áurea ou proporção áurea é uma constante irracional denotada por ϕ, cujo valor é dado aproximadamente por 1,618. Ele tem sido associado à estética, à arte e à natureza há muito tempo devido à sua presença em muitas obras de arte e de arquitetura. Seu valor pode ser ao se dividir uma linha em duas partes de forma que a razão entre a parte maior e menor seja igual a razão entre o comprimento total e a parte maior. Sua representação irracional é dada por:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618\ldots$$

Vamos encontrar a fração contínua do número de ouro $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por se tratar de um número irracional, sabemos que a fração contínua correspondente é infinita. Utilizando o algoritmo (pág. 15), temos:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [a_0; a_1, a_2, ...],$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618,$$
$$a_0 = \lfloor \phi \rfloor = 1,$$
$$\phi_1 = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi,$$
$$a_1 = \lfloor \phi_1 \rfloor = 1,$$
$$\phi_2 = \frac{1}{\phi_1 - 1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi,$$
$$a_2 = \lfloor \phi_2 \rfloor = 1\cdot$$

Portanto:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [a_0; a_1, a_2, ...] = [1; 1, 1, 1, ..]\cdot$$

A sequência de números inteiros $(F_n) : (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$, definida recursivamente por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com $n > 2$ e $F_1 = F_2 = 1$, é chamada de sequência de Fibonacci é nomeada em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido também como Fibonacci, ele apresentou uma famosa sequência em seu livro "Liber Abaci", publicado em 1202, Fibonacci utilizou a sequência para resolver um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos, que propunha o seguinte: Dado um par de coelhos , quantos pares poderiam ser produzidos em um ano, se a cada mês um novo par de coelhos fosse gerado por cada par existente e os coelhos começassem a reproduzir a partir do segundo mês de vida?

Consideremos uma sequência r_n com $n \geq 2$ definida por $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ que é convergente, pois:

$$F_{(n+1)} = F_{(n)} + F\,(n-1)$$

Dividindo a equação por F_n, temos:

$$r_n = \frac{F_{(n)} + F_{(n-1)}}{F_{(n)}} = 1 + \frac{1}{r_{(n-1)}}$$

Se essa sequência converge para um valor limite r, então, quando $n \to \infty$, $r_n \to r$, logo:

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

$$r^2 = r + 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Como a razão entre dois números de Fibonacci é positiva, temos:

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto a sequência converge. Como (F_n) :$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, temos que a sequência r_n será dada por:

$$r_1 = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$r_2 = \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$r_3 = \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5,$$

$$r_4 = \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,66\dots$$

Os termos dessa sequência tendem ao número de ouro.

Demonstração: Seja $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ com $n \geq 2$, como F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, temos:

$$r_n = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n},$$

$$r_n = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot$$

Seja $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

$$x^2 - x - 1 = 0\cdot$$

Resolvendo a equação, encontramos como solução:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$$

Como $r_n > 0$, então

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\cdot$$

2.5 FORMA RECURSIVA DO CONVERGENTE

Seja o convergente $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$. Temos

$$C_0 = a_0 = \frac{p_0}{q_0},$$

e $p_0 = a_0,$ além de $q_0 = 1$.

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1.a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1},$$

onde $p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1$.

$$\begin{aligned} C_2 = [a_0; a_1, a_2] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\ &= \frac{a_2 \cdot (a_1 \cdot a_0 + 1) + a_0}{a_2 \cdot a_1 + 1} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2} \end{aligned}$$

$$p_2 = a_2.p_1 + p_0,$$

$$q_2 = a_2.q_1 + q_0,$$

$$p_0 = a_0 \;\; e \;\; q_0 = 1$$

$$p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \;\; e \;\; q_1 = a_1,$$

$$p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0,$$

$$q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0.$$

Portanto:

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}.$$

De uma maneira geral teremos que:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

pois, por indução em n, temos:

$$[a_0; a_1, a_2, ...a_n, a_{n+1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\left(a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}\right)}}}}.$$

Nesse caso vamos considerar que $(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}})$ é um único termo, ficando a fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}]$ com n termos após o ponto e vírgula.

Utilizando a hipótese de indução, vem:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}},$$

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+1}\left(a_n p_{n-1} + p_{n-2}\right) + p_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_n q_{n-1} + q_{n-2}\right) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \cdot \end{aligned}$$

Exemplo 2.9 *Vamos fazer a verificação da recorrência para alguns convergentes da fração a seguir.*

$$\frac{225}{157} = [1; 2, 3, 4, 5]$$

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = [1; 2]$$

$$p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \; a_1 = 2 \;\; e \;\; a_0 = 1 \cdot$$

Logo:

$$p_1 = 3 \;\; e \;\; q_1 = a_1 = 2,$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2},$$

$$C_2 = [1; 2, 3],$$

$$p_2 = a_2 . p_1 + p_0,$$

$$a_2 = 3, \;\; p_1 = 3 \;\; e \;\; p_0 = a_0 = 1.$$

Portanto:

$$p_2 = 10.$$

Ainda:

$$q_2 = a_2 . q_1 + q_0,$$

$$a_2 = 3, \;\; q_1 = a_1 = 2 \;\; e \;\; q_0 = 1,$$

Então:

$$q_2 = 7,$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{10}{7} \cdot$$

Veremos a seguir algumas proposições que serão importantes em capítulos posteriores.

Proposição 4.3.1 Temos que a seguinte identidade é válida para todo o número inteiro n inteiro não negativo:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

Se dividirmos os dois membros por $q_{n+1}q_n$, equivale a escrever

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n+1}}.$$

Demonstração: Para $n = 0$:

$$p_1q_0 - p_0q_1 = a_0a_1 + 1 - a_0a_1 = 1 = (-1)^0.$$

Supondo que a igualdade é válida para algum n natural, queremos provar que é válida também para $n + 1$:

$$\begin{aligned}(a_{n+2} \cdot p_{n+1} + p_n)\, q_{n+1} - (a_{n+2} \cdot q_{n+1} + q_n) \cdot p_{n+1} \\ &= p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n \\ &= -\left(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}\right) \\ &= -\left(-1\right)^n = \left(-1\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Assim completamos as demonstrações que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

3 APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR FRAÇÕES CONTÍNUAS

3.1 APROXIMAÇÕES DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Um número irracional resulta em uma dízima não periódica, ou seja, um número decimal infinito sem uma sequência de algarismos que se repete, esse tipo de número também não pode ser representado por uma fração cujo numerador e o denominador sejam números inteiros, esta última, é característica própria dos números racionais.

O conjunto dos números racionais é denso no conjunto dos números reais, isso significa, que para todo intervalo real $I = [a, b]$, $\exists x \in \mathbb{Q}/x \in I$. Essa propriedade também é válida para o conjunto dos números irracionais. sendo assim podemos aproximar o valor de um número irracional utilizando um número racional. No entanto como devemos proceder para a escolha desse número racional? Como chegar a esse número e quais critérios podemos utilizar para estabelecer uma aproximação satisfatória? Podemos tomar por base dois critérios para aproximação. O tamanho do erro que é calculado pelo módulo da diferença entre os números, quanto menor o erro, mais próximo esses números estarão um do outro,e o tamanho do denominador do número racional, com isso teríamos o número racional mais simples e mais próximo do irracional que desejamos aproximar.

Tomemos como exemplo o número $\pi = 3,141592653...$. Vamos fazer algumas aproximações do π por números racionais, Observe que:

- $3 < \pi < 4,$
- $\frac{31}{10} < \pi < \frac{32}{10},$
- $\frac{314}{100} < \pi < \frac{315}{100} \dots$

Nesse caso poderíamos considerar uma quantidade cada vez maior de casas decimais, que consequentemente encontraríamos um intervalo de duas frações de mesmo denominador, no qual π está presente, isto é:

$$\frac{P_k}{10^k} \leq \pi < \frac{P_k + 1}{10^k}.$$

Note que o tamanho do intervalo $\left[\frac{P_k}{10^k}, \frac{P_k + 1}{10^k}\right[$ é

$$\frac{P_k + 1}{10^k} - \frac{P_k}{10^k} = \frac{1}{10^k}.$$

Então, temos que o erro da aproximação de π por um dos extremos do intervalo seria

$$\left|\pi - \frac{P_k}{10^k}\right| < \frac{1}{10^k}.$$

Esse processo nos permite aproximar um número irracional através de uma fração cujo denominador é uma potência de 10. Porém ficamos atrelados ao fato de termos que escolher denominadores cada vez maiores para termos erros cada vez menores, portanto teríamos números racionais cada vez mais complicados para obtermos aproximações mais satisfatórias.

Vejamos uma proposição que auxilia a estimar o erro da aproximação.

Proposição 5.1: Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, com p e q inteiros e $q > 0$ $\dfrac{p}{q} \leqslant \alpha < \dfrac{p+1}{q}$, temos:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q},$$

e

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q}.$$

Portanto: $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{2q}$ ou $\left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| \leq \dfrac{1}{2q}$.

Demonstração: Temos que $p = \lfloor \alpha \cdot q \rfloor$. Como $q > 0$, $\alpha \cdot q \geqslant 0$. Logo:

$$p \leq \alpha \cdot q < p + 1$$

e

$$\frac{p}{q} \leq \alpha < \frac{p+1}{q}$$

Pela proposição anterior notamos que se considerarmos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p+1}{q}\right]$, ao aproximar α pelos extremos do intervalo, é garantido que pelo menos uma dessas aproximações é menor ou igual ao inverso do dobro do denominador q.

Entretanto se tomarmos novamente o π como exemplo e utilizando a proposição, podemos fazer as seguintes comparações:

- $\dfrac{31}{10} \leq \pi < \dfrac{32}{10}$
- $\left|\pi - \frac{31}{10}\right| \approx 0,04 < \dfrac{1}{20} = 0,05$
- $\dfrac{314}{100} \leq \pi < \dfrac{315}{100}$
- $\left|\pi - \dfrac{314}{100}\right| \approx 0,0016 < \dfrac{1}{200} = 0,005$

Historicamente temos algumas aproximações famosas de π por frações racionais que não utilizam potência de 10 no denominador, como a aproximação do matemático grego Arquimedes que utiliza $\frac{22}{7}$ e ainda a aproximação $\frac{355}{113}$ atribuída ao matemático chinês Zu Chongzhi, essa aproximação também é conhecida como Milu. Notamos que essas duas aproximações usam denominadores relativamente pequenos que está de acordo com um dos critérios que estabelecemos, resta saber se o erro dessas aproximações também são satisfatórios.

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 0,0012 < \frac{1}{14} = 0,071.$$

Essa aproximação fornece um erro menor e um denominador menor que a aproximação por $\frac{31}{10}$.

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 0,00000027 < \frac{1}{2.113} = 0,0044.$$

Essa aproximação é ainda mais impressionante, pois o erro é muito menor que $\frac{314}{100}$, tendo em vista que nos dois casos o denominador é composto por 3 algarismos.

Se observarmos a fração contínua que representa o número π e alguns convergentes, teremos:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 2, ...]$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Escrevendo alguns convergentes, temos:

$$C_1 = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}\cdot$$

Notamos que, nesse caso, o convergente C_1 do número π coincide com a aproximação de Arquimedes.

$$C_2 = [3; 7, 15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$

$$C_3 = [3; 7; 15; 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}\cdot$$

O convergente C_3 equivale a aproximação Milu.

Notamos que, aparentemente, para o número π, as aproximações mais convenientes por números racionais são convergentes da fração contínua, resta saber se de fato essa obervação é verdadeira tanto para o π quanto para os outros números irracionais.

3.2 APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR CONVERGENTES DA FRAÇÃO CONTÍNUA

No capítulo anterior estabelecemos critérios de aproximação de um número irracional por um número racional, melhor será a aproximação quanto menor for o erro e menor for o denominador da fração. Para o número π, em particular, as melhores aproximações parecem ser resultantes de convergentes da fração contínua. A seguir veremos algumas relações que poderão corroborar com tal suposição.

Proposição: Dado um número real α, tem-se que:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}] \cdot$$

Da seção 4.2, temos:

$$[a_0; a_1, a_2, ...a_k] = \frac{p_k}{q_k},$$
$$p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2},$$
$$q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Portanto:

$$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1}.p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}}$$
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}.p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n},$$
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n.\alpha_{n+1}.p_n + q_n.p_{n-1} - p_n.\alpha_{n+1}.q_n - p_n.q_{n-1}}{(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1}).q_n},$$
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n.p_{n-1} - p_n.q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1})} = \frac{-(p_n.q_{n-1} - q_n.p_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1})},$$
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}.q_n + q_{n-1})}.$$

Ainda podemos escrever:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}.q_k + q_{k-1}).q_k},$$
$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}).q_k^2}.$$

Por consequência,ainda temos:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}).q_k^2} < \frac{1}{\alpha_{n+1}.q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}.q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

A última desigualdade trata-se do Teorema de Dirichlet.

Teorema de Dirichlet

Para todo α irracional existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, temos que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Tal teorema, além de garantir que toda aproximação de um número irracional por um número racional que possui um erro menor que o inverso do quadrado do denominador do número racional é necessariamente proveniente de um convergente da fração contínua do número irracional, também fornece um limite superior para o erro dessa aproximação.

É possível ainda estabelecer um limite inferior, da seguinte maneira.

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}.q_k + q_{k-1}).q_k}.$$

Como $\frac{q_{k-1}}{q_k} < 1$, temos:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}.q_k + q_{k-1}).q_k} > \frac{1}{(\alpha_{n+1} + 1).q_n^2}.$$

Sabemos que $a_{n+1} + 1 > \alpha_{n+1}$, logo:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}.q_k + q_{k-1}).q_k} > \frac{1}{(\alpha_{n+1} + 1).q_n^2} > \frac{1}{(a_{n+1} + 2).q_n^2}.$$

Portanto podemos definir o intervalo ao qual pertence o erro da aproximação de um número irracional por um convergente da sua fração continua da seguinte forma:

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2).q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(a_{n+1} + 2).q_n^2}.$$

Exemplo 3.1 *Vamos verificar as aproximações por alguns dos convergentes do número* $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 2...]$. *Primeiramente a aproximação de Arquimedes que corresponde a convergente* $C_1 = \frac{22}{7}$*, nesse caso* $a_1 = 7$ *e* $a_2 = 15$.

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 0,0012,$$

$$\frac{1}{(15 + 2).7^2} \approx 0,00120,$$

$$\frac{1}{15.7^2} \approx 0,00136\cdot$$

Comparando as aproximações, temos:

$$0,00120 < 0,00126 < 0,00136\cdot$$

Agora verficaremos a aproximação Milu, correspondente ao convergente $C_3 = \dfrac{355}{113}$*, logo* $a_3 = 1$ *e* $a_4 = 292$*.*

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 0,0000002668,$$

$$\frac{1}{(292+2)\,.113^2} \approx 0,0000002663,$$

$$\frac{1}{292.113^2} \approx 0,0000002682\cdot$$

Portanto:

$$\frac{1}{(292+2)\,.113^2} < \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{292.113^2}.$$

Logo está verificado o teorema para este exemplo.

4 OS TEOREMA DE HURWITZ-MARKOV E DE LAGRANGE

4.1 O TEOREMA DE HURWITZ-MARKOV

As constatações do capítulo anterior nos levam a pensar que, segundo os critérios que estabelecemos anteriormente, as melhores aproximações de um número real são obtidas a partir das convergentes das frações contínuas desse número. Pelo teorema de Dirchlet conseguimos verificar que a aproximação de um número real, em particular irracional, por uma fração contínua, resulta em um erro menor que o inverso do quadrado do denominador da fração, isto é, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\cdot$ Utilizando um raciocínio análogo ao da proposição do capítulo 5, podemos pensar que metade das frações contínuas aproximam o número α com erro menor que metade do inverso do quadrado do denominador, ou seja, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}\cdot$

A conclusão até aqui é que para um número real α, em particular irracional, conseguimos garantir que se a aproximação for obtida através da fração contínua o erro $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$ será menor quando $c = 2$, no entanto, o teorema de Hurwitz-Markov irá nos mostrar que para algumas frações contínuas esse parâmetro c ainda pode ser melhorado.

Para todo número irracional α, existirá pelo menos uma, dentre três aproximações consecutivas advindas de frações contínuas, cujo erro será menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo denominador ao quadrado da fração, isto é, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\exists k \in \{n-1, n, n+1\}$, tal que $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot q_k^2}$, portanto existirão infinitos racionais $\frac{p}{q}$ convergentes da fração contínua do irracional α cujo erro será menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo denominador ao quadrado da fração, ou seja, para α irracional existem infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ (p, q \in \mathbb{Z}\ , q > 0)$ com $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot q^2}$. Por outro lado existirá um número finito de aproximações racionais do número de ouro, obtidas por frações contínuas, com erros menores que o inverso do produto de c pelo quadrado do denominador das frações, quando c maior que $\sqrt{5}$, então para o número de ouro é válido que para qualquer $c > \sqrt{5}$, a desigualdade $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\cdot q^2}$ tem apenas um número finito de soluções.

Demonstração do teorema:

Queremos provar que para algum $k \in \{n-1, n, n+1\}$, a aproximação de um número irracional α por uma fração contínua $\frac{p_k}{q_k}$ é menor que $\frac{1}{\sqrt{5}\cdot q_k^2}$.

Supondo que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$, temos que:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(\alpha_{k+1}.q_k + q_{k-1}).q_k} = \frac{1}{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}).q_k^2}.$$

Sendo:

$$\beta_{k+1} = \frac{q_{k-1}}{q_k} = [0; a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_1] \cdot$$

Note que $q_k > q_{k-1}$. Vamos provar essa igualdade por indução: Para $k = 1$, temos

$$\beta_2 = \frac{q_0}{q_1} = \frac{1}{a_1} = [0, a_1] \cdot$$

Já, para $k = 2$,

$$\beta_3 = \frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1}{a_2.q_1 + q_0}$$

$$= \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}} = [0; a_2, a_1] \cdot$$

Supondo que a relação é válida para algum k natural, queremos provar que será válida para $k + 1$.

$$\beta_{k+2} = \frac{q_k}{q_{k+1}} = \frac{q_k}{a_{k+1}.q_k + q_{k-1}} = \frac{1}{a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}}.$$

Utilizando a hipótese de indução, temos:

$$\beta_{k+2} = \frac{1}{a_{k+1} + \beta_{k+1}} = \frac{1}{[a_{k+1}; a_k, a_{k-1}, \cdots a_1]} =$$

$$= [0; a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1] \cdot$$

Portanto, considerando que:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1})}{q_k^2}.$$

Agora queremos provar que é válida pelo menos uma das seguintes desigualdades, obtidas quando $k = n - 1$, $k = n$ e $k = n + 1$.

$$\alpha_n + \beta_n > \sqrt{5},$$

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} > \sqrt{5},$$

$$\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} > \sqrt{5}\cdot$$

Supondo que as três são falsas, queremos chegar a um absurdo, ou seja:

$$\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5},$$

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5},$$

$$\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5}.$$

Supondo que $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$ e como $\sqrt{5} < 3$, devemos ter $a_n \leq \alpha_n < 3$, pois a_n é a parte inteira de α_n, o que implica $a_n \leq 2$ e, analogamente $a_{n+1} \leq 2$ e $a_{n+2} \leq 2$.

Como $a_{n+1} \leq 2$, se $a_n = 2$, teríamos $\sqrt{5} \geq \alpha_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots}}$. Sabemos ainda que $a_{n+1} \leq 2$, logo $\sqrt{5} \geq \alpha_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots}} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$, o que é um absurdo. Então $a_n = 1$ e analogamente teremos $a_{n+1} = 1$.

Não é possível estabelecer a mesma analogia para o a_{n+2}, pois nada sabemos a respeito do a_{n+3}. No entanto $\sqrt{5} \geq \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \geq a_{n+2} + \dfrac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}}$. Se $a_{n+2} = 2$, teríamos $\sqrt{5} \geq 2 + \dfrac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}}$. Como $a_{n+1} = 1$ e $\beta_{n+1} < 1$, então $a_{n+1} + \beta_{n+1} < 3$ e $\sqrt{5} \geq 2 + \dfrac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} > 2 + \dfrac{1}{3} > \sqrt{5}$, o que é um absurdo, portanto $a_{n+2} = 1$.

Agora vamos escrever $\alpha_n, \alpha_{n+2}, \beta_n$ e $\beta n + 2$ em função de α_{n+1} e β_{n+1}. Então:

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{a_n + \beta_n} = \frac{1}{1 + \beta_n} \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1,$$

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{1 + \beta_{n+1}},$$

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} \Rightarrow \alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}.$$

Sabemos que:

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} \Rightarrow \alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}.$$

Substituindo, temos:

$$1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1 \leq \sqrt{5}.$$

Como:

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5},$$

$$\alpha_{n+1} \leq \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\beta_{n+1}\left(\sqrt{5} - \beta_{n+1}\right)} \Rightarrow \beta_{n+1}\left(\sqrt{5} - \beta_{n+1}\right) \geq 1.$$

Logo:

$$-\beta_{n+1}^2+\sqrt{5}\beta_{n+1}-1\geq 0\cdot \tag{4.1}$$

Sabemos também que:

$$\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}\leq\sqrt{5}\cdot$$

Substituindo, temos:

$$\frac{1}{\alpha_{n+1}-1}=\frac{1}{1+\beta_{n+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{5}-1-\beta_{n+1}}+\frac{1}{1+\beta_{n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1-\beta_{n+1})(1+\beta_{n+1}}\Rightarrow\left(\sqrt{5}-1-\beta_{n+1}\right).(1+\beta_{n+1})\geq 1\cdot$$

Portanto:

$$-\beta_{n+1}^2+\left(\sqrt{5}-2\right)\beta_{n+1}+\left(\sqrt{5}-2\right)\geq 0\cdot \tag{4.2}$$

Resolvendo as inequações (4.1) e (4.2), verificamos que a única solução em comum é $\beta_{n+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é um absurdo, pois $\beta_{n+1}=\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\in\mathbb{Q}$. Portanto uma das três aproximações consecutivas $\dfrac{p_k}{q_k}$, obtidas de frações contínuas, necessariamente, terá erro menor que $\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot q_k^2}$.

Concluímos com a demonstração anterior que existem infinitas frações contínuas $\dfrac{p_k}{q_k}$, de um número irracional, com erro menor que $\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot q_k^2}$. Agora vamos provar que para o número de ouro existem um número finito de frações contínuas cujo erro será menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo denominador ao quadrado da fração.

Sabemos que se $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot q^2}$, então $\dfrac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua do número de ouro. Vamos supor agora que $c>\sqrt{5}$, sendo:

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{c\cdot q_n^2}.$$

Então:

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{\left(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\right)q_n^2}<\frac{1}{c\cdot q_n^2}\cdot$$

Logo:

$$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}<c<\sqrt{5}\cdot$$

Sabemos que $\alpha_{n+1}=[a_{n+1};a_{n+2},...]=[1;1111...]=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta_{n+1}=\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=[0;a_n,a_{n-1},...a_1]=[0;1111...1]$, repetindo o número 1 n vezes. Nesse caso $\beta_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ Podemos inferir ainda que:

$$\left|\beta_{n+1}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<\frac{1}{q_n^2}\leq\frac{1}{n^2}.$$

A última desigualdade é explicada pelo fato de termos $q_n \geq n$ e $q_1 = 1$, $q_2 > q_1$, $q_3 > q_2$ e assim sucessivamente, pois q_n é uma sequência crescente. Ainda:

$$\beta_{n+1} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{n^2}.$$

E, também:

$$c < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{n^2} = \sqrt{5} + \frac{1}{n^2},$$

$$c < \sqrt{5} + \frac{1}{n^2},$$

$$c - \sqrt{5} < \frac{1}{n^2},$$

$$n^2 < \frac{1}{c-\sqrt{5}},$$

$$n^2 < \left(c - \sqrt{5}\right)^{-1}.$$

Essa última desigualdade limita o número de valores de n, pois se o quadrado de um número natural é menor que um determinado valor, significa que teremos um número finito de valores possíveis para n.■

Verificando o teorema:

Exemplo 4.1 *Verificar o teorema para os convergentes c_1, c_2 e c_3 do número* $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1...]$.

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113},$$

$$\left|\pi - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 0,00126,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}.7^2} \approx 0,00912,$$

$$\left|\pi - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 7^2},$$

e logo, verifica.

$$\left|\pi - \frac{p_2}{q_2}\right| = \left|\pi - \frac{333}{106}\right| \approx 0,0000832,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}.106^2} \approx 0,0000398,$$

$$\left|\pi - \frac{p_2}{q_2}\right| > \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 106^2},$$

e com isso vemos que não verifica.

$$\left|\pi - \frac{p_3}{q_3}\right| = \left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 0,000000267,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}.113^2} \approx 0,0000350,$$

$$\left|\pi - \frac{p_3}{q_3}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 113^2},$$

e portanto, também verifica.

Exemplo 4.2 *Considerando Φ como o número de ouro determine quais convergentes $\frac{p_n}{q_n}$, de Φ, verificam a desigualdade $\left|\Phi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{c \cdot q_n^2}$ para $c = \sqrt{5} + \frac{1}{10}$.*
Resolução: Pelo Teorema de Huwirtz-Markov, temos:

$$n^2 < \left(c - \sqrt{5}\right)^{-1},$$

$$n^2 < \left(\sqrt{5} + \frac{1}{10} - \sqrt{5}\right)^{-1},$$

$$n^2 < 10 \Rightarrow n = \{1, 2, 3\} \cdot$$

4.2 O TEOREMA DE LAGRANGE

O teorema nos diz que se um número irracional é raiz de uma equação do segundo grau, então sua fração contínua é periódica a partir de um certo ponto. A recíproca é também verdadeira, ou seja, considerando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ...]$ de α ela será periódica a partir de um certo ponto se, e somente se, existirem $A, B, C \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0$, tais que $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, isto é, $\alpha = r \pm \sqrt{s}$, com r e $s \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{s} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

demonstração

Sabemos que:

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} \cdot$$

Isolando α_{n+1}, temos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - \alpha q_{n-1}}{\alpha q_n - p_n} \cdot$$

A fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ...]$, é periódica a partir de um certo ponto se, e somente se, existirem números inteiros positivos n_0 e r, tais que $a_{n+r} = a_n$, $\forall n \geq n_0$. Temos:

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1} &= [a_{m+1}; a_{m+2}, a_{m+3}, ...]\\ &= [\alpha_{m+r+1}; \alpha_{m+r+2}, \alpha_{m+r+3}]\\ &= \alpha_{m+r+1} = \alpha_{k+1},\end{aligned}$$

$$\frac{p_{m-1} - \alpha q_{m-1}}{\alpha q_m - p_m} = \alpha_{m+1} = \alpha_{k+1} = \frac{p_{k-1} - \alpha q_{k-1}}{\alpha q_k - p_k}\cdot$$

Fazendo as multiplicações e organizando, teremos a seguinte equação do 2^o grau:

$$(q_m q_{k-1} - q_{m-1} q_k)\,\alpha^2 + (q_{m-1} q_k - p_{k-1} q_m)\,\alpha + p_m q_{k-1} - p_{m-1} q_k = 0\cdot$$

Temos que verificar se a equação não é degenerada, que ocorre quando o coeficiente do termo do 2^o grau é nulo. Para que o coeficiente de α^2 seja nulo, devemos ter:

$$q_m q_{k-1} = q_{m-1} q_k,$$

$$\frac{q_m}{q_m - 1} = \frac{q_k}{q_{k-1}},$$

o que é um absurdo, pois essas frações são irredutíveis. Da proposição 4.3.1, temos:

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n\cdot$$

Perceba que se q_{n+1} e q_n tivessem um divisor comum diferente de 1, esse deveria dividir também $(-1)^n$, o mesmo ocorrendo com p_{n+1} e p_n, portanto $(q_{n+1}, q_n) = 1$ e $(p_{n+1}, p_n) = 1$. logo a equação não é degenerada.

Agora seja $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$. Substituindo α, temos:

$$\left(\frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}\right)\alpha^2 + \left(\frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}\right)\alpha + C = 0\cdot$$

Logo, uma equação do 2^o grau que pode ser reescrita na forma:

$$A_n \alpha_{n+1}^2 + B_n \alpha_{n+1} + C_n = 0\cdot \tag{4.3}$$

Sendo:

$$A_n = Ap_n^2 + Bp_n qn + Cq_n^2,$$

$$B_n = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1},$$

$$C_n = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1} q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 = A_{n-1}\cdot$$

Queremos provar que existem m e k, inteiros positivos e $m < k$, tais que $\alpha_{m+1} = \alpha_{k+1}$, o que equivale a dizer que $[a_{m+1}; a_{m+2}, a_{m+3}, ...] = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, ...]$, isto é, $a_{m+r} = a_{k+r}$, para todo $r \geq 1$. Portanto teríamos uma fração contínua periódica, pois $a_n = a_n + (k - m)$, para todo $n \leq m + 1$. Para isso, é suficiente mostrar que existe $M > 0$, para todo n

natural, tais que $0 < A_n \leq , B_n \leq M$ e $C_n \leq M$. Isso quer dizer que os coeficientes inteiros A_n, B_n e C_n são limitados por um número M e portanto teríamos um número finito de coeficientes, consequentemente, um número finito de equações do 2_o grau cujas raízes são α_{n+1} que também seria em número finito, no entanto temos um número infinito de $'n_s'$, obrigatoriamente teremos que repetir o mesmo valor duas vezes, indicando que a fração contínua será periódica a partir de um certo ponto.

Demonstração:

Seja $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $Ax^2 + Bx + C = A(x - \alpha).(x - \tilde{\alpha})$. Substituindo x por $\dfrac{p_n}{q_n}$, temos:

$$\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B \cdot \frac{p_n}{q_n} + C \right| = \left| A\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right) . \left(\frac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right) \right| =$$

$$= |A| . \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| . \left|\tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{|A|}{q_n^2} \left|\tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n}\right| \cdot$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\left|\tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n}\right| < |\tilde{\alpha} - \alpha| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < |\tilde{\alpha} - \alpha| + 1 \cdot$$

Lembrando que $\dfrac{p_n}{q_n} < \dfrac{1}{q_n^2} \leq 1$. Logo:

$$\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C \right| \leq \frac{|A|}{q_n^2} \left(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1\right) \cdot$$

Multiplicando os dois membros por q_n^2, teremos:

$$|A_n| = \left|Ap_n^2 + B \cdot p_n q_n + Cq_n^2\right| \leq |A| \left(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1\right) \cdot$$

Da mesma maneira:

$$|C_n| = |A_{n-1}| \leq |A| \left(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1\right) \cdot$$

O discriminante da equação (8.1) será:

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \left(B^2 - 4AC\right) \left(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n\right)^2 \cdot$$

Da proposição *(4.3.1)*, temos que:

$$\left(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n\right)^2 = \left((-1)^n\right)^2 \cdot$$

Portanto:

$$B_n^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC,$$

$$B_n^2 = 4A_nC_n + B^2 - 4AC \leq 4A^2 \left(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1\right) + B^2 - 4AC = M^2 \cdot$$

Então:

$$M = \sqrt{4A^2 \left(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1\right) + B^2 - 4AC} \cdot$$

Esses valores de M Limitam os coeficientes A_n, B_n e C_n.

Note,ainda, que $A_n \neq 0$, pois $A_n = q_n^2 A\left(\dfrac{p_n}{q_n - \alpha}\right).\left(\dfrac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right)$, sabemos que α e $\tilde{\alpha}$ são irracionais já $\dfrac{p_n}{q_n}$ é racional, logo $A_n \neq 0$. Finalizamos assim a demonstração do Teorema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos o conceito de frações contínuas, algumas maneiras de obtê-las, uma relação com o número de ouro e algumas aplicações na aproximação de números irracionais.

Vimos ainda que as frações contínuas de um número real, especialmente de um número irracional, são aquelas que oferecem as melhores aproximações para o número, levando-se em consideração o tamanho do erro e a complexidade da fração. Apresentamos alguns teoremas que nos auxiliam na estimativa do erro da aproximação. Constatamos também que um número irracional algébrico possui, necessariamente, uma fração contínua periódica.

Diante do exposto, o assunto poderia ser abordado no Ensino Médio dentro do contexto dos Conjuntos Numéricos, principalmente como um recurso utilizado para aproximações de números irracionais.

A APÊNDICE

A história da evolução dos números sempre esteve associada à necessidade humana. Inicialmente essa necessidade estava relacionada basicamente a contagem, contudo com o passar do tempo o ser humano foi ampliando suas necessidades e os números também evoluíram para atender a tal demanda, aquele conjunto de números que representava tão bem as quantidades já não era tão eficiente para mostrar um saldo devedor ou uma divisão não exata entre dois números inteiros.

Em matemática os números são divididos em conjuntos, chamados Conjuntos Numéricos. O conjunto dos números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais, formam essa divisão. O conjunto dos números naturais $(\mathbb{N})$ é formado por números que representam uma quantidade esse conjunto é dado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, a inclusão do zero como elemento é uma questão de conveniência, no Ensino Médio costuma-se incluí-lo e no Ensino Superior muitas vezes não. Segundo um dos axiomas de Peano: "Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, esse número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número 1. Os números naturais são fechados em relação a soma, ou seja, se somarmos dois números naturais o resultado também pertence a esse conjunto. Porém os naturais não são fechados em relação a subtração, isso quer dizer que não é possível garantir que ao subtraírmos dois números naturais o resultado será um número natural.Os números inteiros são formados pelos números naturais e seus opostos, isto é, $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$. Observe que os números inteiros é fechado em relação a soma e também a subtração. No entanto os inteiros não são fechados em relação a divisão. Se dividirmos dois números inteiros, o resultado não é necessariamente um número inteiro.

O conjunto que atenderá a divisão é o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ representado pelos quocientes de inteiros a por b, tal que a e b são inteiros e b diferente de zero. Qualquer número que seja resultado da divisão de dois inteiros é um número racional, e isso inclui todos os números inteiros, os decimais finitos e as dízimas periódicas. As dízimas não periódicas formam o conjunto dos números irracionais. Um número irracional não pode ser escrito na forma de divisão de dois inteiros. Os números irracionais podem ser dividos em algébricos e transcendentes. Os algébricos são aqueles que representam raízes de equações algébricas de coeficientes inteiros e os transcendentes não. O número $\sqrt{2}$ é um número irracional algébrico, pois é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$, já o número π é um exemplo de irracional transcendente.

REFERÊNCIAS

01-KOSHY, Thomas. **Elementary Number Theory with Applications**. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007.

02-KOSHY, Thomas. **Pell and Pell-Lucas Numbers and Applications**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2014.

03-MOREIRA, Carlos Gustavo. **Frações Contínuas - nível 3**. disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0utc8PgixFo. [S.l.]: IMPA, 2013.

04-MILIES, F.C.P. **Números: Uma introdução à Matemática**. [S.l.]: Editora da USP, 2001.

05-ELON, LIMA. **Curso de Análise**. [S.l.]: IMPA, 2017. v. 1.

06-ABRAMO, HEFEZ. **Elementos de Aritmética**. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2011.

07.BESKIN, M.N. **Fascinating fractions**. [S.l.]: Mir, 1986.

08.OLIVEIRA, Antonio Marcos Nunes. **Irracinais e Frações Contínuas no Ensino Médio**. 1. ed. [S.l.]: UEL, 2013.