UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BENILSON DA SILVA COSTA

O USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

SÃO LUÍS
2023

2023

BENILSON DA SILVA COSTA

O USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Jairo Santos da Silva

SÃO LUÍS

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Da Silva Costa, Benilson.
O USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA / Benilson Da Silva Costa. - 2023.
75 p.

Orientador(a): Jairo Santos da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2023.

1. Construções Geométricas. 2. Ensino de Geometria. 3. Geometria Euclidiana. 4. Régua e Compasso. I. Santos da Silva, Jairo. II. Título.

BENILSON DA SILVA COSTA

O USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/___/____.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva
Universidade Federal do Maranhão
Orientador

____

Prof. Dr. Gerard John Alva Morales
Universidade Federal do Maranhão
Membro Interno

____

Prof. Dr. Junior Augusto Pereira
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Membro Externo

Dedico este trabalho aos meus pais Arão Israel Costa e Maria Sofia da Silva Costa.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois deu-me forças para lutar e nunca desistir dos meus ideais de vida. É nele que busco forças para continuar lutando.

Agradeço a minha família. Meu pai Arão Israel Costa por ter me ensinado a ser um homem integro, a minha mãe Maria Sofia da Silva Costa por ser uma mãe que fez de tudo por mim, que por vezes sacrificou-se pelos seus filhos. Aos meus irmãos Bruna Maiara, Brenda Maiane e Carlos Eduardo por serem excelentes irmãos e sempre me apoiaram nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus grandes amigos Giovanne Mendes e João Mateus, por terem ajudado na minha trajetória. Agradeço ao meu grande amigo Waldo pelo incentivo e ajuda em todos os momentos.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória. Agradecimento especial ao Professor Jairo Santos da Silva, pois orientou-me neste trabalho com grande paciência e eficiência.

“Bem-aventurados os humildes de espírito, porque deles é o Reino dos Céus.”
(Mateus 5.3)

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem para o ensino da Geometria Euclidiana utilizando as construções geométricas como uma ferramenta auxiliadora para a visualização de conceitos mais teóricos e abstratos, ajudando também na compreensão dos próprios conceitos básicos da Geometria Euclidiana. Por meio de um recorte histórico, mostra-se como ensino da Geometria, no Brasil, nunca teve a relevância que deveria ter e que, quase sempre esteve dissociado das construções geométricas. O trabalho traz as influências que o Ensino da Matemática sofreu ao longo dos anos e como, principalmente, o ensino da Geometria foi afetada pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM). Ao apresentar os conteúdos da Geometria junto com as construções geométricas, mostra-se que ambas devem estar sempre juntas e são indissociáveis. Por fim, apresenta-se a resolução de problemas presentes na Base nacional Comum Curricular (BNCC) com auxilio das construções geométricas.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Ensino de Geometria. Construções Geométricas. Régua e Compasso.

Abstract

The present work aims to present an approach for teaching Euclidean Geometry using geometric constructions as an auxiliary tool for the visualization of more theoretical and abstract concepts, also helping in the understanding of the basic concepts of Euclidean Geometry. Through a historical approach, it is possible to testify that in Brazil, the teaching of Geometry never had relevance deserved and these studies are almost always dissociated from geometric constructions. This paper shows the influences that the Teaching of Mathematics suffered over the years and how, mainly, the teaching of Geometry was affected by the Modern Mathematics Movement (MMM). By presenting the contents of Geometry together with geometric constructions only proves that these studies should be inseparable. Finally, this author presents a resolution of problems found in the National Common Curricular Base (BNCC) with help of geometric constructions.

Keywords: Euclidean Geometry. Teaching of Geometry. Geometric Constructions. Ruler and Compass.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O ensino da Matemática no Brasil passou por várias mudanças ao longo dos anos, tendências de ensino foram mudando, o currículo foi sendo alterado, os livros didáticos foram sendo moldados a partir dessas alterações, cursos de formação de professores surgiram. Mas o que ainda não teve mudanças significativas foram os resultados, considerados, até então, bem aquém do esperado. Dentro do insatisfatório campo do ensino da Matemática, tem-se um ensino ainda mais precarizado: o da Geometria. O ensino da Geometria passou por várias mudanças ao longo dos anos no Brasil, em alguns momentos chegou inclusive a ser esquecido. Destaca-se, por exemplo, a influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM) com uma influência negativa para o ensino da Geometria no Brasil.

Dadas as dificuldades no ensino da Geometria no Brasil, o presente trabalho tem como objetivo, apresentar uma abordagem para o ensino da Geometria Euclidiana utilizando as construções geométricas não só como uma ferramenta para a visualização de conceitos mais teóricos e abstratos, mas como uma forma de compreensão dos próprios conceitos básicos da Geometria Euclidiana, principalmente os estudados no Ensino Fundamental do 6° ao 9° ano.

Discutir e apresentar alternativas para o ensino da Geometria no Brasil é extremamente importante para que esta área possa se desenvolver. A aprendizagem da Geometria faz com que o aluno entenda melhor a realidade e se desenvolva em outros campos de estudo. A preocupação que vários estudiosos têm demonstrado em relação ao ensino da Geometria é de fundamental importância para que seu ensino possa se desenvolver nas escolas brasileiras, mas é preciso que esta discussão não seja apenas para que a Geometria seja ensinada, mas também para a forma com que ela deve ser ensinada. A Geometria deve ser ensinada de modo com que os alunos possam entender não só como resolver questões utilizando fórmulas, mas como ela está inserida no mundo em que eles vivem e como ela dialoga com outros campos de conhecimento. Nesse sentido, este trabalho busca contribuir para a propagação dessa tão importante área da matemática, apresentando também uma proposta de ensino e estudo da Geometria para os dias de hoje.

O trabalho foi dividido em 5 capítulos. No capítulo 2, realizou-se um levantamento histórico do ensino da Geometria ao longo dos anos no Brasil, mostrando como ocorreu e quais influências sofreu. Além disso, foi apresentado como o ensino da Geometria, por vezes, foi dissociado do ensino das construções geométricas, que em alguns momentos foi uma disciplina (Desenho Geométrico) separada e permitindo que a Geometria ficasse restrita a fórmulas sem muita contextualização e visualização e que o ensino das construções geométricas ficasse empobrecido dos conceitos básicos que o alicerçam.

No Capítulo 3, apresenta-se os conceitos da Geometria Euclidiana acompanhados das principais construções geométricas, permitindo não só a compreensão teórica das proposições, conceitos e demonstrações, mas como esses conceitos são construídos na prática, permitindo que se entenda e que se visualize de modo mais profundo algo que pode parecer puramente abstrato em um primeiro momento.

O Capítulo 4 foi destinado a aplicação das construções geométricas na resolução de problemas. A proposta foi resolver problemas da Geometria utilizando as construções geométricas com régua e compasso. O último capítulo foi destinado as considerações finais.

2 A História do Ensino da Geometria Euclidiana no Brasil

Neste capítulo, realizou-se um breve estudo do Ensino da Geometria Euclidiana no Brasil ao longo dos anos, bem como o uso das construções geométricas no ensino da Geometria. Para um maior aprofundamento do que será abordado neste capítulo, pode-se conferir os textos de (CALDATTO; PAVANELLO, 2015), (PAVANELLO, 1993), (SENA; VARGAS, 2013), (ZUIN, 2001), (BRASIL, 2020), (BRASIL, 1998), (GOMES, 2012), (VALENTE, 1997).

2.1 O Ensino da Geometria no Brasil

Para entender os caminhos tomados pelo ensino da Geometria no Brasil, é preciso entender como começou o ensino da Matemática no Brasil observando-se, também, as influências que este ensino sofreu ao longo dos anos. O ensino no Brasil começou por volta do ano de 1500 com os jesuítas e tinha apenas o objetivo de disseminar a fé cristã, restringindo-se, na época, apenas ao ensino da Língua Portuguesa, do Catecismo e, na área da Matemática, apenas ao ensino da Aritmética (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Como o ensino não era algo estruturado, conteúdos como Geometria não eram ensinados. Sendo assim, o ensino da Geometria começa, de fato, no Brasil com as preocupações militares do governo português, que preocupado com possíveis ataques a colônia (Brasil), cria, em 1699, as aulas de fortificações no Rio de Janeiro, cujo objetivo era ensinar aos alunos Desenho e Fortificação. As aulas demoraram a começar sendo que até meados de 1710 ainda não tinham começado, pois faltavam livros, compassos e instrumentos (VALENTE, 1997).

O ensino da Matemática e, principalmente, o ensino da Geometria, passa a ter um papel fundamental nos cursos da época:

> A base matemática do curso de formação de engenheiros militares, cartógrafos, matemáticos, artilheiros, lançadores de bombas e arquitetos, que iriam atuar em atividades como a construção de fortificações, instrumentos militares e de balística, era a geometria. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, pg. 106)

É importante salientar que o ensino não era universal, a população, de um modo geral, não tinha acesso a quase nenhuma instrução. O ensino da Matemática acontecia basicamente no curso militar e uma outra parcela da população tinha acesso apenas ao que ficou conhecido com Aulas Régias:

> Em 1772, um alvará do marquês de Pombal criou as "aulas régias", nas quais isoladamente se ensinaram primeiramente a gramática, o latim, o grego, a filosofia e a retórica, e, posteriormente, as disciplinas matemáticas: aritmética, álgebra e geometria. Eram aulas avulsas, e, em relação aos conhecimentos matemáticos, há indícios de que havia poucos alunos e, também, que era difícil conseguir professores. (GOMES, 2012, pg. 14-15)

O início do período imperial, em 1822, marca o estabelecimento das escolas secundárias e dos cursos de Direito, Medicina e Engenharias. A Matemática, principalmente a Geometria, era pré-requisito para o ingresso nesses cursos. Mas isso não significou um grande avanço, pois a preparação para o ingresso nesses cursos era feita apenas por meio de aulas avulsas e, o ensino continuou apenas para a elite (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Ainda no período imperial, como tentativa de unificar as aulas avulsas, são criados os Colégios Liceus, em 1832, e o Colégio Dom Pedro II, em 1837. A Matemática, apesar de não ser prioridade, fazia parte do currículo.

> As matemáticas, que eram as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria, e, posteriormente a Trigonometria, apesar do predomínio das disciplinas literárias e humanistas, estavam presentes em todas as séries do curso do Colégio de Pedro II, em todas as várias reformas que modificaram o seu plano de estudos ao longo do tempo. (GOMES, 2012, pg. 16)

Com o início do Brasil República, em 1889, veio a reforma no ensino proposta por Benjamin Constant, Ministro da Instrução, Correios e Telégrafos, em 1890. Constant era influenciado pelo Positivismo e a sua reforma buscava romper com o ensino mais Literário e Humanístico e privilegiar disciplinas científicas e matemáticas (GOMES, 2012).

Na primeira década do século XX, o ensino da Matemática no Brasil sofre influência de movimentos de reforma no ensino da Matemática que ocorriam no mundo.

> O movimento de reforma do ensino da matemática cristalizou-se, em 1908, em Roma, no IV Congresso Internacional de Matemáticos. Estes, preocupados com a qualidade do ensino de matemática e com o descompasso entre a matemática escolar e a moderna matemática, propuseram a criação de uma comissão internacional para estudar como desenvolver o ensino da matemática na escola. Esta comissão, denominada por CIEM, teve em seu comitê central Félix Klein, Henri Fehr e George Greenhill. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, pg. 112)

Com essa reforma, a organização do ensino da Geometria muda, mas não só isso, muda também a visão que se tinha desse ensino. Nesse período, a proposta era que o ensino da Geometria fosse "menos" euclidiano.

> Três recomendações gerais derivaram oito recomendações específicas, das quais seis relacionam-se diretamente ao ensino de geometria: a) a fusão da aritmética, da álgebra e da geometria (na última incluindo-se a trigonometria); b) introdução precoce da noção de função, apresentada

> sob a forma geométrica e expressa pelas representações gráficas; c) o abandono, em parte, da rígida didática de Euclides, com a introdução da ideia da mobilidade de cada figura, por meio da qual, em cada caso particular, torna-se compreensível o caráter geral da geometria; d) a introdução, desde cedo, de noções de coordenadas e de geometria analítica acessíveis à compreensão dos meninos desde as primeiras séries e que deveriam repassar todo o ensino da matemática em vez de sobreporem-se, como uma nova construção à parte, ao estudo já concluído da geometria elementar; e) introdução de noções de cálculo diferencial e de cálculo integral, apoiadas de modo preponderante em métodos geométricos, e, portanto, intuitivos; f) maior desenvolvimento do ensino do desenho projetivo e da perspectiva, ainda em conexão com o estudo da geometria elementar; g) introdução de recursos de laboratório; h) utilização do método histórico no desenvolvimento da matemática. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 113)

No início da década de 1930, influenciada pelo movimento Escola Nova, aconteceu a reforma de Francisco Campos no ensino secundário brasileiro. Essa reforma influenciou o ensino da Matemática tanto nas questões pedagógicas do ensino quanto no que era ensinado:

> E um dos aspectos da reforma promovida por Francisco Campos que mais denuncia a influência do movimento de reforma do ensino de matemática é o fato da geometria, álgebra, aritmética e trigonometria, a partir deste momento, fazerem parte de um único corpo de conhecimento, a matemática. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, pg. 116)

Na reforma de Francisco Campos, a Matemática deveria privilegiar a intuição e a experimentação. Esse aspecto influenciou diretamente o ensino da Geometria, que deveria privilegiar as construções e experimentações, o aluno deveria ter como base a intuição e a observação antes que fosse introduzido a exposição formal dos conceitos e as demonstrações (PAVANELLO, 1993).

Vários fatores influenciaram para que a reforma de Campos não obtivesse excito completo, pode-se destacar o fato de não existir muitos professores capacitados para implementar a reforma, a falta de livros didáticos que tivessem o mesmo viés de ensino da reforma, além da resistência de muitos professores ainda presos ao ensino tradicional e resistentes as mudanças (GOMES, 2012).

É a partir do final da década de 1950 e início da década de 1960 que o ensino da Matemática, influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), passa por uma grande mudança. Essa mudança afeta principalmente o ensino da Geometria.

> A reforma promovida pelo MMM foi a que mais repercutiu no ensino e no currículo de Matemática, apesar de, diferentemente das Reformas Campos e Capanema, não ter sido implantada por uma ação governamental, mas pela atuação de "grupos de estudo"para o ensino da matemática, principalmente o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, que congregava professores do ensino superior e secundário,

> sob a influência teórica dos primeiros. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, pg. 119)

O ensino da Matemática passa a priorizar as estruturas algébricas e a linguagem da teoria dos conjuntos. Isso influência diretamente no ensino da da Geometria que também deveria se adaptar a essas mudanças e deixar de priorizar a sistematização empírica e primitiva, e passar a priorizar a utilização de teoremas, mediante os quais fosse possível resolver problemas. A Geometria deveria ser ensinada com foco nas transformações e os livros didáticos passaram a apresentar os conteúdos nessa perspectiva (PAVANELLO, 1993).

Essa mudança causou vários problemas para o ensino da Geometria ao incentivar os professores, direta e indiretamente, a abandonarem o ensino da Geometria no Brasil. Isso ocorreu, primeiramente porque o MMM preconizava uma priorização da Álgebra e da linguagem dos conjuntos e depois porque a forma que propunha o ensino da Geometria, uma Geometria mais "algébrica", não foi bem aceito pelos professores, que na maioria das vezes não dominavam a Geometria na perspectiva do MMM (PAVANELLO, 1993).

> Um dos efeitos da disseminação das ideias do Movimento da Matemática Moderna, de acordo com vários autores, foi uma diminuição da presença dos conteúdos geométricos nas práticas pedagógicas realizadas nas escolas, tanto pelo papel de relevo adquirido pela álgebra quanto pela falta de subsídios dos professores para efetivar as propostas modernistas para a geometria. (GOMES, 2012, pg. 25)

O Movimento da Matemática Moderna teve papel fundamental no abandono do ensino da Geometria no Brasil, pelos motivos já elencados, mas não foi o único culpado. Aliado ao MMM, houve outro fato que corroborou para o esquecimento do ensino da Geometria, a saber: a Lei Federal 5.692/71, Lei de Diretrizes e Bases de Ensino do 1° e 2° Graus, que deu liberdade para as escolas escolherem os seus programas de ensino (PAVANELLO, 1993).

Se o MMM desestimulou os professores a ensinar Geometria, a Lei Federal 5.692/71 permitiu que isso fosse feito. A liberdade dada pela lei fez com que as escolas praticamente eliminassem o ensino da Geometria de seus currículos, pois ou a Geometria não era ensinada ou então era deixada para o fim do ano letivo e, quando vista, era ensinada de modo aligeirado. Isso proporcionou que o ensino da Matemática priorizasse o ensino da Álgebra e Aritmética, algo que é visto até os dias atuais.

> Em seu artigo de 1995, "Por que não ensinar geometria?", Lorenzato explicita que o ensino de geometria continua abandonado, e atribui tal abandono ao despreparo dos professores, à utilização do livro didático em consequência da má formação destes. Acrescenta que os livros didáticos de matemática apresentam a geometria, na grande maioria das vezes, nos últimos capítulos e esta é reduzida a fórmulas, definições e propriedades

> desvinculadas de aplicações e de explicações da natureza histórica ou lógica. Aponta ainda para a forma frágil e diminuta de abordagem do tema nos currículos. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, pg. 124)

Outro problema para o ensino da Geometria foi desvinculá-lo das construções geométricas, que passaram a ser vistas em uma disciplina chamada de desenho artístico. Os alunos passaram a ter ainda mais dificuldade em Geometria, pois já não conseguiam associar as figuras geométricas e suas representações aos conceitos. O ensino da Geometria era reduzido a teoremas e fórmulas e sem nenhuma contextualização (PAVANELLO, 1993).

É importante ressaltar, como aponta Pavanello, que o abandono do ensino da Geometria acontece apenas nas escolas públicas e que as escolas particulares continuam ensinando Geometria. Essa perspectiva reforça as discrepâncias entre a escola para a classe trabalhadora e a para elite. A autora ressalta a dualidade do ensino no Brasil, entre a escola que ensina Geometria (escola de elite) e a escola em que não se ensina Geometria (escola para os menos favorecidos). Nesse sentido, a autora ressalta a importância do ensino da Geometria para o desenvolvimento dos alunos:

> Existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos em relação a ela. A ausência do ensino da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. (PAVANELLO, 1993, pg. 16)

Buscando a democratização do ensino, o governo federal promulga, em 20 de dezembro de 1996, a Lei Nº 9.394 e torna a Educação Básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade e dividida em 3 (três) etapas: Pré-Escola, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Como um dos desdobramentos desta lei, foi criado os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática, em 1998, que preconizava o ensino da Geometria Euclidiana a partir da visualização e experimentação. Mesmo com essa indicação, o ensino da Geometria ainda continua extremamente fragilizado e os resultados em avaliações nacionais ou internacionais demonstram que os alunos não apresentam conhecimento minimamente adequado em Geometria (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

2.2 O Ensino das Construções Geométricas no Brasil a partir Século XX

Como visto na seção anterior, as construções geométricas, assim como a Geometria, começaram a ser ensinadas no Brasil colonial com as aulas de fortificações. Também foi possível perceber que tanto o ensino da Geometria quanto o das construções geométricas foram desvalorizados e sendo deixados de lado ao longo dos anos. Nesta seção, realizou-se um breve levantamento, a partir do século XX, de como o ensino das construções geométricas foi se desconectando do ensino da Geometria até que fosse praticamente extinto das escolas brasileiras e como isso pode ter afetado o ensino da própria Geometria que, como mostrado na seção anterior, tornou-se algébrico e pouco valorizado.

A partir da segunda década do século XX, as construções geométricas ganham um destaque no currículo com o processo de industrialização do país. As construções geométricas não sofreram com a unificação das "matemáticas" que ocorreu na época, pois continuou sendo ensinada sem integração com a Geometria. Não houve integração entre Geometria e construções geométricas como ocorreu entre as diversas áreas da Matemática.

Uma portaria de junho de 1931 alterou o currículo e dava novas instruções pedagógicas para o ensino secundário. Com as alterações o ensino de desenho geométrico ganhou destaque e foi dividido em 4 modalidades: Desenho do Natural, Desenho Decorativo, Desenho Geométrico e Desenho Convencional. Conceitos mais formais da Geometria estariam presentes no Desenho Geométrico e no Desenho Convencional. Além de ser ensinado desvinculado do ensino da Geometria, outro problema era que o desenho geométrico só começava a partir da 2ª série (ZUIN, 2001).

A partir da década de 1940, o ensino no Brasil sofre algumas alterações estruturais com a Reforma Capanema. Essas alterações valorizaram o ensino das construções geométricas com régua e compasso, pois começaram a ser ensinadas já no primeiro ano do ensino ginasial. Um problema ainda era que o ensino das construções geométricas não estava instituído no ciclo do Ensino Fundamental. Mas mesmo sem está instituído, já havia algum avanço, pois já aparecia instruções para a utilização de instrumentos de desenho nesse ciclo. É apenas em 1946, com Lei Orgânica do Ensino Primário de 1946, que o desenho geométrico passou a ser uma disciplina obrigatória (ZUIN, 2001).

O abandono do ensino das construções geométricas, assim como o da Geometria, começa no final da década de 1950 influenciado pelo MMM. Apesar de ser ensinado desvinculado do ensino da Geometria, o ensino do desenho geométrico sofre com a desvalorização da Geometria nesse período, pois o que sustenta as construções geométricas são os conceitos da Geometria Plana.

> As construções geométricas se fundamentam na teoria da geometria plana, e se esta passa por um processo de desvalorização com o Movimento da Matemática Moderna, de algum modo isso iria se refletir no ensino do Desenho, pelo menos nas escolas que não visavam uma formação profissionalizante, onde esse saber escolar era um pré-requisito básico. (ZUIN, 2001, pg. 86)

Outro fator que contribuiu para o abandono do ensino das construções geométricas foi a Lei Federal 5.692/71. Como já mencionado, essa lei permitiu que as escolas escolhessem os seus currículos e fez com que a maioria das escolas abandonassem o ensino das construções geométricas. No mesmo período, o desenho geométrico deixou de ser exigido nos vestibulares de engenharia e arquitetura fazendo com que várias escolas de primeiro e segundo grau retirassem do seu currículo a disciplina de desenho geométrico (ZUIN, 2001).

A Lei Federal 5.692/71 norteou a Educação Básica brasileira por 25 anos até que 1996 foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9394. Como já citado, um dos desdobramentos da LDB foi a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, isso contribuiu para que a Geometria Plana voltasse a ter relevância dentro do currículo das escolas.

> A Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BRASIL, 1998, pg. 122)

Os PCNs de matemática passaram a valorizar as construções geométricas e a propor seu uso dentro do ensino da Geometria. O documento propõe que:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (BRASIL, 1998, pg. 51)

Segundo os PCNs, para o 3° ciclo do Ensino Fundamental, 6ª e 7ª séries, recomenda-se o uso de construções com régua e compasso para estabelecer uma relação entre propriedades e procedimentos.

> Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. (BRASIL, 1998, pg. 68-69)

Para o 4º ciclo, 7ª e 8ª séries, é colocado pelos PCNs como conceitos e procedimentos para se trabalhar Espaço e Forma:

> Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor. (BRASIL, 1998, pg. 89)

Apesar da tentativa de resgate do ensino da Geometria e de se propor o uso das construções geométricas ali, os resultados ainda são bem tímidos. O ensino da Geometria continuou pobre e sendo feito de forma descontextualizada, ainda com influência do Movimento da Matemática Moderna, sendo muito algébrico e pouco construtivo e limitando-se por vezes a encontrar "o valor de x".

2.2.1 O Ensino da Geometria e das Construções Geométricas Segundo a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante as etapas da educação básica (BRASIL, 2020). É importante destacar que a BNCC não constitui-se como um currículo, mas sim como norte para que as escolas, tanto a níveis estaduais quanto municipais, desenvolvam seu currículos.

Na BNCC, o ensino da Matemática no Ensino Fundamental, do 6° ao 9° ano, é dividido em 5 (cinco) unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. A Geometria está presente em todos os 4 anos e acompanhada das construções geométricas. Dentre as habilidades que são citadas para o ensino da Geometria, podemos destacar as que fazem menção as construções geométricas:

> (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
> (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
> (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
> (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
> (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
> (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
> (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
> (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares. (BRASIL, 2020, pg. 303-318)

É possível perceber como as construções geométricas foram valorizadas dentro da

BNCC e como seu ensino é proposto dentro do ensino da Geometria como conhecimentos indissociáveis. Ainda não é possível mensurar o impacto que a BNCC terá no ensino da Geometria junto com as construções geométricas, mas já é possível perceber uma mudança na perspectiva para este ensino e a esperança de que dias melhores ainda estão por vir para esta tão nobre e importante área da Matemática que é a Geometria.

3 Conceitos de Geometria Euclidiana e Construções Geométricas

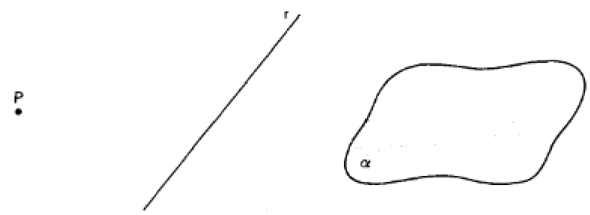
Neste capítulo serão apresentados, de maneira formal, conceitos da Geometria Plana, bem como construções geométricas fundamentadas por esses conceitos. Serão realizadas algumas demonstrações de proposições e teoremas com o objetivo de deixar o texto o mais autossuficiente possível. Para as demonstrações não fornecidas nesse trabalho ou, ainda, caso se deseje um estudo mais aprofundado de conceitos e resultados aqui apresentados pode-se consultar, por exemplo, as referências (ALVES, 2020), (DOLCE; POMPEO, 1997), (NETO, 2017) (NETO, 2012), (REZENDE; QUEIROZ, 2008), (WAGNER, 2009).

3.1 Ponto, Reta e Plano

Em Geometria Plana, ponto, reta e plano são consideradas noções primitivas e não carecem de definição. A partir da experiência e da observação é intuitiva a noção, do que seja um ponto, uma reta e um plano, sendo assim, assume-se essas noções como conhecidas.

Um ponto não tem dimensão (largura, altura ou comprimento), em geral denota-se um ponto por letras latinas maiúsculas. Uma reta possui comprimento, mas não largura e denota-se por letras minúsculas do alfabeto latino. O plano é denotado por letras gregas minúsculas.

Figura 1 – Representação Gráfica de um ponto, de uma reta e de um plano.



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 1997, pg. 2)

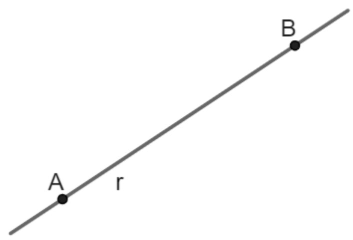
Em Geometria Euclidiana faz-se o uso do metódo axiomático ou dedutivo, que utiliza-se de afirmações, chamadas de Axiomas ou Postulados, os quais são aceitos sem justificativas, isto é, sem necessidade de demonstrações matemáticas. Como o uso dos Postulados, é possível deduzir e demonstrar outras afirmações, dentre elas os teoremas. A seguir são fornecidos alguns postulados importantes da Geometria Plana relacionados a ponto, reta e plano.

Postulado 3.1.1. *Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*

Postulado 3.1.2. *Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.*

Na Figura 2 tem-se que os pontos distintos A e B determinam a reta r, denotada alternativamente por $r = \overleftrightarrow{AB}$

Figura 2 – Dois pontos determinam uma única reta.



Fonte: O próprio autor.

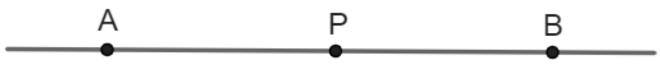
Definição 3.1.3. *Um conjunto de pontos do plano é dito colinear se existir uma reta que contém todos os pontos desse conjunto.*

Postulado 3.1.4. *Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.*

Postulado 3.1.5. *Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:*

1. *Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;*
2. *Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;*
3. *Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P;*
4. *Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.*

Figura 3 – Ponto P entre os pontos A e B.

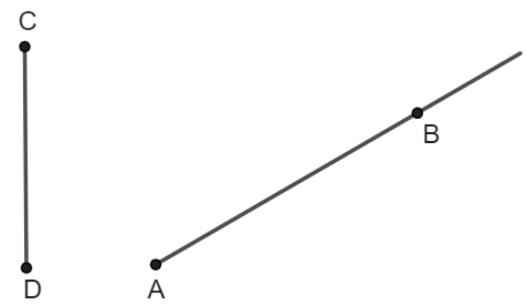


Fonte: O próprio autor.

Definição 3.1.6. *Um ponto A, situado sobre uma reta r, a divide em duas semirretas com origem em A. Escolhendo dois pontos B e C, sobre a reta r de maneira que o ponto A fique entre B e C, pode-se determinar a semirreta de origem em A e que contém o ponto B, que será representada por $\overrightarrow{AB}$, e a semirreta de origem no ponto A que contém o ponto C, representada por $\overleftarrow{AC}$.*

Definição 3.1.7. *Dados dois pontos distintos A e B, define-se o* ***segmento de reta*** *denotado por AB como a união dos pontos A e B com o conjunto de todos os pontos que estão entre A e B. Os pontos A e B são extremos do segmento AB. O comprimento do segmento AB será denotado por $\overline{AB}$.*

Figura 4 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$ e Segmento de reta CD.



Fonte: O próprio autor.

Definição 3.1.8. *Dois segmento de reta AB e CD são ditos* ***congruentes****, denotados por $AB \equiv CD$, se possuírem o mesmo comprimento ($\overline{AB} = \overline{CD}$).*

Não se deve confundir a notação de segmento com a do comprimento de um segmento. Um segmento que tem extremos A e B será denotado por AB e seu comprimento por $\overline{AB}$. Não deve ser confundido também a congruência com igualdade, quando se faz referência a segmentos, se diz "segmentos congruentes" e quando for a comprimento dos segmentos se utiliza a igualdade, conforme Definição 3.1.8.

Postulado 3.1.9. *Dados uma semirreta de origem em A e um segmento CD, existe sobre a semirreta com origem em A um único ponto B tal que $CD \equiv AB$.*

Do Postulado 3.1.9 é possível determinar se dois segmentos dados no plano tem comprimentos iguais ou, caso contrário, qual deles é maior. Para isso, pode-se utilizar um compasso para o transporte de um dos segmentos de reta dado para a semirreta determinada pelo outro segmento (ver Exemplo 3.1.10).

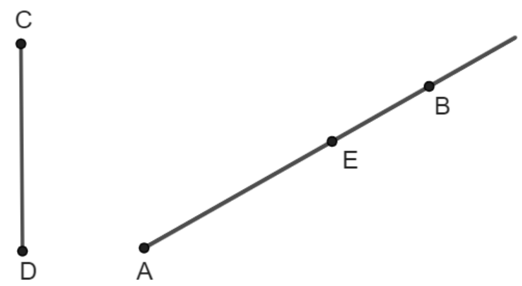
Exemplo 3.1.10. *Com o uso de um compasso, transporte o segmento CD para a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e decida se $\overline{CD} > \overline{AB}$ ou vice-versa.*

Solução. Considere o segmento CD e a semirreta $\overrightarrow{AB}$ da Figura 4 para a construção dos passos.

Descrição do passos:

1. Centre o compasso em C e fixe a outra extremidade do mesmo em D.
2. Mantendo a abertura calibrada no item 1., centre o compasso em A e marque, com a outra extremidade do mesmo, um ponto E sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que $AE \equiv CD$.
3. Compare os comprimentos dos segmentos $\overline{CD} = \overline{AE}$ com $\overline{AB}$.

Figura 5 – Caso em que $\overline{AB} > \overline{CD}$.



Fonte: O próprio autor.

Para se chegar na conclusão de qual segmento é maior ou se eles são iguais, bastar perceber que se E estiver entre A e B, então $\overline{AB} > \overline{CD}$ (conforme a Figura 5), se B estiver entre A e E, então $\overline{CD} > \overline{AB}$ e, em último caso, se B e E coincidirem então $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Além de comparar segmentos, é possível também "adicionar" semgentos e multiplicar segmentos por um número natural utilizando régua e compasso (veja o Exemplo 3.1.11).

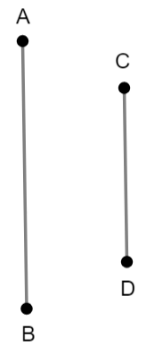
Exemplo 3.1.11. *Dados, no plano, os segmentos AB e CD como na Figura 6, construa com régua e compasso segmentos EF e GH, tais que* $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$ *e* $\overline{GH} = 3\overline{AB}$*.*

Solução. Para os passo 1 e 2, deve-se proceder de modo análogo ao Exemplo 3.1.10.

Descrição do passos:

1. Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r.
2. Marque sobre a reta r um ponto X e, em seguida, transporte o segmento AB para r, obtendo um segmento EX, tal que $\overline{EX} = \overline{AB}$.

Figura 6 – Segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

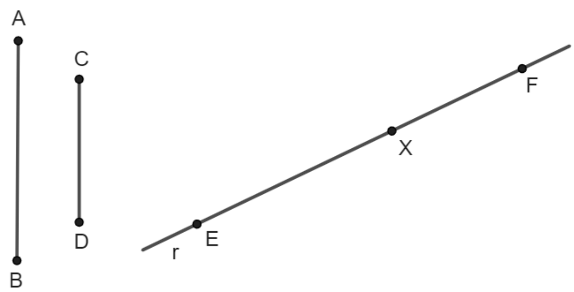


Fonte: O próprio autor.

3. Transporte o segmento CD para r, a partir do ponto X, obtendo um ponto F, tal que $\overline{XF} = \overline{CD}$ e o ponto X pertencendo a EF.

4. Para a construção de GH, basta perceber que $3\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$ e, com isso, refazer os passos do transporte de um segmento conforme o Exemplo 3.1.10.

Figura 7 – Construção do segmento EF, tal que $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.



Fonte: O próprio autor.

Definição 3.1.12. *Dados os pontos A e B no plano, define-se a **distância** $d(A, B)$ entre A e B como o comprimento $\overline{AB}$ do segmento AB:*

$$d(A, B) = \overline{AB}.$$

Definição 3.1.13. *Seja AB um segmento de reta e M um ponto pertencente a esse segmento. O ponto M é ponto médio de AB se, e somemte se, $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

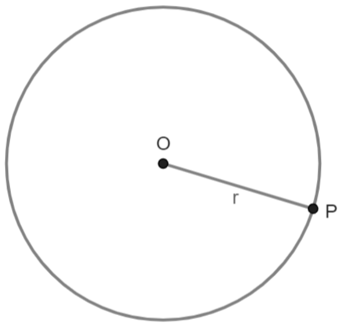
A Definição 3.1.13 será trabalhada mais adiante na Seção 3.4 quando, com auxílio de uma construção, será mostrado que todo segmento tem um ponto médio.

3.2 Elementos Básicos de uma Circunferência

Definição 3.2.1. *Dados um ponto O e um número real $r > 0$ (que deve ser pensado como o comprimento de um segmento), define-se* ***circunferência*** *de centro O e raio r como o conjunto de todos os pontos P do plano que estão à distância r do ponto O, ou seja, $r = \overline{OP}$.*

Em geral, denota-se circunferência por um a letra maiúscula do alfabeto grego, por exemplo, denota-se a circunferência da Figura 8 por Γ (lê-se: gama), e pode-se escrever $\Gamma(O;r)$ para enfatizar que a circunferência Γ tem centro O e raio r.

Figura 8 – Circunferência de centro O e raio r.



Fonte: O próprio autor.

O **interior** de uma circunferência de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é menor que r, ou seja, tais que $\overline{OP} < r$. O **exterior** de uma circunferência é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é maior que r, ou seja, tais que $\overline{OP} > r$.

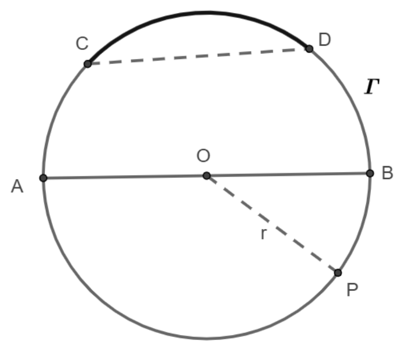
Definição 3.2.2. *A união de uma circunferência com seu interior é chamada de região* ***circular fechada*** *ou* ***círculo****.*

É preciso atentar-se a questão da terminologia, pois alguns autores utilizam a Definição 3.2.1 para se referir a círculo, mas essa alteração não causará problemas. Note que a definição de círculo é mais ampla que a de circunferência, pois a circunferência se restringe a Definição 3.2.1, entretanto quando se utiliza o termo **círculo** pode se referir tanto a da Definição 3.2.1 ou da 3.2.2, cabendo ao autor determinar a qual se refere. Neste trabalho, toda vez que for mencionado o termo "círculo", refere-se ao da Definição 3.2.2.

Definição 3.2.3. *Dado uma circunferência de centro O e raio r (Figura 9), denominamos* ***raio*** *da mesma como todo segmento que une o centro O a um de seus pontos; por exemplo, OA, OB e OP são raios do círculo Γ. Uma* ***corda*** *de Γ é um segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência; um* ***diâmetro*** *de Γ é uma corda que passa por seu centro.*

Definição 3.2.4. *Sejam A e B pontos distintos de uma circunferência de centro O. Se AB for um diâmetro, então o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência situados num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$ é uma* ***semicircunferência****. Senão, o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos da circunferência que estão no interior do ângulo central $A\hat{O}B$ é chamado um* ***arco menor*** *da circunferência; e o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência que são exteriores ao ângulo central $A\hat{O}B$ é chamado* ***arco maior*** *da circunferência.*

Figura 9 – Raio, diâmetro, corda e arcos de uma circunferência.



Fonte: O próprio autor.

Na circunferência da Figura 9, os pontos C e D formam os dois arcos, sendo que a parte em negrito é o arco menor da circunferência Γ. Será utilizado a notação $\widehat{CD}$ para dizer que os pontos C e D delimitam os arcos de uma circunferência e sempre será dito a qual arco se refere (arco menor ou arco maior).

Exemplo 3.2.5. *Construa com um compasso uma circunferência de centro O e passando pelo ponto A. Em seguida, marque sobre a mesma todos os possíveis pontos B para os quais a corda AB tenha o comprimento l dado.*

Solução.

Figura 10 – Circunferência de centro O.

Fonte: O próprio autor.

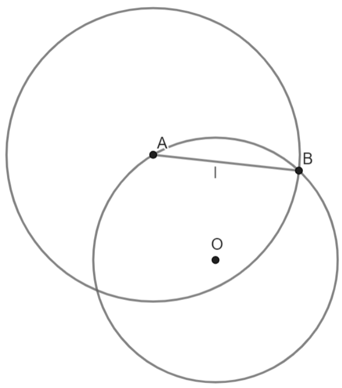
Descrição dos Passos:

1. Centre o compasso em O e fixe sua abertura de O a A. Em seguida, trace a circunferência pedida.

2. Com a abertura do compasso igual l, trace, de maneira análoga, a circunferência de centro A e raio igual a l.

3. As posições possíveis para o ponto B são os pontos de interseção das duas circunferências traçadas.

Figura 11 – Corda AB, tal que $\overline{AB} = l$.



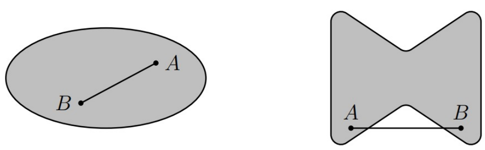
Fonte: O próprio autor.

Na Figura 11, foi representado uma das possibilidade para o ponto B pedido no Exemplo 3.2.5. É possível notar que existe duas possibilidades para o ponto B, pois as as circunferências se intersectam em dois pontos e, em ambos casos, teria-se $\overline{AB} = l$ (raio da circunferência de centro em A).

3.3 Ângulos

Definição 3.3.1. *Uma região R do plano é* ***convexa*** *quando, para todos os pontos A, B dessa região, tivermos que o segmento AB está inteiramente contido em R. Caso contrário, diremos que R é uma região* ***não convexa****.*

Figura 12 – Região convexa e região não convexa.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 11).

Postulado 3.3.2. *Dada uma reta r em um plano α, os pontos que não pertencem à r formam duas regiões α' e α'' disjuntos tais que:*

1. *As duas regiões são convexas;*

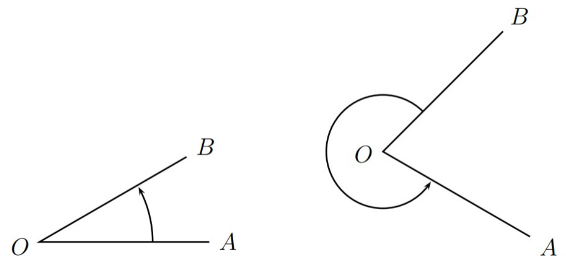
2. *Se A pertence a uma das regiões e B ao outra, então o segmento AB intersecciona a reta r.*

Definição 3.3.3. *Cada uma da regiões, α' e α'', determinadas pelo Postulado 3.3.2 são chamadas de semiplanos e a reta r é a origem dos semiplanos α' e α''.*

Definição 3.3.4. *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Da Definição 3.3.4 temos que um ângulo pode ser convexo ou não, conforme a Figura 13. Denota-se por $\angle AOB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Toda vez, a menos que se diga o contrário, que se denotar $\angle AOB$, refere-se ao ângulo convexo $\angle AOB$. Dado que $\angle AOB$ refere-se ao ângulo convexo, pode-se determinar uma forma para medir $\angle AOB$ (ver Postulado 3.3.5).

Figura 13 – Ângulo convexo e não convexo.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 13).

Postulado 3.3.5. *A cada ângulo $\angle AOB$ corresponde um único número real entre 0 e 180.*

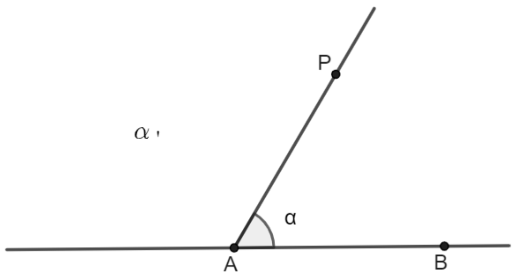
Definição 3.3.6. *O número que se refere o Postulado 3.3.5 é a **medida do ângulo** $\angle AOB$ denotado por $A\widehat{O}B$ cuja unidade de medida é o grau ($\circ$).*

Por uma questão de econômia de notação, por vezes, será utilizado letras gregas minúsculas para denotar medida de um ângulo. Por exemplo, escreve-se $A\widehat{O}B = \alpha$ para significar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é α graus.

Definição 3.3.7. *Dois ângulos são congruentes se possuírem a mesma medida.*

Postulado 3.3.8. *Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na reta de origem de um semiplano α'. Para cada número α entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ com P no semiplano α', tal que $P\widehat{A}B = \alpha$.*

Figura 14 – Ângulo de medida α.

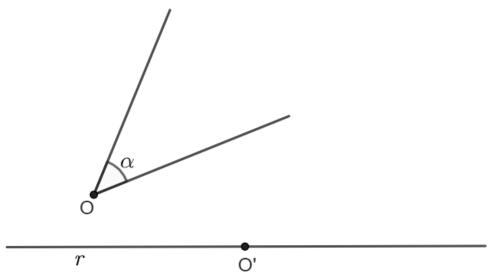


Fonte: O próprio autor.

Exemplo 3.3.9. *Com o auxílio de um compasso, construa um ângulo de vértice O', com um lado situado sobre a reta r e igual ao ângulo α dado.*

Solução.

Figura 15 – Ângulo α e reta r.



Fonte: O próprio autor.

Descrição do passos:

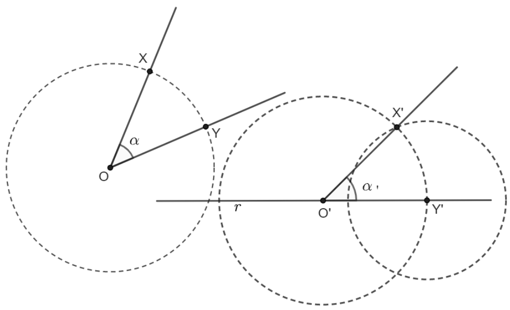
1. Trace uma circunferência de raio arbitrário R, centrada no vértice do ângulo dado, marcando pontos X e Y sobre os lados da mesma.

2. Trace outra circunferência de raio R, centrada em O', marcando Y' como um dos pontos de interseção da circunferência com a reta r.

3. Marque o ponto X' de interseção da circunferência de raio R e centro O' com a circunferência de raio XY e centro Y'.

4. O ângulo $\angle X'O'Y'$ mede α.

Figura 16 – Construção de $\angle X'O'Y'$ de medida α', tal que $\alpha' = \alpha$.

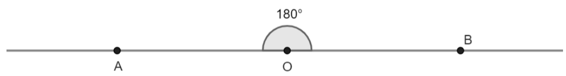


Fonte: O próprio autor.

Os elementos para a **justificativa** da construção apresentada no Exemplo 3.3.9 carecem de fatos ainda não apresentados. Sendo assim, a justificativa para essa construção será apresentada na Seção 3.4 quando será abordado o caso de congruência de triângulo LLL (Postulado 3.5.8).

Postulado 3.3.10. *Se um ângulo $\angle AOB$ é tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sejam semirretas opostas (A, O e B estejam sobre uma mesma reta, com $O \in \overleftrightarrow{AB}$), então $A\widehat{O}B = 180°$ (ver Figura 17).*

Figura 17 – Ângulo de 180°.

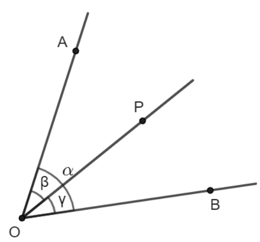


Fonte: O próprio autor.

Definição 3.3.11. *Se dois ângulos possuem o mesmo vértice, um lado em comum e não possuem pontos interiores em comuns, então estes dois ângulos são chamados* ***adjacentes****.*

Postulado 3.3.12. *Se P é um ponto interior ao ângulo $\angle AOB$ então $A\widehat{O}B = A\widehat{O}P + P\widehat{O}B$.*

Figura 18 – Soma de dois ângulos.

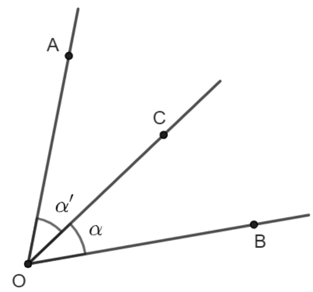


Fonte: O próprio autor.

O Postulado 3.3.12 apresenta a forma de somar âgulos e o Postulado 3.3.5, conforme o Exemplo 3.3.9, apresenta a possibilidade de construir um ângulo de medida conhecida com um lado sobre uma reta dada.

Dado um ângulo de medida α e um ângulo $\angle AOC$, de medida α', com um lado sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e vértice em O, e o outro lado na semirreta $\overrightarrow{OC}$, então é possível pelo Postulado 3.3.5 e pelo Exemplo 3.3.9 construir o ângulo de medida α sobre a semirreta $\overrightarrow{OC}$ com vértice em O de modo que $\overrightarrow{OB}$ seja outro lado do ângulo de medida α, ou seja, $B\hat{O}C = \alpha$. Nestas condições, pela Definição 3.3.11, os ângulos são adjacentes e, pelo Postulado 3.3.12, tem-se $A\hat{O}B = \alpha + \alpha'$, conforme a Figura 19.

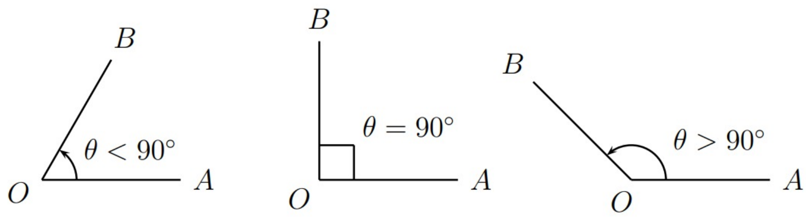
Figura 19 – Ângulos adjacentes.



Fonte: O próprio autor.

Definição 3.3.13. *Diremos que um ângulo $\angle AOB$ é agudo quando $0° < A\hat{O}B < 90°$, reto quando $A\hat{O}B = 90°$ e obtuso quando $90° < A\hat{O}B < 180°$ (Figura 20).*

Figura 20 – Tipos de ângulos.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 17).

Na Figura 20, tem-se a representação do ângulo agudo (à esquerda), ângulo reto (centro) e do ângulo obtuso (à direita). No ângulo reto é possível perceber uma notação especial para tal ângulo, sendo essa notação suficiente para determinar que o ângulo é reto, dispensando qualquer outra referência.

Definição 3.3.14. *Se a soma das medidas de dois ângulos é $90°$, então os ângulos são chamados complementares, e cada um é o complemento do outro.*

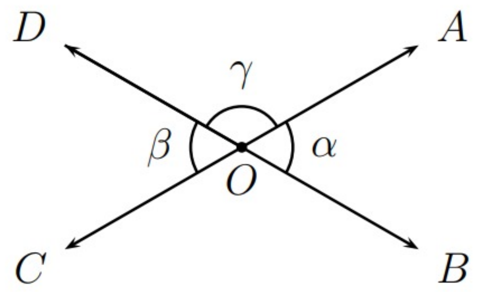
Definição 3.3.15. *Se a soma das medidas de dois ângulos é* $180°$*, então esses ângulos são chamados de suplementares. Neste caso, diz-se que cada um é o suplemento do outro.*

Proposição 3.3.16. *Se* $\overleftarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *são semirretas opostas e* C *é um ponto pertecente a um dos semiplanos delimitado pela reta* $\overleftrightarrow{AB}$*, então os ângulos* $\angle AOC$ *e* $\angle BOC$ *são suplementares.*

Demonstração. Pelo Postulado 3.3.12, tem-se $A\hat{O}B = A\hat{O}C + B\hat{O}C$. Por outro lado, o Postulado 3.3.10 garante que $A\hat{O}B = 180°$. Portanto, $A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180°$ e, da Definição 3.3.15, conclui-se que $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são suplementares.

Definição 3.3.17. *Dois ângulos* $\angle AOB$ *e* $\angle COD$ *(de mesmo vértice* O*) são chamados* ***opostos pelo vértice*** *(abrevia-se, OPV) se seus lados forem semirretas opostas.*

Figura 21 – Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 18).

Proposição 3.3.18. *Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.*

Demonstração. Observando-se a Figura 21 tem-se da Definição 3.3.17 e da Proposição 3.3.16 que $\alpha + \gamma = 180°$ e $\beta + \gamma = 180°$. Portanto:

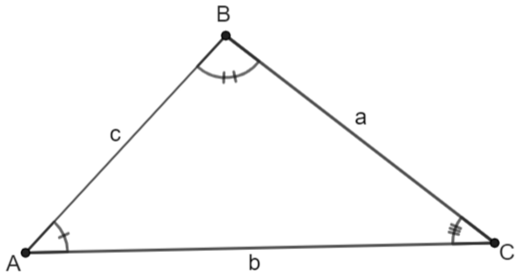
$$\alpha = 180° - \gamma = \beta$$

3.4 Triângulos

Definição 3.4.1. *Três pontos não colineares formam um* ***triângulo****. Nesse caso, a* ***região triangular*** *correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo* A*,* B *e* C *tais pontos, diremos que* A*,* B *e* C *são os* ***vértices*** *do triângulo* ABC*, denotado por* $\triangle ABC$*, conforme a Figura 22.*

Além dos três vértices, um triângulos (veja Figura 22) possui três **lados** (os segmentos de comprimento $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, denotados por $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$) e possui três ângulos: $B\hat{A}C = \hat{A}$, $A\hat{B}C = \hat{B}$ e $A\hat{C}B = \hat{C}$ que são seus **ângulos internos**.

Figura 22 – Triângulo ABC de vértices A, B e C.



Fonte: O próprio autor.

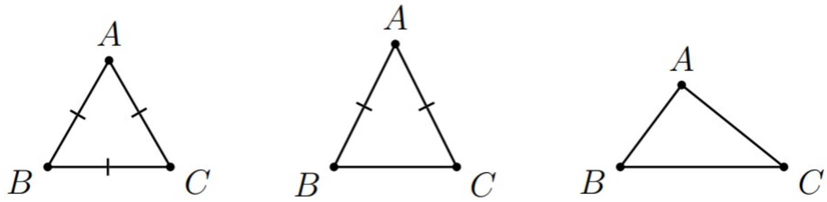
Um triângulo pode ser classificado quanto ao comprimento dos lados e quanto à medida dos ângulos. Quanto ao comprimento dos lados, é possível perceber que as únicas possibilidades para os comprimentos é que haja pelo menos dois lados iguais ou que os três lados sejam diferentes dois a dois. Por outro lado, já foi mencionado (veja Definição 3.3.13) como classificar os ângulos, de modo análogo os triângulos serão classificados quanto à medida dos ângulos (veja Definição 3.6.5).

Definição 3.4.2. *Um triângulo*$\triangle ABC$ *é denominado:*

1. *Equilátero, se* $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.
2. *Isósceles, se ao menos dois dentre* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ *forem iguais.*
3. *Escaleno, se* $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$.

Em um triângulo $\triangle ABC$ isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$ por exemplo, o lado BC é chamado de **base**. Da Definição 3.4.2 pode-se perceber que todo triângulo equilátero é isósceles. Entretanto, existe triângulo isósceles que não é equilátero (pode-se ter $\overline{AB} = \overline{AC} \neq \overline{BC}$ conforme o triângulo do centro da Figura 23). Para triângulos equiláteros pode-se tomar qualquer um dos lados como base.

Figura 23 – Triângulos equilátero (à esquerda), isósceles (centro), escaleno (à direita).

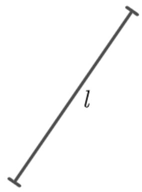


Fonte: (NETO, 2012, pg. 22).

Exemplo 3.4.3. *Construa com régua e compasso um triângulo equilátero* $\triangle ABC$ *de lados iguais a* l.

Solução.

Figura 24 – Segmento de comprimento l

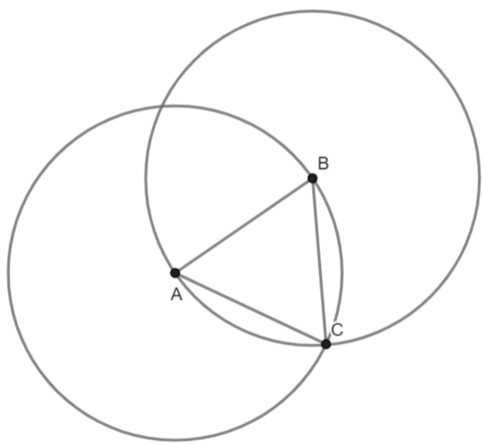


Fonte: O próprio autor.

Descrição dos passos:

1. Marque um ponto arbitrário A no plano.
2. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em A e construa uma circunferência de centro A e raio l.
3. Marque um ponto arbitrário B sobre tal circunferência.
4. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em B e construa uma circunferência de centro B e raio l.
5. Denote por C uma qualquer das interseções das duas cicunferências traçadas.
6. Os pontos A, B e C determinam o triângulo $\triangle ABC$ equilátero e de lado l, conforme Figura 25.

Figura 25 – Triângulo equilátero de lado l.



Fonte: O próprio autor.

Justificativa. Basta notar que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são raios da circunferência de centro e A e $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ são raios da circunferência de centro em B. Como ambas as circunferênias, por construção, têm raio igual l, tem-se que $l = \overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$. Portanto, pela Definição 3.4.2 o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

3.5 Construção de Triângulos Congruentes e Aplicações de Congruência

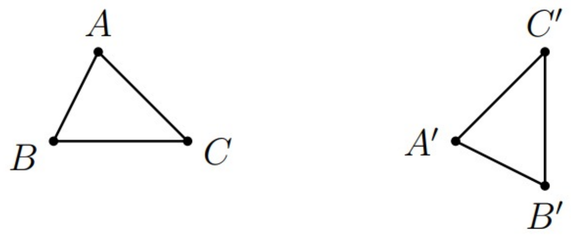
Na Seção 3.4, para construção do triângulo do Exemplo 3.4.3, pode-se perceber que não houve preocupação em escolher a posição do ponto A (passo 1) nem de qual seria o ponto C dentre as duas opções. De modo intuitivo, é possível perceber que conservando-se apenas a propriedade de ser equilátero e ter lado com medida l e, independentemente de onde se marque o ponto A ou qual a escolha do ponto C, o triângulo construído sempre será o mesmo.

É possível que se tenha triângulos iguais, mudando-se apenas a escolha dos pontos, mas conservando todas as propriedades. Tal observação permite definir quando dois triângulos serão iguais. Essa igualdade receberá o nome de **congruência de triângulo**.

Definição 3.5.1. *Dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.*

Da Definição 3.5.1, tem-se que se os triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes (denota-se $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$), então é possível uma correspondência entre seus vertíces de modo que a medida dos ângulos internos de cada um dos vértices correspondentes sejam iguais e que o comprimento dos lados opostos a esses ângulos também sejam. Veja o exemplo da Figura 26.

Figura 26 – Exemplo de triângulos congruentes.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 31).

Na Figura 26, existe uma correspondência entre os vértices dos triângulos de modo que:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longleftrightarrow \begin{cases} A \longleftrightarrow A' \\ B \longleftrightarrow B' \\ C \longleftrightarrow C' \end{cases}$$

Desta forma tem-se:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}; & \widehat{B} = \widehat{B'}; & \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}; & \overline{AC} = \overline{A'C'}; & \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}$$

É intuitivo perceber que se o triângulo $\triangle ABC$ for congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$ então o triângulo $\triangle A'B'C'$ é congruente ao triângulo $\triangle ABC$. Além disso, se um triângulo $\triangle DEF$ for congruente ao triângulo $\triangle ABC$, então também será congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$. Desta forma, será possível definir algumas propriedades de congruência.

Definição 3.5.2. *A congruência de triângulos goza das seguintes propriedades:*

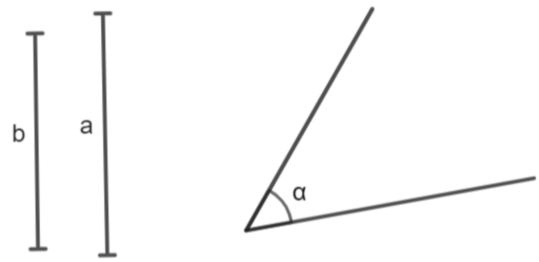
1. ***Simetria:*** *dizer que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF é o mesmo que dizer que DEF é congruente a ABC.*

2. ***Transitividade:*** *se ABC for congruente a DEF e DEF for congruente a GHI, então ABC será congruente a GHI.*

Exemplo 3.5.3. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{C} = \alpha$.*

Solução.

Figura 27 – Segmentos de medidas a e b e ângulo de medida α.



Fonte: O próprio autor.

Descrição do passos:

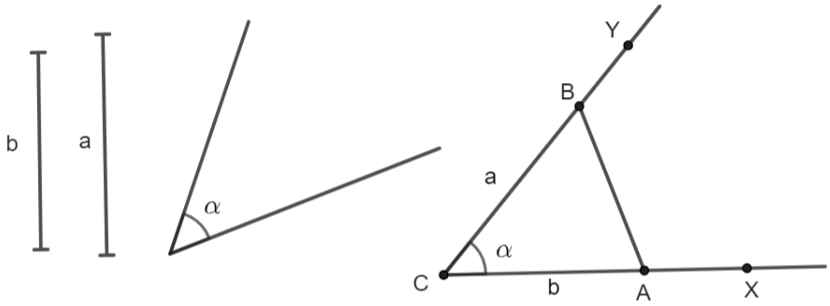
1. Marque um ponto C no plano e, em seguida, trace uma semirreta $\overrightarrow{CX}$ de origem C.

2. Transporte o ângulo dado para um ângulo $X\widehat{C}Y = \alpha$, de vértice C, determinando a semirreta $\overrightarrow{CY}$ de origem C.

3. Sobre as semirretas $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$ marque, respectivamente, os pontos B e A tais que $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

4. Os pontos A, B e C determinam $\triangle ABC$, conforme a Figura 28.

Figura 28 – Triângulo com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{C} = \alpha$



Fonte: Próprio Autor.

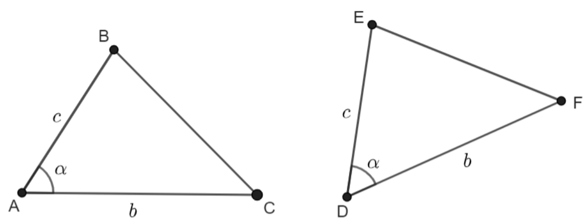
Do Exemplo 3.5.3 percebe-se, assim como no Exemplo 3.4.3, que a escolha do ponto C ou da semirreta $\overrightarrow{CX}$ não interfere de modo substancial na construção do triângulo $\triangle ABC$, ou seja, qualquer outro triângulo construído que satisfaça as propriedades que o exemplo pedia seria congruente ao triângulo construído.

A partir dos Exemplos 3.4.3 e 3.5.3, é possível perceber que diferentes construções podem levar a triângulos congruentes, mas é preciso estabelecer regras para definir quando um triângulo é congruente a outro. No primeiro momento será apresentado, por meio de postulados, os três principais casos de congruência de triângulos. Deve-se atentar ao fato de que os dois últimos casos de congruência, apresentados como postulados, poderiam ser enunciados como teoremas e provados a partir do primeiro caso, entretanto, não haverá perdas na apresentação que o presente trabalho faz e para consultar as demonstrações sugere-se a leitura de (REZENDE; QUEIROZ, 2008).

A partir do Exemplo 3.5.3, será defindo o primeiro caso de congruência, denomindado de **LAL** (lado, ângulo, lado).

Postulado 3.5.4. ***(Caso LAL).*** *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 29 – Caso LAL de congruência.

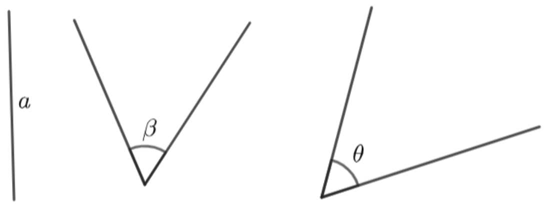


Fonte: O próprio autor.

Exemplo 3.5.5. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos* $\overline{BC} = a$, $\widehat{B} = \beta$ *e* $\widehat{C} = \theta$.

Solução.

Figura 30 – Segmento de medida a e ângulos de medida β e θ.

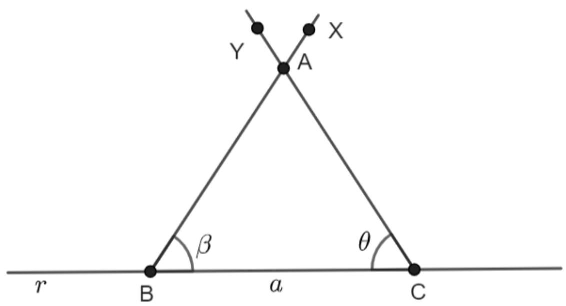


Fonte: O próprio autor.

Descrição dos passos:

1. Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque um ponto B qualquer e em seguida com a abertura do compasso igual a a marque o ponto C, de modo que $\overline{BC} = a$.
2. Construa uma semirreta $\overrightarrow{BX}$ tal que $C\widehat{B}X = \beta$.
3. No semiplano determinado por r e X construa, a partir do ponto C, a semirreta $\overrightarrow{CY}$ de modo que $B\widehat{C}Y = \theta$.
4. Marque o ponto A como interseção das semirretas $\overrightarrow{BX}$ e $\overrightarrow{CY}$.
5. Os pontos A, B e C determinam o triângulo ABC que se pede (veja a Figura 31).

Figura 31 – Triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{BC} = a$, $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \theta$.

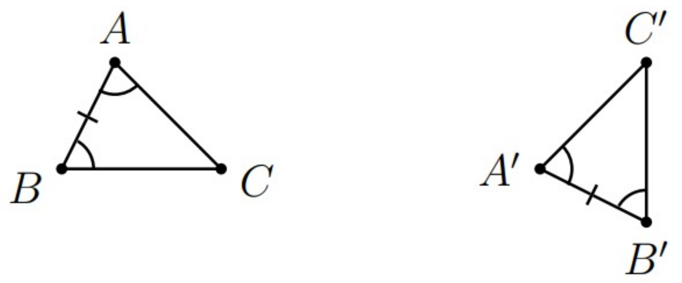


Fonte: O próprio autor.

Na construção do Exemplo 3.5.5, percebe-se que a escolha do ponto B ou do semiplano para a construção da semirreta $\overrightarrow{BX}$ não interfere nos passos para a construção do triângulo ABC. Pode-se observar que, após a escolha do semiplano, o ponto A fica pré-determinado pela construção dos ângulos de medida θ e β e a sequência dos passos não mudaria mantendo-se a mesma medida dos ângulos. Essa observação permite dizer que qualquer outro triângulo construído, conservando-se as propriedades que o problema pedia, seria congruente ao triângulo $\triangle ABC$ do exemplo. Sendo assim, pode-se definir outro critério de congruência conhecendo-se a medida de um lado e de dois ângulos, conforme o Exemplo 3.5.5.

Postulado 3.5.6. ***(Caso ALA).*** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 32 – Caso ALA de congruência de triângulos.

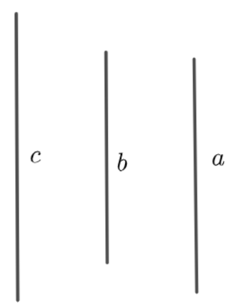


Fonte: (NETO, 2012, pg. 36).

Exemplo 3.5.7. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos* $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ *e* $\overline{BC} = a$.

Solução.

Figura 33 – Segmentos com medidas a, b e c.



Fonte: O próprio autor.

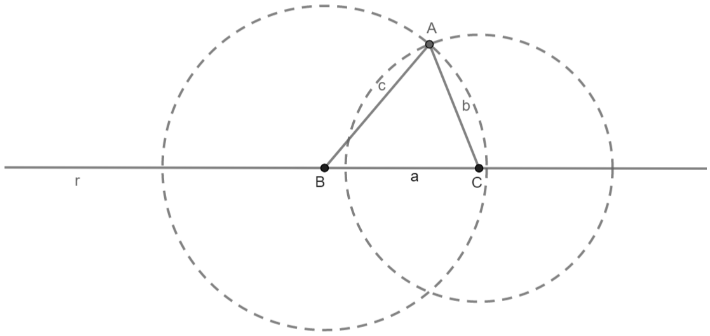
Descrição dos passos:

1. Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$.

2. Trace as circunferências de centro B e raio c e de centro C e raio b.

3. Marque o ponto A como um dos pontos de interseção das circunferências traçadas no item anterior (ver Figura 34).

Figura 34 – Triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$.



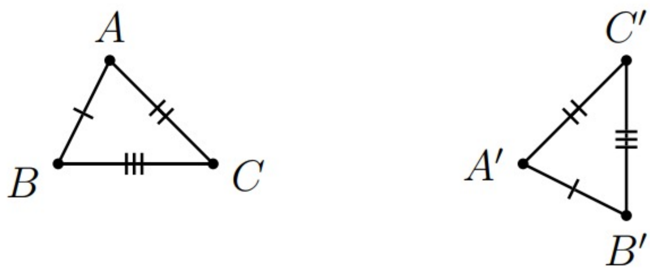
Fonte: O próprio autor.

Pode-se perceber que nem sempre haverá intersecção das duas circunferências descritas no item 2 do Exemplo 3.5.7. A intrersecção vai depender dos comprimentos dos segmentos. No entanto, neste momento, a preoucupação deve ser apenas com os casos em que a construção seja possível. Mais adiante será apresentado uma forma de verificar se segmetos de medidas pré-determinas podem formar um triângulo.

No Exemplo 3.5.7 é possível perceber que a escolha do ponto B, bem como de um dos dois pontos de intersecção das circunferências não faria diferença para se resolver o que o problema pedia. Com isso, é possível perceber que qualquer outro triângulo construído que conserva as propriedades que o exemplo pedia, resultaria em um triângulo congruente ao triângulo construído. Desta forma, pode-se enunciar o terceiro caso de congruência de triângulos baseado apenas no comprimento dos lados.

Postulado 3.5.8. ***(Caso LLL).*** *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 35 – Caso LLL de congruência de triângulos.



Fonte: (NETO, 2012, pg. 37).

Com os três casos de congruêcia apresentados será possível justificar contruções e resultados de grande relevância na Geometria Plana. Antes de enunciar, construir e justificar novos conceitos, será apresentado uma justificativa para a construção do transporte de um ângulo conforme desctrito no Exemplo 3.3.9.

Justificativa. Da Figura 16, tem-se que $OX \equiv OY$, pois são raios da circuferência de cento O e $O'X' \equiv O'Y'$, pois são raios da circunferência de centro O'. Além disso, por construção, as cicunferência de centros O e O' têm mesmo raio, logo $OX \equiv OY \equiv O'X' \equiv O'Y'$. Por outro lado, tem-se $XY \equiv X'Y$, pois $X'Y'$ é raio da circunferência de centro Y' que, por construção, mede $\overline{XY}$. Daí, tem-se, pelo caso LLL de congruência de triângulos, que $\triangle XOY \equiv \triangle X'O'Y'$, logo $X'\widehat{O'}Y' = \alpha$.

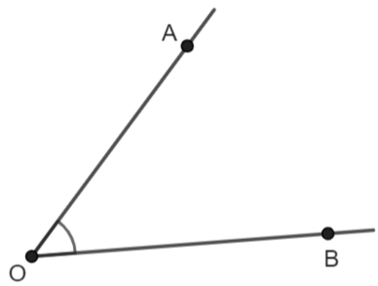
Definição 3.5.9. *Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, pode-se dizer ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\angle AOB$. De modo que,*

$$\overrightarrow{OC} \textit{ bissecta } \angle AOB \iff A\widehat{O}C = B\widehat{O}C.$$

Exemplo 3.5.10. *Construa com régua e compasso a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ dado abaixo.*

Solução.

Figura 36 – Ângulo $A\widehat{O}B$.



Fonte: O próprio autor.

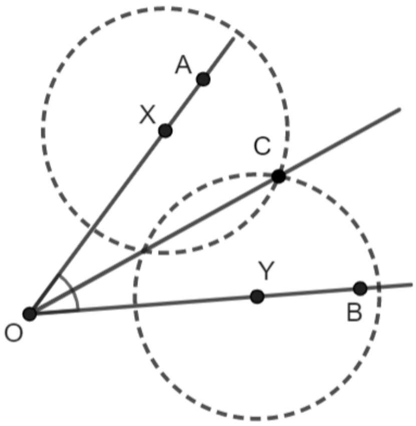
Descrição dos passos:

1. Com compasso centrado em O e com abertura igual s, marque o ponto X em $\overrightarrow{OA}$ e o ponto Y em $\overrightarrow{OB}$, de modo que $\overline{OX} = \overline{OY} = s$.

2. Fixe uma abertura $r > \frac{1}{2}\overline{XY}$ no compasso e trace duas circunferências de raio r e centros X e Y.

3. Marque um dos pontos de intersecção das duas circunferências descritas no passo anterior e denote-o por C. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

Figura 37 – Bissetriz de $\angle AOB$.



Fonte: O próprio autor.

Justificativa. Nos triângulos COX e COY, tem-se, por construção, que $\overline{OX} = \overline{OY} = s$ e $\overline{XC} = \overline{YC} = r$. Além disso, $\overline{OC}$ é comum aos dois triângulos, logo segue do caso LLL, de congruência de triângulos, que $\triangle COX \equiv \triangle COY$ e, consequentemente, $X\hat{O}C = Y\hat{O}C$, ou, ainda, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$. Da Definição 3.5.9 segue que $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $\angle AOB$.

Teorema 3.5.11. *Todo ângulo tem exatamente uma bissetriz.*

Demonstração. Da construção e justificativa do Exemplo 3.5.10 fica provado que todo ângulo tem uma bissetriz. Será provado a unicidade da bissetriz. De fato, suponha que exista um ponto C', tal que, $\overrightarrow{OC'}$ seja bissetriz de $\angle AOB$, ou seja, $A\hat{O}C' = B\hat{O}C'$. Logo, pelo Postulado 3.3.5 tem-se que $\overrightarrow{OC'}$ coicide com $\overrightarrow{OC}$. Portanto a bissetriz é única.

Definição 3.5.12. *Uma* ***bissetriz de um triângulo*** *é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto.*

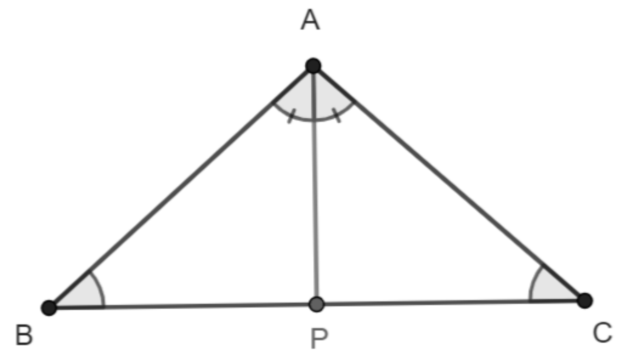
No Teorema 3.5.11, tem-se que todo ângulo tem uma bissetriz. Como todo triângulo tem três ângulos, então cada um desses ângulos terá uma bissetriz, ou seja, um triângulo possui três bissetrizes.

Teorema 3.5.13. *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ isósceles de base BC, será provado que $\widehat{B} = \widehat{C}$. De fato, traçando-se a bissetriz AP de $\widehat{A}$, conforme a Figura 38, tem-se $B\widehat{A}P = C\widehat{A}P$. Como, por hipótese, $\triangle ABC$ é isósceles, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$, além disso, AP é comum aos triângulos ABP e ACP, então, pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ e, por consequência, $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Corolário 3.5.14. *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.*

Figura 38 – Triângulo isósceles de base BC.



Fonte: O próprio autor.

Para demonstrar o Corolário 3.5.14, basta observar que cada um dos lados pode ser tomado como base.

Exemplo 3.5.15. *Dado um segmento AB, construa com régua e compasso o seu ponto médio.*

Solução.

Figura 39 – Segmento AB.

Fonte: O próprio autor.

Descrição dos passos:

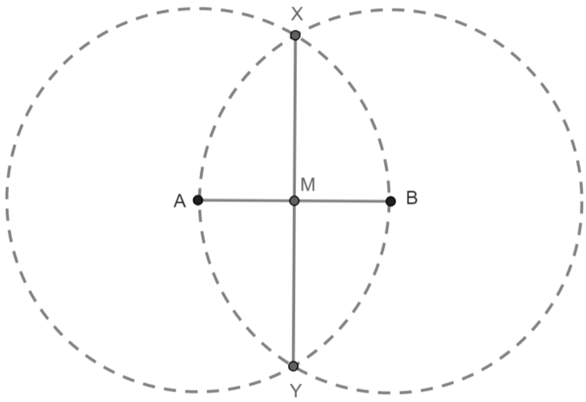
1. Fixe uma abertura $r = \overline{AB}$ no compasso e trace duas circunferências de raio r e centros A e B.

2. Marque os pontos X e Y de intersecção entre as duas circunferências.

3. Trace o segmento XY e marque o ponto M de intersecção de XY com o segmento AB conforme a Figura 40. O ponto M é o ponto médio do segmento AB.

Justificativa. Pela Definição 3.1.13, é preciso provar que $\overline{AM} = \overline{BM}$. De fato, por construção, tem-se $\overline{AX} = \overline{AY} = r = \overline{BX} = \overline{BY}$, além disso, $\overline{XY}$ é comum aos triângulos $\triangle XAY$ e $\triangle XBY$, logo, pelo caso LLL de congruência de triângulos, conclui-se que $\triangle XAY \equiv \triangle XBY$ e, por consequência, $A\widehat{X}Y = B\widehat{X}Y$, ou ainda, $A\widehat{X}M = B\widehat{X}M$. Por outro lado, como $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $\overline{XM}$ é comum aos triângulos $\triangle AXM$ e $\triangle BXM$, tem-se, pelo caso LAL de congruência de triângulos, que $\triangle AXM \equiv \triangle BXM$. Portanto $\overline{AM} = \overline{BM}$.

Figura 40 – Ponto médio do segmento AB.

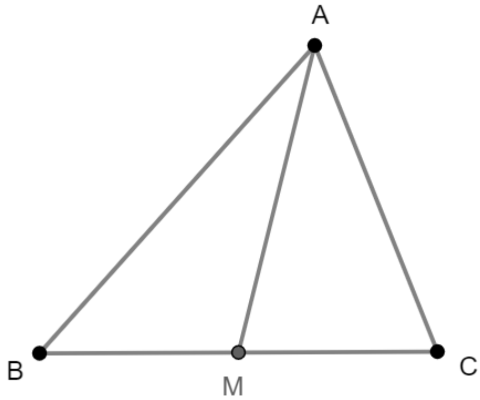


Fonte: O próprio autor.

Definição 3.5.16. *Uma **mediana** de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.*

Da Definição 3.5.16, pode-se perceber que um triângulo tem três medianas. Na Figura 41, tem-se a representação da mediana AM relativa à BC do triângulo $\triangle ABC$. De modo análogo pode-se representar as demais medianas do triângulo.

Figura 41 – Mediana AM relativa à BC do triângulo $\triangle ABC$.



Fonte: O próprio autor.

Proposição 3.5.17. *Dado um triângulo isósceles $\triangle ABC$ com base BC, a mediana relativa a base desse triângulo coincide com a bissetriz do triângulo correspondente ao ângulo $\widehat{A}$.*

Demonstração. De fato, suponha que AP seja a mediana relativa a BC, com isso, $\overline{BP} = \overline{CP}$. Além disso, AP é comum aos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$. Logo, $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ (pelo caso LLL de congruência de triângulos) e, por consequência, $B\widehat{A}P = C\widehat{A}P$, donde conclui-se que AP é bissetriz. Por outro lado, suponhamos que AP seja bissetriz, daí tem-se $B\widehat{A}P = C\widehat{A}P$ e, além disso, AP é comum aos triângulos ABP e ACP e, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$. Com isso, $\overline{BP} = \overline{CP}$, donde conclui-se que AP é mediana relativa ao lado BC.

Definição 3.5.18. *Dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r é perpendicular a s, que s é perpendicular a r ou, ainda, que r e s são **perpendiculares**, quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de $90°$ nesse ponto. Denota-se por $r \perp s$ para dizer que r e s são perpendiculares.*

Teorema 3.5.19. *Dados, no plano, um ponto P e uma reta r, existe e é única a reta s perpendicular a reta r e que contém P.*

No Teorema 3.5.19 existem duas possibilidades para o ponto P: o ponto pentence a reta r ($P \in r$) ou não pertence ($P \notin r$). Se $P \in r$, então P é o ponto de intersecção entre r e s. A seguir, no Exemplo 3.5.20, será mostrado como construir uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto pré-definido.

Exemplo 3.5.20. *Dados, no plano, uma reta r e um ponto P, construa com régua e compasso uma reta s tal que $r \perp s$ e $P \in s$.*

Solução. Como P pode ou não pertencer a reta r, a construção será separada em duas:

a) Se $P \in r$.

Figura 42 – Reta r e ponto P, com $P \in r$.

Fonte: O próprio autor.

Descrição dos passos:

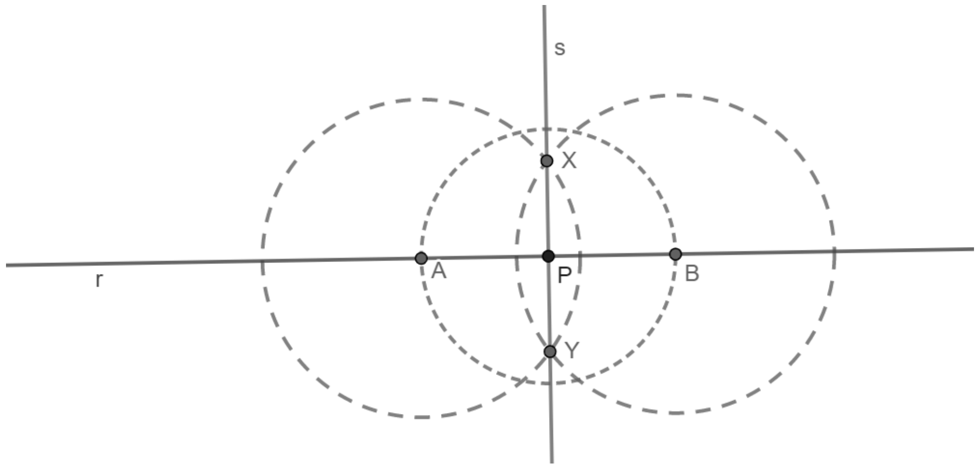
1. Com o compasso centrado em P, construa uma circunferência de raio c qualquer e marque os pontos A e B de intersecção entre r e a circunferência.

2. Trace, agora, circunferências de raio d, com $d > c$, e centradas respectivamente em A e B.

3. Marque e denote por X um dos intersecção entre as circunferências centradas em A e B.Temos que $r \perp \overleftrightarrow{XP}$. Fazendo $s = \overleftrightarrow{XP}$, tem-se $r \perp s$, conforme a Figura 43.

Justificativa. De fato, por construção $\overline{AP} = \overline{BP}$ e $\overline{AX} = \overline{BX}$. Além disso, $\overline{PX}$ é comum aos triângulos APX e BPX. Assim, segue do caso LLL que $\triangle AXP \equiv \triangle BXP$ e, por consequência, $A\widehat{P}X = B\widehat{P}X$. Mas pelos Postulados 3.3.10 e 3.3.12, tem-se $A\widehat{P}X + B\widehat{P}X = 180°$. Portanto, $A\widehat{P}X = B\widehat{P}X = 90°$ ou $s \perp r$.

Figura 43 – Reta $r \perp s$ com $P \in r$.



Fonte: O próprio autor.

b) Se $P \notin r$.

Figura 44 – Reta r e ponto P, com $P \notin r$.

Fonte: O próprio autor.

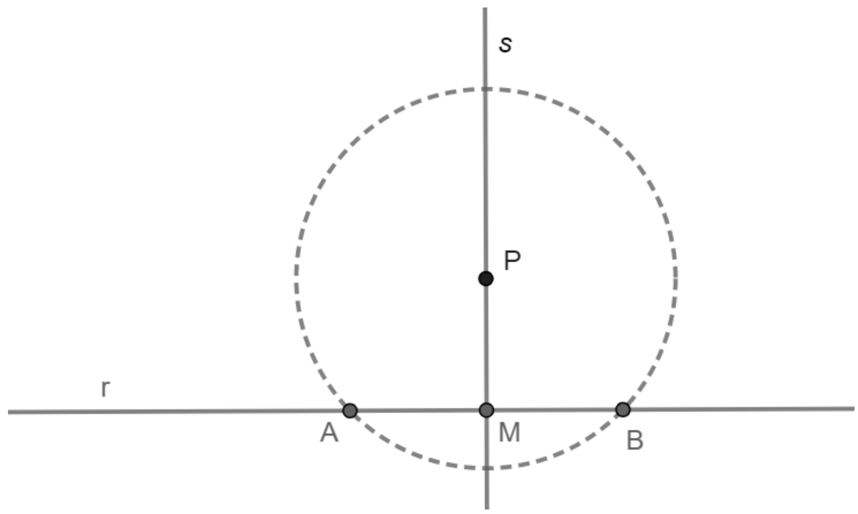
Descrição dos passos:

1. Com o compasso centrado em P, construa uma circunferência que intersecte a reta r em dois pontos distintos A e B.

2. Construa, conforme o Exemplo 3.5.15, o ponto médio M de AB. Tem-se $\overleftrightarrow{PM} \perp r$, ou ainda, pondo $s = \overleftrightarrow{PM}$, $r \perp s$.

Justificativa. De fato, como M é ponto médio de AB, tem-se $\overline{AM} = \overline{BM}$. Além disso, por construção $\overline{PA} = \overline{PB}$ e PM é comum aos triângulos APM e BPM. Logo, pelo caso de congruência de triângulos LLL, tem-se $\triangle APM \equiv BPM$ e, por consequência, $A\widehat{M}P = B\widehat{M}P$. Mas pelos Postulados 3.3.10 e 3.3.12 tem-se $A\widehat{M}P + B\widehat{M}P = 180°$. Portanto, $A\widehat{M}P = B\widehat{M}P = 90°$ ou $r \perp s$.

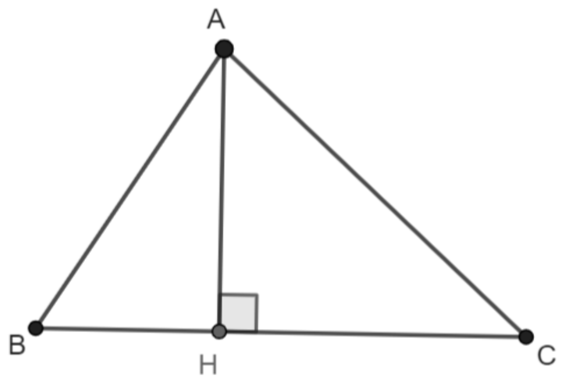
Figura 45 – Reta $r \perp s$ com $P \notin r$.



Fonte: O próprio autor.

Definição 3.5.21. *Uma* ***altura de um triângulo*** *é o segmento que une um vértice desse triângulo à reta que contém o lado oposto formando um ângulo de* 90°.

Figura 46 – Altura AH relativa ao lado BC do triângulo ABC.



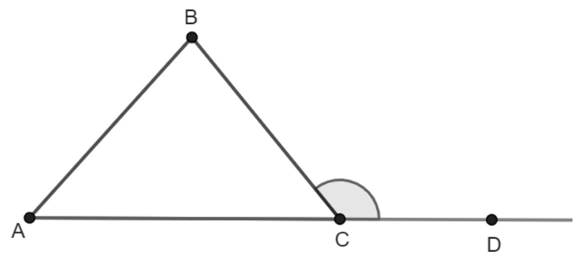
Fonte: O próprio autor.

De cada um dos vértices será possível traçar uma altura relativa ao vértice (ou relativa ao lado oposto), de modo que todo triângulo possui 3 alturas.

3.6 Ângulo Externo de um Triângulo e Desigualdade Triangular

Definição 3.6.1. *Cada ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno de um triângulo é denominado **ângulo externo** deste triângulo.*

Figura 47 – Ângulo externo.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 47, $\angle BCD$ é um ângulo externo do triângulo ABC e D é um ponto que pertence a semirreta $\overrightarrow{AC}$ (com C entre A e D). Do mesmo modo, pode-se encontrar um ponto E na semirreta $\overrightarrow{BC}$, de modo que $\angle ACE$ seja um ângulo externo ao triângulo ABC. Sendo assim, pode-se notar que cada vértice de um triângulo possui dois ângulos externos e, como consequência, todo triângulo possui seis ângulos externos.

Lema 3.6.2. *Se dois ângulos externos de um triângulo são adjacentes a um mesmo ângulo interno, então são iguais.*

Demonstração. Basta perceber, da Definição 3.6.1, que ambos os ângulos são suplementos de um mesmo ângulo. Alternativamente, pode-se se notar que ambos os ângulos são OPV.

Teorema 3.6.3. *Em um triângulo, um ângulo externo é maior do que os ângulos internos não adjacentes a ele.*

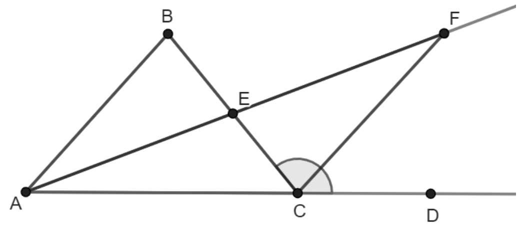
Demonstração. Dado um triângulo ABC e $\angle BCD$ um ângulo externo, conforme Figura 47, será provado que $B\widehat{C}D > A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}D > B\widehat{A}C$.

De fato, seja E o ponto médio de BC e, na semirreta oposta a $\overrightarrow{EA}$, marque o ponto F, tal que $\overline{AE} = \overline{EF}$, conforme a Figura 48. Daí, $\overline{BE} = \overline{EC}$, $\overline{AE} = \overline{EF}$ (por construção) e $A\widehat{E}B = F\widehat{E}C$ (ângulos OPV). Consequentemente, pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\triangle ABE \equiv \triangle FCE$ e, portanto, $A\widehat{B}C = B\widehat{C}F$. Logo,

$$B\widehat{C}D = B\widehat{C}F + D\widehat{C}F = A\widehat{B}C + D\widehat{C}F > A\widehat{B}C.$$

Para provar que $B\widehat{C}D > B\widehat{A}C$, deve-se proceder de modo análogo ao passos anteriores, mas com o ponto médio de AC e, por fim, utilizar o Lema 3.6.2.

Figura 48 – Construção para a prova do Teorema 3.6.3.



Fonte: O próprio autor.

Corolário 3.6.4. *Se um triângulo ABC possui um ângulo reto, então os seus outros dois ângulos são agudos.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\triangle ABC$ possua um ângulo reto em A, conforme a Figura 49. Marcando o ponto D na semirreta $\overrightarrow{CA}$, com o ponto A entre C e D, tem-se que o ângulo $\angle BAD$ é externo do triângulo ABC. Portanto, pelo Teorema 3.6.3, conclui-se que:

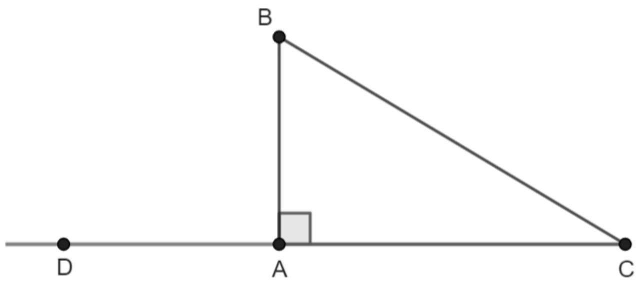
$$A\widehat{B}C < B\widehat{A}D \text{ e } A\widehat{C}B < B\widehat{A}D.$$

Por outro lado, como $B\widehat{A}C = 90°$ e $B\widehat{A}D + B\widehat{A}C = 180°$, tem-se $B\widehat{A}D = 90°$. Logo,

$$A\widehat{B}C < 90° \text{ e } A\widehat{C}B < 90°.$$

E, pela Definição 3.3.13, $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são agudos.

Figura 49 – Triângulo ABC com ângulo reto em A.



Fonte: O próprio autor.

O Corolário 3.6.4 permite constatar que um triângulo possui no máximo um ângulo reto. Além disso, é possível obsevar que se um ângulo de um triângulo for maior que 90° (for obtuso), então seus dois outros ângulos serão agudos. Portanto, um triângulo possui no máximo um ângulo obtuso.

Definição 3.6.5. *Em relação à medida de seus ângulos, um triângulo pode ser classificado como:*

1. ***Triângulo acutângulo***, *se possui os três ângulos agudos.*

2. ***Triângulo retângulo***, *se possui um ângulo reto. Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado* ***hipotenusa*** *e os outros dois são chamados* ***catetos***.

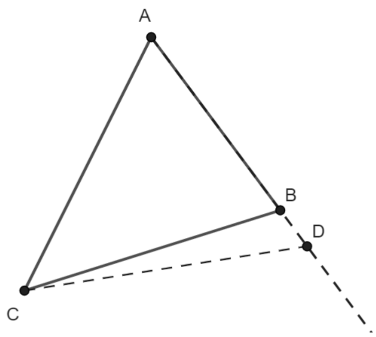
3. ***Triângulo obtusângulo***, *se possui um ângulo obtuso.*

Teorema 3.6.6. *Em um triângulo ABC, $\overline{AC} > \overline{AB}$ se, e somente se, $A\widehat{B}C > A\widehat{C}B$.*

Demosntração. Primeiramente, será provado que $\overline{AC} > \overline{AB}$ implica em $A\widehat{B}C > A\widehat{C}B$. De fato, como $\overline{AC} > \overline{AB}$, existe um ponto D em $\overrightarrow{AB}$, com B entre A e D, tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$, conforme a Figura 50. Com isso, o triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$ e, pelo Teorema 3.5.13, $A\widehat{C}D = A\widehat{D}C$. Por outro lado, aplicando o Teorema 3.6.3 em $\triangle CDB$, tem-se $A\widehat{D}C < A\widehat{B}C$. Mas, $A\widehat{C}B < A\widehat{C}D = A\widehat{D}C$ (B é interno a $\angle ACD$), de onde segue que:

$$A\widehat{B}C > A\widehat{C}B.$$

Figura 50 – Triângulo ABC com $\overline{AC} > \overline{AB}$.



Fonte: O próprio autor.

Para provar que $A\widehat{B}C > A\widehat{C}B$ implica em $\overline{AC} > \overline{AB}$, basta observar que existem três possibilidades ao comparar $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$:

1. $\overline{AC} = \overline{AB}$, neste caso $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$ e, pelo Teorema 3.5.13, $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$, o que é um absurdo, pois por hipótese $A\widehat{B}C > A\widehat{C}B$.

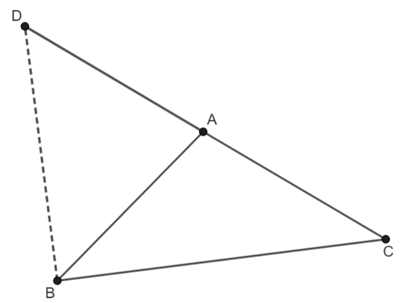
2. $\overline{AC} < \overline{AB}$, mas, neste caso, como provado anteriormente, tem-se $A\widehat{B}C < A\widehat{C}B$, e isso novamente resulta em um absurdo, pois por hipótese $A\widehat{B}C > A\widehat{C}B$.

Logo, como não se pode ter $\overline{AC} = \overline{AB}$, nem $\overline{AC} < \overline{AB}$, tem-se $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Teorema 3.6.7. *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Considere ABC um triângulo qualquer. Será provado que $\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC}$, de modo que as demais provas são completamente análogas. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, marque o ponto D de modo que A esteja entre C e D e $\overline{AD} = \overline{AB}$, conforme Figura 51. Como $\overline{AD} = \overline{AB}$, tem-se que o triângulo BAD é isósceles de base BD e, com isso, $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D < D\widehat{B}C$ ou, ainda, $C\widehat{D}B < D\widehat{B}C$. Portanto, aplicando o Teorema 3.6.6 no triângulo BCD, tem-se $\overline{CD} > \overline{BC}$. Consequentemente, como $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD}$ (o ponto A está entre os pontos C e D) e $\overline{AD} = \overline{AB}$, tem-se $\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{BC}$.

Figura 51 – Desigualdade triangular.



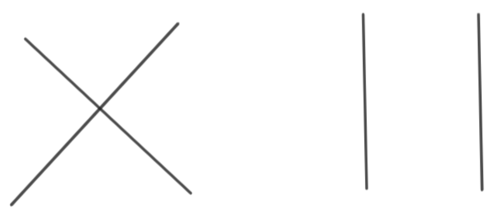
Fonte: O próprio autor.

O Teorema 3.6.7, anteriormante desmonstrado, é conhecido e citado na literatura como **desigualdade triangular**.

3.7 Construção de Retas Paralelas e Aplicações

Definição 3.7.1. *Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são chamadas **paralelas**.*

Figura 52 – Retas paralelas e retas concorrentes.

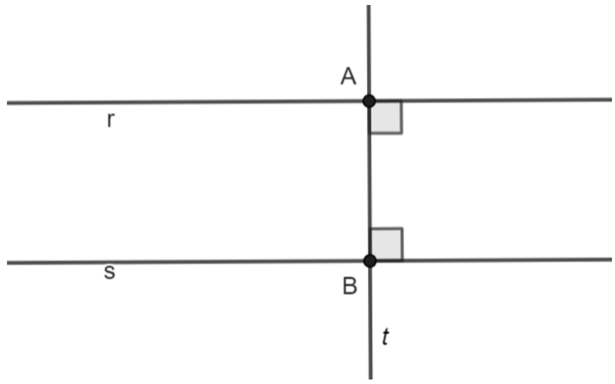


Fonte: O próprio autor.

Será utilizado a notação $\parallel$ para denotar que duas retas r e s são paralelas, ou seja, pode se escrever $r \parallel s$ para dizer que r e s são paralelas.

Teorema 3.7.2. *Duas retas r e s perpendiculares a uma mesma reta t são paralelas.*

Figura 53 – Retas r e s perpendiculares as reta t.



Fonte: O próprio autor.

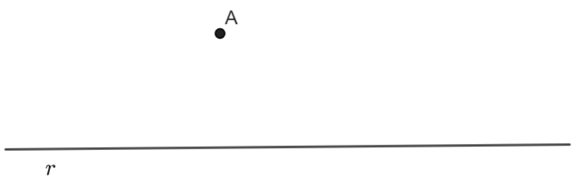
Demonstração. De fato, se r e s não fossem paralelas, então existiria um ponto C comum as duas retas. Daí, r e s formariam com t o triângulo ABC, neste caso, $B\widehat{A}C = 90° = A\widehat{B}C$, contradizendo o Corolário 3.6.4. Logo $r \parallel s$.

Corolário 3.7.3. *Por um ponto não pertencente a uma reta passa pelo menos uma reta paralela à reta dada.*

Exemplo 3.7.4. *Dada uma reta r e um ponto A, com A não pertencente a r, construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.*

Solução.

Figura 54 – Reta r e ponto A.



Fonte: O próprio autor.

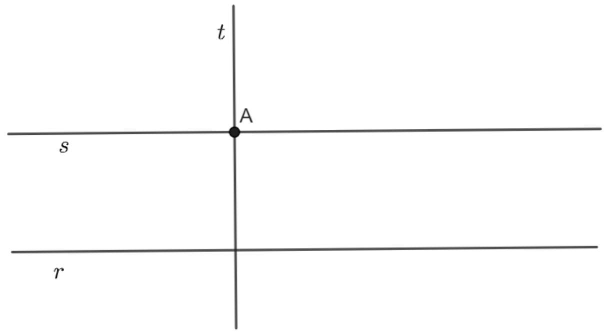
Descrição dos passos:

1. Trace a reta t perpendicular a reta r e que passa pelo ponto A (ver Exemplo 3.5.20).

2. Trace a reta s perpendicular a reta t e que passa pelo ponto A. A reta s é paralela a reta r.

Justificativa. Por construção, tem-se $r \perp t$ e $s \perp t$, logo, pelo Teorema 3.7.2, $r \parallel s$.

Figura 55 – Construção da reta s paralela a reta r e passando pelo ponto A.



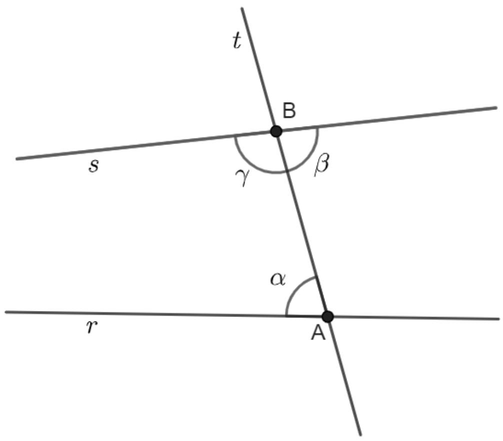
Fonte: O próprio autor.

Postulado 3.7.5. *Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.*

O Postulado 3.7.5 é extremamente importante para a Geometria Euclidiana, pois permitirá demonstrar resultados de grande relevância para a mesma. Esse postulado é conhecido como Quinto Postulado ou Postulado das Paralelas.

Definição 3.7.6. *Dadas, no plano, as retas r, s e t, com t intersectando r e s nos pontos A e B, respectivamente e formando os ângulos α, β e γ, conforme a Figura 56. Então, os ângulos α e β são chamados de **alternos internos** e, α e γ de **colaterais internos**.*

Figura 56 – Ângulos alternos internos e colaterais internos.



Fonte: O próprio autor.

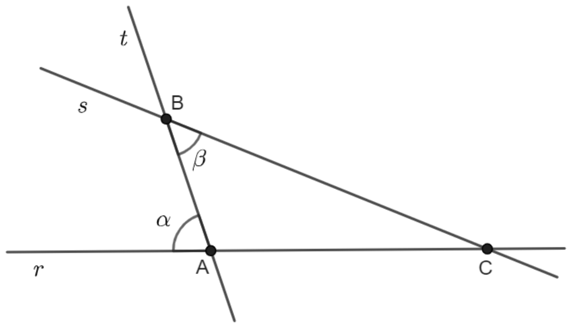
Teorema 3.7.7. *Nos termos da Definição 3.7.6, ângulos alternos internos são iguais se, e somente se, as retas r e s forem paralelas.*

Demonstração. Da Figura 56, quer se provar, em símbolos que:

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow r \parallel s.$$

Primeiro será provado que $\alpha = \beta$ implica em $r \parallel s$. De fato, suponha que, nessas condições, r e s não sejam paralelas. Daí, existe um ponto C de intersecção entre as retas r e s, conforme a Figura 57. Logo, o ângulo α é ângulo externo do triângulo ABC e, pelo Teorema 3.6.3, $\alpha > \beta$, o que é um absurdo (por hipótese $\alpha = \beta$). Portanto, $\alpha = \beta$ implica em $r \parallel s$.

Figura 57 – Ponto C de intersecção entre as retas r e s.

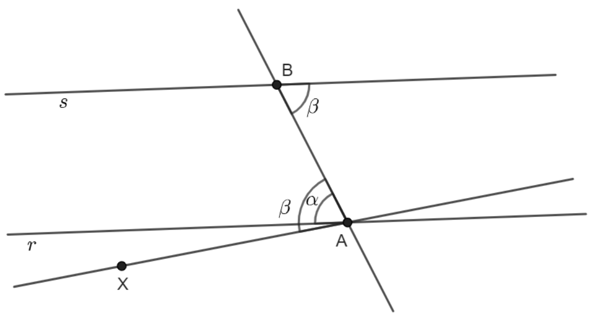


Fonte: O próprio autor.

Com a prova da primeira parte do teorema, será possível provar que se r e s são paralelas, então $\alpha = \beta$. De fato, suponha que $r \parallel s$ e seja t a reta que intersecta r e s nos pontos A e B, respectivamente, de modo que $\alpha \neq \beta$. Daí, existe um ponto $X \notin r$ e, consequentemente, uma reta $\overleftrightarrow{AX}$, tal que $X\hat{A}B = \beta$, conforme Figura 58. Portanto, como provado anteriormente, deve-se ter $\overleftrightarrow{AX} \parallel s$, o que é um absurdo, pois contradiz o Postulado 3.7.5. Logo,

$$r \parallel s \Longrightarrow \alpha = \beta.$$

Figura 58 – Construção para a prova do Teorema 3.7.7.

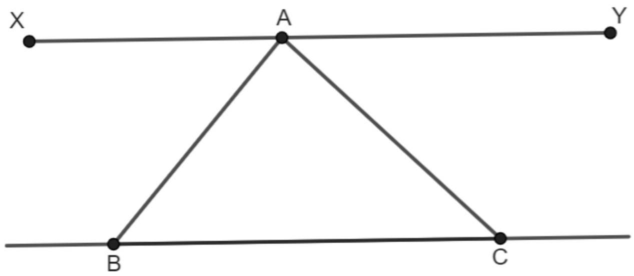


Fonte: O próprio autor.

Teorema 3.7.8. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* $180°$.

Demonstração. Em um triângulo ABC qualquer traça-se a reta $\overleftrightarrow{XY}$ paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ passando pelo vértice A, conforme a Figura 59. Pelo Teorema 3.7.7, tem-se que

Figura 59 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: O próprio autor.

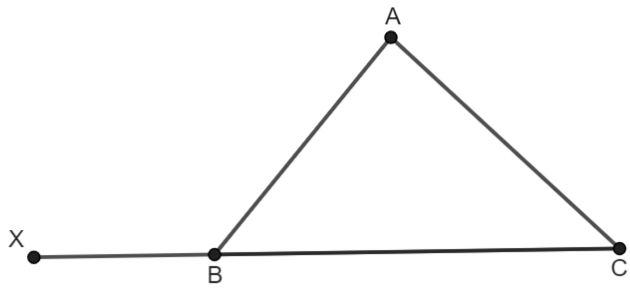
$A\widehat{B}C = B\widehat{A}X$ e $A\widehat{C}B = C\widehat{A}Y$. Portanto:

$$A\widehat{B}C + B\widehat{A}C + A\widehat{C}B = B\widehat{A}X + B\widehat{A}C + C\widehat{A}Y = 180°.$$

Corolário 3.7.9. *Em um triângulo equilátero, todos os ângulos internos são iguais a* $60°$.

Corolário 3.7.10. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 60 – Ângulo externo igual a soma dos ângulos internos não adjacentes.



Fonte: O próprio autor.

Demonstração. De fato, tem-se que $X\widehat{B}A = 180° - A\widehat{B}C$, por outro lado, pelo Teorema 3.7.8, tem-se $B\widehat{A}C + A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = 180°$, ou ainda, $B\widehat{A}C + A\widehat{C}B = 180° - A\widehat{B}C$. Daí, segue que:

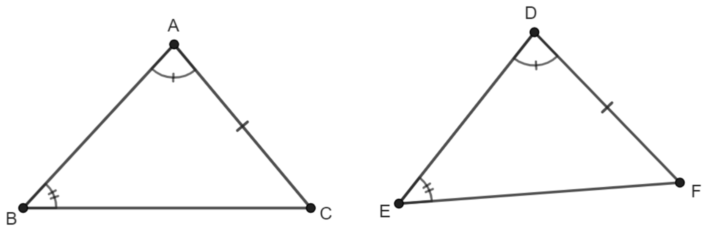
$$X\widehat{B}A = B\widehat{A}C + A\widehat{C}B.$$

Corolário 3.7.11. *Se em um triângulo ABC dois ângulos e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de um triângulo DEF e ao lado oposto ao ângulo correspondente desse triângulo, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.*

Demonstração. Como $B\widehat{A}C = E\widehat{D}F$ e $A\widehat{B}C = D\widehat{E}F$, tem-se que:

$$A\widehat{C}B = 180° - B\widehat{A}C - A\widehat{B}C = 180° - E\widehat{D}F - D\widehat{E}F = D\widehat{F}E.$$

Figura 61 – Caso LAA de congruência de triângulos.



Fonte: O próprio autor.

Logo como $\overline{AC} = \overline{DF}$, segue-se do caso ALA, de congruência de triângulos, que $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes.

4 Resolução de Problemas e Construções Geométricas

Este capítulo foi destinado à resolução de problemas que envolvam construções geométricas. As construções geométricas estão presentes na BNCC e a resolução de problemas envolvendo-as está presente em algumas habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo do Ensino Fundamental. Serão resolvidos problemas retirados de (BRASIL, 2020) e (EDUCACIONAL, 2023).

4.1 Resolução de Problemas e as Habilidades Presentes na BNCC para o Ensino Fundamental.

A BNCC destaca habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo do Ensino Fundamental. Como mencionado na Subseção 2.2.1, algumas dessas habilidades envolvem as contruções geométricas. Nesta seção, serão apresentados alguns problemas envolvendo contruções geométrica que os alunos devem conseguir resolver durante o Ensino Fundamental.

Ao longo do Capítulo 3, foram apresentadas definições, postulados, teoremas, proposições, corolários e construções que servirão como base para a resolução dos problemas que serão abordaos nesta seção.

A primeira habilidade trabalhada será a **EF07MA24**. Nesta habilidade, os alunos devem ser capazes de construir triângulos utilizando régua e compasso e reconhecer a condição de existência de um triângulo quanto à medida dos lados. Essa habilidade já foi desenvolvida neste trabalho e agora será abordada diretamente por meio de dois problemas.

Problema 4.1.1. *Construa com régua e compasso, caso exista, um triângulo com medidas de lados* $\overline{AB} = 4\ cm$*,* $\overline{BC} = 3,5\ cm$ *e* $\overline{AC} = 2,5\ cm$*.*

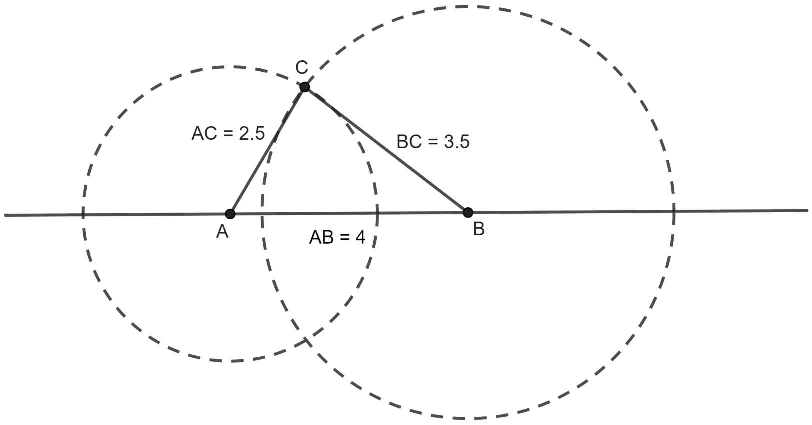
Solução. O primeiro passo para a solução do problema é verificar se existe triângulo com essas medidas de lados. Para verificar isso, deve-se utilizar o Teorema 3.6.7. O triângulo pedido existe e pode ser construído seguindo alguns passos.

Descrição dos passos:

1. Em uma reta marque o ponto A e o ponto B, de modo que $\overline{AB} = 4\ cm$.
2. Trace uma circunferência de centro em A e raio $2,5\ cm$ e uma de centro em B e raio $3,5\ cm$.

3. Marque o ponto C de intersecção entre as duas circunferências descritas no item anterior. Os pontos A, B e C determinam o triângulo que o problema pede.

Figura 62 – Solução Problema 4.1.1.

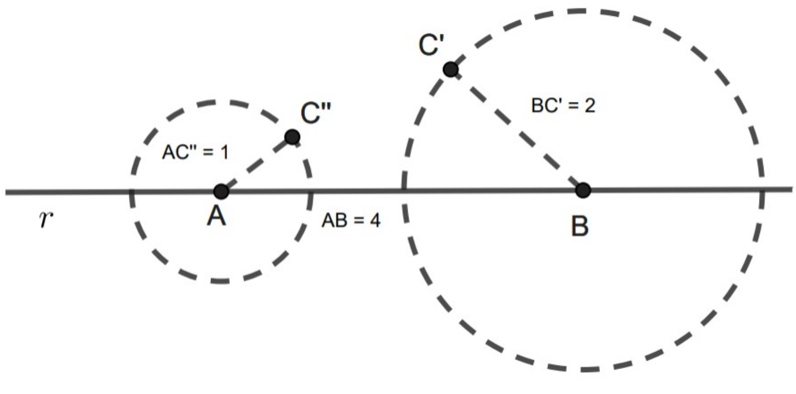


Fonte: O próprio autor.

Problema 4.1.2. *Construa com régua e compasso, caso exista, um triângulo com medidas de lados* $\overline{AB} = 4$ *cm,* $\overline{BC} = 2$ *cm e* $\overline{AC} = 1$ *cm.*

Solução. Tem-se que $\overline{AB} > \overline{BC} + \overline{AC}$, o que contradiz o Teorema 3.6.7. Portanto, não existe triângulo com as características que o problema pede. A Figura 63 ilustra que não existe intersecção entre as circunferências.

Figura 63 – Solução Problema 4.1.2.



Fonte: O próprio autor.

Outra habilidade que a BNCC cobra é a de construir os ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° (habilidade EF08MA15). Os exemplos seguintes abordarão essa habilidade.

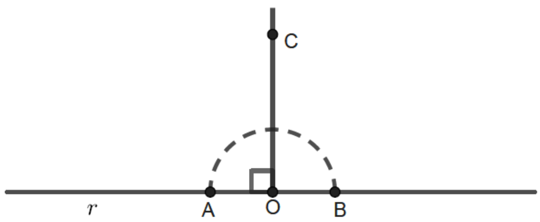
Problema 4.1.3. *Construa com régua e compasso o ângulo de* 90°.

Solução. Para a solução deste problema, é necessário que se tenha noção de como construir uma bissetriz de um ângulo, conforme Exemplo 3.5.10.

Descrição dos passos:

1. Trace uma reta r e, na mesma, marque um ponto O.
2. Com o comapasso centrado em O, trace uma semicircunferência de raio qualquer. Marque os pontos A e B de intersecção da reta r com a semicircunferência. Tem-se que $A\hat{O}B = 180°$, conforme Postulado 3.3.10.
3. Trace a bissetriz $\overrightarrow{OC}$ de $\angle AOB$. Tem-se que $A\hat{O}C = 90°$

Figura 64 – Ângulo de 90°.



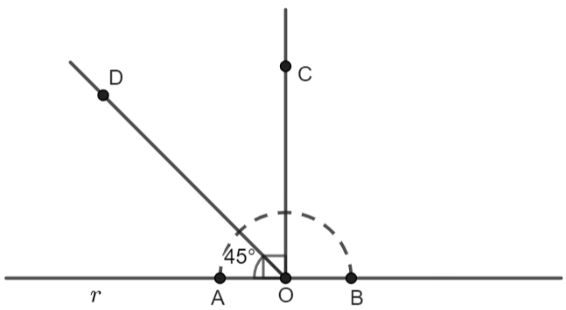
Fonte: O próprio autor.

Problema 4.1.4. *Construa com régua e compasso o ângulo de* 45°.

Solução. Descrição dos passos:

1. Construa um ângulo de 90°.
2. Trace a bissetriz do ângulo de 90°.

Figura 65 – Ângulo de 45°.



Fonte: O próprio autor.

Pode-se perceber que com construção do ângulo de 45°, o ângulo de 135° também fica determinado. Na Figura 65, tem-se que $B\widehat{O}D = 135°$ e $A\widehat{O}D = 45°$.

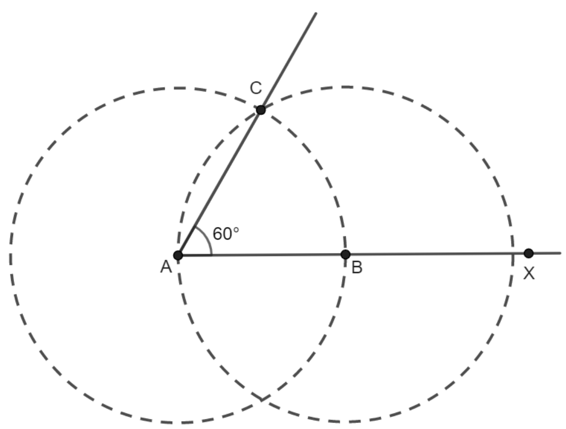
Problema 4.1.5. *Construa com régua e compasso o ângulo de* 60°.

Solução. A construção do ângulo de 60° não deve ser um problema para os alunos, pois estes já devem dominar a habilidade de construir um triângulo e, em particular, construir um triângulo equilátero, que possui os três ângulos iguais a 60° (veja também, a construção dada no Exemplo 3.4.3).

Descrição dos passos:

1. Construa uma semirreta $\overrightarrow{AX}$.
2. Com uma abertura arbitrária, trace uma circunferência com centro em A e marque o ponto B de intersecção da circunferência com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.
3. Com a mesma abertura do compasso, trace a circunferência de centro em B.
4. Marque o ponto C em uma das interseções das duas circunferências e trace a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Tem-se que $C\widehat{A}B = 60°$.

Figura 66 – Ângulo de 60°.



Fonte: O próprio autor.

Justificativa. Por construção, tem-se que $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$. Logo, o triângulo ABC é equilátero e, pelo Corolário 3.7.9, $C\widehat{A}B = 60°$.

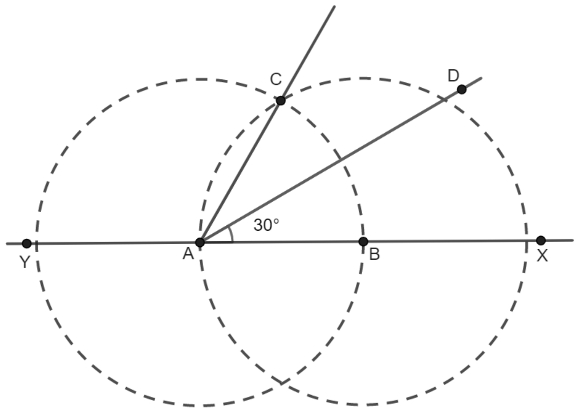
Problema 4.1.6. *Construa com régua e compasso o ângulo de* 30°.

Solução.

Descrição do passos:

1. Construa um ângulo de 60°.
2. Trace a bissetriz do ângulo de 60°.

Figura 67 – Ângulo de 30°.



Fonte: O próprio autor.

As construções dos ângulos de 60° e 30° determinam a construção dos ângulos de 120° e 150° respectivamente. De fato, sendo $\overleftrightarrow{AY}$ a semirreta oposta a semirreta $\overrightarrow{AX}$, tem-se que $C\widehat{A}Y = 120°$ e, conforme a Figura 67, $D\widehat{A}Y = 150°$.

4.2 Lugares Geométricos

Definição 4.2.1. *Uma figura recebe o nome de lugar geométrico (LG) dos pontos que possuem uma propriedade $\mathcal{P}$ quando:*

1. *Todos os seus pontos satisfazem a propriedade $\mathcal{P}$;*
2. *Somente os pontos dessa figura satisfazem a propriedade $\mathcal{P}$, isto é, se um ponto A possui a propriedade $\mathcal{P}$, então pertence à figura.*

Um LG imediato que pode-se imaginar é a circunferência. Da Definição 3.2.1 tem-se que qualquer ponto P que tiver a propriede de estar a uma distância r de um ponto O pertence à circunferência de raio r e centro em O. Por outro lado, se o ponto P pertence à cicunferência, então a sua distância até o ponto O será igual a r. Em símbolos tem-se que:

$$P \in \Gamma(O; r) \Longleftrightarrow \overline{OP} = r.$$

O aluno deve ser capaz de compreender uma circunferência como um Lugar Gemométrico. Essa é uma habilidade (EF07MA22) presente na BNCC, que pode ser desenvolvida pedindo ao aluno que resolva o Exemplo 4.2.2.

Exemplo 4.2.2. *Construa, utilizando régua e compasso, o LG de todos pontos que estão a uma distância r do ponto O.*

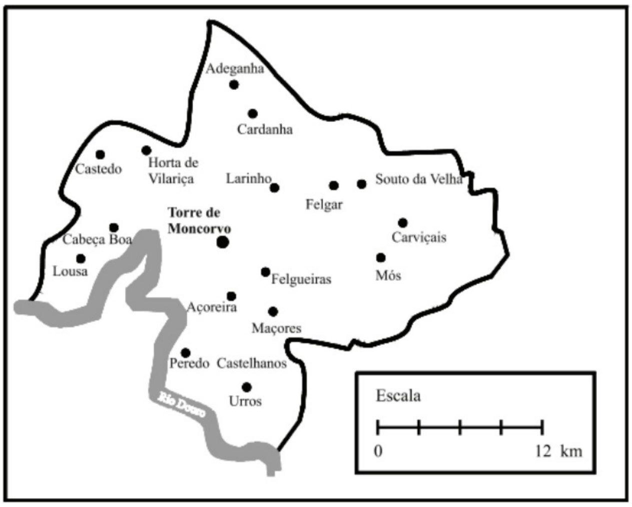
A ideia principal do Exemplo 4.2.2 não é mensurar a habilidade dos alunos em desenhar uma circunferência, mas sim de reconhecê-la e endendê-la como um Lugar Geométrico. Esse tipo de associação fará com que o aluno consigar estabelecer essa relação e resolver outros problemas que demandam tal entendimento.

Problema 4.2.3. *(Adaptado - Teste Intermédio 8° ano - 2008) Na Figura 68, pode-se observar um mapa do concelho de Torre de Moncorvo. A torre de vigia de incêndios da Serra do Reboredo está localizada:*

1. *A 9 km de distância de Peredo Castelhanos;*
2. *A 12 km de distância de Adeganha;*
3. *Mais perto de Felgueiras do que de Cabeça Boa.*

Utilizando um compasso, efetue uma construção que permita encontrar, no mapa, o ponto em que se localiza a torre de vigia. Assinale esse ponto com a letra T.

Figura 68 – Problema 4.2.3.



Fonte: IAVE - Teste Intermédio 8° ano, 2008.

Solução. Para resolver o problema, os alunos devem entender a circunferência como um LG.

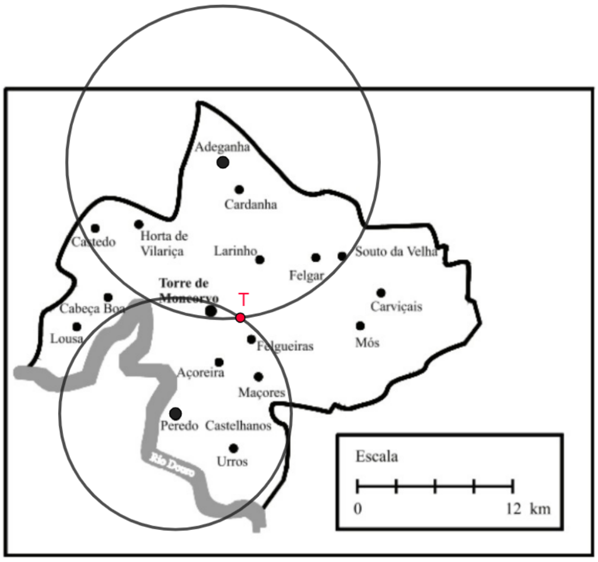
Descrição dos Passos:

1. Com a abertura do compasso igual a 9 *km* (utilizando a escala) e centrado no ponto que representa Peredo Castelhanos, trace uma circunferência;

2. Com a abertura do compasso igual a 12 km (utilizando a escala) e centrado no ponto que representa Adeganha, trace uma circunferência;

3. As circunferências descritas nos itens anteriores se intersectam em dois pontos distintos. Assinale por T (a torre de vigia) o ponto mais próximo de Felgueiras, conforme Figura 69.

Figura 69 – Solução problema 4.2.3.



Fonte: O próprio autor.

Definição 4.2.4. *Dados, no plano, os pontos A e B, define-se* ***mediatriz*** *do segmento AB como sendo a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio.*

Problema 4.2.5. *Dado um segmento AB, construa, com régua e compasso, a sua mediatriz.*

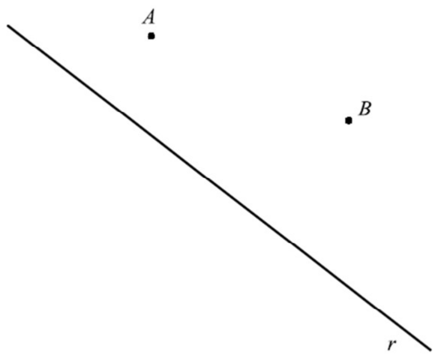
A construção da mediatriz (habilidade EF08MA15 da BNCC) não será um problema para os alunos, visto que, já foi apresentado a construção do ponto médio. Esse problema facilitará o entendimento de uma mediatriz como um Lugar Geométrico, conforme será apresentado por meio da proposição a seguir.

Proposição 4.2.6. *A mediatriz de um segmento AB é o LG de todos os pontos que equidistam dos pontos A e B.*

A apresentação da mediatriz como um lugar geométrico é uma habilidade (EF08MA17) presente na BNCC e esse entendimento é importante para a resolução de alguns problemas. Para a resolução dos problemas seguintes, os alunos precisarão entender a mediatriz como um Lugar Geométrico e recorrerem a sua construção com régua e compasso.

Problema 4.2.7. *(Adaptado - Exame Nacional* 3° *Ciclo - 2007) Recorrendo a material de desenho e de medição, construa a circunferência cujo centro é um ponto da reta r e que passa pelos pontos A e B.*

Figura 70 – Problema 4.2.7.



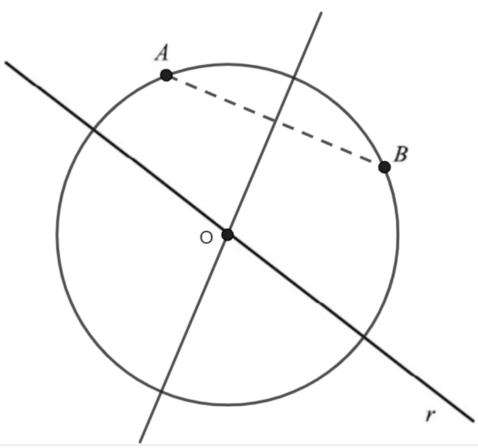
Fonte: IAVE - Exame Nacional 3° ciclo, 2007.

Solução. Para solucionar o problema, é preciso que os alunos já tenham entendido o conceito de mediatriz e já a reconheçam com um LG.

Descrição dos passos:

1. Trace a mediatriz do segmento AB.
2. Marque o ponto O de intersecção entre a mediatriz do segmento AB e a r. O ponto O é o centro da circunferência que o problema pede, conforme Figura 71.

Figura 71 – Solução do problema 4.2.7.



Fonte: O próprio autor.

Problema 4.2.8. *(Adaptado - Exame Nacional 3° Ciclo - 2010) A Figura 72 representa um mapa de um jardim zoológico onde estão assinalados os locais de residência de alguns animais.*

Figura 72 – Problema 4.2.8.

Fonte: IAVE - Exame Nacional 3° ciclo, 2010.

O jardim zoológico vai receber um casal de coalas. O local de residência dos coalas, no jardim zoológico, verifica as duas condições seguintes:

1. *Ficar a mesma distância da Árvore das Aves Exóticas e do Lago das Focas;*
2. *A sua distância à Aldeia dos Macacos é igual à distância entre o Reptilário e a Encosta dos Felinos.*

Desenhe no mapa uma construção geométrica que permita assinalar o ponto correspondente ao local de residência dos coalas. Assinale esse ponto com a letra C.

Solução. Para a resolução do problema, os alunos precisarão recorrer aos conceitos da mediatriz e da circunferência como lugares geométricos. Como o problema diz que o local deve ficar a mesma distância da Árvore das Aves Exóticas e do Lago das Focas, tem-se que o local pertence a mediatriz do segmento que une os dois lugares. Por outro lado, como a sua distância à Aldeia dos Macacos é igual à distância entre o Reptilário e a Encosta dos Felinos, tem-se que o local pertence a circunferência cujo raio é igual a distância entre o Reptilário e a Encosta dos Felinos e com centro na Aldeia dos Macacos.

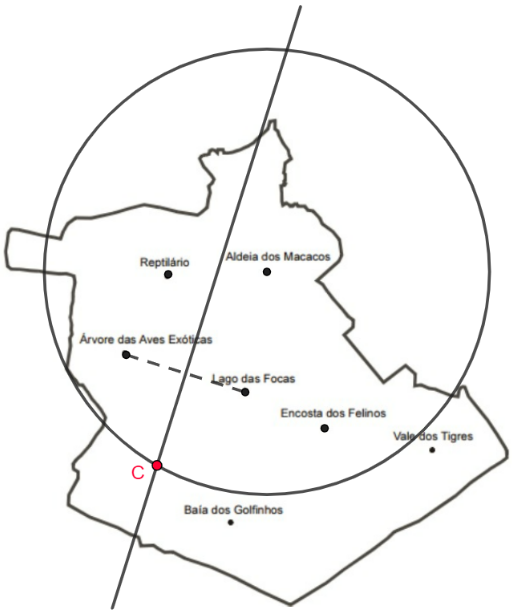
Descrição dos passos:

1. Trace a mediatriz do segmento que liga os pontos que representam Árvore das Aves Exóticas e o Lago das Focas.

2. Com o compasso com abertura igual a distância entre Reptilário e a Encosta dos Felinos, trace um circunferência com centro na Aldeia dos Macacos.

3. Marque o ponto C de intersecção (dentro do mapa) entre a mediatriz e a circunferência. O ponto C é o local onde deve ficar a residência dos coalas.

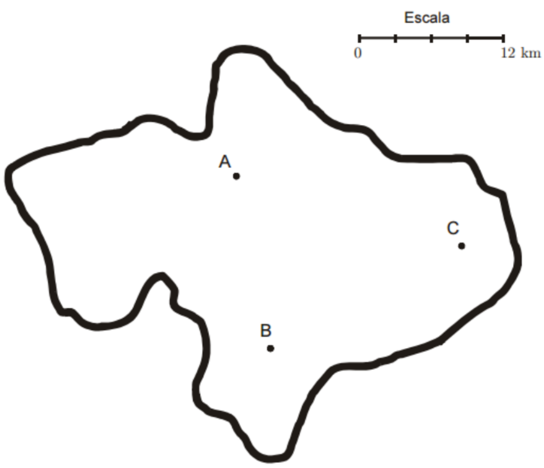
Figura 73 – Solução do problema 4.2.8.



Fonte: O próprio autor.

Problema 4.2.9. *(Adaptado - Teste Intermédio 8° ano) Pretende-se construir um parque eólico. A Figura 74 é o mapa da zona onde estão colocadas as colunas aerogeradoras. Os pontos A, B e C representam a localização de três colunas.*

Figura 74 – Problema 4.2.9.



Fonte: IAVE - Exame Nacional 3° ciclo, 2010.

Pretende-se construir uma quarta coluna e sua localização deve obedecer às seguintes condições:

1. *A coluna deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;*
2. *A coluna deve estar a mesma distância das colunas B e C;*
3. *A coluna deve ficar a 12 km da coluna A.*

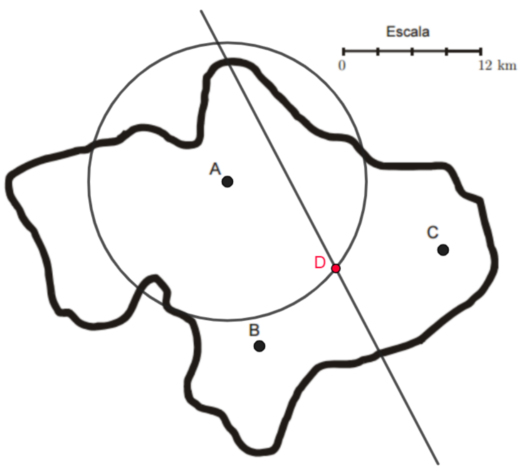
Construa, utilizando régua e compasso, e assinale por D, o ponto em que deve ser localizada a quarta coluna.

Solução. Para a resolção do problema, os alunos precisarão recorrer aos conceitos de mediatriz e circunferência como lugares geométricos. Como o problema diz que o local deve ficar a mesma distância dos pontos B e C, tem-se que o local pertence a mediatriz do segmento BC. Por outro lado, como a sua distância ao ponto A deve ser igual a 12 km, tem-se que o local pertence a circunferência de raio 12 km e com centro em A.

Descrição dos passos:

1. Trace a mediatriz do segmento BC;
2. Trace uma circunferência com centro em A e raio igual a 12 km (utilizando a escala).
3. Marque o ponto D de intersecção entre a circunferência e a mediatriz (dentro da zona delimitada). O ponto D é onde deve ficar a quarta coluna.

Figura 75 – Solução do problema 4.2.9.



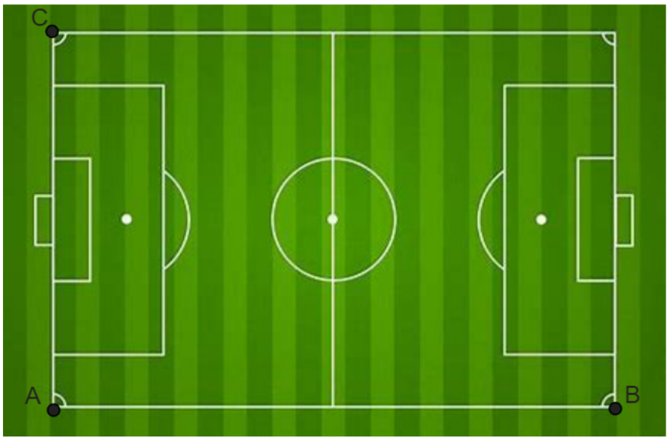
Fonte: O próprio autor.

Outro LG importante é a bissetriz. Os alunos já têm o entendimento do que seja uma bissetriz, bem como, contruí-la utilizando régua e compasso. Entretanto, a apresentação da bissetriz como um LG, trará novas propriedades que são de grande importância na solução de problemas. A Proposição 4.2.10 apresenta a bissetriz como um Lugar Geométrico.

Proposição 4.2.10. *Dado um ângulo $\angle AOB$, o LG dos pontos que equidistam de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.*

Problema 4.2.11. *Um time de futebol deseja executar uma jogada de ataque a partir de um escanteio. Na jogada, o jogador posicionado no ponto A baterá o escanteio para um outro jogador que deverá receber a bola dentro da grande área ofensiva e a uma igual distância entre a linha de fundo (segmento AC) e a linha lateral (segmento AB), conforme Figura 76. Construa, com régua e compasso, os possíveis pontos em que o jogador receberá a bola.*

Figura 76 – Problema 4.2.11.



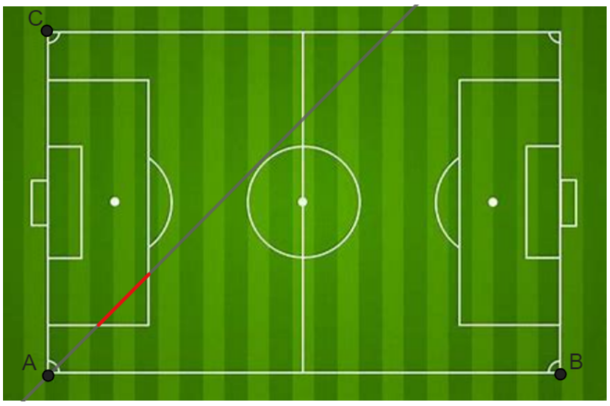
Fonte: O próprio autor.

Solução. Como o problema pede que o jogador se posicione a uma igual distância dos segmento AB e AC tem-se, pela Proposição 4.2.10, que o jogador deve se posicionar na bissetriz de $\angle BAC$.

Descrição do passos:

1. Trace a bissetriz de $\angle BAC$, conforme Exemplo 3.5.10;
2. Marque a intersecção entre a bissetriz e a grande área. O jogador deverá se posicionar em algum ponto do segmento destacado em vermelho na Figura 77.

Figura 77 – Solução do problema 4.2.11.



Fonte: O próprio autor.

Conseguir resolver os problemas utilizando os lugares geométricos e as construções geométricas como auxílio é uma estratégia iteressante, pois, nos problemas sugeridos, não foi preciso utilizar cálculos númericos ou algébricos, mas apenas os conceitos.

5 Considerações Finais

O presente trabalho buscou apresentar a Geometria Euclidiana associada às construções geométricas. Apresentou-se conceitos de Geometria e construções que facilitam o entendimento dos conceitos. Separar a Geometria das construções geométricas prejudica o entendimento da Geometria e das construções geométricas, pois toda construção precisa de uma teoria que a sustenta e a Geometria precisa ser visualizada por meio de desenhos geométricos.

Com um breve apanhado histórico, percebeu-se o quanto o ensino da Geometria no Brasil nunca foi bem estruturado. Desde o ensino com os Jesuítas, essa área do conhecimento não teve um grande espaço. As dificuldades com o ensino da Geometria passavam desde a falta de pessoas qualificadas para o ensino até a falta de materiais.

O ensino da Geometria ao longo dos anos foi cada vez mais se distanciando das construções geométricas, influenciado por reformas e movimentos que repercutiram nos rumos da Matemática. O Movimento da Matemática Moderna (MMM) é o que mais influenciou e, até hoje influencia, o ensino da Geometria no Brasil. Com influência do MMM, a Geometria passou a ser totalmente algébrica, sendo que as construções geométricas não tinham espaço. Os problemas da Geometria passaram a ser encontrar valor “x”.

O resgate da Geometria passa por associá-la as construções geométricas. A geometria tem que ser visual, é preciso enxergá-la na vida das pessoas. Com as construções geométricas, é possível enxergar a Geometria desde a mesa da cozinha até nas grandes construções.

As construções geométricas facilitam o entendimento da Geometria e a resolução de problemas. Não há motivo para a separação da Geometria e das construções geométricas. Fica mais intuitivo os conceitos quando é possível visualizá-los.

Neste trabalho mostrou-se que os conceitos de Geometria Euclidiana e as construções geométricas podem e devem estar juntos, pois a separação só prejudica a Geometria e as construções geométricas. Espera-se que mais trabalhos possam abordar o tema, mostrando como pode-se trabalhar Geometria e construções geométricas. Quanto mais pesquisas, maiores as chances de recuperação do ensino da Geometria no Brasil.

Referências

ALVES, J. D. Números construtíveis e construções geométricas. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020.

BRASIL. Base nacional comum curricular. *Ministério da Educação. Brasília: MEC*, 2020.

BRASIL, P. C. N. matemática. *Secretaria da educação fundamental. Brasília: MEC/sef*, 1998.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar. Vol. 9.* [S.l.]: Atual Editora LTDA, 1997.

EDUCACIONAL, G. de A. *Instituto de Avaliação Educativa: Exame Nacional do Ensino Básico.* 2023. Disponível em: https://iave.pt/. Acesso em: 01 de junho 2023.

GOMES, M. L. M. História do ensino da matemática: uma introdução. CAED-UFMG, 2012.

NETO, A. C. M. *Tópicos da Matemática Elementar-Geometria Euclidiana Plana, vol 2, SBM.* [S.l.]: Rio de Janeiro, 2012.

NETO, A. P. Geometria plana e construções geométricas. UAB/IFCE, 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, v. 1, n. 1, 1993.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas.* [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.

SENA, R.; VARGAS, B. Ensino de geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, Universidade do Extremo Sul Catarinense, v. 8, n. 1, p. 138–155, 2013.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).* Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo., 1997.

WAGNER, E. Uma introdução às construções geométricas. IMPA/OBMEP, 2009.

ZUIN, E. d. S. L. Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no brasil. Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.