Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Ezequiel Gomes Batista

A Importância do Método de Completar Quadrados e suas Aplicações em Geometria Analítica

São Luís - MA
2024

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Ezequiel Gomes Batista

A Importância do Método de Completar Quadrados e suas Aplicações em Geometria Analítica

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Ezequiel Gomes Batista e aprovada pela comissão julgadora.

Anselmo Baganha Raposo Júnior
(Orientador)

São Luís - MA
2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Gomes Batista, Ezequiel.
A Importância do Método de Completar Quadrados e Suas Aplicações Em Geometria Analítica / Ezequiel Gomes Batista. - 2024.
63 f.

Orientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis-ma, 2024.

1. Equações do Segundo Grau. 2. Cônicas. 3. Método de Completar Quadrados. 4. . 5. . I. Baganha Raposo Júnior, Anselmo. II. Título.

Universidade Federal do Maranhão
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFMA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Fundamentos de Matemática
Aprovada em: 13 de abril de 2024

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Orientador
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

São Luís - MA
2024

Aos que me fazem forte

Dedicatória

A todos que contribuíram para a minha formação matemática, dos quais carrego a melhor essência de tudo aquilo que me ensinaram. Em especial aos professores Francisco Jailson Carvalho Vale e Paulo Carvalho Freitas, meus professores de Ensino Fundamental e Médio, respectivamente; Luis Gonzaga Pinheiro Félix, meu professor da graduação em matemática; Anselmo Baganha Raposo Junior, Arlane Manoel Silva Vieira, João de Deus Mendes da Silva e José Santana Campos Costa, professores do Mestrado.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha família por entender minha ausência quando ansiavam que eu estivesse por perto, em especial, à Maria dos Remédios, adorável esposa, Bianca e Luana, preciosas filhas, e a Francisco Batista e Maria de Fátima, meus pais, por sempre acreditarem e incentivarem o meu progresso. Em segundo lugar, ao Professor Anselmo Baganha Raposo Júnior, por acolher a missão de me orientar no desenvolvimento deste trabalho e ajudar sem hesitação em sua construção. Em terceiro lugar, mas em igual importância, aos meus colegas de turma (todos eles!) por terem me recebido como familiar e me dado apoio que foi muito além da superficialidade de palavras, em especial, pela união durante o curso e o compromisso de encerrarmos o mestrado juntos, agradeço a Derivaldo Barros, Eudes Júnior, João Batista, Luís Eduardo, Mauro Roberto, Róger Melo e Willamys Cruz, nesta ordem unicamente alfabética.

Venha, Ootsutsuki, deixe-me mostrar o que é determinação de verdade!

Uzumaki Naruto

Resumo

Este trabalho teve em vista compreender a necessidade de apreensão do método de completar quadrados, técnica fundamental para resolver equações quadráticas e analisar lugares geométricos, mediante suas aplicações nos estudos de Geometria Analítica. Pois, muitas vezes, essa técnica tem seu poder de aplicação subestimado e seu ensino negligenciado ou apresentado apenas de maneira pontual. Para tanto, fez-se uma busca bibliográfica a respeito do tema por meio de vários livros sobre a história da matemática, livros de Geometria Analítica e artigos recentes sobre o assunto. Viu-se, então, que essa ferramenta não pode ficar associada apenas ao estudo de equações quadráticas lá no Ensino Fundamental. Para justificar, explorou-se o método em alguns contextos da Geometria Analítica, sobretudo na associação entre a equação geral do segundo grau com duas incógnitas e as equações que representam as curvas clássicas (circunferência e demais cônicas) ao comparar com a versão prolongada dessas equações.

Palavras-chave: Equação do segundo grau. Cônicas. Método de completar quadrados.

Abstract

This work aimed to understand the need to understand the method of completing squares, a fundamental technique for solving quadratic equations and analyzing geometric places, through its applications in Analytical Geometry studies. Because, often, this technique's power of application is underestimated and its teaching is neglected or presented only in a punctual manner. To this end, a bibliographical search was carried out on the topic through several books on the history of mathematics, books on Analytical Geometry and recent articles on the subject. It was then seen that this tool cannot be associated only with the study of quadratic equations in elementary school. To justify this, the method was explored in some contexts of Analytical Geometry, especially in the association between the general quadratic equation with two unknowns and the equations that represent classical curves (circumference and other conics) when compared with the extended version of these equations.

Key-words: Quadratic equation. Conics. Method of completing squares.

Sumário

Introdução

O método de completar quadrados é uma poderosa ferramenta matemática cuja construção decorre de diversas contribuições de várias eras e civilizações e que teve sua materialização como a concebemos hoje a partir da resolução retórica de problemas que, em linguagem moderna, podem ser expressos por meio de equações de segundo grau. Esse dispositivo, mesmo já bem conhecido em épocas anteriores, se modernizou e notabilizou a partir da unificação da simbologia matemática e da simbolização dos coeficientes de equações ocorrida entre os séculos XV e XVI e segue ocupando um lugar especial dentre as ferramentas básicas da matemática que não podem ser negligenciadas.

Considerando essa importância, este trabalho, orientar-se-á no sentido de verificar a relevância do estudante deter esse método por meio de suas aplicações no estudo de Geometria Analítica, limitando-se a analisar situações em que o método ocupa espaço coadjuvante mas indispensável no estudo de equações que representam curvas clássicas como a circunferência, parábola, hipérbole e elipse.

Como esses objetos têm suas representações algébricas dadas pela Equação Geral do Segundo Grau Com Duas Incógnitas, para evitar digressões, deixamos de lado as situações em que os eixos focal ou real não sejam paralelos aos eixos coordenados retangulares. Ainda nesse ensejo, a apresentação das cônicas estará limitada aqui à sua definição e análise das condições que os coeficientes da equação geral do segundo grau devem satisfazer para que esta represente uma ou outra dessas curvas, incluindo aqui os casos de suas degenerações.

Para alcançar os objetivos houve a necessidade de se fazer uma consulta bibliográfica e assim fundamentar o tema e definir claramente cada conceito que se mostrou preciso ao longo do desenvolvimento. Com isso, este trabalho foi dividido em 4 capítulos. O Capítulo 1 se ocupa da evolução histórica de métodos de resolução de problemas redutíveis a equações quadráticas que culminaram com a criação do método de completar quadrados e também do desenvolvimento da linguagem algébrica da matemática até o século XVII, além de uma apresentação da sistematização do estudo de cônicas feito por Apolônio de Perga[1]. No Capítulo 2 é feita uma reapresentação do método de completar quadrados. No Capítulo 3 há a primeira grande situação em que se pretende justificar a importância de conhecer o método de completar quadrados; nessa ocasião há o estudo da equação da circunferência com apoio do dispositivo em questão. Já no último capítulo, o Capítulo 4,

[1] Matemático e astrônomo grego, chamado de o Grande Geômetra. Viveu em Alexandria, Éfeso e Perge no século III a.C.

é feita a culminância da proposta ao se estudar as equações da parábola, elipse e hipérbole apoiadas pelo método de completar quadrados; nesse capítulo procura-se determinar detalhadamente as condições que os coeficientes da equação geral do segundo grau devem satisfazer para que represente cada uma dessas curvas e suas degenerações.

Capítulo 1

Notas Históricas

Preliminarmente, devemos pontuar que, embora o objetivo deste trabalho seja tratar de equações, é importante levar em consideração que os trabalhos de Euclides e de Apolônio não estavam originalmente preocupados com tratamentos algébricos. Esse tipo de interpretação foi feita ao longo dos séculos pela introdução de simbolismos matemáticos, e mais aceleradamente a partir da unificação da simbologia matemática que iniciou por volta dos séculos XV e XVI.

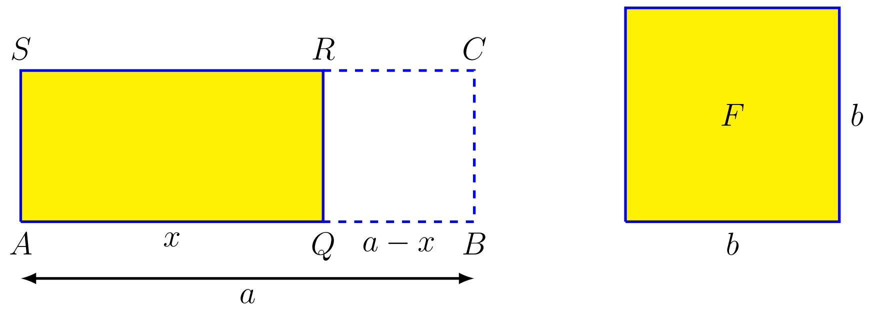
1.1 Euclides (Século III a.C.)

Métodos sofisticados para solução de problemas envolvendo equações quadráticas já eram conhecidos nos tempos de Euclides (Séc. III a.C.). Dentre outras, as Proposições 28 e 29 do livro VI de "Os Elementos" continham métodos que podem ser aplicados para solucionar tipos específicos de equações quadráticas. Em relação à Proposição 28, Eves a transcreve como:

> Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma dada figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre metade de AB e semelhante à deficiência $QBCR$. (Eves, 2011, p. 111)

Considerando o caso particular em que o paralelogramo dado ao qual $QBCR$ é semelhante é um quadrado (o que implica que $QBCR$ é também um quadrado), e considerando também, sem perda de generalidade, que a figura retilínea F seja um quadrado de lado b, temos a configuração mostrada na Figura 1:

Figura 1: Representação geométrica da Proposição 28.



Fonte: do autor

As áreas coloridas, de acordo com a proposição mencionada, são equivalentes. Daí, devemos ter

$$\begin{aligned}(AQRS) = F &\Leftrightarrow x\,(a-x) = b^2\\ &\Leftrightarrow x^2 - ax + b^2 = 0.\end{aligned}$$

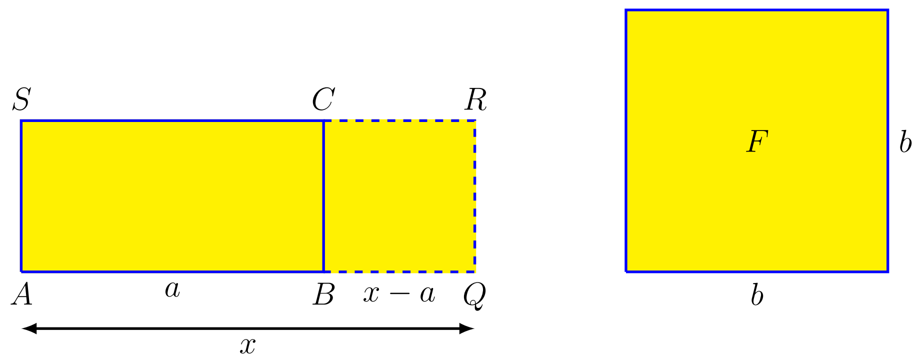
Assim a Proposição 28 pode ser entendida, modernamente, como uma interpretação geométrica da equação quadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$. Como veremos adiante, esta equação corresponde à equação do tipo 5 da lista de al-Khwarizmi, matemático que viveu entre os séculos VIII e IX.

Já a Proposição 29 é transcrita pelo mesmo autor acima mencionado como:

> Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma figura retilínea F, e excedendo por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado. (Eves, 2011, p. 111).

Analogamente ao que se fez sobre a Proposição 28, para esta proposição temos a seguinte figura:

Figura 2: Representação geométrica da Proposição 29.



Fonte: do autor

Da Figura 2, segue que:

$$\begin{aligned}(AQRS) = F &\Leftrightarrow x\,(x-a) = b^2\\ &\Leftrightarrow x^2 - ax - b^2 = 0\end{aligned}$$

Deste modo, a Proposição 29 pode ser entendida como uma interpretação geométrica da equação quadrática $x^2 - ax - b^2 = 0$. Esta equação corresponde à equação do tipo 6 da lista de al-Khwarizmi.

As Proposições 28 e 29 são uma generalização do método de aplicação de áreas e têm alicerce em proposições dos livros II e V, sendo a Proposição 28 uma "Aplicação elíptica ou com falta" (De Carvalho e Roque, 2012, p.124) e a Proposição 29 uma "Aplicação hiperbólica ou com excesso" (De Carvalho e Roque, 2012, p.125).

A respeito das contribuições de Euclides, BOYER afirma que:

> Os elementos de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 A.C aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. (Boyer , 1974, p.87)

E reforçando a afirmação de Boyer, destacamos de Eves que:

> Embora Euclides fosse autor de pelo menos dez trabalhos (...), sua fama repousa principalmente sobre seus Elementos. Parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os Elementos precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores. Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. (Eves , 2011, p.167-168)

Estes pequenos recortes, aliados à representação algébrica proposta das Proposições VI.28 e VI.29 mostram, de maneira singela, o reconhecimento da importância do compilado de Euclides para o desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos, e evocam uma vinculação de sua obra geral aos métodos modernos de equacionamento de problemas matemáticos.

1.2 Apolônio de Perga (Século III a.C.) – As Seções Cônicas

Os escritos sistematizados por Apolônio de Perga (Perga, 262 a.C. – 194 a.C.) constituem um marco crucial do estudo de cônicas, mesmo que essas curvas já vinham sendo estudadas a mais de 100 anos por importantes geômetras que viveram ao longo desses anos — como os trabalhos de Euclides, por exemplo. Mas da mesma forma que o compilado de *Os Elementos* de Euclides substituiu escritos anteriores sobre os temas tratados nessa obra, os trabalhos de Apolônio em *Cônicas* fixou na história da matemática um marco para o estudo das cônicas. Segundo De Carvalho e Roque:

> Acredita-se que ele (Apolônio) tenha começado a redigir seu livro mais conhecido, o Cônicas, por volta do ano 200 a.E.C. Nesta obra, Apolônio define as seções cônicas do modo mais geral possível, como seções de cones, usando métodos muito característicos dos Elementos de Euclides. Em particular, aqueles que dizem respeito à aplicação de áreas, que deram origem aos nomes dos diferentes tipos de cônicas: parábola, hipérbole e elipse. (De Carvalho e Roque, 2012, p. 106)

Os autores verificam grande similaridade no estilo de escrita entre *Os Elementos* de Euclides e *Cônicas* de Apolônio pois "Apolônio segue o estilo formal dos Elementos até nos detalhes do enunciado de certas proposições." (Roque e Carvalho, 2012, p. 106).

Apolônio percebeu que variando convenientemente a inclinação do plano as três cônicas clássicas (parábola, elipse e hipérbole) podem ser obtidas ao seccionar uma única superfície de cone. Além disso, por utilizar superfícies cônicas de duas folhas, ele conseguiu obter os dois ramos de uma hipérbole, conforme ratificado em Boyer:

> Essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que nos é familiar hoje. Os geômetras frequentemente falavam das "duas hipérboles" em vez dos "dois ramos" de uma única hipérbole, mas de qualquer forma a duplicidade da curva era reconhecida. (Boyer, 1974, p.107)

A obra de Apolônio não se resume à escrita de Cônicas e a matemática não era o único ramo de sua atenção, porém é impossível falar sobre esse tema sem se reportar em algum momento aos seus escritos a respeito de secções cônicas. Por isso, ele sempre terá seu nome atrelado à sua maior obra. Sobre isso, Eves declara que:

> Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e embora ele tivesse escrito sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente a Secções cônicas, uma obra extraordinária, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o cognome de "O Grande Geômetra". Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, Secções cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto. (Eves, 2011, p.198)

As Secções Cônicas de Apolônio constituem um ferramental indispensável para alicerçar qualquer estudo que se queira fazer sobre curvas, mesmo agora com a "graça" de se ter à disposição uma simbologia matemática de fácil assimilação e a flexibilidade e extensão do tratamento moderno proporcionados pela definição de curvas feita abstratamente que as considera como lugares geométricos que satisfazem condições específicas dadas a respeito de coordenadas.

1.3 Al-Khwarizmi (Século IX d.C.)

No ápice da idade média (Séc. IX d.C.), com Mohamed ibn-Musa al-Khwarizmi, supostamente inspirado pelos escritos gregos, surgiu o método de completar quadrados.

Mesmo que tenha havido importantes predecessores de al-Khwarizmi em diferentes regiões que se ocuparam, em algum momento, do estudo de problemas que envolvam equações quadráticas, como as contribuições dos babilônios nos cálculos de áreas de terras, nos interessa esse momento da história (início do século IX d.C. - em 825) por considerarmos que a apresentação feita da equação do segundo grau por al-Khwarizmi e de sua solução retórica acompanhada da referente interpretação geométrica seja de fato o fundamento da aplicação do, hoje moderno, "método de completar quadrados".

Em seu livro "Tratado sobre o cálculo de *al-jabr* e *al-muqabala*", al-Khwarizmi expõe seis formas as quais uma equação linear ou quadrática pode ser reduzida e explica a solução retórica de cada um desses seis tipos. As referidas equações são listadas na Tabela 1:

Tabela 1: Equações de al-Khwarizmi.

Equações de al-Khwarizmi em linguagem moderna	
Tipo 1	$ax^2 = bx$
Tipo 2	$ax^2 = c$
Tipo 3	$bx = c$
Tipo 4	$ax^2 + bx = c$
Tipo 5	$ax^2 + c = bx$
Tipo 6	$ax^2 = bx + c$

Fonte: do autor

Em relação à equações quadráticas, o tipo 4 pode ser escrito em linguagem moderna como $ax^2 + bx = c$, em que x representa a quantidade desconhecida, b é o número de quantidades desconhecidas, e c é a soma do número a de quadrados da quantidade desconhecida x com bx.

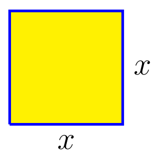
A título de ilustração, para resolver a equação $x^2 + 8x = 20$ al-Khwarizmi observaria que tal equação era semelhante ao que estava previsto na sua lista, que em tradução para a linguagem algébrica de hoje corresponderia a equações do tipo 4 mencionado acima.

Nas soluções apresentadas por al-Khwarizmi era empregada uma nomenclatura especial para cada termo envolvido no problema, mas essa nomenclatura não será utilizada neste trabalho. Na solução seguinte, trocamos a expressão "quantidade desconhecida" por "número desconhecido".

Originalmente al-Khwarizmi procederia do seguinte modo, mas usando figuras e retórica (ou somente retórica) em vez de linguagem algébrica:

1. Construa um quadrado de lado igual a quantidade desconhecida:

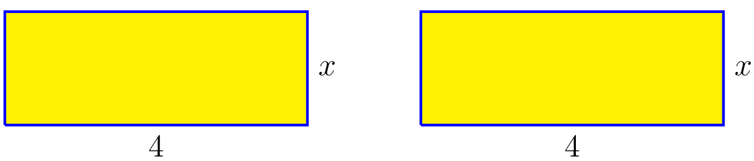
Figura 3: Quadrado de lado x.



Fonte: do autor

2. Trace dois retângulos iguais de modo que um dos lados desse retângulo seja igual ao número desconhecido e o outro lado seja metade da quantidade de números desconhecidos.

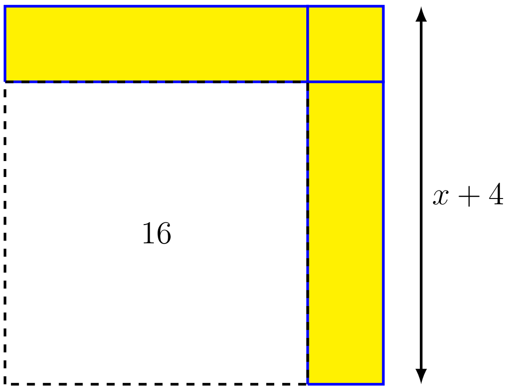
Figura 4: Retângulos de lados 4 e x.



Fonte: do autor

3. Junte essas 3 áreas (que no caso vale 20), de modo que o que falta para que a figura correspondente seja um quadrado deverá ser completado:

Figura 5: Quadrado de lado $x + 4$.



Fonte: do autor

Assim, o resultado é um quadrado maior cuja área é a soma da área colorida, e que foi dada previamente no problema, com a área do quadrado que foi encontrado na aplicação do procedimento, isto é,

$$(x + 4)^2 = 16 + 20 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 36.$$

Daí, $x = 2$.

Ao comentar a solução de um problema similar, De Carvalho e Roque, afirmam que

> Essa construção geométrica reproduz exatamente o procedimento de resolução de Al-Khwarizmi e demonstra a necessidade de completar o quadrado durante a resolução algébrica. Fica claro que ele estabeleceu uma analogia entre a geometria e a álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico à raiz do quadrado algébrico. (De Carvalho e Roque, 2012, p. 159)

Para a autora, em contraste com a matemática grega, o apelo geométrico não serve para validar ou dar legitimidade ao procedimento, ele fornece a causa, a razão pela qual o procedimento funciona e pode ser enunciado daquela forma. *Al-Khwarizmi* sempre conseguia reduzir qualquer equação linear ou quadrática a um desses seis casos e para cada um deles existia um procedimento diferente, uma “receita” que levava à solução do problema matemático relacionado.

O livro de *Al-Khwarizmi* revolucionou os estudos matemáticos de sua época e de épocas posteriores. No livro “Classical Mathematics from Al-Khwyrizmy to Descartes”, Rashed se reporta ao livro de *Al-Khwarizmi* afirmando que:

> O evento foi crucial e foi reconhecido como tal por historiadores antigos e modernos. A comunidade matemática da época e dos séculos subsequentes também não permitiram que a obra perdesse sua importância. (Rashed, 2014, p. 108, tradução nossa).

Para o autor, “Este livro (...) permaneceu uma fonte constante de inspiração e objeto de comentários de matemáticos, não apenas em árabe e persa, mas também em latim e nas línguas da Europa Ocidental.” (p. 109, tradução nossa).

Em contraste, para ele, "este evento revela um paradoxo", pois

> Contrastando fortemente com a novidade do livro de al-Khwÿrizmÿ em termos de concepção, vocabulário e organização está a simplicidade das técnicas matemáticas que ele utiliza, quando comparadas com os famosos escritos matemáticos de Euclides e Diofanto, por exemplo. (Rashed, 2014, p. 109, tradução nossa).

O autor reconhece que o trabalho de Al-Khwarizmi resultou em uma obra digna do reconhecimento atual, mas que não se apresentava como novidade na época. Pois segundo ele "Para o observador superficial, a maioria das ideias de al-Khwarizmi são encontradas em um ou outro de seus antecessores." (tradução nossa).

É factível, portanto, que alguns autores encontrem na contemporaneidade de Al-Khwarizmi escritos de outros matemáticos que contêm ideias semelhantes àquelas descritas no "*Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*", mas a grandiosidade do tratado não está nas basicidade de algumas dessas ideias, mas na organização sistemática e profundidade do conjunto delas assim como o foi em *Os Elementos* de Euclides e em *Secções Cônicas* de Apolônio de Perga.

1.4 Bháskara (Século XII d.C.)

Segundo Boyer, "a Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média" (Boyer, 1974, p.161), sendo Bháskara (1114 a cerca de 1185) "o mais importante matemático do século XII". Segundo ele,

> Bháskara foi o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. Em seu tratado mais conhecido, o Lilavati, ele compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias novas. (Boyer, 1974, p.161)

Em consonância com o que é dito em Boyer, Tatiana Roque afirma, com outras palavras, que Bháskara foi um dos escritores mais populares de aritmética e álgebra do século XII. Seus livros mais conhecidos são Lilavati e o Bija Ganita (ou Vija-Ganita, para alguns autores).

Em Bija Ganita, são expostas regras em versos para se determinar quantidades desconhecidas. O método geral de Bháskara, segundo Roque era:

> (I) "De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado."
>
> (II) "Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida etc., em um dos membros multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando, em seguida, essa raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida."
>
> (III) "É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar."

O método moderno de completar quadrados encontrado atualmente nos livros didáticos é uma versão idêntica a essa alcançada por Bháskara no século XII, mas naquela época ainda era apresentado de maneira retórica por falta de uma simbologia matemática universal.

Em tradução para a linguagem moderna o procedimento de Bháskara pode ser descrito do seguinte modo para resolver a equação $ax^2 + bx = c$, com base no que é exposto no livro de Tatiana Roque (2012):

1. Multipliquemos ambos os membros por $4a$:
$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac;$$
2. Adicionemos b^2 a ambos os membros:
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2;$$
3. Reescrevamos a igualdade como
$$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2.$$
Assim, o membro contendo as quantidades desconhecidas possui uma raiz como é requerido em II;
4. Tomemos a raiz quadrada em os membros da igualdade anterior:
$$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2};$$
5. Isolemos a variável x para concluir que
$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

A expressão obtida por meio do procedimento é o que hoje conhecemos por fórmula de Bháskara.

Segundo Eves, “depois de Bháskara a matemática hindu fez apenas progressos irregulares até os tempos modernos.” (Eves, 2011, p.251).

1.5 Viète e a introdução da simbologia matemática (Século XVI d.C.)

Avançando na história os símbolos matemáticos surgiram a partir dos séculos XV e XVI, quando os matemáticos dessa época passaram a utilizar símbolos para representar soma, subtração, raiz quadrada, etc. Nesses períodos o simbolismo matemático não era unificado, isto é, regiões diferentes do planeta empregavam simbologias diferentes no tratamento matemático.

Para exemplificar um procedimento daquela época, a equação quadrática $A + 21 = 10B$, em que B é a quantidade desconhecida e A é o quadrado da quantidade desconhecida, era resolvida do seguinte modo:

1. Tomar a metade da quantidade de B's: 5;
2. Fazer o quadrado do resultado: 25;
3. Subtrair deste valor o número (que está sozinho) 21: $25 - 21 = 4$;
4. Achar a raiz do resultado: 2;
5. Finalmente, subtrair este valor da metade do número de B's: $5 - 2 = 3$.

Este era um procedimento padrão expresso de modo retórico naquela época que vinha desde os tempos de al-Khwarizmi e servia para um caso bastante geral. Mas tal procedimento não conduz à solução completa do problema. No procedimento faltou encontrar o outro possível valor de B, que é 7.

Um avanço marcante na simbologia matemática no final do século XVI vem das contribuições de François Viéte (1540-1603), ele simplifica muito o procedimento por meio da simbolização dos coeficientes. Mesmo assim, possíveis resultados negativos ainda eram ignorados nesse período e para cada tipo de equação existia um procedimento diferente a ser efetuado. Em confirmação ao exposto, para De Carvalho e Roque

> A introdução de uma nova notação, com os trabalhos de Viète, desviou a atenção dos matemáticos que sucederam aos algebristas do século XVI. No entanto, apesar das grandes inovações propostas em sua obra, Viète não admitia nem números negativos, nem suas raízes. (De Carvalho e Roque, 2012, p. 174)

Utilizando a linguagem introduzida por Viète equações do tipo acima podiam ser expressas por $A + m = nB$ e a resolução seguindo os mesmos procedimentos dados ficava assim:

1. Tomar a metade da quantidade de B's: $\frac{n}{2}$;
2. Fazer o quadrado do resultado: $\left(\frac{n}{2}\right)^2$;
3. Subtrair deste valor o número (que está sozinho) m: $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - m$;
4. Achar a raiz do resultado: $\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - m}$;
5. Finalmente, subtrair este valor da metade do número de B's:

$$\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - m} = B.$$

É daí que começam a surgir fórmulas em substituição aos procedimentos retóricos-geométricos para solução de problemas que envolvam equações. Pois foi dado o suporte fundamental para que se tenha uma fórmula para resolver uma equação, que é a simbolização dos coeficientes.

Até então as "equações" em matemática eram reduzidas a casos particulares e para cada caso existia uma "receita" que a solucionava, mas com o simbolismo introduzido

Viète houve uma flexibilização sobre as formas de se resolver problemas matemáticos por meio do uso de fórmulas. Em consonância, para Boyer:

> Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das ideias modernas. (...). Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a "coisa" numa equação com coeficientes numéricos específicos. (Boyer, 1974, p.223)

1.6 Descartes e o método analítico (Século XVII d.C.)

O marco inicial da Geometria Analítica ocorreu no século XVII por diversos matemáticos da época, através do estabelecimento de relações entre equações e figuras geométricas utilizando a simbologia matemática que fora desenvolvida a partir do século XVI, essa correlação entre figuras geométricas e símbolos algébricos é o que conhecemos como Método Analítico.

O Método Analítico

> (...) consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida f(x,y)=0 e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. (Eves, 2011, p.382)

Existe enorme vantagem na formulação de curvas por meios algébricos pois a solução de problemas até então muito complexos passam a ter a solução mapeada algebricamente. Em complemento ao que Eves afirma, para De Carvalho e Roque, por meio da Álgebra

> (...) qualquer dedução pode ser traduzida em termos de equações. Os problemas geométricos devem ser formulados em linguagem algébrica para que se possa penetrar nas relações que existem entre os objetos do universo. Este passo é fundamental para legitimar o estudo da geometria por meio da álgebra, pois o que esta última permite apreender são as proporções envolvidas nos objetos geométricos. (De Carvalho e Roque, 2012, p. 195)

O encontro entre o aluno interessado e a Geometria Analítica é um momento mágico, pois ele passa a ver maior sentido para aquela álgebra que aprendera no Ensino Fundamental II. Abrimos uma porta que coloca o aluno frente a frente com uma imensidão de possibilidades e de (re)descobertas. Neste sentido, Eves afirma que:

> Poucas experiências escolares podem ser mais emocionantes para um aluno do curso colegial avançado ou início de faculdade do que uma introdução a esse novo e poderoso método de enfrentar problemas geométricos. (Eves, 2011, p.382)

Dentre os profícuos matemáticos do século XVII destacamos René Descartes (1596 - 1650). A ele é atribuído o Método Analítico devido a sistematização do uso desse método feita por ele em seus trabalhos que culminaram na escrita de um dos seus livros mais famosos "La géométrie". No início do La géométrie o matemático estabelece a base do Método Analítico:

> "Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está encontrada, e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre estas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma destas duas expressões são iguais aos termos da outra." (*Apud* De Carvalho e Roque, 2012, p. 196)

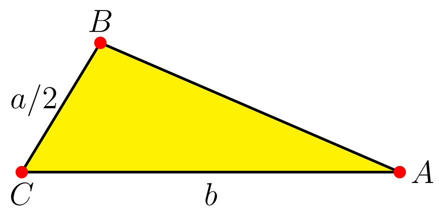
O método de Descartes teve grande repercussão em sua época, pois era visto por muitos de seus contemporâneos como uma possibilidade de substituição aos métodos sintéticos da Geometria Euclidiana. Tal vantagem se deve ao fato de que, ao contrário do método euclidiano, o método de Descartes privilegiava o caminho da descoberta. Deste modo, Descartes propôs uma sistematização nova de diversos métodos de construção pela via analítica, se desprendendo da necessidade da utilização de régua e compasso tão valorizada no método de Euclides.

Exemplo 1.1 Uma situação que ilustra muito bem a aplicação do Método Analítico de Descartes é na resolução da equação $x^2 = ax + b^2$. A forma como ele procedeu para solucionar a equação prova que a incógnita de uma equação é interpretável como um segmento de reta que possa ser construído.

Solução da equação:

Passo 1: Construamos um triângulo ABC tal que BC tenha comprimento $a/2$ e que AC tenha comprimento b.

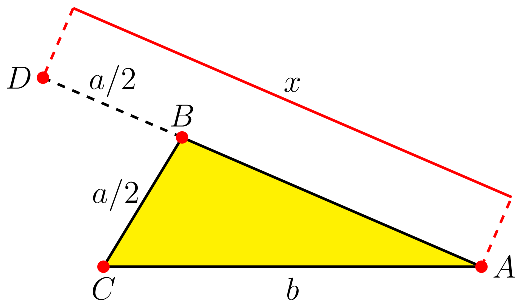
Figura 6: Triângulo ABC de lados $BC = a/2$ e $AC = b$.



Fonte: do autor

Passo 2: Prolonguemos AB até D, tal que BD tenha comprimento $a/2$. Nessas condições, AD é x, que é a solução da equação.

Figura 7: Construção do segmento $AD = x$.

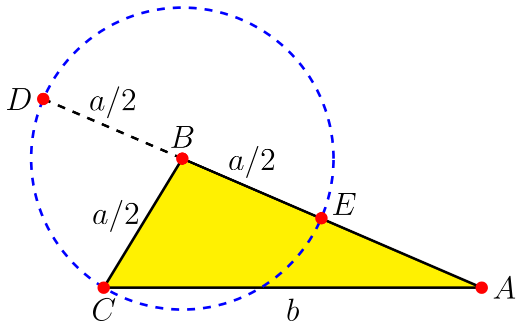


Fonte: do autor

Após a construção da solução geométrica da equação, o passo seguinte era provar a validade da solução.

Prova: Construamos sobre o triângulo ABC um círculo de raio $a/2$ e centro B e marquemos o ponto de interseção entre a circunferência e o segmento AB.

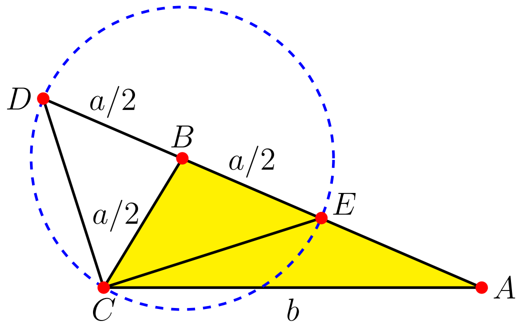
Figura 8: Construção do círculo de centro B e raio $a/2$.



Fonte: do autor

Tracemos os segmentos CD e CE:

Figura 9: Semelhança dos triângulos ACD e CEA.



Fonte: do Autor

Os triângulos ACD e CEA são semelhantes, pois:

- $C\hat{D}E \equiv E\hat{C}A$ (descrevem o mesmo arco CE)

- $C\hat{A}E$ é comum aos dois triângulos.

Assim, podemos estabelecer a seguinte relação entre os lados desses dois triângulos:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = (AC)^2 \Rightarrow AD \cdot AE = b^2. \tag{1.1}$$

Como $AD = x$ e $AE = x - a$, substituindo esses valores em (1.1), temos:

$$x\,(x-a) = b^2 \Rightarrow x^2 - ax = b^2$$

que é a equação dada inicialmente.

Alguns historiadores acreditam que Descartes sabia que o lugar geométrico da curva descrita nessa questão era uma cônica, mas ele não menciona isso em seu livro ao tratar do problema, pois ele estava interessado mesmo era em generalizar o seu Método Analítico e afirmar a importância e a utilidade desse método na resolução de problemas matemáticos.

O método analítico de Descartes revelava-se muito útil para tratar de situações que envolviam mais de uma grandeza variáveis como o problema de Pappus que ele resolveu por via analítica introduzindo à figura um sistema de eixos convenientemente, chegando a uma equação que poderia ser resolvida a partir de método semelhante ao descrito na solução acima, mas não discutiremos sobre esse problema específico aqui.

Capítulo 2

O Método de Completar Quadrados

O método de completar quadrados aplicado à resolução de equações quadráticas é uma ferramenta que auxilia na compreensão do significado dessas equações. Contudo, na prática, quase sempre se utiliza um processo algébrico para resolver esse tipo de equação. Conhecer essa relação entre representação algébrica e geométrica é fundamental para uma abstração "saudável" do método e sua aplicação às situações em que não se tem como construir o apelo visual, ou sua construção se torna pedante naquele contexto, como nas aplicações que faremos adiante no tratamento de cônicas.

Não há grande diferença entre a apresentação do método de completar quadrados ilustrado no subitem 1.3 na ocasião da solução de uma equação quadrática do tipo 4 da lista de Al-Khwarizmi (Tabela 1) e a sua apresentação encontrada nos livros didáticos atuais, a não ser o fato de que estes livros, como era de se esperar, trazem o reconhecimento das possíveis raízes negativas da equação. Esse reconhecimento das raízes negativas de uma equação quadrática faz com que o seu resultado numérico (o valor da incógnita) passe a ter significado além da medida do lado de uma figura geométrica plana ou de um comprimento de um segmento de reta. Talvez, por isso mesmo, o método de completar quadrados cumpra, nos livros didáticos atuais, apenas a função de introdução ao estudo de equações quadráticas completas.

No entanto, nos capítulos seguintes veremos motivos mais do que suficientes para não deixarmos a utilização do método de completar quadrados relegada a um mero momento de curiosidade histórica.

2.1 Recordando o método de completar quadrados

Como dito anteriormente, não há muita variação na forma como o método de completar quadrados é apresentado nos livros didáticos modernos, inclusive esse método geralmente cumpre apenas a função de introdução à resolução de equações quadráticas completas, sendo rapidamente substituído pela fórmula que conhecemos por "Fórmula de Bháskara". Tomando por base o livro do 9^o ano da coleção Matemática e Realidade de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado (2022) na página 80 do referido livro é apresentado o método de completar quadrados como um recurso geométrico que auxilia a resolução da equação relacionada ao seguinte problema:

Problema 2.1 *Determinar dois números cuja soma é -6 e o produto é 4.*

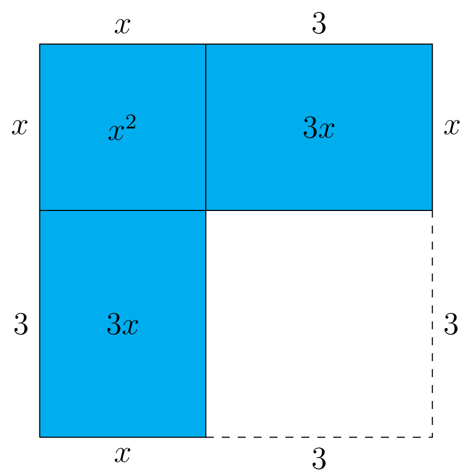
Solução: A resolução apresentada no referido livro acompanha o seguinte roteiro:

1. Equacionamos o problema por

$$x^2 + 6x + 4 = 0;$$

2. Construímos a seguinte figura cuja área colorida é $x^2 + 6x$:

Figura 10: Completando o quadrado.



Fonte: do Autor

Comentário: Para a construção devemos considerar um quadrado de lado x, o que implica que sua área x^2 corresponde à primeira parcela da soma $x^2 + 6x$, e dois retângulos cujos lados devem coincidir com o lado do quadrado (x) e com metade do valor (6) da segunda parcela, para que ao juntar as três figuras se obtenha outra maior que represente exatamente a soma $x^2 + 6x$. Percebamos que esta construção só é possível porque a e b têm o mesmo sinal.

3. Reescrevemos a equação como $x^2 + 6x = -4$ e para completar o quadrado, adicionamos a ambos os lados da igualdade a medida da área do quadrado de lado 3 destacado em branco na figura;

Comentário: O quadrado de lado 3 é o que falta para completar o quadrado maior de lado $x + 3$.

4. Com isso, obtemos a expressão $x^2 + 6x + 9 = 5$, que contém um trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo e, portanto, pode ser posta sob a forma $(x + 3)^2 = 5$;

Comentário: Os passos desenvolvidos aqui seguem a representação dada no livro, mas também podemos entender que, juntando o quadrado de lado x com os retângulos de lados x e 3 e completando a figura com o quadrado de lado 3, obtemos um quadrado maior cujo lado é $x+3$ e portanto sua área vale $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ e como foi dado no início que $x^2 + 6x = -4$, substituindo obtemos

$$(x + 3)^2 = -4 + 9 = 5.$$

Essa ótica facilita o entendimento do aluno que ainda não domina a decomposição do trinômio quadrado perfeito.

5. Finalmente, calculamos a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade e obtemos os dois números que resolvem o problema: $-3+\sqrt{5}$ e $-3-\sqrt{5}$.

$\square$

Além disso, para fixar o método, o livro traz uma lista de exercícios semelhantes a esse e outros com certa variação que favorecem uma interpretação mais abstrata, como o problema dado no item 11 da página 80 que pede para "*provar que não existem números reais que tenham soma* 4 *e produto* 5". O destaque dado aqui ao problema se deve ao fato de ele ir ao encontro do que se pretende quando ensinamos certo ferramental matemático aos alunos, queremos que eles enxerguem além daquele exemplo específico que apresentamos; pretendemos que vejam múltiplas possibilidades de uso dessas ferramentas na resolução de variados problemas e que as apliquem quando julgarem preciso, pois só aí é que o ensino daquele objeto estará consolidado. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+),

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (Brasil, 2002, p.112).

Em sintonia com o que sugere o PCN+ à respeito do desenvolvimento de competências específicas matemáticas por meio da resolução de problemas, a própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça em sua lista de 8 competências específicas para o ensino fundamental, mais claramente nas competências específicas 2 e 3, que tais competências visam desenvolver o "raciocínio lógico, o espírito de investigação" (...) e a segurança do educando "quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções".

2.2 A álgebra do método de completar quadrados

Definição 2.2 *Uma equação polinomial do segundo grau com uma incógnita é toda equação que pode ser escrita sob a forma $ax^2+bx+c=0$, em que $a\neq 0$, b e c são chamados de coeficientes da equação e x é a incógnita ou valor desconhecido.*

Em Lima *et al.* (2005) é afirmado que "basicamente, os matemáticos só sabem resolver dois tipos de equação do segundo grau, a saber:

I) Equações do tipo $(Ax+B)^2=C$;

II) Equações do tipo $(Ax+B)(A'x+B')=0$."

Sendo assim, neste tópico tratamos do método para reduzir uma equação do segundo grau ao tipo I. No Problema 2.1 reduzimos a equação dada a outra desse tipo, pois no 4^o passo do procedimento aplicado chegamos à forma $(x+3)^2 = 5$ para aquela equação.

De modo geral, aplicando o método de completar quadrados, podemos escrever qualquer equação quadrática $(ax^2 + bx + c = 0)$ sob a forma I. Para mostrar esse fato, dividiremos aqui a aplicação do método, com apoio geométrico, em duas situações possíveis: aquelas em que os coeficientes a e b têm o mesmo sinal e aquelas em que os coeficientes a e b têm sinais opostos.

Situação I: Aplicar o método de completar quadrados à equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que os coeficientes a e b têm o mesmo sinal, de modo a reduzi-la à forma I.

Solução: Para seguir procedimento semelhante ao aplicado no Problema 2.1 precisamos antes que o termo em x tenha coeficiente igual a 1, assim, como $a \neq 0$ (pela própria definição de equação do segundo grau), a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser reescrita como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

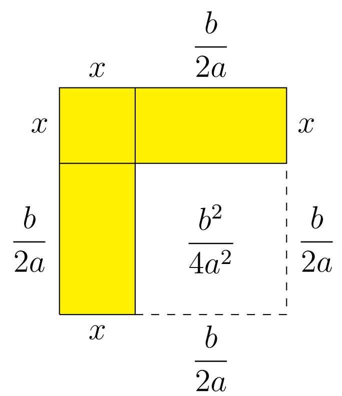
Para aplicar o método de completar quadrados, podemos fazer uma representação geométrica do seguinte modo:

Passo 1: Reescrevemos a equação como

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

Passo 2: Como a e b têm o mesmo sinal, construímos a seguinte figura, cuja área colorida é $x^2 + \dfrac{b}{a}x$;

Figura 11: Representação geométrica da Situação I.



Fonte: do Autor

Passo 3: O que falta para completar o quadrado maior, consiste em um outro quadrado, pontilhado na figura, de lado $\dfrac{b}{2a}$. Com isso, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Como $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$, substituindo, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

isto é,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

que corresponde a uma equação do tipo $(Ax+B)^2 = C$ com $A = 1$, $B = \frac{b}{2a}$ e $C = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. □

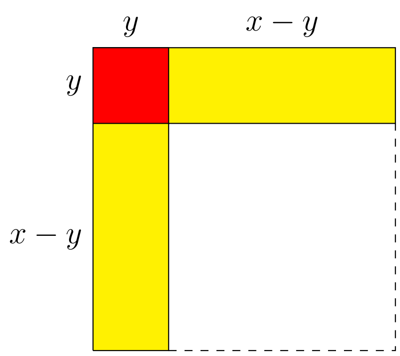
Situação II: Aplicar o método de completar quadrados à equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que os coeficientes a e b têm sinais opostos, de modo a reduzi-la à forma I.

Solução: O procedimento aplicado à situação I não pode ser repetido aqui (exatamente daquela forma) por causa da impossibilidade de representar geometricamente o quociente $\frac{b}{a}$, visto que se trata de um valor negativo. No entanto, tomando $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ e denotando $y = -\frac{b}{2a}$, temos dois casos a considerar:

- **Caso I:** $x - y \geq 0$

Neste caso, consideremos a decomposição de um quadrado de lado x, como mostra a figura:

Figura 12: Representação geométrica para o Caso I.



Fonte: do Autor

Então, da figura, segue que

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 + 2y(x-y) + (x-y)^2 &\Leftrightarrow x^2 = y^2 + 2xy - 2y^2 + (x-y)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy = (x-y)^2 - y^2. \end{aligned}$$

Retornando o fato de que $y = -\dfrac{b}{2a}$, temos

$$x^2 - 2xy = (x-y)^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Como $x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$, inferimos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

ou, equivalentemente, que

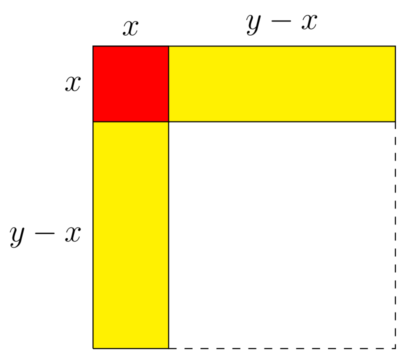
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

que corresponde a uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$ com $A = 1$, $B = \dfrac{b}{2a}$ e $C = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

- **Caso II:** $x - y < 0$.

Neste caso, consideremos a decomposição de um quadrado de lado y, como mostra a figura:

Figura 13: Representação geométrica para o Caso II.



Fonte: do Autor

Analogamente ao Caso I, devemos ter:

$$\begin{aligned} y^2 = x^2 + 2x(y-x) + (y-x)^2 &\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2xy - 2x^2 + (y-x)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 2xy - x^2 + (y-x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy = (y-x)^2 - y^2. \end{aligned}$$

Agora, retornando ao fato de que $y = -\dfrac{b}{2a}$, e procedendo como fizemos acima, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Assim, como $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

ou, equivalentemente, que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

que corresponde a uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$, com $A = 1$, $B = \frac{b}{2a}$ e $C = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. □

Em todo caso, se o interesse for determinar as raízes da equação, basta calcular a raiz quadrada de ambos os lados de $(Ax + B)^2 = C$ e isolar a variável:

$$(Ax + B)^2 = C \Leftrightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{C}}{A}.$$

A equação só tem solução se a raiz quadrada de C existir, o que só acontece para $C \geq 0$.

Mesmo com a possibilidade de interpretação geométrica, também é necessária a abstração do método. Pois como vimos, ele se mostra eficiente independentemente de quais sejam os sinais de a e b, se iguais ou opostos.

Com a segurança da funcionalidade do método independentemente de qual seja o sinal dos coeficientes, o aluno pode resolver problemas sem a ajuda da representação geométrica, como o caso apresentado no seguinte problema:

Problema 2.3 *Provar que não existem números reais que tenham soma* 4 *e produto* 5.

Solução: Uma das formas de resolver este problema é representar tais números por incógnitas, x e y, por exemplo. Neste caso, a soma é $x + y = 4$ e o produto é $xy = 5$. Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda, obtémmos $4x - x^2 = 5$. Daí, aplicando o método de completar quadrados, fica $(x - 2)^2 = -1$. Este último resultado corresponde a uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$ que, pelo que vimos acima, só tem solução para $C \geq 0$. Como aqui o valor de C é negativo ($C = -1$), concluímos que a equação não tem solução e portanto não existem números reais que tenham soma 4 e produto 5, que é o que queríamos provar. □

Acreditamos que praticando por meio de uma variedade de problemas e exercícios no 9^o ano, retomando no ensino médio na ocasião dos estudos das funções quadráticas na obtenção de sua forma canônica e também no estudo da equação da circunferência, o aluno terá a habilidade que precisa para enfrentar sem maiores dificuldades uma eventual aplicação deste método em situações que demandarem seu uso na continuação de sua educação escolar.

Capítulo 3

A Equação da Circunferência e o Método de Completar Quadrados

Uma das aplicações imediatas do método de completar quadrados após o primeiro contato do aluno com esse método (que acontece lá no Ensino Fundamental II) ocorre somente quando ele estuda a equação da circunferência que em alguns currículos é feito ainda no 1^o ano do Ensino Médio, em outros somente no 3^o ano e, algumas vezes, isso nunca é feito durante a Educação Básica, sendo esse contato postergado para um provável Ensino Superior. Esse reencontro ocorria até recentemente ainda no 3^o ano do Ensino Médio. Porém, com as mudanças que aconteceram no currículo nos últimos anos, esse contato vem aos poucos sendo deixado para ser feito somente no Ensino Superior nos cursos que têm Geometria Analítica em sua grade.

Ainda assim, alguns livros do Ensino Médio dedicam parte de suas páginas, nos capítulos dedicados à Função Quadrática, a fazer uso deste importante método na obtenção da forma canônica da função quadrática.

Contudo, mesmo que talvez essa seja uma rara oportunidade de se retomar a reflexão sobre a importância desse método como uma ferramenta indispensável para os alunos ainda no Ensino Médio, muitas vezes esse recorte do livro é ignorado.

Deste modo, a discussão que se fará à seguir contempla o básico que um estudante que se aventura aos estudos na área de Exatas precisa saber sobre a relação entre a equação de uma circunferência e o método de completar quadrados para que consiga acompanhar um curso de Geometria Analítica se dedicando às novidades do curso.

3.1 A equação geral das curvas do segundo grau

Em Kletenik (1984, p.113) é dito que: “uma curva que, num sistema de coordenadas cartesianas retangulares, é dada por uma equação do segundo grau é chamada cônica”.

Em complemento, adaptando de Boldrini (1980, p.289), temos a seguinte definição:

Definição 3.1 *Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.1}$$

onde $A \neq 0$ *ou* $B \neq 0$ *ou* $C \neq 0$.

Os números reais A, B, C, D, E e F em (3.1) são os coeficientes desta equação. O termo cujo coeficiente é B é comumente chamado de termo misto. A não nulidade do coeficiente B indica, geometricamente, que a curva representada pela equação foi rotacionada em relação ao sistema de eixos ortogonais. Para que não incorramos em desvios, trataremos neste estudo apenas dos casos em que se tem $B = 0$, isto é, em que a curva é simétrica em relação aos eixos x e y do sistema ortogonal.

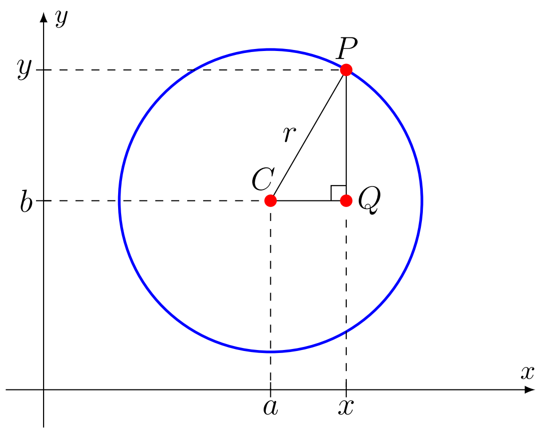
As discussões a respeito dessa equação serão feitas oportunamente neste capítulo e no próximo, ocasião em que procuraremos as condições que ela deve satisfazer para que represente a equação de cada uma das curvas clássicas: circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

3.2 Equação da circunferência

De maneira simplificada, a circunferência pode ser entendida como: o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo seu. O ponto fixo é chamado de centro da circunferência e a distância a que se refere a definição é conhecida como raio da circunferência.

A Figura 14 a seguir traduz a definição dada acima:

Figura 14: A definição de circunferência.



Fonte: do Autor

Equacionando, temos

$$(CQ)^2 + (PQ)^2 = (CP)^2 ,$$

o que nos dá

$$(x_C - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = r^2$$

ou, equivalentemente,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

A Equação 3.2 é chamada de equação reduzida da circunferência.

Fazendo o desenvolvimento da equação acima, obtemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \left(a^2 + b^2 - r^2\right) = 0. \tag{3.3}$$

A Equação 3.3 é chamada de equação geral da circunferência.

Vamos comparar esta equação com a equação geral do 2^o grau com duas incógnitas para saber quais as condições que esta última deve satisfazer para que represente uma circunferência: confrontando os termos da equação da circunferência (Equação 3.3) com os seus correspondentes na equação geral do 2^o grau (Equação 3.1), concluímos que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{C} \qquad \text{e} \qquad B = 0.$$

Da primeira igualdade e das propriedades dos coeficientes da Equação 3.1 segue que $A = C \neq 0$. Portanto, para que a Equação 3.1 represente uma circunferência é necessário que se tenha $A = C \neq 0$ e $B = 0$. Além disso, essas condições são também suficientes, já que a sua verificação permite determinar os valores de a, b e r, conforme veremos a seguir.

3.3 Aplicações do método de completar quadrados à equação da circunferência.

Conhecendo as condições para que a Equação 3.1 represente a equação de uma circunferência, podemos escrevê-la sob a forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.4}$$

Vamos a dois exemplos numéricos clássicos que podem ser resolvidos por meio do método de completar quadrados, considerando que o aluno conheça as condições necessárias sobre os coeficientes para que uma equação geral do segundo grau em duas incógnitas represente uma circunferência.

Exemplo 3.2 Determinar as coordenadas do centro e também o raio da equação da circunferência

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0.$$

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0 &\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x\right) + \left(4y^2 - 8y\right) - 11 = 0\\
&\Leftrightarrow 4\left(x^2 - x\right) + 4\left(y^2 - 2y\right) - 11 = 0\\
&\Leftrightarrow 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 4\left[(y-1)^2 - 1\right] - 11 = 0\\
&\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 4(y-1)^2 - 4 - 11 = 0\\
&\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y-1)^2 - 16 = 0\\
&\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y-1)^2 = 16
\end{aligned}$$

e, multiplicando cada termo desta última igualdade por 1/4, obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Daí, comparando com a equação (3.2), devemos ter $a = 1/2$ e $b = 1$, que são as coordenadas do centro. Além disso, como $R^2 = 4$, inferimos que $R = 2$ é o raio da circunferência. □

Exemplo 3.3 a) Determinar as condições sobre m e n para que a equação

$$mx^2 + y^2 - nx + 8y + 14 = 0$$

represente uma circunferência.

b) Respeitando as condições sobre m e n, elaborar a representação geométrica para valores específicos de m e n.

Solução: (a) Comparando com a Equação 3.4 é imediato que devemos ter $m = 1$. Agora, para determinar as condições para n, substituímos o valor de m por 1 e aplicamos o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - nx + 8y + 14 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 - nx\right) + \left(y^2 + 8y\right) + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right] + \left[(y-4)^2 - 16\right] + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + (y-4)^2 - \frac{n^2}{4} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{n^2}{4} + 2. \end{aligned}$$

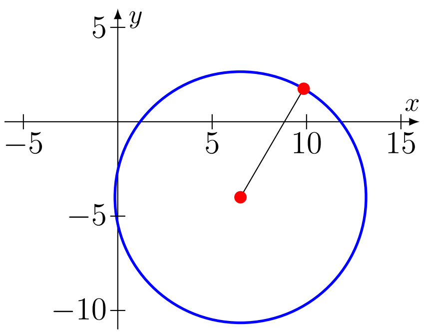
Comparando esta última igualdade com a Equação 3.2, verificamos que

$$R^2 = \frac{n^2}{4} + 2.$$

Segue daqui que $R^2 > 0$, para qualquer valor real de n. Portanto, para que a equação dada represente uma circunferência basta que se tenha $m = 1$ e que n seja qualquer número real.

(b) Se na equação acima tomarmos, por exemplo, $n = 13$, e construirmos a figura que ela representa por meio de um software obtemos a seguinte imagem

Figura 15: Representação de $x^2 + y^2 - 13x + 8y + 14 = 0$.



Fonte: do Autor

De modo geral, tomando a Equação 3.4 e aplicando o método de completar quadrados, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 &\Leftrightarrow \left(Ax^2 + Dx\right) + \left(Ay^2 + Ey\right) + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + A\left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left[\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] + A\left[\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2}\right] + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A} + A\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A} + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + A\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A} - F.
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdade termo a termo por $1/A$, obtemos

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

que é a forma reduzida desta equação.

Comparando termo a termo com a Equação 3.2, temos:

$$a = -\frac{D}{2A}, \qquad b = -\frac{E}{2A}, \qquad R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$$

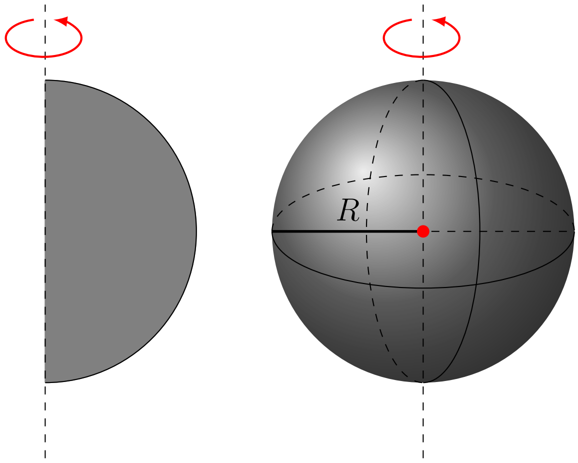
Daqui, podemos concluir o seguinte: se a expressão dentro do radical for positiva, então a raiz existe e R será um número real positivo e, consequentemente, a Equação 3.4 representará uma circunferência de centro $C = (a, b) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio R. Se a expressão dentro do radical for negativa, então a raiz existe, mas R não será um número real. E assim, a Equação 3.4 fornecerá uma circunferência imaginária. Por fim, se a expressão dentro do radical for igual a zero, então a raiz existe e R será zero. E deste modo, a Equação 3.4 reduz-se ao ponto (a, b). □

Tradicionalmente nos livros didáticos estes resultados são obtidos diretamente da comparação entre os coeficientes das Equações 3.3 e 3.1, porém na sequência proposta acima o objetivo é aplicar um método eficiente e lembrável, uma ferramenta que o aluno carrega desde o Ensino Fundamental II. Esse aluno ideal aprendeu o método no Ensino Fundamental, utilizou nos estudos dos zeros da Função Quadrática e na redução dessa mesma função à sua forma canônica no Ensino Médio, conseguiu a abstração necessária para não depender o tempo todo do auxílio de figuras e, assim, tem a habilidade para utilizar o método em diversas outras situações que necessite durante toda a sua Educação Básica e futuramente no Ensino Superior.

3.4 Uma ampliação de possibilidades

Ao girar um semicírculo ao redor do seu diâmetro obtémos uma esfera.

Figura 16: Esfera de revolução.



Fonte: do Autor

Mas aqui estamos interessados na representação algébrica da superfície deste sólido:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{3.5}$$

Esta é a equação reduzida da superfície esférica.

Em Anton e Rorres (2012, p.523) é afirmado que a esfera no espaço tridimensional de equação

$$c_1(x^2+y^2+z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

que passa por 4 pontos não coplanares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4) é dada pela equação em forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Uma aplicação do método de completar quadrados associada a este problema é, após a determinação da forma geral da equação da esfera por meio do cálculo do determinante, usar o método para obter a forma reduzida dessa equação.

Exemplo 3.4 Considere a esfera que passa pelos pontos $(0, 3, 2)$, $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 0)$ e $(5, 1, 3)$, determine:

a) a equação de sua superfície em forma reduzida.

b) as coordenadas do centro e o raio dessa esfera.

SOLUÇÃO: Fazendo a substituição desses pontos no determinante, fica

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 35 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo os cálculos relacionados (utilizamos o software online WolframAlpha), obtemos a seguinte equação:

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 5 = 0$$

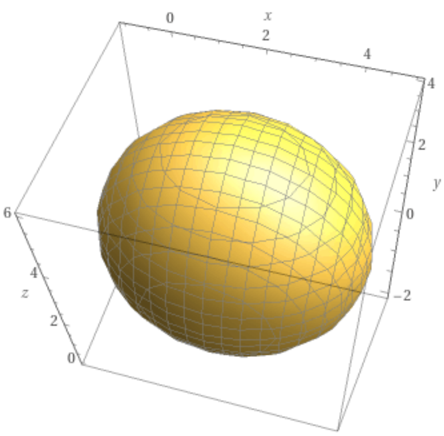
Agora, para obtermos a forma reduzida aplicamos o método de completar quadrados a cada uma das três variáveis:

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 4x\right) + \left(y^2 - 2y\right) + \left(z^2 - 6z\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[(x-2)^2 + 4\right] + \left[(y-1)^2 - 1\right] + \left[(z-3)^2 - 9\right] + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 + 4 - 1 - 9 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3^2. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que (a) as coordenadas do centro são $x = 2$, $y = 1$ e $z = 3$ e que (b) o raio dessa esfera é $R = 3$.

Em complemento, a representação geométrica da esfera em questão é dada pela Figura 17

Figura 17: Esfera de equação $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$.



Fonte: do autor

□

Este exemplo mostra que existem possibilidades de aplicação do método de completar quadrados além das aplicações em curvas do espaço bidimensional. Essas aplicações possibilitam ao professor explorar com seus alunos do Ensino Médio situações multidisciplinares envolvendo matemática e computação por meio da aplicação de softwares em conjunto com o método de completar quadrados.Trata-se de um vasto campo de criação de sequências didáticas que só dependem da criatividade de cada professor.

Capítulo 4

Cônicas

Uma cônica pode ser caracterizada perfeitamente por meio de suas propriedades geométricas. Mas a exposição das cônicas será realizada aqui de forma analítica, ou seja, por meio de suas representações algébricas. No capítulo anterior já foi discutido sobre a aplicação de uma cônica específica, a circunferência. Neste capítulo as cônicas a serem consideradas serão as chamadas cônicas clássicas: parábola, elipse, hipérbole.

4.1 Definição e elementos das cônicas clássicas

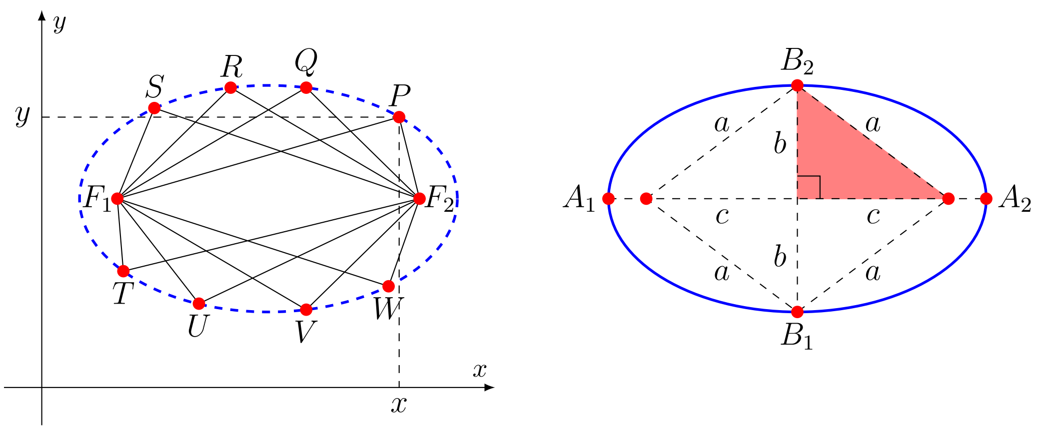
4.1.1 Elipse

Da mesma forma que no caso da parábola, as literaturas consultadas definem a elipse do seguinte modo:

Definição 4.1 *Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos* F_1 *e* F_2 *(deste plano) é constante e maior que* F_1F_2*.*

Geometricamente, a definição dada pode ser interpretada do seguinte modo:
Figura 4.2: Elipse

Figura 18: Elipse.



(a) (b)

Fonte: do Autor

Fonte: do autor

Segundo Xavier e Barreto (2003, v.3, p.88), com adaptações, os elementos da elipse são:

- F_1 e F_2 são os focos;
- $F_1F_2 = 2c$ é chamada de distância focal;
- A_1 e A_2 são os vértices da elipse;
- A_1A_2 é o eixo maior da elipse (sua medida é $2a$);
- B_1B_2 é o eixo menor da elipse (sua medida é $2b$);
- $C(x_0, y_0)$ é o centro da elipse (representa o ponto médio de F_1F_2, de A_1A_2 e de B_1B_2).

Além disso, a relação $e = c/a$, $0 < e < 1$ é chamada de excentricidade da elipse. Esse número nos diz o quão "achatada" é a elipse. Quanto maior for o valor de e, menos achatada ela será.

Da Figura 18-(b), observamos claramente que $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$. Assim, fazendo coincidir o centro do sistema de eixos ortogonais com o ponto que fica a meia distância entre B_1 e B_2 e, como B_2 é um ponto da cônica, concluímos que para qualquer ponto $P(x, y)$ dessa cônica devemos ter

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Segue, ainda, da Figura 18-(b) que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e $a^2 = b^2 + c^2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
&PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow (PF_1)^2 = (x+c)^2 + y^2,\\
&PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (PF_2)^2 = (x-c)^2 + y^2,\\
&a^2 = b^2 + c^2 a^2 - c^2 = b^2.
\end{aligned}$$

Estas últimas igualdades acima desempenham papel crucial na obtenção da forma canônica da elipse que faremos logo abaixo.

Agora, da igualdade $PF_1 + PF_2 = 2a$, segue que

$$PF_1 = 2a - PF_2.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$(PF_1)^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + (PF_2)^2.$$

Fazendo as devidas substituições,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + (x-c)^2 + y^2,$$

ou, equivalentemente,

$$(x+c)^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + (x-c)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados, temos

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + x^2 - 2cx + c^2$$

e, eliminando os termos repetidos de mesmo sinal e que estão em lados opostos da igualdade, concluímos que

$$2cx = 4a^2 - 4aPF_2 - 2cx.$$

Deste modo,

$$4aPF_2 = 4a^2 - 4cx$$

e, multiplicando esta última igualdade termo a termo por $1/4$, obtemos

$$aPF_2 = a^2 - cx.$$

Novamente iremos elevar ambos os membros ao quadrado, e repetir alguns dos passos anteriores até que encontremos a forma reduzida da cônica:

$$\begin{aligned}(aPF_2)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2 &\Leftrightarrow a^2\left(PF_2\right)^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2\\ &\Leftrightarrow a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2\\ &\Leftrightarrow a^2\left(x-c\right)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2\\ &\Leftrightarrow a^2\left(x^2 - 2cx + c^2\right) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2\\ &\Leftrightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.\end{aligned}$$

Eliminando termos iguais em lados opostos, obtemos

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Juntando termos semelhantes, fica

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Mas $a^2 - c^2 = b^2$ e, portanto,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividindo cada termo dessa última igualdade por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.1}$$

que é a forma canônica da equação da elipse.

Nos casos em que o centro da cônica não coincide com o centro do sistema de eixos ortogonais, a equação acima fica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{4.2}$$

em que $C\left(x_0, y_0\right)$ é a coordenada do centro.

Se na Figura 18 o eixo de simetria maior A_1A_2 fosse paralelo ao eixo y do sistema ortogonal, as equações obtidas acima teriam as seguintes formas, respectivamente:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

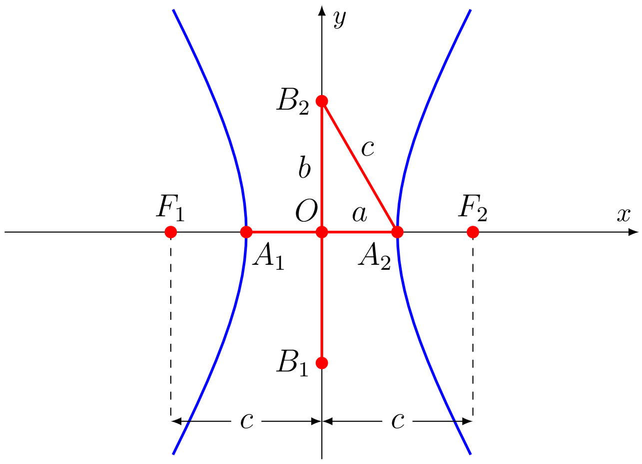
Alguns autores não fazem a permutação dos parâmetros a e b como se fez acima para indicar que o semi-eixo maior está no eixo y. Esses autores designam sempre por a o semi-eixo coincidente com o eixo x e por b o semi-eixo coincidente com o eixo y, independentemente de qual dos parâmetros é o maior.

4.1.2 Hipérbole

Definição 4.2 *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos dados nesse plano, chamados focos, é uma valor constante.*

Analogamente ao que se fez a respeito da elipse, consideremos uma hipérbole qualquer. Se os eixos dos sistema de coordenadas são escolhidos de modo que os focos da hipérbole se encontrem sobre o eixo das abscissas dispostas simetricamente em relação à origem das coordenadas, a sua representação geométrica fica da seguinte forma:

Figura 19: Hipérbole.



Fonte: do Autor

Elementos da hipérbole:

- F_1 e F_2 são os focos
- A_1 e A_2 são os vértices
- $F_1F_2 = 2c$ é a distância focal
- A_1A_2 é chamado de eixo real (sua medida é $2a$)
- B_1B_2 é chamado de eixo imaginário (sua medida é $2b$)
- $C(x_0, y_0)$ é o centro da hipérbole (indicado por O na imagem)

A relação $e = c/a$, $e > 1$ é chamada de excentricidade da hipérbole e, como observamos na figura, o parâmetro c é tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

A equação da hipérbole pode ser obtida por meio de procedimento semelhante ao que se fez para a obtenção da equação da elipse. Sua equação tem a seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

Nos casos em que o centro da hipérbole não coincide com o centro do sistema de eixos cartesianos ortogonais, a equação toma a forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

e, se o eixo real for paralelo ao eixo y, temos

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x-x_0)^2}{b^2} - \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Nos itens subsequentes é feita a aplicação do método de completar quadrados às cônicas clássicas.

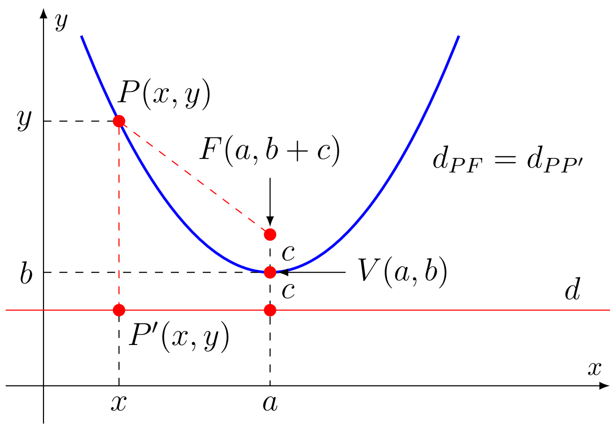
4.1.3 Parábola

Independentemente de qual seja a literatura moderna consultada, todas elas definem a parábola de modo semelhante ao seguinte:

Definição 4.3 *Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano, que são equidistantes de uma reta dada e de um ponto fixo fora dessa reta e que pertence ao plano considerado.*

Geometricamente, a figura pode ser interpretada do seguinte modo, em que representamos parte da parábola de acordo com a definição dada:

Figura 20: Parábola.



Fonte: do Autor

Segundo Xavier e Barreto (2003, v.3, p.81), com adaptações, os elementos da parábola são:

- o ponto F é o foco;
- a reta d é a diretriz;
- o ponto V é o vértice;

- a distância $2c$ entre o foco F e a diretriz d é o parâmetro;
- a reta perpendicular à diretriz d, passando pelo foco F, é o eixo de simetria;
- o vértice V é o ponto médio de DF, portanto, $DV = VF = c$.

Para encontrar a equação da parábola, desenvolvemos a igualdade

$$d_{PF} = d_{PP'}$$

do seguinte modo

$$\begin{aligned} d_{PF} = d_{PP'} &\Leftrightarrow \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x_P - x_{P'})^2 + (y_P - y_{P'})^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + [y-(b+c)]^2} = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(b-c)]^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$(x-a)^2 + [y-(b+c)]^2 = (x-x)^2 + [y-(b-c)]^2 .$$

Desenvolvendo cada termo, obtemos

$$(x-a)^2 + y^2 - 2by - 2cy + b^2 + 2bc + c^2 = y^2 - 2by + 2cy + b^2 - 2bc + c^2.$$

Eliminamos os termos que se repetem em ambos os lados da igualdade, chegamos em

$$(x-a)^2 - 2cy + 2bc = 2cy - 2bc,$$

de onde extraímos que

$$(x-a)^2 = 4c\,(y-b) \tag{4.4}$$

que é a forma canônica da equação da parábola.

Se na Figura 20 a parábola tivesse a concavidade voltada para baixo, para a direita ou para a esquerda, o cálculo desenvolvido teria resultado, respectivamente em $(x-a)^2 = -4c\,(y-b)$, $(y-b)^2 = 4c\,(x-a)$ ou $(y-b)^2 = -4c\,(x-a)$.

4.2 Aplicações do método de completar quadrados às cônicas

A necessidade de aplicar o método de completar quadrados aparece de forma natural quando se deseja obter a forma canônica da equação de uma cônica. Mas essa possibilidade só se concretiza quando a cônica contém seus vértices sobre um sistema de eixos ortogonais. Caso contrário, é necessário que se faça uma rotação em seus eixos para eliminar o termo misto e poder então aplicar o método de completar quadrados.

4.2.1 Aplicações à elipse

À seguir, discutimos três exemplos adaptados do livro "Problemas de Geometria Analítica" de autoria de David Viktorovich Kletenik (1984). Os problemas foram adaptados das questões 673.1, 673.3 e 673.5 do referido livro (p. 117).

Exemplo 4.4 Escrever a cônica $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$ em sua forma canônica, identificá-la e determinar o centro, os focos e a excentricidade.

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos:

$$\begin{aligned} 4x^2+9y^2-40x+36y+100=0 &\Leftrightarrow \left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)+100=0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(x^2-10x\right)+9\left(y^2+4y\right)+100=0 \\ &\Leftrightarrow 4\left[(x-5)^2-25\right]+9\left[(y+2)^2-4\right]+100=0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(x-5\right)^2-100+9\left(y+2\right)^2-36+100=0. \end{aligned}$$

Eliminamos os termos opostos (100 e -100), obtemos

$$4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2-36=0,$$

de onde segue que

$$4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36.$$

Multiplicando cada termo por $1/36$, obtemos

$$\frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1,$$

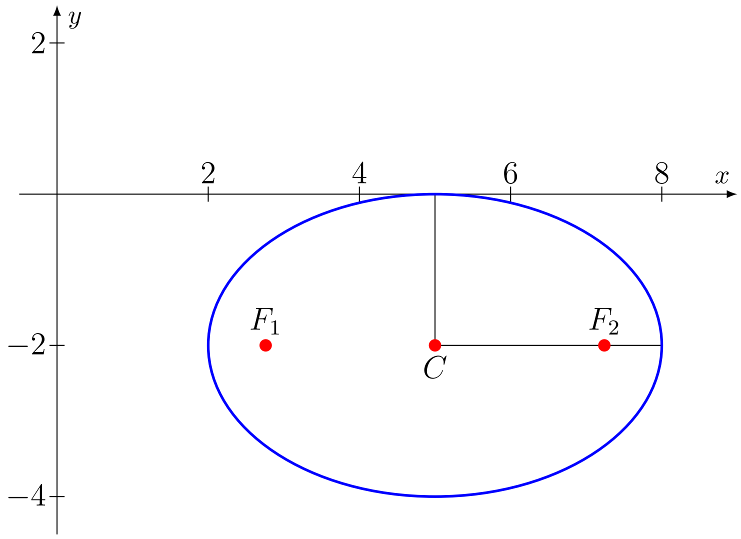
que é a forma canônica da equação de uma elipse.

Para determinar os elementos precisamos primeiramente determinar os valores de a, b e c. Da forma cônica tiramos que $a=3$, $b=2$ e, da relação $c^2=a^2-b^2$, inferimos que $c^2=9-4$ e, consequentemente, $c=\sqrt{5}$.

Elementos da elipse:

- Centro: $C\left(x_0,y_0\right)=(5,-2)$;
- Focos: $F_1=\left(x_0-c,y_0\right)=\left(5-\sqrt{5},-2\right)$ e $F2=\left(x_0+c,y_0\right)=\left(5+\sqrt{5},-2\right)$;
- Excentricidade: $e=c/a=\sqrt{5}/3$.

Figura 21: Representação do Exemplo 4.4.



Fonte: do Autor

□

Exemplo 4.5 Reduzir a equação

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$$

à sua forma mais simples e identificar a cônica que ela representa.

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0 &\Leftrightarrow \left(9x^2 + 18x\right) + \left(4y^2 - 8y\right) + 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9\left(x^2 + 2x\right) + 4\left(y^2 - 2y\right) + 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9\left[(x+1)^2 - 1\right] + 4\left[(y-1)^2 - 1\right] + 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 9 + 4(y-1)^2 - 4 + 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = -36. \end{aligned}$$

Dividindo cada termo desta última igualdade por -36, obtemos

$$-\frac{(x+1)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1,$$

que é a forma canônica da equação dada. Para que o resultado acima seja possível devemos ter pelo menos um dos valores $(x+1)^2$ ou $(y-1)^2$ negativo, mas isso é impossível. Portanto, a equação dada representa um conjunto vazio. □

Exemplo 4.6 Reduzir a equação $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$ à sua forma mais simples e identificar a cônica que ela representa.

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2+3y^2+8x-6y+11=0 &\Leftrightarrow \left(2x^2+8x\right)+\left(3y^2-6y\right)+11=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2+4x\right)+3\left(y^2-2y\right)+11=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left[(x+2)^2-4\right]+3\left[(y-1)^2-1\right]+11=0 \\ &\Leftrightarrow 2(x+2)^2-8+3(y-1)^2-3+11=0 \\ &\Leftrightarrow 2(x+2)^2+3(y-1)^2=0. \end{aligned}$$

Dividindo cada termo desta última igualdade por 6, obtemos

$$\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=0.$$

Para que esse resultado seja possível, devemos ter

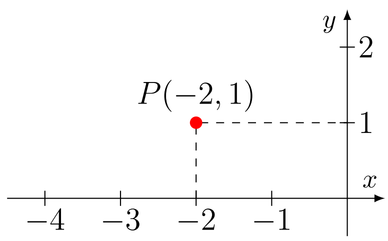
$$(x+2)^2=0 \quad \text{e} \quad (y-1)^2=0,$$

o que ocorre se, e somente se,

$$x=-2 \quad \text{e} \quad y=1.$$

Portanto a equação dada representa o ponto $P(-2,1)$.

Figura 22: Representação do Exemplo 4.6.



Fonte: do Autor

□

Para generalizar, inspirados em Frensel e Delgado (2011, p.137,138) vamos estabelecer as condições para que a equação geral do segundo grau – que vimos no Capítulo 3 – represente a equação de uma elipse com eixos paralelos aos eixos do sistema de coordenadas cartesianas retangulares.

Desenvolvendo a equação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

obtemos

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2x_0x-2a^2y_0y+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0. \tag{4.5}$$

De modo geral, como vimos no Capítulo 3, a equação de uma cônica pode ser representada por meio da Equação 3.1 ($Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$) e, dependendo de condições sobre seus coeficientes, ela poderá representar uma ou outra cônica.

É evidente a semelhança entre as equações 3.1 e 4.5, de modo que, fazendo a comparação entre elas temos

$$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = a^2, \quad D = -2b^2x_0, \quad E = -2a^2y_0 \quad \text{e} \quad F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2.$$

É útil notar que $B = 0$ e que A e C têm o mesmo sinal, o que implica que $AC > 0$. Com isso, a equação de uma elipse pode ser escrita a partir da Equação 3.1 como

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4.6}$$

Agora, aplicando o método de completar quadrados à Equação 4.6, temos

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 &\Leftrightarrow \left(Ax^2 + Dx\right) + \left(Cy^2 + Ey\right) + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left[\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] + C\left[\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C^2}\right] + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} + F = 0 \\
&\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \\
&\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}.
\end{aligned}$$

Para simplificar, façamos $CD^2 + AE^2 - 4ACF = M$. Substituindo, fica

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{M}{4AC}. \tag{4.7}$$

Daqui, segue que

I) Para $M = 0$, o lado direito dessa equação se anula e temos uma soma de quadrados que resulta em zero:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0.$$

Como A e C têm mesmo sinal e nenhum destes dois coeficientes pode ser zero, resta que $x + \frac{D}{2A} = 0$ e que $y + \frac{E}{2C} = 0$, de onde segue que $x = -\frac{D}{2A}$ e $y = -\frac{E}{2C}$ e, consequentemente, a cônica determinada pela Equação 4.6 se resume ao ponto $P\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.

II) Para $M \neq 0$, a análise pode ser feita por meio da seguinte tabela:

Tabela 2: Sinais da Equação 4.7.

$A\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\dfrac{E}{2C}\right)^2=\dfrac{M}{4AC}$					
M	A	C	$M/4AC$	Situação	Resultado
$+$	$+$	$+$	$+$	Possível	Elipse
$+$	$-$	$-$	$+$	Impossível	Conj. Vazio
$-$	$+$	$+$	$-$	Impossível	Conj. Vazio
$-$	$-$	$-$	$-$	Possível	Elipse

Fonte: do autor

Em conclusão, se $M \neq 0$, então a Equação 4.6 representará uma elipse sempre que M, A e C tiverem o mesmo sinal. Nas situações em que isso não ocorrer o resultado será um conjunto vazio. Para os casos em que a equação representa uma elipse, ela pode ser reescrita em forma canônica do seguinte modo:

$$\frac{\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2}{\dfrac{M}{4A^2C}}+\frac{\left(x+\dfrac{E}{2C}\right)^2}{\dfrac{M}{4AC^2}}=1. \tag{4.8}$$

A Equação 4.8 representa uma elipse de centro $C\left(-\dfrac{D}{2A},-\dfrac{E}{2C}\right)$ em que M, A e C têm o mesmo sinal.

A generalização feita acima tem por objetivo legitimar a aplicação do método de completar quadrados para equações do tipo (4.6), isto é, assegurar que os procedimentos feitos anteriormente nos Exemplos 4.4, 4.5 e 4.6 são válidos. Não se trata, portanto, pelo menos em um primeiro momento, de substituir a aplicação do método, pois ele se mostra muito fácil de ser lembrado.

A fim de tornar mais claro os resultados obtidos, faremos a verificação da compatibilidade dos resultados com o que se observou nos Exemplos 4.4, 4.5 e 4.6.

a) No Exemplo 4.4, a equação dada foi $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$, da qual extraímos $A=4$, $C=9$, $D=-40$, $E=36$ e $F=100$. Assim, $A>0$ e $C>0$. Determinando o sinal de M, temos

$$M=CD^2+AE^2-4ACF=9\cdot(-40)^2+4\cdot 36^2-4\cdot 4\cdot 9\cdot 100=5184>0.$$

Daí, como A e M têm mesmo sinal, esta equação deve representar uma elipse de centro

$$C\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)=\left(-\frac{-40}{2\cdot 4},-\frac{36}{2\cdot 9}\right)=(5,-2)\,,$$

o que é compatível com o que se viu na ocasião desse exemplo.

b) No Exemplo 4.5, a equação dada foi $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$, para a qual temos $A=9$, $C=4$, $D=18$, $E=-8$ e $F=49$. Assim, A e C têm o mesmo sinal e

$$M=CD^2+AE^2-4ACF=4\cdot 18^2+9\cdot(-8)^2-4\cdot 9\cdot 4\cdot 49=-5184<0.$$

Daí, como A e M têm sinais opostos, esta equação deve representar o conjunto vazio, o que é compatível com o resultado alcançado na ocasião do exemplo em questão.

c) No Exemplo 4.6, a equação dada foi $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$, para a qual temos $A=2$, $C=3$, $D=8$, $E=-6$ e $F=11$. Assim, A e C têm o mesmo sinal e

$$M = CD^2 + AE^2 - 4ACF = 3\cdot 8^2 + 2\cdot(-6)^2 - 4\cdot 2\cdot 3\cdot 11 = 0.$$

Daí, esta equação deve representar o ponto $P = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$. Fazendo as substituições, temos $P = \left(-\frac{8}{2\cdot 2}, \frac{6}{2\cdot 3}\right) = (-2,1)$. O que é compatível com o resultado alcançado na ocasião deste exemplo.

Em síntese, uma equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

em que $B=0$ e que A e C têm o mesmo sinal, o que implica que $AC>0$, representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados do sistema cartesiano ortogonal e pode ser reescrita como

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Daí, podemos aplicar o método de completar quadrados para determinar a sua forma canônica bem como seus elementos.

Além disso, se $M = CD^2 + AE^2 - 4ACF$ e A tiverem o mesmo sinal (o que implica que C também terá o mesmo sinal) a equação acima representa uma elipse que terá a forma canônica dada pela Equação 4.8 e seu centro será o ponto $C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$; se M e A tiverem sinais contrários a equação representará o conjunto vazio; e finalmente, se M for igual a zero a equação representará um único ponto, a saber, $P = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$. Estes dois últimos casos são conhecidos na literatura subjacente como casos degenerados da elipse.

4.2.2 Aplicações à hipérbole

Vamos investigar agora as condições para que a equação quadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

represente uma hipérbole.

Para seguir a mesma sistemática da Subseção 4.2.1, comecemos com dois exemplos que ilustram possibilidades para a equação de uma hipérbole. Os exemplos subsequentes são adaptações dos exercícios 673.4 e 673.2, respectivamente, da página 117 do livro de Kletenik (1984).

Exemplo 4.7 Escreva a equação

$$4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$$

em sua forma mais simples e identifique o tipo de curva que ela representa.

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos

$$
\begin{aligned}
4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0 &\Leftrightarrow \left(4x^2 + 8x\right) - \left(y^2 + 2y\right) + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4\left(x^2 + 2x\right) - \left(y^2 + 2y\right) + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4\left[(x+1)^2 - 1\right] - \left[(y+1)^2 - 1\right] + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 4 - (y+1)^2 + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - (y+1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4(x+1)^2 = (y+1)^2 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{4}(y+1)^2 .
\end{aligned}
$$

Calculando a raiz quadrada, temos

$$(x+1) = \pm\frac{1}{2}(y+1),$$

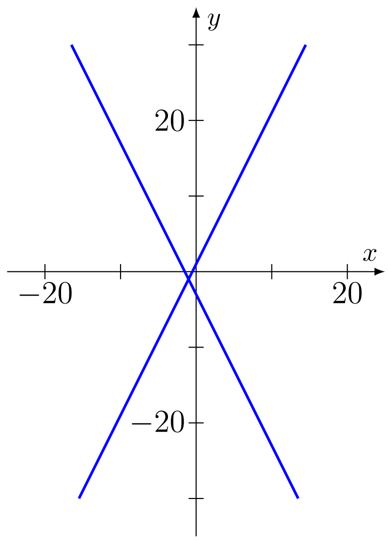
de onde segue que

$$y = \pm(2x+2) - 1.$$

Portanto, a equação dada representa o par de retas concorrentes

$$y = 2x + 1 \qquad \text{e} \qquad y = -2x - 3.$$

Figura 23: Representação do Exemplo 4.7.



Fonte: do Autor

□

Exemplo 4.8 Escreva a equação quadrática

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$$

em sua forma canônica e identifique o tipo de curva que ela representa.

Solução: Aplicando o método de completar quadrados, temos

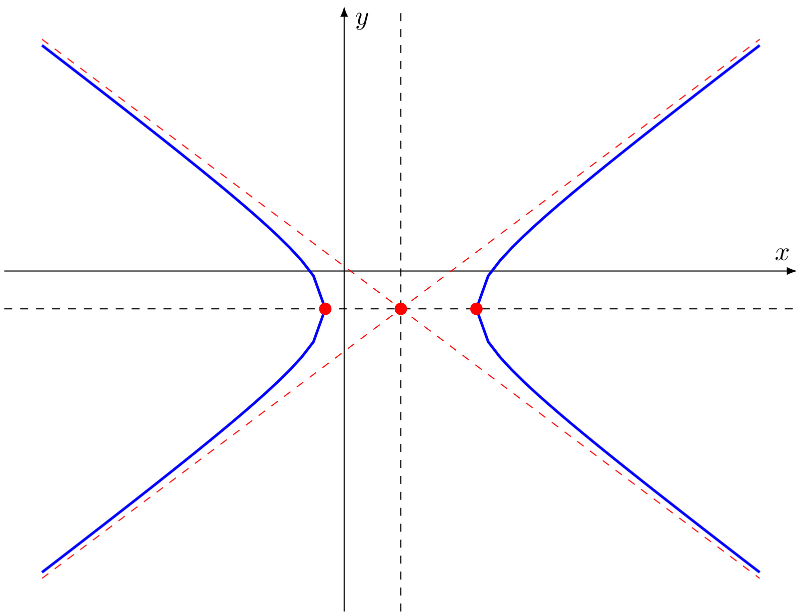
$$\begin{aligned} 9x^2-16y^2-54x-64y-127=0 &\Leftrightarrow \left(9x^2-54x\right)-\left(16y^2+64y\right)-127=0 \\ &\Leftrightarrow 9\left(x^2-6x\right)-16\left(y^2+4y\right)-127=0 \\ &\Leftrightarrow 9\left[(x-3)^2-9\right]-16\left[(y+2)^2-4\right]-127=0 \\ &\Leftrightarrow 9\left(x-3\right)^2-81-16\left(y+2\right)^2+64-127=0 \\ &\Leftrightarrow 9\left(x-3\right)^2-16\left(y+2\right)^2=144. \end{aligned}$$

Dividindo cada termo desta última igualdade por 144, obtemos

$$\frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1.$$

Logo, a equação dada representa uma hipérbole cujo centro é $C\,(3,-2)$ e o eixo real é paralelo a Ox.

Figura 24: Representação do Exemplo 4.8.



Fonte: do Autor

□

Semelhantemente ao que fizemos na Subseção 4.2.1, vamos, desta vez, desenvolver a equação da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo Ox.

Desenvolvendo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

obtemos

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2x_0x+2a^2y_0y+\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right)=0.$$

Comparando esta última equação acima com a equação geral do segundo grau com duas incógnitas

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

obtemos

$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = -a^2, \quad D = -2b^2x_0, \quad E = 2a^2y_0 \quad \text{e} \quad F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$

Uma constatação imediata é que $B = 0$ e que A e C têm sinais opostos, esse último fato implica que $AC < 0$.

Assim, a equação de uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Ox pode ser escrita como

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

assim como o foi para a equação da elipse, mas aqui, como visto acima, A e C têm sinais opostos.

Aplicando o método de completar quadrados chegamos novamente a

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{M}{4AC} \tag{4.9}$$

Com

$$M = CD^2 + AE^2 - 4ACF.$$

Daí, segue que:

I) Se $M = 0$, o termo à direita da equação se reduz a zero e ela pode ser reescrita como

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{C}{A}\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2.$$

Como $-C/A$ é positivo, calculando a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos

$$x + \frac{D}{2A} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}\left(y + \frac{E}{2C}\right).$$

Finalmente, separando a dupla igualdade acima concluímos que a equação dada, sob esta condição ($M = 0$), representa o par de retas concorrentes dado por

$$x + \frac{D}{2A} = +\sqrt{-\frac{C}{A}}\left(y + \frac{E}{2C}\right) \quad \text{e} \quad x + \frac{D}{2A} = -\sqrt{-\frac{C}{A}}\left(y + \frac{E}{2C}\right).$$

II) Agora, se tivermos $M \neq 0$, a Equação 4.9 pode ser reescrita como

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4AC^2}} = 1,$$

em que A e C têm sinais contrários e, neste caso, a equação representa uma hipérbole com centro $C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.

Vamos aplicar estes resultados aos exemplos 4.7 e 4.8 feitos anteriormente para comparar os resultados obtidos.

a) No Exemplo 4.7, a equação estudada foi $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$, para a qual $A = 4$, $C = -1$, $D = 8$, $E = -2$ e $F = 3$. Daí, devemos ter

$$M = CD^2 + AE^2 - 4ACF = -1.8^2 + 4 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 3 = -64 + 16 + 48 = 0.$$

Assim, a equação dada deve representar o par de retas concorrentes dadas por

$$x + \frac{D}{2A} = +\sqrt{-\frac{C}{A}}\left(y + \frac{E}{2C}\right) \quad \text{e} \quad x + \frac{D}{2A} = -\sqrt{-\frac{C}{A}}\left(y + \frac{E}{2C}\right).$$

Substituindo os valores dos coeficientes, temos

$$\begin{aligned} x + \frac{8}{2 \cdot 4} = \sqrt{-\frac{-1}{4}}\left(y + \frac{-2}{2 \cdot (-1)}\right) &\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{2}(y+1) \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$x + 1 = -\frac{1}{2}(y+1) \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0.$$

Portanto, estes resultados conferem com o que se observou no Exemplo 4.7.

b) No Exemplo 4.8, a equação estudada foi

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0,$$

da qual extraímos $A = 9$, $C = -16$, $D = -54$, $E = -64$ e $F = -127$. Daí, devemos ter

$$M = CD^2 + AE^2 - 4ACF = -16 \cdot (-54)^2 + 9 \cdot (-64)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) \cdot (-127) = -82944 \neq 0.$$

Assim, a equação dada deve representar a hipérbole dada por

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4AC^2}} = 1.$$

Fazendo as devidas substituições e os devidos cálculos, temos

$$\begin{aligned} \frac{\left(x + \frac{-54}{2 \cdot 9}\right)^2}{\frac{-82944}{4 \cdot 9^2 \cdot (-16)}} + \frac{\left(y + \frac{-64}{2 \cdot (-16)}\right)^2}{\frac{-82944}{4 \cdot 9 \cdot (-16)^2}} = 1 &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{\frac{-82944}{-5184}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{-82944}{9216}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{-9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, estes resultados conferem com o que se observou no Exemplo 4.8.

4.2.3 Aplicações à parábola

Neste tópico, discutimos as condições que a equação geral do segundo grau a duas incógnitas deve cumprir para que represente a equação de uma parábola. Mais precisamente, de uma parábola com diretriz paralela aos eixos coordenados.

Exemplo 4.9 Obter a forma canônica da equação

$$x^2 + 8x + 2y + 14 = 0$$

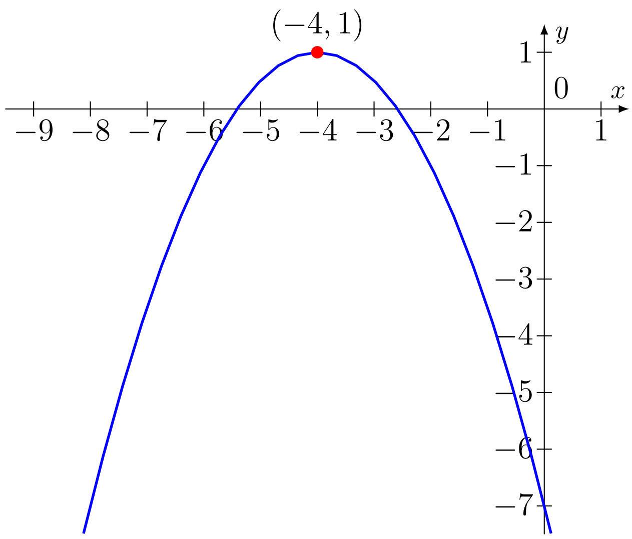
e determinar o vértice da parábola que ela representa.

Solução: Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 2y + 14 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 + 8x\right) = -2y - 14 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 = -2y - 14 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2 = -2y + 2 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2 = -2(y-1), \end{aligned}$$

que é a forma canônica da equação da parábola de diretriz paralela ao eixo Ox e vértice $V = (-4, 1)$.

Figura 25: Gráfico do Exemplo 4.9.



Fonte: do Autor

□

Para entendermos melhor as condições às quais os coeficientes da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

devem estar sujeitos para que ela represente a equação de uma parábola, primeiramente desenvolvemos a equação da parábola com vértice no ponto (a, b) para os casos em que a diretriz é paralela ao eixo Ox (neste caso, a concavidade da parábola é para cima ou para baixo), temos

$$\begin{aligned}(x-a)^2 = \pm 4c(y-b) &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = \pm 4cy \mp 4cb \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax \mp 4cy + \left(a^2 \pm 4cb\right) = 0.\end{aligned}$$

Comparando com

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

concluímos que

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -2a, \quad E = \mp 4c \quad \text{e} \quad F = a^2 \pm 4cb.$$

Agora, desenvolvemos a equação da parábola com vértice no ponto (a, b) para os casos em que a diretriz é paralela ao eixo Oy (neste caso, a concavidade da parábola é para direita ou para esquerda), temos

$$\begin{aligned}(y-b)^2 = \pm 4c\,(x-a) &\Leftrightarrow y^2 - 2by + b^2 = \pm 4cx \mp 4ac \\ &\Leftrightarrow y^2 \mp 4cx - 2by + \left(b^2 \pm 4ac\right) = 0.\end{aligned}$$

Comparando com

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

observamos que

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = \mp 4c, \quad E = -2b \quad \text{e} \quad F = b^2 \pm 4ac.$$

Assim, tomando os dois resultados acima, a equação geral do segundo grau com duas incógnitas pode ser reescrita como

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4.10}$$

A obtenção dos resultados possíveis no desenvolvimento da equação acima, em que ela representa uma parábola ($A \neq 0$ e $C = 0$ ou $A = 0$ e $C \neq 0$), foi resumido a dois casos e em ambos consideramos a parábola com diretriz paralela ao eixo Ox.

Primeiro caso: Considerando $A \neq 0$, $C = 0$ e $E = 0$ a última equação acima pode ser reescrita como $Ax^2 + Dx + F = 0$. Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned}Ax^2 + Dx + F = 0 &\Leftrightarrow Ax^2 + Dx = -F \\ &\Leftrightarrow A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) = -F \\ &\Leftrightarrow A\left[\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] = -F.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $1/A$, obtemos

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2} = -\frac{F}{A} \Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=\frac{D^2-4AF}{4A^2}\\
&\Leftrightarrow x+\frac{D}{2A}=\pm\frac{\sqrt{D^2-4AF}}{2A}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-4AF}}{2A}.
\end{aligned}$$

Daqui, resulta que:

- Para $D^2-4AF>0$, a equação dada representará um par de retas paralelas ao eixo Oy.
- Para $D^2-4AF=0$, a equação dada representará uma única reta paralela ao eixo Oy.
- Para $D^2-4AF<0$, a equação dada representará o conjunto vazio, já que neste caso a raiz quadrada real não existe.

Segundo caso: Considerando $A\neq 0$, $C=0$ e $E\neq 0$ a Equação 4.10 pode ser reescrita como $Ax^2+Dx+Ey+F=0$. Multiplicando esta equação por $1/A$, obtemos

$$x^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A^2}=-\frac{E}{A}y-\frac{F}{A} &\Leftrightarrow \left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=-\frac{E}{A}\left[y+\left(\frac{F}{E}-\frac{D^2}{4AE}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=-\frac{E}{A}\left[y-\left(\frac{D^2-4AF}{4AE}\right)\right],
\end{aligned}$$

que é a equação da parábola cuja diretriz é paralela ao eixo Ox e o vértice é dado por $V=\left(-\frac{D}{2A},\frac{D^2-4AF}{4AE}\right)$.

Apliquemos o resultado do segundo caso ao Exemplo 4.9. A equação dada foi

$$x^2+8x+2y+14=0,$$

de onde segue que $A=1$, $C=0$, $D=8$, $E=0$ e $F=14$. Daí, substituindo os coeficientes em

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=-\frac{E}{A}\left[y-\left(\frac{D^2-4AF}{4AE}\right)\right]$$

temos

$$\left(x+\frac{8}{2\cdot 1}\right)^2=-\frac{2}{1}\left[y-\frac{8^2-4\cdot 1\cdot 14}{4\cdot 1\cdot 2}\right],$$

isto é,

$$(x+4)^2=-2\,(y-1)\,,$$

que é compatível com o que se obteve inicialmente no referido exemplo.

Conclusão

A partir das discussões e resultados mostrados ao longo deste estudo, reitera-se que embora o método usual de resolução de equações quadráticas tenha relevância pela sua simplicidade e facilidade de uso, o método de completar quadrados deve ser "cultivado" ao longo de todas as oportunidades que demandarem seu uso nos Ensinos Fundamental e Médio para que na continuidade de sua formação os estudantes possam utilizá-lo, sobretudo em Geometria Analítica, sem maiores dificuldades. Além disso, trata-se de um procedimento tão simples de se abstrair quanto a aplicação de uma fórmula, mas muito mais poderoso e útil.

O levantamento histórico desenvolvido no Capítulo 1 favoreceu positivamente uma reapresentação desse método no modo como era utilizado no decurso de vários séculos e traçou um paralelo com a forma como essa ferramenta se apresenta hoje nos livros didáticos. Isso culminou na necessidade da abordagem abstrata vista por meio do estudo da equação geral do segundo grau com duas incógnitas, a qual foi a base do tratamento que se fez das cônicas clássicas ao longo dos capítulos subsequentes.

É, então, um instrumento matemático que deve ser tratado de maneira mais atrativa para os estudantes e mais séria pelos currículos por meio de trilhas didáticas que privilegiem o uso desse recurso e o retirem da atual posição de uma simples introdução à resolução de equação quadrática. Os diversos tipos de curvas tratados no presente texto por meio desse método evidenciam definitivamente esse fato. Pois o trabalho desenvolvido concentra argumentos apoiados em sólida bibliografia que favorecem ao professor de matemática encontrar respostas alternativas a perguntas como: "Por que eu devo ensinar essa ferramenta?" ou "Em quê o aluno fará uso dela futuramente?".

A título de sugestão, na ocasião do ensino da equação da circunferência, para cumprir o que se pretende que os estudantes dominem no que se refere à habilidades em relação à essa curva no Ensino Médio, o professor poderá criar uma sequência didática que favoreça o emprego de softwares, como o GeoGebra por exemplo, para a construção gráfica da circunferência a partir de sua definição, e em seguida instruir a comparação dessa equação com a equação geral das cônicas e fazer as mesmas inferências que se fez neste trabalho no Capítulo 3, inclusive por meio de montagem de tabelas para analisar a relação entre os coeficientes da equação geral das curvas do segundo grau e a equação encontrada para a circunferência de modo que se possa perceber as situações em que ela representa a circunferência, o ponto ou um conjunto vazio.

Outra sugestão é apresentar o método de completar quadrados da forma que é ensinado nos livros didáticos modernos do ensino fundamental e, ainda nessa ocasião, construir uma trilha que favoreça a interpretação geométrica do método por meio da construção de figuras da forma completa como se fez neste trabalho no Capítulo 2.

Estas sugestões não esgotam as possibilidades de criação de aulas atrativas, pois existem diversas outras formas do professor explorar com seus alunos da Educação Básica situações envolvendo matemática e tecnologia por meio da aplicação de softwares em conjunto com o método de completar quadrados. Trata-se de um vasto campo para criação de sequências didáticas ou aplicação de metodologias ativas que só dependem da criatividade de cada professor.

Ademais, esses projetos não precisam ficar vinculados à matemática da formação geral básica, pois algumas das disciplinas da parte diversificada do currículo favorecem a criação desses momentos formativos.

Enfim, considerando todos os aspectos e objetivos deste trabalho, bem como o desenvolvimento dos capítulos, conclui-se que ele cumpriu fielmente a sua proposta, mas não esgotou as possibilidades de abordagens nem as de aplicação do método de completar quadrados pois até mesmo na Geometria Analítica – que foi tema para a aplicações do método – não se chegou a totalidade das aplicações possíveis deste instrumento. Sendo possível, por exemplo, aplicar a ferramenta no estudo das equações das quádricas clássicas (no espaço em três dimensões). Deixando assim, espaço para complementações ou até mesmo sugestões de ampliação desse estudo por meio do emprego de outras ferramentas matemáticas e das aplicações do método de completar quadrados em outras áreas da matemática.

Referências

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. Bookman Editora, 2012.

BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linea**r, 3a edição. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1980.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**; tradução; Elza F. Gomide. São Paulo-SP, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL; Ministério da Educação. **PCN+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. 2002.

DE CARVALHO, João Bosco P.; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de história da Matemática**. Coleção Profmat, v. 1, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5 ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica**. Curso de Licenciatura em Matemática - Núcleo de educação à distância, UFMA. Niterói, 2011.

GENTIL, Nelson. DOS SANTOS, Carlos Alberto M. GRECO, Antônio Carlos. GRECO, Sérgio E. **Matemática para o segundo grau**. Editora Ática S.A. 5. ed. v.3, São Paulo, 1996.

GONÇALVES, Zózimo M. **Curso de Geometria Analítica com Tratamento Vetorial**, [s.l.]: Editora Científica, 1969.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade: 9^o ano**. 10. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2022.

KLETENIK, DAVID. **Problemas de geometría analítica**. 4. ed. Belo Horizonte: Livraria Cultura Brasileira Limitada, 1984.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., & MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

RASHED, Roshdi. **Classical mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes**. Routledge, 2014.

ROQUE, Tatiana M. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar, 2012.

XAVIER, Claudio; BARRETO, Benigno. **Matemática aula por aula: Ensino Médio. v. 3**. São Paulo: FTD, 2003.