Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Antonio Marcos de Jesus Abidias

Uma Abordagem Sobre Áreas e Volumes em Construções de Casas Residenciais:
Uma proposta metodológica para educação básica

São Luís - MA
2024

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Antonio Marcos de Jesus Abidias

Uma Abordagem Sobre Áreas e Volumes em Construções de Casas Residenciais:

Uma proposta metodológica para a educação básica

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Antônio Marcos de Jesus Abidias e aprovada pela comissão julgadora.

____

Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Orientador)

São Luís - MA
2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Abidias, Antonio Marcos de Jesus.
Uma Abordagem Sobre Áreas e Volumes Em Construções de Casas Residenciais: Uma Proposta Metodológica Para A Educação Básica / Antonio Marcos de Jesus Abidias. - 2024.
59 p.

Orientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Geometria. 2. Áreas e Volumes. 3. Construção de Casas Residenciais. 4. . 5. . I. Baganha Raposo Júnior, Anselmo. II. Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Fundamentos de Matemática
Aprovada em: 23 de julho de 2024

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Orientador
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

São Luís - MA
2024

Aos que me fazem forte

Dedicatória

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por dar-me saúde para seguir nessa jornada.

À minha esposa Daniela, por sempre estar ao meu lado.

À minha filha Marina, que é a razão da minha vida.

À minha Mãe, Altair Maria de Jesus por me apoiar sempre.

Aos amigos do PROFMAT pelo compartilhamento de conhecimento.

Ao meu Orientador professor Dr. Anselmo, pela paciência e orientações para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Quando uma forma cria beleza, tem na beleza sua própria justificativa.

Oscar Niemeyer

Resumo

Neste trabalho é estruturada uma abordagem sobre áreas e volumes em construções de casas residencias sob o olhar da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como recurso didático-metodológico que pode possibilitar uma melhoria significativa no aprendizado de geometria plana e espacial por parte dos estudantes na educação básica.

Palavras-chave: Geometria, Áreas, Volumes, Construção de casas residenciais.

Abstract

In this work, an approach to areas and volumes in the construction of residential houses is structured from the perspective of the National Common Curricular Base (BNCC) as a didactic-methodological resource that can enable a significant improvement in the learning of flat and spatial geometry by students in education. basic.

Key-words: Geometry, Areas, Volumes, Construction of residential houses.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A concepção de "metodologia inovadora" está acontecendo pouco a pouco no processo de ensino aprendizagem, principalmente no ensino da matemática. Ainda existem muitas dificuldades a serem enfrentadas no que diz respeito à novas formas de ensinar matemática, e partindo do princípio de que ensinar matemática não é uma tarefa fácil e que um dos problemas que mais chamam a atenção é a falta de efervescência dos alunos, deve-se buscar novos referenciais para contribuir na construção de um ensino que supere o tradicional e que, ao mesmo tempo, suscite no aluno o interesse em aprender.

O ensino da matemática sob a perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) visa qualificar o cidadão para inserção no mundo das relações sociais, estimulando o crescimento coletivo, individual e o respeito mútuo, mostrando a ele as formas diferenciadas de abordar os problemas que se apresentam cotidianamente a cada um. Isso nos leva a pensar na formação básica do individuo.

Tais inquietações e dificuldades enfrentadas por professores de matemática, no sentido de encontrar formas de resolver ou minimizar a falta de interesse pela matemática por parte dos estudantes, foi que, em especial, serviu de motivação para a realização deste trabalho. Estruturou-se aqui uma abordagem sobre áreas e volumes em construções de casas residencias como recurso didático-metodológico que possibilite uma melhoria significativa no aprendizado de geometria plana e espacial na educação básica, contribuindo para um aprendizado dinâmico e recreativo destes tópicos, melhorando significativamente a aprendizagem sobre perímetro, área de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, tornando a aula de matemática agradável e motivadora para os alunos.

Desta forma, no Capítulo 1 foi feita uma explanação sobre BNCC e o ensino de matemática, e sobre as metodologias ativas. O Capítulo 2 trata dos aspectos metodológicos. Nele é feita a sistematização dos conteúdos matemáticos de geometria plana e espacial recomendados pela BNCC para a educação básica. No Capítulo 3 faz-se um estudo sobre desenho técnico de plantas baixas para casas residenciais e escalas. No Capítulo 4 são realizadas aplicações sobre áreas e volumes na perspectiva da construção de casas residenciais e no Capítulo 5 faz-se as considerações finais sobre o estudo.

Capítulo 1

BNCC e o Ensino de Matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que estabelece os conhecimentos essenciais que todos os alunos brasileiros devem desenvolver ao longo da educação básica. Olhando para o ensino da matemática, a BNCC busca promover uma aprendizagem mais significativa e alinhada com as demandas do nosso século, propondo interdisciplinaridade, concatenando os conceitos matemáticos a situações do dia a dia e estimulando o raciocínio lógico-dedutivo bem como a resolução de problemas.Sob o olhar da BNCC o ensino inovador da matemática tem sido um dos principais objetivos educacionais, pois visa qualificar o cidadão para que se insira no mundo das relações sociais, estimulando o crescimento coletivo, individual e o respeito mútuo, mostrando formas diferenciadas de abordar os problemas que se apresentam, diariamente, a cada um. Isso nos leva a pensar na formação básica do individuo, dando destaque a geometria que é um dos cinco blocos dos conteúdos escolares de matemática da educação básica: geometria; grandezas e medidas; estatística e probabilidade; números e operações; álgebra e funções. Abaixo, destaca-se as Competências específicas e Habilidades vinculadas à área de Matemática da BNCC:

Competência específica 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Para esta competência tem-se as habilidades listadas como segue:

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Para esta competência tem-se as seguintes habilidades:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Para esta competência tem-se as seguintes habilidades:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de primeiro ou segundo graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência específica 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Para esta competência tem-se as Habilidades:

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de primeiro grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de segundo grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência específica 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para esta competência tem-se as habilidades:

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de primeiro grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de segundo grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Destacando a competência específica 1 da BNCC, vinculadas à área de matemática, que:

> "Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para a formação geral."

Daí, a BNCC busca superar a memorização superficial, incentivando a construção do conhecimento de maneira mais profunda e duradoura preparando os alunos para enfrentar os desafios do século XXI. Tomando como referência a Competência específica 1 - Habilidade (EM13MAT103), Competência específica 2 - Habilidades (EM13MAT201, EM13MAT203), Competência específica 3 - Habilidades(EM13MAT307 e EM13MAT309), Competência específica 5 - Habilidade (EM13MAT504, EM13MAT506 e EM13MAT509) é que foi estruturada essa abordagem sobre áreas e volumes em construções de casas residenciais como recurso didático-metodológico que possibilite uma melhoria significativa no aprendizado de geometria plana e espacial na educação básica, visando contribuir para uma educação matemática mais inclusiva, contextualizada e apta a formar cidadãos críticos e preparados para as demandas do mundo contemporâneo. Nesta perspectiva, é sabido que o aprendizado não acontece apenas nos espaços físicos da escola e, notoriamente, considerando o uso de recursos tecnológicos é possível promover a integração de diferentes espaços. Haja vista, a necessidade de fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que os tornem protagonistas é que se faz necessário o uso de metodologias ativas que são ferramentas educacionais que transformam a sala de aula em um ambiente animoso e interativo em que os alunos se envolvam em atividades que façam com que despertem a criatividade, incentivando-os a dirigir suas decisões de aprendizado e deixando para trás a postura de sujeito passivo.

Existem várias metodologias ativas, como por exemplo: a **Aprendizagem Baseada em Problemas** em que os estudantes resolvem problemas reais em grupo. A **Sala de Aula Invertida** em que os alunos estudam a teoria em espaços que não sejam na escola e fazem atividades práticas em sala de aula. A **Gameficação** em que os estudantes aprendem através de jogos e desafios propostos pelo professor.

Porém, o enfoque deste trabalho é a **Metodologia por Projetos**, em que envolve a aprendizagem por meio da realização de projetos práticos e interdisciplinares promovendo a integração de conhecimentos e habilidades, estimula a criatividade e incentiva a resolução de problemas do mundo real. Ao desenvolver essa metodologia, os estudantes podem aplicar teorias aprendidas em situações práticas, tornando o aprendizado mais significativo favorecendo a autonomia dos alunos, pois eles têm a oportunidade de tomar decisões, colaborar e desenvolver habilidades essenciais, como trabalho cooperativo. Na metodologia por projetos, conforme Oliveira(2006):

> "O trabalho com projetos muda o foco da sala de aula do professor para o aluno, da informação para o conhecimento, da memorização para a aprendizagem. Equilibra teoria e prática, divide responsabilidades e tarefas, comunica resultados, discute processos avaliativos".

Ou seja, o professor aqui é visto como orientador e aprendiz ao mesmo tempo, pois trilha o caminho do projeto junto com seus alunos durante toda a sua execução. Nesse sentido é que essa proposta metodológica sobre o ensino de áreas e volumes em construções de casas residenciais foi desenvolvida.

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, serão destacados os conteúdos relacionados a geometria, ligados as Competências específicas e habilidades que preconizam a BNCC:

> "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos".

Assim, dando destaque para:

Competência específica 3 - Habilidade EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. Surge aqui a necessidade de um amplo ferramental matemático sobre os conteúdos de medidas de comprimento, área, perímetros e volumes.

2.1 Medida de comprimento

A medida de comprimento é uma forma de quantificar a extensão de um objeto em uma dimensão linear. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade básica de medida de comprimento é o metro (m). Sendo uma ferramenta fundamental em diversos contextos, a medida de comprimento é usada em diversas áreas do conhecimento, que vai desde engenharias, física, química, entre outros. Existem outras unidades de medida de comprimento, que são os múltiplos e submúltiplos do metro que podem ser usados de acordo com o que será medido. Conforme Barreto e Xavier (2013, pg. 37), alguns dos principais múltiplos do metro incluem o quilômetro (km), que vale 1000 metros, o hectômetro (hm), que equivale a 100 metros, e o decâmetro (dam), que equivale a 10 metros. Por outro lado, os submúltiplos do metro são unidades menores que o metro e incluem o decímetro (dm), que equivale a 0,1 metro, o centímetro (cm), que equivale a 0,01 metro, e o milímetro (mm), que equivale a 0,001 metro.

Essas variações da medida do metro são usadas para expressar medidas de comprimento em diferentes tamanhos, sendo mais conveniente para descrever distâncias e tamanho de objetos que variam de muito pequenos a muito grandes.

2.2 Instrumentos de Medidas de Comprimento

Os instrumentos de medidas de comprimento são ferramentas utilizadas para medir distâncias ou comprimentos de objetos. Existem vários tipos, cada um com suas características e precisões. Temos por exemplo a régua, trena, fita métrica, o metro de carpinteiro, dentre outros. Estes são apenas alguns exemplos de instrumentos de medida de comprimento, cada um tem suas aplicações específicas que vai desde de tirar uma medida simples até medidas muito precisas. Abaixo imagem destes instrumentos:

Figura 1: Instrumentos de medidas de Comprimento

Fonte: O próprio autor

Usar estes instrumentos como recurso didático constrói para os estudantes uma ponte entre a teoria e a prática, afinal eles irão precisar saber manuseá-los para poder fazer medidas das casas residenciais as quais serão orientados a fazer.

2.3 Área de figuras Planas

Nesta seção serão explanadas as áreas de figuras planas que são frequentemente utilizadas em diversos campos, como engenharia, arquitetura, física e geografia, e que de forma teórica em matemática é estudado na educação básica. Áreas de regiões poligonais são definidas mediante axiomas que permitem introduzir as equações usuais para áreas do quadrado, triângulos, retângulos, paralelogramo e trapézios. Conforme Muniz Neto(2013,pg.206):

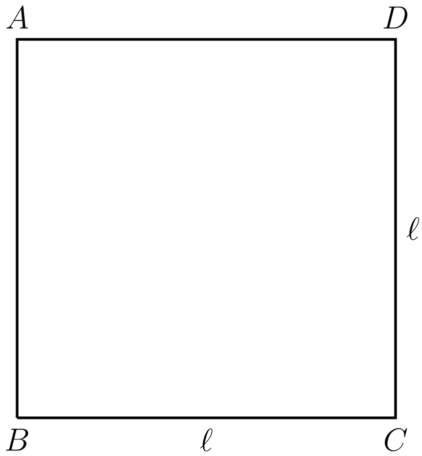
> "Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado."

Desta forma, a área de um polígono é a medida da superfície contida dentro de suas "fronteiras" e o número positivo que está associado às unidades de medidas de área está definido a partir do Sistema Internacional de Medidas (SI), tendo como parâmetro o metro quadrado (m^2) e os seus múltiplos: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), decâmetro quadrado (dam^2) e seus submúltiplos: decímetro quadrado (dm^2), centímetro quadrado (cm^2), milímetro quadrado (mm^2).

2.3.1 Área do quadrado

Define-se quadrado como sendo um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos. Sua área é calculada multiplicando-se o comprimento (ℓ) de um de seus lados pelo próprio lado. Conforme figura abaixo:

Figura 2: Quadrado de lado ℓ



Fonte: O próprio autor

Assim, denotando por S a área do quadrado $ABCD$, tem-se que

$$S = \ell \cdot \ell = \ell^2 \tag{2.1}$$

Desta forma se a área de um quadrado mede $1cm$, sua área é $1cm^2$. Vale salientar conforme provou Lima (1991), que independente da unidade de comprimento adotada para o lado ℓ do quadrado, sendo ℓ um número real, a área será dada por (2.1)

2.3.2 Área do retângulo

Retângulo é um polígono de quatro lados, em que os lados opostos são paralelos e congruentes e os quatro ângulos internos são retos (90 graus). Sua área é calculada multiplicando a medida de sua base (b) pela medida de sua altura (h), conforme demonstrado abaixo.

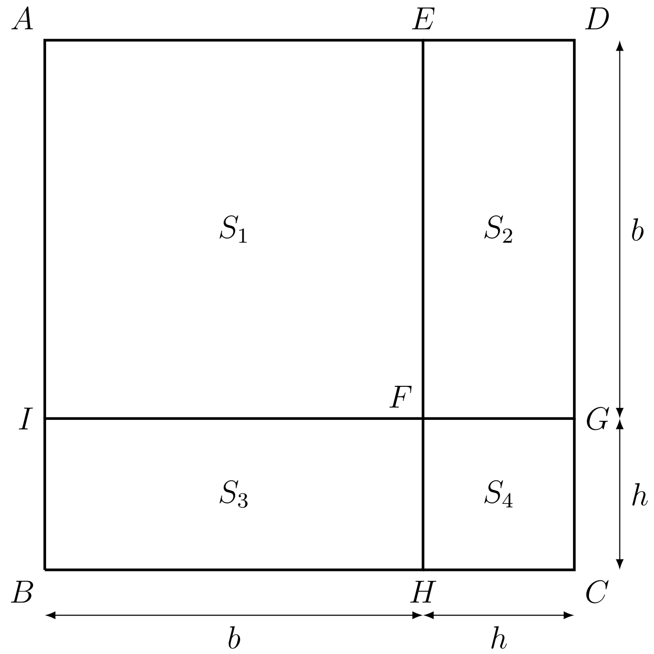
Seja $ABCD$ o quadrado de lado $b + h$ conforme a figura baixo. Se S é a área de $ABCD$, S_1 é a área de $AEFI$, S_2 é a área de $DEFG$, S_3 é a área de $BHFI$ e S_4 é a área de $CGFH$, então, por um lado,

$$S = (b + h)^2 \tag{2.2}$$

e, por outro,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{2.3}$$

Figura 3: Quadrado de lado medindo $b + h$



Fonte: O próprio autor

Os retângulos $DEFG$ e $BHFI$ possuem ambos um lado medindo b e outro medindo h e, portanto, são congruentes[1]. Sendo assim, denotemos $S_2 = S_3 = R$. Daqui, de (2.2) e (2.3), temos

$$\begin{aligned} b^2 + 2bh + h^2 &= (b + h)^2 \\ &= S \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &= S_1 + 2R + S_4 \\ &= b^2 + 2R + h^2, \end{aligned}$$

de onde segue que $R = bh$.

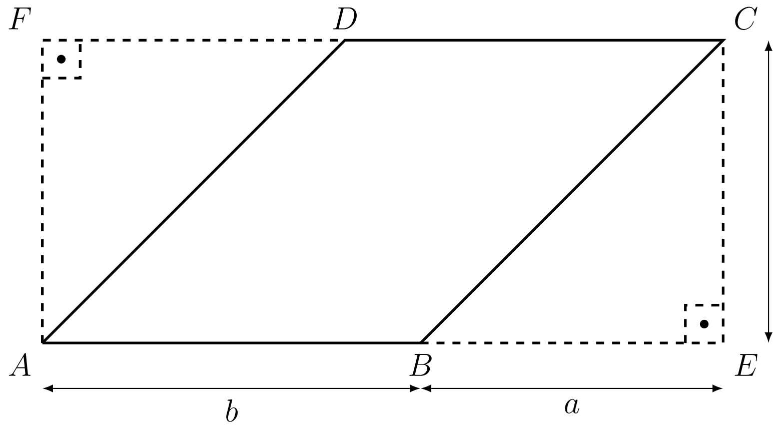
2.3.3 Área do paralelogramo

Paralelogramo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos e congruentes. Isso significa que os lados opostos são iguais em comprimento e suas retas suporte não se cruzam e seus ângulos opostos são congruentes. Vejamos como determinar a área do paralelogramo.

Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD (vide Figura 4), E o pé da perpendicular baixada de C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e S a área do retângulo $AECF$.

[1] Os retângulos são congruentes porque um deles pode ser deslocado no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro, conforme Muniz Neto(2013,pg.206)

Figura 4: Paralelogramo $ABCD$



Fonte: O próprio autor

Ora, é imediato verificar que os triângulos ADF e BCE são triângulos retângulos e, respectivamente, as hipotenusas AD e BC e o par de catetos FD e BE são congruentes. Daí, pelo caso de congruência Cateto, Hipotenusa (CH), os triângulos ADF e BCE são congruentes, o que nos garante que S_1 (área do triângulo ADF) é igual a S_3 (área do triângulo BCE). Assim,

$$S_1 + S_3 = ah \tag{2.4}$$

e

$$(b + a)\,h = S = S_1 + S_2 + S_3 = (S_1 + S_3) + S_2 = ah + S_2, \tag{2.5}$$

de onde segue que

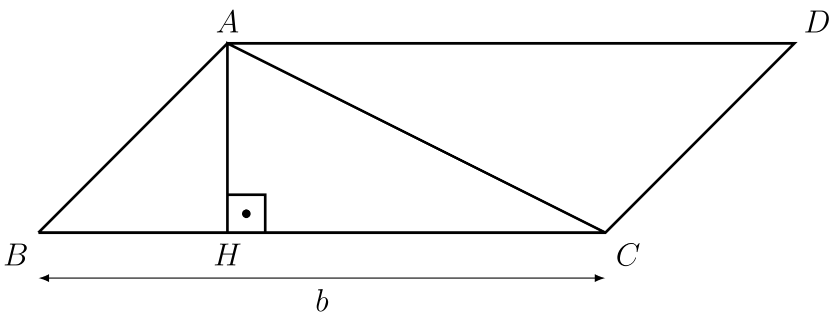
$$S_2 = (a + b)\,h - ah = bh. \tag{2.6}$$

Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases (b) pelo comprimento da altura (h) relativa a ela.

2.3.4 Área do triângulo

Seja S a área do triângulo ABC. Pelos vértices A e C tracemos paralelas $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ que se interceptam no ponto D, formando o paralelogramo $ABCD$. Consideremos a altura $h = AH$ desse paralelogramo e $b = BC$ sua base conforme a Figura 5 abaixo:

Figura 5: Paralelogramo $ABCD$



Fonte: O próprio autor

Ora, o triângulo ABC é congruente ao triângulo ACD pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA), pois, o $\angle BAC = \angle DCA$, AC é lado comum aos dois triângulos e $\angle BCA = \angle DAC$, o que justifica o fato da área do triângulo ABC ser igual a área do triângulo CDA. Porém, como $ABCD$ é um paralelogramo, segue da equação (2.6) que

$$2S = bh,$$

donde

$$S = \frac{bh}{2}. \tag{2.7}$$

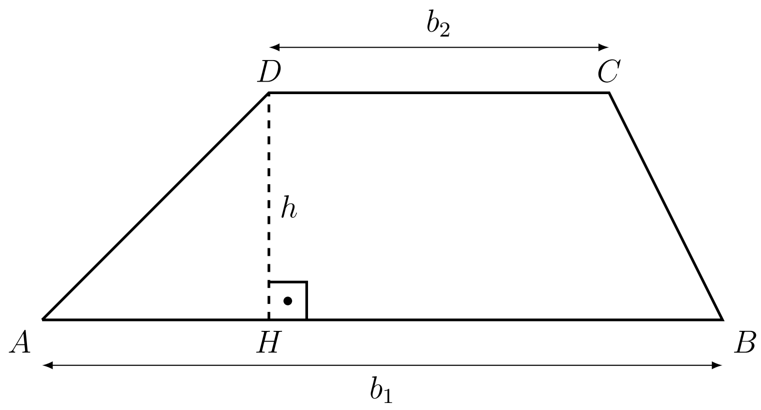
Portanto, a área do triângulo é igual à metade do produto do comprimento de uma base (b) pelo comprimento da altura (h) correspondente.

2.3.5 Área do trapézio

Trapézio é um quadrilátero que possui dois de seus lados paralelos e com tamanhos distintos os quais são comumente chamados de bases do trapézio. A distância entre as retas suporte das bases de um trapézio é a sua altura.

Seja $ABCD$ um trapézio (Figura 6) com base maior $AB = b_1$, base menor $DC = b_2$ e altura $DH = h$, vamos determinar sua área S.

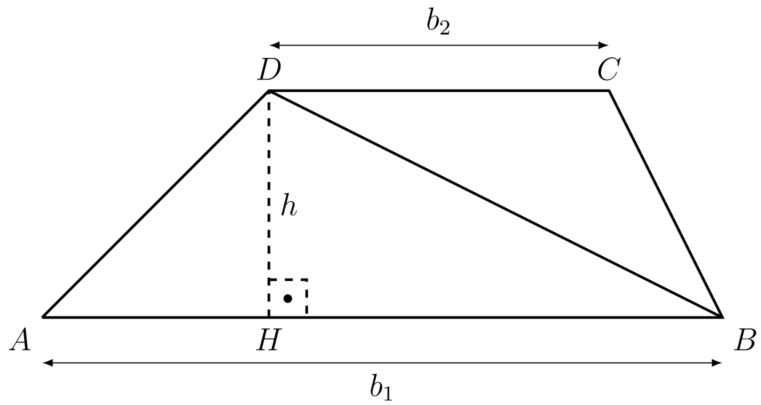
Figura 6: Trapézio $ABCD$



Fonte: O próprio autor

Observemos que o trapézio $ABCD$ pode ser decomposto em dois triângulos, o triângulo ABD de base b_1 e o triângulo BCD de base b_2, conforme Figura 7.

Figura 7: Trapézio decomposto em dois triângulos



Fonte: O próprio autor

Ora, a área do triângulo pode ser determinada pela equação (2.7). Assim,

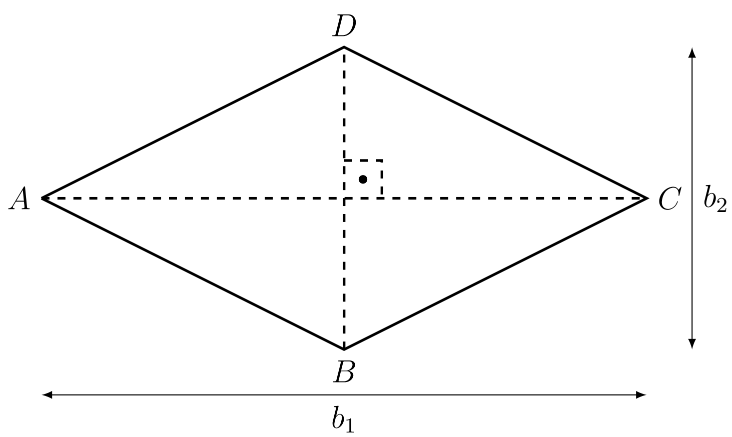
$$\begin{aligned} S &= \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} \\ &= \frac{b_1 h + b_2 h}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_2)h}{2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Logo, a área do trapézio é igual ao produto da média aritmética das bases pela altura.

2.3.6 Área do losango

Losango é um quadrilátero com todos os lados congruentes, possui diagonais que se cruzam perpendicularmente e bissectam-se reciprocamente. Seja $ABCD$ um losango (Figura 3.8) com diagonal maior $AC = b_1$ e diagonal menor $BD = b_2$, vamos determinar sua área S.

Figura 8: Losango $ABCD$



Fonte: O próprio autor

Observemos que o losango $ABCD$ pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos, que são os triângulo AMD, BMC, MCD, MAD. Desta maneira, a área do losango é quatro vezes a área do triângulo de base $\frac{D}{2}$ e altura $\frac{d}{2}$. Assim,

$$S = 4 \cdot \frac{\frac{b_1}{2} \cdot \frac{b_2}{2}}{2}$$
$$S = 4 \cdot \frac{b_1 \cdot b_2}{8}$$
$$S = \frac{b_1 \cdot b_2}{2}$$

Logo, a área do losango é igual à metade do produto dos comprimentos de suas diagonais.

2.4 Volumes

Em todo o mundo, as inúmeras obras de engenharia e arquitetura mostram a grande quantidade de formas que a humanidade desenvolveu com base nos conhecimentos de geometria. Examinaremos à luz da BNCC, **Competência específica 5 - habilidade EM13MAT504,** os volumes dos principais sólidos geométricos, a saber, os poliedros, que são sólidos cuja superfície é formada apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc) e alguns corpos redondos, que são os sólidos geométricos cujas superfícies têm pelo menos uma parte que não é plana (arredondada). Determinar o volume de um sólido geométrico significa medir a região do espaço limitada por sua superfície. Para isso, precisa-se de uma unidade de medida padrão, o que chamamos de cubo unitário, ou seja, um cubo com arestas medindo 1 unidade de comprimento. E o que será feito a partir daqui é comparar o espaço ocupado pelo cubo unitário com o espaço ocupado pelo sólido. O resultado dessa comparação será um número real não negativo e seu valor indica quantas vezes o sólido geométrico contém o cubo unitário. Na tabela abaixo, para cada unidade de comprimento tem-se uma correspondente unidade de volume:

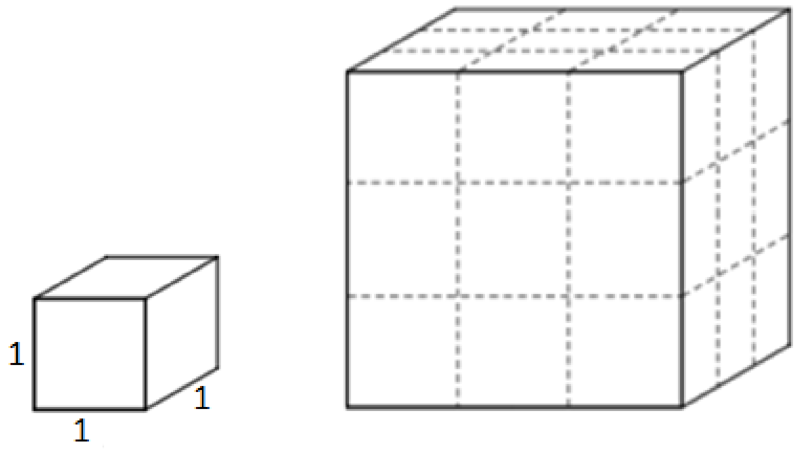
Tabela 1: Unidade de Volume

Unidade de medida da aresta do cubo	Unidade de Volume
1 dm	1 dm^3
1 cm	1 cm^3
1 m	1 m^3
1 mm	1 mm^3

Fonte: O próprio autor

A figura a seguir mostra um cubo unitário e uma figura com o volume medindo 27 unidades de volume.

Figura 9: Cubo Unitário



Fonte: O próprio autor

A região interna à superfície do sólido S é comumente chamada de *interior* de S e denotada por $\text{int}\,(S)$. Chamaremos de $V(S)$ o **volume** do sólido geométrico S de tal maneira que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

Axioma 2.1 *Todo cubo S de aresta 1 unidade de comprimento possui $V(S) = 1$.*

Axioma 2.2 *Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis*[2]*, tais que $\text{int}(S_1) \cap \text{int}(S_2) = \varnothing$ e $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$.*

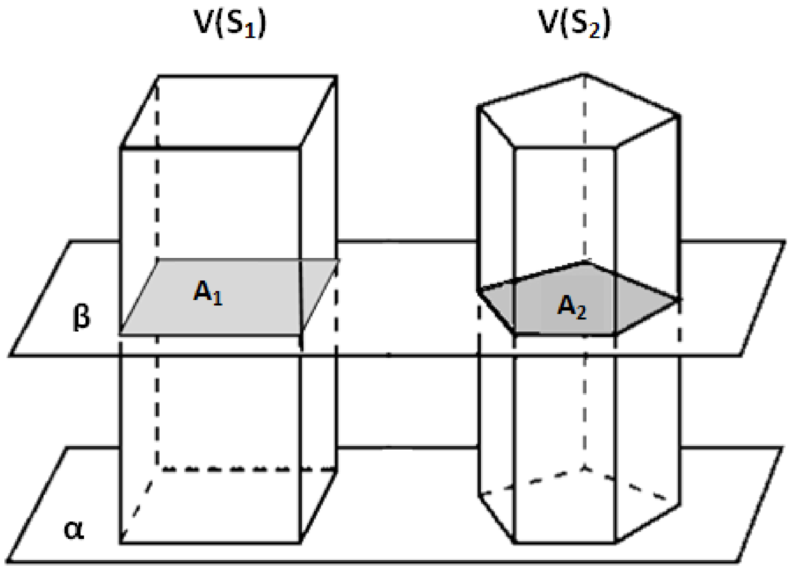
Axioma 2.3 *Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \leq V(S_2)$.*

Axioma 2.4 (***Princípio de Cavalieri***[3]) *Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais ($A_1 = A_2$) então $V(S_1) = V(S_2)$.*

[2]Um sólido S é mensurável se $S \cap \alpha$ for um conjunto de área mensurável, para todo plano α que intersecte $\text{int}(S)$, conforme Muniz Neto (2013, pg. 394)

[3]Matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

Figura 10: Princípio de Cavalieri



Fonte: O próprio autor

Axioma 2.5 *Se S_1 é um sólido mensurável e S_2 puder ser obtido de S_1 por meio de uma translação, uma rotação ao longo de um eixo ou uma reflexão ao longo do plano, então S_2 também é mensurável e $V(S_1) = V(S_2)$.*

Mais informações sobre o **Princípio de Cavalieri** (**Axioma 2.4)** podem ser encontradas em (LIMA, 1991, p. 71). Estes axiomas serão as ferramentas matemáticas que nos permitirão calcular os volumes dos sólidos geométricos que a BNCC recomenda estudar na educação básica.

2.4.1 Volume do cubo

Definição 2.6 *Cubo é um sólido geométrico mensurável cujas 6 faces são quadrados equivalentes.*

Proposição 2.7 *Seja C um cubo de aresta a. Então seu volume é dado por $V(C) = a^3$.*

Demonstração: Façamos a demonstração em três etapas:

(*i*) **A aresta a do cubo é um número inteiro positivo:** Seja C um cubo de aresta medindo a unidades de comprimento, com $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$. Podemos particionar C em a^3 cubos unitários justapostos, que por sua vez, possuem volume igual a 1, pelo Axioma 2.1, e daí, $V(C) = a^3$.

(*ii*) **A aresta a é um número racional positivo:** Consideremos um cubo unitário, particiona-se cada aresta em um mesmo número inteiro n de partes iguais. Desta forma o cubo unitário fica particionado em n^3 cubos justapostos de aresta $\dfrac{1}{n}$ cada um. Portanto, se tomarmos um cubo Q com aresta $\dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, seu volume é dado por

$$n^3 \cdot V(Q) = 1$$

e, consequentemente,

$$V(Q) = \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{n}\right)^3.$$

Se a aresta do cubo C é um número racional $a = \dfrac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$) é possível particionar cada aresta em m partes iguais de comprimento $\dfrac{1}{n}$ cada. Assim, C ficará particionado em m^3 cubos justapostos com arestas medindo $\dfrac{1}{n}$. O volume de cada cubo menor é $\dfrac{1}{n^3}$ (pelo caso acima) e o volume de C é

$$V(C) = m^3 \cdot \frac{1}{n^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3 = a^3.$$

Portanto, se um cubo tem como aresta um número racional a, seu volume é dado por $V(C) = a^3$.

(iii) **A aresta a é um número irracional positivo:** Se a é um número irracional, mostraremos por exaustão que o volume de C não pode ser expresso por outro número se não a^3. Seja n um número real, tal que $n < a^3$. Tomemos um número racional $p < a$ tão próximo de a quanto se queira, de tal forma que se tenha $n < p^3 < a^3$. Diante disso, podemos tomar um cubo C_q no interior do cubo C cuja aresta mede p e teremos pelo Axioma 2.2 e pelo item (ii) que

$$V(C_q) < V(C),$$

isto é,

$$p^3 < V(C).$$

Por outro lado,

$$n < p^3 \Rightarrow n < p^3 < V(C).$$

Desta forma, mostramos que todo número real $n < a^3$ é também menor que o $V(C)$. Consideramos agora um m real tal que $m > a^3$, tem-se de modo análogo que m é também maior que o $V(C)$. Ora, $V(C)$ não pode ser menor e maior do que a^3, o que conclui-se que só pode ser a^3. Daí, dados um número real positivo a e um cubo C de aresta a, seu volume é dado por

$$V(C) = a^3. \tag{2.9}$$

■

2.4.2 Volume do paralelepípedo reto retângulo

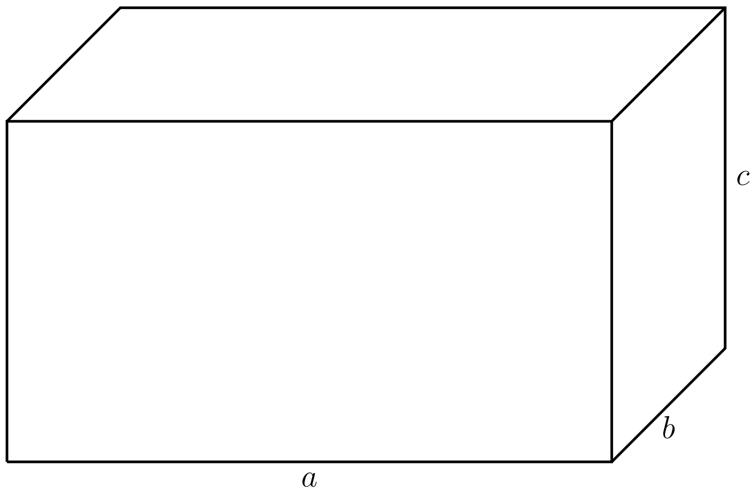
Definição 2.8 *Um paralelepípedo reto retângulo é um sólido geométrico mensurável com seis faces retangulares, em que as arestas adjacentes formam ângulos retos entre si.*

Proposição 2.9 *Seja P um paralelepípedo reto retângulo de arestas a, b e c. Então*

$$V(P) = a \cdot b \cdot c$$

Demonstração: Seja $V(a;b;c) = V(P)$ o volume de um paralelepípedo reto retângulo de arestas a, b, c, conforme a figura abaixo:

Figura 11: Paralelepípedo reto retângulo



Fonte: O próprio autor

Para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} V(ka;b;c) &= V(a;kb;c) \\ &= V(a;b;kc) \\ &= kV(a;b;c) \end{aligned}$$

Pois, cada um dos três primeiros números é o volume de um paralelepípedo formado pela justaposição de k paralelepípedos com arestas a, b e c respectivamente. Além disso, $V(a;b;c)$ é uma função crescente de cada uma das variáveis a, b e c. Daí, segue naturalmente que o volume $V(a;b;c)$ é diretamente proporcional às arestas a, b e c, ou seja, para todo número real positivo k, tem-se

$$V(ka;b;c) = V(a;kb;c) = V(a;b;kc) = kV(a;b;c)$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(a;b;c) &= V(a1;b;c) \\ &= aV(1;b;c) \\ &= aV(1;b1;c) \end{aligned}$$

$$= abV(1;1;c)$$
$$= abV(1;1;c1)$$
$$= abcV(1;1;1) = abc \tag{2.10}$$

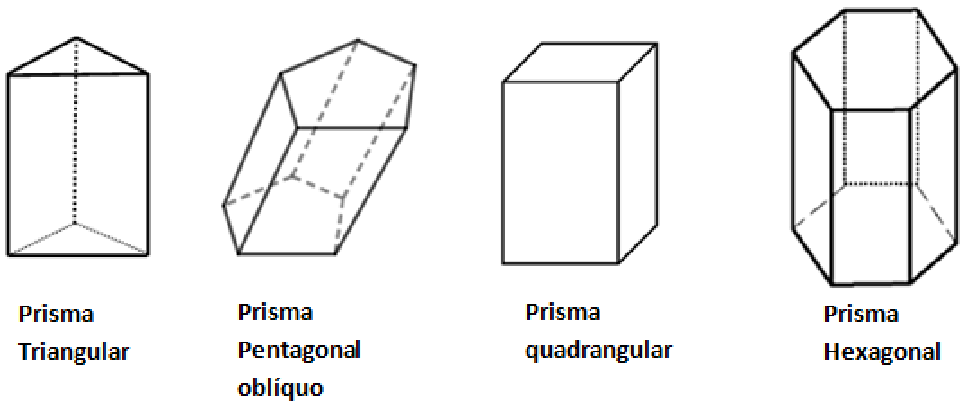
pois, $V(1;1;1)$ é o volume de um cubo unitário. ■

2.4.3 Volume do prisma

Definição 2.10 *Prisma é um sólido geométrico que possui duas bases congruentes e paralelas e faces laterais que são paralelogramos. As bases são polígonos que podem ser de qualquer forma, como quadrados, retângulos, triângulos, etc. As faces laterais são paralelogramos, e suas arestas laterais conectam os vértices correspondentes das bases. A altura do prisma é a distância entre as duas bases. Podem ser classificados como reto (quando as outras faces são perpendiculares às bases) ou oblíquo (caso contrário).*

Abaixo alguns exemplos de prismas.

Figura 12: Exemplos de Prismas



Fonte: O próprio autor

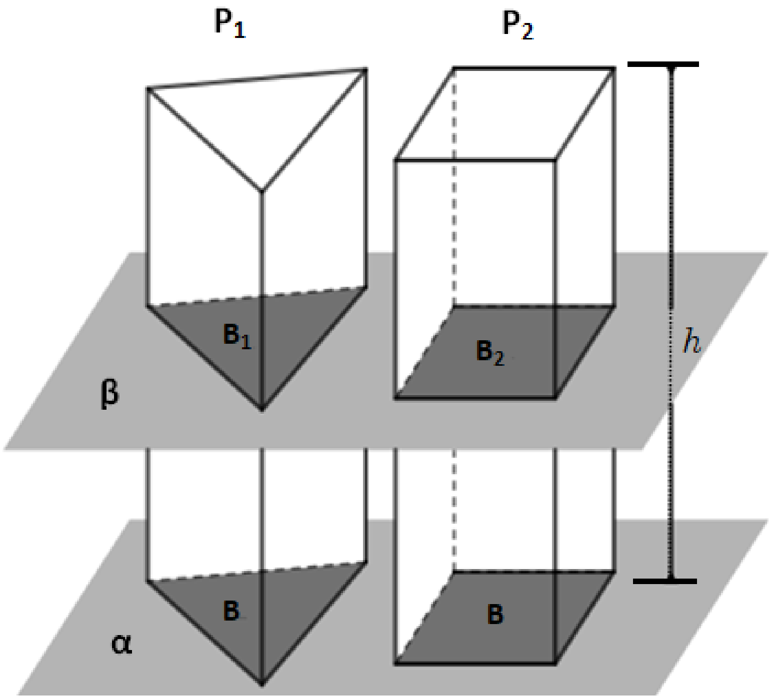
De acordo com a definição de prisma, pode-se observar que, no caso anterior, um paralelepípedo reto retângulo é um prisma quadrangular reto.

Vejamos como calcular o volume de um prisma, conforme proposição:

Proposição 2.11 *O volume de um prisma é igual ao produto da área da base (S_B) pela medida da altura (h).*

Demonstração: Suponha um prisma P_1 de altura h e área da base igual a S_B. Consideremos um paralelepípedo retângulo P_2 de altura e área da base igual ao do prisma P_1. Suponhamos ainda que os dois sólidos tenham as bases num mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α, conforme mostrado na figura abaixo.

Figura 13: Volume do Prisma



Fonte: O próprio autor

Ora, qualquer plano β paralelo a α e que secione P_1 também seciona P_2 e que as áreas B_1 e B_2 são iguais, pois são congruentes às respectivas bases. Então pelo Axioma 2.4, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 tem volumes iguais, ou seja,

$$V(P_1) = V(P_2)$$

Como

$$V(P_2) = S_B \cdot h$$

então

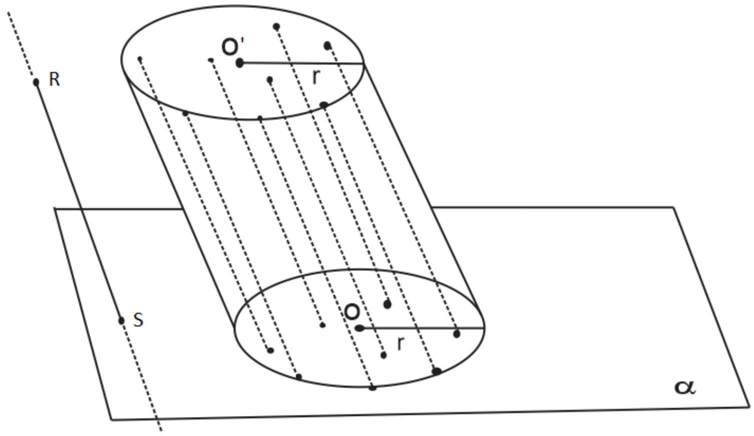
$$V(P_1) = S_B \cdot h$$

■

2.4.4 Volume do cilindro

Definição 2.12 *Consideremos um círculo de centro O e raio r, em um plano α, e um segmento de reta $\overline{RS}$, cuja reta suporte intercepta α. Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{RS}$, cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade num mesmo semiespaço dos determinados por α. A reunião de todos esses segmentos é um sólido geométrico mensurável chamado cilindro circular.*

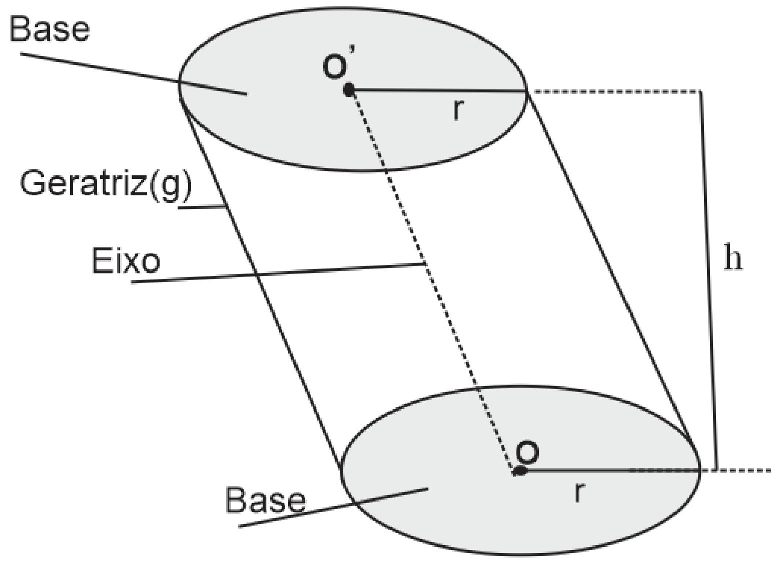
Figura 14: Definição de Cilindro



Fonte: O próprio autor

Observemos o cilindro abaixo:

Figura 15: Elementos do Cilindro

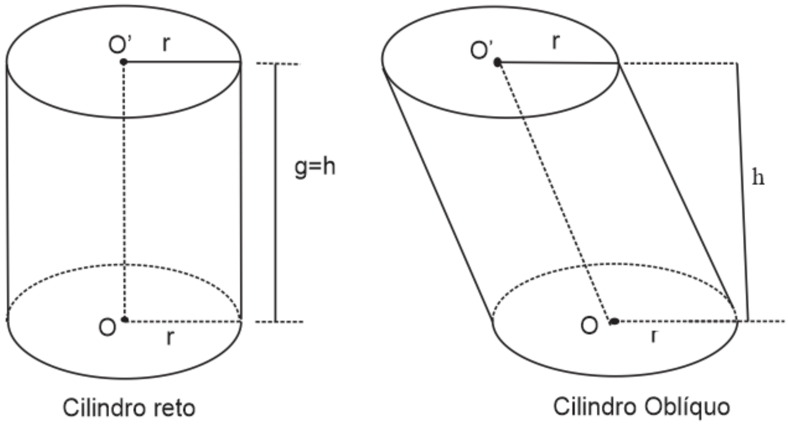


Fonte: O próprio autor

Os círculos de centros O e O' e raio r, situados em planos paralelos são chamados de bases do cilindro; os segmentos paralelos $OO^{'}$, com extremidades em pontos das circunferências das bases são chamados geratrizes (g) do cilindro; a reta $\overleftrightarrow{OO^{'}}$ é o eixo do cilindro; a altura h do cilindro é a distância entre os planos das bases.

Dependeno da inclinação da geratriz em relação aos planos de suas bases. Um cilindro classifica-se em **cilindro reto**, quando a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Neste caso, tem-se $g = h$. Um cilindro é dito **oblíquo** quando a geratriz é oblíqua aos planos da base.

Figura 16: Cilindro Reto e Cilindro Oblíquo

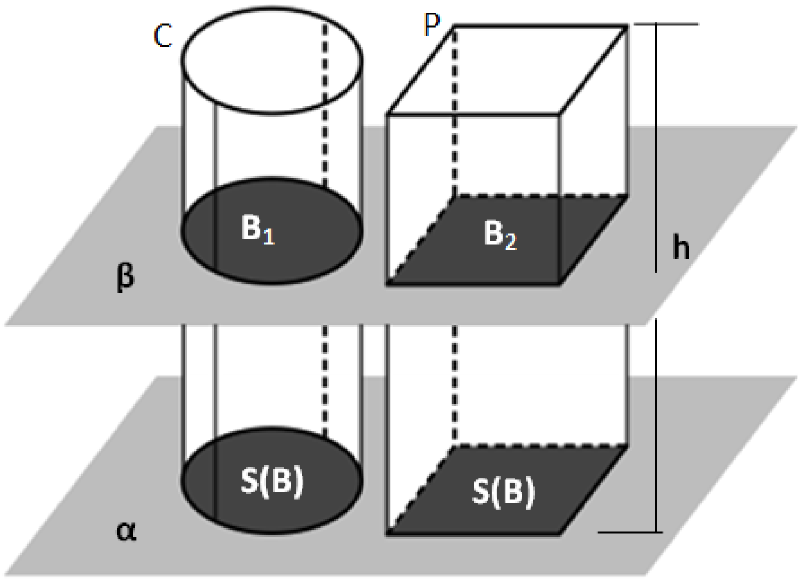


Fonte: O próprio autor

Proposição 2.13 *O volume de um cilindro $V(C)$ é dado pelo produto da área da base $S(B)$ pela medida da altura h.*

Demonstração: Consideremos um cilindro C de altura h e área da base $S(B)$, Consideremos também um paralelepípedo reto retângulo P de altura h e área da base $S(B)$, assim, ambos tem alturas iguais e bases equivalentes.

Figura 17: Volume do Cilindro



Fonte: O próprio autor

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases num mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α. Neste caso, qualquer plano β paralelo a α que secione o cilindro também seciona o paralelepípedo. Ademais as regiões B_1 e B_2 têm áreas iguais a $S(B)$, pois são congruentes às respectivas bases. Então pelo Axioma 2.4, o cilindro e o paralelepípedo têm volumes iguais. Como

$$V(P) = S(B) \cdot h,$$

temos

$$V(C) = S(B) \cdot h.$$

Assim, como um círculo de raio r tem área igual a πr^2, o volume do cilindro é dado por

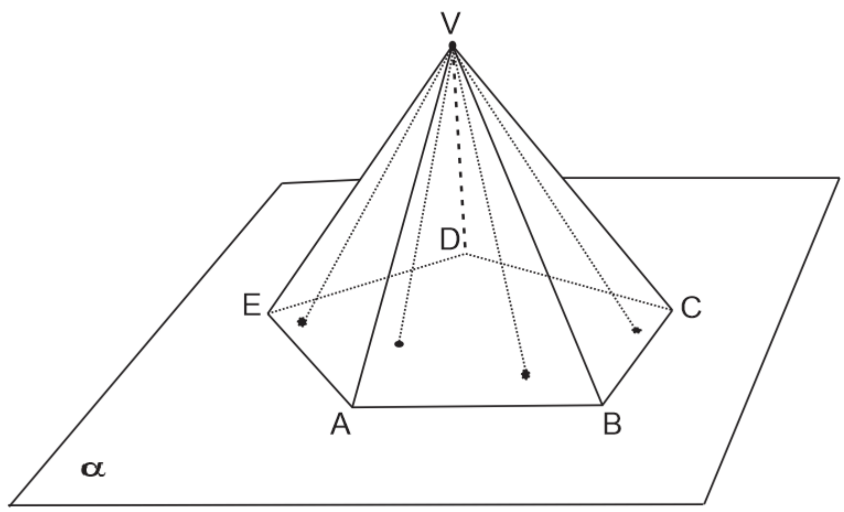
$$V(C) = \pi r^2 \cdot h. \tag{2.11}$$

■

2.5 Volume da pirâmide

Definição 2.14 *Sejam P um polígono P com n lados contido em um plano α e um V um ponto não pertencente a α. A pirâmide determinada pelo par (P, V) é a reunião de todos os possíveis segmentos de com extremidades em V e em um ponto no polígono.*

Figura 18: Definição de Pirâmide

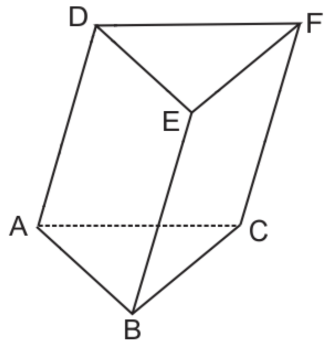


Fonte: O próprio autor

A base de uma pirâmide é plana e suas faces laterais são triângulos. A altura da pirâmide é a distância entre V e o plano α. As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono da base como quadradas, retangulares, triangulares, pentagonais, entre outras. De modo geral, o valor de n determina sua nomenclatura.

Consideremos o prisma triangular da figura abaixo, cuja base tem área $S(B)$ e cuja medida da altura é h.

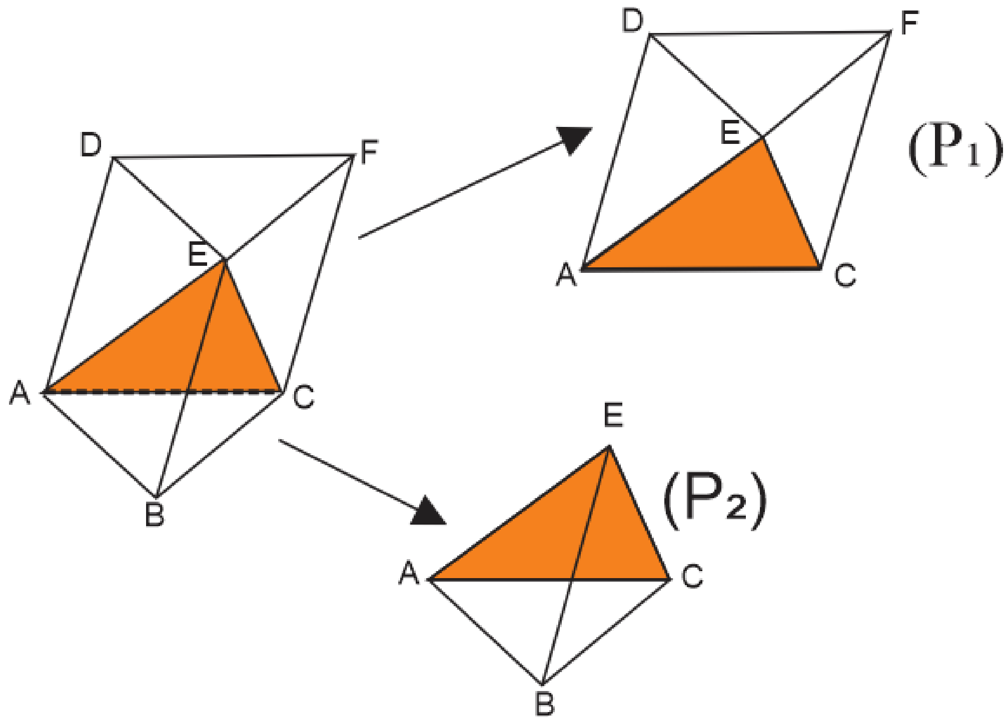
Figura 19: Prisma Triangular



Fonte: O próprio autor

Seccionando esse prisma pelo plano ACE, obtém-se uma pirâmide quadrangular P_1 e uma pirâmide triangular P_2 de base ABC e altura h.

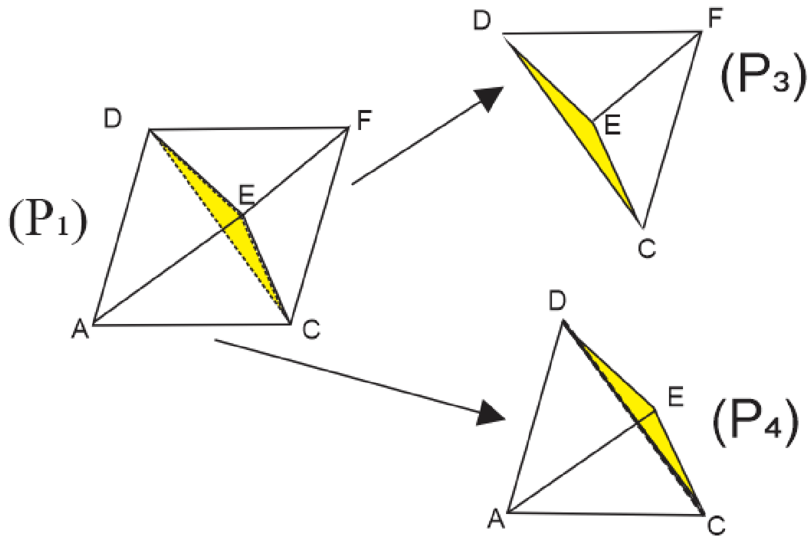
Figura 20: Prisma seccionado



Fonte: O próprio autor

Agora, seccionando P_1 pelo plano CDE, obtemos duas pirâmides triangulares: P_3, de vértices F e base DEC, e P_4, de vértice A e base DEC.

Figura 21: Prisma P_1 secionado



Fonte: O próprio autor

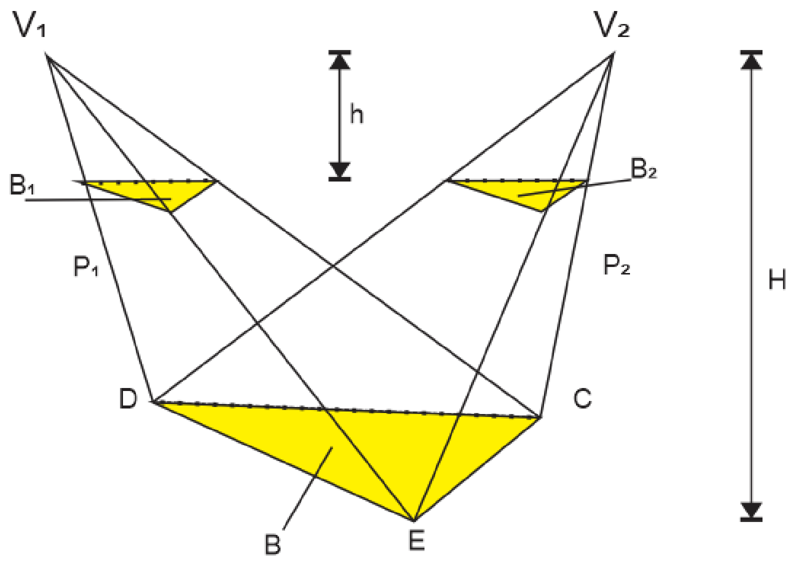
Observemos que P_2 e P_3 são pirâmides de bases equivalentes (ΔABC e ΔDEF) e mesma altura e que P_3 e P_4 são pirâmides que têm ΔDEC como base comum e mesma altura, pois as distâncias de seus respectivos vértices (F e A) ao plano da base são iguais.

Para obtermos o volume dessas pirâmides precisaremos do lema abaixo.

Lema 2.15 *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm volumes iguais.*

Demonstração: Considera-se as pirâmides P_1 e P_2, de base comum DEC e vértices V_1 e V_2, ambas tendo mesma altura H. Um plano paralelo ao plano da base DEC e distando h dos vértices V_1 e V_2 determina em P_1 e P_2 as seções B_1 e B_2, respectivamente, conforme mostrado na figura abaixo.

Figura 22: Duas pirâmides de mesma base



Fonte: O próprio autor

Se $S(B)$ é a área da base DEC, $S(B_1)$ a área da seção B_1 e $S(B_2)$ a área da seção B_2, tem-se:

$$\frac{h}{H} = k \text{ (razão de semelhança)}^4.$$

Conforme demonstrado por (LIMA, 1991, p.49), as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, e portanto

$$\frac{S(B_1)}{S(B)} = k^2 = \frac{S(B_2)}{S(B)},$$

de onde segue que

$$S(B_1) = S(B_2).$$

Logo, pelo Axioma 2.4 (Princípio de Cavalieri), pode-se concluir que

$$V(P_1) = V(P_2).$$

De modo análogo, podemos demonstrar que $V(P_2) = V(P_3)$ e $V(P_3) = V(P_4)$, então

$$V(P_2) = V(P_3) = V(P_4).$$

■

Proposição 2.16 *O volume da pirâmide triangular é dado por um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

[4]Dizemos que dois sólidos são semelhantes quando a razão entre a medida de um segmento qualquer do primeiro sólido e o segmento correspondente do segundo sólido é constante

Demonstração: Tomando $V(P_2) = V(P_3) = V(P_4) = V$ e considerando que o prisma $ABCDEF$ é a união das pirâmides P_2, P_3, P_4, o seu volume é $S(B) \cdot h$ é tal que

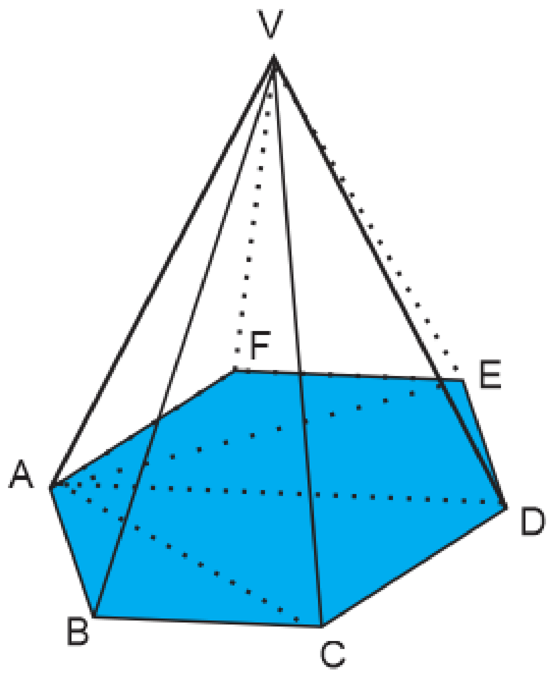
$$S(B) \cdot h = V + V + V$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot S(B) \cdot h$$

■

Proposição 2.17 *O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração: Observa-se na Equação 2.12 que uma pirâmide pode ser dividida em pirâmides triangulares que têm a mesma altura que a pirâmide original. Dessa mesma figura temos que as pirâmides de vértices V cujas bases são os triângulos AFE, AED, ADC e ACB.

Figura 23: Volume da Piramide



Fonte: O próprio autor

Seja, agora, uma pirâmide qualquer cuja base é um polígono de n lados e, de um mesmo vértice deste polígono, traça-se todas as possíveis diagonais que o divide em $(n-2)$ triângulos. Nesse caso, obtém-se $(n-2)$ pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original e com áreas da base $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$. Desta forma, o volume V da pirâmide original é a soma dos volumes dessas $(n-2)$ pirâmides triangulares.

$$V(P) = \frac{1}{3}S(B_1) \cdot h + \frac{1}{3}S(B_2) \cdot h + \cdots + \frac{1}{3}S(B_{n-2}) \cdot h$$

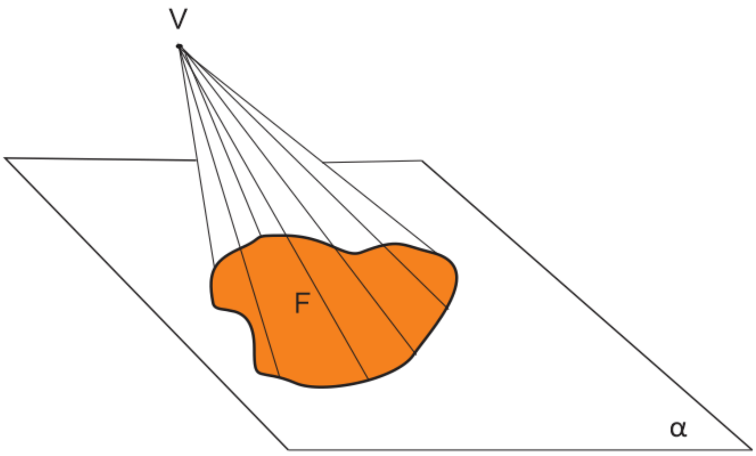
$$= \frac{1}{3}\left(S(B_1) + S(B_2) + \cdots + S(B_{n-2})\right) \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot S(B) \cdot h. \tag{2.12}$$

■

2.6 Volume do cone

Definição 2.18 *Um cone C, tendo como base uma figura plana F sobre um plano α, e tendo como vértice um ponto V situado fora do plano de F, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto V a todos os pontos de F. A altura h é o comprimento da perpendicular baixada de V sobre o plano α da base.*

Figura 24: Definição de Cone



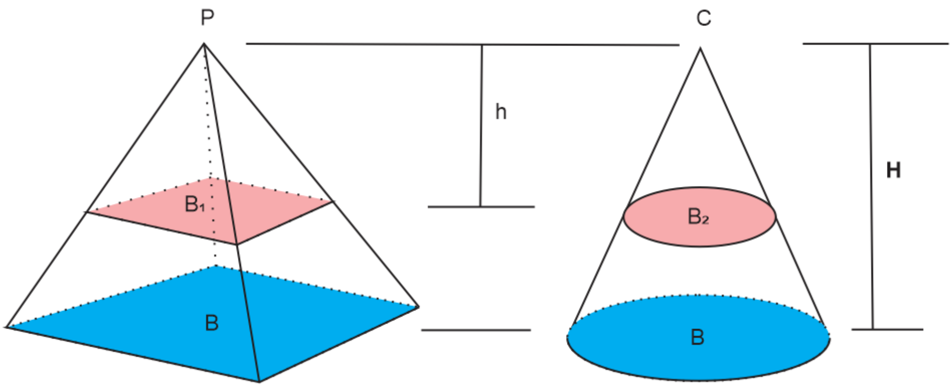
Fonte: O próprio autor

O cone como visto acima é chamado de cone generalizado. Porém, quando sua base é um círculo, denomina-se cone circular ou simplesmente cone. Ora, esta definição de cone inclui como caso particular, a possibilidade da base F ser um polígono e, neste caso, o sólido fica limitado por faces triangulares sendo chamado então de pirâmide. Daí, uma pirâmide é por definição um cone de base poligonal.

Proposição 2.19 *O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da sua altura.*

Demonstração: Dado um cone C com altura H e área da base $S(B)$, considere uma pirâmide P qualquer com mesma altura e área da base igual a do cone, cuja base está sobre o mesmo plano horizontal da base do cone, conforme figura abaixo.

Figura 25: Volume do Cone



Fonte: O próprio autor

Se um plano paralelo ao que contém as bases secionar os sólidos a uma altura h de seus vértices, obtém-se seções transversais paralelas as bases da pirâmide e do cone de áreas B_1 e B_2, respectivamente. Segue que a razão entre as áreas das bases do cone maior e do cone menor, bem como a razão entre as bases das pirâmides maior e menor é igual a razão entre os quadrados das respectivas alturas. Portanto,

$$\frac{S(B)}{S(B_1)} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{S(B)}{S(B_2)}$$

e, consequentemente,

$$S(B_1) = S(B_2).$$

Segue do Axioma 2.4 (Princípio de Cavalieri) que os volumes dos sólidos são iguais e, da equação 2.12, temos

$$V(C) = V(P),$$

de onde extraímos

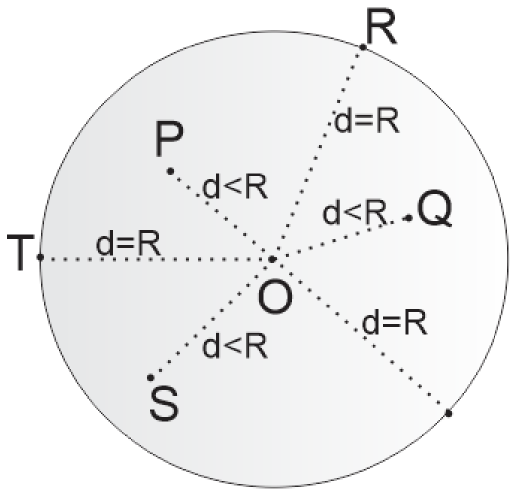
$$V(C) = \frac{1}{3}S(B) \cdot h \tag{2.13}$$

■

2.7 Volume da esfera

Definição 2.20 *Consideremos um ponto O e um número real positivo R. Denomina-se esfera de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R.*

Figura 26: Definição de Esfera

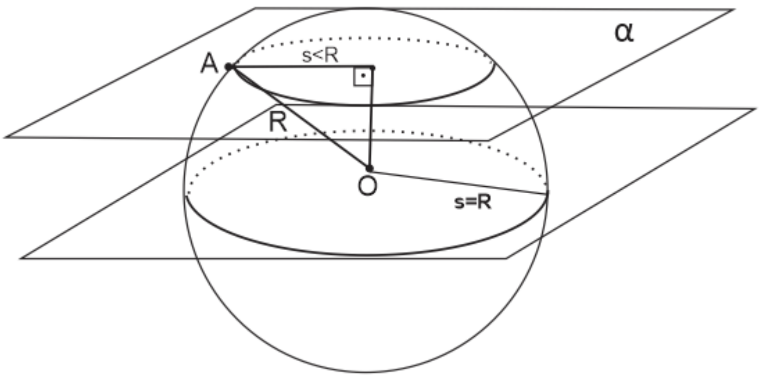


Fonte: O próprio autor

Na figura acima, observa-se que os pontos P, Q, R, S e T, pertencem à esfera, pois suas respectivas distâncias ao centro O são menores ou iguais a R.

Quando um plano α secciona uma esfera E, de centro O e raio R, o conjunto de todos os pontos comuns ao plano e à esfera é um **circulo**, a medida do raio desse círculo depende da distância do plano α ao centro O. Quanto mais próximo de O o plano α interceptar a esfera, maior será a medida s do raio da seção. Se α passar pelo centro O, o raio da seção determinada será o próprio raio da esfera e, nesse caso, a seção recebe o nome de **círculo máximo da esfera.**

Figura 27: Seção da Esfera



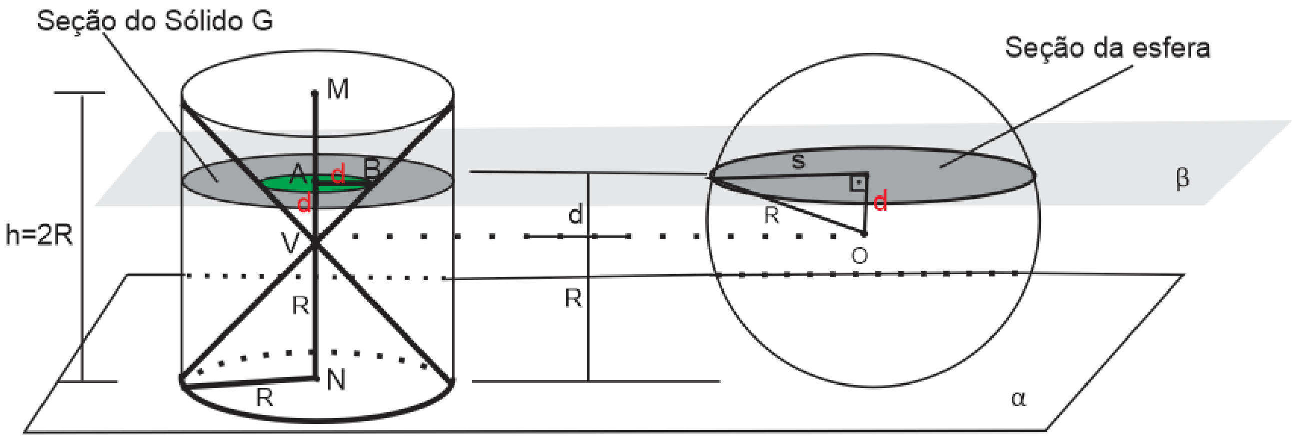
Fonte: O próprio autor

Proposição 2.21 *O volume de uma esfera E de raio R é dado por*

$$V(E) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Demonstração: Consideremos um cilindro cujo raio da base é R e cuja altura é $h = 2R$. Seja V o ponto médio do segmento $\overline{MN}$, contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos dois cones cujas bases coincidem com a base do cilindro. Esses cones têm como vértices comum o ponto V, e a medida de suas alturas é R, conforme a figura abaixo. O que obtivemos com esse processo é um sólido geométrico que será indicado por G.

Figura 28: Volume da Esfera



Fonte: O próprio autor

Seja uma esfera de raio R e o sólido G. Tomemos essa esfera tangente a um plano α e que o cilindro original descrito tenha base contida em α. Quando um plano β, paralelo a α, seciona a esfera a uma distância d de seu centro, ele determina nela um círculo de raio s cuja área é

$$\pi s^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2). \tag{2.14}$$

O plano β, também intercepta o sólido G, a uma distância d de V, determinando, como seção, uma coroa circular. Essa coroa circular por sua vez é delimitada por duas circunferências: uma de raio R e a outra de raio d, com $R > d$, de modo que sua área é dada por

$$\pi \cdot (R^2 - d^2). \tag{2.15}$$

Assim, de (2.14) e (2.15) pode-se observar que as áreas das seções na esfera e no sólido G são iguais e pelo Axioma 2.4 (Princípio de Cavalieri) a esfera e o sólido G têm volumes iguais.

O volume $V(G)$ do sólido G é dado por

$$\begin{aligned} V(G) &= V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Portanto, o volume da esfera é dado por

$$V(E) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

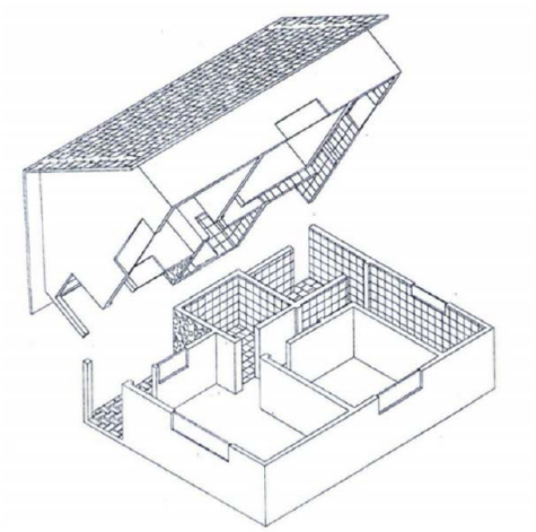
■

Capítulo 3

Planta Baixa e Escala para Construção de Casas Residenciais

Planta baixa é uma representação técnica de um projeto arquitetônico ou de engenharia, mostrando a disposição e distribuição dos espaços internos de um edifício ou construção.

Figura 29: Corte para planta baixa



Fonte: Ferreira (2004, p.06)

Geralmente desenhada em uma escala menor, a planta baixa fornece uma visão de cima para baixo dos cômodos, paredes, portas, janelas e outros elementos estruturais do ambiente. Estes desenhos são fundamentais durante o processo de planejamento e construção, pois permitem aos arquitetos, engenheiros e clientes visualizarem e compreenderem a distribuição e o uso dos espaços.

As plantas baixas podem variar em detalhamento e complexidade, dependendo do estágio do projeto e da finalidade do desenho. Sendo essenciais não apenas para a concepção inicial do imóvel, mas também para a obtenção de licenças, aprovações regulatórias e para orientar a execução do projeto.

Abaixo alguns passos que devem ser seguidos para a elaboração de uma planta baixa:

1. **Deve-se estimar o tamanho total do desenho** –com base na escala escolhida para sua representação – e verificar como os diversos desenhos componentes do projeto serão distribuídos nas pranchas, determinando também, o tamanho das folhas que serão utilizadas e quais desenhos serão colocados em cada uma delas.

2. **Delimitar as paredes:** serão demarcadas através das linhas horizontais, verticais, inclinadas e curvas (caso existam).

3. **Representação da projeção dos beirais, marquises e demais elementos** que se localizem acima da representação em planta (com o tipo de linha indicado para isso).

4. **Representação da posição dos vãos e das dimensões das suas esquadrias**, se existirem. Juntamente com as portas (representadas sempre abertas), deverão aparecer os arcos que demarcam sua abertura e também as dimensões principais: h (altura) $\times$ ℓ (largura)/p (peitoril).

5. **Representação de louças sanitárias.**

6. **Representação de dutos, rampas** (com seu comprimento e inclinação), **vegetação**.

7. **Representação esquemática das circulações verticais:** elevadores (com suas dimensões internas) e escadas (número de degraus, pé direito, base e altura dos degraus).

8. **Representação dos quadriculados** que denominados pisos frios.

9. **Representação de textos e contagem** (parcial e total).

10. **Representação dos desníveis:** degraus, rampas, soleiras, balcões, demais detalhes em vista e principais detalhem em projeção.

11. **Representação da projeção dos beirais**, marquises e demais elementos que se localizem acima da representação em planta (com o tipo de linha indicado para isso).

12. **Indicar onde passam os cortes longitudinal e transversal** (traço e ponto com linha grossa) e o sentido de observação, colocando letras ou números que correspondem aos cortes.

Esses passos estão fundamentados conforme a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) que criou as normas para a elaboração dos projetos que são:
NBR 6492/94 - Representação de projetos de arquitetura;
NBR 8196/99 - Emprego de escalas;
NBR 8403/84 - Aplicações de linha - tipos e larguras;
NBR 10068/87 - Folha de desenho - layout e dimensões;
NBR 13142/99 - Dobramento e cópia.

Percebe-se que escala é um conteúdo da matemática de extrema importância para este trabalho, pois será preciso representar em um desenho o tamanho de um objeto real.

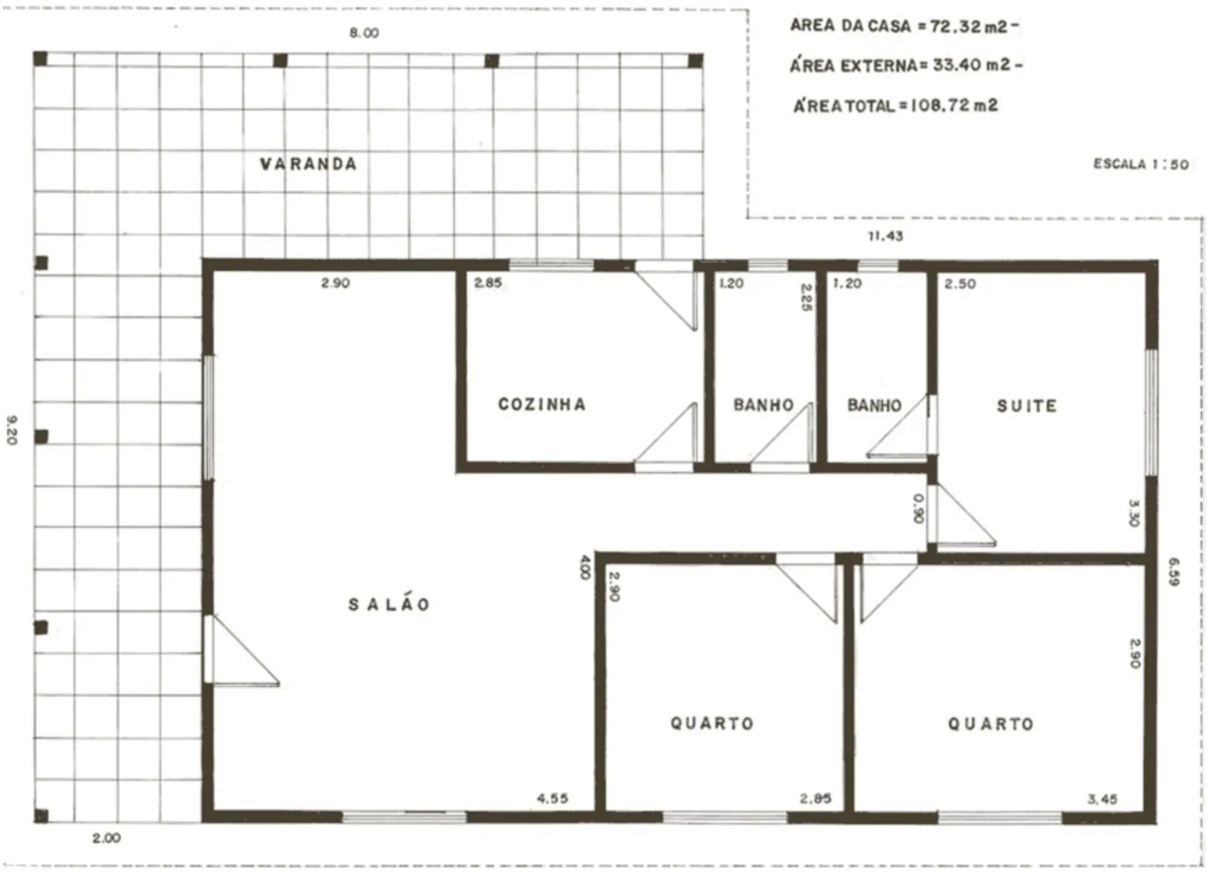
Daí, a razão que nos permite fazer tais escolhas para o tamanho da representação da planta baixa é

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida no Desenho}}{\text{Medida Real}}$$

Sendo as escalas mais empregadas em projetos: 1 : 50 (lê-se 1 para 50); 1 : 100 (lê-se 1 para 100); 1 : 150 (lê-se 1 para 150) em que, de modo geral $1 : k$ significa dizer que $1cm$ no desenho corresponde a kcm no real.

Desta forma, a planta baixa serve para ter a visão de como será a execução do projeto, conforme figura abaixo:

Figura 30: Planta Baixa



Fonte: O próprio autor

Capítulo 4

Aplicações de Áreas e Volumes em Construção de Casas Residenciais

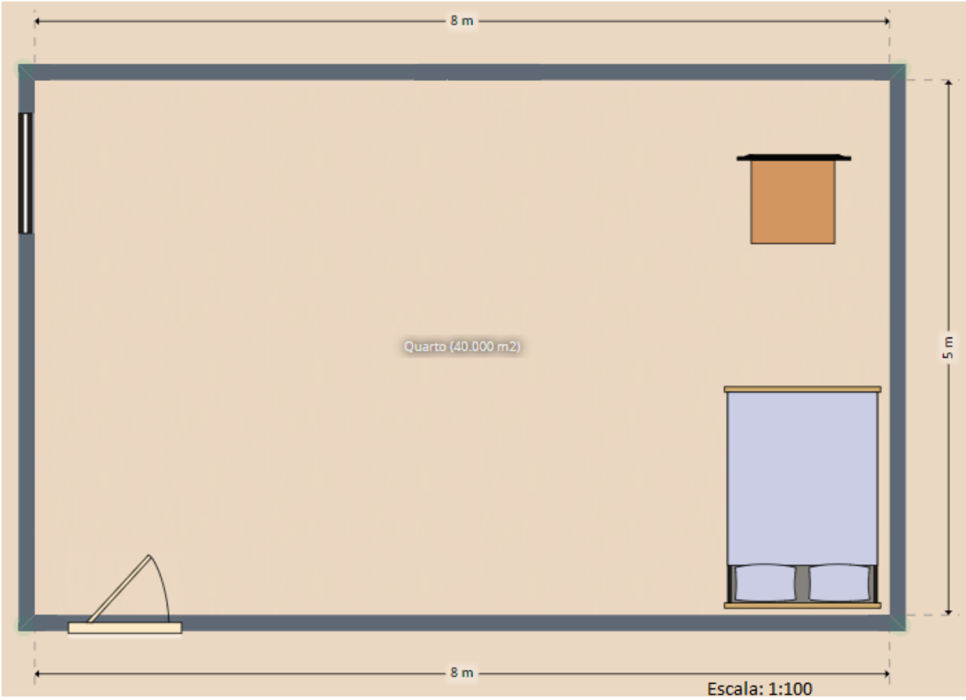
Neste capítulo, pretende-se apresentar problemas relacionados à construções de casas residenciais. Serão relacionadas questões que envolvem Geometria Plana e Espacial sistemas de medidas, área, volume. Para desenvolver o trabalho o professor pode começar com uma discussão informal e pesquisa relacionadas ao tema, abordando questões como: Quais os materiais de construção necessários para se construir uma casa residencial? Como o pedreiro sabe a medida e o modelo de uma casa? Como e onde construir? Após essas perguntas, propor que os alunos façam um esboço de uma planta baixa de uma casa seguindo os passos listados no Capítulo 3, esta atividade servirá para o professor avaliar o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo de escala e medidas de comprimento, bem como de geometria plana.

O planejamento da construção da casa residencial inclui vários recursos como mão de obra, terreno, material (cimento, tijolo, brita), a planta da casa, entre outros.

Desta forma, os problemas matemáticos relacionados a construção de casas foram selecionados de modo a melhorar aspectos cognitivos dos alunos, pois instiga o pensamento criativo e desperta o interesse pela matemática.

Aplicação 4.1 (Área útil e área construída de uma casa). *A área útil de uma casa se refere ao espaço interno disponível para uso, enquanto a área construída inclui todos os espaços cobertos pela estrutura da casa, como paredes e tetos. Conforme o esboço da planta baixa de um cômodo de uma casa cuja forma é retangular e supondo que as medidas internas sejam* $8m$ *e* $5m$*, respectivamente, e a espessura da parede seja* $0,15m$ *(alvenaria de tijolos). Calcule a área total, a área útil, e a área construída desse cômodo.*

Figura 31: Planta Baixa de um Cômodo



Fonte: O próprio autor

Solução: Seja S_{total} a área total, $S_{\text{útil}}$ a área interna e S_{parede} a área ocupada pelas paredes, S_{colunas} a área ocupada pelas colunas. Uma vez que $S_{\text{útil}}$ é a área do retângulo de dimensões 8×5, temos

$$S_{\text{útil}} = 8 \times 5 = 40m^2.$$

Nota-se que

$$S_{\text{parede}} = 2[8 \cdot (0,15) + 5 \cdot (0,15)] = 3,9m^2,$$

pois, são dois retângulos um de dimensões $8 \times 0,15m$ e outros dois retângulos de dimensões $5 \times 0,15m$. Verifica-se ainda que

$$S_{\text{colunas}} = 4 \cdot 0,15^2 = 0,09,$$

pois cada coluna é um quadrado de lado $0,15m$. Daí,

$$S_{\text{construída}} = S_{\text{parede}} + S_{\text{colunas}} = 3,9 + 0,09 = 3,99m^2.$$

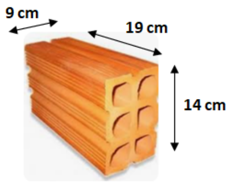
Finalmente,

$$S_{\text{total}} = S_{\text{útil}} + S_{\text{construída}} = 40 + 3,99 = 43,99m^2.$$

$\square$

Aplicação 4.2 (Calculando a quantidade de tijolos)

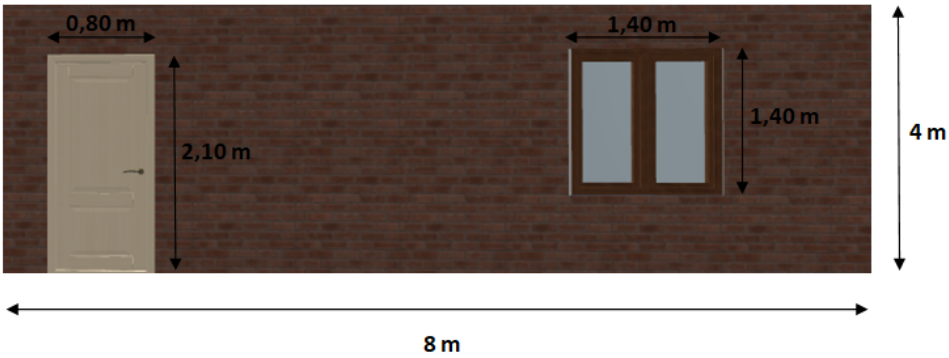
Figura 32: Tijolo de seis furos



Fonte: O próprio autor

Considerando-se a parede abaixo com suas medidas, determinar a quantidade de tijolos necessários para sua construção.

Figura 33: Parede 8 m x 4 m



Fonte: O próprio autor

Solução: Para calcular a área da parede, calcula-se a área total e subtrai-se a área da porta e a área da janela. (Parede, porta e janela são retângulos). Assim,

$$\begin{aligned} S_{\text{parede}} &= S_{\text{total}} - S_{\text{porta}} - S_{\text{janela}} \\ &= 8 \cdot 4 - 2,1 \cdot 0,8 - 1,40 \cdot 1,40 \\ &= 32 - 1,96 - 1,68 \\ &= 28,36 m^2 \end{aligned}$$

Calculando a área da face do tijolo, obtém-se

$$S_{\text{tijolo}} = 0,14 \cdot 0,19 = 0,0266\ m^2.$$

Para calcular a quantidade de tijolos divide-se a área da parede pela área da face do tijolo. Deste modo,

$$\text{Quantidade de tijolos} = \frac{S_{\text{parede}}}{S_{\text{tijolo}}} = \frac{28,36}{0,0266} = 1066,165.$$

Neste caso, serão necessários, aproximadamente, 1067 tijolos. □

Aplicação 4.3 (Calculando a quantidade de lajotas para o piso de uma casa) *Para o cálculo da quantidade de lajotas de uma casa leva-se em consideração a área útil de cada cômodo e a área de cada lajota dividindo-se ambos para determinar a quantidade de lajota* *necessárias. Daí, verifica-se a quantidade de metros quadrados em cada caixa de piso que é vendido.Diante das informações apresentadas determinar a quantidade de piso para a casa do projeto representado pela* Figura 34.

Solução: Deve-se calcular a área de cada cômodo do projeto. Por exemplo: No QUARTO 1, tem-se um retângulo de $3,20m \times 4,30m = 13,76m^2$ e assim por diante. Deve-se sempre descontar as partes que não terão piso. Em seguida calcula-se a área total (S_{total}), que é a soma da área de todos os cômodos:

$$\begin{aligned} S_{\text{total}} &= (\text{COZINHA})\ 12,51 + (\text{QUARTO 1})\ 13,76 + (\text{BANHO})\ 4,05 \\ &+ (\text{SALA})\ 15,01 + (\text{QUARTO 2})\ 14,40 + (\text{ÁREA ENTRE BANHO E QUARTOS})\ 1,70 \\ &= 61,43m^2 \end{aligned}$$

Agora, supondo que cada lajota para o piso seja um quadrado de lado $0,40m$, conclui-se que a área de uma lajota é

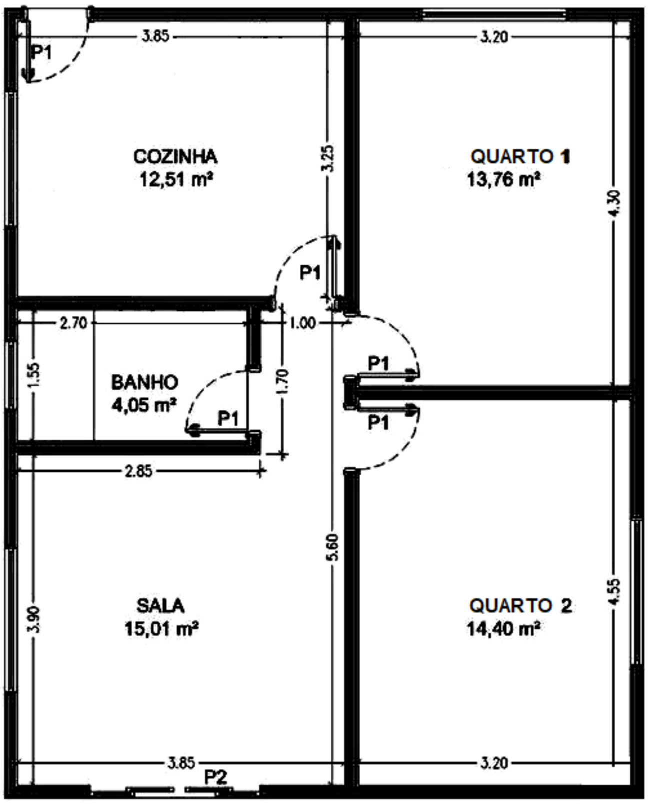
$$S_{\text{lajota}} = 0,40 \cdot 0,40 = 0,16m^2.$$

A quantidade de lajotas necessárias é determinada dividindo-se S_{total} por S_{lajota}:

$$\text{Quantidade de Lajotas} = \frac{S_{\text{total}}}{S_{\text{lajota}}} = \frac{61,43}{0,16} = 383,9375.$$

Portanto, serão necessárias aproximadamente 384 lajotas. Dependendo do fabricante e supondo que são 12 lajotas por caixa, serão necessárias $\frac{384}{12} = 32$ caixas de lajota para o piso da casa do projeto apresentado. $\square$

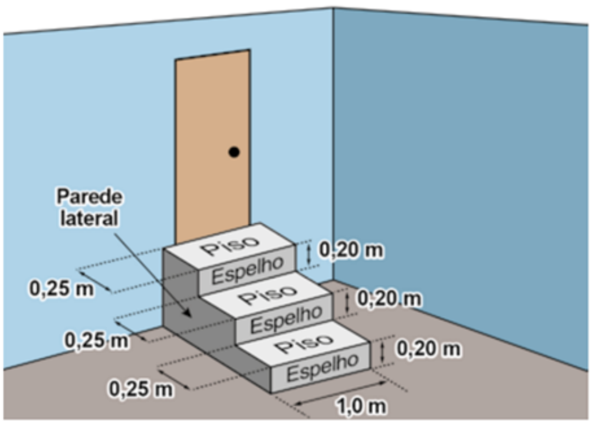
Figura 34: Planta baixa para cálculo de piso



Fonte: O próprio autor

Aplicação 4.4 (Questão Adaptada - 165 da prova azul do segundo dia do Enem 2023) *A figura representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas. Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica. Determine a área revestida em cerâmica, em metro quadrado.*

Figura 35: Escada Enem 2023



Fonte: Questão-165 da prova azul do 2º dia - Enem 2023

Solução: A área de cada piso é dada por $0,25 \times 1 = 0,25m^2$, pois é um retângulo. Como são três pisos, eles tem área igual

$$3 \times 0,25 = 0,75m^2.$$

A área de cada espelho é dada por $0,2 \times 1 = 0,2m^2$. Como são três espelhos, eles têm, juntos, área igual a

$$3 \times 0,2 = 0,6m^2.$$

A área de cada lateral pode ser dividida em três retângulos de dimensões

$$0,25 \times 0,6m^2 = 0,15, \qquad 0,25 \times 0,4 = 0,1m^2 \qquad \text{e} \qquad 0,25 \times 0,2 = 0,05m^2.$$

Daí, a área de cada lateral é dada por $0,15+0,1+0,05 = 0,3m^2$. Como são duas paredes laterais, tem-se

$$2 \times 0,3 = 0,6m^2.$$

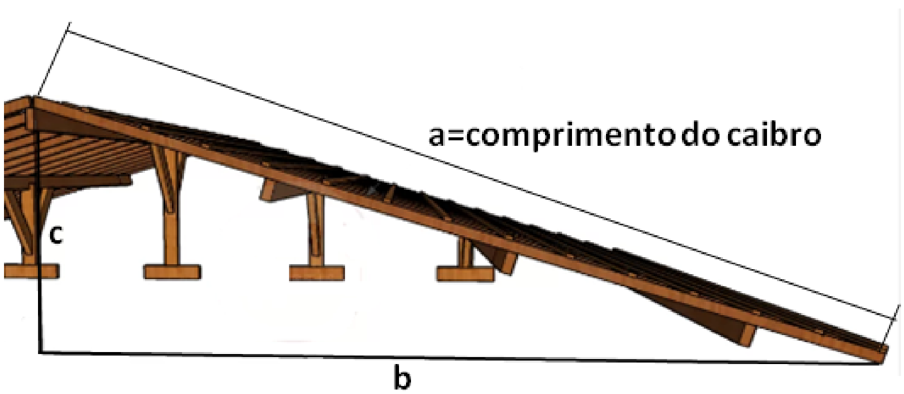
Dessa forma, a área total que deve ser revestida em cerâmica é dada por

$$0,75 + 0,6 + 0,6 = 1,95m^2.$$

□

Aplicação 4.5 (Cálculo da quantidade de caibros para o telhado de uma casa) *Em uma planta de cobertura duas águas com tamanho de* $8m \times 10m$, *com uma inclinação de* 30%, *sendo a colocação do caibro a cada 50 centímetros. Determine quantos caibros serão necessários para o telhado desta casa.*

Figura 36: Telhado de uma casa



Fonte: O próprio autor

Solução: Para calcular a altura do telhado leva-se em considerando a inclinação de 30%. Assim,

$$c = b \cdot 0,30 = 4 \cdot 0,3 = 1,20$$

Portanto, a altura (c) do telhado é $1,20m$. Para calcular o comprimento (a) do caibro aplicamos o Teorema de Pitágoras. Logo,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$= 4^2 + 1,2^2$$
$$= 17,44$$

de onde segue que

$$a = \sqrt{17,44} = 4,17m.$$

Neste caso, arredonda-se para $4,20m$ o tamanho de cada caibro. Para encontrar a quantidade de caibros, divide-se a largura do telhado pelo espaçamento entre os caibros:

$$\text{Quantidade de Caibros} = \frac{10}{0,50} = 20.$$

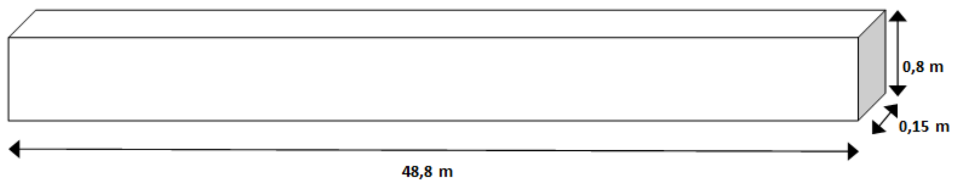
Por ser um telhado com duas águas, tem-se $20 \times 2 = 40$ caibros. Portanto, precisa-se de 40 caibros de $4,20m$ de comprimento. □

As aplicações 1, 2, 3, 4 e 5 estão alinhadas à Competência Específica 3 - Habilidade EM13MAT307 e à Competência Específica 5 - Habilidade EM13MAT506.

Aplicação 4.6 (Volume de concreto do baldrame da casa) *O baldrame é a base da estrutura de uma casa, geralmente feito de concreto armado, que suporta as paredes e distribui o peso da construção para o solo. Ele é essencial para garantir a estabilidade e segurança da casa.Supondo que a profundidade de 80 cm atinja a camada firme do terreno para a construção da casa conforme a planta baixa da Figura 34, calcule o volume de concreto armado para enchimento do baldrame cuja largura é de 15cm.*

Solução: Calcula-se a medida linear de todas as paredes, nesse caso $48,8m$.

Figura 37: Baldrame no formato Paralelepípedo reto retângulo



Fonte: O próprio autor

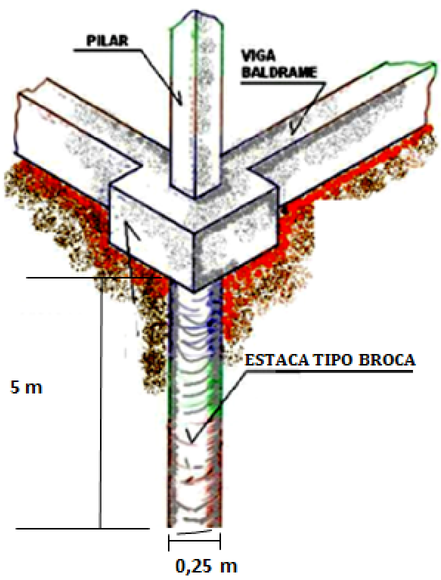
Pode-se verificar que temos o sólido geométrico paralelepípedo reto retângulo de dimensões $48,8 \times 0,15 \times 0,80$, aplicando a equação (2.10) tem-se

$$V = 48,8 \cdot 0,15 \cdot 0,80 = 5,856m^3$$

Assim, o volume de concreto para construir o baldrame da casa é $5,8m^3$. □

Aplicação 4.7 (Volume de concreto para estaca tipo broca). *As estacas tipo broca são elementos de fundação utilizados em engenharia civil para suportar estruturas em solos que apresentam baixa capacidade de carga ou em locais em que é necessário atingir camadas mais firmes do solo. Elas são formadas pela perfuração rotativa ou percussiva do solo até atingir a profundidade desejada, conforme figura abaixo e então são preenchidas com concreto. Elas são eficazes em transmitir as cargas da estrutura para camadas mais* *estáveis do solo, proporcionando uma fundação segura e resistente. Após o estudo do solo e do cálculo estrutural definiu-se que precisam de* 10 *estacas para a construção segura de uma casa. Conforme os cálculos do engenheiro é preciso que cada estaca tenha diâmetro de* $25cm$ *e profundidade de* $5m$ *cada uma. A figura abaixo monstra uma estaca tipo broca. Determine o volume de concreto para concretagem das* 10 *estacas.*

Figura 38: Estaca tipo broca



Fonte: O próprio autor

Solução: Segue que cada estaca é um cilindro reto de diâmetro $0,25m$ e altura $5m$ que, neste caso, é a profundidade. Da equação (2.11), segue que

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Como o raio da base é a metade do diâmetro tem-se

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$
$$V = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot h$$

Desta forma, o volume de cada estaca é

$$V_{\text{Estaca}} = 3,14 \cdot \frac{0,25^2}{4} \cdot 5 = 0,2453m^3$$

Como são 10 estacas, o resultado desejado é $0,2453 \cdot 10 = 2,453m^3$. Neste caso arredonda-se para $2,5m^3$ de concreto para concretagem das 10 estacas tipo broca. □

Aplicação 4.8 (Volume e Escala) *A caixa-d'água de um casa residencial terá a forma de um paralelepípedo retângulo reto com volume igual a* 10.000 *litros. Em uma maquete que representa a casa, a caixa-d'água tem dimensões* $2cm \times 5cm \times 1cm$*. Dado que* $1dm^3 = 1$ *litro, determine a escala usada pelo arquiteto.*

Solução: Sabe-se que

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida no Desenho}}{\text{Media Real}},$$

ou seja, escala é uma medida linear. Como a caixa-d'água é uma medida de volume, façamos a seguinte conversão:

$$\text{Escala} = \sqrt[3]{\frac{v}{V}},$$

em que v é o volume calculado na maquete e V é o volume real. Segue que

$$V = 10000 \text{ litros} = 10000dm^3 = 10000000cm^3$$

e

$$v = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10cm^3.$$

Portanto,

$$\text{Escala} = \sqrt[3]{\frac{v}{V}} = \sqrt[3]{\frac{10}{10000000}} = \frac{1}{100}.$$

Logo, a escala usada pelo arquiteto é de 1 : 100. □

Capítulo 5

Considerações Finais

A matemática desempenha um papel crucial na construção de uma casa residencial desde como calcular as dimensões e áreas dos espaços até a estimativa dos materiais necessários para sua construção, como a quantidade de tijolos, madeira e azulejos. Além disso, as equações e geometria são aplicadas na criação de plantas baixas, fundações, cálculo estrutural da construção, dentre outras aplicações.

Na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os conceitos e equações apresentadas neste trabalho, sobre áreas e volumes desenvolvem habilidades matemáticas, mas também promove a compreensão mais ampla dos princípios de sustentabilidade e planejamento urbano, alinhado-se aos objetivos da BNCC, pois, com isso o aluno(a) pode intervir na sua realidade local.

Desta forma, estabeleceu-se a relação entre à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o ensino de geometria plana e espacial, realizou-se cálculo de escalas para elaboração de plantas baixas, construiu-se modelos de plantas baixas para resolver problemas de áreas e volumes em diversos contextos e contextualizou-se a matemática à problemas sobre construção de casas residenciais que surgem no cotidiano e que precisam calcular áreas e volumes.

É claro que ainda existem muitas dificuldades a serem enfrentadas no que diz respeito à novas formas de ensinar matemática e por isso este trabalho serve como novos referenciais que contribuam para a construção de um ensino que supere o tradicional e que ao mesmo tempo motive o aluno a aprender matemática.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6492: Representação de projetos de arquitetura: Referências. Rio de Janeiro, 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8196: Emprego de escalas: Referências. Rio de Janeiro, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8403: Aplicações de linha -tipos e larguras: Referências. Rio de Janeiro, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 10068: Folha de desenho –layout e dimensões: Referências. Rio de Janeiro, 1987.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 13142: Dobramento e cópia: Referências. Rio de Janeiro. 1999.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais* Matemática: Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular (BNCC)*. Brasília, DF, 2018.

BOYER, C. B. *História da matemática* trad. Elza. F. Gomide, Ed. Edgard Blucher, 1974.

EVES, H. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria.* São Paulo-SP: Atual Editora, 1992.

LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança.* Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, E. L., et al. *A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática.)

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Geometria. Coleção PROFMAT.* Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.

OLIVEIRA, Cacilda Lages. *Significado e contribuições da afetividade, no contexto da Metodologia de Projetos, na Educação Básica, dissertação de mestrado. Capítulo 2.* CEFET-MG. Belo Horizonte-MG, 2006.