Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A Característica de Euler †

por

Gildeci José Justino

sob orientação do

Prof. Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Característica de Euler

por

Gildeci José Justino

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:

Prof. Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)

Prof. Doutor Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB

Prof. Doutor Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Setembro/2013

Agradecimentos

Primeiro que tudo quero agradecer a Deus pelo dom de estudar, de entender as dificuldades da vida, de persistir, de buscar novos conhecimentos, de procurar força e coragem para continuar. Por me iluminar e abençoar minha trajetória.

Aos meus pais Josefa Maria Justino e Manoel José Justino(*in memorian*) que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com seriedade, dignidade e amor, também pelo carinho, amor, educação, dedicação e pelo estudo que me proporcionaram.

A minha esposa Hortênsia da Costa Brandão Justino e filhas Maria Eduarda da Costa Brandão Justino e Maria Alyne da Costa Brandão Justino pela compreensão da minha ausência por estar estudando e me dedicando ao mestrado; também pelo incentivo, respeito, força e por acrescentar razão e beleza aos meus dias.

A minha sogra Esmeraldina Brandão que com suas orações e dedicação me encheram de paz e sabedoria.

Aos meus alunos que nos mais variados momentos me deram a atenção e carinho necessários para a busca da melhor forma de aprender e ensinar.

Ao meu querido orientador Professor Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera , pela paciência, pelo auxílio, perfeccionismo nas orientações, disponibilidade de tempo e material, sempre com uma simpatia contagiante e acolhedora.

A todos os professores do mestrado profissional da UFPB, a coordenação do PROFMAT pela atenção dedicada e pelos vários momentos de aprendizagem.

A todos os meus colegas de mestrado, pelo apoio e pela ajuda respeitosa em todos os momentos difíceis, principalmente Salatiel Dias, Alex Cristophe, Leonardo Araújo e Márcio Marinho que foram como irmãos, incentivando, estudando juntos e me apoiando nas adversidades.

À CAPES pela concessão de bolsas de estudos.

A toda a minha família, por entenderem a minha ausência em muitos momentos.

A professora Zoraide Damião que com sua atenção e sabedoria fez suas observações na tradução dos textos.

Ao Padre Marizaldo que com suas orações nos fortaleceu para caminharmos com perseverança, amor a Deus e coragem neste mestrado.

À Escola Santa Maria, na pessoa da Professora Francisca Rodrigues, que compreendeu meus muitos afastamentos para estudo e aperfeiçoamento do mestrado.

E a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que eu pudesse realizar esse mestrado com louvor e felicidade.

Dedicatória

A minha esposa Hortênsia pelo amor incondicional e a minhas filhas Maria Eduarda e Maria Alyne que são meus motivos de viver.

Resumo

Esta dissertação tem como tema central o Teorema de Euler para poliedros homeomorfos à esfera. Apresentamos demonstrações feitas por Cauchy, Poincaré e Legendre. Como consequência mostramos a existência de apenas cinco poliedros convexos regulares, os chamados poliedros de Platão.

Palavras - chave: Teorema de Euler, Poliedros, Poliedros de Platão, Geometria esférica, Números de Betti, Fórmula de Girard.

Abstract

This dissertation is focused on the Euler's theorem for polyhedra homeomorphic to the sphere. Present statements made by Cauchy, Poincaré and Legendre. As a consequence we show that there are only five regular convex polyhedra, called polyhedra Plato.

Keywords: Euler's Theorem, Polyhedron, polyhedra plato, spherical geometry, Betti Numbers, Girard formula.

Sumário

Introdução

Este trabalho trata de um tema de muita relevância para o mundo atual, o Teorema de Euler, que relaciona o número de vértices V, o número de aresta A e o número de faces F de um poliedro convexo. Este teorema foi escolhido para esta dissertação pela sua importância nas aulas de geometria do Ensino Médio, por ser objeto de muitas pesquisas científicas no mundo todo e também pelas relações com a Topologia Algébrica, Análise e Topologia Diferencial. O estímulo para o estudo desse trabalho é a possibilidade de investigação das muitas demonstrações existentes para este Teorema que foi um ponta pé para ligação de ramos diferentes da Matemática. A propriedade que Euler citou foi uma descoberta de grande impacto pois gerou importantes pesquisas matemáticas e inclusive dando início à Topologia, ciência que estuda e utiliza os mesmos objetos que a geometria, com a seguinte diferença: não interessa a distância, os ângulos nem a configuração dos pontos. Como muitas vezes acontece, a matemática se desenvolve a partir de problemas do cotidiano, não muito diferente foi com a Topologia que teve seu início com o problema das pontes da cidade de Koenigsberg, o qual Euler deu uma solução em 1736 num artigo intitulado "Solutio Problematis ad Geometriam situs pertinentis". Vamos também estudar as condições necessárias a um poliedro para satisfazer a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces e como generalizá-la. Certos da importância das definições para que um Teorema funcione, vamos ao longo dessa dissertação dar ênfase aos conceitos, definindo primeiro e depois demonstrando.

Como já comentamos o problema que fomentou o surgimento da Topologia foi o das Pontes de Konigsberg, cidade da antiga Rússia, hoje Kalinigrado e Rússia.

Euler, em 1736, percebeu que o problema não era de geometria uma vez que as distâncias envolvidas eram irrelevantes, mas o que importava era a maneira como as porções de terra estavam interligadas entre si, nascendo assim a Topologia e Teoria dos Grafos.

Muitas das ideias de Topologia foram atribuídas a Euler e ao problema das Pontes de Konisgberg, mas, quase um século antes o matemático francês René Descarte, por volta de 1639, já tinha identificado que se um poliedro tem V vértices, F faces e A arestas, vale a relação $V - A + F = 2$, relação que mais tarde ficaria conhecida por Teorema de Euler.

Muitas das demonstrações aqui apresentadas são trabalhadas de tal forma que o leitor tenha plena convicção da importância das definições e conceitos, tentando ser o mais simples e sucinto possível.

Vamos também mostrar que áreas diferentes da Matemática, tais como: Matemática Pura, Matemática Aplicada e Ensino da Matemática, muito lembradas como áreas diferentes, podem sim ter pontos de interseção. Ao longo desse trabalho mostraremos que é possível com bons exemplos e uma busca detalhada, apresentar conceitos avançados aos alunos do ensino básico sem gerar desconforto e sim muita curiosidade em entender e aplicá-los no cotidiano.

A característica de Euler é um invariante Topológico de muita importância, revelando-se um descobrimento de muito valor. Resumidamente o número de Euler depende apenas da forma que toma o poliedro quando é deformado, de modo a tornar-se uma superfície suave. Assim os poliedros convexos, como mostrou Euler, tem sempre $V - A + F = 2$, pois todos possuem forma esférica.

No capítulo 1 apresentamos algumas notas históricas dos principais matemáticos envolvidos nas demonstrações do teorema de Euler, bem como algumas curiosidades. É de muita importância a vidas desses cientistas pois sua dedicação e empenho desenvolveram o mundo e facilitaram nossas vidas. Entendemos também que o estudo da História da Matemática engrandece e aprimora a mente dos nossos alunos bem como fortalece o entendimento de muitos conceitos.

No capítulo 2 definimos poliedros, pois é de muita importância para que entendamos o desenvolvimento das demonstrações aqui apresentadas. Vamos dar uma definição formal para poliedros, em particular poliedros convexos e definiremos os elementos dessas figuras, bem como uma demonstração da fórmula de Euler e um estudo sobre Platão e os poliedros de Platão.

No capítulo 3 vamos detalhar as principais demonstrações do Teorema de Euler, bem como observações, definições e curiosidades dos métodos utilizados por esses matemáticos. Vamos também lembrar como é bonita a geometria esférica e como deveria ser mais estudada por todos nós, professores do ensino médio. Estudaremos de forma sucinta algumas definições importantes sobre topologia para que possamos entender um importante conceito associado ao estudos dos poliedros, o número de Euler, $V - A + F$, sendo V,A e F, respectivamente, os números de vértices, arestas e faces de cada poliedro. E ao longo desse trabalho estabeleceremos o fato de que esse número é um invariante topológico, isto é, depende apenas da forma que toma o poliedro quando é deformado, de modo a tornar-se uma superfície suave. Assim, podendo com essa definições concluir que os poliedros convexos têm sempre $V-A+F$ constante e igual a dois, pois todos assumem a forma esférica quando deformados.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Estudaremos neste capítulo um pouco da história de René Descartes, Leonhard Euler, Augustin Louis Cauchy, Adrien Marie Legendre e outros que fizeram descobertas na área. O que vamos discutir neste capítulo são alguns fatos históricos que levaram à fórmula de Euler $V - A + F = 2$. Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados que a partir dos mesmos se poderiam chegar à fórmula imediatamente.(veja[2])

O intuito é dar uma visão histórica de um dos teoremas mais ensinados no ensino médio, partindo de demonstrações muito interessantes e ao mesmo tempo procurar aquela que mais se aproxime dos conhecimentos do aluno secundarista. Ele tem características muito peculiares e usuais: demonstração bonita, fácil enunciado e de simples ilustração que tornam o assunto popular e atraente para os estudantes.

1.1 René Descartes

Filósofo e matemático, René Descarte nasceu próximo de Tours em 1596. A sua mãe, Jeanne Brochard, morreu quando ele tinha um ano. Recebeu educação numa escola jesuíta em La Fleche. Descartes não mereceu, como se sabe, a plena admiração dos jesuítas, que o consideravam um péssimo filósofo. Prosseguiu depois seus estudos graduando-se em direito, em 1616, pela Universidade de Poitiers. No entanto, Descartes nunca exerceu o direito. Em 1612 foi para Paris onde, conheceu Mersenne, Mydorge e outros sábios da Europa onde nos círculos discutiam livremente sobre assuntos diversos principalmente críticas aos pensamentos da época e

Figura 1.1: René Descartes

também desenvolvendo uma nova matemática. O pensamento de Descartes é revolucionário para uma sociedade feudalista em que ele nasceu, onde a influência da Igreja ainda era muito forte e quando ainda não existia uma tradição de produção de conhecimento. Aristóteles tinha deixado um legado intelectual que o clero se encarregava de disseminar. Foi um dos precursores do movimento, considerado o pai do racionalismo, e defendeu a tese de que a dúvida era o primeiro passo para se chegar ao conhecimento. Descartes viveu numa época marcada pelas guerras religiosas entre Protestantes e Católicos na Europa, a Guerra dos Trinta Anos. Viajou muito e viu que sociedades diferentes têm crenças diferentes, mesmo contraditórias. Aquilo que numa região é tido por verdadeiro, é considerado ridículo, esquisito e falso em outros lugares. Descartes viu que os costumes, a história de um povo, sua tradição cultural influenciam a forma como as pessoas veem e pensam naquilo em que acreditam. O método cartesiano consiste no Ceticismo Metodológico, que nada tem a ver com a atitude cética, duvida-se de cada ideia que não seja clara e distinta. Ao contrário dos gregos antigos e dos escolásticos, que acreditavam que as coisas existem simplesmente porque precisam existir, ou porque assim deve ser, etc. Descartes instituiu a dúvida, só se pode dizer que existe aquilo que puder ser provado, sendo o ato de duvidar indubitável. Foi na Holanda que Descartes produziu seus escritos:

1)Le monde: uma descrição física do universo;

2)Discours de La Méthode pour Bion Conduíre sa Raison et Chercher la Vérité daus les Sciencies(Discurso do método para bem conduzir a Razão e Procurar a verdade nas Ciências). O Discours foi publicado em 1637.

3)Meditationes que é uma explanação das ideias filosóficas que aparecem no Discours.

4) Principia philosophiae que apresenta algumas leis da natureza e uma teoria cosmológica.

La géometrie, o famoso terceiro apêndice do Discours, ocupa cerca de cem páginas do trabalho completo e se divide em três partes. A primeira parte contêm uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço real em relação aos gregos. A segunda parte de La géometrie traz, entre outras coisas, uma classificação de curvas agora superada e um método interessante de construir tangentes a curvas. A terceira parte trata da resolução de equações de grau maior que dois. Faz-se uso do que chamamos agora regra de sinais de Descarte, cuja finalidade é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio. A convenção do uso das primeiras letras de nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas letras para indicar variáveis começou com Descartes.(veja[2])

Duas lendas descrevem o estalo que Descartes teria tido para iniciar a geometria analítica. De acordo com uma delas isso aconteceu num sonho. Na véspera do dia de São Martinho, 10 de novembro de 1616, no acampamento de inverno de sua tropa às margens do Danúbio, Descartes passou pela experiência de três sonhos singularmente vividos e coerentes sobre ciências que, segundo ele, mudaram o curso de sua vida. Ele nunca revelou do que se tratava, mas há suposições de que essa ciência seria a geometria analítica, ou a aplicação da álgebra à geometria.

Outra lenda é parecida com a da queda da maçã de Isaac Newton, conta-se que Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos. Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida.

Muitas contribuições foram dadas a Descartes principalmente a aplicação da álgebra à geometria. Descartes ia mais longe do que qualquer antecessor em sua álgebra simbólica, e na interpretação geométrica da álgebra. A álgebra formal crescia constantemente desde a Renascença, e encontrou seu auge na La géométrie de Descartes, o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje possa estudar sem encontrar dificuldade com a notação. O título La géométrie não deve levar ao engano de se pensar que a obra é principalmente de geometria. Já no Discours, do qual a geometria era um apêndice, Descartes tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria. Descartes estava convencido que todas as ciências matemáticas partem dos mesmos princípios básicos, e decidiu usar o melhor de cada ramo. Seu método em Lá géométrie consiste então em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente, de modo semelhante ao que usava para quadráticas. Segundo Papus, Descartes insistia em que na solução geométrica de uma equação deviam ser usados apenas os meios mais simples apropriados ao grau da equação. Uma das suas principais contribuições à Matemática , foi a fundação da geometria analítica, motivada por uma volta ao passado. Ele estava interessado na matemática com uma intensidade muito grande quando passou com o exército bávaro, em 1619, neste período ele ficava na cama até dez horas da manhã pensando em problemas. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. Foi exatamente nessa época que ele descobriu a expressão V - A + F = 2 relação que liga o número de vértices V, arestas A e faces F de um poliedro convexo.(veja[2])

Esse resultado encontrado por Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático, filósofo, teólogo e formado em direito que desenvolveu a ideia de uma matemática universal, em 1675, contém resultados que levam a fórmula V - A + F = 2 mas Descartes parece não ter notado isso.

René Descartes morreu de pneumonia em 11 de Fevereiro de 1650, em Estocolmo, depois de dez dias doente, onde estava trabalhando como professor a convite da Rainha. Acostumado a trabalhar na cama até meio-dia, há de ter sofrido com as demandas da Rainha Christina, cujos estudos começavam às 5 da manhã. Como um católico num país protestante, ele foi enterrado num cemitério de crianças não batizadas, na Adolf Fredrikskyrkan, em Estocolmo.

Em 1667 os restos mortais de Descartes foram repatriados para a França e enterrados na Abadia de Sainte-Geneviève de Paris. Um memorial construído no século XVIII permanece na igreja sueca até hoje.

Embora a Convenção, em 1792, tenha projetado a transferência do seu túmulo para o Panthéon, ao lado de outras grandes figuras da França, desde 1819, seu túmulo está na Igreja de Saint-Germain-des-Prés, em Paris.

1.2 Leonhard Euler

Figura 1.2: Leonhard Euler

Nasceu na Basileia em 1707, filho mais velho de Paulus Euler e Margaretha Brucker. O seu pai era um pastor calvinista que tinha habilidades matemáticas, ajudou-o na sua formação matemática. Euler foi a princípio educado por seu próprio pai, ex-estudante de Jacob Bernoulli. Em 1720, inscreveu-se na Universidade de Basileia, na Faculdade de Filosofia, para estudar seguimentos religiosos que era do agrado do seu pai.

Figura 1.3: Universidade da Basileia

Lá estudava matemática, sua matéria preferida mas também teologia, medicina e outras disciplinas. Pela amizade que tinha com Jacob Bernoulli, conseguiu que seu filho fosse estudar, ou seja, tivesse como tutor Johann Bernoulli, o maior matemático de então, o que contribuiu para que Euler seguisse a carreira de matemático e não de pastor calvinista. Quando muito jovem, apenas 19 anos, ainda estudante de Johann, apresentou como tese para a cadeira de física uma memória denominada Dissertação física sobre o som. Esse texto serviu de guia à pesquisa em acústica por muitos séculos. Ele contribuiu demais para a acústica que conhecemos hoje.

Euler mudou-se para são Petersburgo, Rússia, em 1727, onde conseguiu uma posição na Academia de Ciências de São Petersburgo. Casou-se em 1734 e teve 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram. A literatura conta que Euler certa vez falou que suas principais criações matemáticas ocorreram quando tinha um bebê no colo e crianças ao seu redor brincando. Foi diretor da Classe de matemática na Academia de Ciências e Belas letras de Berlin onde permaneceu até 1766.(veja[3])

Euler teve alguns problemas de saúde, a começar em 1735. Em 1738 ele perdeu a visão do olho direito. Em 1766 uma doença no olho esquerdo fez com que ficasse cego não o impedindo de vir a ser o mais produtivo matemático, pois se apegou a sua capacidade incrível de realizar cálculos mentais aliada a sua grande potencialidade de memorização e um redator efetuando grandes trabalhos.

Euler ajudou a desenvolver o modelo de viga de Euler-Bernoulli, que se tornou um marco da engenharia. Além de aplicar com sucesso as suas ferramentas analíticas para problemas em mecânica clássica, Euler também aplicou essas técnicas para problemas celestes. Seu trabalho em astronomia foi reconhecido por uma série de prêmios da Academia de Paris ao longo de sua carreira. Suas realizações incluem determinar com grande precisão as órbitas de cometas e outros corpos celestes, compreender a natureza dos cometas, e calcular a paralaxe do sol. Seus cálculos também contribuíram para o desenvolvimento de tabelas de longitude bem precisas.

No seu livro, A Teoria do movimento dos corpos sólidos, Euler matematicamente descreveu a cinemática de um corpo rígido de tamanho finito. Ele introduziu na matemática o teorema de Euler de ângulos de rotação. Seu nome também é usado na fórmula de cinemática da distribuição de velocidade em um sólido, conhecido como as equações (Euler - Poisson) da dinâmica de corpo rígido.

Além disso, Euler fez importantes contribuições na óptica. Ele discordou da teoria corpuscular de Newton da luz nos Opticks, que era então a teoria prevalecente. Seus trabalhos sobre óptica ajudou a garantir que a teoria ondulatória da luz proposto por Christiaan Huygens se tornasse o modo dominante de pensamento, pelo menos até o desenvolvimento da teoria quântica da luz.

Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não apareça. Depois da cegueira ficou sendo auxiliado por um secretário que anotava suas ideias. Entre livros e artigos Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais quarenta e sete anos. A Sociedade Suíça de Ciências Naturais iniciou em 1909 uma edição completa da obra de Euler, compreendendo 886 trabalhos, entre livros e artigos que deveria atingir cem grandes volumes.

O interesse de Euler na teoria dos números pode ser atribuída à influência de Christian Goldbach, seu amigo na Academia São Petersburgo. Muitos dos primeiros trabalhos de Euler na teoria dos números foram baseadas nas obras de Pierre de Fermat. Euler desenvolveu algumas das ideias de Fermat, e refutou algumas das suas conjecturas. Euler ligou a natureza da distribuição privilegiada, com ideias de análise. Conseguiu provar que a soma dos recíprocos dos primos divergem. Ao fazer isso, ele descobriu a conexão entre a função zeta de Riemann e os números primos, o que é conhecido como a fórmula do produto Euler para a função zeta de Riemann.

Em 1736, Euler resolveu o problema conhecido como sete pontes de Konigsberg. A cidade de Konigsberg, Prússia, foi construída no Rio Pregel, e incluiu duas grandes ilhas que estavam conectadas entre si e ao continente por sete pontes.

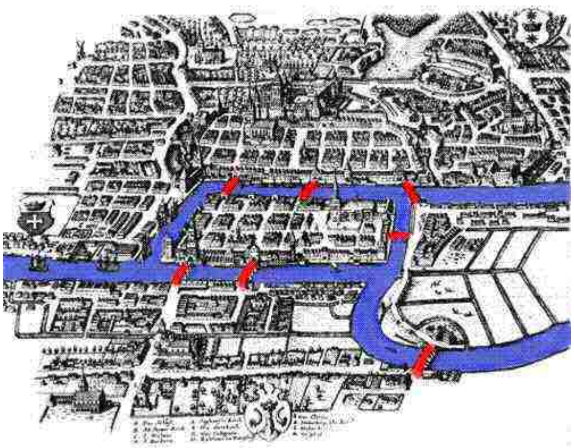


Figura 1.4: Pontes de Konigsberg

Os habitantes da cidade gostavam de passear pelas pontes e procuraram uma forma de atravessar todas as pontes apenas uma vez, ou seja, o problema era o de decidir se é possível seguir um caminho que atravessa cada uma das pontes exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida. Esta solução é considerada como sendo o primeiro teorema da teoria dos grafos.

Euler foi o primeiro matemático a perceber que há problemas geométricos para os quais as soluções não dependem das medidas. Também descobriu a fórmula $V - A + F = 2$ relacionando o número de vértices V, arestas A e faces F de um poliedro convexo e, portanto, de um grafo planar. A constante nesta fórmula é agora conhecida como a característica de Euler, e está relacionado com o gênero do objeto.

Euler foi um escritor magistral, caracterizando-se seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhes e abrangência. Entre eles, figuram com destaque: Introdution in analysin infinitorum de 1748, em dois volumes, que alcançou grande prestígio, Institutiones calculi defferentialis de 1755, uma obra extremamente rica e o aparentado Institutiones calculi integralis, em três volumes. Esses livros, mais outros de mecânica e álgebra, superando trabalhos da mesma natureza, serviram para modelar o estilo, a notação e o alcance de muitos dos livros dos cursos superiores atuais. Os livros de Euler alcançaram pronunciada e longa popularidade e ainda hoje são uma leitura muito agradável e produtiva. A enorme produtividade das ideias de Euler é deveras surpreendente, não sendo de admirar, portanto, que muitos dos grande matemáticos posteriores a ele admitiram ter recebido sua influência.

Euler recebeu o convite de Frederico, o Grande para fazer parte da Academia de Ciências da Prússia, sediada em Berlim. De início recusou o convite mas como a vida na Rússia para os estrangeiros não era fácil e devido aos tumultos, Euler reconsiderou o pedido. Mudou-se para Alemanha assumindo uma posição na Academia de Ciências de Berlim, em 1741. A contribuição de Euler para a Academia de Berlim foi impressionante: supervisionava o observatório e o jardim botânico, selecionava pessoal e geria várias questões financeiras, coordenava a publicação de mapas geográficos e de trabalhos científicos, uma fonte de rendimentos para a Academia.

Voltou para São Petersburgo em 1766, pouco antes de cegar totalmente, com 59 anos, onde ficou até se falecimento em setembro de 1783, com 76 anos. Foi exatamente neste período que Euler produziu a maioria de suas 866 obras. Euler mostrou muitas das sua qualidades, ou seja, uma genialidade identificada em poucos matemáticos. Trouxe a tona assuntos negligenciados, assuntos antigos e traçou novos caminhos de raciocínio que vieram ser notados muitos anos depois.

É muito fácil perceber que o nome de Euler está associado a várias invenções, teoremas e fórmulas. É esta genialidade que fascina muita gente até hoje, funcionado como um motor para estudar, refazer e interpretar os estudos de Leonhard Euler. Podemos citar, sem medo de errar e de ordenação, como exemplos:

a)Fórmula de Euler para Poliedros que iremos estudar neste trabalho;

b)Problema das 7 pontes de Konigsberg que deu início a uma nova matemática;

c)Equação de Euler-Lagrange;

d)A outra fórmula de Euler;

e)Equações da dinâmica dos fluidos;

f)Densidade dos números primos;

g)Função totiente de Euler;

h)Integrais de Euler: Funções gama e beta;

i)Equações de Euler da dinâmica dos corpos rígidos;

j)Problema da Basileia

k)Funções geratrizes e números de partição;

l)Problema de 3 corpos de Euler;

m)Ângulos de Euler;

n)Constante de Euler-Mascheroni

o)Quadrados de Euler;

p)A Fórmula de Euler.

Percebemos que Euler foi um grande estudioso e pesquisador, contribuindo grandemente para o desenvolvimento da matemática, bem como um criador de notações, tais como: e para a base dos logaritmos naturais, i para a unidade imaginária dos números complexos, introduziu o conceito de uma função, e foi o primeiro a escrever f(x) para denotar a função f aplicada ao argumento x e muitas outras, no caso de π para a razão a circunferência e seu diâmetro, ele foi apenas o divulgador, já que ela foi utilizada antes. É notável a capacidade tanto de invenção quanto de divulgação de Euler.

Muitas comemorações são dadas à Euler, tais como: destaque na sexta série de notas de 10 francos Suíços e em numerosos selos Suíços, Alemão e Russos. O asteróide de 2002 foi nomeado em sua honra. Ele também é comemorado pela Igreja

Luterana em seu Calendário dos Santos em 24 de maio, ele era um devoto cristão (crente na infalibilidade bíblica), que argumentou energicamente contra os ateus proeminentes de seu tempo.

O conhecimento e o interesse de Euler não se limitavam apenas à matemática e à física. Era um homem de muito de muita erudição, entendendo-se seus conhecimentos à astronomia, medicina, botânica, química, teologia e às línguas orientais. Dedicava-se à leitura dos escritores romanos eminentes, conhecia bem a história civil e literária de todas as épocas e nações e era bastante versado em línguas e em vários ramos da literatura.

1.3 Augustin Louis Cauchy

Figura 1.5: Augustin Louis Cauchy

Um dos maiores matemáticos do século XIX, e talvez da história. Cauchy foi um dos precursores no estudo da análise matemática, área de pesquisa extremamente importante em matemática superior.

Nasceu em 21 de agosto de 1789, em Paris França. Filho de Louis François Cauchy e Marie Madeleine Desestre era o filho mais velho entre dois irmãos e quatro irmãs.

O seu pai era advogado de profissão e sua mãe era uma mulher afável e de bom coração, ambos católicos intolerantes.

Com a revolução Francesa, a família Cauchy passou por dificuldades refletindo na alimentação do mesmo. Laplace e Lagrange, amigos do pai, observaram o talento do menino e ajudaram a estimulá-lo, recomendando inicialmente que ele estudasse línguas. Até 13 anos Cauchy recebeu do pai uma educação muito vasta, inclusive seus preceitos religiosos.

Estudou línguas clássicas na Ècole Centrale du Panthéon entre 1802 e 1804 e em seguida teve aulas de matemática para se preparar para o exame de admissão da École Polytechinique. Estudou muito e em 1805 entrou na École sendo o segundo colocado, graduando-se em 1807. Estudou Engenharia Civil na École des Ponts et Chaussées, até 1810.

Cauchy foi um brilhante estudante com notas extraordinárias e teve aulas com reconhecidos professores, tais como Ampere. No mesmo ano foi para Cherbourg e ajudou em trabalhos de apoio à tropa de Napoleão e, simultaneamente, estudaria e desenvolvia investigações matemáticas.

Demonstrou que os ângulos de um poliedro convexo são determinados pelas suas faces, um excelente trabalho. Incentivado por Legendre e Malus, publicou em 1812 um artigo sobre polígonos e poliedros, onde demonstrou, para um caso específico de poliedros, a fórmula de Euler, objeto do nosso estudo.

Com a saúde abalada voltou a Paris, e desenvolveu estudos em funções simétricas, escrevendo um artigo sobre o assunto.

Cauchy sempre teve o objetivo de ingressar na carreira acadêmica, não regressou para Cherbourg procurando um lugar como professor e depois de lhe recusarem várias posições, foi finalmente nomeado professor assistente no École Polytechique em 1815.

Foi-lhe atribuído em 1816 o grande prêmio da Academia de Ciências pelos seus estudos sobre ondas e tornou-se famoso por resolver um problema, colocado por Fermat, sobre números poligonais.

Em 1817 Cauchy substituiu Biot em seu posto no Collège de France, pois Biot saíra em expedição. Lá deu aulas sobre métodos de integração desenvolvidos por ele, mas ainda não publicados. Cauchy foi o primeiro a fazer um estudo rigoroso das condições de convergência de séries infinitas, além de sua rigorosa definição de integral. Seu texto Cours d'analyse de 1821 foi escrito para estudantes da École Polytechnique e tratava do desenvolvimento dos teoremas básicos do Cálculo, tão rigorosamente quanto possível.

Em 1826 começou um estudo do cálculo de resíduos em Sur un nouveau genre de calcul analogue ou cálculo infinitesimal, enquanto que em 1829 em Leçons sur le

Calcul Différential ele define pela primeira vez uma função complexa de uma variável complexa.

Em 1830 os eventos políticos em Paris e os anos de trabalho intenso começaram a cobrar seu preço e Cauchy decidiu tirar umas férias. Ele deixou Paris em setembro de 1830, antes da revolução de Julho, e passou algum tempo na Suíça. Na Suíça ele foi um ajudante entusiasmado na organização da Académie Helvétique mas este projeto não deu certo pois ele foi pego em eventos políticos.

Os eventos políticos na França significavam que Cauchy deveria jurar lealdade ao novo regime, mas tendo falhado em retornar a Paris, ele perdeu todas as suas posições. Em 1831 Cauchy foi a Turim e durante algum tempo, por oferecimento do Rei de Piemonte, ocupou uma cadeira de Física teórica.(veja[2])

Cauchy voltou a Paris em 1838 e recuperou sua posição na Academia, mas não suas posições como professor por ter recusado jurar lealdade. De Prony morreu em 1839 e sua posição no Bureau des Longitudes tornou-se vaga. Cauchy era fortemente apoiado por Biot e Arago mas Poisson opunha-se radicalmente a ele. Cauchy foi eleito mas, tendo recusado-se a jurar lealdade, não foi indicado e não poderia participar de reuniões ou receber um salário.

Em 1843 Lacroix morreu e Cauchy tornou-se candidato para sua cadeira no Collège de France. Liouville e Libri eram também candidatos. Cauchy teria facilmente sido indicado, mas suas atividades políticas e religiosas (como ajudar os Jesuítas), foram fatores cruciais. Libri foi escolhido, claramente o mais fraco dos três matematicamente falando.

Percebe-se claramente que suas convicções políticas e religiosas atrapalharam demais Cauchy. Durante este período a produção matemática de Cauchy foi menor do que no período de exílio auto-imposto. Ele fez trabalhos importantes na área de Equações Diferenciais e aplicações à Física Matemática. Ele também escreveu sobre Astronomia Matemática, especialmente por ser candidato a posições no Bureau des Longitudes. O texto em 4 volumes Exercises d'analyse et de physique mathematique publicado entre 1840 e 1847 mostrou-se extremamente importante.

Quanto Louis Philippe foi deposto em 1848 Cauchy recuperou suas posições na Universidade. A cadeira ocupada por Libri estava livre, sendo novamente disputada por Liouville e Cauchy. Liouvilli ganhou, azedando a relação entre os dois.

Os últimos anos da vida de Cauchy foram particularmente amargos, por ter se envolvido com Duhamel a respeito de um resultado sobre choques inelásticos. Foi provado que Cauchy estava errado, mas ele nunca admitiu isso.

A obra completa de Cauchy é constituída por 789 artigos matemáticos que abordam várias áreas da matemática, tais como as definições rigorosas de:

a)convergências de sucessões e séries;

b)teoria da integração no cálculo de resíduos;

c)equações diferenciais;

d)análise real e complexa.

Ele foi um dos mais brilhantes matemáticos do mundo, faleceu em 23 de maio de 1857, em Sceaux, França.

1.4 Adrien Marie Legendre

Figura 1.6: Adrien Marie Legendre

Adrien Marie Legendre nasceu em Paris em 18 de setembro de 1752, numa família muito rica que lhe deu uma educação de qualidade no College Mazarin em Paris, além disso, foi nessa Escola que ele começou a se interessar por literatura antiga e por livros científicos especificamente por Matemática. Aos 18 anos ele defendeu sua tese em Matemática e Física terminando seus estudos nessa Escola. Aos 22 anos publicou um tratado de mecânica com a co-participação do seu professor Joseph François Marie. Pertenceu a uma geração de grandes matemáticos, tais como Laplace, Lagrange, Gauss e outros. Trabalhou com Laplace quando lecionavam na Écolle Militaire de Paris. A partir de 1795 lecionou na École Normale onde se associou ao Bureou das longitudes.(veja[2])

Em 1792 Legendre casou-se com Marguerite Claudine Couhin com a qual conviveu por 40 anos, sem deixar filhos.

Foi membro da comissão anglo-francesa, que 1787, com base nos observatórios de Greenwich e Paris, calculou a medida da circunferência da terra usando triangulação geodésica e também presidiu a comissão para a normalização do sistema decimal. Este trabalho levou Legendre para a Royal Society de Londres em 1787 e também uma importante publicação que contém o teorema de Legendre para triângulos esféricos.

Em 1782 ganhou o prêmio dado pela academia de Berlim pelo tratado sobre projéteis em meios viscosos, seu trabalho levou em consideração novos fatores tais como: resistência do ar e velocidades iniciais. Legendre analisou as curvas descritas pelas pesadas bolas de canhão, levando em consideração a resistência do ar e desenvolveu as relações para alcance, dadas as velocidades iniciais. Estas equações foram desenvolvidas baseando-se em seu trabalho avançado sobre equações diferenciais e cálculo de várias variáveis.

Em 13 de maio de 1791, tornou-se um dos seis membros da Academia de ciências da seção de matemática, que foi fechada em 1793 e reaberta logo depois e em 1803 Napoleão Bonaparte reorganizou a mesma e criou um departamento de geometria onde Legendre foi escolhido para ocupar o cargo.

Muitos trabalhos foram desenvolvidos por Legendre, considerado um dos grandes matemáticos da época.

Desenvolveu o método dos mínimos quadrados, que tem uma vasta aplicação na regressão linear, processamento de sinais, estatística e ajustes de curvas. Em 1830 Legendre forneceu uma demonstração do último teorema de Fermat para o expoente $n = 5$, o que também foi comprovado por Dirichlet em 1828.(veja[3])

Ficou conhecido principalmente devido aos seus Élements de Geométrie, uma obra cuja proposta era aprimorar pedagogicamente os elementos de Euclides. E

Legendre foi feliz neste intento pois, entre outras coisas, graças a uma reordenação e a uma simplificação das proposições de Euclides, seus Élements alcançaram muito sucesso.(veja[3])

Além de ter sido adotado no ensino de geometria nas escolas secundárias da França, também foi em outros países, uma vez que a obra assumiu muito rapidamente o primeiro lugar entre os livros clássicos de geometria. Em menos de trinta anos, teve mais de 14 edições, a primeira teve um grande número de tiragens e foi traduzido praticamente em todas as línguas da Europa. Na época bateu recordes de venda, mais de 100 mil cópias vendidas.

Elementos de geometria foi um dos primeiros livros de Matemática publicados no Brasil com tradução de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, no início do século XIX.

Quatro anos após a publicação de elementos de geometria, Legendre publicou a primeira edição de Ensaio sobre a teoria dos números (1798). Essa obra é resultados dos seus estudos sobre a Análise indeterminada e trabalhos em Teoria dos números de outros eminentes Matemáticos, como Fermat, Euler e Lagrange.

Morreu em 9 de janeiro de 1833, em Paris após uma longa e difícil doença. Sua esposa fez um culto a sua memória, cuidando de seus pertences. Após sua morte, em 1856, ela partiu da sua última casa no interior do país para a vila de Auteuil, onde o casal viveu e foi enterrado.

1.5 Jules Henri Poincaré

Henri Poincaré nasceu em 29 de Abril de 1854 em Nancy, França, cidade que iria abrigar grande número de matemáticos no século vinte, foi um matemático, físico e filósofo da ciência francesa. Nasceu numa família de alto nível intelectual, principalmente do lado paterno. O seu avô paterno trabalhou desde jovem no hospital militar de Saint-Quentin, durante a era de Napoleão e o seu pai, Léon Poincaré, foi excelente médico e professor na Universidade de Medicina. Sua mãe, Eugénie Launois, era uma mulher ativa e inteligente, que se dedicou à educação dos seus dois filhos. Alguns elementos da sua família, ocuparam importantes posições na sociedade francesa tendo, por exemplo, o seu primo, Raymond Poincaré, sido primeiro-ministro e mesmo Presidente da República durante a Primeira Guerra Mundial. Henri era

Figura 1.7: Jules Henri Poincaré

desajeitado e distraído, mas, como Euler e Gauss, tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático.(veja[2])

Poincaré começou a falar precocemente. Contudo, tinha uma péssima coordenação motora, que se refletia na caligrafia e numa total inaptidão para desenhar, tendo em simultâneo sérios problemas de visão. Em contrapartida, possuía uma memória extraordinária; quando terminava um livro era capaz de se lembrar da página e linha em que determinada ação ocorreu, e quando começou a ter aulas descobriu que sem nunca tirar apontamentos era capaz de reproduzir integralmente as aulas a que acabara de assistir.

Ingressou na Escola Politécnica em 1873, continuou seus estudos na Escola de Minas sob a tutela de Charles Hermite e obteve um diploma em engenharia de minas, em 1879, e ficou ligado ao Departamento de Minas pelo resto de sua vida. Em 1875 publicou seu analysis situs, um tratado sistemático de topologia. Ele trabalhou no Ministério de Serviços Públicos como um engenheiro na preparação da rodovia noroeste de 1881 a 1885, e tornou-se eventualmente engenheiro chefe da Brigada de Mineiros em 1893 e inspetor geral em 1910. Ele estava no cargo quando ocorreu um desastre de mineração em Magny em Agosto de 1879 no qual morreram 18 mineiros. Ele conduziu as investigações oficiais sobre o acidente de forma conscienciosa e humana. Foi na mesma época que ele estava se preparando para seu doutorado em ciências da matemática sob supervisão de Charles Hermite. Sua tese de doutorado foi no campo das equações diferenciais. Poincaré delineou uma nova maneira de estudar as propriedades destas funções. Ele não somente abordou a questão da determinação das integrais de tais equações, mas também foi a primeira pessoa a estudar suas propriedades geométricas gerais. Ele conclui que elas poderiam ser usadas para modelar o comportamento de múltiplos corpos em movimento livre dentro do sistema solar. Poincaré casou-se com a senhorita Poulain d'Andecy. Juntos eles tiveram 4 filhos: Jeanne (nascida 1887), Yvonne (nascida 1889), Henriette (nascida 1891), e Léon (nascido 1893). Em 1887, com 32 anos, Poincaré foi eleito para a Academia Francesa de Ciências, da qual se tornou o presidente em 1906, e foi eleito para a Academia Francesa em 1909.

Também em 1887, em homenagem a seu 60° aniversário, Oscar II, Rei da Suécia patrocinou uma competição matemática com um prêmio em dinheiro para resolução da questão de quão estável é o sistema solar, uma variação do problema dos três corpos. Poincaré ressaltou que o problema não estava corretamente estabelecido, e provou que a solução completa não pode ser encontrada. Seu trabalho foi tão impressionante que em 1888 o júri reconheceu seu valor através de uma premiação. Ele mostrou que a evolução de tal sistema é frequentemente caótica no sentido que pequenas perturbações em seu estado inicial, tais como uma ligeira mudança na posição inicial do corpo, irão levar a uma mudança radical em seu estado final. Se esta sutil mudança não é percebida pelos nossos instrumentos de medição, então não seremos capazes de predizer o estado final a ser obtido.

Desenvolveu o conceito de funções automórficas que usou para resolver problemas de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes algébricos, na verdade ele foi o fundador da teoria dessas funções.(veja[2])

No âmbito da matemática aplicada estudou numerosos problemas sobre óptica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, mecânica quântica, teoria da relatividade e cosmologia.

É importante ressaltar que Poincaré escreveu extensamente sobre probabilidades. Ele tinha grande interesse pela topologia que seria muito estudado no século seguinte. A topologia não foi invenção de um homem, mas de muitos estudiosos, tais como: Euler, Mobius e Cantor; mas como data para o início do assunto a mais apropriada é 1895, o ano em que Poincaré publicou sua Analysis situs. Esse livro pela primeira vez forneceu um desenvolvimento sistemático.(veja[2])

A topologia passa a ser um ramo amplo e muito importante da matemática, com muitos aspectos, podendo ser dividida em dois ramos: a topologia combinatória e a topologia dos conjuntos de pontos. Poincaré tinha pouco entusiasmo pela topologia dos conjuntos de pontos. A topologia combinatória ou Analysis situs como era então chamada, é o estudo de aspectos qualitativos intrínsecos das configurações espaciais que permanecem invariantes por transformações biunívocas contínuas. Popularmente conhecida como geometria da borracha, pois deformações de um balão, por exemplo, sem furá-lo ou rasgá-lo, são exemplos de transformações topológicas. Entre as contribuições originais de Poincaré à topologia está uma generalização da fórmula poliedral de Descartes-Euler para espaços de dimensão superior, usando o que ele chamou números de Betti em honra de Enrico Betti(1823-1892), que ensinara na Universidade de Paris e observou algumas das propriedades desses invariantes topológicos. (veja[2])

A maior parte da topologia, porém, trabalha com aspectos qualitativos e não quantitativos da matemática, e com isso ela rompe com o estilo prevalecente da época da análise do século XIX. A atenção de Poincaré deve ter sido atraída para a Analysis situs por tentativas de integração qualitativa de equações diferenciais. Se o interesse de Poincaré pela topologia tivesse se mantido ele poderia ter antecipado mais desse ramo da matemática, um dos mais favorecidos e fecundos campos de pesquisa do século XX.

Poincaré é conhecido por ter sido o Último Universalista, isto é, o último matemático que dominou e fez contribuições importantes em todas as áreas da matemática. O seu domínio absoluto da análise, principalmente da análise complexa, foi parte importante do seu segredo para o universalismo, pois permitiu-lhe modernizar ataques a diversos problemas e estabelecer ligações inesperadas entre áreas distantes.

O seu mérito foi justamente reconhecido por várias instituições, e em 1906, atingiu a distinção máxima que um cientista francês pode obter, tendo sido nomeado Presidente da Academia das Ciências.

A 17 de Julho de 1912, com 58 anos de idade, Poincaré morreu de um embolismo enquanto se vestia. Foi enterrado no mausoléu da família Poincaré no Cemitério de Montparnasse, Paris.

O Ministro da Educação da França, Claude Allègre, propôs em 2004 que Poincaré fosse exumado e enterrado no Pantheon em Paris, o qual é reservado a cidadãos franceses que prestaram grandes serviços à nação.

Capítulo 2

Poliedros - Poliedros de Platão

2.1 Introdução

Estudaremos neste capítulo o Teorema de Euler para poliedros convexos e os poliedros regulares que são conhecidos como sólidos de Platão. Vamos começar definindo poliedros, seus elementos e suas propriedades, bem como fazer a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos, identificar e provar que existem apenas cinco poliedros regulares e uma aplicação que relaciona a soma dos ângulos internos das faces dos mesmos com o número de vértices V.

2.2 Teorema de Euler para Poliedros Convexos

O resultado central desse capítulo é o Teorema de Euler para poliedros convexos. Vamos tratar agora do problema de contar as faces F, os vértices V e as arestas A de um poliedro chegando a esse Teorema. Seu enunciado, por sua beleza e simplicidade, fascina os alunos quando entram em contato com ele pela primeira vez: V - A + F = 2. A observação do resultado em desenhos de poliedros ou em objetos do cotidiano é estimulante, prazerosa e, sobretudo, intrigante. O termo poliedro tem sido usado em diferentes épocas por diferentes pessoas com os mais variados significados, muitas vezes, incompatíveis entre si. Não é raro que uma mesma pessoa use o mesmo termo com interpretações diferentes em momentos diferentes. Sem uma definição precisa, interpretações equivocadas como, por exemplo, sobre a validade do Teorema de Euler, podem aparecer.

Ao longo da História, grandes filósofos e matemáticos dedicaram a sua vida inteiramente ao estudo da geometria, sendo os matemáticos da Grécia Antiga os mais conhecidos. Por exemplo, a escola de Pitágoras (ou pitagórica) tinha como lema "Tudo são números", enquanto que a escola de Platão (designada também de Academia) tinha uma inscrição sobre a porta que dizia: "Não entre aqui ninguém que não seja geômetra".

Figura 2.1: Platão

Na geometria espacial a visualização é muito importante para que os conceitos sejam compreendidos com clareza e precisão e muitas vezes, nos livros didáticos do Ensino Médio, não encontramos essa precisão. Contudo, um professor naturalmente dispõe de apenas o livro texto como ferramenta didática para o ensino deste assunto e assim procurar outros textos que o ajudem no seu trabalho é de valiosa aceitação. O uso de materiais concretos se põe como uma excelente alternativa para explorar o assunto. Outra abordagem bem estimulante é o uso de recursos computacionais: modelos tridimensionais podem ser manuseados virtualmente na tela de um computador, construindo assim uma ponte entre a representação planar, quando o sólido está parado na tela do computador, e o modelo concreto, quando o usuário interage com o sólido. Portanto, é a investigação da melhor forma de ensinar e aprender que foram os incentivadores desta pesquisa.

Definição 2.1 *Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados de as faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia.*

A figura abaixo mostra os elementos de um paralelepípedo. Observe que neste caso temos, 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. Denotando por F o número de faces, por A o número de arestas e por V o número de vértices vemos que, $V - A + F = 2$. Euler mostrou que esta relação vale em qualquer polígono convexo (veja o Teorema 2.3 abaixo).

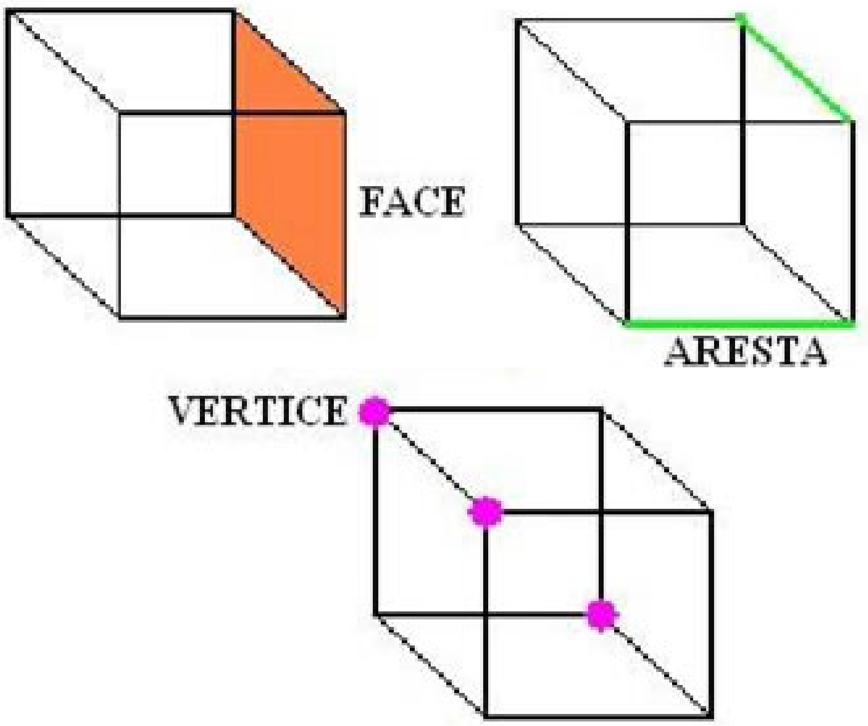


Figura 2.2: Elementos de um poliedro

Definição 2.2 *Um poliedro é dito convexo quando ele limita um sólido convexo.*

Equivalentemente, um poliedro é convexo quando qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em, no máximo, dois pontos.

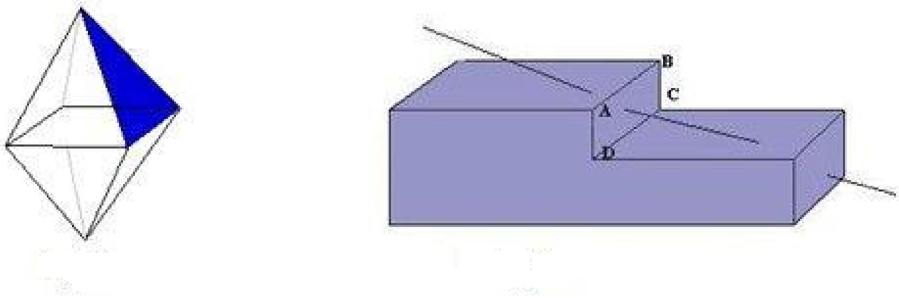


Figura 2.3: Poliedro convexo e não convexo

Um poliedro convexo interessante, descoberto por Arquimedes, é o da figura abaixo, ele é formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Além disso contam-se 90 arestas e 60 vértices. Note que, neste caso, também temos $V - A + F = 2$. Entre outras coisas, este poliedro inspirou a bola da copa de 1970.

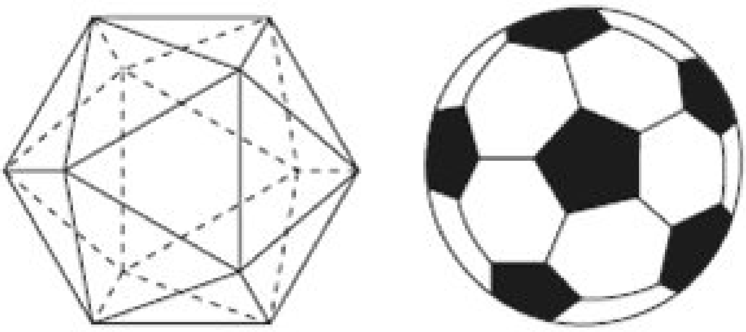


Figura 2.4: Poliedro e a bola de 1970

Neste trabalho vamos dar atenção aos poliedros convexos, na literatura uma das causas da dificuldade que os matemáticos do passado tiveram para demonstrar teoremas sobre poliedros, estava justamente na falta de uma definição precisa do significado dessa palavra (veja[8]).

De acordo com o número de faces, os poliedros possuem nomes especiais, na tabela seguinte listamos alguns destes:

número de faces	nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
13	tridecaedro
14	tetradecaedro
15	pentadecaedro
16	hexadecaedro
17	heptadecaedro
18	octadecaedro
19	eneadecaedro
20	icosaedro

Teorema 2.3 (Euler) *Seja P um poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces. Então vale a igualdade $V - A + F = 2$.*

Demonstração: Vamos começar escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e é perpendicular à reta r. O plano H será chamado plano horizontal e as retas paralelas a r serão chamadas retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P, o qual será chamado de espaço superior, ou seja, seus pontos estão acima de H. Vamos imaginar o sol brilhando sobre o semi-espaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto x do semi-espaço superior corresponde um ponto x' em H, chamado de sombra de x, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x. A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de X. A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo se não for vazio é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro P. A sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal cujo contorno γ' é a sombra de uma poligonal fechada γ, formada por arestas de P. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P. A poligonal γ é chamada de o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' é sombra de dois pontos de P. Dados dois pontos de P que possuem a mesma sombra, ao mais alto chamaremos ponto iluminado e ao mais baixo de sombrio. Percebemos que o poliedro se decompõe em 3 partes disjuntas:

1) o conjunto dos pontos iluminados;

2) o conjunto dos pontos sombrios;

3) o conjunto aparente.

Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente γ, cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1, ou seja, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'.

Vamos utilizar a notação P_1' para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é das faces iluminadas. Utilizaremos a notação P_2' para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, ou seja, contidas em P_2 (veja[4]).

Decompondo cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números V, A e F individualmente mas o número $V - A + F$ permanecerá constante. De fato, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam em uma unidade e o número V não se altera, então $V-(A+1)+F+1 = V-A+F$. Desta forma, sem perda de generalidade, podemos supor que todas as faces são triângulos.

Como toda face tem 3 lados e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que $3F = 2A$. Devemos calcular a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a π radianos. Portanto, $S = \pi F$. Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$, teremos:

$$S = 2\pi(A - F). \tag{2.1}$$

Sabemos que $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios e que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Logo S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo P_1'.

Somando os ângulos dos vértices, onde V_1 é o número de vértices iluminados, V_2 é número de vértices sombrios e V_0 é número de vértices do contorno aparente γ. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Temos que:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) \qquad \text{e} \qquad S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando as duas igualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2) + 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2) \\ &= 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi \\ &= 2\pi V - 4\pi \end{aligned}$$

O que junto com a equação (2.1) nos dá $V - 2 = A - F$, donde $V - A + F = 2$. Como queríamos demonstrar. □

Como aplicação do teorema de Euler mostramos a seguinte proposição:

Proposição 2.4 *Seja P um poliedro convexo. Então a soma dos ângulos internos das faces do poliedro P é dada por: $S = 2\pi(V - 2)$, onde V é o número de vértices de P.*

Demonstração: Como antes, sejam F, A e V o número de faces, arestas e vértices, respectivamente, do poliedro P. A soma dos ângulos internos de cada face é igual a $\pi(n - 2)$, onde n é o número de lados dessa face. Seja $n_j, j = 1, ..., F$ o número de lados da face j. Então, a soma S dos ângulos internos de todas as faces do poliedro é dada por,

$$S = \sum_{j=1}^{F} \pi(n_j - 2) = \pi \left(\sum_{j=1}^{F} n_j - 2 \right).$$

E como cada aresta é lado de duas faces, $\sum_{j=1}^{F} n_j = 2A$, logo $S = 2\pi(A - F)$ e pelo Teorema de Euler (Teorema 2.3), $V - A + F = 2$, donde $S = 2\pi(V - 2)$. □

2.3 Poliedros de Platão

Definição 2.5 *Um poliedro convexo é chamado de regular quando suas faces são polígonos regulares congruentes entre si e o número de faces concorrentes em cada vértice é sempre o mesmo.*

Os poliedros regulares são chamados de sólidos platônicos, ou poliedros de Platão, em homenagem ao filósofo grego Platão(427-347 a.C) que os utilizava para explicar cientificamente os fenômenos naturais. Dedicou-se à vários temas como Ética, Política, Matemática e Teoria do Conhecimento, Metafísica, dedicou-se também, de forma bem particular, à geometria, pela qual teve uma grande paixão. Platão entendia que todos os alunos da academia de Atenas, fundada por ele, deveriam entender geometria. Os nomes sólidos platônicos ou corpos cósmicos foram dados devido a forma pela qual Platão, em diálogos com Timeu, os empregou para explicar a natureza. Não se sabe se Timeu realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem para desenvolver suas ideias. Nesses diálogos com Timeu, Platão associa cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) com um poliedro regular. Terra é associada com o cubo, ar com o octaedro, água com o icosaedro e fogo com o tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: "Faltava ainda uma quinta construção que Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu."Aristóteles introduziu um quinto elemento, éter, e postulou que os céus eram feitos deste elemento, mas ele não teve interesse em associá-lo com o quinto sólido de Platão.

Euclides deu uma descrição matemática completa dos sólidos platônicos no último livro (Livro XIII) de Os Elementos. As proposições de 13 a 17 no Livro XIII descrevem as construções do tetraedro, do octaedro, do cubo, do icosaedro, e do dodecaedro, nesta ordem. Para cada sólido, Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta do sólido. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares. Muita da informação no Livro XIII é provavelmente obtida do trabalho de Teeteto. Esse livro é dedicado inteiramente aos sólidos regulares e contém extensos cálculos.(veja[8])

Séculos mais tarde, os poliedros regulares inspiraram Johannes Kepler (1571-1630), astrónomo alemão, no estudo do movimento dos seis planetas conhecidos na época (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vénus e Mercúrio). Kepler imaginou um modelo do sistema solar composto por esferas concêntricas inscritas e circunscritas num cubo, num tetraedro, num octaedro, num dodecaedro e num icosaedro.

Johann Kepler nasceu em 1571 perto da cidade de Stuttgard e estudou na universidade de Tubingen. Sua intenção inicial era tornar-se ministro Luterano, mas um profundo interesse pela astronomia levou-o a mudar seus planos. Kepler foi um dos precursores do cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de cálculo integral. Criou três leis para o movimento dos planetas, intituladas Leis de Kepler. Essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna.

Kepler deu também notáveis contribuições ao estudo dos poliedros. Parece ter sido ele o primeiro a observar o antiprisma, obtido de um prisma efetuando-se uma rotação de sua base superior em seu próprio plano de modo a fazer seus vértices corresponderem aos lados da base inferior, e ligando então, em zigue-zague, os vértices das duas bases. Ele também descobriu o cuboctaedro, o dodecaedro rômbico e o triacontraedro rômbico. O segundo desses poliedros aparece na natureza na forma de cristal de granada. Dos quatro poliedros estrelados regulares, dois foram descobertos por Kepler. Ele também se interessou pelo problema da pavimentação de um plano com polígonos regulares, não necessariamente todos similares, e o de preencher o espaço com poliedros regulares.

Teve muitas dificuldades na vida pessoal. Morreu em 1630 durante uma viagem para receber alguns de seus salários atrasados.

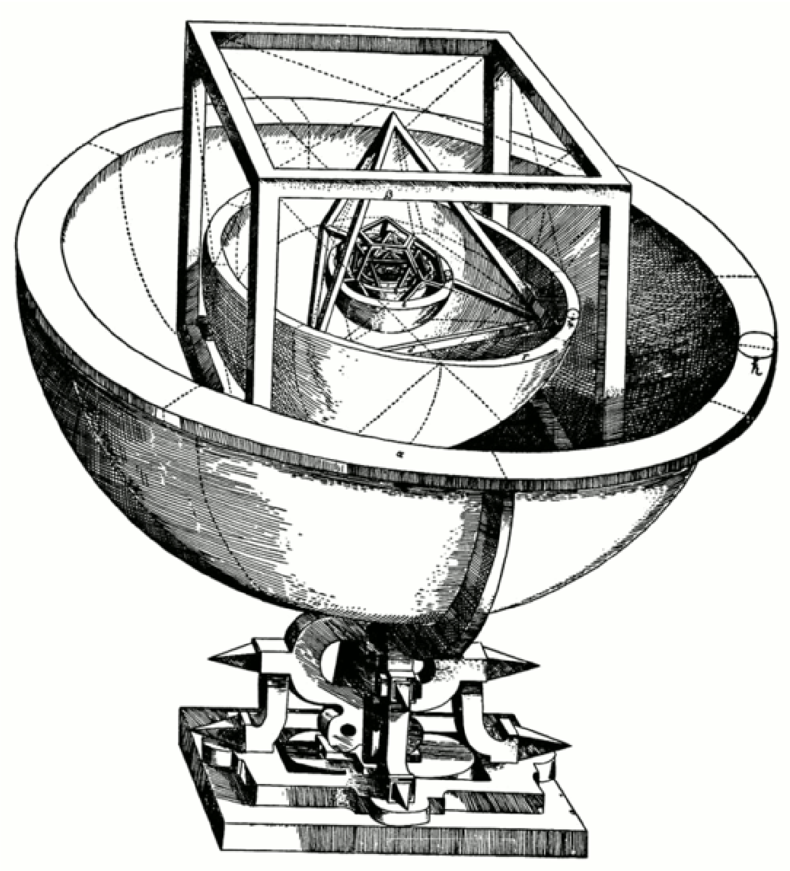


Figura 2.5: Modelo de Kepler para os planetas

Teorema 2.6 *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração: Seja P um poliedro regular convexo com F faces. Seja n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice de P. Como cada aresta do poliedro é a intersecção dos lados de dois polígonos adjacentes, notamos que se contarmos todos os lados de todos os polígonos, estaremos contando duas vezes cada aresta do poliedro. Então:

$$2A = nF \qquad \text{e} \qquad pV = nF.$$

Substituindo na fórmula de Euler, $V - A + F = 2$, obtemos $\dfrac{nF}{p} - \dfrac{nF}{2} + F = 2$ e logo,

$$F = \frac{4p}{2p - pn + 2n}.$$

Como n e F são positivos, temos que $2p - pn + 2n > 0$, ou seja, $p < \dfrac{2n}{n-2}$.

Como $p \geq 3$, necessariamente temos $n < 6$. Por outro lado, também é claro que $n \geq 3$. Logo, $n \in \{3, 4, 5\}$. Assim, temos as seguintes possibilidades:

(a) $\mathbf{n = 3}$.

Neste caso, $3 \leq p < \frac{6}{1} = 6$. Ou seja, $p \in \{3, 4, 5\}$

(a.1) $n = 3, \ p = 3$.

$$F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3} = 4 \qquad \text{(Tetraedro)}$$

(a.2) $n = 3, \ p = 4$.

$$F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3} = 6 \qquad \text{(Hexaedro)}$$

(a.3) $n = 3, \ p = 5$.

$$F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3} = 12 \qquad \text{(Dodecaedro)}$$

(b) $\mathbf{n = 4}$.

Agora, $3 \leq p < \frac{8}{2} = 4$. Donde, $p = 3$.

$$F = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4} = 8 \qquad \text{(Octaedro)}$$

(c) $\mathbf{n = 5}$.

Neste caso, $3 \leq p < \frac{10}{3}$, Daí, $p = 3$.

$$F = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5} = 20 \qquad \text{(Icosaedro)}$$

□

Na tabela seguinte listamos os poliedros de Platão.

Nome	Faces (F)	Vértices (V)	Arestas (A)
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

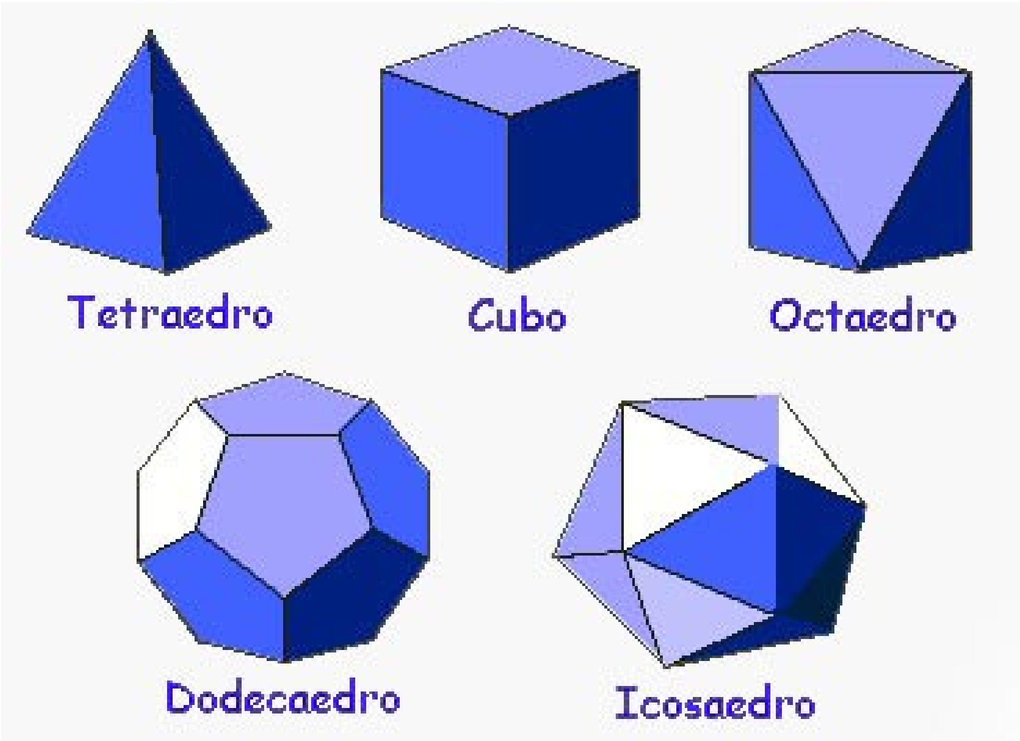


Figura 2.6: Poliedros de Platão

POLIEDROS DE PLATÃO

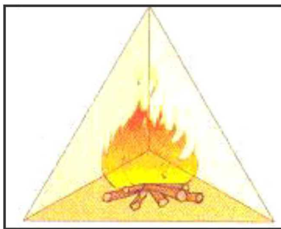
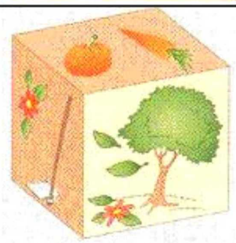
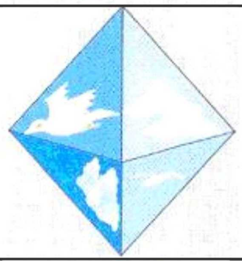
	**TETRAEDRO** (Modelo do Fogo): **Sólido formado por 4 faces, triângulos equiláteros, e em cada vértice concorre 3 faces. O prefixo *tetra*deriva do grego e significa quatro (quatro faces). Este sólido representa o fogo, porque segundo Platão (séc. IV ac.) o átomo do fogo teria a forma de um poliedro com 4 lados (tetraedro).**
	**Cubo** (Modelo da Terra): **O cubo o único poliedro regular com faces quadrangulares. O cubo tem 6 faces, pelo que também se pode chamar de hexaedro (*hesa* significa seis em grego).Este sólido representa a terra, porque Platão acreditava e afirmava que os átomos de terra seriam cubos, os quais permitiam ser colocados perfeitamente lado a lado, conferindo-lhes solidez.**
	**OCTAEDRO** (Modelo do Ar): **As faces deste poliedro os também triângulos equiláteros, mas em cada vértice reúnem-se quatro triângulos. É formado por 8 faces, pelo que o poliedro se chama octaedro (*octa* significa oito em grego). Este sólido representa o ar, porque o modelo de Platão para um átomo de ar era um poliedro com 8 faces (octaedro).**
	**DODECAEDRO** (Modelo do Cosmos): **O dodecaedro o único poliedro regular cujas faces os pentágonos regulares. É formado por 12 faces, pentágonos regulares, e em cada vértice concorre 3 faces. O prefixo *dodeca* significa doze em grego. Este sólido representa o universo, porque para Platão o cosmos seria constituído por átomos com a forma de dodecaedros.**
	**ICOSAEDRO** (Modelo da Água): **Neste poliedro os cinco os triângulos equiláteros que se encontram em cada vértice, perfazendo vinte faces. Por isso, o poliedro se chama icosaedro (*icosa* significa 20 em grego).Este sólido representa a água, porque Platão defendia que a água seria constituída por icosaedros.**

Figura 2.7: Poliedros de Platão e a Natureza

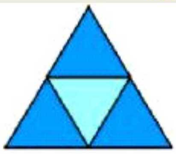
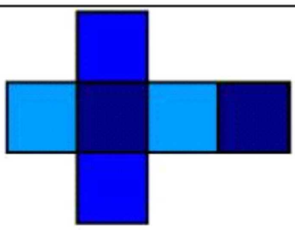
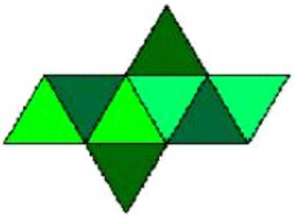
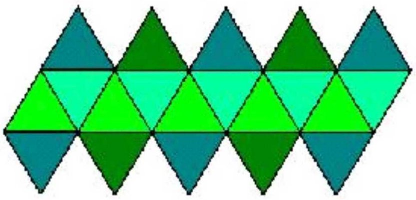
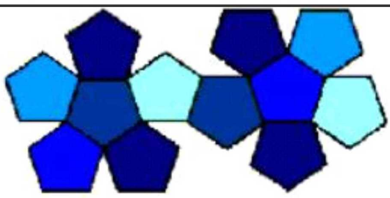
PLANIFICACÃO	SÓLIDO
	**Tetraedro:** É um poliedro regular com 4 faces sendo estas triângulos equiláteros, 4 vértices e 6 arestas. O Tetraedro pode formar-se a partir de um molde com quatro triângulos.
	**Cubo:** É um poliedro regular com 6 faces sendo estas quadrados, 8 vértices e 2 arestas. O cubo pode ser formado a partir de um molde com seis quadrados.
	**Octaedro:** É um poliedro regular com 8 faces sendo estas triângulos equiláteros, 6 vértices e 12 arestas. O octaedro pode ser formado a partir de um molde com oito triângulos equiláteros.
	**Icosaedro:** É um poliedro regular com 20 faces que são triângulos equiláteros, 12 vértices e 30 arestas. O icosaedro pode ser formado a partir de um molde de vinte triângulos equiláteros.
	**Dodecaedro:** É um poliedro regular com 12 faces que são pentágonos, 20 vértices e 30 arestas. O dodecaedro pode formar-se a partir de um molde com vinte pentágonos.

Figura 2.8: Planificação dos Poliedros de Platão

Capítulo 3

Principais Demonstrações do Teorema de Euler

3.1 Introdução

Estudaremos neste capítulo as principais demonstrações do Teorema de Euler para poliedros. Na verdade a relação de Euler não é verdadeira para todos os poliedros de acordo com nossa definição. Mas, para poliedros convexos ela é verdadeira. Em contextos mais gerais, onde inclusive se adota uma definição de poliedro mais abrangente, ou seja, menos restritiva que a nossa, o valor $V - A + F$ é chamado de característica de Euler do poliedro e denotada por $\chi(P)$, no caso do poliedro ser convexo $\chi(P) = 2$. Não é tão simples fazer tais demonstrações pois, muitas exigem conhecimentos de alto nível e complexos, mas vamos tentar de forma sucinta elucidá-las e assim mostrar a beleza das mesmas. A primeira é a de Cauchy, a segunda é a de Poincaré que trouxe novas ideias para o Teorema de Euler e a terceira é a de Legendre que utilizou como base a fórmula de Girard para demonstrar o Teorema de Euler.

Leonhard Euler foi o primeiro a chamar a atenção para o número $\chi(P) = V - A + F$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces de um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$. Ele acreditou ter demonstrado $\chi(P) = 2$ para todo poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$, provavelmente admitindo como poliedros apenas aqueles que são homeomorfos à esfera(veja[6]). Vamos demonstrar o Teorema de Euler segundo Poincaré provando para poliedros de dimensão n, ou seja, qualquer dimensão e assim provar que a característica $\chi(P)$ é igual à soma alternada dos números de Betti de P.

Enrico Betti nasceu em Pistoia, Itália no dia 21 de outubro de 1893, foi um grande Matemático. É atualmente lembrado exatamente pelo seu artigo de 1871 sobre topologia, dando nome aos números de Betti, também trabalhou com Teoria das equações, obtendo resultados também contidos na teoria de Galois. Graduou-se em matemática pela Universidade de Paris, 1846. Morreu em 11 de agosto de 1892 em Soraia, Itália.

Vamos ainda neste capítulo, conhecer um pouco da geometria esférica e algumas definições. Sua importância para o desenvolvimento da ciência e o cotidiano das pessoas é inegável. Aplicações como: astronomia, localização através do sistema GPS e estudo da superfície terrestre, mostram que o estudo da matemática, nasce para resolver problemas da sociedade e assim facilita para o professor do Ensino Médio responder perguntas como: Pra que serve isto?

Uma aplicação interessante seria, nas turmas do Ensino Médio, recortar um triângulo da Geometria Euclidiana Plana, ou seja, recortar um triângulo de uma folha de papel e colar este triângulo sobre uma bola de isopor, e assim fazer com que os alunos percebam que o triângulo de papel não é colado perfeitamente sobre a bola de isopor. Passarão a questionar o porquê disso e assim vão começar a observar as diferenças entre a geometria plana e a geometria esférica, servindo de pano de fundo para introdução do conteúdo nessas turmas.

3.2 Demonstração de Cauchy

A demonstração mais divulgada deste Teorema no caso de poliedros homeomorfos à esfera é basicamente devida à Cauchy. Neste estudo vamos esclarecer as condições que precisam ser admitidas para que a demonstração seja válida, começando pela definição de poliedro. Provavelmente Euler, que nunca definiu de forma precisa o que são poliedros, não considerava como poliedros, os sólidos como o da figura abaixo, para os quais seu Teorema é falso.

Há muito tempo se conhecem exemplos de poliedros, como o da figura acima, nos quais a relação $V - A + F = 2$ não é verdadeira. No caso do poliedro acima temos, $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$.

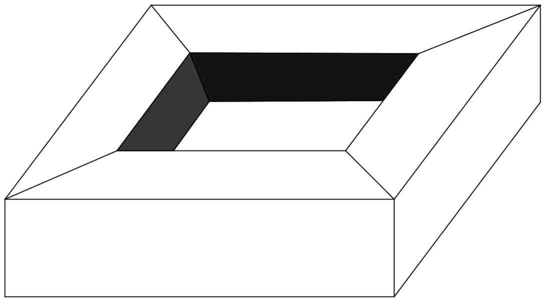


Figura 3.1: Poliedro não convexo

Teorema 3.1 *Seja P um poliedro homeomorfo a uma esfera, então:* $\chi(P) = 2$.

Demonstração: Seja P um poliedro homeomorfo a uma esfera. Sem modificar o número $V - A + F$ podemos supor que todas as faces do poliedro são triângulos. De fato, considerando três vértices consecutivos V_1, V_2 e V_3 de uma face qualquer, ao traçarmos uma diagonal do vértice V_1 ao vértice V_3 criamos uma nova face do poliedro (note que esta nova face é triangular). Este novo poliedro tem o mesmo número de vértices do anterior, mas o número de faces e o número de arestas aumentou em um. Assim, o número $V - A + F$ não se modifica.

Agora retire uma face do poliedro P, obtemos um novo poliedro que comparado com o original, possui o mesmo número de arestas A e o mesmo número de vértices V, porém com uma face a menos. Desse modo, provar a relação de Euler para P é equivalente a provar que, para o poliedro modificado se verifica a igualdade $V - A + F = 1$.

Ao retirarmos uma face do poliedro original ficamos agora, no poliedro modificado, com arestas que são lados só de um dos polígono que formam o poliedro, chamaremos estas arestas de *arestas livres*.

Retiraremos agora, uma a uma, as faces que têm alguma aresta livre. Inicialmente, após retirarmos a primeira face do poliedro original, as faces com alguma aresta livre têm só uma aresta livre e ao retiramos uma destas faces, o número de vértices permanece o mesmo, o número de arestas aumenta em um e, claro, o número de faces diminui em um. Portanto o número $V - A + F$ não se altera. Continuando nesse processo de retirada das faces com arestas livres observamos que no poliedro modificado podemos ter faces com uma, duas ou três arestas livres (as faces são triângulos). É claro que quando retiramos uma face que tem só uma aresta livre o mumero $V-A+F$ permanece o mesmo, se retiramos uma face que tem duas arestas livres, então o número de vértices diminue em um, o de arestas diminui em 2 e o de faces em 1, logo $V-A+F$ continua o mesmo. Se retiramos uma face que tem três arestas livres, então o número de vértices diminui em 2, o de arestas diminui em 3 e o de faces em 1, de novo, $V-A+F$ permanece constante. Assim, a característica de Euler do poliedro modificado corresponde a característica da última face, que é um triângulo, $3-3+1=1$. □

3.3 Demonstração de Poincaré

O primeiro a notar a natureza topológica do número de Euler, agora chamada de Característica de Euler, foi Henri Poincaré, em 1895. Poincaré notou que a característica de Euler não é determinada pelo poliedro em si, mas pela topologia do poliedro.(veja[10])

O número de Betti β^n de dimensão n é um invariante topológico e estes números se relacionam com a característica de Euler através da expressão:

$$\chi(P) = \Sigma(-1)^n\beta^n.$$

Este resultado é muito importante pois estende o teorema para todas as dimensões e estabelece o seu significado topológico. Nesta seção demonstraremos o Teorema de Poincaré e daremos algumas definições importantes para o entendimento da mesma.

Definição 3.2 *Dizemos que um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, dados dois pontos quaisquer $x, y \in C$, o segmento de reta ligando os pontos x e y está inteiramente contido no conjunto C.*

Note que uma interseção de uma família arbitrária de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$ é convexa.

Definição 3.3 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Chamamos envoltória convexa de A, ou fecho convexo de A à intersecção de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contêm o conjunto A.*

O fecho convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ pode também ser caracterizado como o conjunto de todas as combinações lineares convexas dos elementos de A. Ou seja, o conjunto dos elementos da forma $x = \sum_i t_i a_i$, com $a_i \in A,\ t_i \in \mathbb{R},\ t_i > 0$ e $\sum_i t_i = 1$.

Definição 3.4 *Dizemos que um conjunto $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, de $n+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$ está em posição geral se, e somente se, os n vetores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_n - x_0$ são linearmente independentes.*

Note que isto é independente da escolha do ponto x_0.

Definição 3.5 *Um p-simplexo s em $\mathbb{R}^n$, $p \leq n$, é a envoltória convexa de um conjunto $A = \{x_0, x_1, ..., x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, de (p+1) pontos em posição geral. O p-simplexo gerado pelos pontos $x_0, x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^n$ será denotado por $s = [x_0, x_1, ..., x_p]$, e os pontos $x_i,\ i = 1, 2, ..., p$. serão chamados vértices do p-simplexo s.*

Definição 3.6 *Uma face de dimensão k de um simplexo $s = [x_0, x_1, ..., x_n]$ é qualquer simplexo $t = [x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$ cujos vértices são vértices do simplexo s.*

As faces de dimensão 0 são os vértices $[x_0], [x_1], ..., [x_n]$. As faces de dimensão 1 são os segmentos $[x_i, x_j], i \neq j$. As faces de dimensão 2 de um simplexo são triângulos $[x_i, x_j, x_k], i \neq j, j \neq k, i \neq k$; etc.

Definição 3.7 *Um poliedro P em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção finita de simplexos em $\mathbb{R}^n$ tais que:*

(a) se s é um simplexo de P, então toda face de s é também um simplexo de P;

(b) se s' e s'' são simplexos de P, então $s' \cap s''$ é uma face comum a s' e s'' ou $s' \cap s''$ é vazio.

Dizemos que o poliedro P tem dimensão k se k é a maior dimensão de um simplexo contido no poliedro P. As faces de cada um dos simplexos que formam o poliedro são as faces do poliedro.

Definição 3.8 *Seja P um poliedro de dimensão n, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ seja α_i o número de simplexos de dimensão i de P. O número $\chi(P) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i$ é chamado característica de Euler-Poincaré de P.*

Por exemplo, se P é o conjunto das faces de um n-simplexo, então $\alpha_i = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ i+1 \end{array} \right)$, para $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Assim, $\chi(P) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i = 1$. Note que se P é o poliedro formado pelas faces de dimensão menor ou igual a n de um simplexo de dimensão $n+1$, então a caracteristica de Euler, $\chi(P) = 1 + (-1)^n$. Observe que, neste caso, tal poliedro é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^n$ e, em particular, se $n = 2$ a caracteristica deste poliedro é 2.

Definição 3.9 *Seja P um poliedro em $\mathbb{R}^n$, chama-se cadeia de dimensão i, com $i = \{0, 1, 2, ..., n\}$, ao conjunto $c = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$, cujos elementos são simplexos de dimensão i pertencentes ao poliedro P.*

Denotemos por $C_i = C_i(P)$ o conjunto das cadeias de dimensão i do poliedro P. Em C_i podemos definir uma soma de cadeias como segue-se:

$$C_i \times C_i \longrightarrow C_i, \quad (c, c') \longmapsto c + c' := c \cup c' - c \cap c''$$

Com esta operação o conjunto C_i tranforma-se num grupo abeliano. De fato, é claro que a soma acima definida é comutativa e associativa. Além disso, esta soma tem como elemento neutro a cadeia vazia, que denotamos por 0, e cada cadeia é o seu próprio inverso, ou seja, $c + c = 0$ para todo $c \in C_i$.

Podemos também definir, de maneira natural, uma "multiplicação por escalar" com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

$$\mathbb{Z}_2 \times C_i \longrightarrow C_i, \quad (\lambda, c) \longmapsto \lambda c := \begin{cases} c \text{ se } \lambda = 1; \\ 0 \text{ se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Com estas duas operações C_i torna-se um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$. Uma base para este espaço vetorial é formada pelos simplexos de dimensão i do poliedro P, sendo assim, $dim_{\mathbb{Z}_2}C_i = \alpha_i$.

Nos espaços vetoriais C_i definimos as aplicações lineares, chamadas de *homomorfismo bordo*,

$$\xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}}$$

que, no caso particular do homomorfismo $\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$, é definido, para cada elemento $s \in C_i$, na base de C_i formada pelos simplexos de dimensão i do poliedro P, como $\partial_i(s) =$ soma das faces de dimensão $i-1$ do simplexo s.

Por conveniência consideramos $C_{-1} = \{0\}$, logo $\partial_0 = 0$.

Proposição 3.10 *Com as notações anteriores, para cada* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *temos:*

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0.$$

Demonstração: Vamos começar mostrando que, para todo simplexo $s \in C_i$, tem-se $\partial_{i-1}(\partial_i s) = 0$ e esta última igualdade resulta do fato de que cada face de dimensão $i-2$ de s está contida em exatamente duas faces de dimensão $i-1$. □

Como consequência da proposição anterior temos que $Im(\partial_i) \subseteq Ker(\partial_{i-1})$.

Definição 3.11 *Sejam* $Z_i \subset C_i$ *o núcleo de* ∂_i *e* $B_i \subset C_i$ *a imagem de* ∂_{i+1}. *Chamam-se ciclos de dimensão i do poliedro* P, *os elementos* $c \in Z_i$; *eles são as cadeias tais que:* $\partial_i c = 0$.

Definição 3.12 *Sejam* $Z_i \subset C_i$ *o núcleo de* ∂_i *e* $B_i \subset C_i$ *a imagem de* ∂_{i+1}. *Chamam-se os bordos de dimensão i os elementos* $c \in B_i$, *tais que* $c = \partial c'$ *para algum* $c' \in C_{i+1}$.

Note que a relação fundamental $\partial_{i-1}\partial_i = 0$ significa que $B_i \subset Z_i$, ou seja, que todo bordo é um ciclo.

Sejam $z_i = dimZ_i$ e $b_i = dimB_i$. Pelo teorema da álgebra linear temos que a dimensão do domínio de uma transformação linear é igual à dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem, ou seja, $\alpha_i = z_i + b_{i-1}$.

Note que $b_n = 0$ e $b_{-1} = 0$ também.

De acordo com estas definições, concluímos que o espaço vetorial quociente $H_i(P) = \frac{Z_i}{B_i}$ chama-se o i-ésimo grupo de homologia do poliedro P com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Sua dimensão $\beta_i = z_i - b_i$ é chamada **i-ésimo número de Betti (mod 2) do poliedro** P.

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Poincaré.

Teorema 3.13 (Poincaré) *Sejam P um poliedro e $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ os números de Betti de P, então*

$$\chi(P) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - ... + (-1)^n \beta_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i$$

Demonstração: Com efeito, sendo $b_n = b_{-1} = 0$, temos:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (z_i + b_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (z_i - b_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i.$$

□

Com o corolário abaixo temos uma demonstração do teorema de Euler para poliedros homeomorfos à esfera.

Corolário 3.14 *Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um poliedro homeomorfo à esfera S^2, então $\chi(P) = 2$.*

Demonstração: Como $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$ são os números de Betti da esfera em S^2 temos que: $V - A + F = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 1 - 0 + 1 = 2$ □

O que Poincaré quer nos dizer é que todos os poliedros que se deformam no mesmo objeto têm a mesma Característica de Euler, pois são homeomorfos, ou seja, ele estende a característica de Euler a uma classe muito maior de objetos: a classe dos objetos homeomorfos a poliedros ou espaços topológicos triangularizáveis.

Uma triangulação de um espaço topológico X é um homeomorfismo $h : |P| \to X$, onde P é um poliedro. Diz-se então que o espaço X é triangulável. Se $K : |Q| \to X$ é outra triangulação, então $K^{-1}h : |P| \to |Q|$ é um homeomorfismo, logo P e Q têm os mesmos números de Betti e portanto a mesma característica de Euler-Poincaré, os quais são, por definição, os números de Betti e a Característica de Euler-Poincaré do espaço triangulável X.(veja[7])

Mostramos na tabela abaixo, algumas características de Euler e os números de Betti, bem como as figuras que representam.

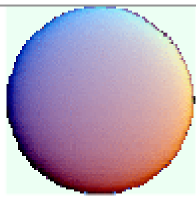
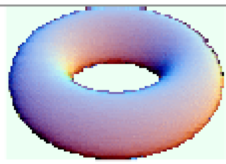
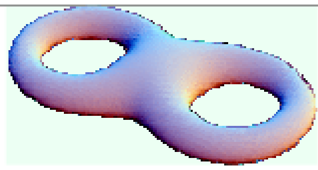
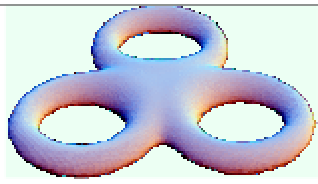
esfera		Característica de Euler 2	Números de Betti $\beta = 1$ $\beta = 0$ $\beta = 1$
toro		Característica de Euler 0	Números de Betti $\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 1$
bitoro		Característica de Euler -2	Números de Betti $\beta = 1$ $\beta = 4$ $\beta = 1$
tritoro		Característica de Euler -4	Números de Betti $\beta = 1$ $\beta = 6$ $\beta = 1$

Figura 3.2: A característica de Euler e os Números de Betti

3.4 Demonstração de Legendre

A demonstração de Legendre foi a primeira a ser publicada, embora mais rebuscada, pois usa a fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, é por isso mais educativa, já que algumas noções elementares a respeito da Geometria Esférica constituem um assunto instrutivo, importante e belo, ao alcance dos professores do Ensino Médio.(veja[6])

Para a demonstração, por conveniência, como foi feito na demonstração do Teorema 3.1, vamos supor que as faces dos poliedros considerados são triângulos, lembre que isto pode ser feito sem modificar a característica de Euler do poliedro.

Antes de começarmos a demonstração propriamente dita, daremos algumas definições importantes da Geometria Esférica que serão usadas no resto deste capítulo.

Definição 3.15 *Uma esfera $\mathcal{E}$ de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r.*

O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores que r é chamado de interior da esfera e o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são maiores que r é chamado de exterior da esfera.

Definição 3.16 *Um raio da esfera é o segmento que une o centro a um ponto qualquer da mesma.*

Definição 3.17 *Uma corda da esfera é o segmento que une dois pontos distintos da mesma.*

Definição 3.18 *Um diâmetro da esfera é uma corda que contém o centro.*

Definição 3.19 *Pontos antípodas (ou antipodais) são dois pontos da esfera $\mathcal{E}$ diametralmente opostos.*

Definição 3.20 *Circunferência máxima da esfera $\mathcal{E}$ é a intersecção da esfera com um plano α passando pelo seu centro.*

O nome circunferência máxima é dado, devido ao fato de que elas são as circunferências de maior raio contidas na esfera.

Na esfera, as circunferências máximas assumem o papel análogo ao das retas da Geometria Euclidiana e os arcos menores de circunferência máxima assumem o papel análogo ao dos segmentos de reta. Desta forma, na esfera, a distância entre dois pontos determina-se calculando o comprimento do menor arco de circunferência máxima definido pelos dois pontos.

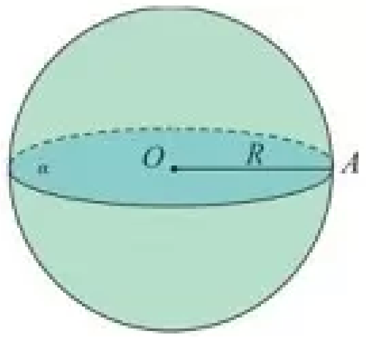


Figura 3.3: Círculo Máximo

Definição 3.21 *Ângulo esférico é uma região delimitada por duas semi-circunferências máximas que se intersectam em dois pontos antípodas. Qualquer um dos pontos antípodas é designado o vértice do ângulo e as semi-circunferências máximas são os lados do ângulo.*

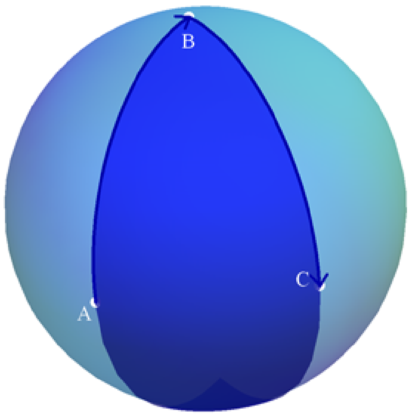


Figura 3.4: ângulo esférico

Definição 3.22 *Polígono esférico é a porção da superfície esférica, limitada unicamente por arcos de circunferência máxima, chamados seus lados.*

Definição 3.23 *Triângulo esférico é a porção da superfície esférica compreendida entre três arcos de circunferências máximas, cada um deles inferior a 180°.*

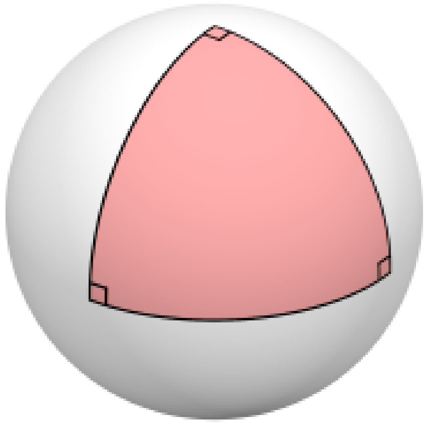


Figura 3.5: Triângulo esférico

Notamos que na geometria esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo não é uma constante valendo 180° como diz o quinto postulado de Euclides, temos esta soma variando de 180° a 540° , dependendo do triângulo considerado.

Definição 3.24 *Dadas duas circunferências máximas, estas intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, o que divide a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões são chamadas de fusos esféricos.*

Podemos calcular a área do fuso por meio de uma regra de três simples. Sendo A_e a área da superfície esférica dada por $4\pi r^2$, A_f a área do fuso e conhecendo-se a amplitude do seu ângulo α. Para tal, basta observarmos que a área do fuso esférico é diretamente proporcional à amplitude do ângulo α. Assim, temos: $A_f = 2\alpha r^2$

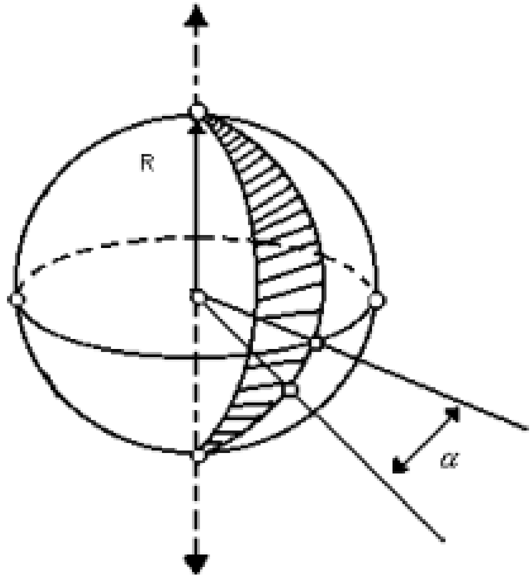


Figura 3.6: Fuso Esférico

Teorema 3.25 *(Fórmula de Girard) Seja $\alpha, \beta,$ e γ os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então, a soma $\alpha + \beta + \gamma$ é dada por:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_t}{r^2}$$

onde A_t é a área do triângulo esférico e r é o raio da esfera.

Demonstração: Vamos tomar um triângulo esférico T contido numa semi-esfera. Sabe-se que a área da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$ e a área de um fuso de amplitude α é igual a $2\alpha r^2$, com α em radianos. Considerando-se os três vértices do triângulo, temos seis fusos dos quais três intersectam-se no interior do triângulo e os outros três fusos intersectam-se no interior do triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis fusos são disjuntos dois a dois. Sejam $\alpha, \beta,$ e γ as amplitudes em radianos dos ângulos internos do triângulo que são também as amplitudes dos seis fusos. Temos que a soma da área dos seis fusos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico A_t e do dobro da área do seu antípoda. Como a área de um triângulo esférico é igual à área do seu antípoda, obtemos:

$2(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) = 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 2A_t + 2A_t = 4\pi r^2 + 4A_t$

$\Leftrightarrow r^2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi r^2 + A_t$ dividindo tudo por r^2 , temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_t}{r^2}$$

□

Obviamente, se os ângulos α, β, e γ forem dados em grau, teremos a fórmula:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + \frac{A_t}{r^2}$$

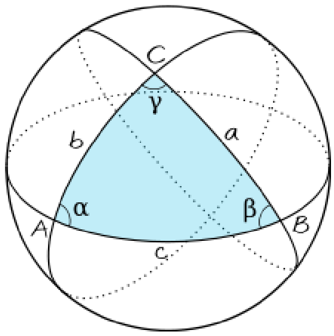


Figura 3.7: Trângulo Esférico

A fórmula de Girard mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a π, já que $A_t > 0$.

A fórmula de Girard, foi publicada pela primeira vez, em 1629, num trabalho do matemático flamengo Albert Girard (1595-1632). Albert Girard nasceu em 1595 em St Mihiel (França) e morreu no dia 8 de dezembro de 1632 em Leiden (Holanda). Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para a Holanda. Frequentou pela primeira vez a Universidade de Leiden, aos 22 anos, onde estudou Matemática. Porém, seu primeiro interesse foi a música.

Trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética. em 1626 publicou um tratado sobre trigonometria contendo as primeiras abreviaturas sen, cos, tag. Também forneceu fórmulas para o cálculo da área do triângulo. Em álgebra, desenvolveu esboços do Teorema fundamental da álgebra e traduziu os trabalhos de Stevin em 1625. Contudo, há indícios de que uma regra muito semelhante tenha sido encontrada, em 1603, pelo matemático e astrônomo inglês Thomas Harriot (1560-1621). Essa fórmula é o fato básico no qual se fundamentou Legendre para demonstrar o Teorema de Euler.

Temos também que um polígono esférico pode ser decomposto em triângulos esféricos. Um quadrilátero esférico, por exemplo, pode ser decomposto em dois triângulos esféricos. Assim, podemos obter a soma dos ângulos internos de um polígono esférico, usando o Teorema de Girard visto anteriormente.

É interessante notar que a soma dos ângulos é tanto mais próxima de 180° quanto menor for a razão entre a área do triângulo e a área da esfera. Deste modo, um triângulo bastante pequeno desenhado na superfície terrestre aparenta ser plano.

Teorema 3.26 (Euler) *Seja P um poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces. Então vale a igualdade $V - A + F = 2$.*

Demonstração: Consideremos uma esfera $\mathcal{E}$, de raio r, cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P.

Vamos projetar radialmente o poliedro P sobre a esfera $\mathcal{E}$, o que obtemos é uma decomposição de $\mathcal{E}$ em triângulos esféricos, de modo semelhante a P. Assim, com essa transformação, $\mathcal{E}$ fica recoberto por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

Para a esfera $\mathcal{E}$, a qual ficou decomposta em F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices, temos que para cada um desses triângulos esféricos vale o teorema de Girard, ou seja,

$$s_t = \pi + \frac{A_t}{r^2}$$

onde s_t é a soma dos ângulos internos e A_t é a área do triângulo esférico.

Temos no total de F faces, o seguinte:

$$s_{t_1} + s_{t_2} + ... + s_{t_n} = \pi_{F_1} + \frac{A_{t_1}}{r^2} + \pi_{F_2} + \frac{A_{t_2}}{r^2} + ... + \pi_{F_n} + \frac{A_{t_n}}{r^2}$$

onde podemos escrever:

$$\Sigma s_t = \pi.F + \frac{\Sigma A_t}{r^2}$$

Sabemos que $\Sigma s_t = 2.\pi V$ pois a soma dos ângulos em torno de cada vértice é $2.\pi$. Além disso a área da superfície esférica é dada por $\Sigma A_t = 4.\pi.r^2$. Portanto, temos:

$$2.\pi.V = \pi.F + \frac{4.\pi.r^2}{r^2}$$

$$2.V - F = 4 \Longleftrightarrow F = 2.V - 4$$

Vamos observar, que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de dois triângulos simultaneamente.

Logo, $3.F = 2.A$, ou, $F + 2.F = 2.A$, de modo que:

$$2.V - 4 + 2.F = 2.A$$

Simplificando tudo por 2 , temos:

$$V - 2 + F = A$$

e finalmente, temos:

$$V - A + F = 2$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Paulo Ventura.*Geometria Diferencial.*Rio de Janeiro: IMPA,2008.

[2] BOYER, Carl B.*História da matemática*/revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. - São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[3] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp,1995.

[4] FILHO, Zoroastro Azambuja. Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática Nº3, 1983.

[5] LIMA, Elon Lages. *Elementos de Topologia Geral.* Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[6] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] LIMA, Elon Lages.A Característica de Euler-Poincaré.Rio de Janeiro: Revista Matemática Universitária Nº1,1985.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio- volume 2*.6.ed.Rio de Janeiro:SBM,2006.

[9] SÁ, de Carlos Correia e ROCHA, Jorge *Treze viagens pelo mundo da Matemática.* -2ª edição.- Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] SAMPAIO, João Carlos Vieira.*Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores.* São Carlos: EdUFSCar, 2008. 145p. (Coleção Matemática)

[11] WAGNER, Eduardo. Existe o poliedro?. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática Nº 47 , 2001.