UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

João Batista Santana Pinheiro

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

São Luís - MA
2024

João Batista Santana Pinheiro

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profisional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFMA.

Orientador: Professor. Dr. João de Deus Mendes da Silva

São Luís - MA

2024

João Batista Santana Pinheiro

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profisional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFMA.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 07 de agosto de 2024:

Professor. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Orientador
Universidade Federal do Maranhão-UFMA

Prof. Dra.Valeska Martins de Souza
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão-UFMA

Prof. Dr.José Antônio Pires Ferreira Marão
Examinador externo
Universidade Estadual do Maranhão-UEMA

São Luís - MA
2024

Dedico este trabalho a minha família, meu porto seguro e abrigo em todos os momentos. Em especial minha mãe Maria Dolores Santana,esposa Karenn Karollaine do Nascimento Sousa Pinheiro,filhos João Eduardo Sousa Pinheiro e João Gabriel Sousa Pinheiro que com muito amor, esforço e dedicação sempre me apoiaram nos meus sonhos.

Agradecimentos

São tantas as pessoas que merecem ser lembradas neste momento de agradecer, mas quero deixar aqui minha gratidão àqueles do meu círculo mais próximo.

A meu orientador, Professor. Dr. João de Deus Mendes da Silva que aceitou o desafio de me orientar e sempre esteve preocupado em criar pontes entre ele e eu, e que, nos momentos agudos teve paciência para me mostrar o melhor caminho;

Aos meus colegas/amigos do PROFMAT – UFMA/2022, que todos unidos lutamos essa batalha e nos consagramos vencedores, tenho a certeza que a nossa união fez que tudo isso fosse possível e faço questão de citar, nominalmente, cada colega amigo que fez parte dessa jornada vitoriosa: Roger Melo, Willamys Cruz, Derivaldo Barros, Eudes Nascimento,Mauro Roberto,Luis Eduardo Sousa,Wellington Carlos, Antônio Marcos de Jesus e Ezequiel Gomes.

Ao professor João de Deus, que não mediu esforços para que a turma 2022, tivesse o bom desempenho durante todo o curso, assim, asegurando e possibilitando que os docentes desta turma chegassem ao final do curso com muita segurança e bom conhecimento adquirido ao longo do processo.

À UFMA – Universidade Federal do Maranhão, pela oportunidade.

Minha mãe, Maria Dolores Santana e ao meu pai Ramiro Pinheiro e que não estão mais aqui na terra conosco, Obrigado pelo empenho e dedicação aplicados na minha educação, especialmente diante de tantos desafios pelos quais passamos juntos.

À minha esposa, Karenn Karollaine, que sempre me apoiou e, claro, aos meus filhos queridos, João eduardo e João Gabriel , que tantas vezes tiveram que ficar sem a presença do pai.

E a todos os meus irmaos, Ilma do Socorro Santana Pinheiro, Ivania Frazão Pinheiro e Ivan Santana Pinheiro, e amigos que compartilharam comigo de todas as etapas para a realização deste sonho.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."

(Bertrand Russell)

Resumo

Este trabalho destaca a importância das funções quadráticas e das equações do segundo grau para o desenvolvimento do pensamento matemático e a resolução sistemática de problemas. Explora suas aplicações práticas em áreas como física, engenharia, economia, ciências naturais e computação, incluindo a modelagem de fenômenos do mundo real e a otimização de custos empresariais. Além disso, enfatiza que a compreensão dessas equações é essencial para o entendimento de conceitos matemáticos avançados, como funções exponenciais, logarítmicas, cálculo diferencial e integral e geometria analítica. O estudo desses conceitos também promove habilidades fundamentais como análise crítica, resolução de problemas, e pensamento lógico e abstrato, relevantes em diversas áreas profissionais e acadêmicas.

Palavras-chave: Equação quadrática; Métodos de resolução; função quadrática.

Abstract

This work highlights the importance of quadratic functions and second equations degree for the development of mathematical thinking and the systematic resolution of problems. Explores its practical applications in areas such as physics, engineering, economics, natural sciences and computing, including the modeling of real-world phenomena and optimization of business costs. Furthermore, it emphasizes that understanding these equations is essential for understanding advanced mathematical concepts, such as exponential and logarithmic functions, differential and integral calculus, and analytical geometry. O Studying these concepts also promotes fundamental skills such as critical analysis, problem solving, and logical and abstract thinking, relevant in several areas professionals and academics.

Keywords: Quadratic equation; Resolution methods; quadratic function.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O estudo das funções, especialmente das funções quadráticas, desempenha um papel crucial no ensino da matemática, sendo fundamental para a compreensão e aplicação de diversos conceitos matemáticos. As funções quadráticas têm uma relevância significativa, uma vez que possibilitam a modelagem de uma variedade de fenômenos da vida real, tais como o movimento de projéteis, a forma de uma parábola ou a trajetória de um objeto em queda livre. Além disso, elas desempenham um papel essencial em áreas como engenharia, física, economia e biologia, onde são empregadas para otimização de recursos, previsão de comportamentos e análise de dados experimentais.

Compreender a função quadrática não apenas contribui para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e analíticas essenciais, mas também proporciona uma base sólida para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento. As funções quadráticas constituem um dos pilares fundamentais da matemática, exercendo uma influência não apenas dentro desta disciplina, mas também em diversos campos do conhecimento humano. Sua capacidade de modelar uma ampla gama de fenômenos e situações presentes no mundo real as torna uma ferramenta indispensável tanto para a compreensão teórica quanto para a aplicação prática em diferentes contextos de acordo com Pitombeira e Roque (2012)

No contexto da Modelagem Matemática, as funções quadráticas desempenham um papel crucial ao permitir a representação precisa de relações quadráticas observadas em fenômenos naturais, padrões matemáticos e processos físicos. A modelagem da função quadrática é uma ferramenta poderosa para descrever e prever o comportamento de uma variedade de fenômenos naturais e artificiais, fornecendo informações importantes sobre variáveis e seus comportamentos em diferentes situações.

Além de sua importância na modelagem matemática, as funções quadráticas encontram aplicabilidade direta em diversas disciplinas científicas e práticas do cotidiano. Setores como engenharia, física, economia e ciências sociais fazem uso rotineiro dessas funções para descrever e analisar fenômenos específicos, contribuindo assim para o desenvolvimento de habilidades analíticas dos alunos. (Silva e Costa (2019))

Historicamente, as funções quadráticas têm desempenhado um papel significativo no desenvolvimento da matemática. Desde os estudos dos babilônios e gregos até os avanços proporcionados por matemáticos como Al-Khwarizmi, Cardano e Tartaglia, as funções quadráticas têm sido objeto de interesse e pesquisa. Durante o Renascimento, matemáticos como Cardano e Tartaglia expandiram o conhecimento sobre equações quadráticas e suas propriedades. Posteriormente, a função quadrática tornou-se fundamental na formulação de leis do movimento na física newtoniana e na descrição de fenômenos naturais. Ao longo dos séculos, a função quadrática evoluiu para desempenhar um papel central na matemática e em inúmeras aplicações práticas.

Este trabalho tem como objetivo principal introduzir os conhecimentos relativos às funções quadráticas no ambiente escolar, Incluindo o corpo docente da escola de ensino básico. Compreender a função quadrática é fundamental para os alunos, pois ela proporciona uma base sólida para o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais, como análise de padrões, resolução de problemas complexos e interpretação de gráficos. Além disso, a presença das funções quadráticas em contextos do cotidiano permite aos alunos aplicar conceitos matemáticos abstratos a situações reais, promovendo assim o pensamento crítico e a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos.

Já se perguntou qual a diferença entre a função quadráica e a função de segundo grau? ou se é a mesma coisa as duas? uma breve expicação sobre sobre as perguntas abordadas.A função quadrática é um termo amplamente reconhecido e usado na educação básica, facilitando a compreensão. "Quadrática"vem do latim "quadratus"(quadrado), referindo-se ao termo x^2, o que pode ser intuitivo para os alunos. Já o termo função do segundo grau descreve diretamente o grau do polinômio, o que pode ser útil em contextos mais matemáticos ou técnicos, pois facilita a generalização para outros polinômios (função de terceiro grau, função de quarto grau, segundo Guidorizzi (2001)

Diante disso, é importante destacar que, assim como qualquer conteúdo de qualquer área de conhecimento, o ensino da função quadrática esteja associado à aplicabilidade diária do corpo docente, uma vez que a matemática precisa ir além da memorização de fórmulas e conceitos, e sim saber utilizar as funções quadráticas no cotidiano, com a intenção de detalhar a compreensão matematicamente. Como apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, mais recentemente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a função quadrática é uma temática que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações.

2 Equação de Segundo Grau: Uma abordagem Matemática para Educação Básica.

Uma equação do segundo grau é uma equação polinomial cujo grau mais alto é 2. Ao resolver a equação do segundo grau,encontram-se determinados valores para x que são os zeros da função quadrática, quando $f(x)$ é igual a zero.

A forma geral de uma equação do segundo grau é dada por $ax^2 + bx + c = 0$, onde ”a”, ”b” e ”c” são coeficientes constantes e "x"é a variável. Resolver essa equação envolve encontrar os valores de ”x” que satisfazem a igualdade, ou seja, os valores para os quais a função quadrática se anula.

Esses valores de ”x” são chamados de raízes da equação do segundo grau ou zeros da função quadrática podem ser encontrados usando fórmulas como a fórmula quadrática ou por meio de fatoração, completando o quadrado, entre outros métodos que vão ser estudos durante este trabalho.Portanto, determinar os valores para os quais $f(x) = 0$ é essencial para compreender o comportamento da função quadrática e encontrar soluções para uma variedade de problemas matemáticos e práticos. O ensino da função quadrática permite desenvolver o conhecimento do aluno permitindo ele elaborar modelos matemáticos para analisar problemas, através da relação entre expressões algébricas e gráficos até obter a solução desejada. A modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais. Por exemplo, a função quadrática é utilizada como modelo do movimento uniformemente variado, na queda livre dos corpos,na parábola invertida, na trajetória de uma bola, na área de figuras planas, na receita e lucro de uma empresa.

A título de exemplo, recentemente, uma das universidades públicas mais prestigiadas do país -Universidade Estadual de Campinas UNICAMP - retratou esse assunto na questão ilustrada na Figura 1.

Inspirado na questão supramencionada, criamos o seguinte problema de modelagem matemática.

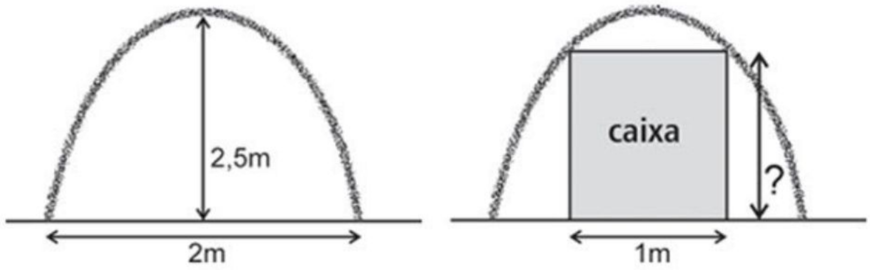
Problema de Modelagem: Carlos é um arqueólogo que está explorando uma caverna cuja entrada tem a forma de uma parábola invertida. No nível do chão, a entrada tem uma largura de 6 metros, e o ponto mais alto da abertura está a 9 metros do chão.Conforme a figura a seguir.

A Figura 3 , retrata a entrada da caverna com o formato de uma parábola invertida.

Carlos precisa levar para dentro da caverna uma caixa de equipamento que tem 2 metros de largura. Qual é a altura máxima, em metros, que a caixa pode ter para que ele

Figura 1 – UNICAMP - 2024

Laura é geóloga e está fazendo pesquisa numa caverna cuja entrada tem o formato de uma parábola invertida. Essa entrada, no nível do chão, tem 2m de largura e seu ponto mais alto está a 2,5m do chão, conforme figura a seguir.



Para realizar sua pesquisa, ela precisa entrar na caverna com um equipamento guardado em uma caixa de 1m de largura. Qual é a altura máxima, em metros, que a caixa pode ter para passar pela entrada da caverna?

a) 11/8.
b) 13/8.
c) 15/8.
d) 17/8.

Fonte: Retirada do vestibular da UNICAMP 2024

consiga passar pela entrada da caverna?

Figura 3:Problema de modelagem, parábola invertida com o equipamento

A Figura 3, retrada a entrada da caverna em formato de uma parábola invertida com o equipamento que é uma caixa.

Passo a passo na resolução do problema de modelagem

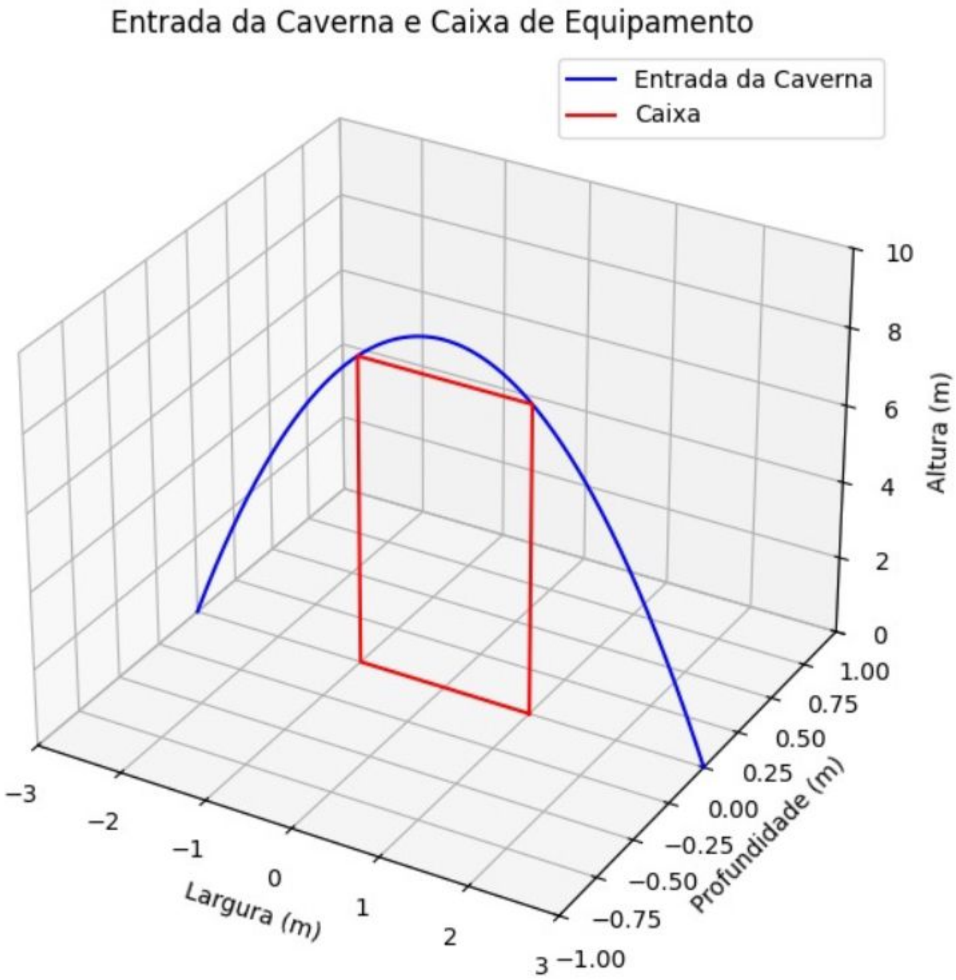
1. **Modelagem da Entrada da Caverna**

- A entrada da caverna é modelada por uma função quadrática invertida $y = ax^2+bx+c$
- A parábola é simetrica em relação ao eixo y e tem o vértice em $(0, 9)$, simplificando a equação para $y = -ax^2 + 9$

2. Determinação de a:

- A entrada tem 6 metros de largura ao nível do chão, o que significa que os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ pertecem ao gráfico da parábola.

Figura 2 – Exemplo modelagem função quadrática



Fonte: Foi plotada em Python com o uso de uma biblioteca matplotlib

- Substituindo $(-3, 0)$ na equação $y = -ax^2 + 9$:

  $0 = -a(3)^2 + 9 \Rrightarrow 0 = -9a + 9 \Rrightarrow a = 1$.

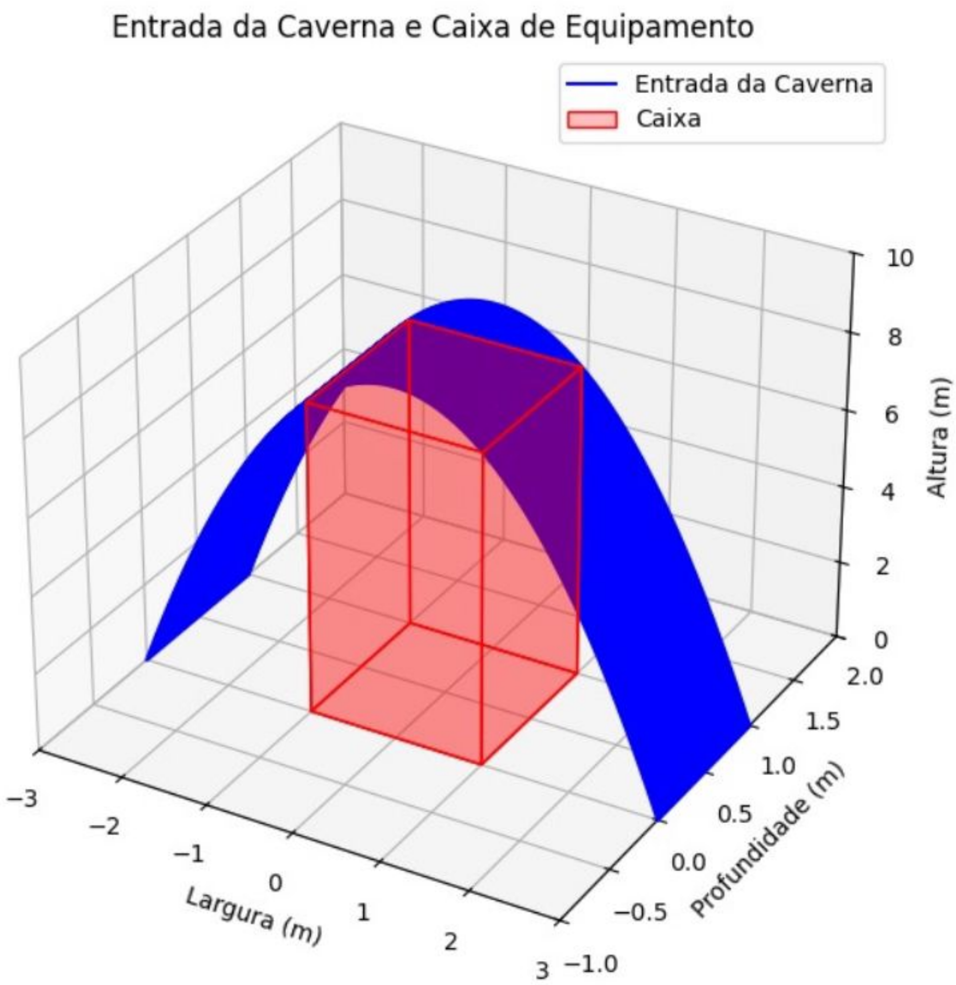
- Portanto, a equação da parábola é:

  $y = -x^2 + 9$.

3.Determinação da Altura da Caixa:

- Carlos precisa verificar se uma caixa de 2 metros de largura pode passar pela entrada da caverna.
- Como a largura da caixa é 2 metros, considerando $x = 1$ (metade da largura, devido à simetria da parábola).
- Substituindo $x = 1$ na equação da parábola para encontrar a altura correspondente: $y = -(1)^2 + 9 = -1 + 9 = 8$.

Figura 3 – Exemplo modelagem função quadrática



Fonte: Foi plotada em Python com o uso de uma biblioteca matplotlib

- Portanto, a altura máxima que a caixa pode ter para passar pela entrada da caverna é de 8 metros.

Conclui-se que a altura máxima que a caixa pode ter para passar pela entrada da caverna é de 8 metros. Se a altura da caixa for maior que 8 metros, Carlos não consegue levar o equipamento para dentro da caverna.

2.0.1 Contexto Histórico

A função quadrática, uma das mais fundamentais na matemática, tem suas origens nos primórdios da civilização, embora tenha evoluído ao longo do tempo, encontram-se contribuições significativas de culturas antigas, como a babilônica e a grega, nas quais foram feitos estudos sobre formas quadráticas e suas propriedades geométricas.

No entanto, foi no mundo islâmico medieval que a função quadrática recebeu importantes avanços. O matemático árabe Al-Khwarizmi, conhecido por seu trabalho em álgebra, foi pioneiro no estudo sistemático de equações quadráticas e forneceu métodos para resolvê-las. Seu trabalho influenciou significativamente o desenvolvimento posterior da função quadrática.

Durante o Renascimento na Europa, matemáticos como Cardano, Tartaglia e Viète expandiram o conhecimento sobre equações quadráticas e suas aplicações. Suas contribuições foram essenciais para a consolidação da compreensão moderna da função quadrática.

Ao longo dos séculos, a função quadrática tornou-se central em diversas áreas da matemática aplicada e das ciências naturais. Desde a formulação de leis do movimento na física até a modelagem de fenômenos naturais e o desenvolvimento de tecnologias contemporâneas, a função quadrática desempenha um papel crucial.

Segundo **Dante (2020)**,há muito tempo antes de cristo já existiam problemas que precisariam usar a função do segundo grau para resolver, um desses casos são as pirâmides do Egito desenvolvidas a mais de 2500 anos, na qual as mesmas foram implantadas técnicas matemáticas para as suas construções e nessas técnicas estavam presentes , geometria, aritméticas e álgebra com ênfase na equação de segundo grau que foi de grande importância para a construção.

Em resumo, o surgimento da função quadrática é fruto do trabalho de diversas culturas e mentes brilhantes ao longo da história. Sua evolução reflete não apenas avanços matemáticos, mas também sua importância prática em inúmeras aplicações. Assim, compreender a origem e o desenvolvimento da função quadrática permite apreciar sua relevância contínua na matemática e na compreensão do mundo ao redor.

2.1 Fundamentação Teórica

"A equação do 2º grau, representada pela forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, é uma ferramenta fundamental da matemática com amplas aplicações. Ela pode ser utilizada para resolver problemas de otimização, prever comportamentos em fenômenos naturais e muitas outras situações do cotidiano. Exemplos de suas aplicações incluem a modelagem de trajetórias de projéteis na física e a determinação de pontos de máximo e mínimo em funções econômicas."

Segundo Batista (2019) ao longo da história, a equação do 2º grau tem sido estudada e aprimorada por matemáticos, contribuindo para o desenvolvimento de teorias e métodos que possibilitam sua resolução de forma eficiente. A fórmula de Bhaskara, por exemplo, é amplamente conhecida e utilizada para encontrar as raízes dessa equação, fornecendo soluções reais ou complexas conforme o caso.

Além disso, a equação do 2º grau desempenha um papel crucial no ensino e na compreensão da matemática, ajudando os estudantes a desenvolverem habilidades de análise, interpretação e resolução de problemas. Sua aplicação prática em situações do mundo real também demonstra sua relevância e utilidade para além do ambiente acadêmico.

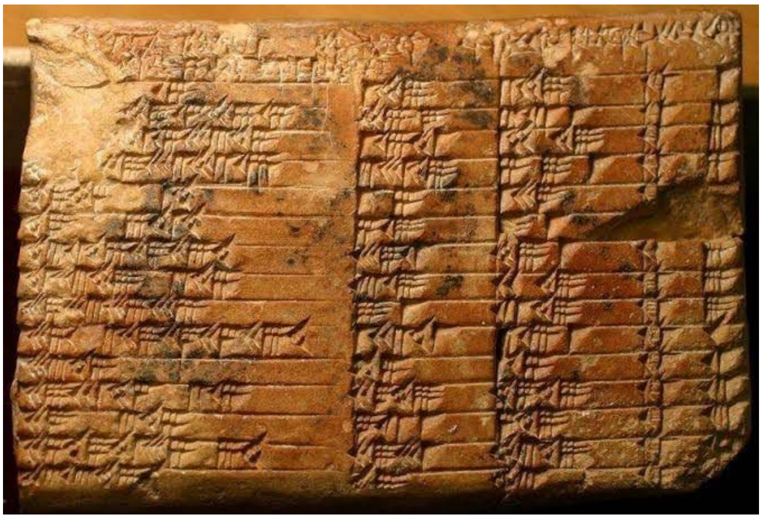
Portanto, a equação do 2º grau representa não apenas um conceito matemático abstrato, mas sim uma ferramenta poderosa que permeia diversos aspectos da nossa vida. Seu estudo e compreensão são essenciais para o avanço do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades analíticas que podem ser aplicadas em diferentes contextos."

2.2 Origem das Equações do 2° Grau

As funções quadráticas e as equações do segundo grau têm uma história fascinante que remonta a milhares de anos. Seu surgimento está intrinsecamente ligado ao desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos, e sua compreensão foi fundamental para inúmeros avanços científicos e tecnológicos.

O estudo das funções quadráticas e das equações do segundo grau remonta à antiguidade, com registros que datam de civilizações como os babilônios e os egípcios, por volta de 2000 a.C. Os babilônios, por exemplo, tinham métodos rudimentares para resolver equações quadráticas simples, como $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são constantes. Eles desenvolveram tábuas de argila contendo problemas e suas soluções, indicando uma compreensão prática e utilitária desses conceitos matemáticos.

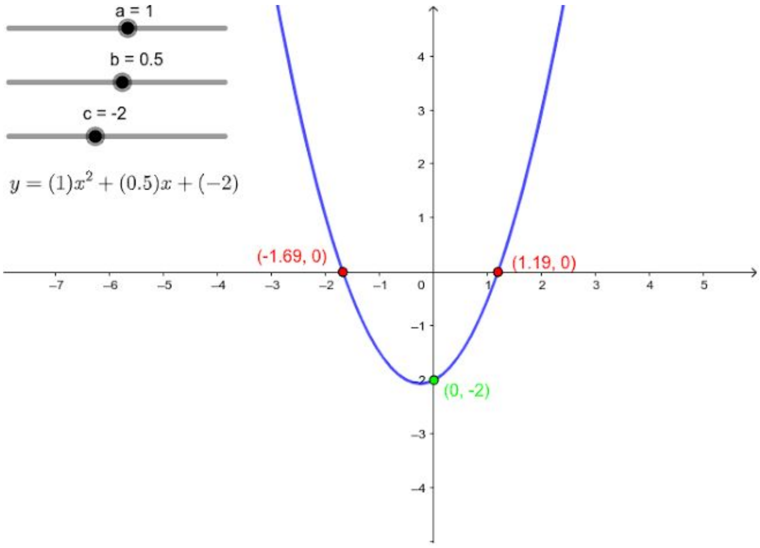
Figura 4:Tábua de Argila Babilônica



Fonte:retirado da BBC World Service

No entanto, foi na Grécia Antiga que a compreensão das funções quadráticas começou a se desenvolver de maneira mais sistemática. Matemáticos gregos como Euclides e Arquimedes exploraram propriedades geométricas associadas a parábolas, que são o gráfico das funções quadráticas. Aristóteles também contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático ao investigar a natureza das raízes das equações quadráticas.

Figura 5:gráfico da função quadrática



Fonte: elaborado no GeoGebra pelo autor

Durante a Idade Média, o conhecimento matemático foi preservado e ampliado pelos matemáticos árabes, especialmente com os trabalhos de Al-Khwarizmi no século IX. Al-Khwarizmi desenvolveu métodos sistemáticos para resolver equações quadráticas, contribuindo para o entendimento formal das raízes e soluções dessas equações

O Renascimento marcou uma era de grande interesse pela matemática, com matemáticos como Leonardo Pisano Fibonacci e Niccolò Tartaglia avançando nos estudos das equações quadráticas e suas aplicações. Foi neste período que a famosa “fórmula quadrática” foi desenvolvida e popularizada, permitindo uma solução geral para equações do segundo grau.

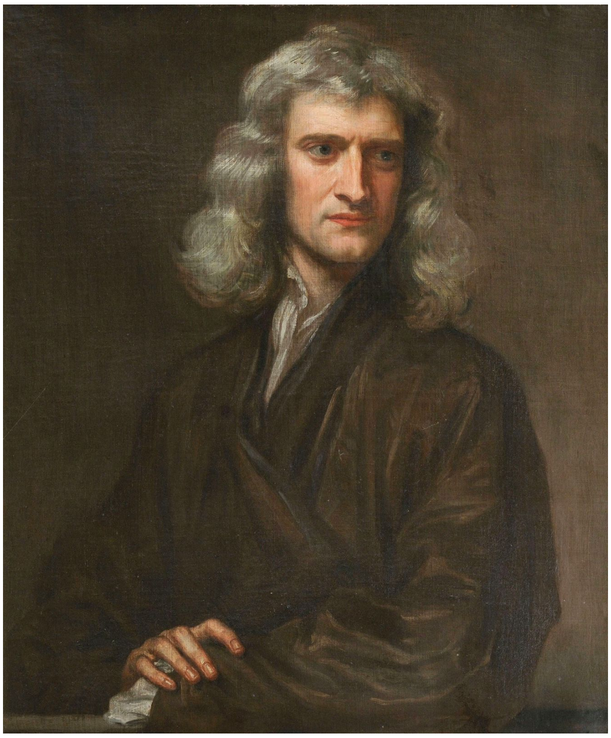
Em 1202, Fibonacci publicou seu livro Liber Abaci, que foi um marco na história da matemática europeia. O livro introduziu os algarismos arábicos na Europa, substituindo os algarismos romanos, que eram muito mais difíceis de usar. O Liber Abaci também discutiu tópicos matemáticos, incluindo aritmética, álgebra, geometria e trigonometria e foi um grande destaque na evolução da **função quadrática.** A Sequência de Fibonacci é uma série numérica em que cada número é a soma dos dois números anteriores: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. Essa sequência tem aplicações em matemática, ciência, arte e natureza, aparecendo em padrões naturais como a disposição de folhas em plantas, na forma de conchas, em padrões de árvores e até mesmo na proporção áurea, uma relação matemática especial. Fonte:weducamaisbrasil.com.br/educacao/carreira/fibonacci

Figura 6:Matemático Leonardo Pisano Fibonacci

Fonte: retirado da Fototeca Gilardi / Bridgeman Images

Com o advento do cálculo diferencial e integral nos séculos XVII e XVIII, o estudo das funções quadráticas se tornou ainda mais sofisticado. Matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz utilizaram funções quadráticas em suas investigações sobre o movimento de corpos e a taxa de mudança."No período escolar, Newton não era considerado um dos melhores alunos da turma, mas um episódio mudou a situação. Após ter levado um chute de um garoto na escola, ele desafiou-o para continuar a luta do lado de fora da instituição. Após essa situação, que resultou na agressão de Newton ao “adversário”, ele decidiu mudar de vida e estudar para ser o melhor em tudo o que fizesse.Os estudos realizados por Newton fizeram dele um dos grandes nomes da matemática, formulando teorias que são importantes até hoje. Em 1665, por exemplo, ele elaborou o teorema binomial, também conhecido como binômio de Newton, teoria que permitiu o desenvolvimento do cálculo, um ramo da matemática. Também realizou importantes estudos no campo da ótica, física e astronomia."

Figura 7:matemático e físico Isaac Newton



Fonte: retirado da Wikipédia, a enciclopédia livre

Hoje, as funções quadráticas e as equações do segundo grau são fundamentais em diversas áreas da matemática e da ciência. Desde a física e engenharia até a economia e biologia, esses conceitos desempenham um papel crucial na modelagem de fenômenos naturais e na resolução de problemas do mundo real.

A origem da equação do segundo grau remonta à antiguidade, com contribuições significativas de matemáticos de diferentes civilizações. Os registros históricos apontam para o desenvolvimento gradual do entendimento sobre as raízes de equações quadráticas ao longo do tempo.

Os matemáticos babilônios já conheciam métodos para resolver equações quadráticas, embora não na forma algébrica que se usam hoje.Os registros mostram que os babilônios tinham conhecimento prático para resolver equações quadráticas, usando técnicas geométricas e aritméticas. Embora não se tem evidências de uma fórmula geral na forma algébrica, os vestígios matemáticos desse período indicam um entendimento avançado das propriedades das funções quadráticas.

No entanto, a fórmula que conhecemos hoje para resolver equações do 2º grau foi desenvolvida por matemáticos árabes no século IX. A fórmula quadrática foi refinada ao longo dos séculos por grandes matemáticos como al-Khwarizmi, Bhaskara e Fibonacci. Na Grécia antiga, matemáticos como Euclides e Arquimedes também estudaram as raízes de equações quadráticas. No entanto, foi na Índia, por volta do século VII, que o matemático Brahmagupta fez uma das primeiras contribuições significativas para a resolução de equações quadráticas. Ele desenvolveu uma fórmula geral para encontrar as raízes, que posteriormente ficou conhecida como a fórmula de Bhaskara.

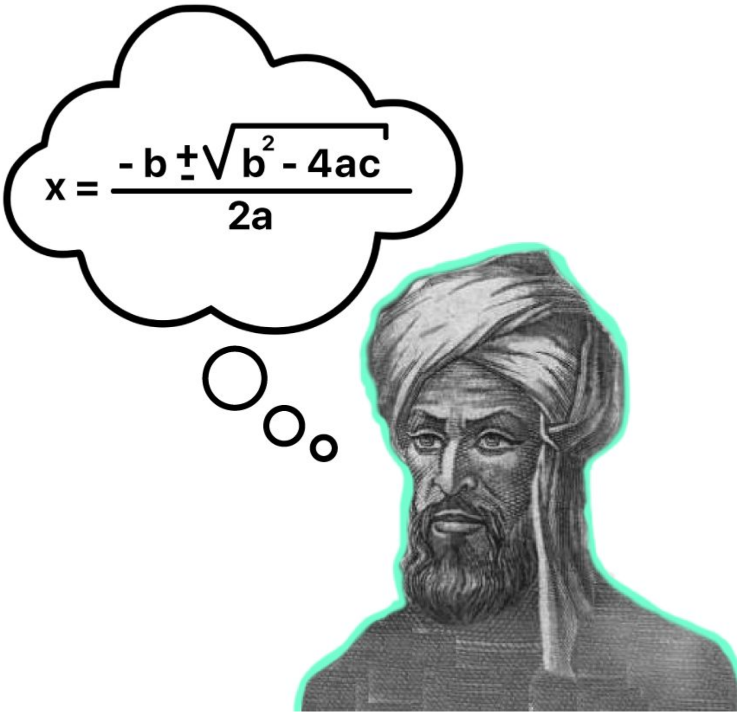
Durante a Idade Média e o Renascimento, os estudos sobre equações quadráticas foram aprimorados por matemáticos árabes e europeus, culminando no desenvolvimento de métodos mais sistemáticos para resolver essas equações.Assim, a origem da equação do 2º grau está intimamente ligada à evolução da matemática ao longo da história, com contribuições significativas de diversas culturas e períodos temporais.

Portanto, a origem da equação do segundo grau pode ser rastreada até a antiga Mesopotâmia, onde os matemáticos babilônios desenvolveram métodos para resolver problemas que hoje é reconhecida como funções quadráticas. Essa contribuição é fundamental para a história da matemática e seu impacto perdura até os dias atuais.

Bhaskara, um matemático indiano do século XII, fez uma contribuição significativa para o estudo e compreensão das equações do segundo grau. Ele desenvolveu uma fórmula para encontrar as raízes de uma equação quadrática na forma $ax^2 + bx + c = 0$, conhecida como fórmula de Bhaskara ele também escreveu três obras fundamentais para os estudos da matemática, que ficaram como legado para pesquisadores que vieram depois dele. As suas principais obras são: “Lilavati”, “Bijaganita” e "Siddhantasiromani". Em suas pesquisas, Bhaskara apresentou questões ligadas à aritmética, álgebra, progressões aritméticas e geométricas, astronomia, raiz quadrada em equações do segundo grau, entre outros assuntos.Bhaskara foi o responsável por desenvolver diversos estudos de matemática, em especial a fórmula de Bhaskara. Também devolveu as regras das fórmulas da adição e subtração dos senos de dois ângulos. A fórmula de Bhaskara é um cálculo matemático utilizado para determinar as raízes de uma função de segundo grau por meio de seus coeficientes. Seu livro mais famoso é o Lilavati, um livro bem elementar e dedicado a problemas simples de Aritmética, Geometria Plana (medidas e trigonometria elementar) e Combinatória. A palavra Lilavati é um nome próprio de mulher (a tradução é Graciosa), e a razão de ter dado esse título a seu livro é porque, provavelmente, teria desejado fazer um trocadilho comparando a elegância de uma mulher da nobreza com a elegância dos métodos da Aritmética.

Numa tradução turca desse livro, 400 anos depois, foi inventada a história de que o livro seria uma homenagem à filha que não pode se casar. Justamente essa invenção é que tornou-o famoso entre as pessoas de pouco conhecimento de Matemática e de História da Matemática. Parece, também, que os professores estão muito dispostos a aceitarem estórias românticas em uma área tão abstrata e difícil como a Matemática; isso parece humanizá-la mais ,segundo Boyer(1996)

Figura 7: matemático Bhaskara Akaria



Fonte: retirado Ficheiro:Bhaskara Akaria.jpg – Wikipédia, a enciclopédia livre

A fórmula de Bhaskara permite encontrar as raízes de uma equação do segundo grau de maneira direta, sem a necessidade de completar o quadrado ou recorrer a métodos geométricos. Ela é expressa como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa fórmula é fundamental na resolução de equações e funções quadráticas e possui aplicações em diversas áreas da matemática, física, engenharia e outras ciências. Além da fórmula, Bhaskara também contribuiu para o desenvolvimento de conceitos algébricos e geométricos, expandindo o conhecimento matemático em sua época.

3 MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADO FUNÇÃO QUADRÁTICA

O método de completar o quadrado é uma técnica fundamental para resolver equações do segundo grau e também desempenha um papel importante em diversas áreas da matemática, como na integração de funções racionais.

A origem do método remonta à antiga Babilônia e à Grécia antiga, onde matemáticos como Euclides e Arquimedes já trabalhavam com formas de completar quadrados para resolver problemas geométricos e equações quadráticas.

O método de completar o quadrado consiste em transformar uma equação do segundo grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$ em uma expressão do tipo $(x + p)^2 = q$, onde p e q são constantes. Isso facilita a resolução da equação, permitindo encontrar as raízes quadradas de forma mais direta.

Ao longo da história, o método de completar o quadrado foi refinado e aprimorado por matemáticos árabes, europeus e indianos, tornando-se uma ferramenta essencial na resolução de equações do segundo grau e em outras aplicações matemáticas.

Colocando em prática:

Primeiro, o desenvolvimento do produto notável:

$(a + b)^2 =$ (quadrado do primeiro termo)+(o dobro do produto do primeiro pelo segundo termo)+(quadrado do segundo termo)

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Os países orientais já resolvem a equação de 2º grau o usando do método de completar quadrado em vez de usar a famosa formula de Bhaskara, é o caso dos japonese. O método de completar quadrados é uma saída para soluções de equações do segundo grau em sua forma normal (ou reduzida). Dependendo das questões, é possível encontrar as raízes de maneira rápida e precisa.

A forma original muito se parece com o trinômio quadrado perfeito, que é resultado de um dos produtos notáveis: quadrado da soma ou quadrado da diferença. Observando o primeiro deles:

$$(y + n)^2 = y^2 + 2yn + n^2$$

Veja, que, se $a = 1$, $b = 2n$ e c=n^2

é possível escrever

$$((y+n)^2 = y^2 + 2ny + n^2 = ax^2 + bx + cy + n)^2 = y^2 + 2ny + n^2 = ax^2 + bx + c$$

Consequentemente, é possível solucionar equações do segundo grau comparando os termos de sua forma reduzida com um produto notável e, assim, evitar a metodologia da solução de Bhaskara. Isso será feito de duas maneiras: na primeira maneira, a equação do segundo grau é um trinômio quadrado perfeito e resultado direto de um produto notável; na segunda maneira, as equações do segundo grau não são um quadrado perfeito.

3.1 Primeiro caso é o de trinômio quadrado perfeito

Sendo equação do segundo grau é um trinômio quadrado perfeito, é possível escrevê-la na forma fatorada, isto é, retornar ao produto notável que a original. Observe esta equação:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Refere-se de um trinômio quadrado perfeito

Em síntese, o termo do meio é igual a duas vezes a raiz do primeiro termo vezes a raiz do segundo termo. Quando isso não acontece, a expressão observada não é fruto de um produto notável.

Fazendo a resolução por completar quadrado.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Primeiro passo: extrai a raiz quadrada do 1º termo:

$$\sqrt{x^2} = x$$

Segundo passo: extrair a raiz quadrada do 2º termo:

$$\sqrt{9} = 3$$

Terceiro passo: verificar que o produto de duas vezes o 1º termo vezes o 2º termo será 6x:

$$2.x.3 = 6x.$$

logo,

$$x^2 + 6x + 9 = (\sqrt{x^2} + \sqrt{9})^2$$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 0$

Em seguida é calcular a raiz quadrada dos dois lados da equação. veja que o lado esquerdo resultará na própria base da potência por causa das propriedades dos radicais. Já o lado direito continuará sendo zero, pois a raiz de zero é zero.

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{0}$$

$$x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação de primeiro grau para encontrar x, temos

$$x = -3 \tag{3.1}$$

As equações do segundo grau podem ter de zero a dois resultados dentro do conjunto dos números reais. A equação em analise possui apenas uma solução. De fato, todas as equações que são trinômios quadrados perfeitos possuem apenas um resultado real.

3.2 Segundo caso é quando a equação do segundo grau não é trinômio quadrado perfeito

A equação não sendo um trinômio quadrado perfeito, é possível resolvê-la usando a mesma metodologia do exemplo anterior. Só é necessário realizar um pequeno procedimento antes. Veja o exemplo:

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

Para que essa equação seja um trinômio quadrado perfeito, o seu último termo deve ser + 16, e não o – 48. Se esse número estivesse no lado esquerdo da equação, poderíamos escrevê-la como um produto notável e resolvê-la de modo análogo que foi feito no exemplo anterior. Vamos ajustar a equação para que possa aparecer o + 16 no terceiro termo e – 48 venha desparecer. Para acontecer o aparecimento do + 16, vamos somar +16 nos dois lados da equação. Esse acontecimento não mudará o resultado final da equação, fazendo valer uma das propriedades das equações que é a comutativa.

$$x^2 + 8x - 48 + 16 = 0 + 16$$

Para transformar a equação em trinômio quadrado perfeito, é necessário recorrer a uma das propriedades das equações, que os elementos do primeiro membro (lado esquerdo) podem ir para o segundo membro (lado direito) com o sinal trocado, ou seja, basta tirar o – 48 do lado esquerdo e colocar no lado direito com sinal positivo.

$$x^2 + 8x - 48 + 16 = 0 + 16$$
$$x^2 + 8x + 16 = 16 + 48$$
$$x^2 + 8x + 16 = 64$$

Como o lado esquerdo está em forma de trinômio quadrado perfeito, vamos transformar em produto notável.

$$(\sqrt{x^2} + \sqrt{16})^2 = (x + 4)^2$$
$$(x + 4)^2 = 64$$

Escrevendo o lado esquerdo como trinômio quadrado perfeito e calculando a raiz quadrada em ambos os lados.

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{64}$$

Veja que, dessa vez, o lado direito da igualdade não é zero, portanto, teremos um resultado não nulo. Em equações, os resultados de raízes quadradas podem ser negativos ou positivos. Por isso, usamos o símbolo $\pm$ da seguinte maneira:

$$(x + 4) = \pm 8$$

Com isso, equação vai ser resolvida uma vez para 8 positivo e outra para 8 negativo, que chamamos de x_1 e x_2, que são as duas raízes da equação de segundo grau. Fazendo para 8 positivo, temos:

$$x_1 + 4 = 8$$
$$x_1 = 8 - 4$$
$$x_1 = 4$$

Fazendo para 8 negativo, temos:

$$x_2 + 4 = 8$$
$$x_2 = 8 - 4$$

$$x_2 = 4$$

Logo, as raízes da equação de segundo grau $x^2 + 8x - 48 = 0$ são $x_1 = 4$ e $x_2 = 4$

3.3 Resoluções de exercícios envolvendo o método de completar quadrado.

EXERCÍCIOS

1) No colégio de ensino médio, Centro de Ensino Ribamar Pinheiro, localizada no município de Pirapemas - MA, tem uma quadra esportiva no formato retangular com uma área de 78 unidades quadradas e seu lado maior é 7 unidades maior que seu lado menor, quais são os comprimentos dos lados, dessa quadra?

Solução:

largura: x

Comprimento: $x + 7$

Área da quadra é de 78

Como a área do retângulo é o produto do comprimento pela largura:

$$x.(x + 7) = 78$$

Usando a distributiva da multiplicação

$$x^2 + 7x = 78$$

$$x^2 + 7x - 78 = 0$$

a equação de 2º grau na variável x.

Aplicando o método de completar quadrado para resolver a equação de segundo grau

$$x^2 + 7x - 78 = 0$$

No primeiro momento deseja-se encontrar o termo independente que seja um número quadrado perfeito, ou seja, c será um número que tenha raiz quadrada exata. A equação de 2º grau tem sua forma original:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Usando a fórmula: $c = \left(\dfrac{-b}{2}\right)^2$

$c = \left(\dfrac{-7}{2}\right)^2$

$c = \left(\dfrac{49}{4}\right)$

Adicionando em ambos os lados o termo idependente "c"para completar quadrado.

$$x^2 + 7x - 78 = 0$$

$$x^2 + 7x - 78 + \frac{49}{4} = 0 + \frac{49}{4}$$

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{49}{4} + 78$$

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{49 + 4.78}{4}$$

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{361}{4}$$

Com isso:

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$$

Escrevendo o lado esquerdo como trinômio quadrado perfeito e calculando a raiz quadrada em ambos os lados.

$$\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{4}}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{19}{2}$$

Com isso, equação vai ser resolvida uma vez para $\frac{19}{2}$ positivo e outra para $\frac{-19}{2}$ negativo, que chamamos de x_1 e x_2, que são as duas raízes da equação de segundo grau.

Fazendo para $\frac{19}{2}$ positivo, temos:

$$x_1 + \frac{7}{2} = \frac{19}{2}$$

$$x_1 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}$$
$$x_1 = \frac{12}{2}$$
$$x_1 = 6$$

Fazendo para $\frac{-19}{2}$ negativo, temos:

$$x_2 + \frac{7}{2} = -\frac{19}{2}$$
$$x_2 = -\frac{19}{2} - \frac{7}{2}$$
$$x_2 = -\frac{26}{2}$$
$$x_2 = -13$$

Como os lados de um retângulo não pode ser negativo,x=6

Logo, a largura (x) será 6 e o comprimento ($x + 7$) será $6 + 7 = 13$.

Observa-se nesse exemplo o método de completar quadrado facilta a resolução e foge da fórmula usual de Bhaskra.

2) (Elaborado pelo autor$-$2024) Quais as raízes da equação de?

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

No primeiro momento deseja-se encontrar o termo independente que seja um número quadrado perfeito, ou seja, c será um número que tenha raiz quadrada exata. A equação de 2º grau tem sua forma original:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Usando a fórmula:

$c = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2$

$c = \left(\frac{-8}{2}\right)^2$

$c = (-4)^2$

$c = 16$

Adicionado o c em ambos os lados para completar quadrado.

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = -9 + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 7$$

Com isso,

$$(x-4)^2 = 7$$

Escrevendo o lado esquerdo como trinômio quadrado perfeito e calculando a raiz quadrada em ambos os lados.

$$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{7}$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{7}$$

Com isso, equação vai ser resolvida uma vez para $\sqrt{7}$ positivo e outra para $\sqrt{7}$ negativo, que chamamos de x_1 e x_2, que são as duas raízes da equação de segundo grau.

Fazendo para $\sqrt{7}$ positivo, temos:

$$x_1 - 4 = \sqrt{7}$$
$$x_1 = 4 + \sqrt{7}$$

Fazendo para $\sqrt{7}$ negativo:

$$x_2 - 4 = -\sqrt{7}$$
$$x_2 = 4 - \sqrt{7}$$

logo, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 8x + 9 = 0$. São $x_1 = 4 + \sqrt{7}$ e $x_2 = 4 - \sqrt{7}$

Observa-se que a través do método de completar quadrado é possével responder a equação do 2º grau com raízes irracionais.

3)(Elaborado pelo autor-2024) O número que levado ao quandrado menos seu dobro, mais duas unidades é igual a zero. qual é esse número?

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

No primeiro momento deseja-se encontrar o termo independente que seja um número quadrado perfeito, ou seja, c será um número que tenha raiz quadrada exata. A equação de 2º grau tem sua forma original:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Usando a fórmula:

$c = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2$

$c = -\left(\frac{-2}{2}\right)^2$

$c = (1)^2$

$c = 1$

Adicionando o c em ambos os lados para completar quadrado.

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = -2 + 1$$

$$x^2 - 2x + 2 = -1$$

Com isso,

$$(x - 1)^2 = -1 \tag{3.2}$$

Escrevendo o lado esquerdo como trinômio quadrado perfeito e calculando a raiz quadrada em ambos os lados.

$$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{-1}$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{-1}$$

Com isso, equação vai ser resolvida uma vez para $\sqrt{-1}$ positivo e outra para $\sqrt{-1}$ negativo, que chamamos de x_1 e x_2, que são as duas raízes da equação de segundo grau.

Adotando.

$$\sqrt{-1} = i$$

Fazendo para $\sqrt{-1}$ positivo, temos:

$$x_1 - 1 = i$$

$$x_1 = 1 + i$$

Fazendo para $\sqrt{-i}$ negativo:

Adotando.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$x_2 - 1 = -i$$

$$x_2 = 1 - i$$

logo, as raízes da equação do 2º grau $x^2 + 2x + 2 = 0$ são $x_1 = 1 + i$ e $x_2 = 1 - i$

Observa-se que a través do método de completar quadrado é possével responder a equação do 2º grau com raízes não reais .

O método de completar quadrados é utilizado para resolver equações do segundo grau, transformando-as em um produto notável, como foi feito durante o proceso da resolução Ao escrever uma equação do segundo grau na forma de produto notável, é possível simplificar todos os cálculos para encontrar suas raízes.

4 MÉTODO DO PROFESSOR PO-SHEN LOH PARA RESOLVER A EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Esta seção apresenta o trabalho do professor e pesquisador norte-americano sobre métodos de resolução de equações de segundo grau. Apresenta ainda, a justificativa algébrica do método, embasamento e ideias inspiradas em modelos babilônicos de cerca de 1700 anos a.C além de uma idéia geométrica que ajuda a entender o processo. Serão resolvidos alguns exemplos com o objetivo de mostrar que o método funciona para casos mais triviais de equações do tipo quadrática até os casos em que as equaçõs apresentam coeficienetes arbitrários raízes complexas. Por fim, foi feita a demonstração da fórmula resolutiva aplicando justamente as ideias apresentadas pelo professor Lo.

4.1 Breve história do professor Po-Shen Lon

O Professor Po-Shen Loh é um renomado matemático e educador. Ele é conhecido por suas contribuições no campo da matemática combinatória, em particular em teoria dos números e geometria combinatorial. Além disso, o Professor Loh é reconhecido por seu trabalho como treinador da equipe de matemática dos Estados Unidos para as Olimpíadas Internacionais de Matemática.

Além de suas realizações acadêmicas, o Professor Loh é um defensor apaixonado da educação matemática acessível e inclusiva. Ele fundou a Expii,disponível em www.expii.com uma plataforma educacional que busca tornar o aprendizado de matemática e ciências mais acessível a estudantes ao redor do mundo.

Por meio de sua atuação como palestrante, escritor e educador, o Professor Po-Shen Loh tem impactado positivamente a forma como a matemática é ensinada e compreendida. Sua abordagem inovadora tem inspirado muitos estudantes a se interessarem pela matemática e a desenvolverem suas habilidades nessa área.

O Professor, Po-Shen Loh, contribui para a compreensão e resolução de equações do segundo grau por meio de sua abordagem inovadora no ensino da matemática. Embora ele não seja conhecido por desenvolver uma fórmula específica para resolver equações quadráticas, sua atuação como educador tem impactado positivamente a forma como os estudantes abordam e compreendem conceitos matemáticos, incluindo equações do segundo grau.

Por meio de sua plataforma educacional Expii, disponível em https://www.expii.com/ e de suas palestras e materiais educativos, o Professor Loh busca tornar a matemática mais acessível e compreensível para um público amplo. Sua abordagem visa incentivar a criatividade, o raciocínio lógico e a resolução de problemas, habilidades essenciais para a compreensão e resolução de equações do segundo grau e outros conceitos matemáticos.

Portanto, embora o Professor Po-Shen Loh não tenha uma contribuição específica na formulação de métodos de resolução de equações do segundo grau, seu impacto na educação matemática tem influenciado positivamente a forma como os estudantes abordam e compreendem essa área da matemática, segundo Loh (2019)

4.2 Método de Po-Shen Lon

O professor Po-Shen Loh da Universidade de Carnegie Mellon propôs através do pre-print de um artigo (https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf - outubro 2019, revisto em dezembro de 2019) um novo método para a resolução de equações do segundo grau, leccionadas no 9º ano de escolaridade, aparentemente mais intuitivo que evita a memorização da conhecida fórmula resolvente.

MÉTODO DE PO-SHEN LOH. Po-Shen Loh é um professor norte-americano, nascido em 18 de junho de 1982. É professor associado de matemática na Universidade Carnegie Mellon, na cidade americana de Pittsburgh, no Estado da Pensilvânia. Em seu artigo de 16 de dezembro de 2019 intitulado: A Simple Proof of the Quadratic Formula (Uma Pova Simples da Fórmula Quadrática), ele apresenta uma demonstração simples da fórmula resolutiva das equações de segundo grau, o que também produz um método eficiente para resolver equações quadráticas gerais. O procedimento é bastante simplificado e conceitualmente natural, além de ter potencial de desmistificar equações quadráticas para estudantes em todo o mundo. No artigo, o professor Lo afirma que a fórmula quadrática foi uma conquista notável dos primeiros matemáticos, marcando a conclusão de uma longa busca de um método efetivo para resolver equações de grau 2, com uma história que remonta ao Período Babilônico, por volta de 2.000 a 1.600 a.C., e que, desde então, muitos nomes reconhecido na matemática deixaram sua marca neste tópico, cuminando com a fórmula que, doravente, viria se tornar parte padrão de um primeiro curso de álgebra em quase todo o mundo. Para o professor Lo, mesmo depois de tantos anos, é inconcebível que o trato às equações continue sendo como era desde o introdução da fórmula, há centenas de anos, recorrendo-se a processos de decoração pouco eficientes, além de extensos, difíceis e traumático, em alguns casos.

Neste trabalho apresentado pelo professor Po-Shen Lo ele mostra um modelo simples e independente da fórmula quadrática habitualmente usada, além de se mostrar extremamente eficiente e prática para resolver equações de grau 2. O autor confessa ainda estar realmente muito surpreso com o fato desta abordagem pedagógica ter escapado à descoberta humana até os dias atuais, dados os quase 4.000 anos de história sobre este assunto e as milhares de pessoas que, ao longo dos anos, esboçaram a fórmula resolutiva e sua demonstração.

Nas palavras do autor, seu artigo tem como objetivo fornecer um método referenciável e que seja logicamente correto e comprovado, com a garantia de ser aceito por seus colegas matemáticos. Dito isso. Estudos recentes desenvolvidos pelo matemático Po-Shen Loh (1982), é inteiramente possível que este trabalho possa ajudar a difundir as idéias do pesquisador americano, além de popularizar uma abordagem pedagógica alternativa simplificada e prazerosa para resolver equações quadráticas, além de ser totalmente viável para integração em todos os currículos regulares.

Figura 6:Professor Po-Shen Loh

Fonte:Retirado da BBC World Service

4.3 O método do professor PO-SHEN

Este novo método tira partido da conhecida propriedade das soluções das equações do tipo $x^2 - Sx + P = 0$, onde S é a soma e P é o produto das raízes, como $a = 1$, temos:

soma das raízes

$$S = x_1 + x_2$$

$$x_1 = S - x_2$$

sendo,

$$S = \frac{S}{2} + \frac{S}{2}$$
$$x_1 = \frac{S}{2} + \frac{S}{2} - x_2$$

$$x_1 = \frac{S}{2} + \left(\frac{S}{2} - x_2\right)$$

fazendo:

$$u = \frac{S}{2} - x_2$$

Substituindo

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

isolando x_2 na equação:

$$u = \frac{S}{2} - x_2$$

$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

Assim as raizes são:

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$
$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

Com isso, o produto das raízes será da forma:

$$\left(\frac{S}{2} + u\right) . \left(\frac{S}{2} - u\right) = P$$

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - u^2 = P$$

isolando o u

$$u^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$$

$$u = \pm\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

sendo,$u \geq 0$, ou seja, u será sempre positivo

Observa-se a simplicidade deste procedimento tornando realmente desnecessária memorização de qualquer fórmula, mesmo para coeficientes gerais de x^2 . A prova naturalmente se transforma em um método, e os alunos podem executar suas etapas lógicas em vez de inserir números em uma fórmula que eles não entendem completamente.

4.4 Aplicação do método através de exemplo

Aplicando o método do professor Po-Shen Loh em um exemplo.

Exemplo 4.1.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

a soma das raízes

$$A = 1$$

$$B = -8$$

$S = -\frac{B}{A}$, $S = -\frac{-8}{1}$

A soma das raízes: $S = 8$

o produto das raízes

$$P = \frac{C}{A}$$

$$P = \frac{15}{1}$$

o produto das raízes: $P = 15$

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

Usando a fórmula do produto da soma pela diferença:

$$\left(\frac{S}{2}+u\right).\left(\frac{S}{2}-u\right)=P$$

$$\left(\frac{8}{2}+u\right).\left(\frac{8}{2}-u\right)=15$$

$$(4+u).(4-u)=15$$

$$16-u^2=15$$

$$u^2=16-15$$

$$u=\pm\sqrt{1}$$

$$u=\pm 1$$

Para $u \geq 0$

As raízes são:

$$x_1=\frac{S}{2}+u$$

$$x_1=\frac{8}{2}+1=4+1=5$$

$$x_2=\frac{S}{2}-u$$

$$x_2=\frac{8}{2}-1=4-1=3$$

Logo, as raízes da equação de 2ª grau $x^2-8x+15=0$ são: $x_1=3$ e $x_2=5$

observa-se neste exemplo , que as raízes dessa equação são inteiras e distintas.

Exemplo 4.2. *Equação do segundo grau tem apenas uma solução:*

$$x^2-4x+4=0$$

.

A soma das raízes

$A = 1,\ B = -4\ e\ C = 4$

$$S = -\frac{B}{A}$$

$$S = -\frac{(-4)}{1}$$

a soma das raízes: $S = 4$

o produto das raízes

$$P = \frac{C}{A}$$

$$P = \frac{4}{1}$$

a produto das raízes: $P = 15$

a soma das raízes: $S = 4$

o produto das raízes: $P = 4$

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

assim,

$$\left(\frac{S}{2} + u\right).\left(\frac{S}{2} - u\right) = P$$

$$\left(\frac{4}{2} + u\right).\left(\frac{4}{2} - u\right) = 4$$

$$4 - u^2 = 4$$

$u = 0$

Para, $u \geq 0$

$$x_1 = \frac{4}{2} + 0 = 2$$

$$x_2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$$

Logo, a raiz da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, terá uma solução dupla: $x_1 = x_2 = 2$

Neste exemplo as raízes são inteiras e iguais.

Exemplo :

Um caso em que não há soluções reais.

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

a soma das raízes

$A = 1$, $B = -2$ e $C = 3$

$$S = -\frac{B}{A}$$

$$S = -\frac{(-2)}{1}$$

a soma das raízes: $S = 2$

o produto das raízes

$$P = \frac{C}{A}$$

$$P = \frac{3}{1}$$

o produto das raízes: $P = 3$

Encontrados a soma e o produto das raízes da equação

a soma das raízes: $S = 2$

o produto das raízes: $P = 3$

$$x_1 = \frac{S}{2} + u \, e \, x_2 = \frac{S}{2} - u$$

Assim,

$$(\frac{S}{2} + u).(\frac{S}{2} - u) = P$$

$$(\frac{2}{2}+u).(\frac{2}{2}-u)=3 \to (1+u).(1-u)=3$$

$$1-u^2=3 \to u^2=1-3$$

$$u^2=-2 \to u=\pm\sqrt{-2}$$

Nota-se,

$$i^2=-1 \to u=\pm\sqrt{2i^2} \to u=\pm i\sqrt{2}$$

para $u \geq 0$

$$u=i\sqrt{2}$$

As raízes

$$x_1=\frac{S}{2}+u \, e \, x_2=\frac{S}{2}-u$$

$$x_1=\frac{2}{2}+i\sqrt{2}=1+i\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{2}{2}-i\sqrt{2}=1-i\sqrt{2}$$

Logo, as raízes da equação de 2º grau $x^2-2x+3=0$ são:

$$x_1=1+i\sqrt{2} \, e \, x_2=1-i\sqrt{2}$$

Na resolução deste exemplo , pode-se observar que números racionais ou complexos não configuram nenhum obstáculo à aplicação do método.

Para equações desse modelo $Ax^2+Bx+C=0$, ou seja, $A\neq 1$. A aplicação do método está restrita a casos em que o coeficiente líder vale 1, porém, em casos em que tivermos $A \neq 1$., basta aplicar o truque algébrico de dividir toda a equação $ax^2+bx+c=0$ por a , (suponha sempre a diferente de zero), para obter uma equação equivalente com características que permitam a aplicação do método.

Primeiro dividiremos toda equação pelo coeficiente A:

$\frac{A}{A}x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$, ficando assim: $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$

A solução sofre uma alteração, onde era $\frac{S}{2}$, agora será $\frac{S}{2A}$ e onde era P, agora será $\frac{P}{A}$.

$$u = \sqrt{\left(\frac{S}{2A}\right)^2 - \frac{P}{A}}$$

$$x_1 = \frac{S}{2A} + u$$

$$x_2 = \frac{S}{2A} - u$$

Com isso, o produto das raízes será da forma:

$$\left(\frac{S}{2A} + u\right) \cdot \left(\frac{S}{2A} - u\right) = \frac{P}{A}$$

Sendo,$u \geq 0$, ou seja, u será sempre positivo

Em suma, caso o coeficiente do segundo grau seja diferente de 1 o método será o mesmo, bastando para isso uma adaptação inicial da equação para que o coeficiente passe a ser 1.

Exemplo 4.3. *Um exemplo com coeficiente $A \neq 1$.*

$$2x^2 - 4x + 10 = 0$$

Primeiro passo, vamos dividir toda equação por 2, para que o coeficiente A seja iguai a 1,

$$A = 1$$

$$\frac{2}{2}x^2 - \frac{4}{2}x + \frac{10}{2} = 0$$

Assim,

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Aplicando o método do professor Po-Shen Lon

a soma das raízes

$A = 1$, $B = -2$ e $C = 5$

$$S = -\frac{B}{A}$$

$$S = -\frac{(-2)}{1}$$

A soma das raízes: $S = 2$

o produto das raízes

$$P = \frac{C}{A}$$

$$P = \frac{5}{1}$$

O produto das raízes: $P = 5$

A soma das raízes: $S = 2$

O produto das raízes: $P = 5$

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

Assim,

$$\left(\frac{S}{2} + u\right) . \left(\frac{S}{2} - u\right) = P$$

$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

$$(\frac{2}{2} + u).(\frac{2}{2} - u) = 5 \tag{4.1}$$

$$(1 + u).(1 - u) = 5$$

$$1 - u^2 = 5$$

$$u^2 = 1 - 5 \; e \; u^2 = -4$$

Nota-se, $i^2 = -1$

$$u = \pm\sqrt{i^2.4}$$

$$u = \pm 2i$$

Como, $u \geq 0$

As raízes

$$x_1 = \frac{2}{2} + 2i = 1 + 2i$$

$$x_2 = \frac{2}{2} - 2i = 1 - 2i$$

Logo, as raízes da equação de 2º grau $2x^2 - 4x + 10 = 0$ *são:* $x_1 = 1 + 2i$

$x_2 = 1 - 2i$

Observa-se nesse exemplo o método do professor Po-Shen Loh, resolvem equações de 2º grau com o coeficiente $a \neq 1$ *e com raízes complexas.*

Exemplo 4.4.

$$2x^2 - 16x + 18$$

Um caso de equação do 2º grau, quando o coenficiente de x^2 *é* $a \neq 1$

Primeiro passo, vamos dividir toda equação por 2, para que o coeficiente A seja iguai a 1,

$$A = 1$$

$$\frac{2}{2}x^2 - \frac{16}{2}x + \frac{18}{2} = 0$$

Assim,

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

Aplicando o método do professor Po-Shen Lon

a soma das raízes

$A = 1$, $B = -8$ *e* $C = +9$

$$S = -\frac{B}{A}$$

$$S = -\frac{(-8)}{1}$$

A soma das raízes: $S = 8$

o produto das raízes

$$P = \frac{C}{A}$$

$$P = \frac{9}{1}$$

O produto das raízes: $P = 9$

encontrados a soma e o produto das raízes

A soma das raízes: $S = 8$

O produto das raízes: $P = 9$

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

Assim,

$$\left(\frac{S}{2} + u\right).\left(\frac{S}{2} - u\right) = P$$

$$x_2 = \frac{S}{2} - u$$

$$\left(\frac{8}{2} + u\right).\left(\frac{8}{2} - u\right) = 9 \tag{4.2}$$

$$(4 + u).(4 - u) = 9$$

$$16 - u^2 = 9$$

$$u^2 = 16 - 9$$

$u^2 = 17$

$$u = \pm\sqrt{17}$$

Como, $u \geq 0$

As raízes

$$x_1 = \frac{S}{2} + u$$

$$x_1 = \frac{8}{2} + \sqrt{17} = 4 + \sqrt{17}$$

$$x_2 = \frac{S}{2} + u$$

$$x_2 = \frac{8}{2} - \sqrt{17} = 4 - \sqrt{17}$$

Logos, as raízes da equação de 2º grau $2x^2 - 16x + 18 = 0$ *são:* $x_1 = 4 + \sqrt{17}$ *e* $x_2 = 4 - \sqrt{17}$

Observa-se nesse exemplo o método do professor Po-Shen Loh, resolvem equações de 2º grau com o coeficiente $a \neq 1$ *e com raízes irracinais.*

5 MÉTODO DAS ASPAS SIMPLES

Método da Aspas simples conhecido também como método da lâmina.

Esse método é usado pelos peruanos para resolução de equação de 2º grau os mesmos usam de fatoração simples para chegar nos resultados.

A Fatoração através do método das Aspas Simples se aplica a trinômios ordenados na forma: $ax^2n + bx^n + c$. O método consiste em decompor o coeficiente a e c em duas partes numéricas sendo a soma da multiplicação dessas partes em cruz seja b.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a_1x.c_2 + a_2x.c_2 = bx$$

As vezes não se encontra logo na primeira tentativa, quando isso acontece podemos organizar os sinais e as posições de a_1, a_2, c_1ec_2. Encontrados esses números, podemos fatora dessa maneira: $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$

Colocando em pratica através de exemplos o método peruano de resolução de equação de segundo grau conhecido como método aspa simples.

Exemplo 5.1.

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

5.1 Utilizando a tabela

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$2x^2$	$+7x$	*+3*
$2x$	$6x$	*1*
x	x	*3*

No quadro acima foi fatorado da seguinte maneira:

$$2x^2 = 2x.x$$

$$3 = 3.1$$

Multiplicando em cruz

$$2x.3 = 6x$$

$$x.1 = x$$

Somando a multiplicação em cruz

$6x + x = 7x$ *que é o termo no meio, ou seja, o coeficiente b*

Rescrevendo a equação de 2º grau em forma de fatoração, temos:

$$(2x + 1).(x + 3) = 0$$

Resolvendo a equação:

calculo da raiz, x_1

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

calculo da raiz,

$$x_2$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Logo, as raízes da equação $2x^2 + 7x + 3 = 0$. *São* $x_1 = -\frac{1}{2}$ *e* $x_2 = -3$

O método aspas simples resolve a equação de segundo grau de forma rápida e muito intuitiva.

Exemplo 5.2.

$$6x^2 - 5x - 4 = 0$$

$6x^2$	$-5x$	-4
$3x$	$3x$	-4
$2x$	$-8x$	1

No quadro acima foi fatorado da seguinte maneira:

$$6x^2 = 3x.2x$$

$$-4 = -4.1$$

Multiplicando em cruz

$$3x.1 = 3x$$

$$2x.(-4) = -8x$$

Somando a multiplicação em cruz

$$3x + (-8x) = -5x$$

. que é o termo no meio, ou seja, o coeficiente b.

Rescrevendo a equação de 2º grau em forma de fatoração, temos:

$$(3x - 4).(2x + 1) = 0$$

Resolvendo a equação: calculo da raiz,

$$x_1$$

$$3x - 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

calculo da raiz,

$$x_2$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Logo, as raízes da equação $6x^2 - 5x - 4 = 0$. *São* $x_1 = \frac{4}{3}$ *e* $x_2 = -\frac{1}{2}$

Exemplo 5.3.

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$3x^2$	$-2x$	-5
$3x$	$3x$	-5
x	$-5x$	*1*

No quadro acima foi fatorado da seguinte maneira:

$$3x^2 = 3x.x$$

$$-5 = -5.1$$

Multiplicando em cruz

$$3x.1 = 3x$$

$$x.(-5) = -5x$$

Somando a multiplicação em cruz

$$3x + (-5x) = -2x$$

, que é o termo no meio, ou seja, o coeficiente b.

Rescrevendo a equação de 2º grau em forma de fatoração, temos:

$$(3x - 5).(x + 1) = 0$$

Resolvendo a equação:

- *cálculo da raiz,*

$$x_1$$

$$3x - 5 = 0$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

calculo da raiz,

$$x_2$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Logo, as raízes da equação $3x^2 - 2x - 5 = 0$. São $x_1 = \frac{5}{3}$ e $x_2 = -1$.

Exemplo 5.4.

$$x^2 + 11x + 10 = 0$$

x^2	$+11x$	10
x	x	10
x	$10x$	1

No quadro acima foi fatorado da seguinte maneira:

$$x^2 = x.x$$

$$10 = 10.1$$

Multiplicando em cruz

$$x.1 = x$$

$$x.10 = 10x$$

Somando a multiplicação em cruz

$$x + 10x = 11x$$

O termo no meio, ou seja, o coeficiente b.

Rescrevendo a equação de 2º grau em forma de fatoração, temos:

$$(x + 1).(x + 10) = 0$$

Resolvendo a equação:

calculo da raiz,

$$x_1$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

calculo da raiz,

$$x_2$$

$$x + 10 = 0$$

$$x = -10$$

Logo, as raízes da equação $x^2 + 11x + 10 = 0$. *São* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = -10$.

6 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nesta unidade, apresentamos uma sequência didática sugerida para professores abordarem a função quadrática e os métodos de resolução de equações de segundo grau discutidos neste trabalho. Reconhecemos que essa sequência é um ponto de partida que pode ser aprimorado e melhorado pelos colegas. A sequência didática proposta é estruturada em cinco aulas, cada uma com objetivos específicos e atividades planejadas para facilitar a compreensão dos alunos.

6.1 Aula 1: Introdução a função quadrática

objetivos:

- $f(x) = 0$
- Encontrar os zeros da função
- Compreender a estrutura das equações do segundo grau
- Indetificar os coeficientes ,a, b e c,

Atividades:

1. Apresentação: introdução à forma geral da eauação $ax^2 + bx + c = 0$
2. Identificação de Coeficientes:apresentar exemplos de equações do segundo grau e pedir aos alunos para identificar os coeficientes a, b e c.
3. Discussão em Grupo: discutir como a alteração de cada coeficiente afeta a parábola representada pela equação.

Recursos

- Quadro branco e marcadores
- Exemplos prontos de equações.

6.2 Aula 2: resolução de Equações do Segundo Grau pelo méodo Tradicional

Objetivos:

- Revisar a fórmula de Bhaskara.
- Resolver equações do segundo grau utilizando a fórula de Bhaskara.

Atividades:

1. Revisão da Fórmula de Bhaskara: apresentar a fórmula e derivar a mesma.
2. Exemplos Guiados: resolver exemplos passo a passo com a turma.
3. Prática Independente: distribuir exercícios para os alunos resolverem individualmente.

Recursos:

- Folhas de exercícios.
- Calculadora.

6.3 Aula 3:Introdução ao Método de Po-Shen Lon

Objetivo:

- Introduzir o método de resolução de Po-Shen Lon
- Comparar com a fórmula de Bhaskara.

Atividades:

1. Explicação do Método: apresentar o método de Lon utlizando uma equação do segundo grau simples.
2. Exemplos guiados: resolver alguns exemplos com os alunos, comparando o processo com o método de Bhaskara.
3. Discussão: discutir as vantagens do método de Loh, como a simplificação em certos casos.

Recursos:

- Quadro Branco.
- Slides explicativos.

6.4 Aula 4: aplicação prática do Método de Po-Shen Loh

Objetivos:

- Aplicar o método de Po-Shen Lon na resolução de diversas equações.
- Desenvolver a confiança dos alunos no uso do novo método.

Atividades:

1. Revisão rápida: recapitular os passos do método de Loh.
2. Resolução de Exercícios: dividir os alunos em grupos e fornecer equações para resolverem utilizando o método de Loh.
3. Correção e Discussão: corrigir os exercícios em grupo e discutir as soluções.

Recursos:

- Folha de Exercícios.
- Lousa para correção coletiva.

6.5 Aula 5: avaliação e Reflexão

Objetivos:

- Avaliar a compreensão dos alunos sobre os métodos de resolução de equações do segundo grau.
- Refletir sobre a aprendizagem e discultir dificuldades.

Atividades:

1. Prova curta: aplicar uma prova com questões que envolvem tanto o método tradicional quanto o método de loh.

2. Discurssão Final: discultir os resultados da prova e permitir que os alunos façam perguntas sobre quaisquer dificuldades que encontram.

3. *Feedbak*: coletar feedback dos alunos sobre o que acharam do método de Loh e como ele se compara com a fórmula de Bhaskara.

Recursos:

- Provas impressas.

- Quadro branco para discutir questões da prova.

6.6 Lista de exercícios

A lista de exercícios é para ser resolvida usando o método de Bhaskara e o método de Loh e ao comparar os dois métodos.

Exercício 1: O campeonato maranhense de futebol da primeira divisão é realizado em turno único, no qual todos jogam contra todos. Ao final do campeonato foram realizadas 28 partidas. Quantos clubes participaram do campeonato maranhense?

Solução: Para determinar o número de clubes que participam do campeonato maranhense de futebol da primeira divisão, pode-se usar a fórmula matemática que relaciona o número de partidas ao número de equipes.

Como cada time joga contra todos os outros, logo se assumirmos que há n times ,então cada time jogará contra $(n-1)$ times e portanto teremos $n(n-1)$ partidas. No entanto, como a partida de um time qualquer "A"contra um time "B"é o mesmo jogo entre "B"e "A", então a contagem foi feita em dobro, esse jogo. Daí, o número de partidadas é dado por:

$$P = \frac{[n\,(n-1)]}{2}$$

Onde:

P=número de partidas

n=número de equipes

Dado que foram realizadas 28 partidas, resolve-se a equação para encontrar o valor de n números de equipes:

$$28 = \frac{[n\,(n-1)]}{2}$$

$$n^2 - n - 56 = 0$$

Método de Bhaskara:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

os coeficientes da equação

$$n^2 - n - 56 = 0$$

$a = 1; b = -1; c = -56$

Substituindo os coeficentes na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-56)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2}$$

$$x = \frac{1 + 15}{2} = 8$$

$$x = \frac{1 - 15}{2} = -7$$

O valor negativo não serve, logo a quantidade de clubes do campeonato maranhense são de 8 equipes.

Método de Poh-Shen Lon

$$n^2 - n - 56 = 0$$

Os coeficientes da equação são:

$$a = 1; b = -1; c = -56$$

soma das raízes produto das raízes

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-58}{1} = -56$$

As raízes da equação são:

$$x_1 = \frac{S}{2} + u; x_2 = \frac{P}{2} - u$$

O produto das raízes:

$$\left(\frac{S}{2} + u\right).\left(\frac{S}{2} - u\right) = P$$

$$\left(\frac{1}{2} + u\right).\left(\frac{1}{2} - u\right) = -56$$

$$\frac{1}{4} - u^2 = -56$$

$$\frac{1}{4} + 56 = u^2$$

$$u^2 = \frac{225}{4}$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{225}{4}}$$

$$u = \pm\frac{15}{2}$$

Como, $u \geq 0$

$$u = \frac{15}{2}$$

As raízes da equação:

$$n_1 = \frac{S}{2} + u; n_2 = \frac{S}{2} - u$$

$$n_1 = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

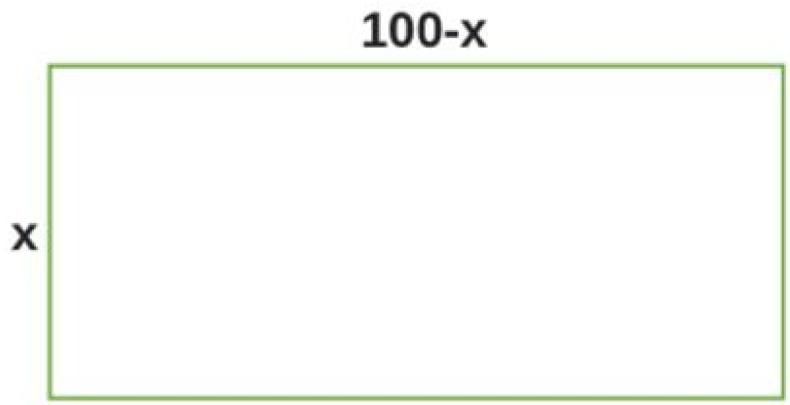
$$n_2 = \frac{1}{2} - \frac{15}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Como a raiz negativa não serve para esse problema, $n = 8$

Exrcício 2 A prefeitura do município de Pirapemas-MA está concluindo a reforma do ginásio poliesportivo da cidade e pretende cercar toda a quadra com tela de alambrado. O encarregado da obra consultou um professor de matemática da cidade e perguntou qual a área máxima que ele pode cercar, considerando que a quadra poliesportiva tem dimensões oficiais de 20m por 36m e que recebeu apenas 200m de tela para fazer o trabalho.

Solução

Figura 9: ilustração da quadra de esporte



Fonte: elaborado pelo autor através do Windows Paint

- Função quadrática para encontrar a área:

  $A(x) = x(100 - x) = -x^2 + 100x$

- Como o coeficiente a é negativo,ou seja, $a < 0$, a função $A(x)$ é representada por uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo.Sendo assim,para que a área seja máxima, a dimensão x é a abscissa do vértice.

- Os coeficientes da função quadrática $A(x) = -x^2 + 100x$:

  $a = -1, b = 100$

- Abscissa do vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}$

- Cálculo da área máxima: $x_v = -\frac{(-100)}{2.1} = \frac{100}{2} = 50$

- **Logo**,a área máxima a ser cercada é um quadrado de lado $50m$, o que está adequado para cercar a quadra $20m$ x $36m$

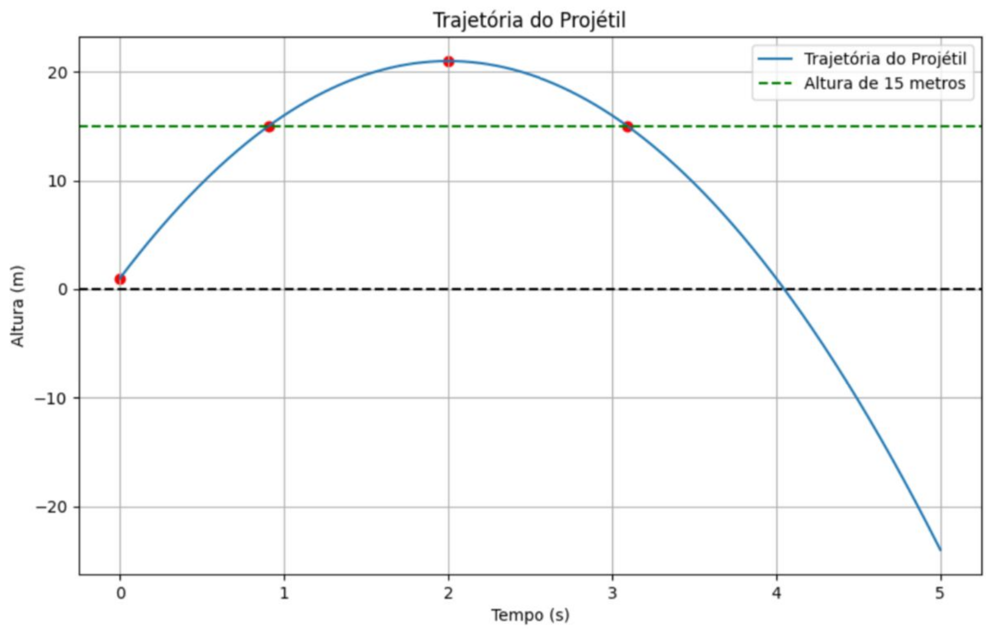
Exercício proposto 3: O senhor Silva e sua esposa têm idades que multiplicadas resultam em 616. Sabemos que o senhor Silva é 6 anos mais velho que sua esposa.

- Qual a idade da esposa do senhor Silva?
- Qual a soma das de suas idades?
- Daqui a quantos anos a soma de suas idades será o dobro da idade do senhor Silva?

Exercício resolvido 4: Maria é uma estudante de ensino fundamental que adora praticar arremesso de bolas em um parque. Ela decide medir como a altura da bola varia ao longo do tempo quando ela é arremessada para cima. Com a ajuda de seu professor de matemática, ela descobre que a altura $h(t)$ em metros da bola em função do tempo t em segundos pode ser modelada pela equação quadrática:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1$$

Figura 10: ilustração a trajetoria do projétil



Fonte: Elaborado pelo Autor no Geogebra

Maria arremessa a bola com uma velocidade inicial de $20m/s$ a partir de uma altura de 1 metro.

- Qual é a altura inicial da bola?

- Qual é a altura máxima que a bola atinge e em quanto tempo isso acontece?

- Quanto tempo a bola leva para atingir o solo novamente?

O estudante lança um projétil com uma velocidade inicial de $11m/s$. Considerando a equação, qual é o tempo para o projetil voltar ao solo?

- Calcule a altura da bola nos tempos $t = 1$ segundo, $t = 2$ segundos e $t = 3$ segundos.

- Durante quanto tempo a bola estará a uma altura maior que 15 metros?

Resolução:

- **Altura Inicial:** - Substituindo $t = 0$ na equação $h(t)$:

$$h(0) = -5(0)^2 + 20(0) + 1 = 1\,\text{metro}$$

- A altura inicial é 1 metro.

- Altura Máxima:

- A altura máxima ocorre no vértice da parábola. O tempo em que isso acontece é dado por:

$$t_{\text{máx}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-5)} = 2\,\text{segundos}$$

- Substituindo $t = 2$ na equação $h(t)$:

$$h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 1 = -20 + 40 + 1 = 21\,\text{metros}$$

- A altura máxima é 21 metros.

Tempo de Voo:

- Para encontrar o tempo de voo, precisamos resolver a equação $h(t) = 0$:

$$-5t^2 + 20t + 1 = 0$$

- Usando a fórmula quadrática $t = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(-5)(1)}}{2(-5)}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 20}}{-10}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{420}}{-10}$$

$$t = \frac{-20 \pm 20.49}{-10}$$

$$t_1 = \frac{-20 + 20.49}{-10} \approx 0.049\,\text{segundos}$$

$$t_2 = \frac{-20 - 20.49}{-10} \approx 4.049 \, \text{segundos}$$

- Portanto, a bola leva aproximadamente 4.049 segundos para atingir o solo novamente.

Altura em Intervalos de Tempo:

- **Altura em $t = 1$ segundo:**

$$h(1) = -5(1)^2 + 20(1) + 1 = -5 + 20 + 1 = 16 \, \text{metros}$$

- **Altura em $t = 2$ segundos:**

$$h(2) = 21 \, \text{metros (já calculado anteriormente)}$$

- Altura em $t = 3$ segundos:

$$h(3) = -5(3)^2 + 20(3) + 1 = -45 + 60 + 1 = 16 \, \text{metros}$$

. **Intervalo de Tempo Acima de 15 Metros:**

- Para determinar o intervalo de tempo, resolvemos $h(t) > 15$:

$$-5t^2 + 20t + 1 > 15$$

$$-5t^2 + 20t - 14 > 0$$

- Resolvendo a equação quadrática

$-5t^2 + 20t - 14 = 0$:

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(-5)(-14)}}{2(-5)}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 280}}{-10}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{120}}{-10}$$

$$t = \frac{-20 \pm 10.95}{-10}$$

$$t_1 = \frac{-20 + 10.95}{-10} \approx 0.905 \, \text{segundos}$$

$$t_2 = \frac{-20 - 10.95}{-10} \approx 3.095 \, \text{segundos}$$

- Portanto, a bola está acima de 15 metros no intervalo de tempo $0.905 < t < 3.095$ segundos.

Exercício proposto 5: Na cidade de Pirapemas – MA, o agricultor Carlos está fazendo uma horta retangular tal que a largura deve ser dois metros menor que o comprimento e, a área total deve ser de oito metros quadrados. Quais as dimensões da pequena horta do seu Carlos?

Exercício proposto 6: Um grupo de torcedores do Palmeiras compraram um pacote de viajem para assistir o jogo do palmeiras contra o flamengo no mês de agosto deste ano de 2024, no valor de 6300,00. Pretendiam dividir essa quantia entre si, em partes iguais. Como 2 membros do grupo não puderam cumprir o compromisso, cada um dos restantes teve sua parcela aumentada de 360,00. O número de pessoas do grupo era, inicialmente:

Exercício proposto 7: Se a soma das idades dos irmaõs João Pedro e Pedro João é igual a 21 anos e o produto das suas idades é igual a 98, quais as suas idades?

Exercício proposto 8: Se a área de um barracão de escola de samba que tem um formato de um retângulo é 78 unidades quadradas e seu lado maior é 7 unidades maior que seu lado menor, quais são os comprimentos dos lados?

Exercício proposto 9: Um terreno destinado para fazer um campo de futebol na cidade de Pirapemas-MA, tem uma área de 300 m^2 e seu lado maior é do dobro do lado menor. Encontre os comprimentos dos lados desse terreno.

Exercício proposto 10: Calcule um número inteiro tal que três vezes o quadrado desse número menos o dobro desse número seja igual a 40.

Exercício proposto 11: Para construir uma área de vivência de formato regular cuja área é de 32 m^2. João Batista decidiu contruir as suas dimensões sendo que um de seus lados terá 4 m a mais que o outro. Quais as dimensões da área de vivência?

Exercício proposto 12: Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que f(x) pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho concentrou-se em apresentar quatro métodos para resolução de equação quadrática e ao mesmo tempo fazer um resgate histórico sobre determinados métodos de resolução de equações quadráticas, desde os primeiros registros em placas de argilas e em papiros, até os métodos convencionais nesse trabalho a partir de exercícios ou exemplos de aplicação. Essa sequência visa não apenas ensinar os alunos a resolver equações do segundo grau, mas também a pensar criticamente sobre diferebtes métodos de solução. A introdução de um método inovador como de Po-Shen Lon pode ajudar a despertar o interesse dos alunos e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

O método Po-Shen Loh assim como as Aspas Simples, apresentado e demonstrado neste trabalho, surge como mais uma alternativa para resolução das equações quadráticas, e que, com o passar do tempo, espera-se que seja incorporado aos livros didáticos e faça parte do rol de técnicas apresentadas em sala de aula, quando do ensino de equações do 2º grau.

8 CONCLUSÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação apresentou uma abordagem abrangente para o ensino de funções quadráticas, incorporando tanto métodos tradicionais quanto inovadores de resolução de equações do segundo grau. Exploramos a importância de compreender as funções quadráticas não apenas como conceitos matemáticos abstratos, mas também como ferramentas práticas para modelagem e solução de problemas do mundo real.

Inicialmente, revisamos o método tradicional de resolução de equações quadráticas, representado pela fórmula de Bhaskara, amplamente conhecida e utilizada no ensino básico. Complementamos essa abordagem com a introdução do método inovador de Po-Shen Loh, que oferece uma simplificação intuitiva para a resolução dessas equações, potencialmente facilitando o aprendizado para alunos que enfrentam dificuldades com a fórmula tradicional. A sequência didática apresentada nesta dissertação visa proporcionar uma abordagem inovadora e eficaz para o ensino das funções quadráticas no ambiente escolar. Ao longo do trabalho, exploramos a importância de compreender as funções quadráticas não apenas como um conceito matemático, mas como uma ferramenta poderosa para a modelagem e resolução de problemas do mundo real.

O método tradicional de resolução de equações do segundo grau, representado pela fórmula de Bhaskara, foi complementado pelo método inovador de Po-Shen Loh. A introdução e aplicação desse método não só diversificam as estratégias pedagógicas, como também despertam o interesse dos alunos, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

A comparação entre esses dois métodos de resolução demonstrou que, embora ambos sejam eficazes, o método de Loh apresenta vantagens em termos de simplificação e compreensão intuitiva, o que pode ser especialmente útil para estudantes que enfrentam dificuldades com a fórmula de Bhaskara.

Além disso, o desenvolvimento das atividades práticas e a avaliação constante do progresso dos alunos permitiram um ambiente de aprendizagem colaborativo e reflexivo. Os alunos não apenas aprenderam a resolver equações quadráticas, mas também desenvolveram habilidades críticas e analíticas que são essenciais para a sua formação acadêmica e profissional.

Portanto, esta dissertação reforça a necessidade de incorporar métodos de ensino variados e inovadores no currículo escolar, assegurando que o ensino da matemática vá além da memorização de fórmulas e conceitos, e esteja profundamente conectado às suas aplicações práticas no cotidiano. Através dessa abordagem, podemos contribuir para a formação de indivíduos capazes de pensar criticamente e resolver problemas de maneira eficiente e criativa.

Dessa forma, esperamos que os resultados obtidos e as metodologias propostas neste trabalho sirvam como referência para futuras práticas pedagógicas e pesquisas na área do ensino de matemática, promovendo um ensino de qualidade e acessível a todos os estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, ANTÔNIO. Matemática descomplicada. volume 1,Rio de Janeiro:Editora Ferreira, 2013

ANGEL,MICHAEL C.G, Olimpiada Internacional de Matemáticas, vol 1,São Petersburgo, Rússia:Editora Azimute,2010

BALACHEFF, N. Une étude des processus de preuves en mathématiques chez des élèves de collège. Université Grenoble, 1988.

BARROS, K. M. da S. Equação Quadrática: História, Abordagens e Contextualização. Dissertação de Graduação, Intituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras – PB, fev. 2020,

BATISTA, R. N. Equações do 2º grau em variáveis complexas. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba 2019.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002

BASSANEZI, R. C. Modelagem Matemática: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2014

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N.; Modelagem Matemática no Ensino.5a . ed. 4ª impressão – São Paulo: Contexto,2014 Muniz, Antonio Caminha. Fundamentos de cálculo 2a. ed. – Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.(Coleção Profmat, 15)

BOYER, Carl B. História da Matemática. 12ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRITO,FARIAS. Livro:Ensino Fundamental -anos finais,vol 1,São Paulo,SP:Editora Moderna,2008

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental. 2017. Disponível em: ttp://basenacionalcomum.mec.gov.br/in EI EF 110518 versaofinal site.pdf. Acesso em: 14 nov. 2023. SMOLE, K., DINIZ, M.I. Ler, escrever e resolver problemas. Porto Alegre, Artmed. 2001

BROLEZZI, A. C., A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática (tese de doutorado), Universidade de São Paulo, 1996

DANTE, LUIZ ROBERTO, Livro: Função afim e Função quadrática,1ª edição, São Paulo,SP:Editora Ática,2020

FARIAS, ROBSON FERNANDES. Livro:Para gostar de ler a história da matemática, 1ª edição,São Paulo,SP: editora Àtomo,2010

FECCHIO,MARIO.Livro: A história da matemática, São Paulo,SP:M Books do Brasil editora LTDA,2012

GUIDORIZI,HAMILTON LUIZ. Um curso de cálculo, vol 1, 5º edição, Rio de Janeiro, RJ:LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.,001

LOH, P. S. A Simple Proof of the Quadratic Formula. Artigo. December 16, 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1910.06709v2.pdf .