



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede  
Nacional/CCET

Willamys Cruz da Silva

**Teorema de Tales de Mileto e suas principais  
consequências**

São Luís - MA

2024

Willamys Cruz da Silva

## **Teorema de Tales de Mileto e suas principais consequências**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. Gerard John Alva Morales

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Silva, Willamys Cruz da.

Teorema de Tales de Mileto e Suas Principais  
Consequências / Willamys Cruz da Silva. - 2024.  
140 p.

Orientador(a): Gerard John Alva ' Morales.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade  
Federal do Maranhão, São Luís/ma, 2024.

1. Geometria Euclidiana. 2. Teorema de Tales. 3.  
Triângulos. 4. . 5. . I. Morales, Gerard John Alva ' .  
II. Título.

Willamys Cruz da Silva

## **Teorema de Tales de Mileto e suas principais consequências**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Maranhão.

Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, 18 de julho de 2024:

---

**Prof. Dr. Gerard John Alva Morales**  
Orientador  
Universidade Federal do Maranhão

---

**Prof. Dra. Renata de Farias Limeira  
Carvalho**  
Examinador Interno

---

**Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho**  
Examinador Externo

São Luís - MA  
2024

# Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha esposa, Adriana Gomes Sousa, e filhos, Pedro Emanuel Sousa Silva e Maria Liz Sousa Silva, por estarem comigo nessa jornada chamada vida. Dedico também aos meus pais que nunca mediram esforços para me ajudar a vencer os obstáculos que a vida me apresentou. A Deus presto minha adoração, dedicando a ele este trabalho como fruto de toda as oportunidades que dele recebi.*

# Agradecimentos

Agradeço aos amigos, em especial a Inglá Lúcia Viana dos Reis e Eliane Lopes Coelho Cavalcante, que me apoiaram neste objetivo. Agradeço também nomeadamente a minha cunhada, Marinalva Gomes Sousa, e minha colega de trabalho, Maria Iris de Sousa Ananias, duas pessoas ímpares. Agradeço aos meus professores e colegas da Turma ProfMat 2022 pelo apoio, ajuda e compreensão dada durante esses dois anos de curso. Não posso deixar de agradecer ao Coordenador do Curso, Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva pelo compromisso assumido com a turma, por nos apoiar e auxiliar durante esses dois anos. Por fim, agradeço grandemente ao meu orientador, Prof. Dr. Gerard John Alva Morales, pela paciência e atenção dada durante os últimos meses.

*A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos.*

(Tales)

# Resumo

Esta dissertação aborda o Teorema de Tales e suas consequências, nele apresento uma breve história de Tales de Mileto e os principais axiomas da geometria euclidiana que dão sustentação ao Teorema de Tales. Abordo ainda uma noção básica sobre retas, que é essencial para compreender o Teorema de Tales. Além de demonstrar o Teorema de Tales, tema desta dissertação, realizo também demonstrações de outros teoremas utilizando para tal o Teorema de Tales. Concluo o trabalho com aplicações do teorema em diversos problemas e com uma breve introdução a geometria analítica.

**Palavras Chaves:** Geometria Euclidiana. Teorema de Tales. Triângulos.

# Abstract

This dissertation addresses the Theorem of Thales and its consequences. It includes a brief history of Thales of Miletus and the main axioms of Euclidean geometry that support the Theorem of Thales. It also covers a basic notion of lines, which is essential for understanding the Theorem of Thales. In addition to demonstrating the Theorem of Thales, the main topic of this dissertation, I also provide proofs of other theorems using the Theorem of Thales. I conclude the paper with applications of the theorem to various problems and a brief introduction to analytic geometry.

**Key words:** Euclidean geometry. Thales' theorem. Triangles.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Consequência do Postulado 1 . . . . .	21
Figura 2 – Reta finita . . . . .	21
Figura 3 – Prolongamento de $CD$ . . . . .	21
Figura 4 – Reta finita a direita de $B$ . . . . .	22
Figura 5 – Prolongamento da reta finita . . . . .	22
Figura 6 – Prolongamento a direita de $B$ . . . . .	22
Figura 7 – Círculo a partir do centro e raio . . . . .	22
Figura 8 – Ângulo reto . . . . .	23
Figura 9 – Quinto postulado . . . . .	23
Figura 10 – 1ª Implicação do quinto postulado . . . . .	24
Figura 11 – 2ª Implicação do quinto postulado . . . . .	24
Figura 12 – Reta $r$ . . . . .	25
Figura 13 – Retas coincidentes paralelas . . . . .	25
Figura 14 – Retas paralelas distintas . . . . .	25
Figura 15 – Retas concorrentes . . . . .	26
Figura 16 – Existência da reta concorrente . . . . .	26
Figura 17 – Segmento de reta $AB$ . . . . .	26
Figura 18 – União dos segmentos $AC$ e $CB$ . . . . .	27
Figura 19 – Segmentos coincidentes . . . . .	27
Figura 20 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$ . . . . .	27
Figura 21 – Semirreta com origem em $A$ . . . . .	27
Figura 22 – Retas concorrentes cortadas pela transversal . . . . .	28
Figura 23 – Retas paralelas cortadas pela transversal . . . . .	28
Figura 24 – Pontos nas retas $r, s$ e $t$ . . . . .	29
Figura 25 – Ângulos adjacentes . . . . .	31
Figura 26 – Triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	32
Figura 27 – Triângulos Equilátero (esq.), Isósceles (centro), escaleno (dir.) - 1 . . . . .	33
Figura 28 – Triângulos Equilátero (esq.), Isósceles (centro), escaleno (dir.) - 2 . . . . .	33
Figura 29 – Triângulo retângulo . . . . .	34
Figura 30 – Ângulo externo . . . . .	34
Figura 31 – Segmento paralelo . . . . .	35
Figura 32 – Ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	35
Figura 33 – Demonstração da soma do ângulo externo ao triângulo - Parte 1 . . . . .	36
Figura 34 – Demonstração da soma do ângulo externo ao triângulo - Parte 2 . . . . .	36
Figura 35 – Triângulos congruentes . . . . .	37
Figura 36 – Construção do triângulo $\triangle ABC$ . . . . .	37

Figura 37 – Demonstração do caso $LAL$ . . . . .	38
Figura 38 – Demonstração para o 1° caso . . . . .	38
Figura 39 – Demonstração para o 2° caso . . . . .	39
Figura 40 – Caso de congruência $LLL$ . . . . .	39
Figura 41 – Triângulos de lados congruentes . . . . .	40
Figura 42 – Demonstração da congruência $LLL$ . . . . .	40
Figura 43 – Triângulos isósceles $\triangle A'DC'$ e $\triangle B'C'D$ . . . . .	41
Figura 44 – Prova da congruência $LLL$ . . . . .	41
Figura 45 – Família de retas paralelas . . . . .	42
Figura 46 – Famílias de retas paralelas cortada por duas transversais . . . . .	42
Figura 47 – Retas transversais as paralelas . . . . .	43
Figura 48 – Segmentos congruentes . . . . .	44
Figura 49 – recíproca do Teorema 3 . . . . .	44
Figura 50 – Demonstração do recíproca do Teorema 3 . . . . .	45
Figura 51 – Paralelogramo . . . . .	46
Figura 52 – Demonstração da proposição 5 - parte 1 . . . . .	46
Figura 53 – Demonstração da Proposição 5 - parte 2 . . . . .	46
Figura 54 – Demonstração da Proposição 5 - parte 3 . . . . .	47
Figura 55 – recíproca da Proposição 5 . . . . .	47
Figura 56 – Demonstração da recíproca da Proposição 5 - Parte 1 . . . . .	48
Figura 57 – Demonstração da recíproca da Proposição 5 - Parte 2 . . . . .	48
Figura 58 – Demonstração da Proposição 6 . . . . .	49
Figura 59 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 1 . . . . .	50
Figura 60 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 2 . . . . .	50
Figura 61 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 3 . . . . .	50
Figura 62 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 4 . . . . .	51
Figura 63 – Distância entre retas paralelas . . . . .	51
Figura 64 – Demonstração da distância entre retas paralelas . . . . .	52
Figura 65 – Triângulos com alturas iguais . . . . .	52
Figura 66 – Prova da recíproca da Proposição 7 - Parte 1 . . . . .	53
Figura 67 – Prova da recíproca da Proposição 7 - Parte 2 . . . . .	53
Figura 68 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 1 . . . . .	55
Figura 69 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 2 . . . . .	55
Figura 70 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 3 . . . . .	56
Figura 71 – Demonstração do Teorema de Pitágoras -Parte 4 . . . . .	57
Figura 72 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 5 . . . . .	57
Figura 73 – Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras . . . . .	59
Figura 74 – Tales de Mileto . . . . .	61
Figura 75 – Retas transversais intersectando retas paralelas . . . . .	62

Figura 76 – Segmentos comensuráveis . . . . .	63
Figura 77 – Quadrado $ABCD$ . . . . .	64
Figura 78 – Demonstração da Proposição 10 - Parte 1 . . . . .	65
Figura 79 – Demonstração da Proposição 10 - Parte 2 . . . . .	65
Figura 80 – Demonstração para segmentos comensuráveis . . . . .	67
Figura 81 – Demonstração para segmentos incomensuráveis . . . . .	68
Figura 82 – Demonstração do Teorema por área . . . . .	70
Figura 83 – Demonstração do Teorema por área - 2 . . . . .	71
Figura 84 – Recíproca do Teorema de Tales . . . . .	72
Figura 85 – Prova da equivalência das proporções do Teorema de Tales . . . . .	74
Figura 86 – Prova do semelhança $LLL$ - 1 . . . . .	77
Figura 87 – Prova do semelhança $LLL$ - 2 . . . . .	78
Figura 88 – Caso de semelhança $AAA$ - parte 1 . . . . .	79
Figura 89 – Caso de semelhança $AAA$ - parte 2 . . . . .	79
Figura 90 – Caso de semelhança $AAA$ - parte 3 . . . . .	80
Figura 91 – Caso de semelhança $LAL$ - parte 1 . . . . .	81
Figura 92 – Caso de semelhança $LAL$ - parte 2 . . . . .	81
Figura 93 – Caso de semelhança $LAL$ - parte 3 . . . . .	82
Figura 94 – Teorema fundamental da semelhança . . . . .	83
Figura 95 – Ângulos congruentes . . . . .	83
Figura 96 – lados homólogos proporcionais . . . . .	84
Figura 97 – Prova da recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança - parte 1 .	85
Figura 98 – Prova da recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança - parte 2 .	86
Figura 99 – Bissetrizes . . . . .	87
Figura 100 – Bissetriz Interna . . . . .	87
Figura 101 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Internas - Parte 1 . . . . .	88
Figura 102 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Internas - Parte 2 . . . . .	88
Figura 103 – Prova da Recíproca do Teorema das Bissetrizes Internas . . . . .	89
Figura 104 – Bissetriz externa . . . . .	90
Figura 105 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Externas . . . . .	91
Figura 106 – Prova da recíproca do Teorema das Bissetrizes Externas . . . . .	92
Figura 107 – Ponto de interseção no Teorema de Ceva . . . . .	93
Figura 108 – Traçando a reta $\overleftrightarrow{N'M'}$ paralela ao segmento $BC$ . . . . .	94
Figura 109 – Traçando o segmento $BE$ paralelo ao segmento $CN'$ . . . . .	94
Figura 110 – Traçando o segmento $CF$ paralelo ao segmento $BM'$ . . . . .	95
Figura 111 – Traçando o segmento $GA$ paralelo ao segmento $BM'$ . . . . .	95
Figura 112 – Traçando o segmento $AH$ paralelo ao segmento $CN'$ . . . . .	96
Figura 113 – Demonstração da recíproca do Teorema de Ceva . . . . .	97
Figura 114 – Problema 1 . . . . .	99

Figura 115–Problema 2 . . . . .	100
Figura 116–Problema 3 . . . . .	101
Figura 117–Problema 4 . . . . .	102
Figura 118–Ilustração do Problema 5 . . . . .	103
Figura 119–1ª Parte da solução do Problema 6 . . . . .	104
Figura 120–2ª Parte da solução do Problema 6 . . . . .	105
Figura 121–Problema 7 . . . . .	106
Figura 122–Segmentos paralelos as bissetrizes $AS$ e $AP$ . . . . .	106
Figura 123–Solução do Problema 7 . . . . .	107
Figura 124–Problema 8 - 1 . . . . .	108
Figura 125–Problema 8 - 2 . . . . .	109
Figura 126–Solução do Problema 8 . . . . .	110
Figura 127–Problema 9 . . . . .	111
Figura 128–Solução do Problema 9 . . . . .	111
Figura 129–Problema 10 . . . . .	112
Figura 130–Solução do Problema 10 . . . . .	113
Figura 131–Problema 11 . . . . .	114
Figura 132–1ª parte da solução do Problema 11 . . . . .	115
Figura 133–2ª parte da solução do Problema 11 . . . . .	116
Figura 134–Solução do Problema 12 . . . . .	117
Figura 135–Ponto de interseção dos segmentos $AM'$ , $CP$ e $BQ$ . . . . .	117
Figura 136–Ilustração do Problema 13 . . . . .	118
Figura 137–Solução do Problema 13 . . . . .	119
Figura 138–Problema 14 . . . . .	120
Figura 139–Solução do Problema 14 . . . . .	120
Figura 140–Problema 15 . . . . .	122
Figura 141–Solução do Problema 15 . . . . .	122
Figura 142–Plano Cartesiano . . . . .	124
Figura 143–Partes do plano cartesiano . . . . .	125
Figura 144–Segmento de reta $AB$ . . . . .	126
Figura 145–Segmento colineares . . . . .	127
Figura 146–Segmento de reta $AC$ . . . . .	127
Figura 147–Demonstração da Razão entre segmentos colineares consecutivos . . . . .	128
Figura 148–Colinearidade dos pontos . . . . .	129
Figura 149–Segmento de reta $AC$ . . . . .	130
Figura 150–Prova da colinearidade . . . . .	130
Figura 151–Inclinação da reta em relação ao eixo $x$ . . . . .	132
Figura 152–Prova colinearidade de três pontos . . . . .	132
Figura 153–Espaço $R^3$ . . . . .	133

Figura 154 – Reta $\overleftrightarrow{AB}$ em $R^3$ - parte 1 . . . . .	134
Figura 155 – Reta $\overleftrightarrow{AB}$ em $R^3$ - parte 2 . . . . .	135

# Lista de Símbolos

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\sim$	Semelhante
$\perp$	Perpendicular
$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\gamma$	Gamma
$\delta$	Delta
$\theta$	Teta
$\lambda$	Lambda
$\zeta$	Zeta
$\eta$	Eta
$\varphi$	Phi
$\mu$	Mu
$\kappa$	Kappa
$\omega$	Omega
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual a
$\geq$	Maior ou igual a
$\cap$	Interseção
$\cup$	União
$\subset$	Contido
$\in$	Pertence

$\triangle$	Triângulo
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta AB
$AB$	Segmento de reta AB
$\hat{A}$	Ângulo A
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com origem em A
$\overleftarrow{AB}$	Semirreta com origem em B
$R^3$	Espaço $R^3$
$\mathfrak{R}$	Conjunto dos números reais

# Sumário

<b>1</b>	<b>UMA INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA EUCLIDIANA: POSTULADOS E NOÇÕES BÁSICAS DE RETAS E TRIÂNGULOS</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Os principais axiomas da geometria euclidiana</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Os cinco postulados da Geometria Euclidiana</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Noção básica sobre retas, segmentos e semirretas</b>	<b>25</b>
2.3.1	Retas	25
2.3.2	Segmentos de retas	26
2.3.3	Semirretas	27
2.3.4	Ângulos formados por duas retas e uma transversal	28
<b>2.4</b>	<b>Triângulos: Conceitos básicos e classificação</b>	<b>32</b>
2.4.1	Conceitos	32
2.4.2	Classificação	33
<b>2.5</b>	<b>Ângulo externo de um triângulo</b>	<b>34</b>
<b>2.6</b>	<b>Soma dos ângulos internos de um triângulo</b>	<b>35</b>
<b>2.7</b>	<b>Casos de congruências de triângulos</b>	<b>37</b>
<b>2.8</b>	<b>Famílias de retas paralelas</b>	<b>42</b>
2.8.1	Paralelogramo	45
<b>2.9</b>	<b>Teorema de Pitágoras: Breve abordagem</b>	<b>54</b>
<b>3</b>	<b>TEOREMA DE TALES E SUAS PRINCIPAIS CONSEQUÊNCIAS</b>	<b>61</b>
<b>3.1</b>	<b>Breve biografia: Tales de Mileto</b>	<b>61</b>
<b>3.2</b>	<b>Teorema de Tales</b>	<b>62</b>
3.2.1	Teorema de Tales: Segmentos comensuráveis	66
3.2.2	Teorema de Tales: Segmentos incomensuráveis	68
3.2.3	Teorema de Tales: Demonstração pela área do triângulo	70
3.2.4	Recíproca do Teorema de Tales	72
3.2.5	Proporções equivalentes para o Teorema de Tales	74
<b>3.3</b>	<b>Consequências do Teorema de Tales para triângulos</b>	<b>76</b>
3.3.1	Semelhança de triângulos	76
3.3.1.1	Caso de semelhança lado-lado-lado (LLL)	76
3.3.1.2	Caso de semelhança ângulo-ângulo-ângulo (AAA)	79
3.3.1.3	Caso de semelhança Lado-Ângulo-Lado (LAL)	80
3.3.2	Teorema fundamental da semelhança	83
3.3.3	Teorema das Bissetrizes	86

3.3.3.1	Teorema das Bissetrizes internas . . . . .	87
3.3.3.2	Teorema das Bissetrizes externas . . . . .	90
3.3.4	Teorema de Ceva . . . . .	93
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DO TEOREMA DE TALES . . . . .</b>	<b>99</b>
4.1	Aplicações básicas do Teorema de Tales . . . . .	99
4.2	Aplicações intermediarias do Teorema de Tales . . . . .	104
4.3	Aplicações avançadas do Teorema de Tales . . . . .	112
<b>5</b>	<b>UMA INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA . . . . .</b>	<b>124</b>
5.1	Noções básicas: Plano Cartesiano e ponto . . . . .	124
5.1.1	Distância entre dois pontos no plano . . . . .	126
5.2	Cálculo da Razão entre Segmento colineares consecutivos . . . . .	127
5.3	Condição de colinearidades de três pontos . . . . .	129
5.4	Breve abordagem do Teorema de Tales em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	133
5.4.1	Noção básica do espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .	133
5.4.2	Razão entre dois segmentos colineares consecutivos em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	134
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>138</b>
	<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>139</b>

# 1 Uma introdução

Despertar o interesse dos alunos pela aprendizagem de matemática sempre foi um desafio enfrentado por professores. O desinteresse pela disciplina é algo recorrente que se agrava quando o professor adota uma abordagem de ensino que não considera as análises das ideias e foca-se apenas na transferência de conhecimento. Segundo DE OLIVEIRA [1], “Nossos alunos, na maioria das vezes, são desmotivados porque a eles são transferidas enormes quantidades de conhecimentos, falando-se pouco ou nada do que motivou tudo aquilo”.

Motivar um aluno requer que o professor considere que o conteúdo a ser abordado em sala de aula foi construído ao longo da história humana. Logo, é preciso ir além da apresentação de um conceito matemático, mas também discuti-lo. A discussão permitirá o desenvolvimento do aluno em um sujeito criativo dentro da nossa sociedade. Nesse aspecto, a Geometria é uma área que tem muito a contribuir, logo é preciso reconhecer a sua importância.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. [2]

Do ponto de vista prático, o aluno tem a possibilidade de manejar objetos matemáticos, tais como cubo, quadrado, pirâmide, triângulo, esfera e círculo. A partir desse manejo dos objetos, o discente é convidado a experimentar a matemática dentro de sua realidade e vislumbrar tais objetos em seu cotidiano, tornando isso um atrativo para aflorar em si o desejo de conhecer e explorá-la. Já do ponto de vista teórico, o aluno poderá abstrair tais objetos, levando-o da dimensão tridimensional para a bidimensional, possibilitando ao professor explorar os conteúdos associados de forma lúdica e orgânica. Nesse sentido, segundo o Documento Curricular do Território Maranhense, na geometria:

a construção do conhecimento parte da geometria espacial para as planas, de forma que o estudante compreenda a construção das figuras geométricas e seus elementos, observando diferenças e semelhanças entre elas; construindo representações por meio da composição, decomposição, ampliação e redução das mesmas, além da localização de pontos no plano cartesiano, construindo conceitos. [3]

Uma boa abordagem da matemática é essencial para que os futuros ingressantes nos cursos superiores de matemática consigam mitigar suas dificuldades na aprendizagem matemática. As inúmeras lacunas de aprendizagem provocadas por uma educação básica

pobre criam dificuldades para os ingressantes dos cursos de licenciatura em matemática, o que se converte em reprovação. Segundo estudo realizado por SILVA (2021) [4], "os principais motivos que causaram reprovação foram as dificuldades em compreender o conteúdo, os déficits oriundos do ensino básico e as metodologias dos professores, que juntos totalizaram 80

Dessa forma, ressalta-se a importância de aprender matemática de forma adequada no ensino básico para que isso reflita de forma positiva no ensino superior e na vivência de nossos alunos. A formação de bons professores passa pela formação de bons alunos, e a formação de bons alunos necessita que os professores atuais considerem que cada conteúdo matemático é relevante e essencial. Neste aspecto, a geometria, na maioria das vezes, é deixada de lado por professores durante o decorrer do processo de ensino-aprendizagem.

Os professores, conforme pesquisas realizadas, devido à sua formação, têm uma tendência em pensar que a geometria é assunto para segundo plano, sendo que os outros assuntos de álgebra, por exemplo, são mais importantes e por isso têm prioridade. [5]

Essa percepção por parte dos professores, que relativiza a importância de alguns assuntos em detrimento de outros, pode influenciar de forma significativa a maneira como os alunos percebem e se engajam durante o processo de ensino-aprendizagem, levando-os a crer que determinados assuntos não abordados são difíceis e, portanto, não convém serem ensinados.

Como já abordado, o ensino da geometria plana desempenha um papel fundamental no desenvolvimento dos alunos, oferecendo-lhes a oportunidade de compreender e explorar o mundo que os cerca de maneira mais tangível e visual. Através da geometria, os alunos podem aprender a analisar e resolver problemas espaciais, desenvolver habilidades de visualização e raciocínio crítico, além de adquirir uma compreensão mais profunda das relações geométricas e das propriedades dos objetos no espaço bidimensional. Nesse contexto, o Teorema de Tales assume uma importância singular na matemática, pois não apenas fornece um arcabouço teórico sólido para compreender as proporções e relações entre segmentos de reta em figuras geométricas, mas também serve como base para a dedução de uma variedade de outros teoremas e conceitos geométricos. Sua relevância se estende além da geometria plana, influenciando áreas como trigonometria, álgebra e até mesmo física. Portanto, ao dominar o Teorema de Tales, os alunos não apenas ampliam seu entendimento da geometria, mas também fortalecem suas habilidades matemáticas de forma mais abrangente.

Dessa forma, esta dissertação tem como objetivo discutir o Teorema de Tales, dada sua relevância devido à sua versatilidade e aplicabilidade dentro da matemática. A proposta é mostrar que o conhecimento é construído ao longo da história e não se restringe a fórmulas prontas. Assim, no capítulo 2, apresentamos as bases preliminares, essenciais

para uma boa compreensão do Teorema de Tales e de suas consequências. Abordaremos os principais axiomas da Geometria Euclidiana, as noções de retas, semirretas e segmentos de retas, além de definições, proposições e teoremas importantes para a construção do conhecimento matemático, amparado em bases que sustentam o que buscamos discutir.

o capítulo 3, discorreremos sobre o Teorema de Tales e suas consequências, discutindo-o por meio dos assuntos preliminares apresentados no capítulo anterior. Mostraremos que o Teorema de Tales nos fornece resultados significativos dentro de triângulos. Apresentaremos esses resultados como forma de mostrar ao leitor a versatilidade e aplicabilidade deste teorema, demonstrando que não se trata de um resultado isolado. Veremos que, ao aplicá-lo em triângulos, conseguimos obter várias consequências que têm um impacto direto na compreensão de propriedades e relações dentro dos triângulos.

No capítulo 4, apresentaremos um conjunto de problemas que podem ser solucionados por meio do Teorema de Tales. Esses problemas permitirão trazer à tona o potencial deste teorema como uma ferramenta prática na matemática.

Por fim, no capítulo 5, ampliaremos o uso do Teorema de Tales para obter resultados na geometria analítica, destacando sua aplicabilidade para além de suas aplicações tradicionais.

Portanto, esta dissertação se concentra na abordagem do Teorema de Tales, com vista a compreender bem as proporções de Tales de Mileto e suas principais consequências. O objetivo é obter destreza na resolução de problemas sobre congruências e semelhanças de triângulos, servindo de base para que outros professores possam enxergar com paixão a geometria. Dessa forma, mostraremos através deste trabalho que o Teorema de Tales está intrinsecamente ligado a diversos assuntos dentro da matemática. Percorreremos ao longo desta dissertação o caminho necessário para uma boa compreensão dos conceitos elementares da geometria, mostrando que tais conceitos são as bases de diversos teoremas. Compreender bem um teorema significa apropriar-se dessas bases e, por consequência, facilitar a aprendizagem.

## 2 Geometria Euclidiana: postulados e noções básicas de retas e triângulos

Nesse capítulo, abordam-se os conceitos preliminares que nos auxiliaram a construir a presente dissertação.

### 2.1 Os principais axiomas da geometria euclidiana

Aqui abordam-se os principais axiomas da geometria euclidiana, desenvolvidos por Euclides, um matemático grego, por volta de 300 a.C., que fornecem a noção básica dos elementos necessários para a sustentabilidade do Teorema de Tales. Segundo SANTOS (2014) [6], "Axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas muitas vezes utilizadas como princípio de construção de uma teoria ou como base para alguma argumentação". No livro Elementos, Euclides fixa 10 axiomas dos quais cinco são noções comuns e cinco postulados. Os axiomas são fundamentais para a compreensão e a fundamentação da matemática, desde a sua publicação até os tempos atuais.

Em sua obra Os elementos, EUCLIDES [7] apresenta as noções comuns:

1 - Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais. 2 - Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais. 3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais. 4 - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais. 5 - E o todo [é] maior do que a parte.

As noções comuns não são passíveis de demonstrações, devem ser aceitas como verdadeiras e referem-se a quaisquer grandezas matemáticas, logo quando fala-se em 'Coisas iguais' podemos entender como, por exemplo, se dois segmentos de retas são iguais a um terceiro segmento de reta, então esses dois segmentos de retas são iguais entre si.

Ainda em sua obra, Os elementos, EUCLIDES [7] apresenta os postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Esses postulados são essenciais para entendermos diversos teoremas e proposições. Discute-se na próxima seção cada um dos postulados de Euclides.

## 2.2 Os cinco postulados da Geometria Euclidiana

Nesta seção discute-se os postulados da Geometria Euclidiana que dão base a diversos teoremas e proposições da Geometria Plana. Busca-se aqui não somente apresentar cada um dos postulados, mas auxiliar a compreendê-los geometricamente. Faz-se também ajustes no texto de referência de forma a torna-lo mais simples e compreensível.

**Postulado 1.** *Pode-se traçar uma única reta unindo quaisquer dois pontos.*

O postulado 1 estabelece que podemos traçar uma reta a partir de dois pontos distintos. Assim, tomando-se dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , a reta que os contém é denotada como reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Figura 1 – Consequência do Postulado 1



Fonte: Elaborado pelo autor

**Postulado 2.** *Pode-se prolongar de um único modo qualquer reta finita continuamente em uma reta.*

O postulado 2 estabelece a continuidade de uma reta finita em um ponto, ou seja, pode-se prolonga-lá a partir do seu ponto de origem ou extremos. Por exemplo, tomando-se uma reta finita em  $B$ , pode-se continuá-la, finita ou infinitamente, a partir de  $B$ .

Figura 2 – Reta finita



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 3 uma reta finita com extremos em  $C$  e  $D$  foi prolongada a partir de seus extremos considerando o postulado 1, pois sabe-se que existe uma reta que contém esse dois pontos, ou seja, pode-se prolongar  $CD$  tanto finitamente quanto infinitamente a partir de seus extremos. Obtém-se, a partir do prolongamento, a reta finita  $BC$  e  $DE$ .

Figura 3 – Prolongamento de  $CD$



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 4 a reta finita com origem em  $B$  e infinita a esquerda de  $B$  está definida distintamente por dois pontos.

Figura 4 – Reta finita a direita de  $B$



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 5 prolonga-se a reta, vista na figura 4, finitamente em  $B$  até  $C$ . Pode-se dizer que tem-se agora uma nova reta finita com origem em  $C$  e infinita a esquerda de  $A$ .

Figura 5 – Prolongamento da reta finita



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se ainda prolonga-lá infinitamente em  $B$ , obtendo-se nesse caso uma reta infinita definida por dois pontos distintos.

Figura 6 – Prolongamento a direita de  $B$

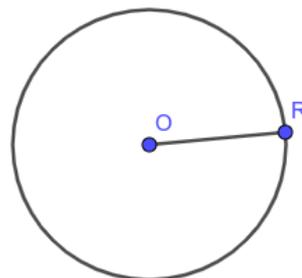


Fonte: Elaborado pelo autor

**Postulado 3.** *Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

O postulado 3 de Euclides estabelece que podemos construir um círculo a partir de qualquer centro e de qualquer raio, ou seja, é possível construir o círculo independente do tamanho do raio desejado e de qual ponto utiliza-se como centro.

Figura 7 – Círculo a partir do centro e raio

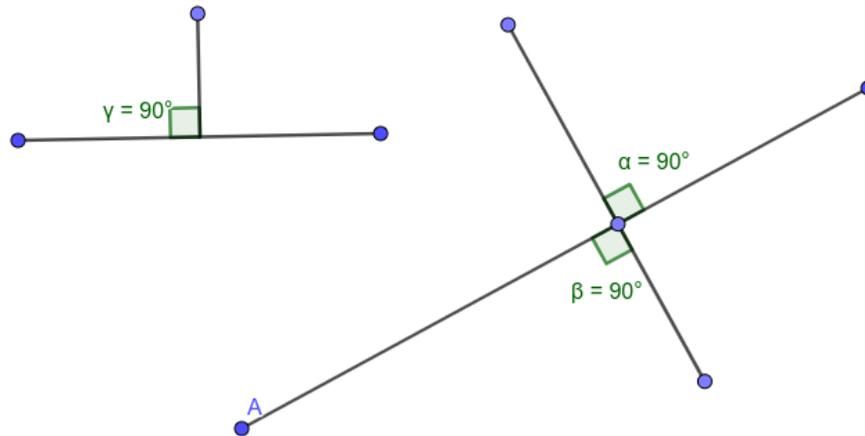


Fonte: Elaborado pelo autor

**Postulado 4.** *Todos os ângulos retos são iguais.*

No postulado 4 de Euclides estabelece-se que todos os ângulos retos são iguais, independente da posição da representação geométrica desse ângulo. Na figura 8, ainda que os segmentos de retas estejam em posições distintas no plano, o ângulo reto continua igual.

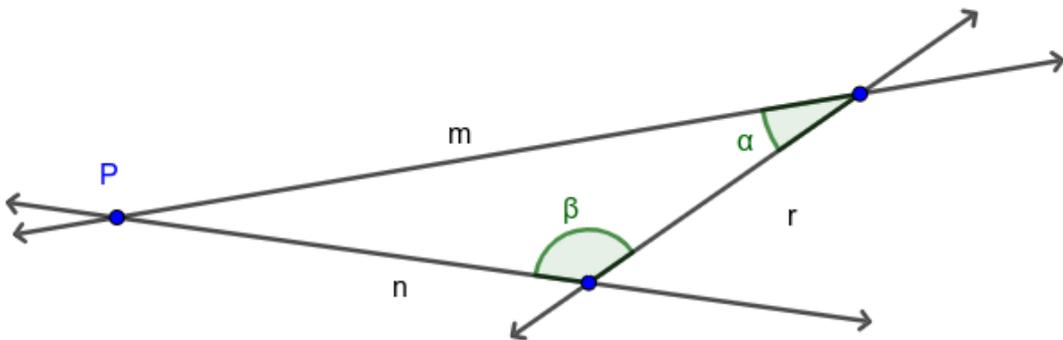
Figura 8 – Ângulo reto



Fonte: Elaborado pelo autor

**Postulado 5.** *Sejam duas retas  $m$  e  $n$  cortadas por uma terceira reta  $r$ . Se a soma dos ângulos internos formados pela interseção da reta  $r$  com as retas  $m$  e  $n$ , que estão do mesmo lado, for menor que 180 graus, então  $m$  e  $n$  não são retas paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que 180 graus.*

Figura 9 – Quinto postulado



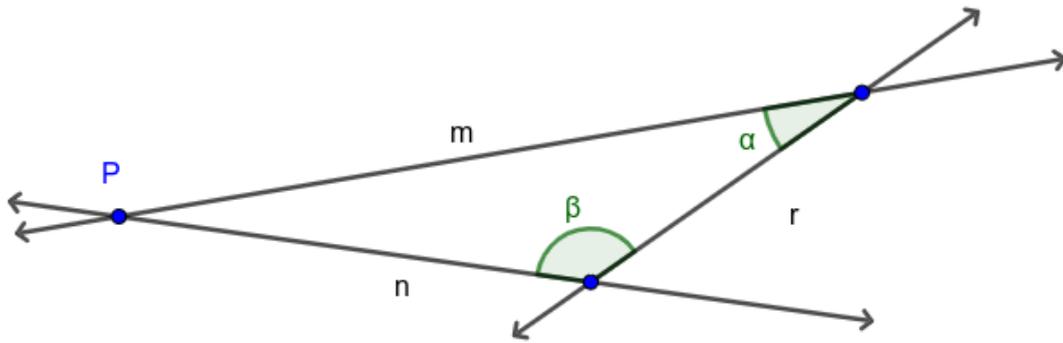
Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo Euclides, na figura 9, sendo as retas  $m$  e  $n$  cortadas pela reta  $r$  e supondo que a soma dos ângulos formados pela reta transversal seja menor que 180 graus, ou seja, se  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , então as retas  $m$  e  $n$  não são paralelas e, ainda, existirá um ponto

de interseção entre  $m$  e  $n$  no lado dos ângulos cuja soma seja menor que 180 graus que denotamos como  $P$ . Desse postulado segue-se as seguintes implicações:

1ª Implicação) Se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem a desigualdade  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , então as retas  $m$  e  $n$  não são paralelas e existe um ponto  $P$  tal que  $m \cap n = P$ .

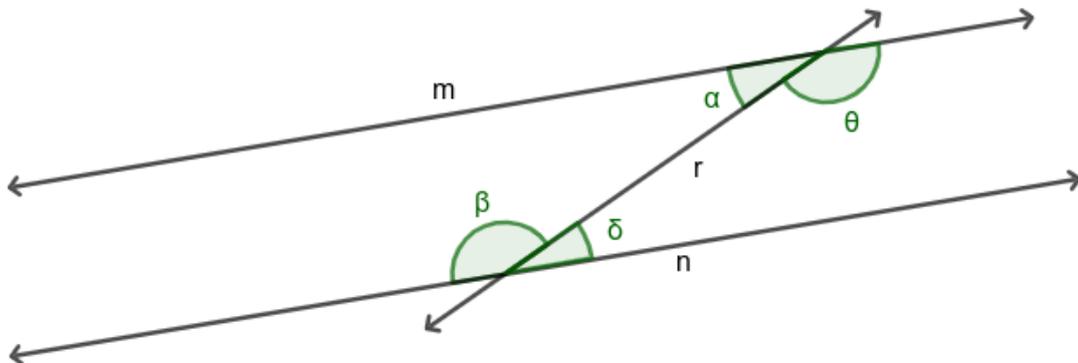
Figura 10 – 1ª Implicação do quinto postulado



Fonte: Elaborado pelo autor

2ª Implicação) Se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem a igualdade  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , então as retas  $m$  e  $n$  são paralelas e, portanto, não existe um ponto de interseção entre  $m$  e  $n$ .

Figura 11 – 2ª Implicação do quinto postulado



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se também conjecturar, de modo análogo, em relação aos ângulos  $\delta$  e  $\theta$ . Se os ângulos  $\delta$  e  $\theta$  satisfazem a igualdade  $\delta + \theta = 180^\circ$ , então as retas  $m$  e  $n$  são paralelas. Na subseção 2.3.4 veremos, no caso de retas paralelas, que  $\delta = \alpha$  e que  $\beta = \theta$ .

A primeira implicação estabelece a existência de um ponto de interseção do lado dos ângulos cujo a soma é menor que 180 graus, já a segunda indica que se a soma é igual a 180 graus, então as retas  $m$  e  $n$  são paralelas. Essas implicações permitem definir se as retas são transversais ou paralelas.

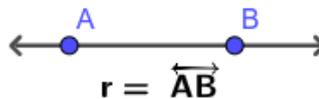
## 2.3 Noção básica sobre retas, segmentos e semirretas

Nesta seção apresentam-se as noções básicas sobre retas, segmentos e semirretas, abordando ainda sobre família de retas paralelas e transversais.

### 2.3.1 Retas

Na seção 2.1, o postulado 1 estabelece que pode-se traçar uma única reta unindo quaisquer dois pontos. Assim, dois pontos distintos  $A$  e  $B$  definem a reta que denotamos por  $\overleftrightarrow{AB}$ . Segue-se também que as retas podem ser representadas por letras minúsculas do alfabeto, por exemplo, podemos nomear a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  de  $r$  e representá-la geometricamente.

Figura 12 – Reta  $r$



Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação aos tipos de retas, têm-se que duas ou mais retas podem ser retas paralelas coincidentes, retas paralelas distintas ou concorrentes.

Compreende-se como retas paralelas, de acordo com a 2ª implicação do postulado 5, retas que não possuem um ponto de interseção, no entanto se as retas  $r$  e  $s$  são duas retas, tais que  $r$  é paralela a  $s$  e há um ponto da reta  $r$  que está contido em  $s$ , então conclui-se que  $r = s$ , logo  $r$  e  $s$  são paralelas coincidentes e representam uma única reta.

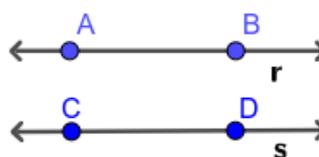
Figura 13 – Retas coincidentes paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor

Diz-se que  $r$  e  $s$  são retas paralelas distintas se, e somente se, elas não se intersectam.

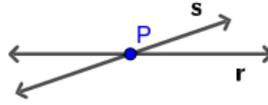
Figura 14 – Retas paralelas distintas



Fonte: Elaborado pelo autor

Diz-se que  $r$  e  $s$  são retas concorrentes se, e somente se, elas não forem paralelas. Na figura 15 tem-se que  $r$  interseção com  $s$  é um ponto  $P$ .

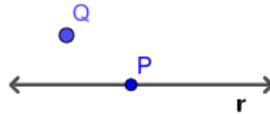
Figura 15 – Retas concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo postulado 1 de Euclides, pode-se afirmar que existe uma reta concorrente a uma outra reta, para tanto considere a reta  $r$ , um ponto  $P$  que pertence a  $r$  e um ponto  $Q$  que não pertence a  $r$ .

Figura 16 – Existência da reta concorrente



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $Q$  não pertence a  $r$ , então existe uma reta concorrente a  $r$  que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  que pode-se denominar de reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ .

### 2.3.2 Segmentos de retas

**Definição 1.** Um segmento de reta é qualquer reta finita, com extremos  $A$  e  $B$ , contida na reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

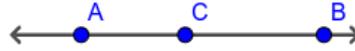
Da definição, se os pontos  $A$  e  $B$  são distintos e pertencentes a uma reta  $r$ , então o segmento de reta  $AB$  é uma parte da reta  $r$  com extremidade em  $A$  e  $B$ . Conforme a figura 17, o segmento de reta  $AB$  está contido em  $r$ . Um segmento de reta é limitado pelos seus extremos, logo todos os pontos do segmento de reta pertencem a reta, mas nem todos os pontos da reta pertencem ao segmento de reta.

Figura 17 – Segmento de reta  $AB$



Fonte: Elaborado pelo autor

Se o ponto  $C \in AB$ , de tal forma que  $C$  é distinto de  $A$  e  $B$ , então o segmento  $AB = AC \cup CB$ , onde o comprimento do segmento  $AB$  é o número real  $|AB|$ , tal que  $|AB| = |AC| + |CB|$ .

Figura 18 – União dos segmentos  $AC$  e  $CB$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Se  $B = C$ , ou seja, se  $B$  e  $C$  são pontos coincidentes, então  $|AB| = |AC|$  e o segmento  $BC$  tem comprimento nulo. Diz-se ainda que o segmento  $AB$  e  $AC$  são segmentos coincidentes.

Figura 19 – Segmentos coincidentes

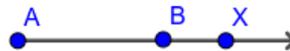


Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.3.3 Semirretas

**Definição 2.** A semirreta  $\overrightarrow{AB}$  é a união do segmento  $AB$  e o conjunto de todos os pontos  $X$  tais que  $B$  pertence ao segmento  $AX$ .

Da definição, a semirreta da figura 20 tem origem em  $A$ .

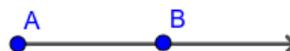
Figura 20 – Semirreta  $\overrightarrow{AB}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{X \in \overrightarrow{AB} | B \in AX\}$$

O segmento de reta é limitado em seus extremos, já a semirreta é limitada por seu ponto de origem. Por exemplo, a semirreta  $\overrightarrow{AB}$  tem origem no ponto  $A$ , logo é limitada pelo ponto  $A$ .

Figura 21 – Semirreta com origem em  $A$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

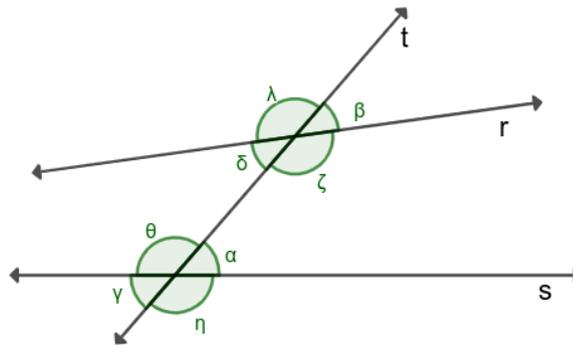
### 2.3.4 Ângulos formados por duas retas e uma transversal

Nesta subseção apresenta-se a nomenclatura dos ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal, verá-se ainda que quando duas retas paralelas distintas são cortadas por uma transversal os ângulos definidos possuirão uma característica especial.

**Definição 3.** *Duas retas  $r$  e  $s$  de um mesmo plano, interceptados pela reta transversal  $t$ , formam oito ângulos. Os pares de ângulos são denominados de alternos internos, alternos externos, correspondentes e colaterais.*

Da definição compreende-se que duas retas concorrentes ou paralela distintas, cortadas por uma reta transversal, formam ângulos denominados de alternos internos, alternos externos, correspondentes e colaterais. Conforme a figura 22 as retas  $r$  e  $s$  são duas retas concorrentes cortadas pela reta transversal  $t$  e determinam oito ângulos.

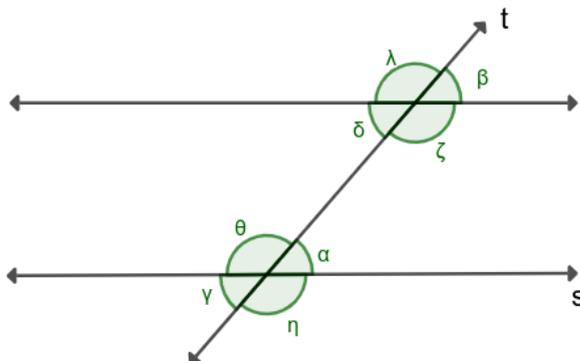
Figura 22 – Retas concorrentes cortadas pela transversal



Fonte: Elaborado pelo autor

Analogamente, na figura 23 as retas  $r$  e  $s$  são duas retas paralelas cortadas pela reta transversal  $t$  e também determinam oito ângulos.

Figura 23 – Retas paralelas cortadas pela transversal



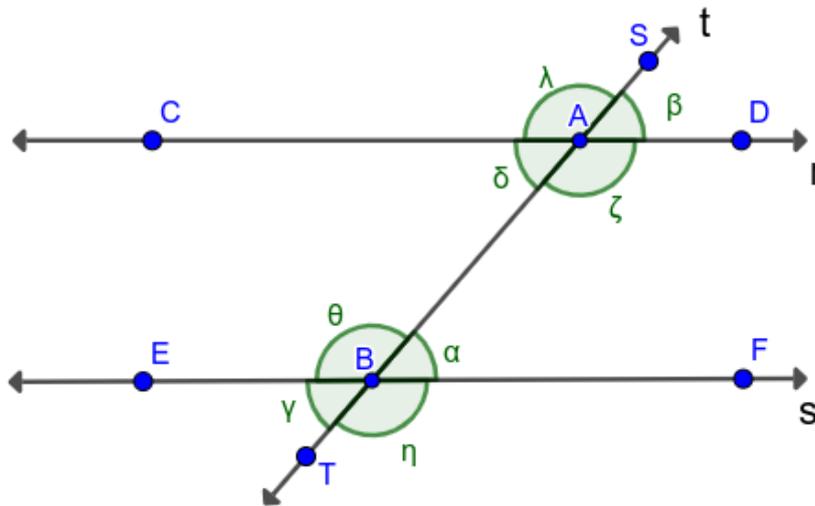
Fonte: Elaborado pelo autor

Em ambos os casos ocorrem as seguintes correspondências:

- 1) Ângulos alternos internos:  $\alpha$  e  $\delta$ ,  $\theta$  e  $\zeta$ ;
- 2) Ângulos alternos externos:  $\gamma$  e  $\beta$ ,  $\eta$  e  $\lambda$ ;
- 3) Ângulos correspondentes:  $\theta$  e  $\lambda$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ ;
- 4) Ângulos colaterais:  $\gamma$  e  $\lambda$ ,  $\theta$  e  $\delta$ ,  $\eta$  e  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\zeta$ .

Na figura 24, identificamos o ponto  $A$  como a interseção da reta  $r$  com a reta  $t$ , e o ponto  $B$  como a interseção da reta  $s$  com a reta  $t$ . Além disso, na figura 24, foram definidos os pontos  $C, D, E, F, S$  e  $T$ .

Figura 24 – Pontos nas retas  $r, s$  e  $t$



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Postulado 5 sendo  $r$  paralelo a  $s$ , então

$$\delta + \theta = 180^\circ$$

$$\alpha + \zeta = 180^\circ$$

Da figura 24 tem-se que  $r$  é dado pela união das semirretas  $\overleftarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{AD}$ , opostas, ambas com origem em  $A$ . Analogamente a reta  $s$  é formada pela união das semirretas  $\overleftarrow{EB}$  e  $\overrightarrow{BF}$ , opostas, com origem em  $B$ , enquanto que a semirreta  $t$  corresponde a união da semirreta  $\overleftarrow{TB}$  com o segmento de reta  $BA$  e a semirreta  $\overrightarrow{AS}$ .

**Definição 4.** *Dois semirretas opostas contidas em uma mesma reta determinam um ângulo de  $180^\circ$ , denominado de ângulo raso.*

Como  $r = \overleftarrow{CA} \cup \overrightarrow{AD}$ , então

$$\lambda + \beta = 180^\circ \quad (2.1)$$

$$\delta + \zeta = 180^\circ \quad (2.2)$$

Além disso  $s = \overleftarrow{EB} \cup \overrightarrow{BF}$ , logo

$$\theta + \alpha = 180^\circ \quad (2.3)$$

$$\gamma + \eta = 180^\circ \quad (2.4)$$

Também  $t = \overleftarrow{TB} \cup BA \cup \overrightarrow{AS}$ , assim

$$\delta + \lambda = 180^\circ \quad (2.5)$$

$$\zeta + \beta = 180^\circ \quad (2.6)$$

$$\theta + \gamma = 180^\circ \quad (2.7)$$

$$\eta + \alpha = 180^\circ \quad (2.8)$$

**Proposição 1.** *Se uma reta transversal intersecta duas retas paralelas, então os pares de ângulos alternos internos, alternos externos e correspondentes são iguais entre si.*

Como  $r$  é paralelo a  $s$  e do resultado obtido em (2.3),

$$\text{i) } \delta + \theta = 180^\circ = \theta + \alpha \Rightarrow \delta = \alpha$$

Por  $r // s$  e (2.2),

$$\text{ii) } \alpha + \zeta = 180^\circ = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \zeta$$

De i) e ii) mostra-se que, para retas paralelas cortadas por uma transversal, os ângulos alternos internos são, dois a dois, iguais.

Por (2.5) e (2.2),

$$\text{iii) } \delta + \lambda = 180^\circ = \delta + \zeta \Rightarrow \lambda = \zeta$$

Como  $r$  é paralelo a  $s$  e do resultado obtido em (2.8),

$$\text{iv) } \alpha + \zeta = 180^\circ = \eta + \alpha \Rightarrow \eta = \zeta$$

Por (2.3) e (2.7)

$$v) \theta + \alpha = 180^\circ = \theta + \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Por (2.1) e (2.5)

$$vi) \lambda + \beta = 180^\circ = \delta + \lambda \Rightarrow \beta = \delta$$

De i) e vi) obtém-se que  $\alpha = \beta$ , donde conclui-se pelo item v) que  $\gamma = \beta$ .

De iii) e iv) obtém-se que  $\eta = \lambda$ .

Daí, mostra-se que os ângulos alternos externos são iguais dois a dois.

Como viu-se anteriormente  $\alpha = \beta$  e  $\eta = \zeta$ . Ainda, de ii) e iii) conclui-se que  $\theta = \lambda$  e de i) e v) que  $\gamma = \delta$ . Daí mostra-se que os ângulos correspondentes são iguais dois a dois.

**Definição 5.** *Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é igual a  $180^\circ$ .*

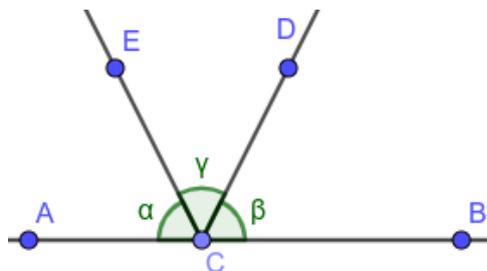
Pela definição 5 os pares de ângulos cuja soma é igual a  $180^\circ$  são denominados de ângulos suplementares, ou seja, por exemplo, o ângulo  $\theta$  é suplemento do ângulo  $\alpha$ , pois  $\theta + \alpha = 180^\circ$ .

**Definição 6.** *Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos comuns.*

Voltando a figura 24 tem-se que as semirretas opostas,  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$ , com origem em C, definem com a semirreta  $\overrightarrow{CE}$ , com origem em C, os ângulos  $\lambda$  e  $\beta$ . Diz-se nesse caso que os ângulos  $\lambda$  e  $\beta$  são adjacentes, pois são ângulos consecutivos sem pontos em comuns.

Dois ângulos são consecutivos se possuem um lado em comum, ou seja, se um lado de um coincide com o lado de outro ângulo.

Figura 25 – Ângulos adjacentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 25 os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  são ângulos adjacentes, porém  $\alpha$  e  $\beta$  não são ângulos adjacentes, pois não possuem um lado em comum.

## 2.4 Triângulos: Conceitos básicos e classificação

Apresentam-se nesta seção os conceitos básicos e as classificações do tipos de triângulos. Essa apresentação faz-se necessária, pois neste trabalho abordam-se alguns tipos de triângulos.

### 2.4.1 Conceitos

No livro Geometria, Coleção PROFMAT, MUNIZ NETO (2013) [8] introduz que:

Três pontos não colineares formam um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais pontos, diremos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo  $\triangle ABC$ .

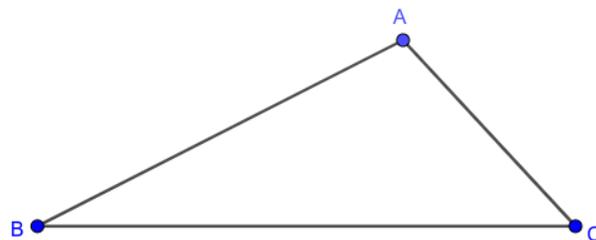
Além disso ele acrescenta:

Ainda em relação a um triângulo genérico  $ABC$ , diremos que os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  (ou seus comprimentos) são os lados do triângulo; em geral, escreveremos  $|AB| = c$ ,  $|AC| = b$  e  $|BC| = a$  para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo  $ABC$ . [8]

A partir dessa apresentação podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 7.** *Dados três pontos distintos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , não colineares, chama-se triângulo  $ABC$  à união dos segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , que denotamos por triângulo  $\triangle ABC$ .*

Figura 26 – Triângulo  $\triangle ABC$



Fonte: Elaborado pelo autor

Os elementos de um triângulo são:

- a) Vértices:  $A$ ,  $B$  e  $C$
- b) Lados: Segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$
- c) Ângulos:  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são ângulos internos

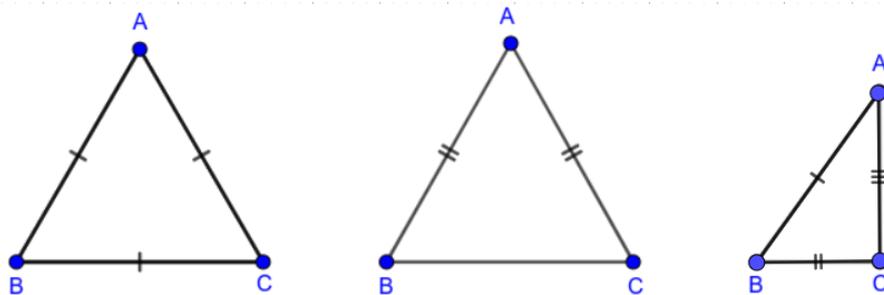
## 2.4.2 Classificação

Os triângulos podem ser classificados quanto aos comprimentos dos segmentos que o compõem ou quanto a medida dos seus ângulos internos. Quanto a classificação pelos comprimentos dos segmentos MUNIZ NETO (2013) [8] apresenta a seguinte definição:

**Definição 8.** *Um triângulo  $ABC$  é denominado:*

- (a) *Equilátero, se  $|AB| = |AC| = |BC|$ .*
- (b) *Isósceles, se ao menos dois dentre  $|AB|$ ,  $|AC|$ ,  $|BC|$  forem iguais.*
- (c) *Escaleno, se  $|AB| \neq |AC| \neq |BC|$ .*

Figura 27 – Triângulos Equilátero (esq.), Isósceles (centro), escaleno (dir.) - 1



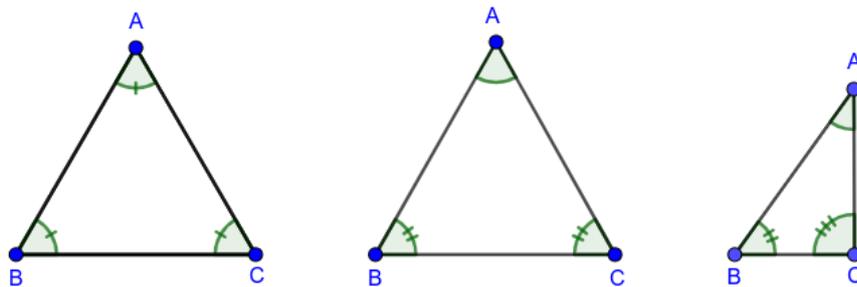
Fonte: Elaborado pelo autor

A classificação pelas medidas dos ângulos segue de modo similar a classificação pelos comprimentos dos segmentos.

**Definição 9.** *Um triângulo  $ABC$  é denominado:*

- (a) *Equilátero, se os ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  forem iguais a  $60^\circ$ .*
- (b) *Isósceles, se ao menos dois dentre  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  forem iguais.*
- (c) *Escaleno, se  $\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C}$ .*

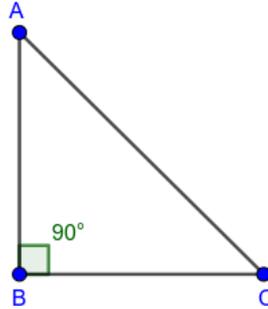
Figura 28 – Triângulos Equilátero (esq.), Isósceles (centro), escaleno (dir.) - 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, um dos triângulos mais importantes é o denominado triângulo retângulo. Chama-se de triângulo retângulo todo triângulo que possui um de seus ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ou  $\hat{C}$  igual a  $90^\circ$  (ângulo reto). Se um dos ângulos é reto, então há dois segmentos perpendiculares entre si.

Figura 29 – Triângulo retângulo



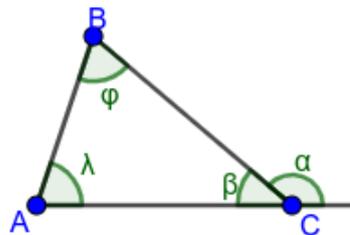
Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 29 o ângulo  $\hat{B}$  mede  $90^\circ$ , daí diz-se que  $AB$  é perpendicular a  $BC$ .

## 2.5 Ângulo externo de um triângulo

Nesta seção aborda-se como obter as medidas dos ângulos externos de um triângulo a partir das medidas dos ângulos internos desse triângulo. Entende-se como ângulo externo o ângulo formado pelo prolongamento de um dos lados do triângulo com o lado adjacente.

Figura 30 – Ângulo externo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 30 o ângulo  $\alpha$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Teorema 1.** *Se no triângulo  $\triangle ABC$  o ângulo  $\alpha$  é externo referente ao lado  $AC$  e  $\lambda$ ,  $\varphi$  e  $\beta$  forem, respectivamente, os ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , então*

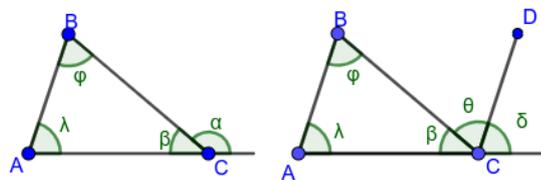
$$\alpha = \lambda + \varphi.$$

**Demonstração.** Seja  $\hat{A} = \lambda$ ,  $\hat{B} = \varphi$  e  $\hat{C} = \beta$  ângulos internos do triângulo  $\triangle ABC$  e  $\alpha$  o ângulo externo ao triângulo determinado pelo prolongamento do segmento  $AC$  e pelo segmento  $BC$ .

Traça-se por  $C$  o segmento  $CD$ , tal que  $CD$  seja paralelo a  $AB$  e divide o ângulo  $\alpha$  em dois ângulos adjacentes, que denotamos de ângulos  $\theta$  e  $\delta$ .

O ângulo  $\theta$  é formado pelos segmentos  $BC$  e  $CD$ , enquanto que o ângulo  $\delta$  é formado pelo segmento  $CD$  e a semirreta  $\overrightarrow{AC}$ .

Figura 31 – Segmento paralelo



Fonte: Elaborado pelo autor

Segue que  $\alpha = \theta + \delta$ . Como o segmento  $CD$  é paralelo ao segmento  $AB$  e o segmento  $BC$  é transversal, então, como visto a partir da Proposição 1, o ângulo  $\varphi = \theta$ . Analogamente, dado que  $CD$  é paralelo a  $AB$ , então  $\lambda = \delta$ .

*C.Q.D.*

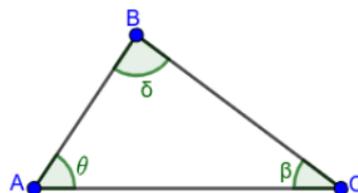
$$\alpha = \lambda + \varphi.$$

□

## 2.6 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Nesta seção aborda-se o Teorema angular de Tales.

Figura 32 – Ângulos internos do triângulo  $\triangle ABC$



Fonte: Elaborado pelo autor

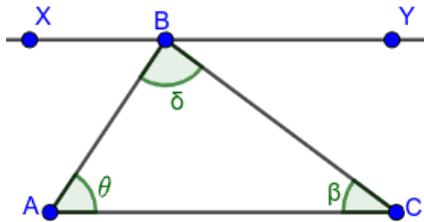
O Teorema angular de Tales indica que em um triângulo  $\triangle ABC$  a soma dos ângulos internos é igual  $180^\circ$ , ou seja  $\theta + \delta + \beta = 180^\circ$ .

**Teorema 2.** Se no triângulo  $\triangle ABC$  os ângulos  $\theta$ ,  $\delta$  e  $\beta$  forem, respectivamente os ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , então

$$\theta + \beta + \delta = 180^\circ.$$

**Demonstração.** Seja o triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overleftrightarrow{XY}$  uma reta paralela a  $AC$ , passando por  $B$ , como na figura 33.

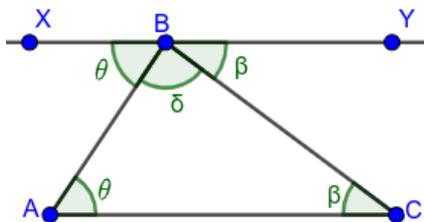
Figura 33 – Demonstração da soma do ângulo externo ao triângulo - Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $AB$  é transversal as paralelas  $AC$  e  $\overleftrightarrow{XY}$ , então  $X\hat{B}A = \theta$ . Analogamente,  $CB$  é transversal as paralelas  $AC$  e  $\overleftrightarrow{XY}$ , então  $Y\hat{B}C = \beta$ .

Figura 34 – Demonstração da soma do ângulo externo ao triângulo - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a semirreta  $\overrightarrow{XB}$  é oposto a  $\overrightarrow{BY}$ , então pela definição 4 têm-se que

$$X\hat{B}A + \delta + Y\hat{B}C = 180^\circ \quad (2.9)$$

Mas,  $X\hat{B}A = \theta$  e  $Y\hat{B}C = \beta$ .

*C.Q.D.*

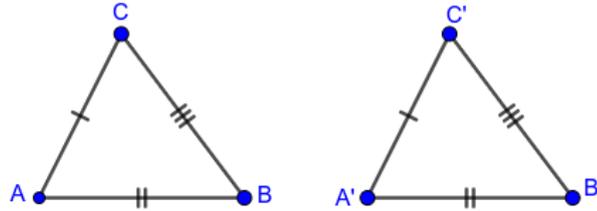
$$\theta + \delta + \beta = 180^\circ$$

□

## 2.7 Casos de congruências de triângulos

Aqui apresentam-se os três casos de congruências de triângulos. Dizer que dois triângulos são congruentes significa que os seus lados homólogos são congruentes.

Figura 35 – Triângulos congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 35 o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ , logo seus lados homólogos são congruentes, ou seja,  $|AB| = |A'B'|$ ,  $|AC| = |A'C'|$  e  $|BC| = |B'C'|$ .

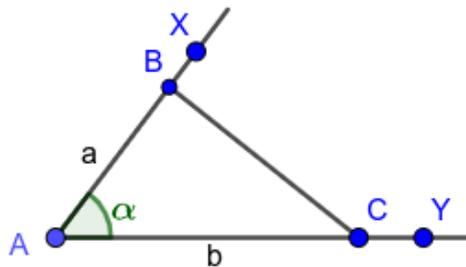
Inicia-se apresentando a demonstração do caso *LAL* a partir da abordagem realizada por MUNIZ NETO [8] no livro Geometria da Coleção PROFMAT.

**Proposição 2 (LAL).** *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

**Demonstração.** *Seja a semirreta  $\overrightarrow{AX}$ , com origem  $A$ , e a semirreta  $\overrightarrow{AY}$ , com origem em  $A$ , tal que  $\hat{A} = \alpha$ .*

- 1) Marca-se na semirreta  $\overrightarrow{AX}$  um ponto  $B$ , tal que  $|AB| = a$ .
- 2) Marca-se na semirreta  $\overrightarrow{AY}$  um ponto  $C$ , tal que  $|AC| = b$ .
- 3) Unindo o ponto  $B$  ao ponto  $C$  obtém-se o triângulo  $\triangle ABC$ .

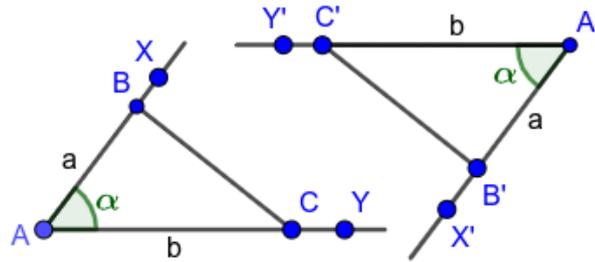
Figura 36 – Construção do triângulo  $\triangle ABC$



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise dos passos da construção nos permite concluir que determinando outra posição para o vértice  $A$  e outra direção para o ângulo  $\widehat{X\hat{A}Y} = \alpha$ , a construção do triângulo  $\triangle ABC$  continua determinada e obtém-se intuitivamente um triângulo congruente ao primeiro.

Figura 37 – Demonstração do caso  $LAL$



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, o caso  $LAL$  garante a congruência do triângulo  $\triangle ABC$  ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

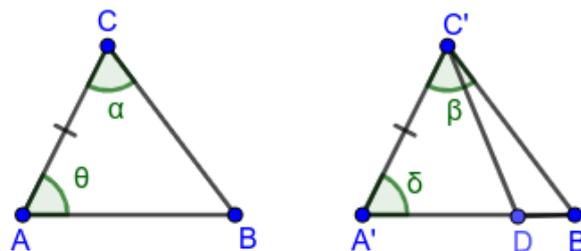
**Proposição 3 (ALA).** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

**Demonstração.** *Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos tais que no triângulo  $\triangle ABC$  o lado  $AC$ , compreendido entre os ângulos  $\alpha$  e  $\theta$ , seja congruente ao lado  $A'C'$ , do triângulo  $\triangle A'B'C'$ , que está compreendido entre os ângulos  $\beta$  e  $\theta$ . Seja ainda  $\alpha = \beta$  e  $\theta = \delta$  e  $D$  um ponto da semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$ , de tal modo que  $|AB| = |A'D|$ .*

Há dois casos a considerar, ou  $A'B' = A'D \cup DB'$  ou  $A'D = A'B' \cup B'D$ .

1º caso:  $A'B' = A'D \cup DB'$

Figura 38 – Demonstração para o 1º caso



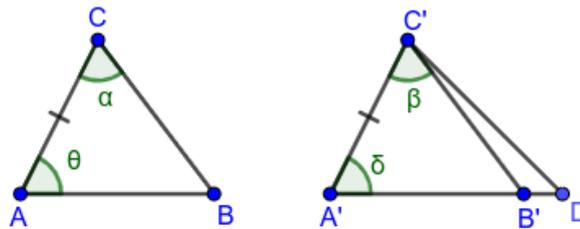
Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $|AC| = |A'C'|$ ,  $\theta = \delta$  e  $|AB| = |A'D|$ , então, pelo caso de congruência  $LAL$ , o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ . Logo  $\alpha = \widehat{A'C'D}$ , mas por hipótese  $\alpha = \beta$ , assim  $\beta = \widehat{A'C'D}$ , então os segmentos  $DC'$  e  $B'C'$  coincidem.

Daí, os pontos  $D$  e  $B'$  coincidem e conclui-se que o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ . Como o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ , então o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

2º caso:  $A'D = A'B' \cup B'D$

Figura 39 – Demonstração para o 2º caso



Fonte: Elaborado pelo autor

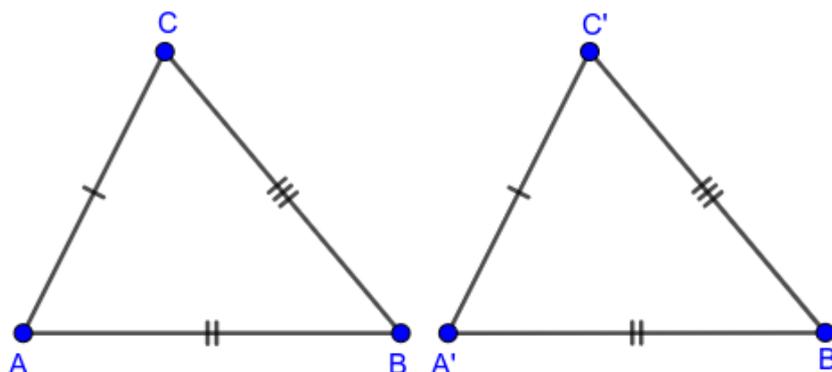
Analogamente ao caso anterior, como  $|AC| = |A'C'|$ ,  $\theta = \delta$  e  $|AB| = |A'D|$ , então, pelo caso de congruência  $LAL$ , o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ . Logo  $\alpha = \widehat{A'C'D}$ , mas por hipótese  $\alpha = \beta$ , assim  $\beta = \widehat{A'C'D}$ , então os segmentos  $DC'$  e  $B'C'$  coincidem.

Daí, os pontos  $D$  e  $B'$  coincidem e conclui-se que o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ . Como o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'DC'$ , então o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

Portanto, no dois casos conclui-se que o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

**Proposição 4 (LLL).** *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

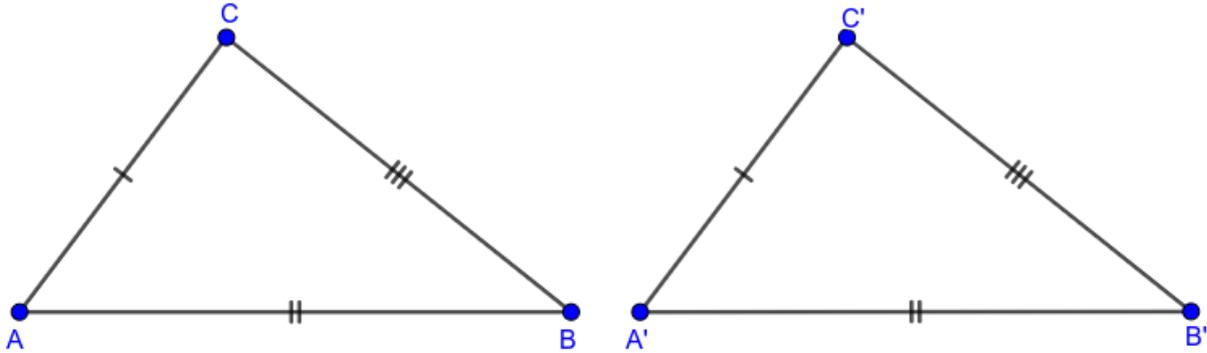
Figura 40 – Caso de congruência  $LLL$



Fonte: Elaborado pelo autor

**Demonstração.** Seja os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que o segmento  $|AC| = |A'C'|$ ,  $|BC| = |B'C'|$  e  $|AB| = |A'B'|$ .

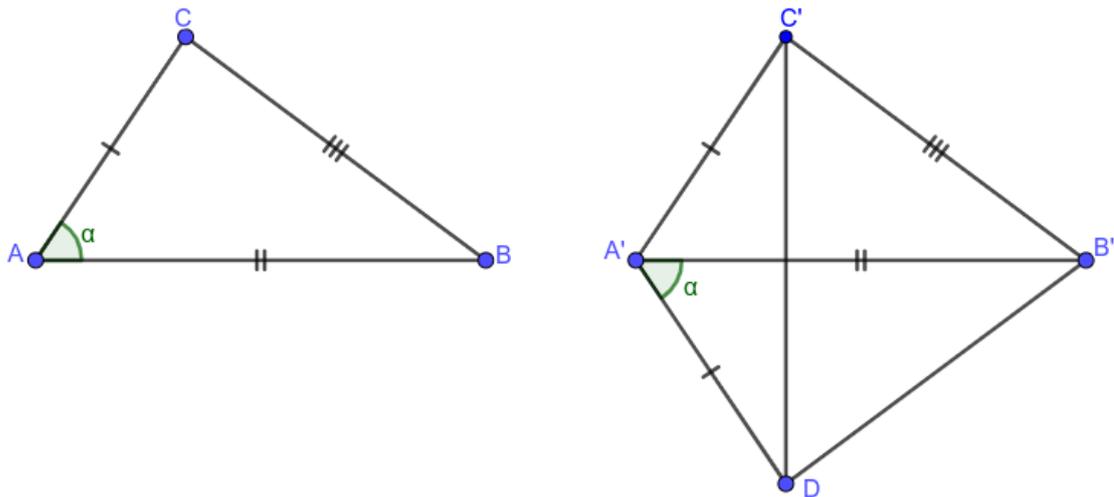
Figura 41 – Triângulos de lados congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$ , no semiplano oposto ao que contém  $C'$ , definimos um ponto  $D$  tal que  $|AC| = |A'D|$  e  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'D} = \alpha$ . Obtém-se também, unindo  $D$  a  $B'$ , o segmento  $DB'$ .

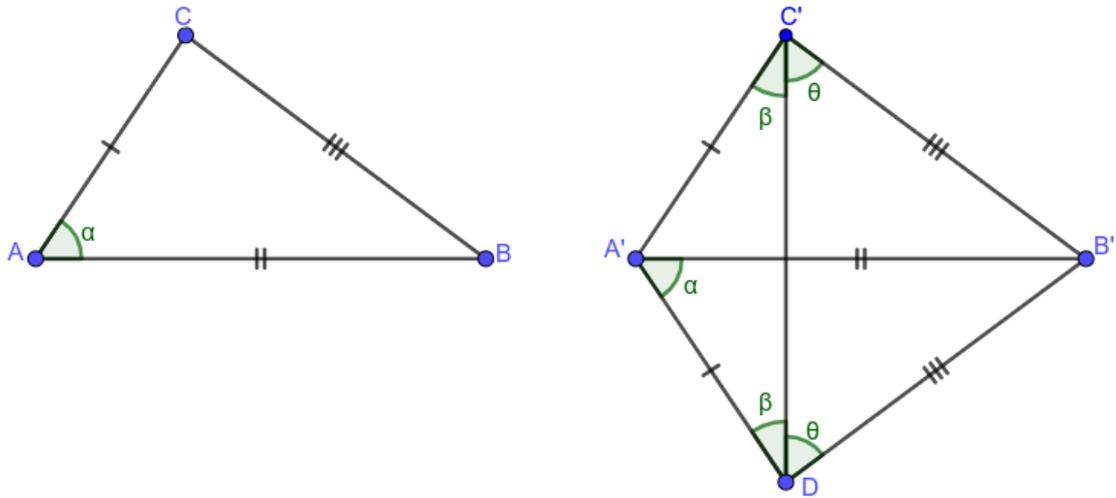
Figura 42 – Demonstração da congruência  $LLL$



Fonte: Elaborado pelo autor

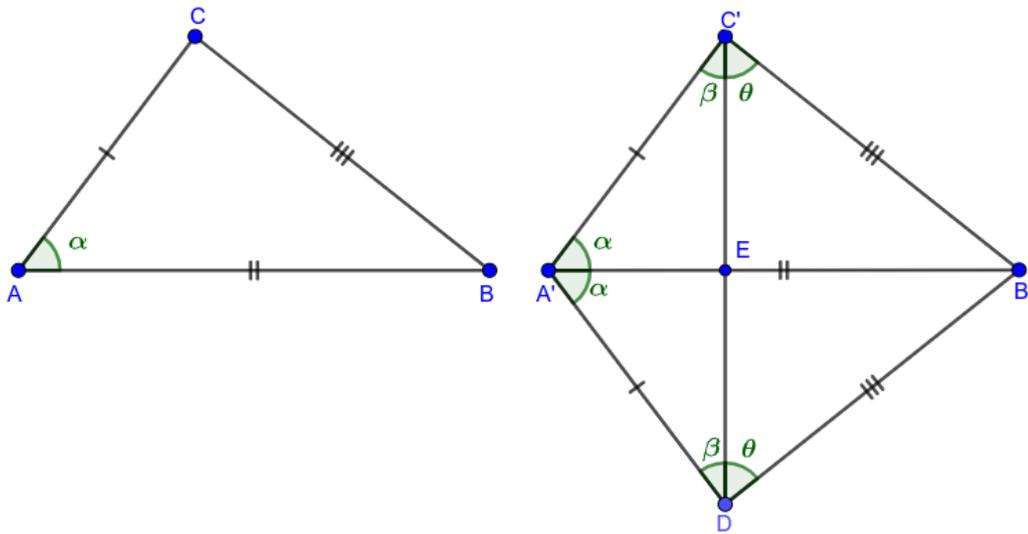
Pelo caso  $LAL$ , o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'D$ . Como  $|AC| = |A'C'|$ , então  $|A'C'| = |A'D|$  e ainda  $|BC| = |B'D|$ , então  $|B'C'| = |B'D|$ .

O triângulo  $\triangle A'C'D$  é isósceles, dado que o lado  $|A'C'| = |A'D|$ , logo tem-se  $\widehat{A'DC'} = \widehat{A'C'D} = \beta$ . Analogamente, o triângulo  $\triangle B'C'D$  é isósceles, dado que o lado  $|B'C'| = |B'D|$ , logo  $\widehat{B'DC'} = \widehat{B'C'D} = \theta$

Figura 43 – Triângulos isósceles  $\triangle A'DC'$  e  $\triangle B'C'D$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Veja que o ângulo  $A'\widehat{D}B' = A'\widehat{C}'B' = \beta + \theta$ , logo pelo caso *LAL* conclui-se que o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'D$ . Daí, conclui-se que o ângulo  $B'\widehat{A}'C' = B\widehat{A}C = \alpha$ .

Figura 44 – Prova da congruência *LLL*

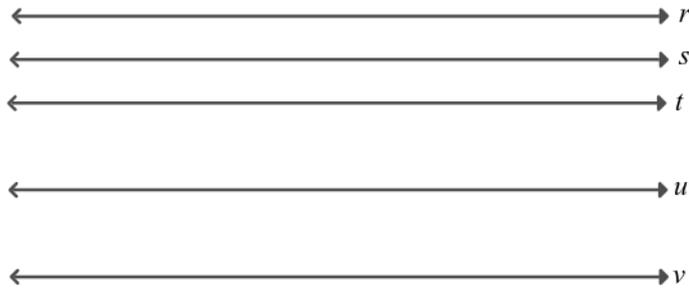
Fonte: Elaborado pelo autor

Como o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'D$ , então conclui-se que  $A\widehat{C}B = A'\widehat{D}B' = A'\widehat{C}'B'$ . Assim, sendo  $|AC| = |A'C'|$  e os ângulos compreendidos entre os segmentos serem  $\alpha$  e  $A\widehat{C}B = A'\widehat{C}'B'$ , então, conclui-se pelo caso *ALA* que o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

## 2.8 Famílias de retas paralelas

Nesta seção considera-se apenas retas paralelas e distintas. Três ou mais retas paralelas constituem uma família de retas paralelas entre si, veja a figura 45.

Figura 45 – Família de retas paralelas



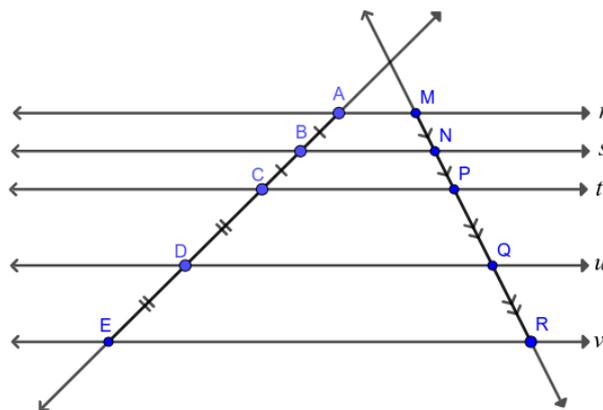
Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura 46 a família de retas paralelas  $r, s, t, u$  e  $v$  é cortada por uma transversal, que define sobre as paralelas os pontos de interseção  $A, B, C, D$  e  $E$ , tal que  $|AB| = |BC|$  e  $|CD| = |DE|$ .

Traça-se uma outra reta transversal que intersecta a família de retas paralelas, obtém-se os pontos de interseção  $M, N, P, Q$  e  $R$  que definem os segmentos  $MN, NP, PQ$  e  $QR$ .

Demonstrará-se que se a família de retas paralelas define segmentos iguais em uma transversal, então também definirá segmentos iguais em outra reta transversal, ou seja, que o segmento  $|MN| = |NP|$  e  $|PQ| = |QR|$ .

Figura 46 – Famílias de retas paralelas cortada por duas transversais



Fonte: Elaborado pelo autor

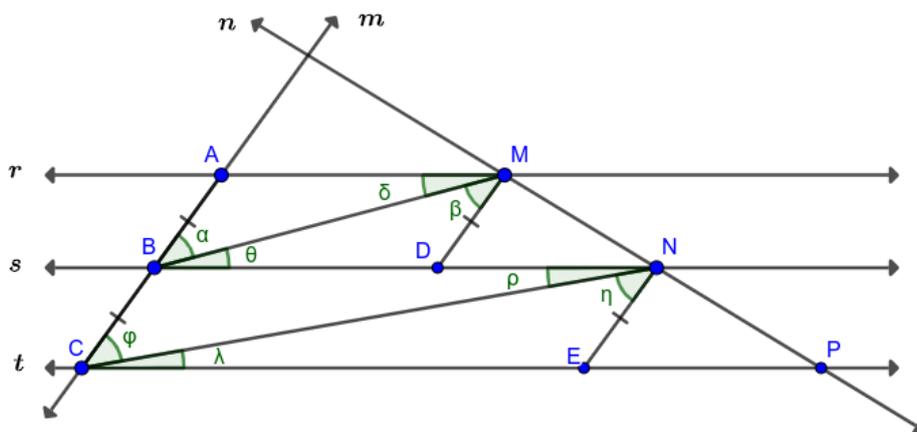
**Teorema 3.** *Uma família de retas paralelas que determina segmentos iguais em uma reta transversal  $m$ , determinará também segmentos iguais em uma reta transversal  $n$ .*

**Demonstração.** Considere as retas  $r, s$  e  $t$ , mutuamente paralelas, com  $m$  e  $n$  retas transversais, de tal modo que  $A, B, e C \in m$  com  $|AB| = |BC|$  e  $M, N$  e  $P \in n$ .

Conforme a figura 47 segue:

- 1) Por  $M$  traçou-se um segmento paralelo a reta  $m$  que intersecta a reta  $s$  em  $D$ .
- 2) Por  $N$  traçou-se um segmento paralelo a reta  $m$  que intersecta a reta  $t$  em  $E$ .
- 3) Traçou-se o segmento  $BM$ , como  $BM$  é transversal as retas paralelas  $r$  e  $s$ , então  $\theta = \delta$  e  $\alpha = \beta$ .
- 4) Pela igualdade obtida no item 3) e sendo  $BM$  o lado dos triângulos  $\triangle ABM$  e  $\triangle BDM$ , então o  $\triangle ABM$  é congruente ao  $\triangle BDM$  pelo caso  $ALA$ . Assim, obtém-se que  $|AB| = |MD|$ .
- 5) Traça-se o segmento  $CN$ , transversal as retas  $s$  e  $t$ , analogamente aos passos anteriores conclui-se que  $\varphi = \eta$  e  $\lambda = \rho$ . Sendo  $CN$  o lado dos triângulos  $\triangle BCN$  e  $\triangle CNE$ , então o  $\triangle BCN$  é congruente ao  $\triangle CNE$  pelo caso  $ALA$ . Daí conclui-se que  $|BC| = |NE|$ .
- 6) Como  $|AB| = |BC|$ , então conclui-se que  $|AB| = |BC| = |MD| = |NE|$ .

Figura 47 – Retas transversais as paralelas

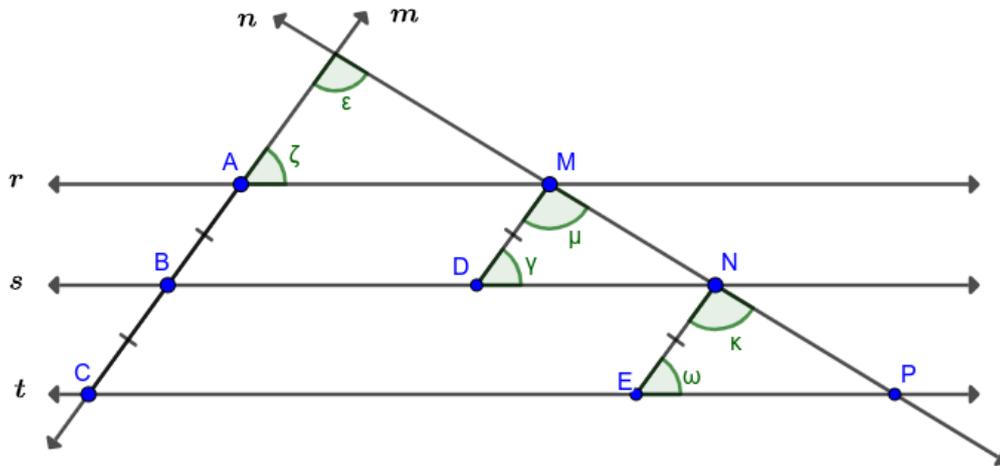


Fonte: Elaborado pelo autor

- 7) Conforme a Figura 48 a reta  $m$  é paralela as retas que contém  $MD$  e  $NE$ , respectivamente. Como a reta  $n$  é transversal as paralelas, então, pela Proposição 1,  $\varepsilon = \mu = \kappa$ . Analogamente, como a reta  $m$  é transversal as paralelas  $r, s$  e  $t$ , então, pela Proposição 1,  $\zeta = \widehat{ABD} = \widehat{BCE}$ . Pelo passo 3) conclui-se que  $\widehat{ABD} = \widehat{AMD}$  e  $\widehat{BCE} = \widehat{BNE}$ . Pela Proposição 1,  $\gamma = \widehat{AMD}$  e  $\omega = \widehat{BNE}$ , logo  $\zeta = \gamma = \omega$ .

- 8) Como  $|MD| = |NE|$ ,  $\mu = \kappa$  e  $\gamma = \omega$ , então pelo caso de congruência  $ALA$ , o triângulo  $\triangle DMN$  é congruente ao triângulo  $\triangle ENP$ . Portanto, conclui-se que  $|MN| = |NP|$

Figura 48 – Segmentos congruentes



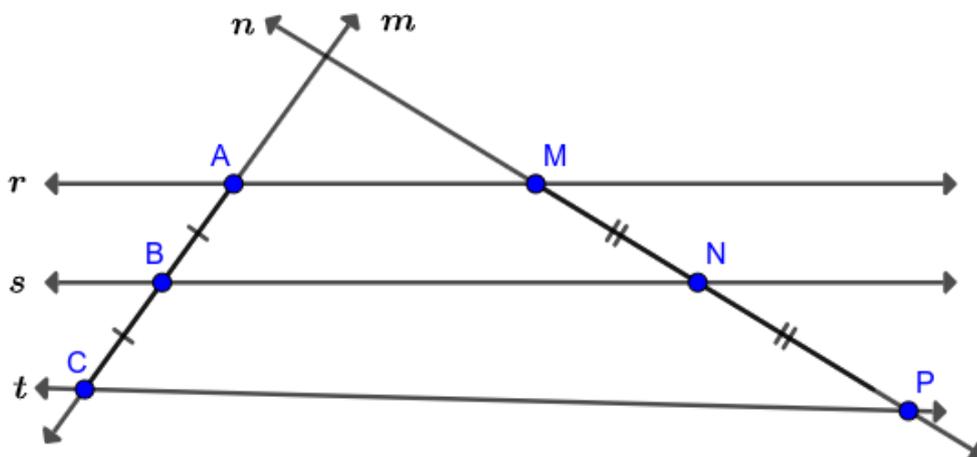
Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir temos a recíproca do Teorema 3.

**Teorema 4.** Se nas retas  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $|AB| = |BC|$  e  $|MN| = |NP|$ , então as retas  $r = \overleftrightarrow{AM}$ ,  $s = \overleftrightarrow{BN}$  e  $t = \overleftrightarrow{CP}$  são mutuamente paralelas.

**Demonstração.** Sejam os pontos  $A, B$  e  $C$  pertencentes a reta  $m$  e  $M, N$  e  $P$  a reta  $n$ , seja ainda  $r = \overleftrightarrow{AM}$  e  $s = \overleftrightarrow{BN}$ , mutuamente paralelas,  $|AB| = |BC|$  e  $|MN| = |NP|$ , mas suponha que  $t = \overleftrightarrow{CP}$  não seja paralela as retas  $r$  e  $s$ , conforme a figura 49.

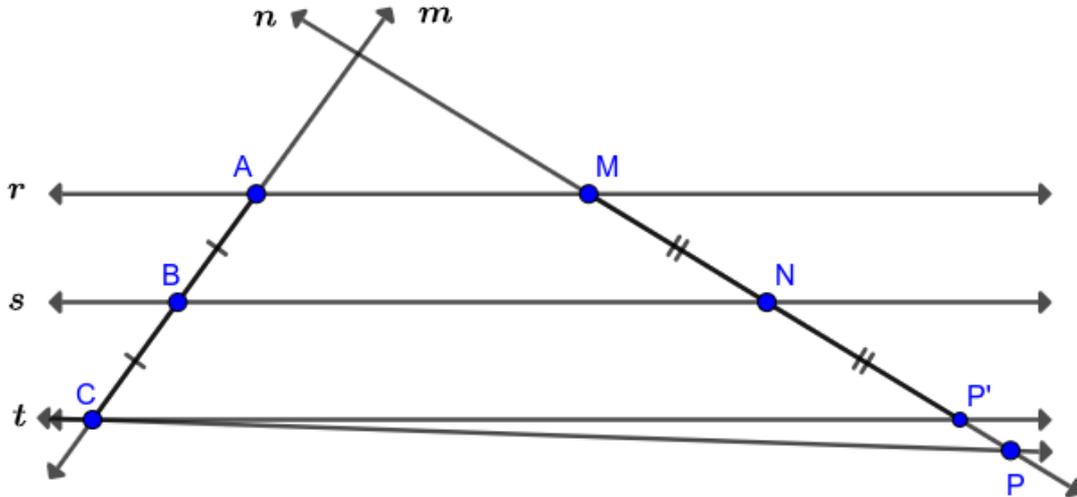
Figura 49 – recíproca do Teorema 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Traça-se por  $C$  uma reta paralela  $s$  que intersecta a reta  $n$  em  $P'$ , conforme a figura 50.

Figura 50 – Demonstração do recíproca do Teorema 3



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o Teorema 3, como as retas  $r$ ,  $s$  e  $\overleftrightarrow{CP'}$  são uma família de retas paralelas e  $|AB| = |BC|$ , então  $|MN| = |NP'|$ .

Por hipótese  $|MN| = |NP|$ , mas, de acordo com o Teorema 3,  $|MN| = |NP'|$ , logo:

$$|NP| = |NP'|.$$

No entanto,  $NP = NP' \cup P'P$ . Fazendo,  $|NP'| = x$ ,  $|P'P| = y$ , então:

$$x + y = x$$

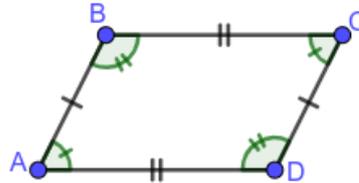
O que só é verdade se  $y = 0$ , o que é absurdo, pois isso implica que  $P$  e  $P'$  são coincidentes e a reta  $t$  é paralela as retas  $r$  e  $s$ , mas por hipótese  $t$  não é paralela a  $r$  e  $s$ . Portanto resta concluir que se  $|AB| = |BC|$  e  $|MN| = |NP|$ , então  $t$  é paralela a  $r$  e  $s$ .

### 2.8.1 Paralelogramo

Na Seção 2.8 demonstrou-se o Teorema 3. Pelo item 1),  $AB \subset m$  e  $MD$  é paralelo a  $m$ , então  $AB$  é paralelo a  $MD$ . Pela congruência obtida no item 4), viu-se que  $|AB| = |MD|$ . Ainda pelo item 4), sendo o triângulo  $\triangle ABM$  congruente ao triângulo  $\triangle BDM$ , conclui-se que  $|AM| = |BD|$ .

Segue ainda que  $AM \subset r$  e  $BD \subset s$  e como  $r$  é paralelo a  $s$ , então  $AM$  é paralelo a  $BD$ . A partir dessa abordagem encontrou-se o quadrilátero  $ABDM$  que tem lados opostos paralelos.

Figura 51 – Paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

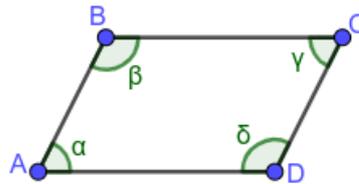
**Definição 10.** Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos

Como abordado anteriormente, mostrou-se que  $AM$  é paralelo a  $BD$  e  $AB$  é paralelo a  $MD$ , logo conclui-se que o quadrilátero  $ABDM$  é um paralelogramo pela definição.

**Proposição 5.** Um quadrilátero é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.

**Demonstração.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero, tal que  $AB$  é paralelo a  $DC$  e  $AD$  paralelo a  $BC$ , mas que  $\alpha \neq \gamma$  e  $\beta \neq \delta$ , conforme figura 52.

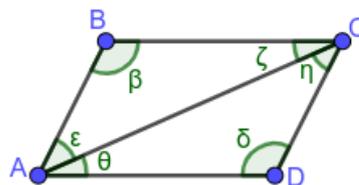
Figura 52 – Demonstração da proposição 5 - parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Unindo o vértice  $A$  ao  $C$  obtém-se o segmento  $AC$ .

Figura 53 – Demonstração da Proposição 5 - parte 2

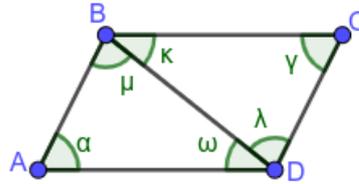


Fonte: Elaborado pelo autor

O segmento  $AC$  é transversal as paralelas  $AB$  e  $DC$  e as paralelas  $AD$  e  $BC$ , logo  $\theta = \zeta$  e  $\varepsilon = \eta$ , assim  $\theta + \varepsilon = \zeta + \eta$ . Segue que  $\alpha = \theta + \varepsilon$  e  $\gamma = \zeta + \eta$ , logo  $\alpha = \gamma$ .

Unindo a vértice  $B$  a  $D$  obtém-se o segmento  $BD$ .

Figura 54 – Demonstração da Proposição 5 - parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

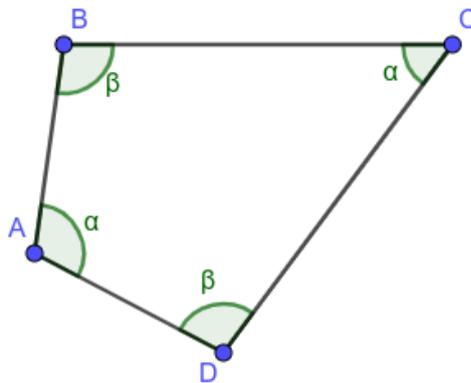
O segmento  $BD$  é transversal as paralelas  $AB$  e  $DC$  e as paralelas  $AD$  e  $BC$ , logo  $\mu = \lambda$  e  $\omega = \kappa$ , assim  $\omega + \lambda = \mu + \kappa$ . Segue que  $\delta = \omega + \lambda$  e  $\beta = \mu + \kappa$ , logo  $\delta = \beta$ .

Por hipótese os ângulos opostos são diferentes, logo cai-se em uma contradição, pois  $\alpha = \gamma$  e  $\beta = \delta$ . Portanto, se os lados opostos forem paralelos, então os ângulos opostos são iguais.

Para a recíproca precisamos mostrar que se em um quadrilátero os ângulos opostos são iguais, então os lados opostos são paralelos.

**Demonstração.** *Seja  $ABCD$  um quadrilátero, tal que os ângulos opostos são iguais, mas suponha que os lados opostos não são paralelos, conforme a figura 55.*

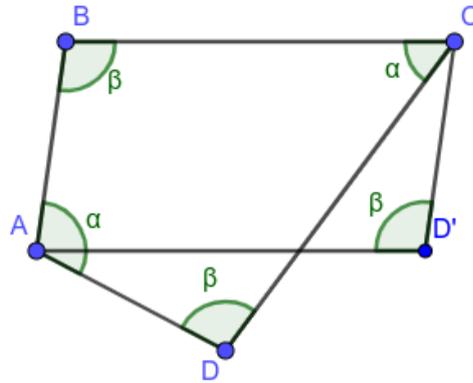
Figura 55 – recíproca da Proposição 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Traçamos por  $A$  um segmento paralelo a  $BC$  que encontra em  $D'$  um segmento paralelo a  $AB$  traçado a partir de  $C$ , assim  $AD'$  é paralelo a  $BC$  e  $AB$  é paralelo a  $D'C$ . Pela proposição 5, como o quadrilátero  $ABCD'$  tem lados paralelos, então  $\widehat{ABC} = \widehat{AD'C}$  e  $\widehat{BAD'} = \widehat{BCD'}$ , conforme a figura 56.

Figura 56 – Demonstração da recíproca da Proposição 5 - Parte 1

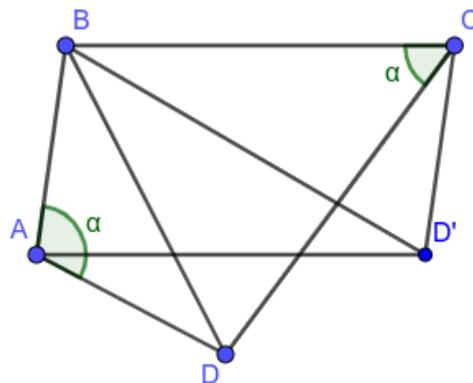


Fonte: Elaborado pelo autor

Seja  $\widehat{B\hat{A}D'} = \theta$ . Ainda pela proposição 5, o ângulo  $\widehat{B\hat{A}D'} = \widehat{B\hat{C}D'}$ . Assim,  $\widehat{B\hat{A}D'} = \widehat{B\hat{C}D'} = \theta$ .

Unindo  $B$  a  $D$  e  $B$  a  $D'$ , conforme figura 57, obtém-se no quadrilátero  $ABCD$  os triângulos  $\triangle ADB$  e  $\triangle BCD$  e no quadrilátero  $ABCD'$  os triângulos  $\triangle AD'B$  e  $\triangle BCD'$ .

Figura 57 – Demonstração da recíproca da Proposição 5 - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

A soma dos ângulos internos do quadrilátero  $ABCD$  é igual a soma dos ângulos internos dos dois triângulos determinados pelo segmento  $BD$ . Logo,

$$\alpha + \widehat{A\hat{B}D} + \widehat{A\hat{D}B} + \alpha + \widehat{C\hat{B}D} + \widehat{C\hat{D}B} = 180^\circ + 180^\circ$$

Mas,  $\beta = \widehat{A\hat{B}D} + \widehat{C\hat{B}D} = \widehat{A\hat{D}B} + \widehat{C\hat{D}B}$ . Assim,

$$2\alpha + 2\beta = 360 \quad (2.10)$$

Analogamente, a soma dos ângulos internos do quadrilátero  $ABCD'$  é igual a soma dos ângulos internos dos dois triângulos determinados pelo segmento  $BD'$ . Logo,

$$\theta + \widehat{ABD'} + \widehat{AD'B} + \theta + \widehat{CBD'} + \widehat{CD'B} = 180^\circ + 180^\circ$$

Mas,  $\beta = \widehat{ABD'} + \widehat{CBD'} = \widehat{AD'B} + \widehat{CD'B}$ . Assim,

$$2\theta + 2\beta = 360 \quad (2.11)$$

Fazendo (2.10) = (2.11) obtém-se  $\alpha = \theta$ .

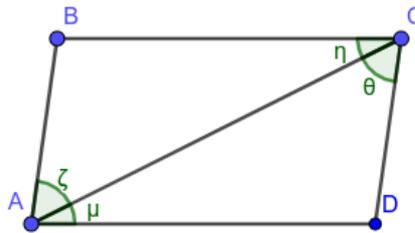
Mas se  $\alpha = \theta$ , então o segmento  $CD$  coincide com  $CD'$  e o segmento  $AD$  coincide com  $AD'$ , o que é absurdo, pois nesse caso os lados opostos são paralelos, o que contradiz a hipótese. Portanto, resta concluir que se os ângulos opostos são iguais, então no quadrilátero  $ABCD$  o segmento  $AD$  é paralelo a  $BC$  e  $AB$  é paralelo a  $DC$ .

**Proposição 6.** *Um quadrilátero é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

**Demonstração.** *Seja  $ABCD$  um quadrilátero, tal que  $AB$  é paralelo a  $DC$  e  $AD$  paralelo a  $BC$ .*

Os lados opostos do quadrilátero são paralelos, então por definição  $ABCD$  é um paralelogramo. Unindo  $A$  ao vértice  $C$  obtém-se  $AC$ , conforme a figura 58.

Figura 58 – Demonstração da Proposição 6



Fonte: Elaborado pelo autor

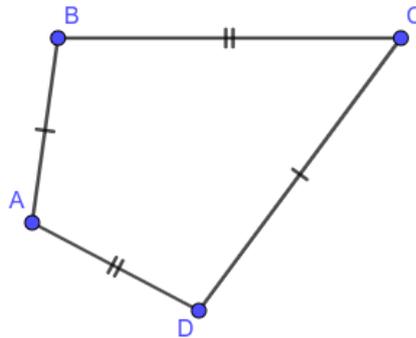
Como  $AC$  é transversal as paralelas  $AD$  e  $BC$  e também as paralelas  $AB$  e  $DC$ , então  $\mu = \eta$  e  $\zeta = \theta$ . O segmento  $AC$  está compreendido entre os ângulos dados, logo pelo caso de congruência  $ALA$  o triângulo  $\triangle ABC$  é congruente ao triângulo  $\triangle ADC$ .

Da congruência obtida conclui-se que  $|AB| = |DC|$  e  $|AD| = |BC|$ , portanto os lados opostos são iguais.

Para a recíproca mostraremos que se o quadrilátero tem lados opostos iguais então ele é um paralelogramo.

**Demonstração.** *Seja  $ABCD$  um quadrilátero de lados opostos iguais, tal que  $AB$  não é paralelo a  $DC$  e  $AD$  não é paralelo a  $BC$ , conforme a figura 59.*

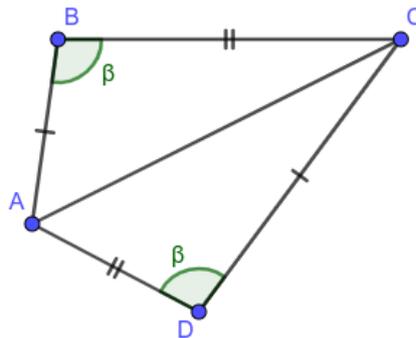
Figura 59 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Unindo o vértice  $A$  ao  $C$  obtém-se os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADC$ , congruentes pelo caso  $LLL$ , donde-se conclui que  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \beta$

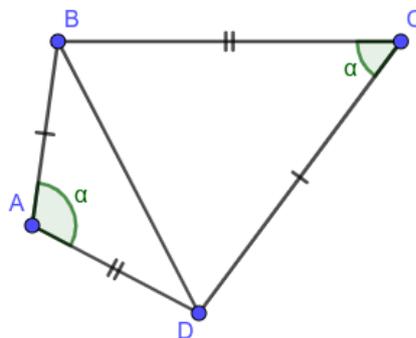
Figura 60 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Unido o vértice  $B$  ao  $D$  obtém-se os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle CDB$ , congruentes pelo caso de congruência  $LLL$ , donde-se conclui que  $\widehat{BAC} = \widehat{BCD} = \alpha$ .

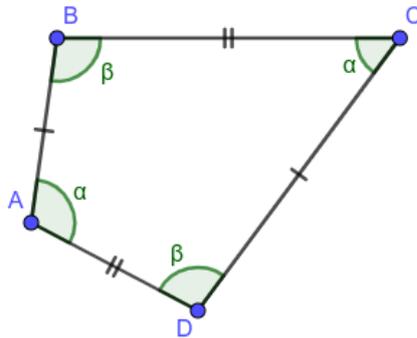
Figura 61 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, mostra-se que os ângulos opostos do quadrilátero  $ABCD$  são iguais.

Figura 62 – Demonstração da recíproca da proposição 6 - Parte 4



Fonte: Elaborado pelo autor

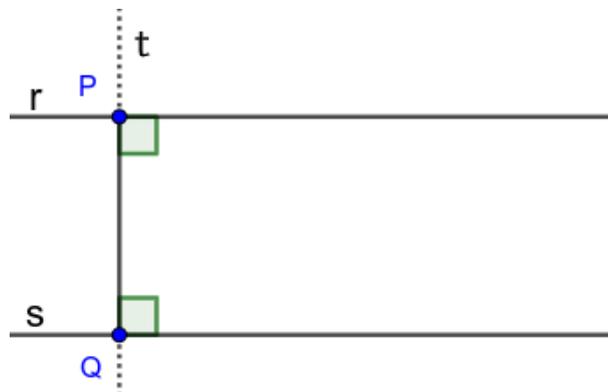
Pela proposição 5, um quadrilátero é um paralelogramo se os ângulos opostos forem iguais, mas por hipótese os lados opostos do quadrilátero não são paralelos, assim cai-se em uma contradição. Portanto, resta concluir que  $ABCD$  é um paralelogramo.

No Livro Geometria Plana, Volume 9 da Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, DOLCE e POMPEO (2013, pág. 87) [9] estabelecem que “A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta”. Daí segue a proposição:

**Proposição 7.** *Se duas retas  $r$  e  $s$ , distintas, são paralelas, a distância entre  $r$  e  $s$  é o comprimento de qualquer segmento de reta  $PQ$  tal que  $P \in r$ ,  $Q \in s$  e  $PQ$  é perpendicular a  $r$  e  $s$ .*

**Demonstração.** *Seja  $t$  uma reta transversal as retas  $r$  e  $s$ , distintas e mutuamente paralelas, tais que  $P$  e  $Q$  pertencem, respectivamente, a interseção de  $t$  com  $r$  e  $s$ , e  $PQ$  é perpendicular a  $r$  e  $s$ .*

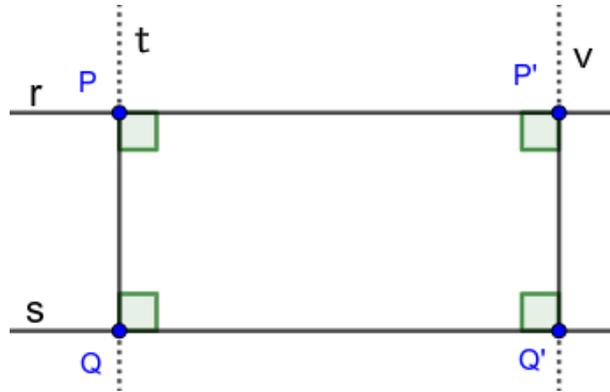
Figura 63 – Distância entre retas paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor

Determina-se uma reta  $v$  paralela a  $t$ , transversal a  $r$  e  $s$ , intersectando-as, respectivamente, em  $P'$  e  $Q'$ . Como  $t$  é paralela a  $v$ , então  $P'Q'$  é perpendicular a  $r$  e  $s$ .

Figura 64 – Demonstração da distância entre retas paralelas

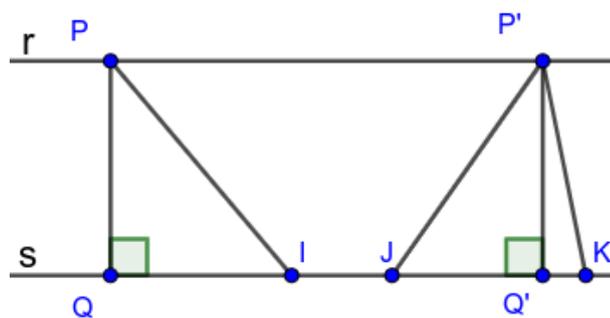


Fonte: Elaborado pelo autor

Como os ângulos opostos são iguais, então pela Proposição 5 o quadrilátero  $PQQ'P'$  é um paralelogramo, logo  $|PQ| = |P'Q'|$ .

Essa proposição nos permite em particular, traçar dois triângulos com alturas,  $PQ$  e  $P'Q'$ , iguais.

Figura 65 – Triângulos com alturas iguais

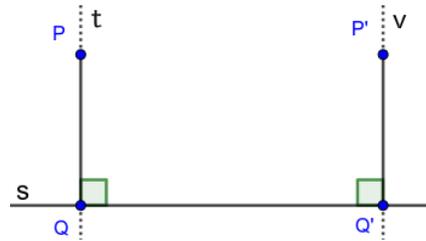


Fonte: Elaborado pelo autor

**Proposição 8.** *Se a reta  $s$  intersecta as retas paralelas  $t$  e  $v$ , respectivamente, em  $Q$  e  $Q'$ , com  $s$  perpendicular a  $t$  e  $v$ , e tomando-se dois pontos  $P$  e  $P'$ , respectivamente, em  $t$  e  $v$ , tal que  $|PQ| = |P'Q'|$ , então a reta  $r$  que passa por  $P$  e  $P'$  é paralela a  $s$ .*

**Demonstração.** *Seja  $s$  uma reta que contém os pontos, distintos,  $Q$  e  $Q'$ , tal que a reta  $t$  que passa por  $Q$  seja paralela a reta  $v$  que passa por  $Q'$ , com  $s$  perpendicular a  $t$  e  $v$ . Em  $t$  e  $v$ , respectivamente, define-se os pontos  $P$  e  $P'$ , tal que  $|PQ| = |P'Q'|$ .*

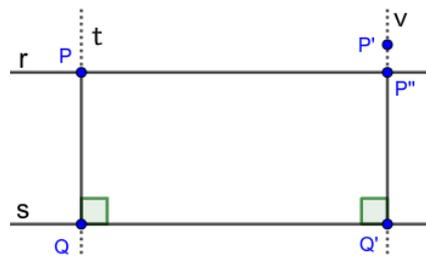
Figura 66 – Prova da recíproca da Proposição 7 - Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Suponha que por  $P$  passe uma reta  $r$ , paralela a  $s$ , mas que  $P'$  não pertença a  $r$ . Seja  $P''$  a interseção entre  $r$  e  $v$ , com  $P'Q' = P'P'' \cup P''Q'$ .

Figura 67 – Prova da recíproca da Proposição 7 - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Pela proposição 8 se a reta  $r$  é paralela a reta  $s$ , então  $|PQ| = |P''Q'|$ . Por hipótese  $|PQ| = |P'Q'|$ , logo  $|P'Q'| = |P''Q'|$ . Como  $P'Q' = P'P'' \cup P''Q'$ , então fazendo  $|P''Q'| = x$  e  $|P'P''| = y$ , então:

$$x + y = x$$

O que só é verdade se  $y = 0$ , logo  $P'P''$  tem comprimento nulo, assim  $P' = P''$ , um absurdo, pois por hipótese  $P'$  não pertence a  $r$ . Portanto, resta concluir que se  $|PQ| = |P'Q'|$ , então a reta  $r$  é paralela a  $s$ .

**Proposição 9.** *Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.*

**Demonstração.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  as respectivas áreas dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  tenham ambos altura de comprimento  $h$  relativa as bases  $BC$  e  $B'C'$ , de comprimentos, respectivamente,  $a$  e  $b$ .*

A área ( $S$ ) de um triângulo corresponde a:

$$S = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}$$

Logo dividindo  $S_1$  por  $S_2$  obtém-se.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}}$$

*C.Q.D.*

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

□

**Corolário 1.** *Se as medidas da base e altura de dois triângulos são iguais, então suas áreas são iguais.*

Seja  $S_1$  a área do triângulo  $\triangle ABC$  e  $S_2$  a área do triângulo  $\triangle A'B'C'$ , tais que as bases  $AB$  e  $A'B'$  tenham ambos comprimentos iguais a  $b$  e as alturas relativas as respectivas bases tenham comprimentos iguais a  $h$ , então

$$S_1 = S_2 = \frac{b \cdot h}{2}.$$

## 2.9 Teorema de Pitágoras: Breve abordagem

Ao longo desse trabalho utiliza-se o Teorema de Pitágoras<sup>1</sup> para provar alguma relação, como a de incomensurabilidade de segmentos, logo aborda-se nessa seção a demonstração do Teorema de Pitágoras e a sua recíproca.

Em um triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $B$ , denominamos de hipotenusa a diagonal  $AC$  e de catetos os segmentos  $AB$  e  $BC$ . Em todo triângulo retângulo vale o Teorema de Pitágoras, segundo o qual:

**Teorema 5.** *Em um triângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $B$ , de catetos  $|AB| = a$  e  $|BC| = b$  e hipotenusa  $|AC| = c$  vale a seguinte relação*

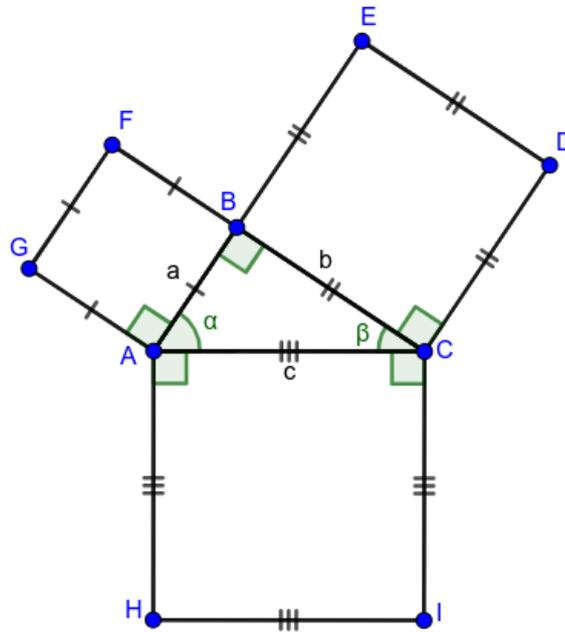
$$c^2 = a^2 + b^2$$

**Demonstração.** *Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $B$ , de catetos  $|AB| = a$  e  $|BC| = b$  e hipotenusa  $|AC| = c$ , com  $B\hat{A}C = \alpha$  e  $B\hat{C}A = \beta$ .*

Determina-se através dos lados do triângulos três quadrados de lados  $a, b$  e  $c$  (conforme a figura 68).

<sup>1</sup> Segundo Eduardo Wagner (2015), Pitágoras (c.569 – c.480 a.C.) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes tinha nascido Tales. Disponível em <https://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf>, acesso em 27 dez. 2023

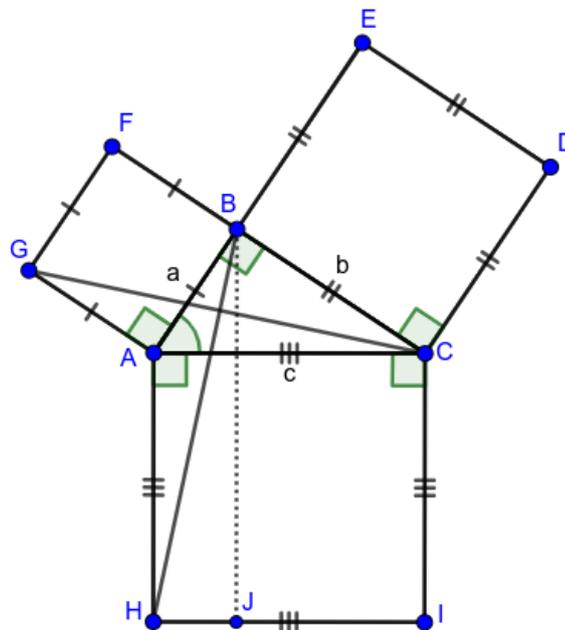
Figura 68 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Traça-se a partir de  $B$  um segmento paralelo ao lado  $AH$  do quadrado  $AHIC$  até  $J$  em  $HI$ .

Figura 69 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 2

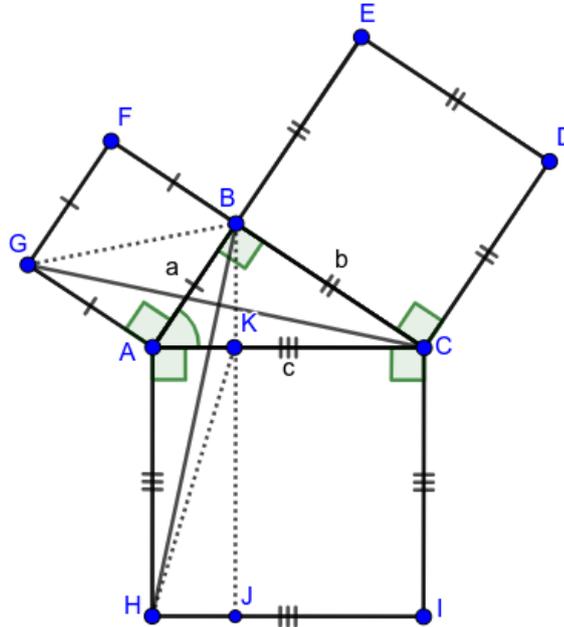


Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo caso de  $LAL$ , o triângulo  $\triangle BAH$  é congruente ao triângulo  $\triangle CAG$ , logo a área dos triângulos são iguais. Define-se o ponto  $K$  na interseção de  $AC$  com  $BJ$  e

obtém-se o segmento  $HK$ .

Figura 70 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Pela proposição 7, como  $BJ$  é paralelo a  $AH$ , então os triângulos  $\triangle BAH$  e  $\triangle AHK$  tem alturas iguais relativa ao lado  $AH$ , base de ambos os triângulos, assim, pelo corolário 1, triângulos que tem altura e base de mesmo comprimento terão áreas iguais. Daí conclui-se que, como a área do  $\triangle BAH$  é igual a área do  $\triangle CAG$ , logo a área do triângulo  $\triangle CAG$  é igual a área do  $\triangle AHK$ .

Como  $FC$  é paralelo a  $GA$ , então os triângulos  $\triangle GAB$  e  $\triangle CAG$  têm altura de mesmo comprimento, relativa a base  $GA$ , base de ambos os triângulos, então suas áreas são iguais. Dessa forma conclui-se a área do triângulo  $\triangle GAB$  é igual a área do triângulo  $\triangle AHK$ .

Dessa forma a área do triângulo  $\triangle AHK$  é dado por

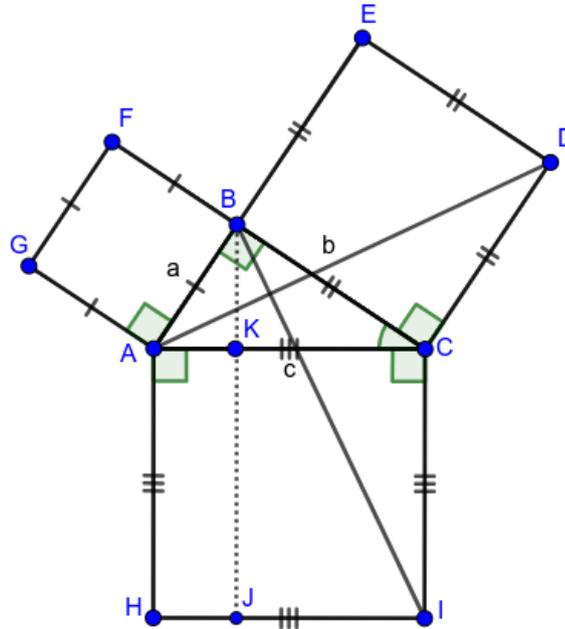
$$S_1 = \frac{a^2}{2}$$

Como o quadrilátero  $AHJK$  tem lados opostos paralelos, então é um paralelogramo, daí o triângulo  $\triangle HJK$  é congruente ao triângulo  $\triangle AHK$ , portanto tem áreas iguais. Dessa forma o o quadrilátero  $AHJK$  tem área

$$S_{[AHJK]} = a^2.$$

De modo análogo aos passos anteriores, o triângulo  $\triangle CAD$  é congruente ao triângulo  $\triangle CIB$  pelo caso  $LAL$ , logo pela congruência obtida conclui-se que têm áreas iguais.

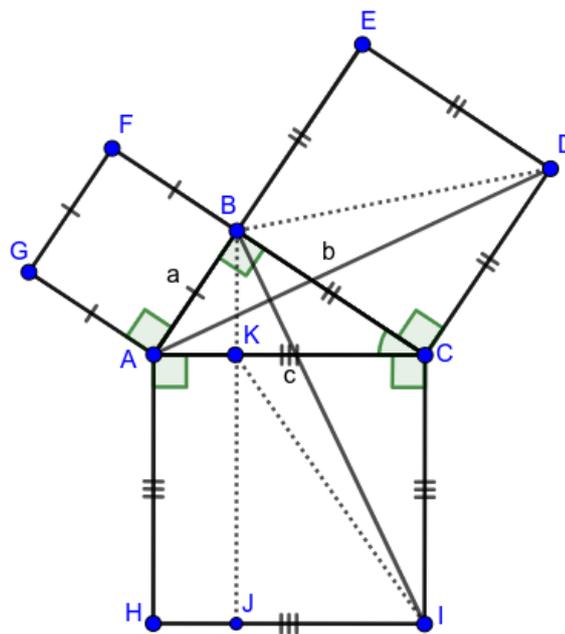
Figura 71 – Demonstração do Teorema de Pitágoras -Parte 4



Fonte: Elaborado pelo autor

Unindo  $I$  a  $K$ , obtém-se o triângulo  $\triangle CKI$ .

Figura 72 – Demonstração do Teorema de Pitágoras - Parte 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $BJ$  é paralelo a  $CI$ , então os triângulos  $\triangle CIB$  e o  $\triangle CIK$  tem alturas iguais relativa ao lado  $CI$ , base de ambos os triângulos, donde-se conclui que suas áreas são iguais pelo corolário 1. Assim, área do triângulo  $\triangle CIK$  têm área igual ao do triângulo  $\triangle CAD$ .

Como  $AE$  é paralelo a  $CD$ , então as alturas dos triângulos  $\triangle CAD$  e  $\triangle CDB$ , relativas ao lado  $CD$ , são iguais e assim suas áreas são iguais.

Portanto, o triângulo  $\triangle CIK$  e  $\triangle CDB$  tem a mesma área. Assim a área do triângulo  $\triangle CIK$  é dada por

$$S_2 = \frac{b^2}{2}.$$

Como o quadrilátero  $CIJK$  tem lados opostos paralelos, então é um paralelogramo, daí o triângulo  $\triangle CIK$  é congruente ao triângulo  $\triangle IJK$ , portanto tem áreas iguais. Dessa forma o o quadrilátero  $CIJK$  tem área

$$S_{[CIJK]} = b^2.$$

A área do quadrado  $AHIC$  é dado como

$$S_{[AHIC]} = c^2$$

No entanto, sua área também pode se escrita pela soma das áreas dos quadriláteros  $AHJK$  e  $CIJK$ , assim

$$S_{[AHIC]} = a^2 + b^2.$$

Iguala-se as áreas obtidas para o quadrilátero  $AHIC$ .

*C.Q.D.*

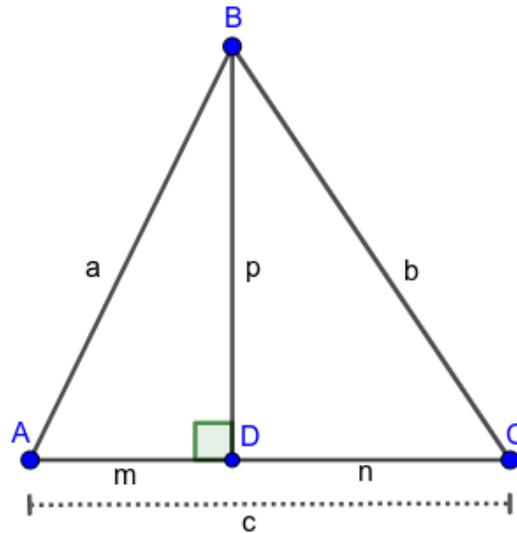
$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

**Teorema 6.** *Se num triângulo  $\triangle ABC$  de lados  $|AC| = c$ ,  $|AB| = a$  e  $|BC| = b$ , vale a relação  $a^2 = b^2 + c^2$  então o triângulo  $\triangle ABC$  é um triângulo retângulo.*

**Demonstração.** *Suponha que no triângulo  $\triangle ABC$ , vale a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ , mas que este não seja um triângulo retângulo e que  $D$  seja o pé da altura, de comprimento  $p$ , do triângulo  $\triangle ABC$ , conforme a figura 73.*

Figura 73 – Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o triângulo  $\triangle ADB$  é reto em  $D$ , então

$$a^2 = m^2 + p^2$$

Por hipótese  $a^2 = b^2 + c^2$ , logo

$$b^2 + c^2 = m^2 + p^2$$

Analogamente, para o triângulo  $\triangle CDB$

$$b^2 = n^2 + p^2$$

Aplicando o resultado obtido na expressão anterior

$$n^2 + p^2 + c^2 = m^2 + p^2$$

Logo,

$$n^2 + c^2 = m^2$$

No entanto  $c = m + n$  que aplicado na expressão anterior implica que

$$n^2 + m^2 + n^2 + 2mn = m^2$$

Daí,

$$m + n = 0$$

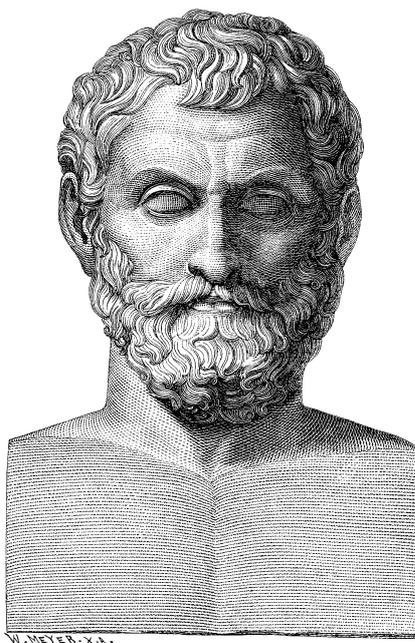
.  
O que é absurdo dado que  $c = m + n$  e  $c > 0$ , logo a relação  $a^2 = b^2 + c^2$  não é válida para quando o triângulo dado não é um triângulo retângulo.

## 3 Teorema de Tales e suas principais consequências

### 3.1 Breve biografia: Tales de Mileto

De acordo com SOARES (2022)[10], Tales de Mileto foi um filósofo e matemático grego, nascido, aproximadamente, em 624 a.C. em Mileto, na Grécia Antiga. Suas principais contribuições estão no campo da matemática, onde na área da geometria desenvolveu o famoso 'Teorema de Tales', que aborda a proporção de segmentos em retas transversais cortadas por retas paralelas e em triângulos semelhantes.

Figura 74 – Tales de Mileto



Fonte: Wikipédia<sup>2</sup>

Entre seus feitos, segundo relatos históricos, ele aplicou princípios matemáticos para medir distâncias inacessíveis. Usando seus conhecimentos geométricos, mediu a altura de pirâmides e calculou distância entre navios no mar, demonstrando grande habilidade em aplicar na prática seus conhecimentos geométricos.

Jerónimo afirma que ele [Tales] mediu efetivamente as pirâmides por intermédio da sua sombra, após ter observado o momento em que a nossa

<sup>2</sup> Disponível em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales\\_de\\_Mileto](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto), acesso em 28 set. 2023

própria sombra é igual à nossa altura. Eudemo, na História da Geometria, atribui este teorema a Tales; é que o método segundo o qual se diz que ele demonstrou a distância dos navios no alto mar deve ter implicado, segundo o referido autor, o emprego deste teorema. [11]

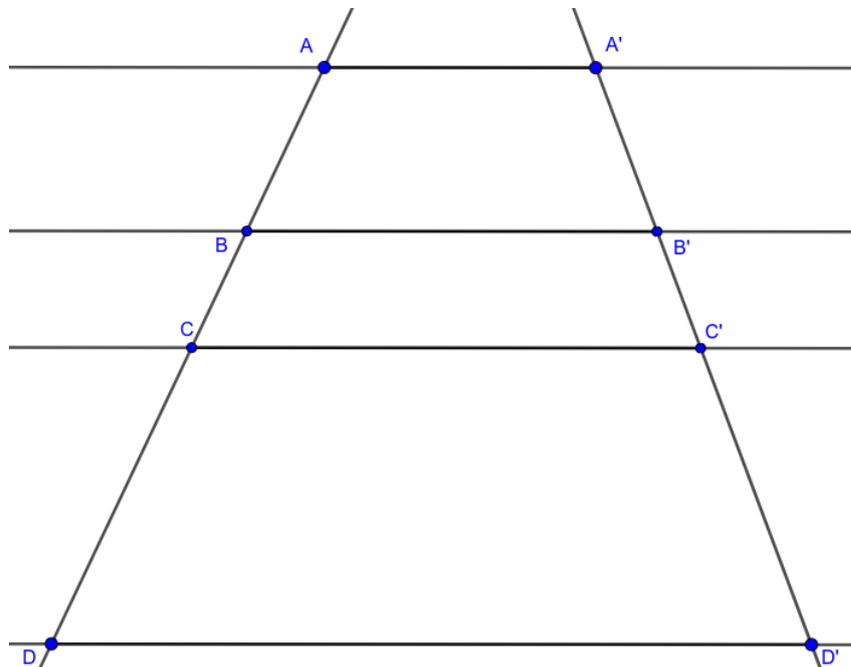
Além de suas contribuições para a matemática, Tales, segundo SOARES (2022)[10], também foi um dos primeiros filósofos a adotar uma abordagem racional para compreender e explicar o mundo natural. Para Tales os fenômenos naturais poderiam ser explicados por leis naturais, sendo a matemática uma ferramenta essencial para esse objetivo.

A influência de Tales de Mileto em nossa sociedade é notável, tendo em vista que suas contribuições tem influenciado de forma significativa o desenvolvimento da ciência e do pensamento racional na cultura ocidental.

## 3.2 Teorema de Tales

O Teorema de Tales estabelece uma relação de proporcionalidade entre segmentos de retas, em retas transversais intersectadas por retas paralelas.

Figura 75 – Retas transversais intersectando retas paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo o Teorema de Tales uma família de retas paralelas que corta duas retas transversais determina segmentos diretamente proporcionais. Assim, a razão entre dois segmentos de uma reta transversal é igual a razão entre os segmentos correspondentes em uma segunda transversal.

Na figura 75 a família de retas paralelas define segmentos diretamente proporcionais nas retas transversais  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{A'D'}$ , logo a razão entre  $AB$  e  $CD$  é igual a razão entre  $A'B'$  e  $C'D'$ .

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

Os segmentos definidos pelas retas paralelas sob uma transversal pode ser do tipo comensuráveis ou incomensuráveis. A noção comensurabilidade é abordada pelos pitagóricos, segundo BONGIOVANNI (2005)[12]:

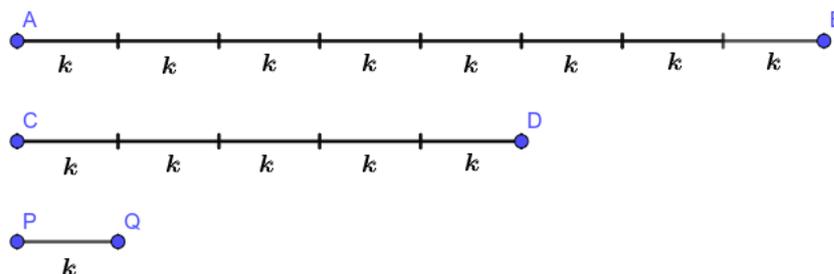
Para os pitagóricos, todas as grandezas (comprimento, área, volume,...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números naturais. Admitiam que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, segmentos quaisquer de reta. Dados dois segmentos, supunham que existia sempre um segmento que 'cabia' um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Nesse caso, os segmentos eram comensuráveis.

Compreende-se assim que dois segmentos são dito comensuráveis se existir um segmento comum, ou seja, ao dividir os segmentos  $AB$  e  $CD$  em partes iguais deverá existir um múltiplo comum entre  $AB$  e  $CD$ .

**Definição 11.** *Dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são comensuráveis se existe um segmento de comprimento  $k$ , um número real qualquer, e dois naturais  $p$  e  $q$  tais que  $|AB| = p \cdot k$  e  $|CD| = q \cdot k$ .*

Na figura 76 o segmento  $PQ$  de comprimento igual a  $k$  cabe um número  $p$  de vezes no segmento  $AB$  e  $q$  de vezes no segmento  $CD$ .

Figura 76 – Segmentos comensuráveis



Fonte: Elaborado pelo autor

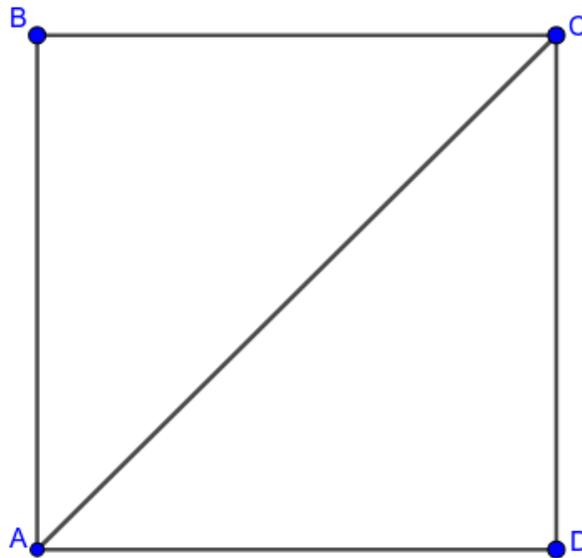
Considerando a figura observa-se que neste caso  $p = 8$  e  $q = 5$ , logo  $|AB| = 8 \cdot k$  e  $|CD| = 5 \cdot k$ . Como 8 e 5 são números naturais, conclui-se que  $AB$  e  $CD$  são dois segmentos comensuráveis.

**Definição 12.** *Dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são ditos incomensuráveis se não for possível determinar um terceiro segmento de comprimento  $k$ , real, que cabe um número natural  $p$  de vezes no segmento  $AB$  e um número natural  $q$  de vezes no segmento  $CD$ .*

**Exemplo 1.** *Seja  $ABCD$  um quadrado de diagonal  $AC$ , suponha que  $AB$  e  $AC$  são segmentos comensuráveis.*

Pela definição de segmentos comensuráveis, Definição 11, se  $AB$  e  $AC$  são segmentos comensuráveis, então existe um segmento de comprimento  $k$ , que cabe um número  $p$  de vezes em  $AB$  e um número  $q$  de vezes em  $AC$ , logo  $|AB| = p \cdot k$  e  $|AC| = q \cdot k$ . Como  $ABCD$  é um quadrado, então o ângulo interno  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  e  $AC$  é a hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle ABC$ .

Figura 77 – Quadrado  $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

Como  $|BC| = |AB| = p \cdot k$  e  $|AC| = q \cdot k$ , então:

$$(p \cdot k)^2 + (p \cdot k)^2 = (q \cdot k)^2$$

Daí obtém-se,

$$q = p\sqrt{2}$$

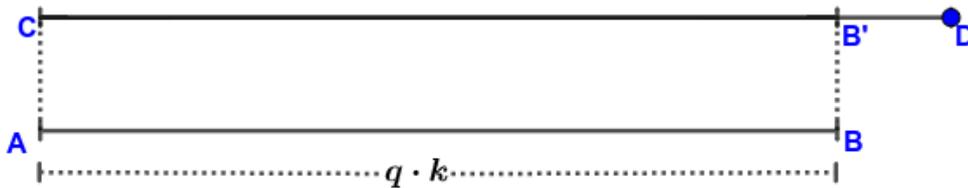
Por hipótese  $AB$  e  $AC$  são segmentos comensuráveis, mas  $\sqrt{2}$  não é um número natural, logo  $q$  não é um número natural. Cai-se em um absurdo visto que por hipótese  $AB$  e  $AC$  são segmentos comensuráveis, logo um segmento de comprimento  $k$  deve caber um número  $p$  de vezes em  $AB$  e  $q$  de vezes em  $AC$ , com  $p$  e  $q$  naturais. Portanto, os segmentos dados são incomensuráveis.

**Proposição 10.** *Se  $AB$  e  $CD$  são dois segmentos incomensuráveis, tal que  $AB$  pode ser dividido em partes iguais a  $k$ , então ao dividir  $CD$  em partes de comprimento  $k$  têm-se que  $q \cdot k < |CD| < (q + 1) \cdot k$ .*

**Demonstração.** *Seja  $AB$  e  $CD$  segmentos incomensuráveis, tal que  $|AB| = q \cdot k$ .*

Como  $AB$  e  $CD$  são segmentos incomensuráveis, então não há como dividir  $CD$  em partes de  $k$  um número natural de vezes. Seja  $|AB| < |CD|$ , logo  $AB$  cabe dentro do segmento  $CD$ , conforme a figura 78.

Figura 78 – Demonstração da Proposição 10 - Parte 1

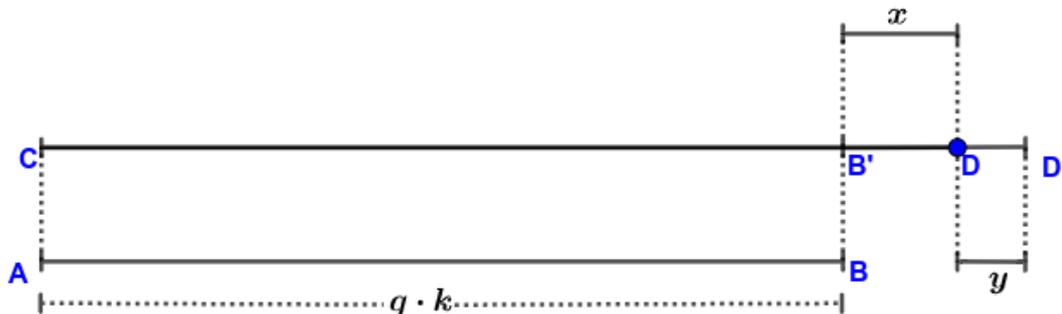


Fonte: Elaborado pelo autor

Assim  $|CD| = q \cdot k + |B'D|$ . Faz-se  $|B'D| = x$  e conclui-se que  $x$  é menor do que o segmento de comprimento  $k$ , pois se  $x = k$ , então  $AB$  e  $CD$  seriam segmentos comensuráveis. Daí pode-se concluir que  $q \cdot k < |CD|$ .

Prolonga-se o segmento  $CD$  em  $D$ , tal que o prolongamento tenha comprimento  $y$  e  $x + y = k$ , como na figura 79.

Figura 79 – Demonstração da Proposição 10 - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Segue que,

$$|CD| < |CD| + y, \text{ mas } |CD| = q \cdot k + x$$

$$|CD| < q \cdot k + x + y$$

$$|CD| < q \cdot k + k$$

Coloca-se  $k$  em evidência.

$$|CD| < (q + 1) \cdot k$$

*C.Q.D.*

$$q \cdot k < |CD| < (q + 1) \cdot k.$$

□

Nas subseções a seguir apresenta-se as demonstrações para o Teorema de Tales para segmentos comensuráveis e para segmentos incomensuráveis. Além disso, será abordada uma terceira demonstração do teorema por meio do cálculo da área de triângulo. Em geral demonstrará-se que se  $AB$  e  $CD$  são segmentos de uma transversal que corta uma família de retas paralelas e  $A'B'$  e  $C'D'$  são segmentos de uma outra transversal que também corta a mesma família de retas paralelas, então vale a relação:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

### 3.2.1 Teorema de Tales: Segmentos comensuráveis

Aborda-se aqui a demonstração do Teorema de Tales para segmentos comensuráveis.

**Teorema 7.** *Uma família de retas paralelas determina segmentos proporcionais sob duas retas transversais.*

**Demonstração.** *Seja  $w$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  retas, mutuamente paralelas, intersectadas pelas retas transversais  $r$  e  $s$ , sendo, respectivamente,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  pontos da interseção de  $r$  com as retas paralelas tal que  $AB$  e  $CD$  sejam comensuráveis e, respectivamente,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  os pontos da interseção de  $s$  com as paralelas.*

Pela Definição 11 se  $AB$  e  $CD$  são comensuráveis, então existe um segmento de comprimento  $k$  tal que  $|AB| = p \cdot k$  e  $|CD| = q \cdot k$ . Daí,

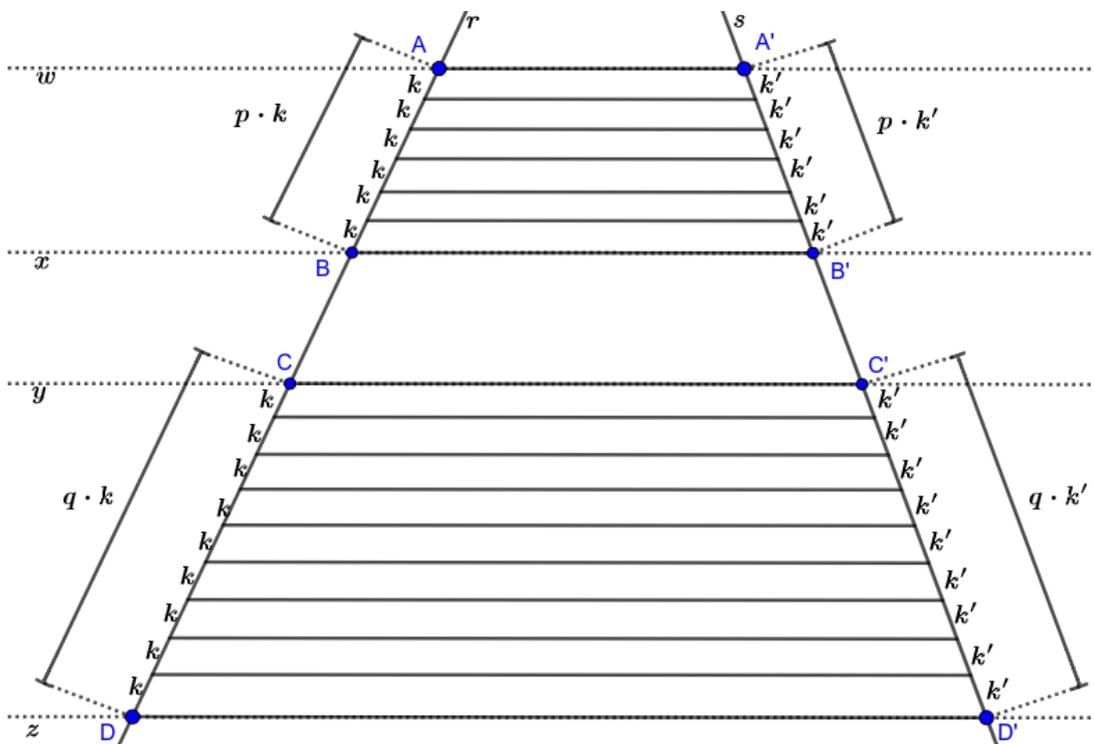
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{p}{q} \tag{3.1}$$

Na figura 80 traça-se família de retas paralelas a  $w$  dividindo o segmento  $AB$  em  $p$  partes  $k$ , pelo Teorema 3 essa família de paralelas dividirá o segmento  $A'B'$  em partes iguais que denotamos como  $k'$ .

Como  $AB$  e  $CD$  são comensuráveis, então  $CD$  também pode ser dividido em partes de  $k$ , assim divide-se  $CD$  em  $q$  partes de  $k$ . Pelo Teorema 3 a família de retas paralelas que divide  $CD$  em  $q$  partes iguais também dividirá  $C'D'$  em  $q$  partes iguais.

Segue que  $A'B'$  e  $C'D'$  são comensuráveis, dado que foram divididos  $p$  e  $q$  vezes o que leva a concluir que  $C'D'$  foi dividido em  $q$  partes  $k'$ .

Figura 80 – Demonstração para segmentos comensuráveis



Fonte: Elaborado pelo autor

Logo,

$$\frac{|A'B'|}{|C'D'|} = \frac{p \cdot k'}{q \cdot k'} = \frac{p}{q} \quad (3.2)$$

Iguala-se (3.1) e (3.2).

*C.Q.D.*

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

□

### 3.2.2 Teorema de Tales: Segmentos incomensuráveis

**Demonstração.** *Sejam  $w, x, y$  e  $z$  retas, mutuamente paralelas, intersectadas pelas retas transversais  $r$  e  $s$ , e, respectivamente,  $A, B, C$  e  $D$  pontos da interseção de  $r$  com as retas paralelas tal que  $AB$  e  $CD$  sejam segmentos incomensuráveis e, respectivamente,  $A', B', C'$  e  $D'$  os pontos da interseção de  $s$  com as paralelas.*

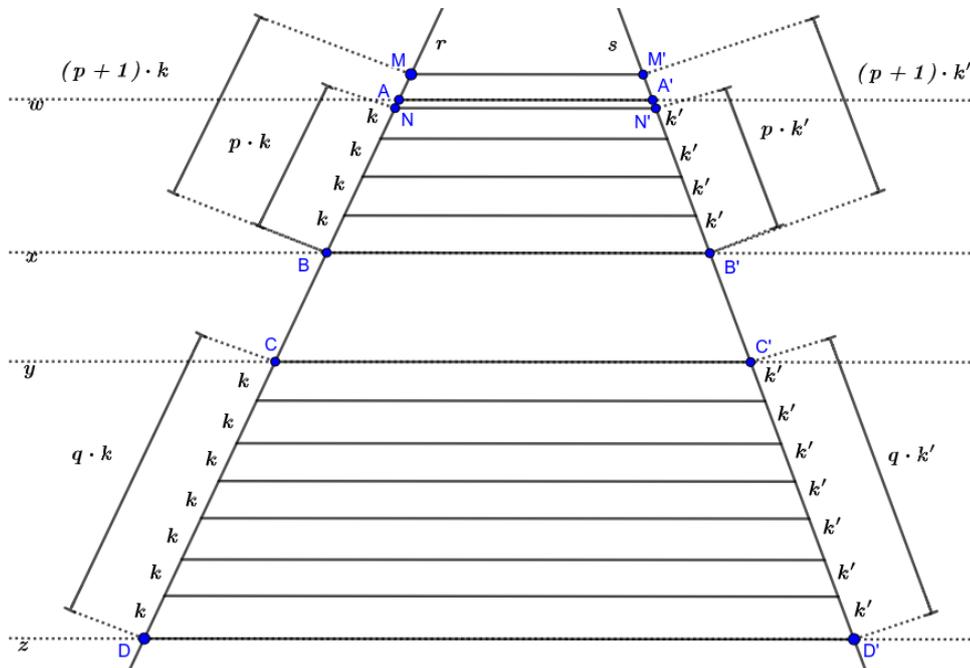
Na figura 81 a família de retas paralelas a  $w$  divide o segmento  $CD$  em  $q$  partes iguais a  $k$ , tem-se:

$$|CD| = q \cdot k \quad (3.3)$$

Pelo teorema 3, o segmento  $C'D'$  também é dividido em um número  $q$  de vezes em partes iguais que denotamos de  $k'$ . Logo,

$$|CD| = q \cdot k' \quad (3.4)$$

Figura 81 – Demonstração para segmentos incomensuráveis



Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme a figura 81, ao dividir o segmento  $AB$  em partes de  $k$  um número  $p$  de vezes obtém-se um segmento  $BN$ , com  $N$  em  $r$ , tal que  $|BN| = p \cdot k$ , e um segmento  $AM$ , com  $M$  em  $r$ , onde  $|AN| + |AM| = k$ . Como visto na Proposição 10,

$$p \cdot k < |AB| < (p + 1) \cdot k \quad (3.5)$$

Traça-se por  $N$  e  $M$  segmentos paralelos a  $w$  que encontra  $s$  em  $N'$  e  $M'$  e, analogamente, conclui-se que:

$$p \cdot k' < |A'B'| < (p+1) \cdot k' \quad (3.6)$$

Dividindo (3.5) por (3.3) e realizando o devido trabalho algébrico teremos:

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot k}{q \cdot k} &< \frac{|AB|}{|CD|} < \frac{(p+1) \cdot k}{q \cdot k} \\ \frac{p}{q} &< \frac{|AB|}{|CD|} < \frac{p+1}{q} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analogamente, dividindo (3.6) por (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot k'}{q \cdot k'} &< \frac{|A'B'|}{|C'D'|} < \frac{(p+1) \cdot k'}{q \cdot k'} \\ \frac{p}{q} &< \frac{|A'B'|}{|C'D'|} < \frac{p+1}{q} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Daí obtém-se que,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &< \frac{|AB|}{|CD|} < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \\ \frac{p}{q} &< \frac{|A'B'|}{|C'D'|} < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

No segmento  $CD$ , diminuindo o comprimento do segmento  $k$ , obtém-se, como consequência, um número  $q$  cada vez maior de partes iguais a  $k$ . Assim quanto menor for o comprimento do segmento  $k$ , maior será o número  $q$  e por consequência mais próximo de zero estará a fração  $\frac{1}{q}$ . Analogamente, quanto menor for o comprimento de  $k'$  maior será o número  $q$  de partes de  $k'$  e novamente mais próximo de zero estará a fração  $\frac{1}{q}$ .

Como na figura 81 tem-se  $|NB| = p \cdot k$  e  $|CD| = q \cdot k$ , e  $|N'B'| = p \cdot k'$  e  $|C'D'| = q \cdot k'$ , então pela Definição 11 tais segmentos são comensuráveis. Daí,

$$\frac{|NB|}{|CD|} = \frac{|N'B'|}{|C'D'|} = \frac{p}{q}$$

A medida que diminuimos o comprimento  $k$  fazemos com que o ponto  $N$  se aproxime cada vez mais de  $A$  até que o comprimento do segmento  $AN$  seja desprezível, ou seja, um número tão pequeno que se aproxima de 0. Como  $NN'$  é paralelo a  $w$ , então a medida

que  $N$  se aproxima de  $A$ , então  $N'$  se aproxima de  $A'$ . Essa abordagem foi apresentada por MARIN e PAULA (1920) [13].

Como as partes iguais em que foi dividida  $A'D'$  podem tornar-se muito pequenas, o ponto  $B''$  pode aproximar-se de  $B'$  tanto quanto se queira; logo, permanecendo as duas razões variáveis da última proporção [...] iguais, seus limites também serão iguais.

Assim, quando  $q$  tende ao infinito, a razão  $\frac{|NB|}{|CD|}$  tende a razão  $\frac{|AB|}{|CD|}$  e analogamente  $\frac{|N'B'|}{|C'D'|}$  tende a razão  $\frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ . Segundo MUNIZ NETO (2013, pág. 122) [8] “[...] uma sequência de reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando  $n \rightarrow +\infty$ ”.

C.Q.D.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

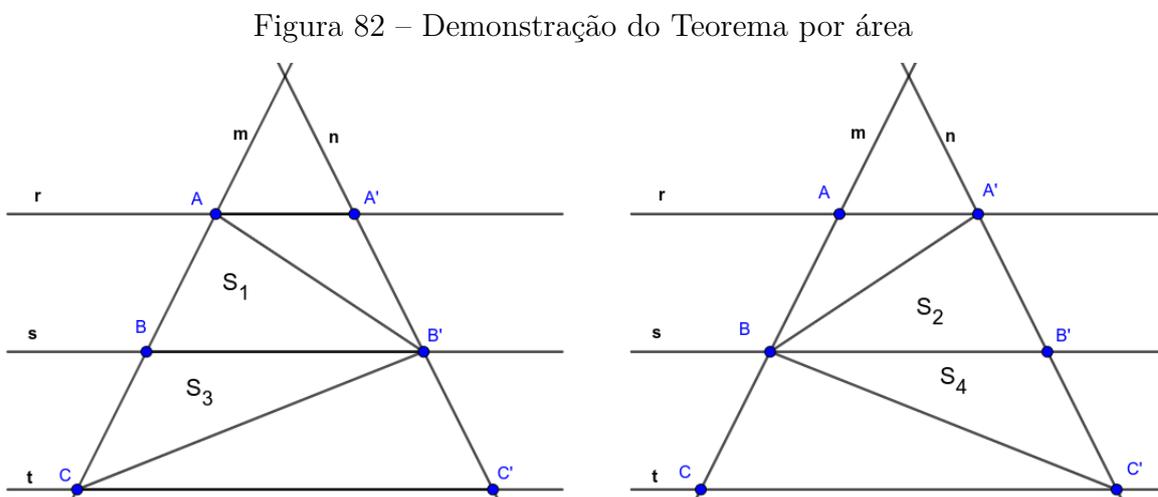
□

### 3.2.3 Teorema de Tales: Demonstração pela área do triângulo

Aborda-se a demonstração do Teorema de Tales pelo método do cálculo da área do triângulo, adaptando-se a demonstração apresentada por BONGIOVANNI (2007) [14].

**Demonstração.** *Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  retas mutuamente paralelas e,  $m$  e  $n$  retas transversais, tais que  $m$  intersecta  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente, em  $A$ ,  $B$  e  $C$  e  $n$  em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ .*

Determinam-se os segmentos  $AB'$ ,  $BA'$ ,  $CB'$  e  $C'B$ . Seja  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  as áreas, respectivas, dos triângulos  $\triangle ABB'$ ,  $\triangle A'BB'$ ,  $\triangle BCB'$  e  $\triangle BB'C'$ .



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $r$  é paralelo a  $s$ ,  $BB' \subset s$  e,  $A$  e  $A' \in r$ , então pelo corolário 1 a área do triângulo  $\triangle ABB'$  é igual a área do triângulo  $\triangle A'BB'$ . Analogamente,  $s$  é paralelo a  $t$ ,  $BB' \subset s$  e,  $C$  e  $C' \in t$ , então a área do triângulo  $\triangle BCB'$  é igual a área do triângulo  $\triangle BB'C'$ . Daí, temos que:

$$S_1 = S_2 \text{ e } S_3 = S_4$$

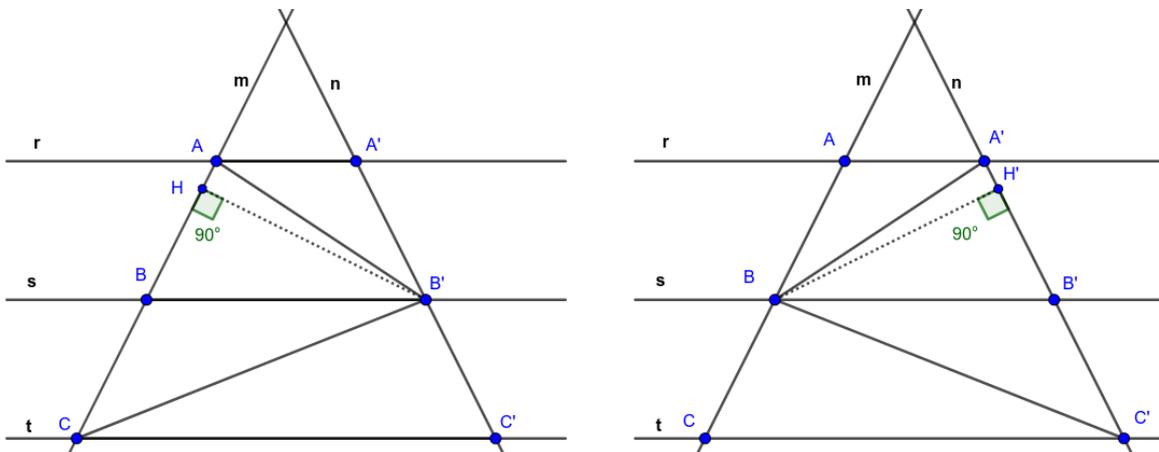
Dividindo a primeira pela segunda igualdade:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_2}{S_4}$$

Traça-se de  $B'$  até o segmento  $AC$  um segmento perpendicular ao segmento  $AC$ , obtém-se a altura  $B'H$ , com  $H \in AC$ , assim a altura do triângulo  $\triangle ABB'$  é igual a altura do triângulo  $\triangle BCB'$ .

Analogamente, traça-se de  $B$  até o segmento  $A'C'$  um segmento perpendicular, obtém-se a altura  $B'H'$ , com  $H' \in A'C'$ , assim a altura do triângulo  $\triangle A'BB'$  é igual a altura do triângulo  $\triangle B'BC'$ .

Figura 83 – Demonstração do Teorema por área - 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Da Proposição 9 temos que se dois triângulos tem a mesma altura, então a razão entre as suas áreas é igual a razão entre as suas bases. Logo,

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{|AB|}{|BC|} \text{ e } \frac{S_2}{S_4} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$

*C.Q.D.*

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$

□

### 3.2.4 Recíproca do Teorema de Tales

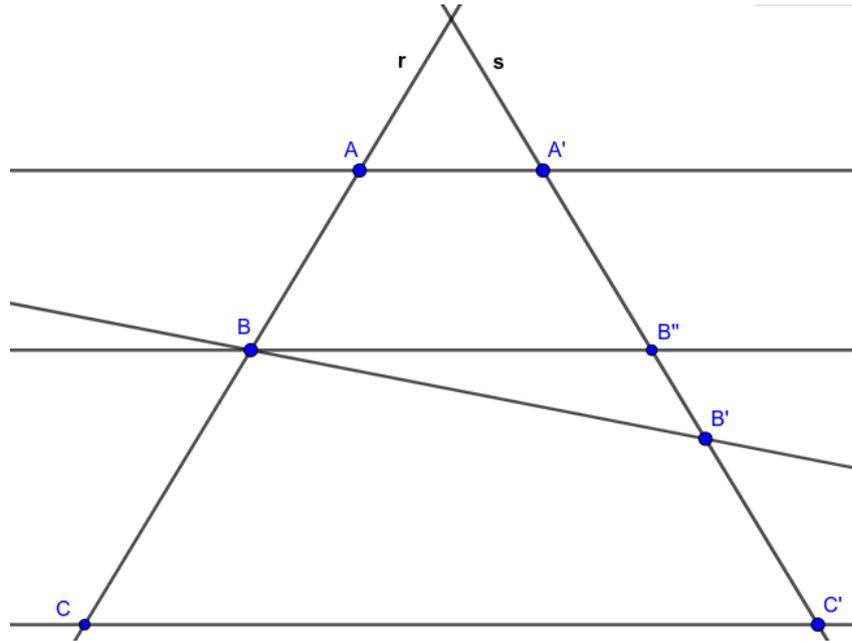
Aqui aborda-se o Teorema recíproco do Teorema de Tales, mostra-se que se os segmentos definidos pelas interseções das retas transversais com as retas dadas forem proporcionais, então as retas são mutuamente paralelas.

**Teorema 8.** Se  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$ , então a reta  $\overleftrightarrow{BB'}$  é paralelo as retas, mutuamente paralelas,  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ .

**Demonstração.** Seja  $r$  e  $s$  duas retas transversais as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ , mutuamente paralelas, tal que  $A$  e  $C \in r$  e  $A'$  e  $C' \in s$ . Seja ainda  $B \in r$  e  $B' \in s$ .

Determina-se  $B'' \in s$ , com  $B''$  diferente de  $B'$ , e obtém-se a reta  $\overleftrightarrow{BB''}$  paralela as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ , veja a figura 84. Suponha, por absurdo, que vale  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$ , mas que  $\overleftrightarrow{BB'}$  não seja paralela as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ .

Figura 84 – Recíproca do Teorema de Tales



Fonte: Elaborado pelo autor

Como as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB''}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são mutuamente paralelas, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B''|}{|B''C'|}$$

Somando 1 a ambos os membros da igualdade obtém-se,

$$\frac{|AB|}{|BC|} + 1 = \frac{|A'B''|}{|B''C'|} + 1$$

Desenvolvendo-se,

$$\frac{|AB| + |BC|}{|BC|} = \frac{|A'B''| + |B''C'|}{|B''C'|}$$

Daí,

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B''C'|} \quad (3.9)$$

Por hipótese  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$ , analogamente, somando 1 a ambos os lados da igualdade obtém-se,

$$\frac{|AB|}{|BC|} + 1 = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} + 1$$

Desenvolvendo-se,

$$\frac{|AB| + |BC|}{|BC|} = \frac{|A'B'| + |B'C'|}{|B'C'|}$$

Daí,

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} \quad (3.10)$$

Assim, de (3.9) e (3.10), conclui-se

$$|B''C'| = |B'C'|$$

Seja, na figura 84,  $|B''B'| = x$  e  $|B'C'| = y$ . Têm-se que,  $B''C' = B''B' \cup B'C'$ , logo  $|B''C'| = |B''B'| + |B'C'| = x + y$ . No entanto isso implica que,

$$x + y = y$$

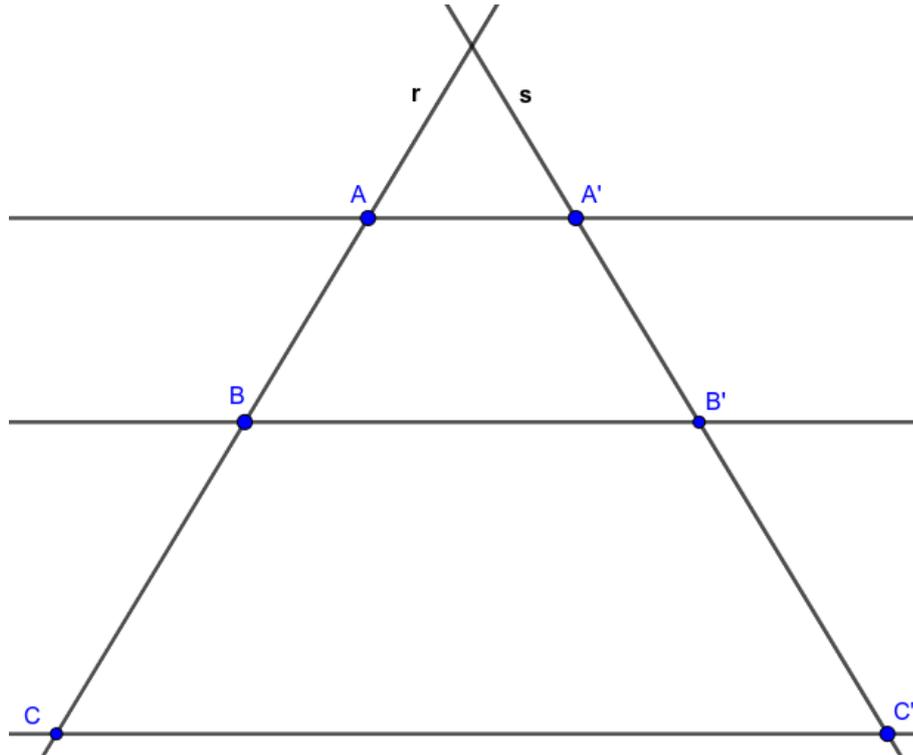
o que só é verdade se  $x = 0$ , mas  $x = |B''B'| > 0$ . Assim,  $|B''C'| = |B'C'|$  se, e somente se,  $B''$  é igual  $B'$ , um absurdo, pois isso implica que  $B''$  e  $B'$  são coincidentes e, portanto, as retas  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  seriam mutuamente paralelas o que contraria a hipótese.

Portanto, resta concluir que se  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$ , então as retas  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são mutuamente paralelas.

### 3.2.5 Proporções equivalentes para o Teorema de Tales

Manipulando algebricamente a relação de proporcionalidades encontrada a partir do Teorema de Tales, como feito na subseção anterior, pode-se obter proporções equivalentes para o Teorema de Tales que podem auxiliar a simplificar os passos a serem executados durante uma demonstração de teorema ou resolução de exercícios.

Figura 85 – Prova da equivalência das proporções do Teorema de Tales



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Tales, as retas  $r$  e  $s$  cortam retas mutuamente paralelas (conforme a figura 85), então:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$

Somando 1 a ambos os membros da igualdade obtém-se,

$$\frac{|AB|}{|BC|} + 1 = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} + 1$$

Desenvolvendo-se,

$$\frac{|AB| + |BC|}{|BC|} = \frac{|A'B'| + |B'C'|}{|B'C'|}$$

Temos que  $|AC| = |AB| + |BC|$  e  $|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|$ , logo:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}$$

Portanto, esse resultado equivalente garante que a proporção entre o segmento  $AC$  e  $BC$  é igual à proporção entre o segmento  $A'C'$  e  $B'C'$ .

Reorganizando as frações, obtém-se ainda que:

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|} \quad (3.11)$$

Pode-se agora obter uma outra proporção para o Teorema de Tales. Segue que  $|AC| = |AB| + |BC|$  e  $|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|$ , então:

$$|BC| = |AC| - |AB| \text{ e } |B'C'| = |A'C'| - |A'B'|$$

Substituindo o resultado em (3.11),

$$\frac{|AC| - |AB|}{|AC|} = \frac{|A'C'| - |A'B'|}{|A'C'|}$$

Subtraindo 1 a ambos os lados da igualdade,

$$\frac{|AC| - |AB|}{|AC|} - 1 = \frac{|A'C'| - |A'B'|}{|A'C'|} - 1$$

Desenvolvendo-se,

$$\frac{|AC| - |AB| - |AC|}{|AC|} = \frac{|A'C'| - |A'B'| - |A'C'|}{|A'C'|}$$

Daí,

$$\frac{-|AB|}{|AC|} = \frac{-|A'B'|}{|A'C'|}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $-1$  conclui-se que:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$$

Portanto, esse resultado equivalente garante que a proporção entre o segmento  $AB$  e  $AC$  é igual a proporção entre o segmento  $A'B'$  e  $A'C'$ .

Pode-se ainda reorganizar as frações para indicar que

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}.$$

### 3.3 Consequências do Teorema de Tales para triângulos

Nesta seção aborda-se as consequências do Teorema de Tales para triângulos, aplicando tal teorema para demonstrar algumas relações importantes. A origem do Teorema de Tales, segundo ALMEIDA (2020), está:

[...] ligada à resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade, concentra-se na relação entre o geométrico e o numérico. Por isso, esse teorema significa muito na teoria da semelhança e consequentemente na trigonometria, onde justifica as definições de seno, cosseno e tangente de dado ângulo. Na Geometria espacial, o teorema de Tales, aparece ao tratar das secções por um plano paralelo à base. [15]

Nesse aspecto apresenta-se nesse trabalho o uso do Teorema de Tales para provarmos a validade de algumas relações importantes para triângulos.

#### 3.3.1 Semelhança de triângulos

No livro Geometria da Coleção PROFMAT o autor MUNIZ NETO (2013) [8] estabelece que:

... dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Inicia-se apresentando uma adaptação da demonstração do caso de semelhança Lado-Lado-Lado apresentada por MUNIZ NETO (2013, pág. 130) [8] no livro Geometria da Coleção PROFMAT. Os demais casos serão demonstrados utilizando a abordagem adotada por MUNIZ NETO.

##### 3.3.1.1 Caso de semelhança lado-lado-lado (LLL)

Diz-se que dois triângulos são semelhantes se seus lados homólogos são proporcionais, logo estes guardam uma razão de semelhança entre si.

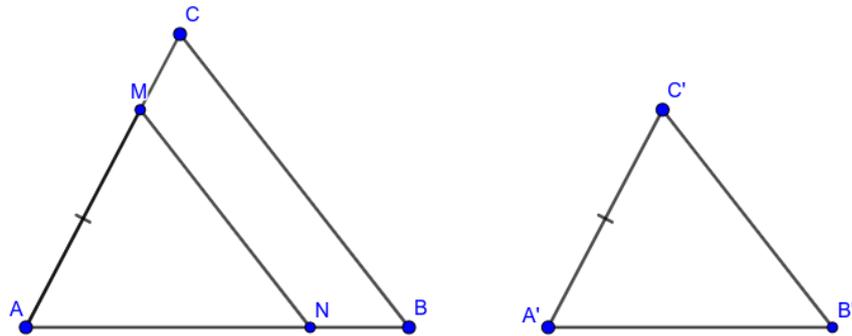
**Proposição 11.** *Sejam dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  tais que*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

*então o triângulo  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  e em particular  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ .*

**Demonstração.** *Seja  $k$  o valor das razões da proposição 11, então  $|AB| = k \cdot |A'B'|$ ,  $|BC| = k \cdot |B'C'|$  e  $|AC| = k \cdot |A'C'|$ . Seja o triângulo  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que  $M \in AC$  e  $N \in AB$  e  $|AM| = |A'C'|$  e  $NM$  paralelo a  $BC$ .*

Figura 86 – Prova do semelhança LLL - 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $NM$  é paralelo a  $BC$  vale a proporção equivalente do Teorema de Tales,

$$\frac{|AB|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AM|}$$

Como  $|AM| = |A'C'|$ , então

$$\frac{|AB|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

Segue que  $|AC| = k \cdot |A'C'|$ , então

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = k$$

Daí

$$\frac{|AB|}{|AN|} = k$$

Como  $|AB| = k \cdot |A'B'|$ , então

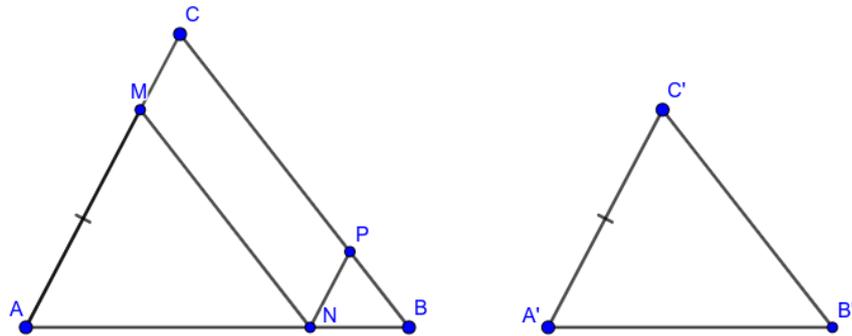
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = k$$

donde obtém-se que,

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AB|}{|AN|} = k$$

Então,  $|A'B'| = |AN|$ .

Analogamente, determina-se  $P \in BC$  e traça-se por  $N$  o segmento  $NP$  paralelo a  $AC$ , considere a figura 87.

Figura 87 – Prova do semelhança *LLL* - 2

Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $NP$  é paralelo a  $AC$  e  $MN$  é paralelo a  $BC$ , então o quadrilátero  $CMNP$  é um paralelogramo e  $|MN| = |CP|$ . Pelas proporções equivalentes do Teorema de Tales:

$$\frac{|BC|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AN|}$$

Daí,

$$\frac{|BC|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|AN|} = k$$

Assim,

$$\frac{|BC|}{|MN|} = k$$

Como  $|BC| = k \cdot |B'C'|$ , então

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = k$$

Daí,

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BC|}{|MN|} = k$$

Logo,  $|MN| = |B'C'|$ .

Como  $|A'B'| = |AN|$ ,  $|MN| = |B'C'|$  e  $|AM| = |A'C'|$ , então pelo caso *LLL* o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $\triangle AMN$ . Portanto temos,  $\widehat{B} = \widehat{ANM} = \widehat{B}'$  e analogamente  $\widehat{A} = \widehat{A}'$  e  $\widehat{C} = \widehat{C}'$ .

*C.Q.D.*

$$\widehat{A} = \widehat{A}', \widehat{B} = \widehat{B}' \text{ e } \widehat{C} = \widehat{C}'$$

□

## 3.3.1.2 Caso de semelhança ângulo-ângulo-ângulo (AAA)

**Proposição 12.** *Sejam dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que*

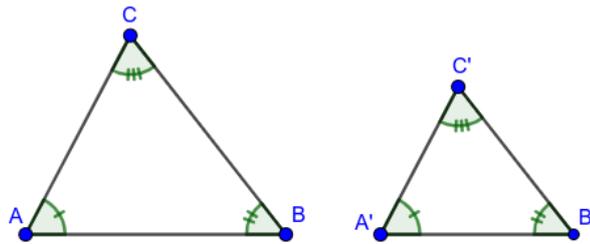
$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ e } \widehat{C} = \widehat{C'}$$

*Então o triângulo  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  e em particular*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

**Demonstração.** *Considere os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} = \widehat{C'}$*

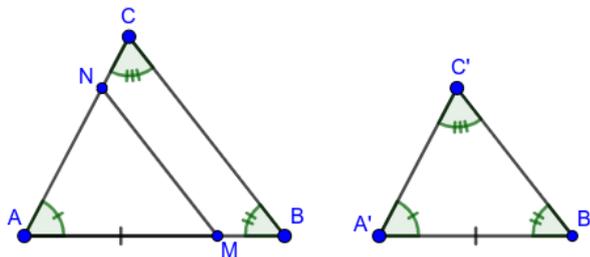
Figura 88 – Caso de semelhança AAA - parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Definimos em  $AB$  um ponto  $M$  e em  $AC$  um ponto  $N$ , tal que  $|AM| = |A'B'|$  e  $MN$  é paralelo a  $BC$ .

Figura 89 – Caso de semelhança AAA - parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $MN$  é paralelo a  $BC$ , então  $\widehat{AMN} = \widehat{B}$ . Pelo caso  $ALA$  o triângulo  $\triangle AMN$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ , dado que  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ,  $|AM| = |A'B'|$  e  $\widehat{AMN} = \widehat{B}$ .

Pelas proporções equivalentes do Teorema de Tales,

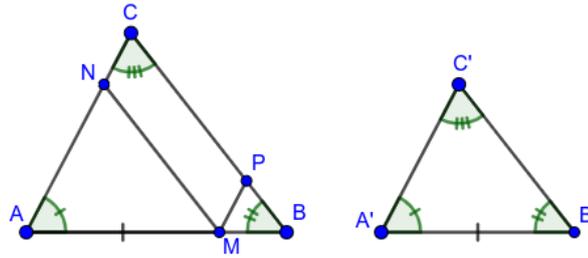
$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AN|}$$

Como o triângulo  $\triangle AMN$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ , então  $|AN| = |A'C'|$ , logo

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

Por  $M$  traça-se o segmento paralelo a  $AC$  que encontra  $P$  em  $BC$ .

Figura 90 – Caso de semelhança AAA - parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $MP$  é paralelo a  $AC$ , então pelas proporções equivalentes do Teorema de Tales,

$$\frac{|BC|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AM|}.$$

O quadrilátero  $MNCP$  tem lados opostos paralelos, logo é um paralelogramo, então  $|CP| = |MN| = |B'C'|$ . Logo,

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

*C.Q.D.*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

□

### 3.3.1.3 Caso de semelhança Lado-Ângulo-Lado (LAL)

**Proposição 13.** *Sejam dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  tais que*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B}'$$

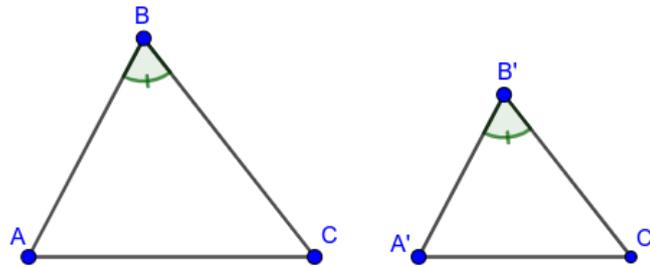
*Então os triângulos  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Em particular,  $\widehat{A} = \widehat{A}'$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C}'$  e*

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = k.$$

**Demonstração.** *Seja os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , tais que*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B}'$$

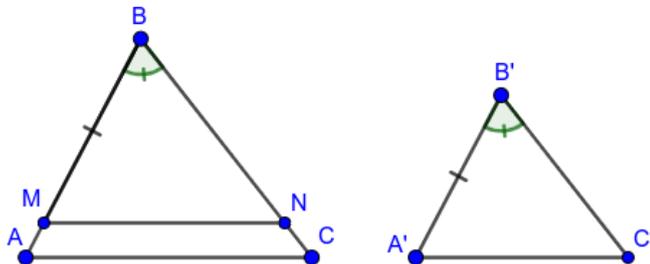
Figura 91 – Caso de semelhança  $LAL$  - parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Seja  $M$  um ponto em  $AB$ , tal que  $|BM| = |A'B'|$  e por  $M$  traça-se um segmento paralelo a  $AC$  que encontra  $N$  em  $BC$ .

Figura 92 – Caso de semelhança  $LAL$  - parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelas proporções equivalentes do Teorema de Tales,

$$\frac{|AB|}{|BM|} = \frac{|BC|}{|BN|}$$

Como  $|BM| = |A'B'|$ , então

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|BN|}$$

Por hipótese

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

Então,

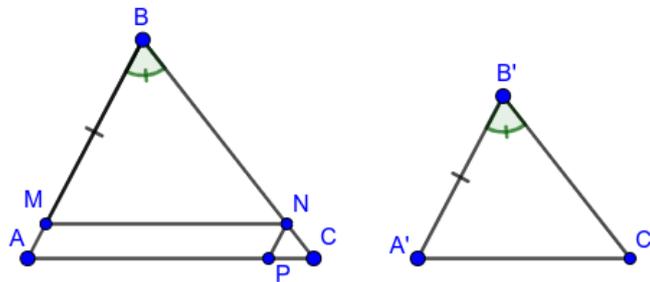
$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BC|}{|BN|}$$

Daí, temos  $|B'C'| = |BN|$ .

Como  $|BM| = |A'B'|$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B}'$  e  $|BN| = |B'C'|$ , então pelo caso *LAL* o triângulo  $\triangle MBN$  é congruente ao triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

Por  $N$  traça-se um segmento paralelo a  $AB$  que encontra  $P$  em  $AC$ .

Figura 93 – Caso de semelhança *LAL* - parte 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelas proporções equivalentes do Teorema de Tales,

$$\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{|BC|}{|BN|}$$

O quadrilátero  $AMNP$  tem lados opostos paralelos, então é um paralelogramo, logo  $|MN| = |AP|$ . Da congruência dos triângulos  $\triangle MBN$  e  $\triangle A'B'C'$ , conclui-se que  $|AP| = |MN| = |A'C'|$ . Daí,

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k$$

O segmento  $MN$  é paralelo  $AC$ , então  $\widehat{BMN} = \widehat{A}$  e  $\widehat{BNM} = \widehat{C}$ . Como o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é congruente ao  $\triangle MBN$ , então os ângulos do triângulo  $\triangle A'B'C'$  são iguais aos ângulos do triângulo  $\triangle ABC$ .

*C.Q.D.*

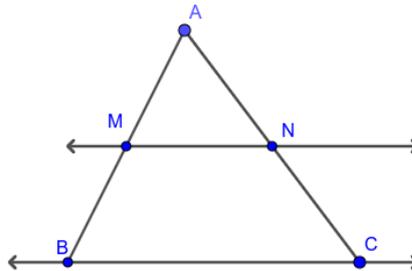
$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \text{ e } \frac{|AC|}{|A'C'|} = k$$

□

### 3.3.2 Teorema fundamental da semelhança

O Teorema Fundamental da Semelhança estabelece uma relação de semelhança entre dois triângulos, onde um triângulo é determinado por uma reta paralela a uma das bases do triângulo original.

Figura 94 – Teorema fundamental da semelhança



Fonte: Elaborado pelo autor

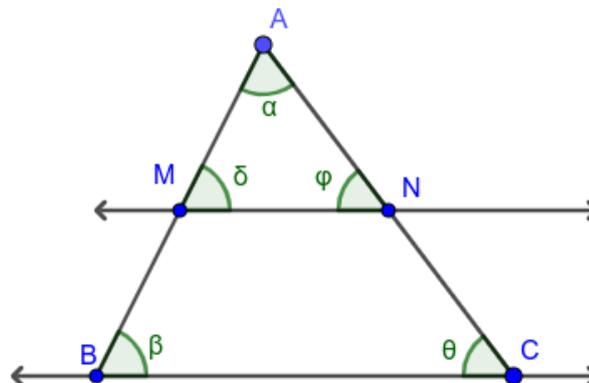
No triângulo  $\triangle ABC$  a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralela a reta que contém o lado  $BC$ , logo o triângulo  $\triangle ABC$  é semelhante ao triângulo  $\triangle AMN$ .

**Teorema 9.** *Se em um triângulo  $\triangle ABC$  a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralela ao lado  $BC$ , então o triângulo  $\triangle ABC$  é semelhante ao triângulo  $\triangle AMN$  e vale a relação*

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} = \frac{|MN|}{|BC|}$$

**Demonstração.** *Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e os pontos  $M \in AB$  e  $N \in AC$ . Seja a retas  $\overleftrightarrow{MN}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  paralelos entre si. Seja  $\hat{A} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta$ ,  $\hat{C} = \theta$ ,  $\widehat{AMN} = \delta$  e  $\widehat{ANM} = \varphi$ .*

Figura 95 – Ângulos congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor

- 1) Vamos verificar se os ângulos dos triângulos são iguais.

Na subseção 2.3.4 mostramos que se  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralelo a  $\overleftrightarrow{BC}$ , então  $\beta = \delta$  e  $\theta = \varphi$ . Segue que  $\alpha = \hat{A} = \hat{M\hat{A}N}$ . Então os ângulos dos triângulos são ordenadamente iguais e pelo caso de semelhança *AAA* pode-se concluir que o triângulo  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ .

2) Vamos verificar agora se os lados homólogos são proporcionais.

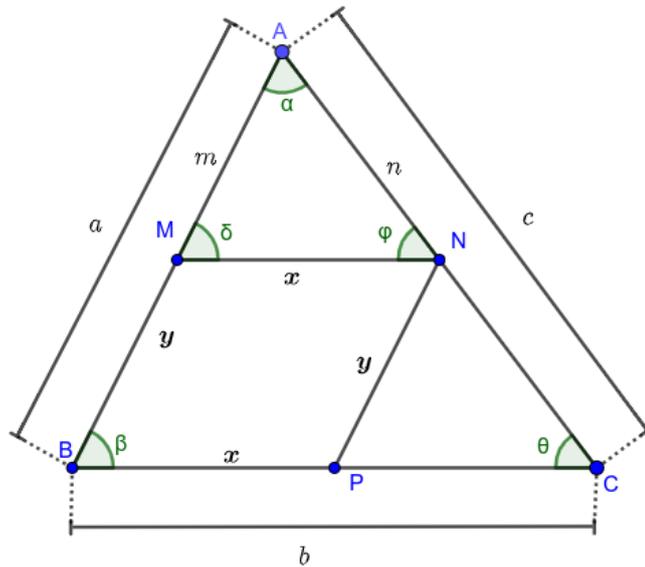
Como a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralela a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} \quad (3.12)$$

Na figura 95 traça-se por  $N$  o segmento  $NP$  paralelo a  $MB$ , com  $P$  em  $BC$ , obtém-se o quadrilátero  $BMNP$ . Como a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  é paralela a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , então  $MN$  é paralelo a  $BP$ .

Pela definição de paralelogramo,  $BMNP$  é um paralelogramo, dado que  $MB$  é paralelo a  $NP$  e  $MN$  é paralelo a  $BP$ . Assim  $|MN| = |BP|$  e  $|MB| = |NP|$  (Veja a figura 96). Seja  $|AM| = m$ ,  $|AN| = n$ ,  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|AC| = c$  e  $|MN| = x$ .

Figura 96 – lados homólogos proporcionais



Fonte: Elaborado pelo autor

De (3.12) temos que:

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|}$$

Logo,

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{c} \quad (3.13)$$

Como  $NP$  é paralelo ao segmento  $AB$ , então pelo teorema de Tales

$$\frac{n}{c} = \frac{x}{b}$$

*C.Q.D.*

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{c} = \frac{x}{b}$$

□

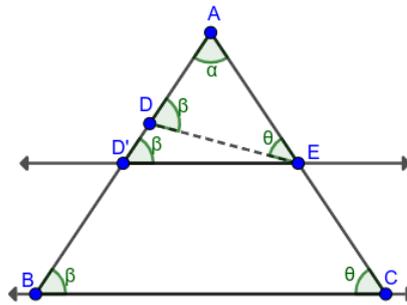
Para a recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança temos

**Teorema 10.** *Se no triângulo  $\triangle ABC$ , o ponto  $D \in AB$ ,  $E \in AC$  e o triângulo  $\triangle ADE$  é semelhante ao triângulo  $\triangle ABC$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .*

**Demonstração.** *Seja o triângulo  $\triangle ABC$ , tal que  $D \in AB$ ,  $E \in AC$  e o  $\triangle ADE$  é semelhante ao triângulo  $\triangle ABC$ , mas suponha que  $DE$  não é paralelo ao  $BC$ .*

Por hipótese o triângulo  $\triangle ADE$  é semelhante ao triângulo  $\triangle ABC$ , logo os ângulos internos dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$  são congruentes. Pelo Teorema Fundamental da Semelhança existe uma reta  $r$ , paralela a reta que contém o lado  $BC$ , que passa por  $E$  que intercepta  $AB$  em  $D'$ , de tal forma que  $D \in AD'$ ,  $|AD| < |AD'|$  e que o triângulo  $\triangle AD'E$  é semelhante ao triângulo  $\triangle ABC$ , logo seus ângulos internos são congruentes (Considere a figura 97).

Figura 97 – Prova da recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança - parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $D'E$  é paralelo a  $BC$ , então  $\widehat{AED'} = \theta$  e sendo  $AE$  um lado dos triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle AD'E$ , então pelo caso de congruência de triângulos  $ALA$  o triângulo  $\triangle ADE$  é congruente ao triângulo  $\triangle AD'E$ .

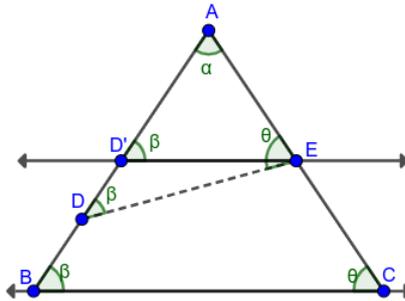
Da congruência concluiu-se que  $|AD| = |AD'|$ . Fazendo  $|AD| = x$  e  $|DD'| = y$ , então conclui-se que

$$x = x + y.$$

No entanto isso só é verdade se  $y = 0$ , ou seja, se o ponto  $D$  coincide com  $D'$ , o que é uma contradição, pois se  $D = D'$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ . Portanto, resta concluir que se os triângulos são semelhantes, então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .

Analogamente, seja  $D' \in AD$ , com  $|AD'| < |AD|$  e o triângulo  $\triangle AD'E$  semelhante ao triângulo  $\triangle ABC$ , logo seus ângulos internos são congruentes (Considere a figura 98).

Figura 98 – Prova da recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança - parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $D'E$  é paralelo a  $BC$ , então  $\widehat{AED'} = \theta$  e sendo  $AE$  um lado dos triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle AD'E$ , então pelo caso de congruência de triângulos  $ALA$  o triângulo  $\triangle ADE$  é congruente ao triângulo  $\triangle AD'E$ .

Da congruência concluiu-se que  $|AD| = |AD'|$ . Fazendo  $|AD'| = m$  e  $|DD'| = n$ , então conclui-se que

$$m = m + n$$

No entanto isso só é verdade se  $n = 0$ , ou seja, se o ponto  $D$  coincide com  $D'$ , o que é uma contradição, pois se  $D = D'$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ . Portanto, resta concluir que se os triângulos são semelhantes, então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .

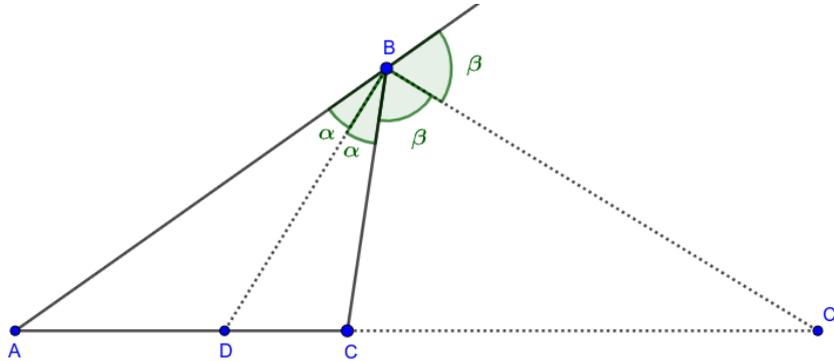
### 3.3.3 Teorema das Bissetrizes

Uma bissetriz é uma semirreta com origem no vértice que divide um ângulo em dois ângulos iguais. Na figura 99 a bissetriz  $\overrightarrow{BD}$ , com origem em  $B$ , intersectou o segmento  $AC$  em  $D$ , determinando o segmento  $BD$ . Diz-se que  $\overrightarrow{BD}$  é bissetriz interna, pois divide o ângulo interno  $\widehat{B}$ . Analogamente a bissetriz  $\overrightarrow{BC'}$ , com origem em  $B$ , intersectou o prolongamento do segmento  $AC$  em  $C'$ , determinando o segmento  $BC'$ , logo a semirreta  $\overrightarrow{BC'}$  é bissetriz externa, pois divide o ângulo externo formado pela semirreta  $\overrightarrow{AB}$  e  $BC$ .

Dessa forma, uma bissetriz interna divide o ângulo interno do triângulo e intersecta o lado do triângulo oposto ao vértice de origem, enquanto que a bissetriz externa divide o

ângulo externo de um triângulo e intersecta o prolongamento do lado oposto ao vértice de origem.

Figura 99 – Bissetrizes



Fonte: Elaborado pelo autor

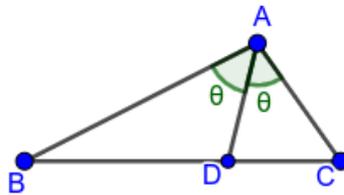
A apresentação do Teorema das Bissetrizes foi abordado por Euclides em sua obra Elementos.

Caso o ângulo de um triângulo seja cortado em dois, e a reta que corta o ângulo também corte a base, os segmentos da base terão a mesma razão que os lados restantes do triângulo; e, caso os segmentos da base tenham a mesma razão que os lados restantes do triângulo, a reta, sendo ligada do vértice até o ponto de secção, cortará o ângulo do triângulo em dois. [7]

### 3.3.3.1 Teorema das Bissetrizes internas

No triângulo  $\triangle ABC$  o ponto  $D$  é o pé da bissetriz interna  $AD$ .

Figura 100 – Bissetriz Interna



Fonte: Elaborado pelo autor

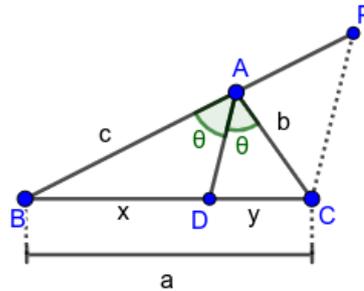
**Teorema 11.** Se no triângulo  $\triangle ABC$ ,  $D$  é o pé da bissetriz interna  $AD$ , relativa ao lado  $BC$  e sendo  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|AB| = c$ ,  $|BD| = x$  e  $|CD| = y$ , então vale a proporção:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

**Demonstração.** Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e o segmento  $AD$ , tal que  $AD$  é a bissetriz interna, com  $D$  pertencente ao lado  $BC$ .

- 1) Traça-se por  $C$  uma reta paralela a  $AD$  que intersecta o prolongamento do lado  $AB$  em  $P$ , logo  $PC$  é paralelo a  $AD$ ;

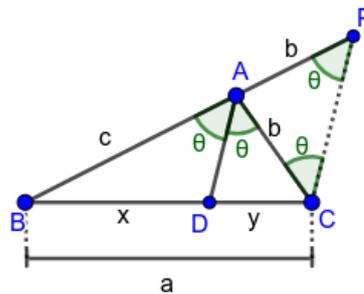
Figura 101 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Internas - Parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

- 2)  $BP$  é transversal as paralelas  $AD$  e  $PC$ , então  $\widehat{BPC} = \widehat{BAD} = \theta$ ;
- 3) Analogamente,  $AC$  é transversal as paralelas  $AD$  e  $PC$ , logo  $\widehat{CAD} = \widehat{ACP} = \theta$ ;
- 4) Os ângulos da base  $PC$  do triângulo  $\triangle ACP$  são iguais a  $\theta$ , então o triângulo  $\triangle ACP$  é isósceles, dessa forma conclui-se que  $|AP| = |AC| = b$ .

Figura 102 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Internas - Parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o segmento  $AD$  é paralelo ao segmento  $PC$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}.$$

C.Q.D.

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

□

Para a recíproca do Teorema das Bissetriz Internas temos que

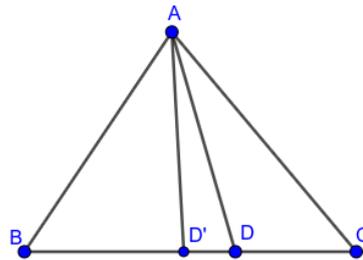
**Teorema 12.** *Seja o triângulo  $\triangle ABC$  com  $D \in BC$ , se  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DC|}$ , então  $D$  é o pé da bissetriz interna do triângulo  $\triangle ABC$ .*

**Demonstração.** *Seja o  $\triangle ABC$  com  $D \in BC$ , tal que  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DC|}$ , mas suponha que  $D$  não é o pé da bissetriz interna do triângulo  $\triangle ABC$ .*

Pelo Teorema das Bissetriz Internas existe um ponto  $D'$  em  $BC$ , conforme a figura 103, tal que  $D'$  é o pé da bissetriz interna do triângulo  $\triangle ABC$ , logo vale a relação  $\frac{|AB|}{|BD'|} = \frac{|AC|}{|D'C|}$ , que pode escrita como

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD'|}{|D'C|} \quad (3.14)$$

Figura 103 – Prova da Recíproca do Teorema das Bissetrizes Internas



Fonte: Elaborado pelo autor

Por hipótese vale a seguinte relação

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

Daí, segue que

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \quad (3.15)$$

De (3.14) e (3.15) obtém-se,

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BD'|}{|D'C|}$$

Soma-se 1 a ambos os lados da igualdade,

$$\frac{|BD|}{|DC|} + 1 = \frac{|BD'|}{|D'C|} + 1$$

Obtém-se

$$\frac{|BD| + |DC|}{|DC|} = \frac{|BD'| + |D'C|}{|D'C|}$$

Segue que o segmento  $BC = BD \cup DC$  e o segmento  $BC = BD' \cup D'C$ , logo  $|BC| = |BD| + |DC| = |BD'| + |D'C|$

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|D'C|}$$

Daí, conclui-se que  $|DC| = |D'C|$ . Fazendo  $|DC| = m$ ,  $|D'D| = n$ , então

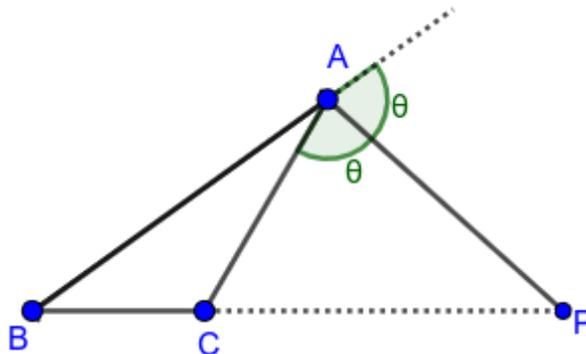
$$m = m + n$$

O que só é verdade se  $n = 0$ , o que implica que o ponto  $D$  e  $D'$  são coincidentes, o que é uma contradição, pois por hipótese  $D$  não é o pé da Bissetriz interna. Portanto, resta concluir que se  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DC|}$ , então  $D$  é o pé da bissetriz interna.

### 3.3.3.2 Teorema das Bissetrizes externas

No triângulo  $\triangle ABC$  o ponto  $P$  é pé da bissetriz externa  $AP$ .

Figura 104 – Bissetriz externa



Fonte: Elaborado pelo autor

**Teorema 13.** Se no triângulo  $\triangle ABC$  o ponto  $P$  é pé da bissetriz externa relativa ao lado  $BC$  e sendo  $|AB| = c$ ,  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|BP| = x$  e  $|PC| = y$ , então vale a proporção:

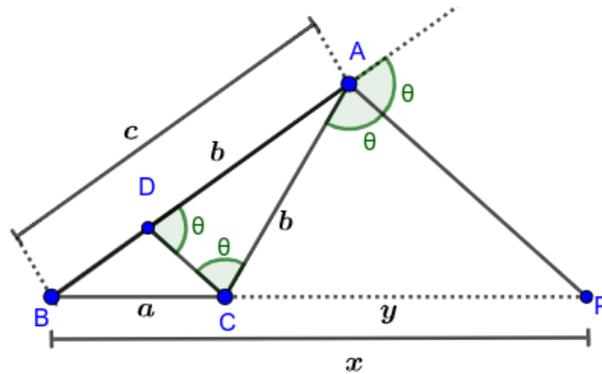
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

**Demonstração.** Seja o triângulo  $\triangle ABC$ , tal que a bissetriz externa  $AP$ , traçada com origem no vértice  $A$ , intersecta o prolongamento do lado  $BC$  em  $P$ .

- 1) Traça-se por  $C$  uma reta paralela a bissetriz externa  $AP$  que intercepta  $AB$  em  $D$ .
- 2) Como  $AC$  é transversal as paralelas  $AP$  e  $DC$ , então  $\widehat{PAC} = \widehat{ACD} = \theta$ .
- 3) O ângulo formado pelo segmento  $AP$  e a reta que contém  $AB$  é igual ao ângulo  $\theta$ , como  $DC$  é paralelo a  $AP$  e  $AB$  é transversal, então  $\widehat{ADC} = \theta$ .

O triângulo  $\triangle ADC$  é isósceles, dado que os ângulos da base  $CD$  são iguais, assim  $|AD| = b$  (conforme a figura 105).

Figura 105 – Demonstração do Teorema das Bissetrizes Externas



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $CD$  é paralelo a  $AP$ , então pelo Teorema de Tales

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$$

C.Q.D.

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

□

Para a recíproca do Teorema das Bissetrizes Externas, temos

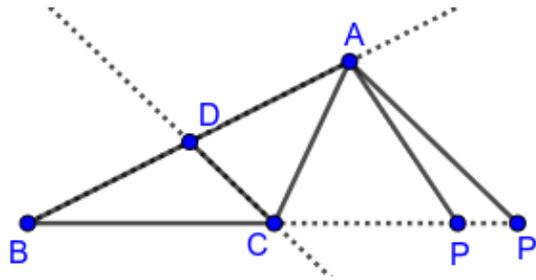
**Teorema 14.** *Seja o triângulo  $\triangle ABC$  com  $P$  pertencendo a semirreta  $\overrightarrow{BC}$ , com origem em  $B$ . Se vale a relação  $\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|AC|}$ , então  $P$  é o pé da bissetriz externa do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao lado  $BC$ .*

**Demonstração.** *Seja o triângulo  $\triangle ABC$  com  $P$  pertencendo a semirreta  $\overrightarrow{BC}$ , com origem em  $B$ . Suponha que  $\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|AC|}$ , mas  $P$  não é o pé da bissetriz externa do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao lado  $BC$ .*

Pelo Teorema das Bissetrizes Externas existe um ponto  $P'$  que é pé da bissetriz externa relativa ao lado  $BC$  do triângulo  $\triangle ABC$ , logo vale a relação  $\frac{|BP'|}{|AB|} = \frac{|CP'|}{|AC|}$  que pode ser escrita como

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP'|}{|CP'|} \quad (3.16)$$

Figura 106 – Prova da recíproca do Teorema das Bissetrizes Externas



Fonte: Elaborado pelo autor

Por hipótese vale a seguinte relação

$$\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|AC|}$$

Daí, segue que

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} \quad (3.17)$$

De (3.16) e (3.17) obtém-se

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|BP'|}{|CP'|}$$

Somando-se  $(-1)$  a ambos os lados da igualdade

$$\frac{|BP|}{|CP|} - 1 = \frac{|BP'|}{|CP'|} - 1$$

Obtém-se

$$\frac{|BP| - |CP|}{|CP|} = \frac{|BP'| - |CP'|}{|CP'|}$$

Segue que  $BP = BC \cup CP$  e  $BP' = BC \cup CP'$ , logo  $|BP| = |BC| + |CP|$  e  $|BP'| = |BC| + |CP'|$ . Daí segue que  $|BC| = |BP| - |CP| = |BP'| - |CP'|$ , assim

$$\frac{|BC|}{|CP|} = \frac{|BC|}{|CP'|}$$

Logo,  $|CP| = |CP'|$ . Fazendo  $|CP| = m$  e  $|PP'| = n$ , então  $m = m + n$ .

O que só é verdade se  $n = 0$ , o que implica que o ponto  $P$  e  $P'$  são coincidentes, o que é uma contradição, por hipótese  $P$  não é o pé da Bissetriz. Portanto, se vale a relação, então  $P$  é o pé da bissetriz externa.

### 3.3.4 Teorema de Ceva

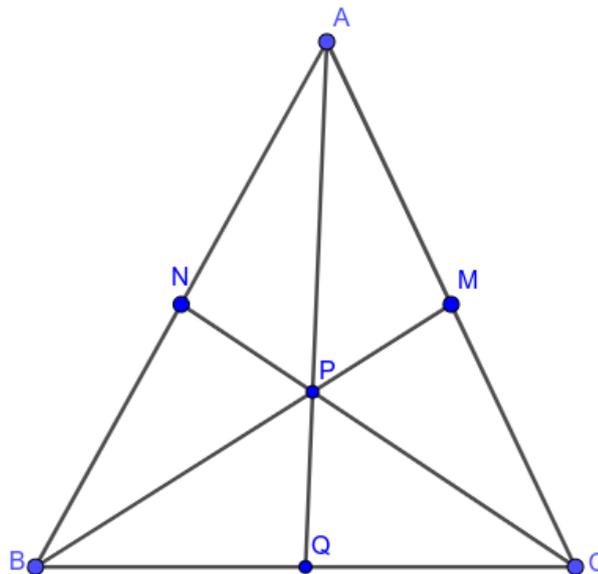
Ceviana<sup>3</sup> é todo segmento de reta que liga a vértice de um triângulo ao lado oposto a vértice deste triângulo.

**Teorema 15.** *Sejam  $M$ ,  $N$  e  $Q$  pontos, respectivamente, sobre os lados  $AC$ ,  $AB$  e  $BC$  do triângulo  $\triangle ABC$ . As cevianas  $AQ$ ,  $BM$  e  $CN$  intersectam-se em um ponto  $P$ , se, e somente se, vale a seguinte relação:*

$$\frac{|NA|}{|NB|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = 1$$

**Demonstração.** *Seja  $ABC$  um triângulo e  $P$  um ponto interno. Suponha que as cevianas do triângulo  $ABC$  intersectam-se no ponto  $P$ .*

Figura 107 – Ponto de interseção no Teorema de Ceva

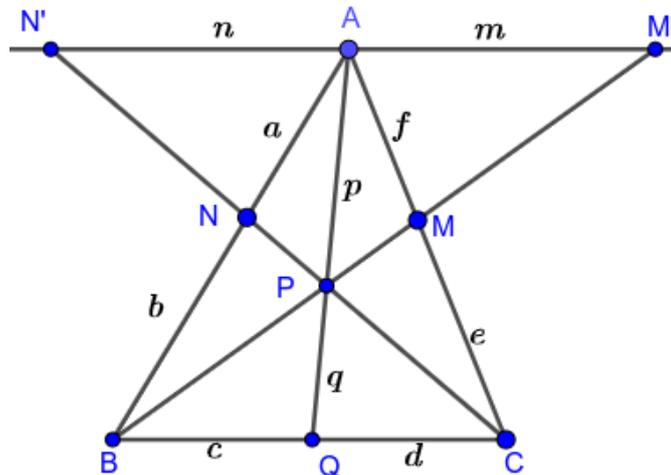


Fonte: Elaborado pelo autor

<sup>3</sup> O termo ceviana tem origem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva idealizador do Teorema de Ceva, publicado em 1678 no livro “De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio”. Disponível em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Giovanni\\_Ceva](https://pt.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva), acesso em 06 out. 2023

Traça-se por  $A$  uma reta paralela a  $BC$ , tal que o prolongamento de  $CN$  e  $BM$  encontre a paralela a  $BC$ , respectivamente, em  $N'$  e  $M'$ . Denota-se a reta paralela a  $BC$  de  $\overleftrightarrow{N'M'}$ , ainda denota-se  $|NA| = a$ ,  $|NB| = b$ ,  $|QB| = c$ ,  $|QC| = d$ ,  $|MC| = e$  e  $|MA| = f$ . Seja ainda,  $|N'A| = n$ ,  $|M'A| = m$ ,  $|PA| = p$  e  $|PQ| = q$ , conforme a figura 108.

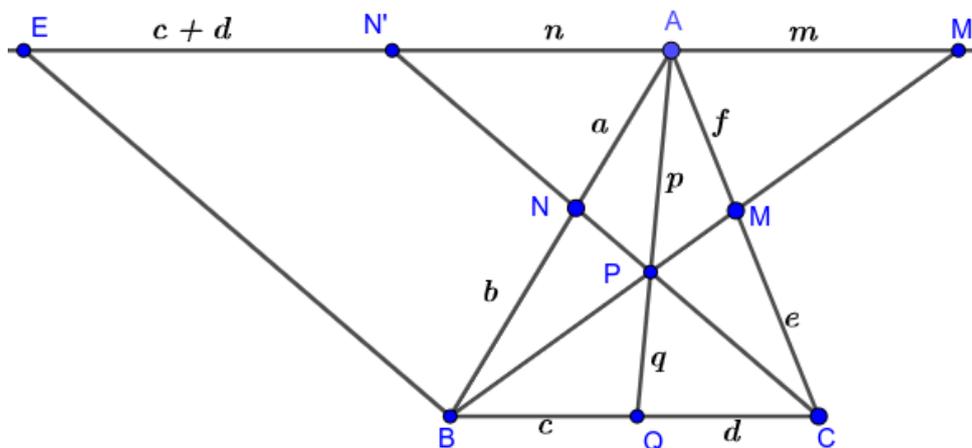
Figura 108 – Traçando a reta  $\overleftrightarrow{N'M'}$  paralela ao segmento  $BC$



Fonte: Elaborado pelo autor

Traça-se pelo vértice  $B$  até um ponto  $E$ , que pertence a reta  $\overleftrightarrow{N'M'}$ , o segmento de reta  $BE$  paralelo ao segmento de reta  $CN'$ . Como  $EN'$  é paralelo a  $BC$  e  $CN'$  é paralelo a  $BE$ , então, pela Definição 10, o quadrilátero  $BCN'E$  é um paralelogramo, daí conclui-se que  $|EN'| = |BC| = c + d$ .

Figura 109 – Traçando o segmento  $BE$  paralelo ao segmento  $CN'$



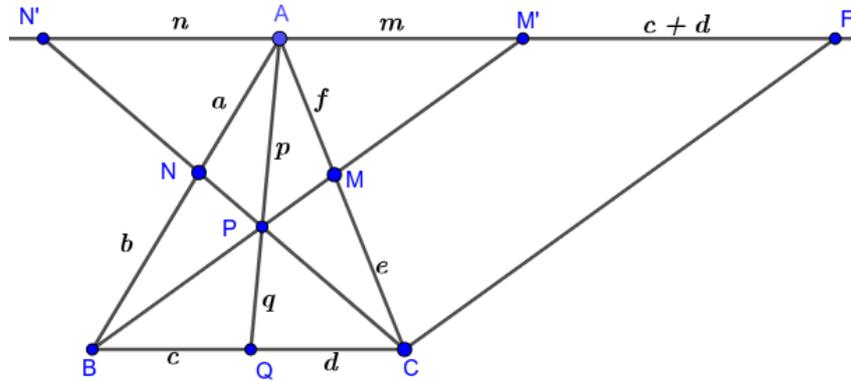
Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $NN'$  é paralelo a  $BE$ , então pelo Teorema de Tales,

$$\frac{b}{a} = \frac{c + d}{n} \quad (3.18)$$

Analogamente, traçando-se pelo vértice  $C$  até um ponto  $F$ , que pertence a  $\overleftrightarrow{N'M'}$ , um segmento de reta paralelo a  $BM'$ , obtém-se que  $|M'F| = |BC| = c + d$ .

Figura 110 – Traçando o segmento  $CF$  paralelo ao segmento  $BM'$



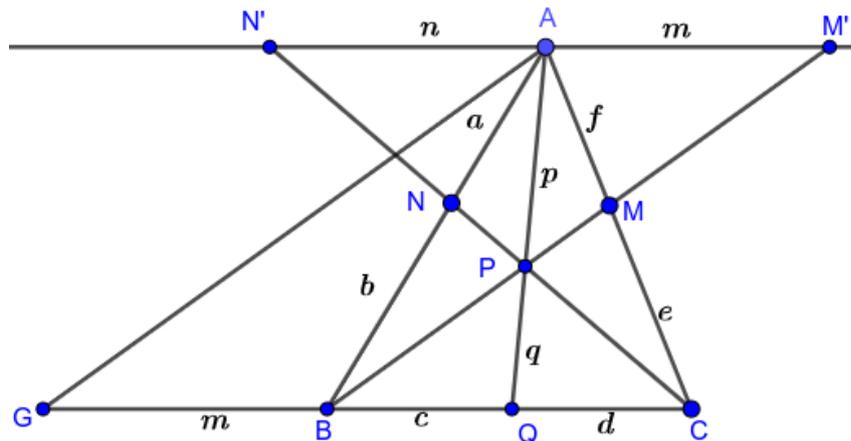
Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $MM'$  é paralelo a  $CF$ , então pelo Teorema de Tales,

$$\frac{f}{e} = \frac{m}{c+d} \quad (3.19)$$

Analogamente, traçando-se pelo vértice  $A$  até um ponto  $G$ , que pertence ao prolongamento do segmento  $BC$ , um segmento de reta paralelo a  $BM'$ , obtém-se que  $|GB| = |AM'| = m$ .

Figura 111 – Traçando o segmento  $GA$  paralelo ao segmento  $BM'$



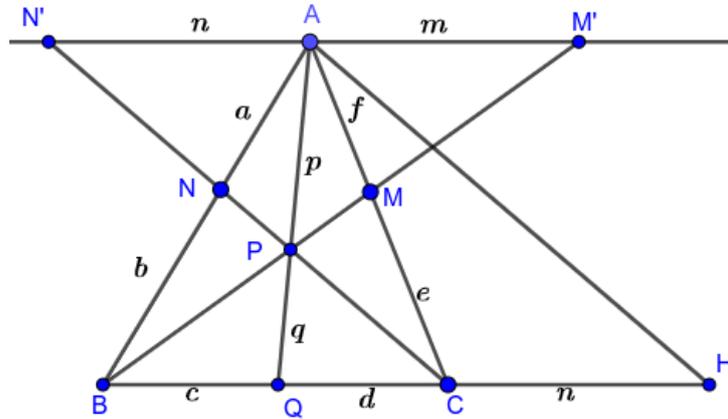
Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $PB$  é paralelo a  $AG$ , então pelo Teorema de Tales,

$$\frac{c}{m} = \frac{q}{p} \quad (3.20)$$

Analogamente, traçando-se pelo vértice  $A$  até um ponto  $H$ , que pertence ao prolongamento do segmento  $BC$ , um segmento de reta paralelo a  $N'C$ , obtém-se que  $|HC| = |AN'| = n$ .

Figura 112 – Traçando o segmento  $AH$  paralelo ao segmento  $CN'$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $PC$  é paralelo a  $AH$ , então pelo Teorema de Tales,

$$\frac{q}{p} = \frac{d}{n} \quad (3.21)$$

De (3.20) e (3.21):

$$\frac{c}{m} = \frac{d}{n}$$

Donde se obtém,

$$\frac{d}{c} = \frac{n}{m} \quad (3.22)$$

Faz-se o produto de (3.18), (3.19) e (3.22).

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{f}{e} \cdot \frac{d}{c} = \frac{(c+d)}{n} \cdot \frac{m}{(c+d)} \cdot \frac{n}{m} = 1$$

*C.Q.D.*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$$

□

Para a recíproca do Teorema de Ceva temos

**Teorema 16.** *Se no triângulo  $\triangle ABC$ ,*

$$\frac{|NA|}{|NB|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = 1$$

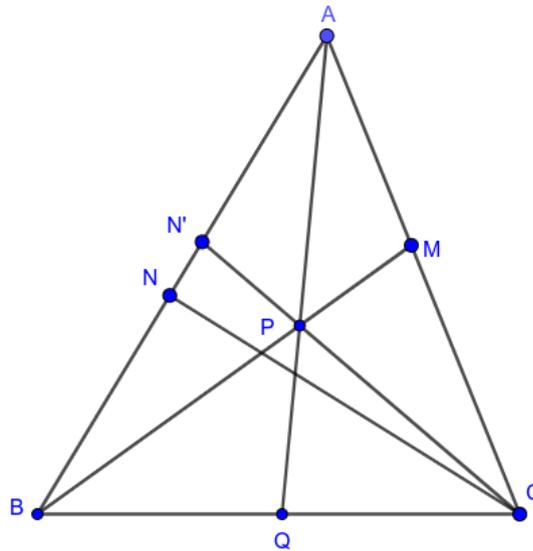
*então as cevianas  $AQ, BM$  e  $CN$  intersectam-se em um ponto  $P$ .*

**Demonstração.** *Suponha por absurdo que  $AQ, BM$  e  $CN$  não intersectam-se em  $P$ , mas que vale a relação:*

$$\frac{|NA|}{|NB|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = 1 \quad (3.23)$$

Seja  $P \in AQ \cap BM$  e  $N' \in AB$ , tal que  $N \neq N'$ , conforme a figura 113.

Figura 113 – Demonstração da recíproca do Teorema de Ceva



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Ceva vale a seguinte relação.

$$\frac{|N'A|}{|N'B|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = 1 \quad (3.24)$$

Igualando (3.23) e (3.24).

$$\frac{|NA|}{|NB|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = \frac{|N'A|}{|N'B|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|}$$

Logo, concluí-se que  $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|N'A|}{|N'B|}$ .

Seja, na figura 113,  $|N'A| = x$ ,  $|NN'| = y$  e  $|NB| = z$ .

Logo,

$$|NA| = |NN'| + |N'A| = x + y$$

e

$$|N'B| = |NN'| + |NB| = y + z$$

Então,

$$\frac{x + y}{z} = \frac{x}{y + z}$$

Somando-se 1 a ambos os membros da igualdade,

$$\frac{x + y}{z} + 1 = \frac{x}{y + z} + 1$$

Obtém-se,

$$\frac{x + y + z}{z} = \frac{x + y + z}{y + z}$$

Logo resta concluir que  $z = z + y$ , o que só é verdade se  $y = 0$ , o que é absurdo, pois isso implica que  $N = N'$ , logo  $|CN| = |CN'|$  e por consequência a interseção as cevianas  $AQ$ ,  $BM$  e  $CN$  intersectariam-se em  $P$ , o que contraria a hipótese. Portanto, resta concluir que se vale a relação

$$\frac{|NA|}{|NB|} \cdot \frac{|QB|}{|QC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|} = 1$$

então as cevianas  $AQ$ ,  $BM$  e  $CN$  intersectam-se em  $P$ .

## 4 Aplicações do Teorema de Tales

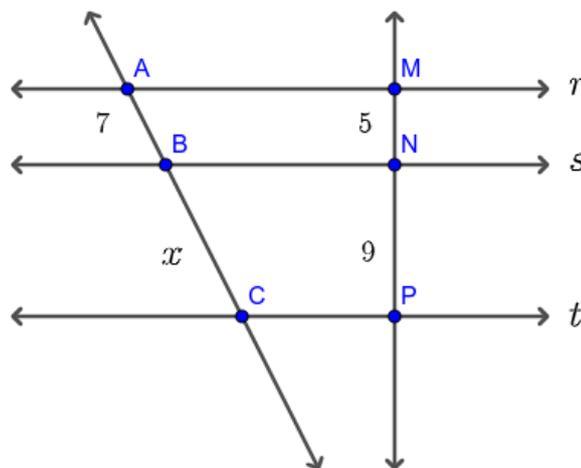
O Teorema de Tales é uma ferramenta matemática muito versátil para resolução de problemas. Sua aplicação vai desde o cálculo do comprimento de um segmento ao trabalho com área. Neste capítulo abordam-se alguns problemas solucionáveis por meio do Teorema de Tales.

### 4.1 Aplicações básicas do Teorema de Tales

Aqui apresenta-se uma lista de problemas cuja aplicação do Teorema de Tales ocorre de forma imediata, ou seja, conhecendo-se os comprimentos dos segmentos aplica-se o teorema de forma direta, sem necessidade de outros elementos ou mesmo retas auxiliares.

**Problema 1.** *Determine o valor de  $x$  na figura 114, sabendo que as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são mutuamente paralelas.*

Figura 114 – Problema 1



Fonte: Elaborado pelo autor

**Solução.**

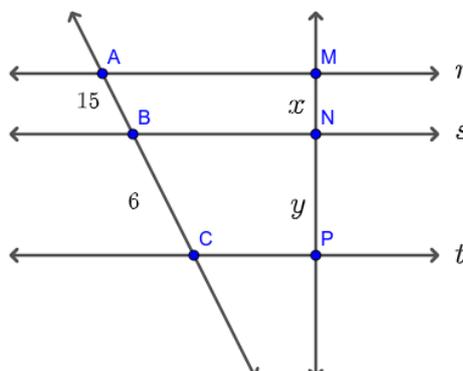
Como as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são mutuamente paralelas e intersectam duas transversais, então é imediato pelo Teorema de Tales que:

$$\frac{x}{7} = \frac{9}{5}$$

Desenvolvendo obtém-se  $x = 12,6$ .

**Problema 2.** O professor de matemática disse aos alunos da turma que  $x + y = 14$  e que as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são mutuamente paralelas.

Figura 115 – Problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Após resolver o problema os alunos fizeram algumas afirmações. Qual (is) as afirmação (ões) correta (s)?

- a)  $x$  é maior do que  $y$ .      b)  $x$  é o dobro de  $y$ .      c)  $x = \frac{2y}{5}$   
d)  $y = \frac{2x}{5}$       e)  $x - y = 6$

**Solução.**

A solução do problema é dividido em duas partes:

1ª parte) Obter o valor de  $x$  e  $y$

Como as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são mutuamente paralelas e intersectam duas transversais, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{15}{6} \quad (4.1)$$

Desenvolvendo, obtém-se  $6 \cdot x - 15 \cdot y = 0$ .

Multiplicando por 15 a equação  $x + y = 14$ , obtém-se:

$$15 \cdot x + 15 \cdot y = 210 \quad (4.2)$$

Fazendo (4.1) + (4.2), obtém-se:

$$21 \cdot x = 210 \quad (4.3)$$

Daí,  $x = 10$ .

Aplicando o resultado obtido em (4.3) na expressão  $x + y = 14$ , obtemos:

$$y = 4.$$

2ª parte) Análise das afirmações

No **item a)** afirma-se que  $x > y$ . Afirmação verdadeira, pois  $10 > 4$ .

No **item b)** afirma-se que  $x > 2 \cdot y$ . Afirmação verdadeira, pois  $10 > 8$ .

O **item c)** indica que  $x = \frac{2 \cdot y}{5}$ . Afirmação falsa, pois  $10 \neq \frac{8}{5}$

O **item d)** indica que  $y = \frac{2 \cdot x}{5}$ . Afirmação verdadeira, pois  $4 = \frac{20}{5}$

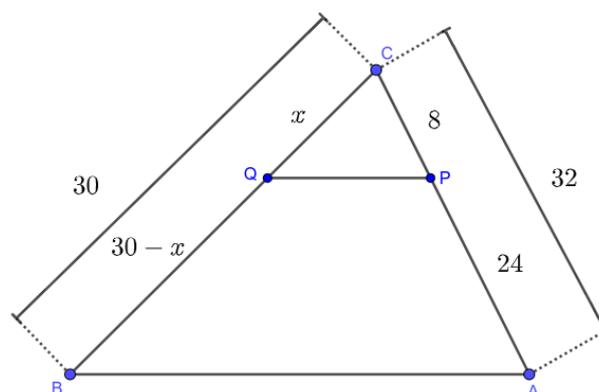
Por fim, o **item e)** indica que  $x - y = 6$ . Afirmação verdadeira, pois  $10 - 4 = 6$

**Problema 3.** Em um triângulo  $\triangle ABC$  os lados  $AC$  e  $BC$  medem 32 cm e 30 cm, respectivamente. Sobre o lado  $AC$ , a 8 cm do vértice  $C$ , tomamos um ponto  $P$ . Determine a distância de um ponto  $Q$  situado sobre o lado  $BC$ , até o vértice  $C$ , de maneira que  $PQ$  seja paralelo a  $AB$ .

**Solução.**

Considere a figura 116, a partir dos dados enunciado.

Figura 116 – Problema 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $PQ$  é paralelo ao segmento  $AB$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{30} = \frac{8}{32}.$$

Portanto,

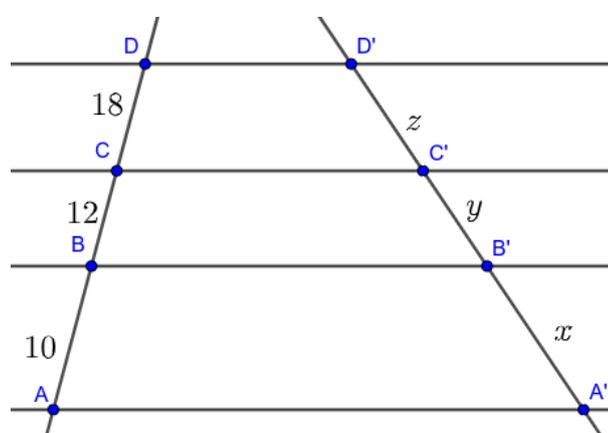
$$x = 7,5 \text{ cm.}$$

**Problema 4.** Uma família de 4 retas paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 10 cm, 12 cm e 18 cm, respectivamente. Obtenha as medidas dos segmentos que essa mesma família determina sobre uma outra transversal. Sabe-se que na segunda transversal o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede 120 cm.

**Solução.**

Seja  $x, y$  e  $z$  os respectivos segmentos correspondentes da segunda reta transversal tal que, de acordo com o enunciado,  $x + y + z = 120$  cm. Da primeira transversal a soma das medidas dos segmentos é 40, conforme a figura 117.

Figura 117 – Problema 4



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Tales valem as seguintes relações:

i) Obtendo  $x$

$$\frac{40}{10} = \frac{120}{x}$$

Daí,  $x = 30$

ii) Obtendo  $y$

$$\frac{40}{12} = \frac{120}{y}$$

Daí,  $y = 36$ .

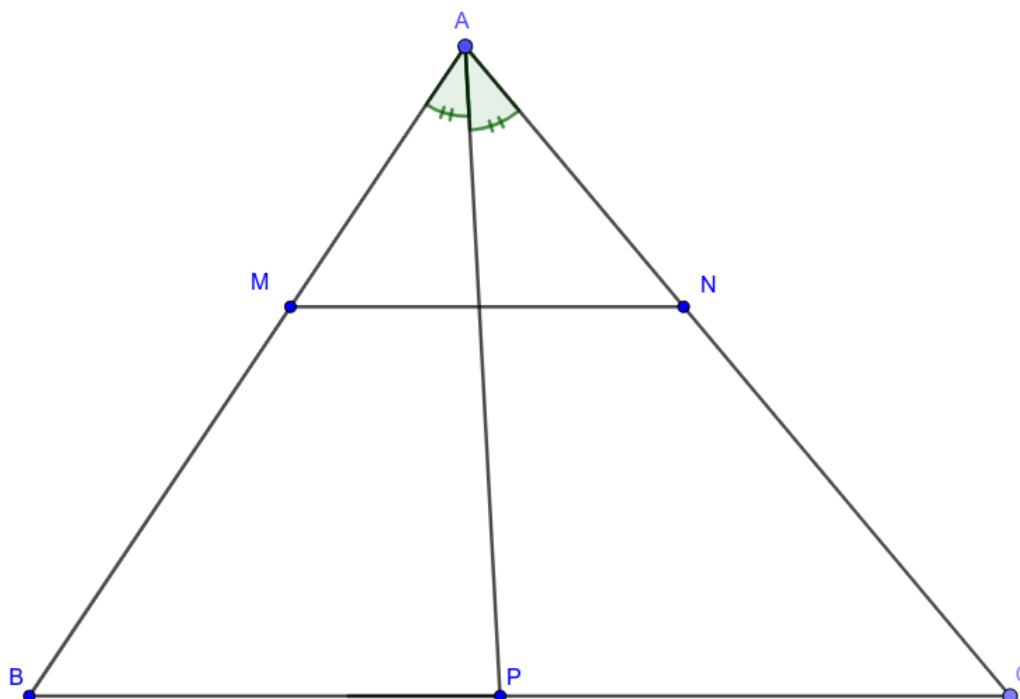
iii) Obtendo  $z$

$$\frac{40}{18} = \frac{120}{z}$$

Daí,  $z = 54$

**Problema 5.** (*Geometria - Coleção ProfMat [8]*) Em um triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $P$  o pé da bissetriz interna relativa a  $A$ . Marcamos respectivamente sobre  $AB$  e  $AC$  pontos  $M$  e  $N$  tais que  $|BM| = |BP|$  e  $|CN| = |CP|$ . Prove que  $MN$  é paralelo a  $BC$ .

Figura 118 – Ilustração do Problema 5



Fonte: Elaborado pelo autor

### Solução.

Como  $P$  é o pé da bissetriz interna, então segue pelo Teorema da Bissetriz interna que:

$$\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|AC|}$$

Do enunciado temos,

$$|BM| = |BP| \text{ e } |CN| = |CP|$$

Logo,

$$\frac{|BM|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|AC|}$$

Portanto, da recíproca do Teorema de Tales segue que se os segmentos são proporcionais, então  $MN$  é paralelo a  $BC$ .

## 4.2 Aplicações intermediárias do Teorema de Tales

Nesta seção a aplicação do Teorema de Tales acontece de forma menos imediata, isso implica dizer que faz-se necessário realizar algum ajuste geométrico ou traçar alguma paralela para que a aplicação do Teorema seja possível.

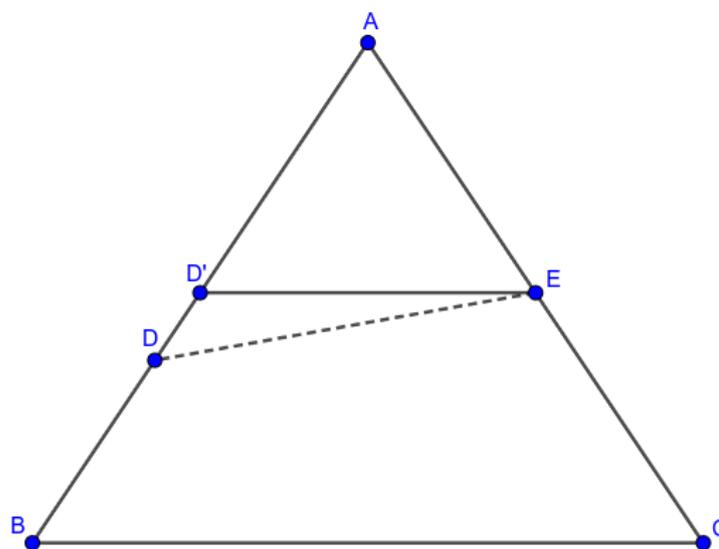
**Problema 6.** (Adaptado do Livro *Fundamentos da Matemática Elementar Volume 9* [9])  
 Dados um triângulo  $\triangle ABC$  e um segmento  $DE$  com  $D$  em  $AB$  e  $E$  em  $AC$ , prove que, se  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .

**Solução.**

Seja  $D'$  um ponto contido em  $AB$ , tal que  $D'E$  é paralelo a  $BC$ . Suponha, por absurdo que  $D$ , também em  $AB$ , é um ponto distinto de  $D'$ , mas que vale a relação

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

Figura 119 – 1ª Parte da solução do Problema 6



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AB|}{|D'B|} = \frac{|AC|}{|EC|} \quad (4.4)$$

Da hipótese temos que:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

Soma-se 1 a ambos os lados da igualdade,

$$\frac{|AD|}{|DB|} + 1 = \frac{|AE|}{|EC|} + 1$$

Desenvolve-se,

$$\frac{|AD| + |DB|}{|DB|} = \frac{|AE| + |EC|}{|EC|}$$

obtém-se

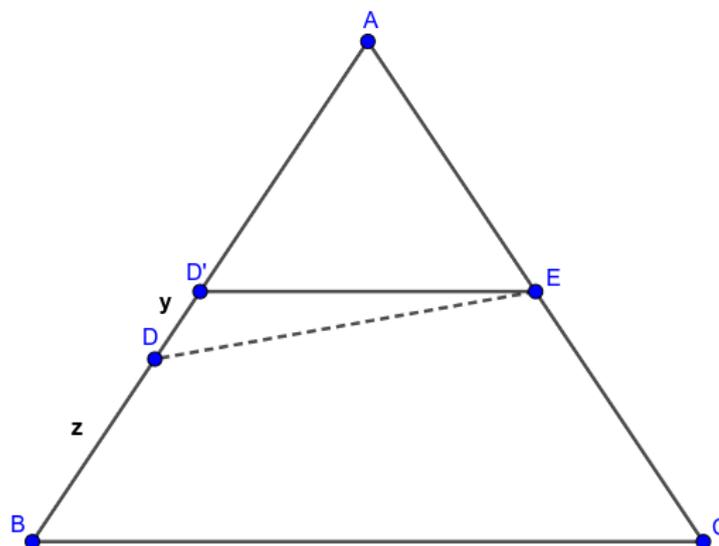
$$\frac{|AB|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|EC|} \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5) decorre que

$$\frac{|AB|}{|D'B|} = \frac{|AB|}{|DB|}$$

Logo,  $|D'B| = |DB|$ . Na figura 119, seja  $|DD'| = y$  e  $|DB| = z$ .

Figura 120 – 2ª Parte da solução do Problema 6



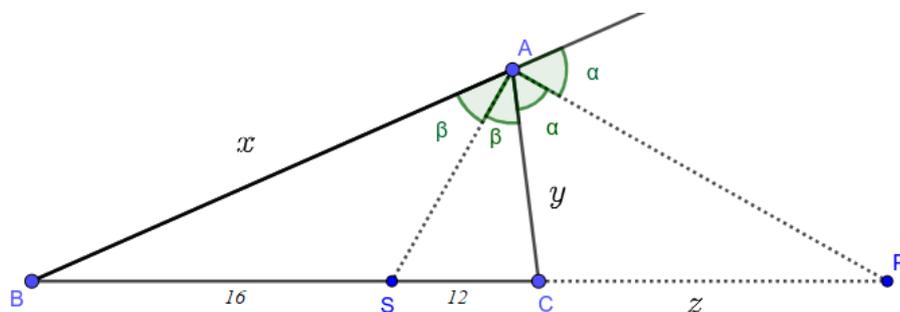
Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $|D'B| = |DB|$ , então  $y + z = z$

O que só verdade se  $y = 0$ , mas isso implica que  $D'$  e  $D$  são pontos coincidentes, o que é um absurdo, pois por hipótese  $D \neq D'$ . Portanto, resta concluir que se  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .

**Problema 7.** No triângulo  $\triangle ABC$ , os segmentos  $AS$  e  $AP$  são segmentos contidos nas bissetrizes, respectivamente, internas e externas, conforme a figura 121. Obtenha o valor de  $z$ .

Figura 121 – Problema 7



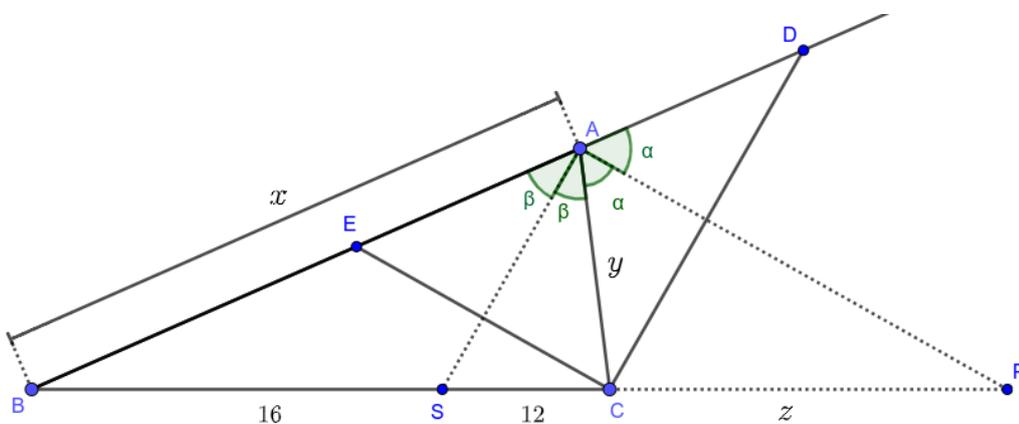
Fonte: Elaborado pelo autor

### Solução.

Considere os seguintes passos:

- Passo 1) Determina-se a semirreta  $\overrightarrow{BA}$ , com origem em  $B$ ,
- Passo 2) Defini-se na semirreta  $\overrightarrow{BA}$  um ponto  $D$  de tal modo que o segmento  $DC$  seja paralelo ao segmento  $AS$ ,
- Passo 3) Define-se em  $AB$  um ponto  $E$  de tal modo que  $EC$  seja paralelo a  $AP$ .

Figura 122 – Segmentos paralelos as bissetrizes  $AS$  e  $AP$

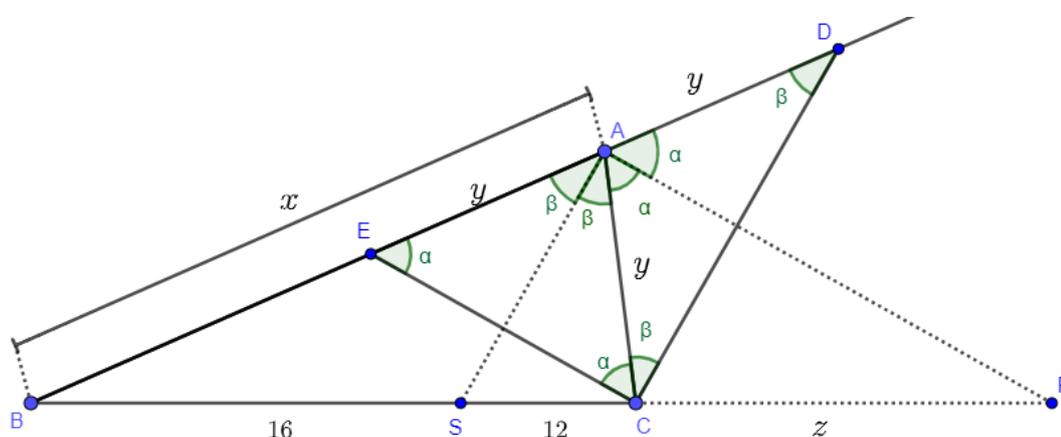


Fonte: Elaborado pelo autor

Da figura 122 obtém-se as seguintes conclusões:

- 1) A semirreta  $\overrightarrow{BA}$  é transversal aos segmentos paralelos  $EC$  e  $AP$ , logo pode-se concluir que  $\widehat{CEA} = \widehat{PAD} = \alpha$  por serem ângulos correspondentes,
- 2) O segmento  $AC$  é transversal as paralelas  $EC$  e  $AP$ , logo  $\widehat{ACE} = \widehat{CAP} = \alpha$  por serem ângulos alternos internos. Daí, concluí-se que  $|AE| = |AC| = |AD| = y$ ,
- 3) A semirreta  $\overrightarrow{BA}$  é transversal aos segmentos paralelos  $AS$  e  $DC$ , logo concluí-se que  $\widehat{BDC} = \widehat{BAS} = \beta$ , por serem ângulos correspondentes,
- 4) O segmento  $AC$  é transversal as paralelas  $AS$  e  $CD$ , logo  $\widehat{ACD} = \widehat{CAS} = \beta$  por serem ângulos alternos internos. Daí, concluí-se que  $|AD| = |AC| = y$ .

Figura 123 – Solução do Problema 7



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o segmento  $DC$  é paralelo ao segmento  $AS$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{16}{12} \quad (4.6)$$

Analogamente,  $EC$  é paralelo a  $AP$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{28 + z}{z} \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7) obtém-se:

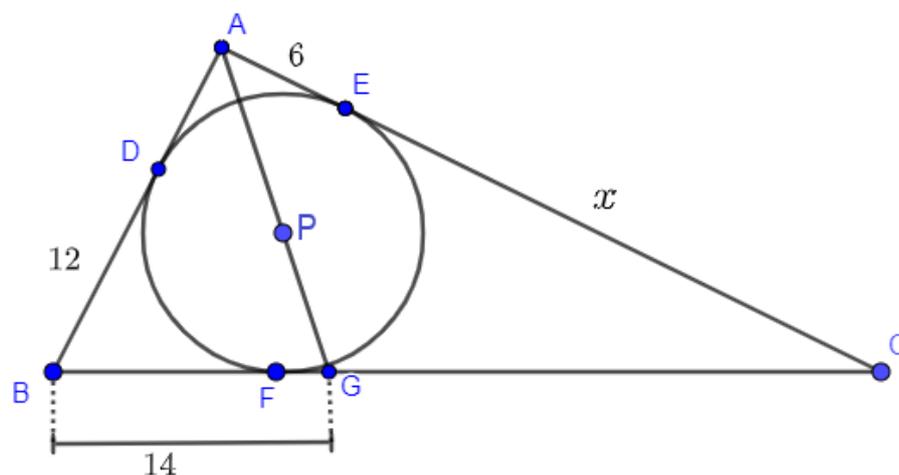
$$\frac{28 + z}{z} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Desenvolvendo, obtém-se,

$$z = 84.$$

**Problema 8.** Sabe-se que o círculo de centro  $P$  (figura 124) está inscrito no triângulo  $\triangle ABC$  e que  $D$ ,  $E$  e  $F$  são pontos de tangência, assim determine  $x$ .

Figura 124 – Problema 8 - 1



Fonte: Elaborado pelo autor

### Solução.

O triângulo  $\triangle ABC$  está circunscrito ao círculo de centro  $P$ , tangentes em  $D$ ,  $E$  e  $F$  e  $AG$  passa pelo centro  $P$ .

Como  $D$  e  $E$  são pontos da circunferência, então  $DP$  e  $EP$  são raios do círculo de centro  $P$ , logo  $|DP| = |EP|$ . Os triângulos  $\triangle ADP$  e  $\triangle AEP$  são ambos triângulos retângulos, dado que são retos, respectivamente, em  $D$  e  $E$  por serem pontos de tangências.

Segue ainda que o segmento  $AP$  é hipotenusa dos triângulos retângulos  $\triangle ADP$  e  $\triangle AEP$ .

Pelo Teorema de Pitágoras sabe-se que:

$$|AP|^2 = |AD|^2 + |DP|^2$$

e

$$|AP|^2 = |AE|^2 + |EP|^2$$

Igualando as expressões

$$|AD|^2 + |DP|^2 = |AE|^2 + |EP|^2$$

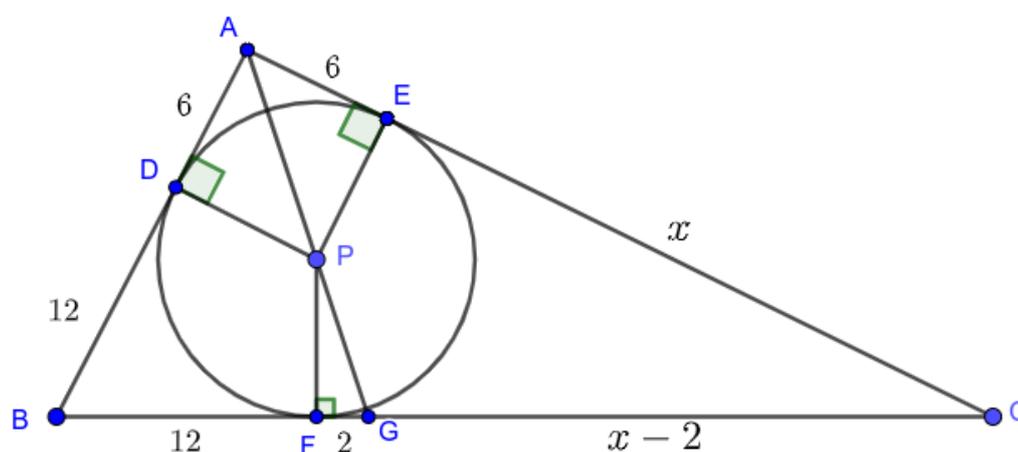
Sabe-se que  $|DP| = |EP|$  e  $|AE| = 6$ , logo

$$|AD|^2 = 6^2$$

Donde-se obtêm que  $|AD| = 6$ .

De modo análogo, conclui-se também que  $|BD| = |BF| = 12$ ,  $|CG| = |CE|$ . Como  $|BG| = 14$  e  $|BF| = 12$ , então conclui-se que  $|FG| = 2$ , o que nos leva ainda a concluir que  $|CG| = x - 2$ .

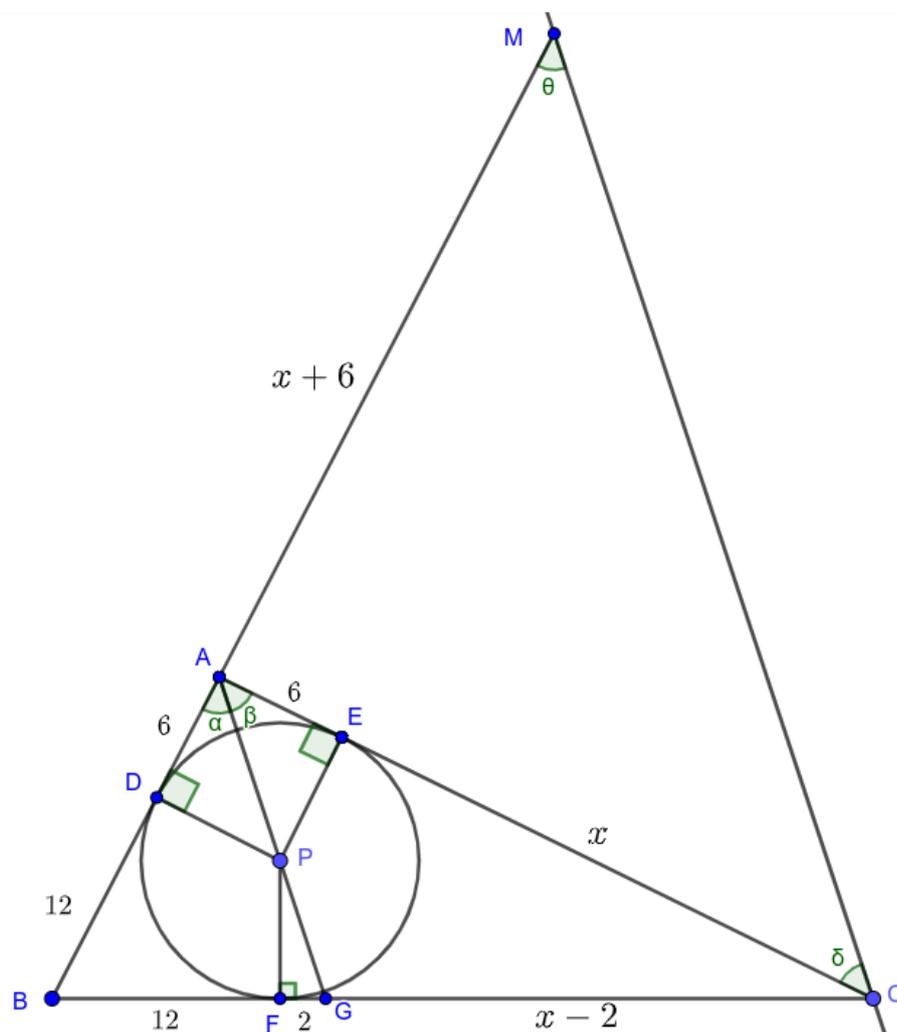
Figura 125 – Problema 8 - 2



Fonte: Elaborado pelo autor

- 1) Por  $C$  traça-se uma reta paralela a  $AG$  que encontra o prolongamento de  $BA$  em  $M$  (conforme a figura 126).
- 2) O segmento  $AC$  é transversal ao segmento  $AG$  e a reta  $\overleftrightarrow{CM}$ , paralelos entre si, logo o ângulo  $\beta = \delta$ , por serem alternos ângulos internos, e  $\alpha = \theta$  por serem ângulos correspondentes.
- 3) Como  $|AD| = |AE|$ ,  $|DP| = |EP|$  e  $\widehat{ADP} = \widehat{AEP} = 90^\circ$ , então o triângulo  $\triangle ADP$  é congruente ao triângulo  $\triangle AEP$  pelo caso  $LAL$ .
- 4) Como o triângulo  $\triangle ADP$  é congruente ao triângulo  $\triangle AEP$ , então  $\alpha = \beta$  e conclui-se que o ângulo  $\alpha = \beta = \delta = \theta$ .
- 5) O triângulo  $\triangle AMC$  é isósceles, dado que  $\delta = \theta$ , logo  $|AM| = |AC| = x + 6$ .

Figura 126 – Solução do Problema 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Dado que  $AG$  é paralelo a  $MC$ , então pelo Teorema de Tales, têm-se que:

$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|BG|}{|CG|}$$

Substituindo pelos comprimentos dos segmentos, obtém-se:

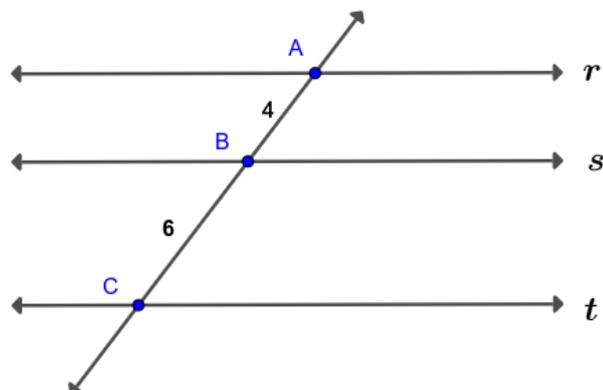
$$\frac{18}{x+6} = \frac{14}{x-2}$$

Daí, segue que:

$$x = 30.$$

**Problema 9.** As retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  da figura 127 são paralelas e a distância entre  $r$  e  $s$  é 3 cm, calcule a distância entre  $s$  e  $t$  sabendo que  $|AB| = 4$  e  $|BC| = 6$

Figura 127 – Problema 9

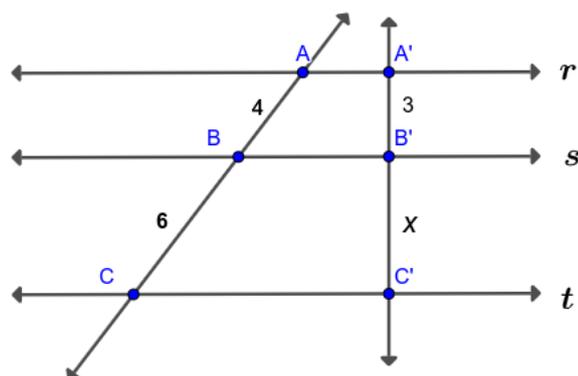


Fonte: Elaborado pelo autor

### Solução.

Traçamos uma reta perpendicular ao feixe de retas paralelas, que intersecta  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Do enunciado, a distância da reta  $r$  a  $s$  é de 3 cm, logo  $|A'B'| = 3$ . Seja  $x$  a distância entre as retas  $s$  e  $t$ , logo  $|B'C'| = x$ .

Figura 128 – Solução do Problema 9



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{x}$$

Donde-se obtêm,

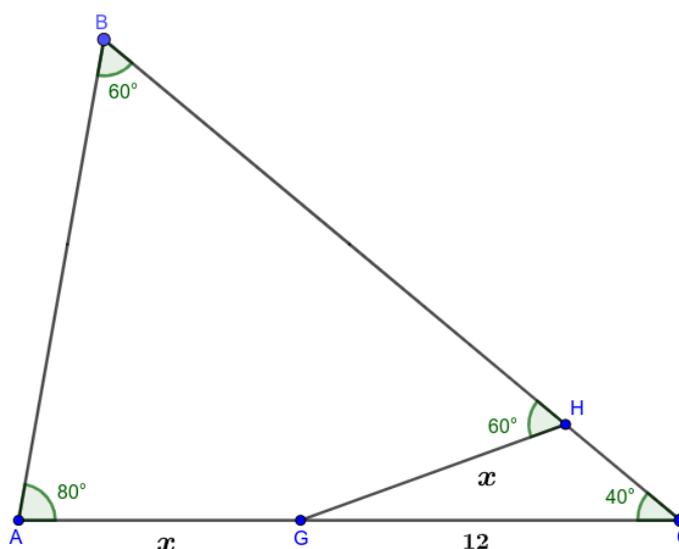
$$x = 4,5 \text{ cm}$$

### 4.3 Aplicações avançadas do Teorema de Tales

Nesta seção aborda-se aplicações onde faz-se necessário utilizar de artifícios geométricos para obter a solução do problema.

**Problema 10.** Considere a figura 129. Determine o valor de  $x$  no triângulo  $\triangle ABC$ , sabendo que  $|AG| = |HG| = x$ ,  $|AB| = x + 6$  e  $|CG| = 12$ .

Figura 129 – Problema 10



Fonte: Elaborado pelo autor

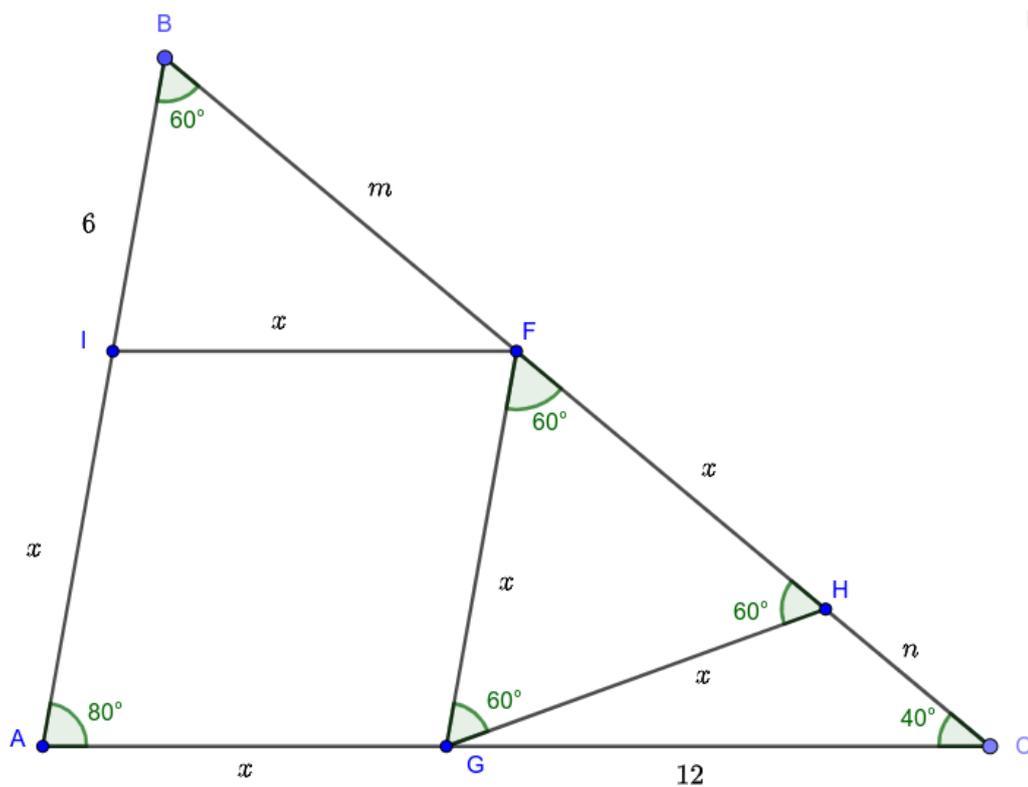
#### Solução.

Na figura 129 definimos:

- 1) Por  $G$  um segmento paralelo a  $AB$  que intersecta  $BC$  em  $F$ .
- 2) Por  $F$  traça-se um segmento paralelo a  $AC$  que intersecta  $AB$  em  $I$ .
- 3) obtém-se o quadrilátero  $ABFI$  e dado que  $AG$  é paralelo a  $IF$  e  $AI$  é paralelo a  $GF$ , então  $ABFI$  é um paralelogramo, logo  $|IF| = |AG| = x$  e  $|AI| = |GF|$
- 4) Sendo  $GF$  paralelo a  $AB$ , então  $\widehat{GFH} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ .
- 5) Como  $\widehat{GFH} = 60^\circ$  e  $\widehat{GFH} = 60^\circ$ , então o triângulo  $\triangle GFH$  é equilátero e, portanto,  $|HG| = |HF| = |GF| = x$ .
- 6) Como  $|GF| = x$  e  $|GF| = |AI|$ , então  $|AI| = x$ .
- 7) Sendo  $|AB| = x + 6$ , então  $|BI| = 6$ .

Faz-se  $|BF| = m$  e  $|CH| = n$ .

Figura 130 – Solução do Problema 10



Fonte: Elaborado pelo autor

Da figura 130, como  $IF$  é paralelo a  $AC$ , tem-se pelo Teorema de Tales que:

$$\frac{x}{6} = \frac{x+n}{m} \quad (4.8)$$

Analogamente, como  $GF$  é paralelo a  $AB$ , pelo Teorema de Tales:

$$\frac{12}{x} = \frac{x+n}{m} \quad (4.9)$$

Fazendo (4.8) igual a (4.9), obtém-se que:

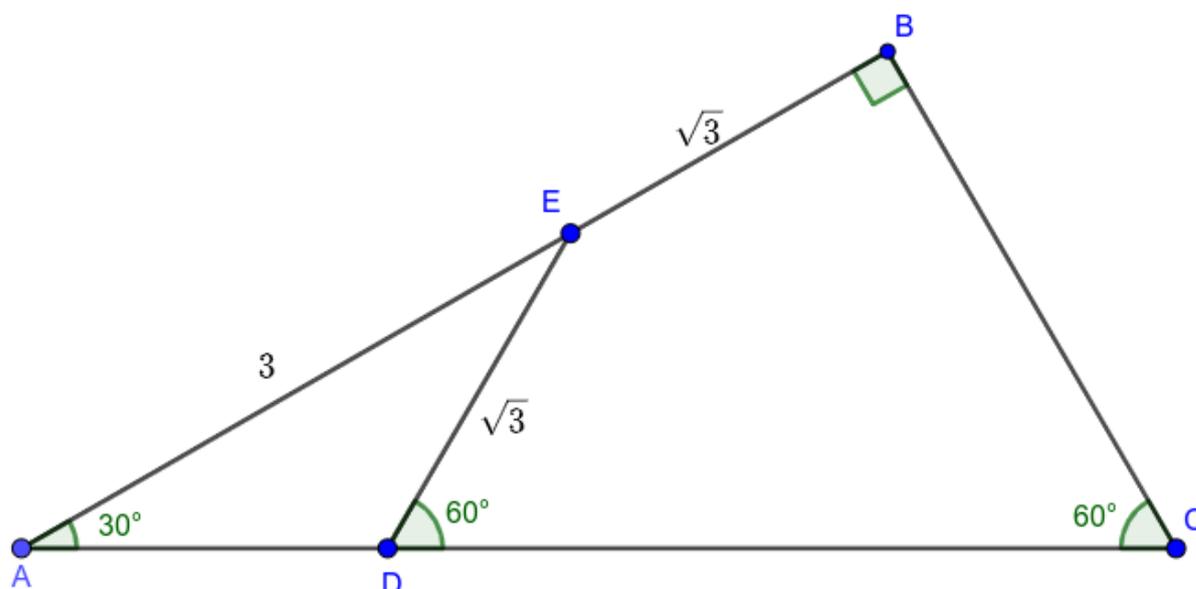
$$\frac{x}{6} = \frac{12}{x} \quad (4.10)$$

Desenvolvendo-se,

$$x = 2\sqrt{6}$$

**Problema 11.** Considere o triângulo  $\triangle ABC$  a seguir e os comprimentos dos segmentos nele indicados. Determine a área do triângulo  $\triangle ABC$

Figura 131 – Problema 11



Fonte: Elaborado pelo autor

**Solução.**

Na figura 131 definimos no segmento  $AC$  um ponto  $F$ , tal que o segmento  $EF$  seja paralelo a  $BC$ . Daí obtém-se as seguintes conclusões (veja a figura 132):

- 1) Como  $EF$  é paralelo a  $BC$ , então

$$\widehat{EFD} = \widehat{BCA} = 60^\circ$$

por serem ângulos correspondentes

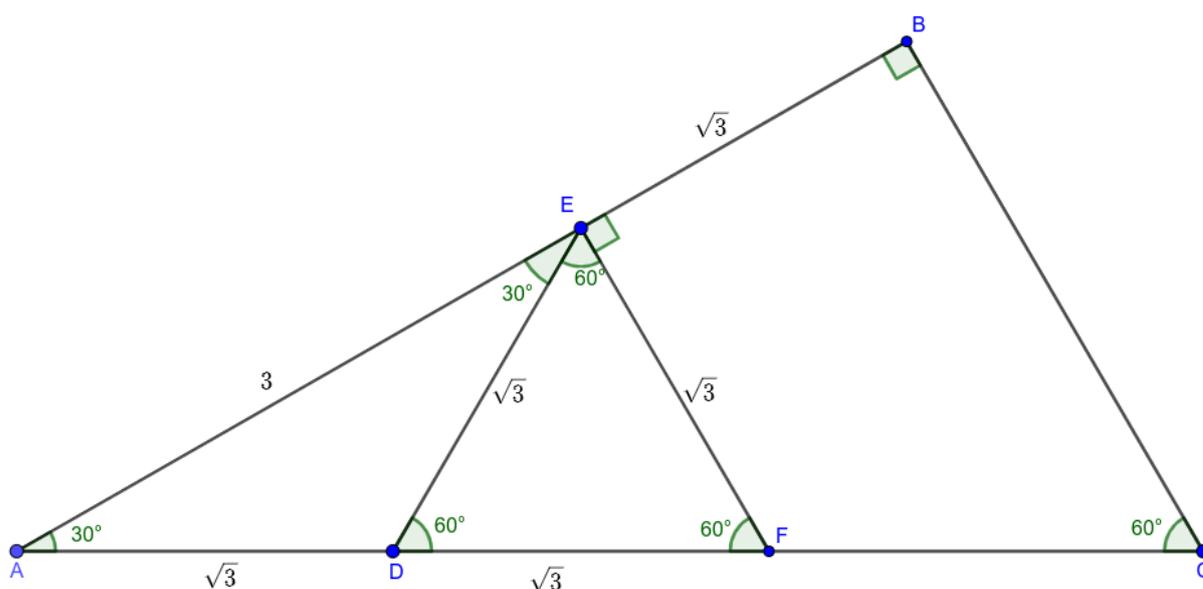
- 2) O triângulo  $\triangle ABC$  é reto em  $B$ , dado que  $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + 30^\circ$ , logo conclui-se que  $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = 90^\circ$  por serem ângulos correspondentes;
- 3) O ângulo  $\widehat{EDF}$  é externo ao triângulo  $\triangle ADE$ , logo a sua medida será

$$\widehat{EDF} = 60^\circ$$

Donde conclui que  $\widehat{AED} = 30^\circ$

- 4) Como no triângulo  $\triangle ADE$  os ângulos da base  $AE$  são iguais, então ele é isósceles e  $|AD| = |DE| = \sqrt{3}$ .
- 5) Como  $\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = 60^\circ$ , então  $\widehat{DEF} = 60^\circ$ .
- 6) O triângulo  $\triangle DEF$  é equilátero, dado que os três ângulos internos medem  $60^\circ$ , logo  $|DF| = |EF| = \sqrt{3}$ ;

Figura 132 – 1ª parte da solução do Problema 11



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $EF$  é paralelo a  $BC$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AE|}{|EB|}$$

Seja  $|FC| = x$ , segue que:

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{x} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

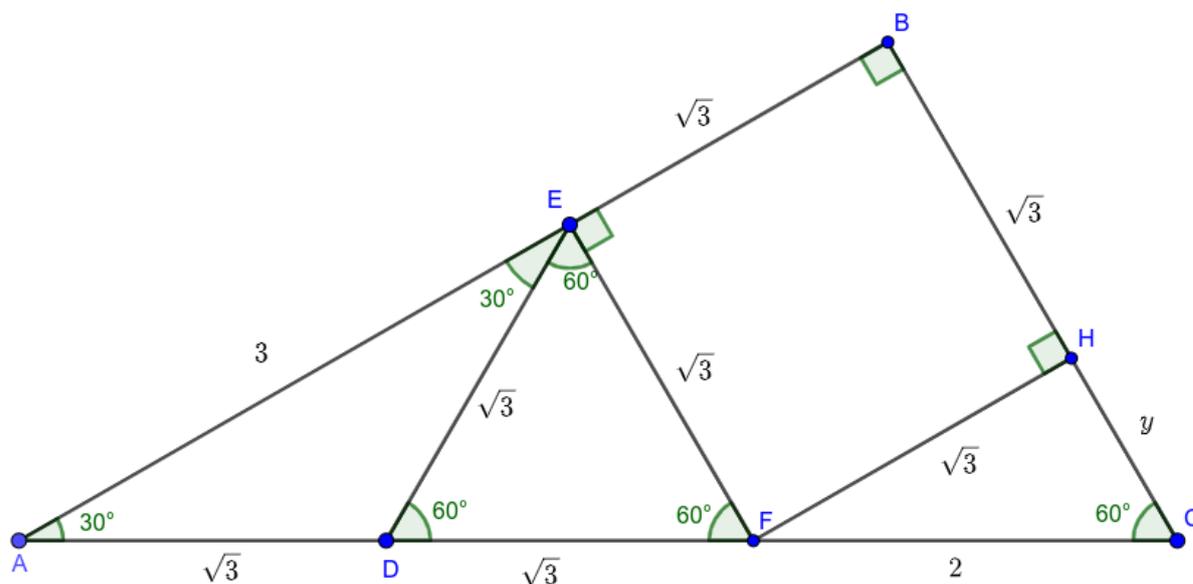
Desenvolvendo, obtém-se que  $x = 2$ . Daí, concluímos que  $|AC| = 2 + 2\sqrt{3}$ .

Para obter a área do triângulo  $\triangle ABC$  é necessário obter a medida do segmento  $BC$ . Na figura 132, por  $F$  traça-se um segmento paralelo a  $AB$  que intersecta  $BC$  em  $H$ .

Como  $FH$  é paralelo a  $EB$ , então  $\widehat{BFH} = 90^\circ$ , daí conclui-se que o quadrilátero  $BEFH$  é um quadrado e que  $|BH| = \sqrt{3}$ .

Na figura 133 faz-se  $|CH| = y$ .

Figura 133 – 2ª parte da solução do Problema 11



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $FH$  é paralelo  $EB$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|CH|}{|HB|} = \frac{|CF|}{|FA|}$$

Assim,

$$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

Desenvolvendo, obtém-se que:

$$y = 1$$

Daí, concluímos que a medida do segmento  $BC$  será

$$|BC| = 1 + \sqrt{3}$$

A área ( $S_{ABC}$ ) do triângulo será dado por

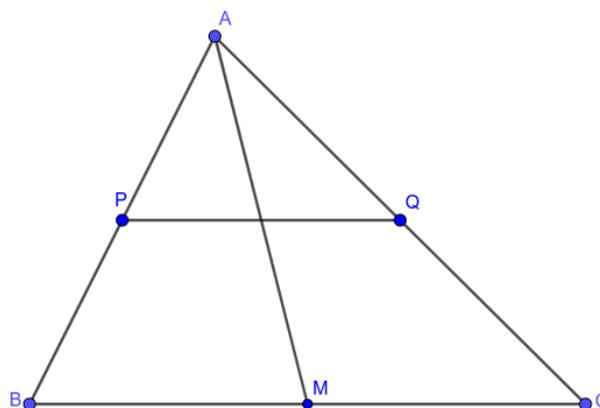
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{(1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{2} \\ &= 3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo  $\triangle ABC$  é  $3 + 2\sqrt{3}$ .

**Problema 12.** (Adaptado do POT 2012 [16]) No triângulo  $\triangle ABC$  (figura 134) os pontos  $P$  e  $Q$  estão sobre os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, tais que  $PQ$  seja paralelo  $BC$ . Prove que  $CP$ ,  $BQ$  e a mediana  $AM$ , com  $M$  em  $BC$ , intersectam-se em único ponto.

**Solução.**

Figura 134 – Solução do Problema 12



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Tales sabe-se que:

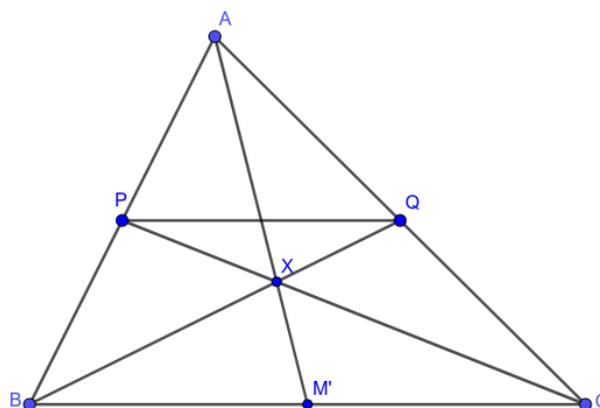
$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AQ|}{|CQ|}$$

Donde-se obtêm,

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|CQ|}{|AQ|} = 1 \quad (4.11)$$

Seja  $BQ \cap CP = X$ , suponha que  $M' \in BC$  tal que  $X \in AM'$  e  $M' \neq M$ .

Figura 135 – Ponto de interseção dos segmentos  $AM'$ ,  $CP$  e  $BQ$



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Teorema de Ceva, como  $AM'$ ,  $BQ$  e  $CP$  intersectam-se em  $X$ , então:

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BM'|}{|CM'|} \cdot \frac{|AQ|}{|CQ|} = 1$$

Como  $AM$  é mediana, então  $|BM| = |CM|$ . Daí, obtém-se que:

$$\frac{|BM|}{|CM|} = 1 \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.11) por (4.12), obtém-se:

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BM|}{|CM|} \cdot \frac{|CQ|}{|AQ|} = 1$$

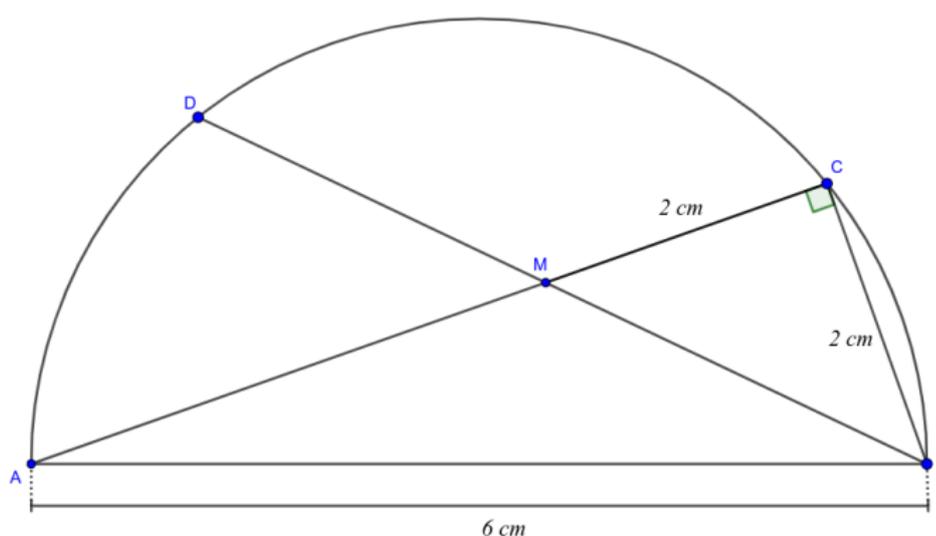
Pela recíproca do Teorema de Ceva conclui-se que  $AM$ ,  $BQ$  e  $CP$  concorrem em um único ponto, mas  $AM'$ ,  $BQ$  e  $CP$  concorrem em  $X$ , o que só é verdade se  $M' = M$ , o que é absurdo, pois por hipótese  $M \neq M'$ . Portanto, resta concluir que  $CP$ ,  $QB$  e a mediana  $AM$  são concorrentes em único ponto.

**Problema 13.** O segmento  $AB$  tem comprimento de 6 cm e é o diâmetro de um semicírculo, as cordas  $AC$  e  $BD$  intersectam-se no ponto  $M$ . Se os segmentos  $MC$  e  $BC$  têm comprimentos de 2 cm, respectivamente, qual é a área do triângulo  $\triangle BMA$ ?

**Solução.**

Dado que  $AB$  é diâmetro, então o triângulo  $\triangle ABC$  é reto em  $C$ .

Figura 136 – Ilustração do Problema 13



Fonte: Elaborado pelo autor

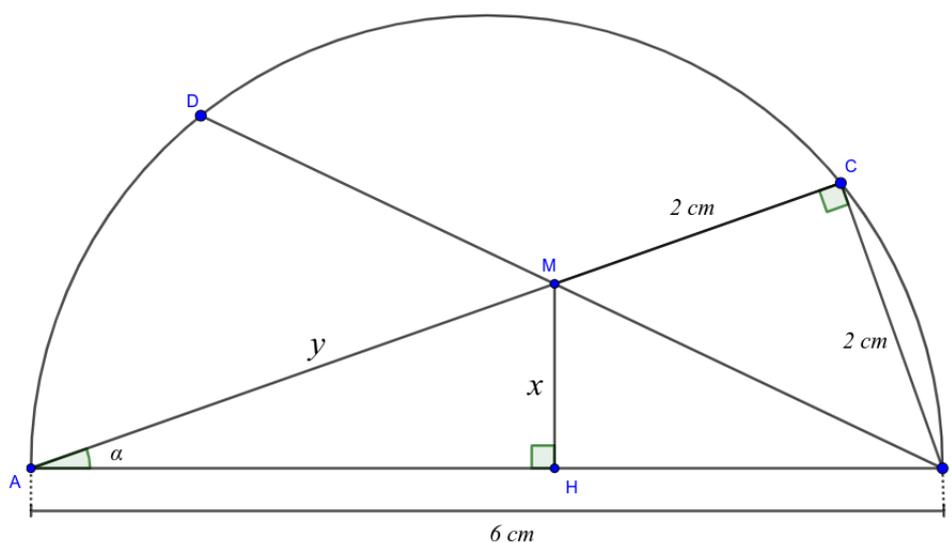
No triângulo  $\triangle BMA$  traça-se por  $M$  o segmento  $MH$  perpendicular a  $AB$  em  $H$ , obtendo-se assim a altura do triângulo  $\triangle BMA$ .

obtém-se:

- 1) O ângulo  $\widehat{BAC} = \alpha$ ;
- 2) O triângulo  $\triangle ABC$  é semelhante ao triângulo  $\triangle AMH$  pelo caso de semelhança de AAA.

Faz-se  $|AM| = y$  e  $|MH| = x$ .

Figura 137 – Solução do Problema 13



Fonte: Elaborado pelo autor

Da semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} \quad (4.13)$$

Como o triângulo  $\triangle ABC$  é reto em  $C$ , então pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (y + 2)^2 + 2^2 &= 6^2 \\ y &= 4\sqrt{2} - 2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando (4.14) em (4.13), obtém-se:

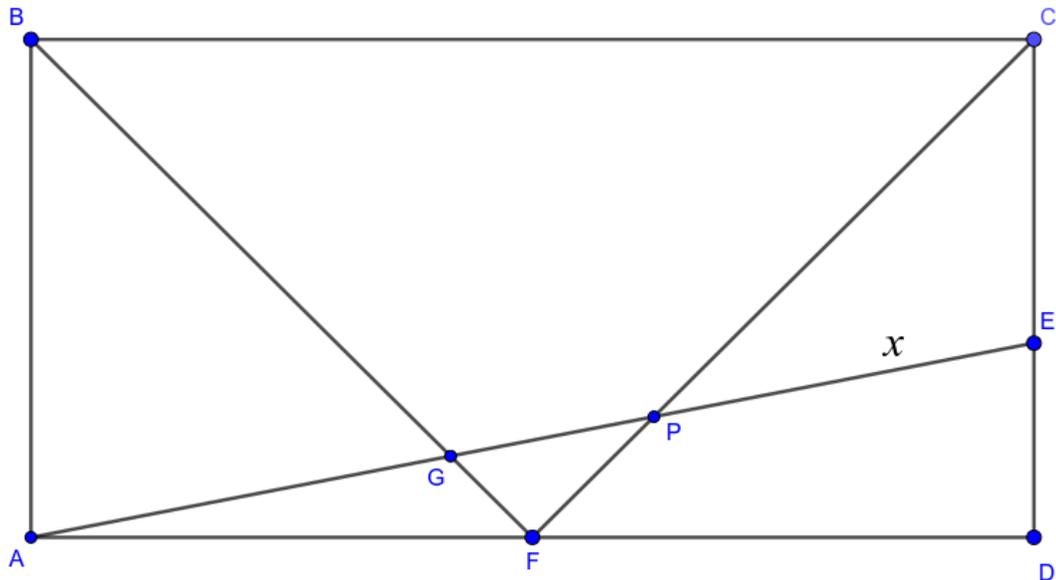
$$x = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{2} - 2) \quad (4.15)$$

Portanto a área ( $S$ ) do triângulo  $\triangle BMA$  será:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{2} - 2) \\ &= 4\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

**Problema 14.** No retângulo  $ABCD$ , figura 138,  $|AG| = 12$ ,  $|GP| = 8$  e  $|PE| = x$ . O ponto  $F$  é ponto médio do segmento  $AD$ . Determine o valor de  $x$ .

Figura 138 – Problema 14

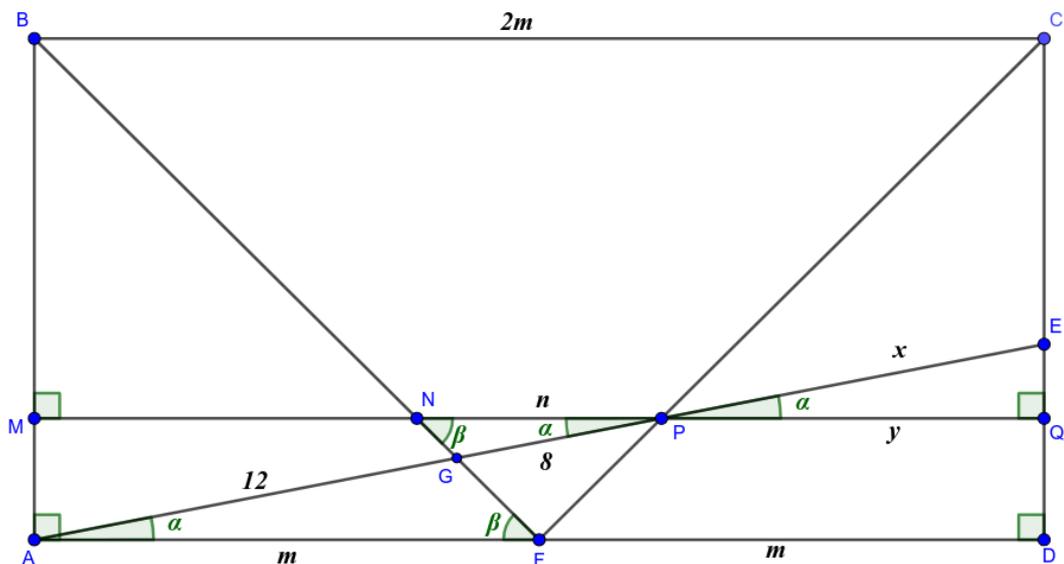


Fonte: Elaborado pelo autor

**Solução.**

Traça-se por  $P$  um segmento paralelo a  $AD$  que encontra  $AB$  em  $M$  e  $CD$  em  $Q$ , considere a figura 139.

Figura 139 – Solução do Problema 14



Fonte: Elaborado pelo autor

Da figura 139, conclui-se que:

- 1) Pelo caso de semelhança *AAA*, o triângulo  $\triangle AGF \sim \triangle NGP$ . Logo,

$$\frac{m}{n} = \frac{12}{8}$$

Donde-se obtêm,

$$n = \frac{2}{3} \cdot m \quad (4.16)$$

- 2) Como  $F$  é ponto médio, então  $|AF| = |FD|$ , logo, pelo caso de congruência *LAL*, o triângulo  $\triangle ABF$  é congruente ao triângulo  $\triangle DCF$ . Então, o ângulo  $\widehat{ABF} = \widehat{CDF}$ .
- 3) O quadrilátero  $MBCQ$  é um paralelogramo, dado que seus lados opostos são paralelos, assim  $|BM| = |CQ|$ .
- 4) Do item 2 e 3 conclui-se, pelo caso de congruência *ALA*, que o triângulo  $\triangle BMN$  é congruente ao triângulo  $\triangle CQP$ , logo  $|MN| = |PQ| = y$ .

O segmento  $|MQ| = |BC| = 2m$ , logo

$$2m = 2y + n$$

Substitui-se  $n$  pelo resultado obtido em (4.16), obtém-se:

$$2m = 2y + \frac{2}{3} \cdot m$$

Assim,

$$y = \frac{2}{3} \cdot m$$

- 5) Pelo caso *AAA* o triângulo  $\triangle DAE$  é semelhante ao triângulo  $\triangle QPE$ . Logo,

$$\frac{x}{12 + 8 + x} = \frac{y}{2m}$$

Substitui  $y$  pelo seu valor em função de  $m$ ,

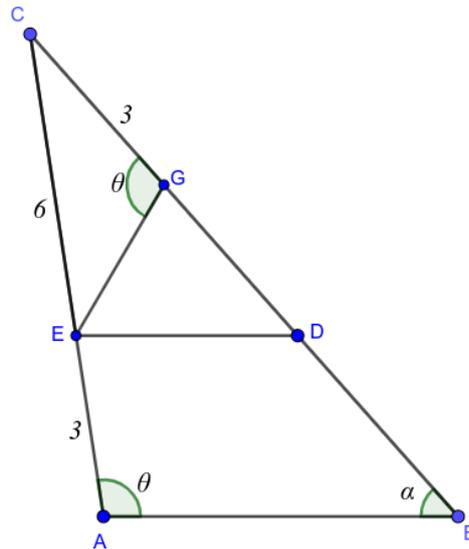
$$\frac{x}{20 + x} = \frac{\frac{2}{3} \cdot m}{2m}$$

Portanto,

$$x = 10$$

**Problema 15.** No triângulo  $\triangle ABC$ , figura 140,  $ED$  é paralelo a  $AB$ . Determine o comprimento do segmento  $BG$ , sabendo que  $|CG| = |AF| = 3$ ,  $|CE| = 6$  e o ângulo  $\widehat{CGE} = \widehat{CAB} = \theta$

Figura 140 – Problema 15

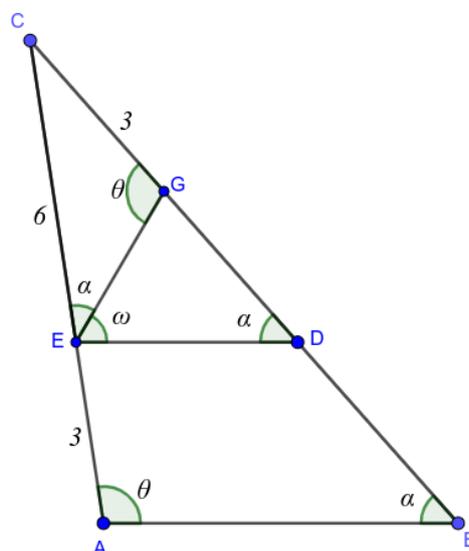


Fonte: Elaborado pelo autor

**Solução.**

Seja  $\widehat{GED} = \omega$ . Como  $ED$  é paralelo a  $AB$ , então  $\widehat{CDE} = \alpha$ , por serem ângulos correspondentes. Analogamente,  $\theta = \widehat{CEG} + \omega$ . O ângulo  $\theta$  é ângulo externo ao triângulo  $\triangle CGE$ , logo  $\theta = \omega + \alpha$ . Daí conclui-se que  $\widehat{CEG} = \alpha$

Figura 141 – Solução do Problema 15



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo caso *AAA* de semelhança de triângulo o  $\triangle CDE$  é semelhante ao triângulo  $\triangle CGE$ , dado que  $\widehat{CEG} = \widehat{CDE} = \alpha$  e  $\widehat{CGE} = \widehat{CED} = \theta$ .

Logo,

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|CG|}{|CE|}$$

Seja  $|DG| = m$ . Daí,

$$\frac{6}{3+m} = \frac{3}{6}$$

Desenvolvendo, obtém-se que  $m = 9$

Como  $ED$  é paralelo a  $AB$ , então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|CD|}{|DB|}$$

Seja  $|DB| = n$ . Daí,

$$\frac{6}{3} = \frac{3+m}{n}$$

Desenvolvendo, obtém-se que  $n = 6$ . Logo,

$$|BG| = |DG| + |BD| = 15.$$

## 5 Uma introdução a geometria analítica

Neste capítulo abordam-se as consequências do Teorema de Tales para a construção dos conceitos elementares sobre retas a partir da perspectiva da geometria analítica.

### 5.1 Noções básicas: Plano Cartesiano e ponto

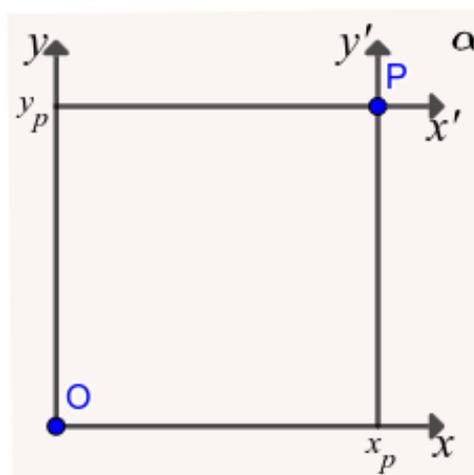
Segundo LIMA (2014, pág. 9):

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. [17]

Assim, em um plano  $\alpha$  dois eixos  $x$  e  $y$ , perpendiculares entre si, que se intersectam em um ponto  $O$ , definem um sistema ortogonal de coordenada cartesianas.

Seja  $P$  um ponto pertencente ao plano  $\alpha$ , tal que por  $P$  traça-se duas retas  $x'$  e  $y'$ , com  $x' \perp y$  e  $y' \perp x$ .

Figura 142 – Plano Cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor

Daí, defini-se:

- $O$  é a origem do plano cartesiano,
- $x$  é o eixo das abscissas e  $y$  o eixo das ordenadas
- O sistema de eixos é ortogonal,

- d. As coordenadas de um ponto  $P$  qualquer são indicado pelo par ordenado  $(x_p, y_p)$ .
- e. Os números reais  $x_p$  e  $y_p$  são, respectivamente, a abscissa e ordenada de  $P$ .

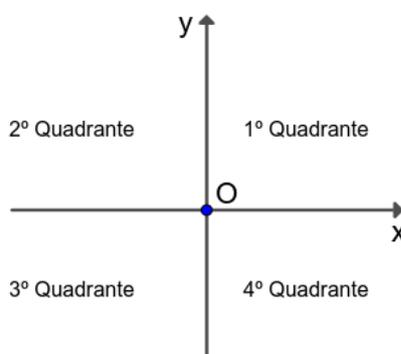
Aqui introduz-se a ideia de coordenadas de um ponto em um plano, segundo LIMA (2014, pág. 10):

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é o de atribuir um significado geométrico (e com isto dar um maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica ... O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas da Geometria. [17]

Dessa forma, ao longo deste capítulo usa-se o sistema de coordenadas cartesianas para tratar a reta e segmentos de retas de forma a mostrar a relação do Teorema de Tales com a Geometria Analítica.

Segue que o plano cartesiano é dividido em quatro partes, denominadas de quadrantes (veja a figura 143).

Figura 143 – Partes do plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor

A coordenada do ponto define em qual quadrante o ponto  $P$  estará. O ponto pertencerá ao:

- 1º Quadrante se  $x_p \geq 0$  e  $y_p \geq 0$
- 2º Quadrante se  $x_p \leq 0$  e  $y_p \geq 0$
- 3º Quadrante se  $x_p \leq 0$  e  $y_p \leq 0$
- 4º Quadrante se  $x_p \geq 0$  e  $y_p \leq 0$

O ponto  $P$  pode pertencer a um dos eixos cartesianos, nesse caso:

- Se  $P$  pertence ao eixo das abscissas, então a sua ordenada é nula, logo  $(x_p, 0)$
- Se  $P$  pertence ao eixo das ordenadas, sua abscissa é nula, logo  $(0, y_p)$

No plano cartesiano os pontos podem ser coincidentes ou distintos.

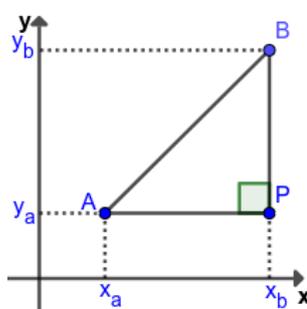
- Pontos coincidentes têm as mesmas coordenadas, ou seja, suas abscissas e ordenadas são iguais.
- Pontos distintos podem ter ou abscissas e ordenadas diferentes ou abscissas ou ordenadas diferentes.

### 5.1.1 Distância entre dois pontos no plano

Dois pontos distintos determinam um segmento de reta, logo a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$ , no plano, corresponde ao comprimento do segmento de reta  $AB$ .

Seja  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ , dois pontos distintos. Seja ainda  $P$  um ponto tal que  $AP$  é paralelo ao eixo das abscissas e  $PB$  paralelo ao eixo das ordenadas. As coordenadas de  $P = (x_b, y_a)$ , conforme a figura 144.

Figura 144 – Segmento de reta  $AB$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $AP$  é paralelo ao eixo  $x$  e  $PB$  é paralelo ao eixo  $y$ , então  $AP$  é perpendicular a  $PB$ , logo o triângulo  $\triangle APB$  é reto em  $P$ . Pelo Teorema de Pitágoras:

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$$

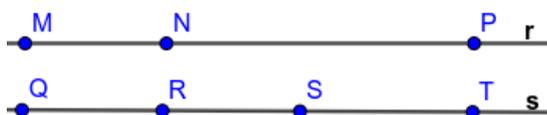
Segue que  $|AP| = x_b - x_a$  e  $|PB| = y_b - y_a$ . Portanto,

$$|AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

## 5.2 Cálculo da Razão entre Segmento colineares consecutivos

Diz-se que “Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta”[9]. Os segmentos colineares podem ser consecutivos ou não.

Figura 145 – Segmento colineares



Fonte: Elaborado pelo autor

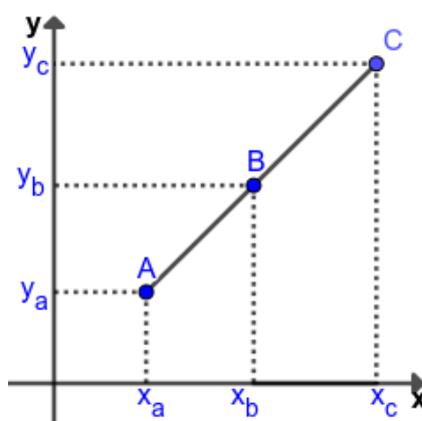
Na figura 145 os segmentos  $MN$  e  $NP$ , pertencentes a reta  $r$ , são ditos colineares consecutivos, pois a extremidade  $N$  do segmento  $MN$  também é extremidade do segmento  $NP$ . Já na reta  $s$  os segmentos  $QR$  e  $ST$  são colineares, mas não são consecutivos, pois suas extremidades são distintas.

**Definição 13.** Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , distintos entre si, pertencentes a uma reta  $r$  e  $AC$  um segmento tal que  $AC = AB \cup BC$ , chama-se de razão entre os segmentos  $AB$  e  $BC$  o número real  $k$ , tal que

$$k = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Seja  $AC$  um segmento de reta arbitrária, tal que  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$ .

Figura 146 – Segmento de reta  $AC$

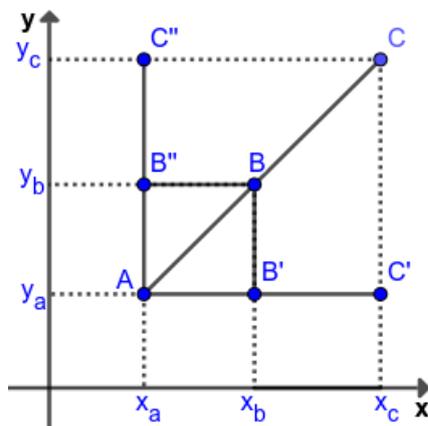


Fonte: Elaborado pelo autor

Definiu-se na figura 147 os pontos  $B'$  e  $C'$ , de modo que  $BB'$  e  $CC'$  sejam paralelo ao eixo  $y$ , com  $AC'$  paralelo ao eixo  $x$  e  $AC' = AB' \cup B'C'$ . Definiu-se também os pontos

$B''$  e  $C''$ , de modo que  $BB''$  e  $CC''$  sejam paralelo ao eixo  $x$ , com  $AC''$  paralelo ao eixo  $y$  e  $AC'' = AB'' \cup B''C''$ .

Figura 147 – Demonstração da Razão entre segmentos colineares consecutivos



Fonte: Elaborado pelo autor

Como os segmentos de retas  $BB'$  e  $CC'$  são mutuamente paralelos, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Daí obtém-se

$$\frac{x_b - x_a}{x_c - x_b} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad (5.1)$$

De modo análogo, os segmentos de retas  $BB''$  e  $CC''$  são mutuamente paralelos, então novamente aplica-se o Teorema de Tales:

$$\frac{|AB''|}{|B''C''|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Daí obtém-se,

$$\frac{y_b - y_a}{y_c - y_b} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad (5.2)$$

Portanto, de (5.1) e (5.2).

$$k = \frac{x_b - x_a}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_b}$$

Conhecendo-se a razão entre os segmentos colineares consecutivos pode-se obter as coordenadas do ponto que divide um dado segmento em dois segmentos colineares consecutivos que guardam entre si a razão  $k$ .

Tomando-se  $P = (x, y)$ , um ponto qualquer, que divide o segmento de reta arbitrária  $AB$  em dois segmentos colineares consecutivos, tal que:

$$k = \frac{|AP|}{|PB|}$$

Seja  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ . A razão pode-se ser obtida por meio das abscissas ou das ordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$ .

Para

$$k = \frac{x - x_a}{x_b - x}$$

Obtém-se,

$$x = \frac{x_a + k \cdot x_b}{1 + k}$$

Para

$$k = \frac{y - y_a}{y_b - y}$$

Obtém-se,

$$y = \frac{y_a + k \cdot y_b}{1 + k}$$

Portanto o ponto  $P$  tem coordenadas:

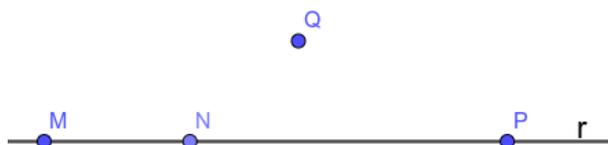
$$P = \left( \frac{x_a + k \cdot x_b}{1 + k}, \frac{y_a + k \cdot y_b}{1 + k} \right)$$

### 5.3 Condição de colinearidades de três pontos

Nesta seção aborda-se a condição de colinearidade de três pontos e constrói-se o método para verificar se os pontos dados são colineares por meio do Teorema de Tales.

**Definição 14.** *Dois ou mais pontos são colineares se pertencem a uma mesma reta.*

Figura 148 – Colinearidade dos pontos



Fonte: Elaborado pelo autor

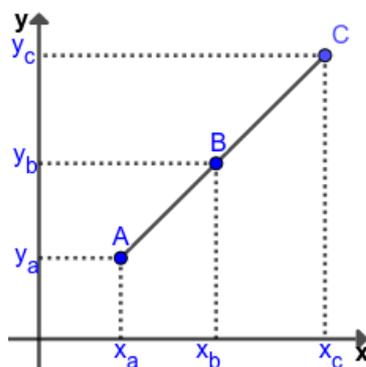
Os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  são ditos colineares, pois pertencem a  $r$ , enquanto que o ponto  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$ , não são colineares, pois  $Q$  não pertence a  $r$ .

**Teorema 17.** Três pontos,  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$  são colineares se, e somente se, vale a igualdade:

$$(x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b) = (x_c - x_b) \cdot (y_b - y_a)$$

**Demonstração.** Seja  $B$  um ponto pertencente ao segmento de reta arbitrária  $AC$  (conforme a figura 149)

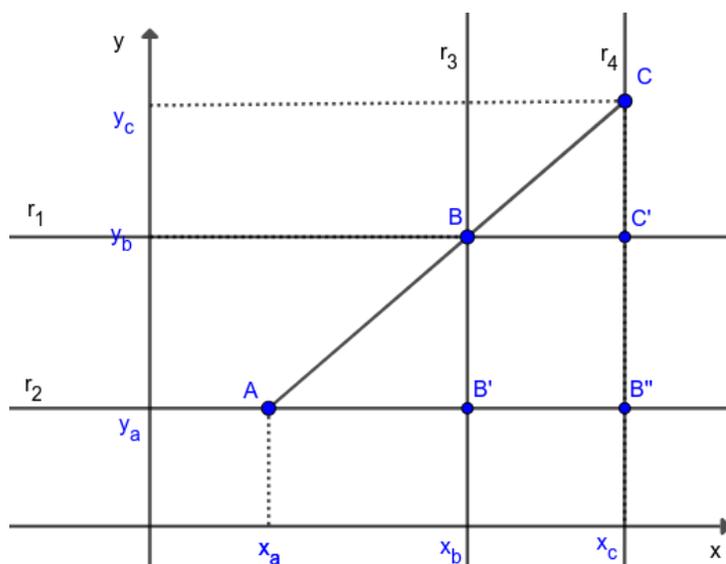
Figura 149 – Segmento de reta  $AC$



Fonte: Elaborado pelo autor

Por  $A$  e  $B$  traça-se, respectivamente, as retas  $r_2$  e  $r_1$  paralelas ao eixo  $x$  e por  $B$  e  $C$  traçam-se, respectivamente, as retas  $r_3$  e  $r_4$  paralelas ao eixo  $y$  (figura 150).

Figura 150 – Prova da colinearidade



Fonte: Elaborado pelo autor

Como as retas  $r_3$  e  $r_4$  são paralelas entre si, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|AB'|}{|B'B''|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad (5.3)$$

Como as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas entre si, então pelo Teorema de Tales:

$$\frac{|B''C'|}{|C'C|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad (5.4)$$

De (5.3) e (5.4),

$$\frac{|AB'|}{|B'B''|} = \frac{|B''C'|}{|C'C|}$$

Donde-se obtêm,

$$\frac{x_b - x_a}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_b} \quad (5.5)$$

Desenvolvendo o resultado obtido em (5.5) tem-se:

$$(x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b) = (y_b - y_a) \cdot (x_c - x_b)$$

Para a recíproca do Teorema temos que se  $(x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b) = (y_b - y_a) \cdot (x_c - x_b)$ , então A, B e C são colineares

Vamos supor que  $(x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b) = (y_b - y_a) \cdot (x_c - x_b) \neq 0$ , logo reorganizando a expressão obtém-se as seguintes razões:

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} \quad (5.6)$$

Veja que as razões obtidas expressam o coeficiente angular de uma reta, assim A, B e C são colineares se os coeficientes forem iguais para qualquer ponto na reta.

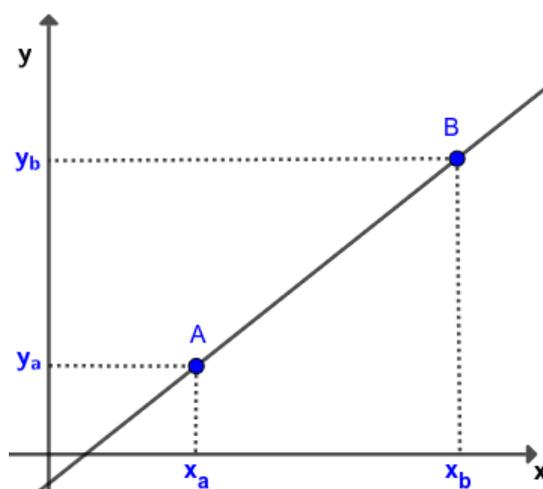
**Definição 15.** *Chama-se de coeficiente angular a inclinação de uma reta em relação ao eixo das abscissas.*

Seja  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  dois pontos de uma reta  $r$ , então o coeficiente angular, que denominamos de  $m$ , é expresso como:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

**Definição 16.** *O coeficiente angular é constante para qualquer segmento de reta contido na reta.*

Seja  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$  pontos de uma reta, tal que AB e BC sejam dois segmentos consecutivos.

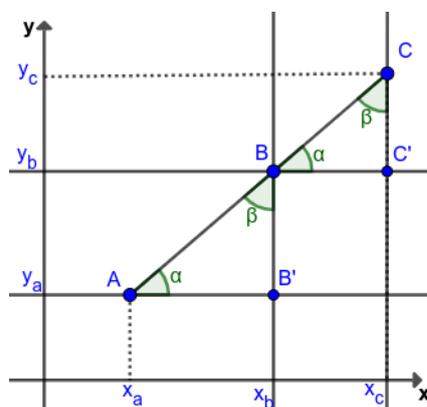
Figura 151 – Inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

- 1) Por  $A$  e  $B$  traça-se, respectivamente, as retas  $\overleftrightarrow{AB'}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$  paralelas ao eixo  $x$ .
- 2) Por  $B$  e  $C$ , respectivamente, as retas  $\overleftrightarrow{CC'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  paralelas ao eixo  $y$ .

Como  $AC$  é transversal as retas paralelas  $\overleftrightarrow{AB'}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$  e as paralelas  $\overleftrightarrow{CC'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  então seus ângulos internos são iguais (conforme a figura 152).

Figura 152 – Prova colinearidade de três pontos



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo caso de semelhança  $AAA$ , o triângulo  $\triangle ABB' \sim \triangle BCC'$ . Logo,

$$\frac{|AB'|}{|BC'|} = \frac{|B'B|}{|C'C|}$$

Donde obtém-se

$$\frac{x_b - x_a}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_b}$$

Reorganizando obtém-se,

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

Ocorre que as razões obtidas correspondem, respectivamente, aos coeficientes angulares do segmento  $AB$  e  $BC$  relação ao eixo das abscissas, que como visto são iguais. Dessa forma as razões obtidas em (5.6) são verdadeiras, provando que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares por definirem segmentos com a mesma inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas.

## 5.4 Breve abordagem do Teorema de Tales em $\mathbb{R}^3$

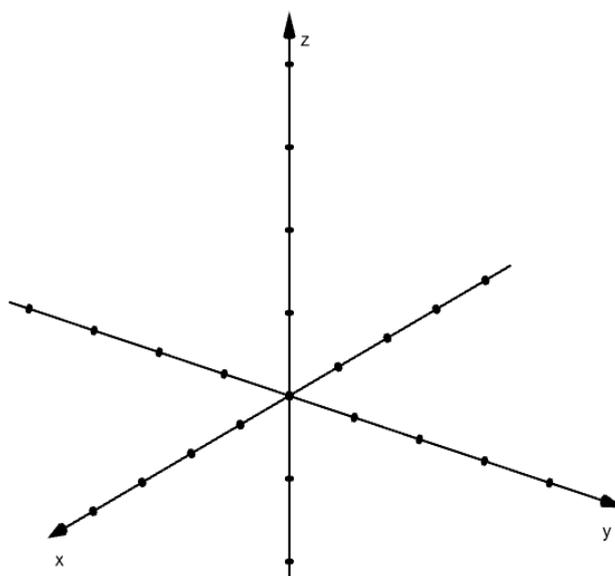
Nesta seção abordam-se brevemente os conceitos sobre retas e suas projeções nos planos coordenados realizando em seguida a aplicação do Teorema de Tales para obter a razão entre segmentos colineares no espaço e a localização do ponto que divide um segmento em partes proporcionais.

### 5.4.1 Noção básica do espaço $\mathbb{R}^3$

Denomina-se  $\mathbb{R}^3$  o conjunto do trio ordenado de números reais  $x, y$  e  $z$ , assim  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

Geometricamente representa-se  $\mathbb{R}^3$  a partir do sistema de eixos  $x, y$  e  $z$  ortogonais entre si dois a dois, com origem em  $(0, 0, 0)$ .

Figura 153 – Espaço  $\mathbb{R}^3$



Fonte: Elaborado pelo autor

Os eixos  $x, y$  e  $z$  são denominados, respectivamente, eixo das abscissas, ordenadas e cotas. No espaço  $R^3$  um ponto  $P$  que está localizado:

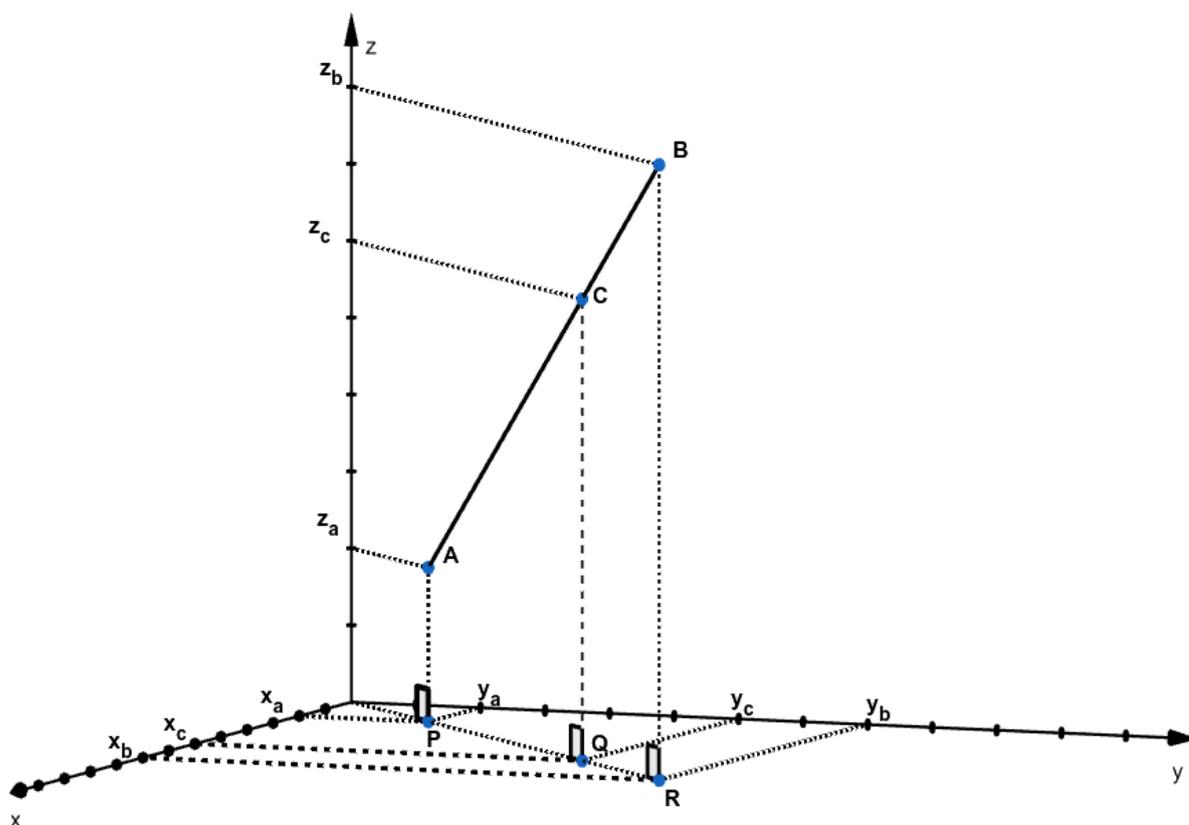
- No eixo das abscissas, terá  $y = 0$  e  $z = 0$ , ou seja  $P = (x, 0, 0)$
- No eixo das ordenadas, terá  $x = 0$  e  $z = 0$ , ou seja  $P = (0, y, 0)$
- No eixo das cotas, terá  $x = 0$  e  $y = 0$ , ou seja  $P = (0, 0, z)$

#### 5.4.2 Razão entre dois segmentos colineares consecutivos em $R^3$

Nesta subsecção aborda-se como calcular a razão entre dois segmentos colineares consecutivos em  $R^3$  a partir das coordenadas dos pontos que são extremos dos segmentos de reta.

Seja  $AB$  um segmento de reta arbitrária e  $C$  um ponto tal que  $C \subset AB$ , conforme a figura 154.

Figura 154 – Reta  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $R^3$  - parte 1



Fonte: Elaborado pelo autor

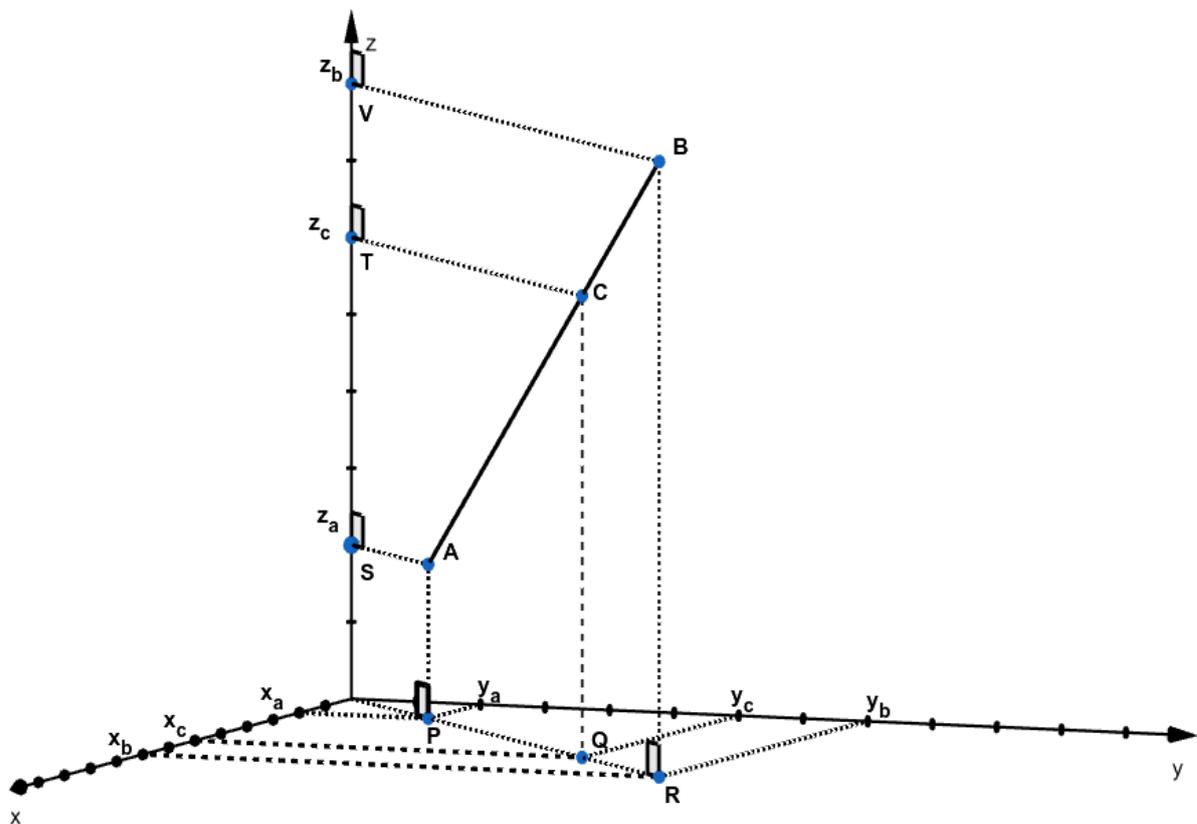
Seja o número real  $k$  a razão entre os segmentos de reta  $AC$  e  $CB$ , logo

$$\frac{|AC|}{|CB|} = k$$

Na figura 154 os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são, respectivamente, as projeções dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $B$  no plano  $xy$ . Assim, os segmentos  $AP$ ,  $CQ$  e  $BR$  são perpendiculares ao plano  $xy$ , logo mutuamente paralelos.

Analogamente, os pontos  $S$ ,  $T$  e  $V$  são, respectivamente, as projeções dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $B$  no eixo  $z$ , logo os segmentos de retas  $AS$ ,  $CT$  e  $BV$  são perpendiculares ao eixo  $z$ , portanto mutuamente paralelos.

Figura 155 – Reta  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $R^3$  - parte 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como  $AP$ ,  $CQ$  e  $BR$  são mutuamente paralelos, então pelo Teorema de Tales

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|PQ|}{|QR|}$$

Segue que  $PQ$  e  $QR$  são segmentos colineares consecutivos contidos no plano cartesiano  $xy$ , logo, como visto na seção 5.2, a razão entre  $PQ$  e  $QR$  será dada por

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}$$

Donde-se obtêm que

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}$$

Os segmentos de reta  $AS$ ,  $CT$  e  $BV$  são mutuamente paralelos, então pelo Teorema de Tales

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|ST|}{|TV|}$$

Como  $S$ ,  $T$  e  $V$  pertencem ao eixo  $z$ , então  $|ST| = z_c - z_a$  e  $|TV| = z_b - z_c$ .

Então a razão  $k$  é dada também por

$$k = \frac{z_c - z_a}{z_b - z_c}$$

Portanto, conclui-se que

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c} = \frac{z_c - z_a}{z_b - z_c}$$

Aborda-se a seguir como obter, a partir da razão  $k$  entre dois segmentos colineares consecutivos, as coordenadas do ponto que divide um segmento em dois segmentos colineares consecutivos.

Seja  $C = (x, y, z)$  um ponto qualquer que divide o segmento arbitrário  $AB$  em dois segmentos colineares consecutivos, tal que:

$$k = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Seja  $A = (x_a, y_a, z_a)$  e  $B = (x_b, y_b, z_b)$ , então

$$k = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{x - x_a}{x_b - x} = \frac{y - y_a}{y_b - y} = \frac{z - z_a}{z_b - z}$$

Sabe-se que

$$k = \frac{x - x_a}{x_b - x}$$

e

$$k = \frac{y - y_a}{y_b - y}$$

e

$$k = \frac{z - z_a}{z_b - z}$$

Desenvolve-se as três expressões, obtém-se

$$x = \frac{x_a + k \cdot x_b}{1 + k}$$

e

$$y = \frac{y_a + k \cdot y_b}{1 + k}$$

e

$$z = \frac{z_a + k \cdot z_b}{1 + k}$$

Portanto, conclui-se que

$$C = \left( \frac{x_a + k \cdot x_b}{1 + k}, \frac{y_a + k \cdot y_b}{1 + k}, \frac{z_a + k \cdot z_b}{1 + k} \right)$$

## 6 Considerações finais

O estudo do Teorema de Tales nos permitiu refletir sobre sua relevância na Geometria, destacando ao longo da dissertação sua aplicabilidade não apenas na geometria plana, mas também como base para a geometria analítica.

No capítulo 2, acompanhamos a construção dos conceitos essenciais, a partir dos axiomas de Euclides, que sustentam uma variedade de teoremas matemáticos. As proposições e teoremas abordados nesse capítulo são importantes para fundamentar e dar sentido ao que foi discutido no capítulo 3. Ao apresentar as demonstrações das consequências do Teorema de Tales para triângulos, como o Teorema de Ceva, demonstramos as possibilidades de aprofundamento e os caminhos que podem ser seguidos para abordar o Teorema de Tales em diversos tópicos matemáticos. Mostramos também que a prática de demonstrações de um teorema revela a riqueza da matemática, uma disciplina rica em axiomas, definições e teoremas que representam sua essência.

A epígrafe deste trabalho, atribuída a Tales, "A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos", resume o que abordamos ao longo dessa dissertação. A frase de Tales nos lembra da importância de sermos críticos em relação ao conhecimento que adquirimos e aos métodos que empregamos para alcançá-lo. Ele nos encoraja a considerar não apenas o que sabemos, mas também a maneira como chegamos a esse conhecimento.

Como resultado, obtivemos aplicações do Teorema de Tales em situações-problema. Uma vez compreendido, conseguimos aplicá-lo de forma adequada como uma ferramenta versátil e de vastas aplicações.

Portanto, este trabalho possibilitou esclarecer que o conhecimento matemático transcende fórmulas, originando-se de ideias fundamentais como o Teorema de Tales de Mileto. Demonstramos que deve-se priorizar a análise das ideias por trás das formulações matemáticas para que se perceba que a matemática é uma ciência acessível, transformadora e repleta de significado. Isso nos leva ao capítulo 5, onde observamos que a Geometria Analítica é produto de ideias discutidas ao longo de séculos, incluindo aquelas provenientes do Teorema de Tales, foco deste trabalho.

# Bibliografia

- [1] DE OLIVEIRA, Elinelson Gomes., *Contando um pouco da história da trigonometria*, Revena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v. 1, p. 29-58, **2021**.
- [2] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental; *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>, acesso em 25 set. 2023, **1998**.
- [3] BRASIL, Ministério da Educação; *Documento Curricular do Território Maranhense: para a Educação Infantil e o Ensino fundamental*, 1. ed. FGV Editora. p. 307, **2019**.
- [4] SILVA, Felipe Vieira Da. et al; *Dificuldades de aprendizagem matemática dos alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática do cfp da ufcg: entendendo as razões e buscando soluções*. CONEDU - Conedu em Casa... Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/80077>, acesso em 26 set. 2023, **2021**.
- [5] ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; *O ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades*, Portal Educacional do Estado do Paraná. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>, acesso em 26 set. 2023, **2009**.
- [6] SANTOS., Magnun César Nascimento dos.; *Principais Axiomas da Matemática*, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Federal da Paraíba. Disponível em [https://sca.profmatsbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=1521&id2=1029](https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1521&id2=1029), acesso em 01 out. 2023, João Pessoa-PB., **2014**.
- [7] EUCLIDES, *Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo. UNESP. Disponível em <https://ia801508.us.archive.org/10/items/OsElementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf>, acesso em 17 de. 2023., **2009**.
- [8] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Geometria*, Coleção PROFMAT. SBM, **2013**.
- [9] J. N. "DOLCE, Osvaldo; POMPEO, *Fundamentos de matemática elementar 9: Geometria Plana*, Editora Saraiva, 9ª. ed. – São Paulo, **2013**.
- [10] F. SOARES, *Humanidades: reflexões e ações. Capítulo 6 - Tales de Mileto*, 1. ed. Bento Gonçalves, RS: IFRS. Disponível em <https://dspace.ifrs.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/771/123456789771.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, acesso em 14 de. fev. de 2024., **2022**.

- 
- [11] RAVEN., G. S. Kirk, J. E et al.; *Os filósofos pré-socráticos*, FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN. Lisboa. 7<sup>a</sup> Edição. Disponível em <https://martaluzie.files.wordpress.com/2014/09/kirk-raven-schofield-os-filc3b3sofos-prc3a9-socrc3aiticos.pdf>, acesso em 27 set. 2023, **2010**.
- [12] BONGIOVANNI, Vincenzo., *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método da exaustão»*. PUC-SP. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2, pp. 91-110. Disponível em <http://funes.uniandes.edu.co/14562/1/Bongiovanni2005As.pdf>, acesso em 14 dez. 2023, **2005**.
- [13] MARIN, André Perez. PAULA, Carlos F. de, *Elementos de geometria, 3a Edição, (s.d.)*. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/163575>, acesso em 15 dez. 2023, **1920**.
- [14] BONGIOVANNI, Vincenzo., O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico, REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.5, p.94-106, UFSC. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>, acesso em 14 fev. 2024, **2007**.
- [15] ALMEIDA, Isaura Aparecida Torse de, *Tales em movimento: aplicação do Teorema De Tales nos triângulos, vol. 5, Com a Palavra, o Professor*. Disponível em <http://revista.geem.mat.br/index.php/PHP/article/view/268>, acesso em 16 dez. 2023., **2020**, pp. 50–58.
- [16] IMPA, *Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus: Curso de Geometria - Nível 2, Aula 14 - Prof. Cícero Thiago*. Disponível em [https://potiimpa.br/uploads/material\\_teorico/86bacem5rzoco.pdf](https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf), acesso em 30 de. jan. de 2024., **2012**.
- [17] LIMA, Elon Lages., *Geometria analítica e álgebra linear*, 1.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014, **2014**.