UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Natã Pereira Germano

Além do Plano: Um Estudo sobre a Trigonometria Esférica nos Ensinos Fundamental e Médio

Blumenau
2024

Natã Pereira Germano

Além do Plano: Um Estudo sobre a Trigonometria Esférica nos Ensinos Fundamental e Médio

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.

Blumenau
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Germano, Natã
Além do plano: um estudo sobre a trigonometria esférica nos ensinos fundamental e médio / Natã Germano ; orientador, Natã Pereira Germano, coorientador, Márcio de Jesus Soares, 2024.
55 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria esférica. 3. Trigonometria esférica. I. Germano, Natã Pereira. II. Soares, Márcio de Jesus . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. IV. Título.

Natã Pereira Germano

Além do Plano: Um Estudo sobre a Trigonometria Esférica nos Ensinos Fundamental e Médio

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Instituição UFSC/Blumenau

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Instituição UFSC/Blumenau

Profa. Tatiana Miguel Rodrigues, Dra.
Instituição UNESP/Bauru

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 21/11/2024 13:59:44-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 19/11/2024 22:57:26-0300
CPF: ***.670.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Orientador

Blumenau, 2024.

Este trabalho é dedicado a minha amada esposa Karina
e a meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, sabedoria e saúde que me proporcionou durante toda a trajetória acadêmica e na elaboração desta dissertação.

A meus pais, Dercilio Germano e Elza Albino Pereira Germano, pelo apoio incondicional e por sempre acreditarem no meu potencial, incentivando-me a seguir em frente.

A minha esposa, Karina Schafer Germano, meu mais profundo agradecimento pelo carinho, paciência e suporte inabaláveis ao longo deste percurso. Sem a sua compreensão e encorajamento constantes, a conclusão desta dissertação não teria sido possível. Sua presença ao meu lado foi fundamental para cada etapa deste trabalho.

A meus colegas de turma, agradeço pela amizade e troca de conhecimento ao longo do curso. As discussões enriquecedoras e os momentos de aprendizado conjunto foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico.

A meu orientador, Dr. Márcio de Jesus Soares, expresso minha profunda gratidão por sua orientação, paciência e apoio ao longo desta dissertação. Sua expertise, conselhos e incansável dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho. Agradeço por ter sempre disponibilizado seu tempo e conhecimento, guiando-me com sabedoria e encorajamento em cada etapa do processo.

Aos professores do curso, por compartilharem seus conhecimentos, experiências e por sempre estarem dispostos a ajudar e orientar. Sua dedicação ao ensino foi inspiradora e motivadora.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo destacar a importância do ensino da geometria e da trigonometria esféricas, enfatizando seu papel como um complemento valioso no currículo de Matemática. Ao apresentar esses tópicos, os alunos têm a oportunidade de familiarizar-se com eles e entender sua existência, ampliando sua compreensão dos diversos conceitos geométricos além da geometria euclidiana. Para alcançar esse objetivo, foi criada uma sequência didática composta por oito atividades, que abrangem desde os axiomas básicos até a aplicação das leis dos senos e cossenos esféricos. A sequência didática foi aplicada em duas turmas de escolas e cidades diferentes: uma turma do nono ano do Ensino Fundamental; e outra da terceira série do Ensino Médio. A metodologia adotada foi a Engenharia Didática, permitindo uma abordagem estruturada e adaptativa, baseada nas necessidades específicas dos alunos. Para facilitar a compreensão e visualização dos conceitos, foram utilizados o *s*oftware GeoGebra e uma esfera de isopor. Essas ferramentas ajudaram a tornar as aulas mais interativas e didáticas, permitindo aos alunos visualizar concretamente os conceitos geométricos e trigonométricos.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Trigonometria Esférica. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This study aims to highlight the importance of teaching spherical geometry and trigonometry, emphasizing its role as a valuable complement to the mathematics curriculum. By presenting these themes, students have the opportunity to become familiar with them and understand their existence, expanding their understanding of various geometric concepts beyond Euclidean geometry. To achieve this objective, a didactic sequence was created consisting of eight activities, ranging from the basic axioms to the application of the laws of spherical sines and cosines. The didactic sequence was applied to two classes from different schools and cities: a ninth-grade class from elementary school and a senior year high school class. The methodology adopted was Didactic Engineering, allowing a structured and adaptive approach, based on the specific needs of the students. To facilitate understanding and visualization of the concepts, *s*oftware GeoGebra and a Styrofoam sphere were used. These tools helped to make classes more interactive and didactic, allowing students to concretely visualize geometric and trigonometric concepts.

Keywords: Spherical Geometry. Spherical Trigonometry. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circunferências Máximas 13
Figura 2 – Intersecção de um plano α e uma esfera $\Sigma(O, r)$ 14
Figura 3 – Pontos Antípodas 15
Figura 4 – Intersecção de duas circunferências máximas 18
Figura 5 – Distância entre os pontos A e B 18
Figura 6 – Ângulo esférico $\angle ABC$ com vértice em B 19
Figura 7 – Medida do ângulo $\angle ABC$ 20
Figura 8 – Circunferências máximas perpendiculares 20
Figura 9 – Triângulo Esférico ABC 21
Figura 10 – Triângulos Colunares 21
Figura 11 – Triângulo Polar 23
Figura 12 – Relação dos lados de um triângulo esférico 26
Figura 13 – $\left|B - C\right| < \pi - A < B + C$ 26
Figura 14 – Proposição 21. 28
Figura 15 – $\Delta^S ABC$ com ângulo reto em C. 28
Figura 16 – Representações 39
Figura 17 – Circunferências Máximas 42
Figura 18 – Ângulo esférico 44
Figura 19 – Triângulo Esférico 46

SUMÁRIO

	INTORDUÇÃO	**11**
1	**A ESFERA - TEORIA**	**13**
1.1	CARACTERÍSTICAS DA ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO	13
1.2	GEOMETRIA ESFÉRICA	16
1.2.1	**Axiomas e primeiras definições**	**16**
1.3	ÂNGULOS ESFÉRICOS	19
1.3.1	**Triângulos esféricos**	**21**
1.3.2	**Congruência de Triângulos Esféricos**	**23**
1.3.3	**Desigualdades**	**25**
1.4	TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	27
1.4.1	**Lei esférica dos senos e dos cossenos**	**29**
2	**PRIMEIRA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISES PRÉVIAS**	**31**
2.1	ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS (6º AO 9º ANO)	31
2.1.1	**Objetos de conhecimento da geometria do 6º Ano**	**31**
2.1.2	**Objetos de conhecimento da geometria do 7º Ano**	**31**
2.1.3	**Objetos de conhecimento da geometria do 8º Ano**	**32**
2.1.4	**Objetos de conhecimento da geometria do 9º Ano**	**32**
2.2	ENSINO MÉDIO (1ª A 3ª SÉRIE)	32
2.3	POR QUE ENSINAR GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA ESFÉRICAS?	34
3	**SEGUNDA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISE A PRIORI**	**35**
3.1	OBJETIVOS UTILIZADOS PARA ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	35
4	**TERCEIRA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: EXPERIMENTAÇÃO**	**38**
4.1	MOMENTO 1 - REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL	38
4.1.1	**Turma do 9º ano**	**40**
4.1.2	**Turma da 3ª série do Esino Médio**	**41**
4.2	SEGUNDA ATIVIDADE - GEOMETRIA ESFÉRICA	41
4.2.1	**Turma do 9º ano**	**43**
4.2.2	**Turma da 3ª série do Esino Médio**	**43**
4.3	TERCEIRA ATIVIDADE - ÂNGULOS ESFÉRICOS	44
4.3.1	**Turma do 9º ano**	**45**
4.3.2	**Turma da 3ª série do Esino Médio**	**45**
4.4	QUARTA ATIVIDADE - TRIÂNGULOS ESFÉRICOS	45
4.4.1	**Turma do 9º ano**	**47**
4.4.2	**Turma da 3ª série do Esino Médio**	**47**
4.5	QUINTA ATIVIDADE - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS	47
4.5.1	**Turma do 9º ano**	**48**

4.5.2 Turma da 3ª série do Esino Médio . . . 48
4.6 SEXTA ATIVIDADE - DESIGUALDADE . . . 48
4.6.1 Turma do 9º ano . . . 49
4.6.2 Turma da 3ª série do Esino Médio . . . 49
4.7 SÉTIMA ATIVIDADE - TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: LEI ESFÉRICA DOS SENOS E DOS COSSENOS . . . 50
4.7.1 Turma do 9º ano . . . 50
4.7.2 Turma da 3ª série do Esino Médio . . . 51
4.8 OITAVA ATIVIDADE - TRIÂNGULO RETÂNGULO ESFÉRICO . . . 51
4.8.1 Turma do 9º ano . . . 52
4.8.2 Turma da 3ª série do Esino Médio . . . 52
5 QUARTA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA PROPOSTA . . . 53
Referências . . . 54
ANEXO A – MATERIAL APLICADO . . . 55

INTRODUÇÃO

O currículo escolar ao longo dos ensinos fundamental e médio aborda apenas a Geometria Euclidiana, que se baseia nos princípios estabelecidos por Euclides. No entanto, temos outras geometrias, como por exemplo as denominadas geometrias não-euclidianas. Uma dessas geometrias é que motiva nosso estudo, a Geometria Esférica que nos oferece uma perspectiva distinta, expandindo os conhecimentos geométricos dos alunos.

Nosso objetivo é apresentar aos alunos a geometria e a trigonometria esféricas, mostrando suas aplicações. A geometria esférica desempenha um papel importante na navegação e na representação de eventos astronômicos. Ela é essencial no planejamento de rotas para aviões e navios, pois nosso planeta assemelha-se a uma esfera. Além disso, a geometria esférica também tem papel importante em outras áreas, como por exemplo, a astronomia.

Logo, a incorporação da geometria esférica e da trigonometria esférica no currículo escolar proporcionaria às crianças uma compreensão mais fantástica e abrangente da Matemática. Assim, estariam mais preparados e prontos para desafios e oportunidades futuras em diferentes áreas profissionais e de investigação.

Esta dissertação foi desenvolvida utilizando a Engenharia Didática, uma abordagem que combina pesquisa e teoria didática elaborando e testando materiais e atividades de ensino de maneira detalhada. Uma das características da Engenharia Didática é o foco na avaliação contínua, permitindo o professor analisar o conhecimento dos alunos ao longo das atividades e assim conseguir ajustar sua prática pedagógica. Esta abordagem foi criada para que o conhecimento seja transmitido de maneira que leve em conta as habilidades dos discentes, tornando, assim o aprendizado do aluno mais eficaz.

A engenharia didática é dividida em quatro etapas: Análises Prévias; Análise a Priori; Experimentação; e Análise a Posteriori. A primeira etapa é denominada Análises Prévias, em que se compreende o contexto em que se dará a intervenção em ensino/aprendizagem. Nesta primeira fase, verifica-se o conhecimento que os alunos já possuem. A segunda fase é a Análise a Priori, que visa otimizar os resultados do ensino. Sendo uma das fases mais importantes, pois é nesta que se decide a melhor forma de transmitir o conhecimento a ser repassado. A etapa seguinte a ser realizada é a Experimentação. Esta se baseia na prática das estratégias pensadas para a Análise a priori e, caso necessário, podem ser feitos ajustes entre os métodos definidos com antecedência antes de serem aplicados. Finalmente, temos a Análise a Posteriori e Validação da Proposta, em que se observa e avalia os resultados obtidos, verificando se os objetivos iniciais foram atingidos e identificando melhorias para futuras intervenções.

A aplicação desta metodologia ocorreu em duas escolas estaduais do estado de Santa Catarina, a E. E. B. Tereza Cristina, localizada no município de Laurentino, e a E. E. F. Luis Ledra, no município de Rio do Sul. A pesquisa envolveu duas turmas, sendo uma tirma do 9º ano do Ensino Fundamental e uma turma da 3ª série do Ensino Médio. As intervenções didáticas foram realizadas durante o segundo semestre de 2023, distribuídas em 13 aulas de 45 minutos cada. Para assegurar o cumprimento dos padrões éticos, este projeto foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Neste trabalho, os temas estarão divididos em cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os fundamentos teóricos que embasam o estudo da esfera dentro do espaço euclidiano e também as bases da geometria esféricas.

No segundo capítulo, temos as análises prévias. Nele é realizada uma análise da geometria estudada no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e também a importância do estudo da geometria e da trigonometria esféricas.

No terceiro capítulo, abordaremos a análise a priori. Neste capítulo é apresentado os objetivos para a elaboração da criação da sequência didática para garantir que os objetivos sejam atingidos.

O quarto capítulo é dedicado a experimentação. Nele, temos as atividades desenvolvidas nas turmas. A experimentação é acompanhada de uma análise dos resultados obtidos com cada turma.

Finalmente, no quinto capítulo é realizada a Análise a Posteriori e Validação da Proposta. Este capítulo traz os resultados alcançados com a aplicação da sequência didática, identificando o nível de sucesso da proposta e sugerindo possíveis melhorias para futuras intervenções pedagógicas.

1 A ESFERA - TEORIA

O objetivo deste capítulo é conhecer as definições e propriedades da esfera no espaço euclidiano, proporcionando uma base para a exploração da geometria esférica que será realizada neste capítulo. Ao aprofundarmos nossa compreensão das características da esfera, estaremos preparados para uma investigação mais detalhada e significativa da geometria esférica.

1.1 CARACTERÍSTICAS DA ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Para dar início ao nosso estudo sobre a esfera no espaço euclidiano, começaremos definindo Esfera e Circunferência.

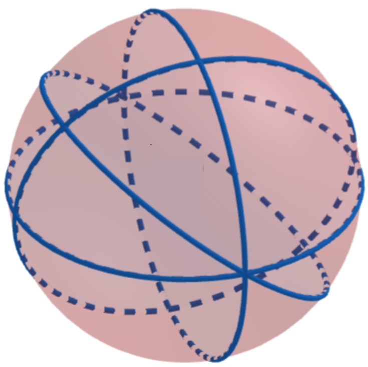
Definição 1 (Esfera)**.** *Sejam dados um ponto O do espaço e um número real positivo r. A esfera de centro O e raio r, denotada por* $\Sigma(O, r)$*, é o lugar geométrico dos pontos do espaço euclidiano que distam r de O.*

Definição 2 (Circunferência)**.** *Dados um plano* α*, um ponto O desse plano e um número real positivo r, denominaremos circunferência em* α*, de centro O e raio r, ao conjunto de pontos de* α *que estão a uma distância r de O.*

A partir dessas definições conseguimos compreender geometricamente a esfera e a circunferência, o que é essencial para nosso contexto da geometria esférica. A seguir, definiremos um conceito importante da geometria esférica, circunferência máxima.

Definição 3 (Circunferência máxima[1])**.** *Denominaremos circunferências máximas da esfera* $\Sigma(O, r)$ *as circunferências contidas nessa esfera que possuam comprimento* $2\pi r$*.*

Figura 1 – Circunferências Máximas



Fonte: O autor (2024).

[1] Em alguns textos, o termo circunferência máxima é referido como círculo máximo.

A proposição a seguir explora a interseção de planos com esferas. Note que a posição relativa do plano em relação ao centro da esfera afeta as propriedades da circunferência.

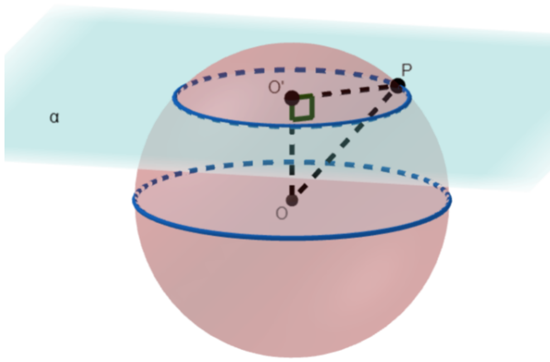
Proposição 1. *Se um plano α intersecta uma esfera $\Sigma(O, r)$ em mais de um ponto, então:*

a) o conjunto $\alpha \cap \Sigma(O, r)$ é uma circunferência;

b) se $O \in \alpha$, então o comprimento da circunferência $\alpha \cap \Sigma(O, r)$ é igual a $2\pi r$;

c) e se $O \notin \alpha$, então o comprimento da circunferência $\alpha \cap \Sigma(O, r)$ é menor que $2\pi r$.

Figura 2 – Intersecção de um plano α e uma esfera $\Sigma(O, r)$



Fonte: O autor (2024).

Demonstração. (a) Suponhamos que α contenha o centro da esfera. Seja P um ponto qualquer de $\alpha \cap \Sigma$, então $m(\overline{OP}) = r$, pois $P \in \Sigma$. Segue que P é um ponto da circunferência, em α, de centro O e raio r. Por outro lado, se Q é um ponto desta circunferência, ou seja $m(\overline{OQ}) = r$, temos que Q é um ponto de Σ.

Suponhamos, agora, que α não contenha o centro da esfera (Figura 2). Seja o ponto O' o pé da perpendicular baixada do centro O ao plano α e seja P um ponto qualquer de $\alpha \cap \Sigma$, distinto de O'. Observe que os pontos O e O' são distintos, pois O não está em α, e que toda reta em α que passa por O' é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OO'}$ e, portanto, o triângulo $\triangle PO'O$ é retângulo em O'. Logo, pelo Teorema de Pitágoras,

$$m(\overline{PO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'P})^2. \tag{1}$$

Reescrevendo a última equação como $m(\overline{O'P}) = \sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$, vemos que P pertence à circunferência, no plano α, de centro O' e raio $\sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$. Chamando de λ esta circunferência, temos que $\alpha \cap \Sigma$ está contido em λ.

Por outro lado, se Q é um ponto qualquer da circunferência λ, então

$$m(\overline{O'Q}) = m(\overline{O'P})$$

e os pontos Q, O' e O formam um triângulo retângulo em O'. Logo, segue que $m(\overline{QO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'Q})^2$, ou ainda, $m(\overline{QO})^2 = m(\overline{OO'})^2 + m(\overline{O'P})^2$. Comparando a última equação com a Equação (1), segue que $m(\overline{QO}) = m(\overline{PO}) = r$, logo Q é um ponto da esfera Σ. Portanto, a circunferência λ está contida em $\alpha \cap \Sigma$ e, como já provou-se a continência inversa, segue que $\alpha \cap \Sigma = \lambda$, ou seja, o conjunto de pontos $\alpha \cap \Sigma$ é uma circunferência.

Para provar (b) e (c), basta observar que o raio da circunferência $\alpha \cap \Sigma$ no caso (b) é r e, no caso (c) é $\sqrt{r^2 - m(\overline{OO'})^2}$, que é menor que r, pois O e O' são distintos. Assim, segue que o comprimento de $\alpha \cap \Sigma$ é $2\pi r$ para o caso (b) e, menor que $2\pi r$ para o caso (c). $\square$

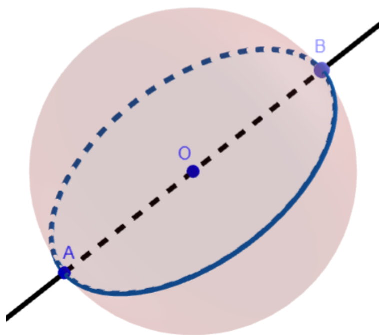
A análise das interseções entre planos e esferas nos leva a explorar outras subdivisões importantes da esfera. Um conceito fundamental nesta exploração é o de hemisfério.

Definição 4 (Hemisfério)**.** *Uma circunferência máxima divide a esfera em duas regiões. Cada uma dessas regiões será chamada de hemisfério.*

Outro conceito importante é o de pontos antípodas, que descreve uma relação especial entre pares de pontos na esfera.

Definição 5 (Pontos Antípodas)**.** *Dois pontos A e B de uma esfera serão ditos antípodas se estão contidos numa reta que passa pelo centro dessa esfera. Diz-se ainda que A é antípoda de B, ou que B é antípoda de A.*

Figura 3 – Pontos Antípodas



Fonte: O autor (2024).

Note que se A e B são pontos antípodas, então o $\overline{AB}$ é um diâmetro.

A relação entre pontos antípodas e circunferências máximas na esfera é crucial para a geometria esférica. A seguir, apresentamos duas proposições que ilustram essa relação:

Proposição 2. *Duas circunferências máximas se encontram exatamente em dois pontos, e esses dois pontos são antípodas.*

Demonstração. Considere a esfera $\Sigma(O, r)$. Uma circunferência máxima é a interseção da esfera $\Sigma(O, r)$ com um plano que passa pelo centro O da esfera. Dado que o plano passa pelo centro, qualquer seção plana que intersecta a esfera dessa maneira resulta em uma circunferência cujo raio é igual ao raio r da esfera.

Considere duas circunferências máximas distintas, C_1 e C_2 que estão contidas em planos distintos, ambos passando pelo centro O da esfera. A intersecção entre esses dois planos é uma reta s que também passa pelo centro da esfera.

Note que a reta s que passa por O atravessa a superficie de $\Sigma(O, r)$ em dois pontos, que denominaremos P e Q, e esses dois pontos são diametralmente opostos. Logo, os pontos P e Q são pontos antípodas. □

Os pontos antípodas dividem cada circunferência máxima que passa por eles em duas *s*emicircunferências máximas.

Proposição 3. *Se dois pontos distintos em uma esfera não são antípodas então existe uma única circunferência máxima passando por eles.*

Demonstração. Considere uma esfera $\Sigma(O, r)$. Suponha que temos dois pontos distintos P e Q na esfera $\Sigma(O, r)$, que não são antípodas. Como P e Q não são antípodas, o segmento de reta, PQ, não contem o centro O da esfera. Logo, P, Q e O não são colineares. Assim, o plano β que passa por P, Q e O é único. Como β contem o centro O a circunferência $\Sigma(O, r) \cap \beta$ é uma circunferência máxima e, pela unicidade do plano β, temos que esta circunferência máxima em $\Sigma(O,r)$ que passa por P e Q é única □

1.2 GEOMETRIA ESFÉRICA

A geometria esférica é um ramo da Matemática que lida com as propriedades e medidas das figuras geométricas em uma superfície esférica. Ao contrário da geometria euclidiana, a geometria esférica não considera um centro ou raio, pois as formas geométricas nesse contexto são definidas em relação a uma esfera abstrata como "universo". Isso significa que os conceitos de retas, triângulos e circunferências são diferentes na geometria esférica, pois seguem a curvatura da superfície esférica.

1.2.1 Axiomas e primeiras definições

Para compreendermos a geometria esférica, nosso estudo partirá da exposição de alguns axiomas fundamentais que estabelecem a base para esta geometria. Estes axiomas, que serão apresentados, constituem os pilares sobre os quais a geometria esférica se sustenta.

Esta seção é fundamentada na obra de (WHITTLESEY, 2020). Os teoremas e proposições desta seção não serão demonstrados, pois este não é o objetivo principal deste trabalho. Entretanto, todos os resultados podem ser verificados detalhadamente no mesmo livro.

Axioma 1. *Uma esfera e uma circunferência máxima são conjuntos de pontos. Existem pelo menos dois pontos na esfera.*

Axioma 2. *Existe uma correspondência um-a-um entre os pontos de uma circunferência máxima e os pontos do conjunto quociente* $\mathbb{R}/2\pi$

Essa correspondência é uma função bijetora $f : C \to \mathbb{R}/2\pi$, em que C é o conjunto dos pontos de uma circunferência máxima e $\mathbb{R}/2\pi$ é o conjunto quociente dos números reais módulo 2π. Essa função atribui a cada ponto da circunferência um número real único em $[0,2\pi)$.

Com isso, definimos pontos antípodas, agora na geometria esférica da seguinte maneira.

Definição 6 (Pontos Antípodas)**.** *Dizemos que dois pontos de uma esfera são antípodas se existir uma circunferência máxima passando por eles, cuja correspondência um-a-um leva esses dois pontos para elementos de* $\mathbb{R}/2\pi$ *que diferem em* π *(mod* 2π*). Cada ponto é dito ser um antípoda do outro.*

Com base na definição de pontos antípodas, estabelecemos o seguinte axioma que aborda a existência e a particularidades desses pontos.

Axioma 3. *Cada ponto da esfera possui no máximo um ponto antípoda.*

Agora, veremos uma propriedade dos pontos antípodas na esfera. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 9.5.

Proposição 4. *Se uma circunferência máxima contém um ponto, também contém o antípoda desse ponto.*

Da proposição 3 do capítulo anterior, podemos considerar o axioma a seguir.

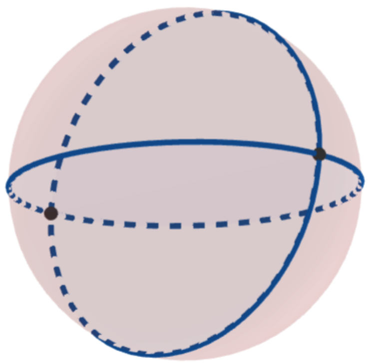
Axioma 4. *Se dois pontos distintos em uma esfera não são antípodas, então existe uma circunferência máxima única passando por eles.*

Se dois pontos distintos A e B não são antípodas, a circunferência máxima que passa por A e B é denotada por $\bigcirc AB$.

Finalizamos a seção com mais dois axiomas.

Axioma 5. *Duas circunferências máximas distintas se encontram em pelo menos um ponto.*

Figura 4 – Intersecção de duas circunferências máximas



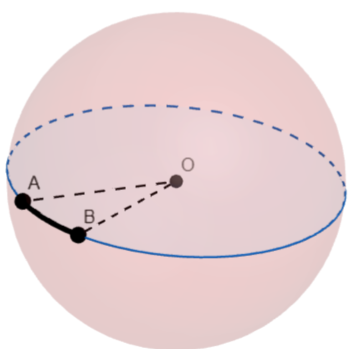
Fonte: O autor (2024).

Antes de definirmos distância esférica, é importante compreender o conceito de arco na esfera. Em geometria esférica, um arco é uma parte de uma circunferência máxima, delimitada por dois pontos na superfície da esfera. Assim, ao contrário de um arco em um plano, o arco na esfera segue a curvatura da superfície esférica. Representaremos o arco entre dois pontos A e B da seguinte forma: $\overset{\frown}{AB}$.

Definição 7 (Distância esférica)**.** *A distância esférica entre dois pontos A e B é o módulo do representante, em* $(-\pi,\pi]$ *da diferença entre as imagens desses pontos sobre uma correpondência do axioma 2. Ou seja, se* Γ *é a circunferência máxima que contem a e B,* $\ell : \Gamma \to \mathbb{R}/2\pi$ *é uma correspondência do axioma 2 sobre* Γ *e* δ *é o representante da classe de equivalência* $\ell(A) - \ell(B)$ *que está em* $(-\pi,\pi]$*, então* $d(A,B) = |\delta|$.

Note que a "medida" definida acima é na verdade, na prática, a medida do ângulo central desse arco na esfera no espaço euclidiano, ver Figura 5.

Figura 5 – Distância entre os pontos A e B



Fonte: O autor (2024).

Axioma 6. *Para qualquer circunferênica máxima existe um ponto tal que a circunferência máxima consiste em pontos a uma distância esférica de um quarto de circunferência do dado ponto. Tal ponto é definido como sendo um pólo da reta esférica.*

As circunferências máximas são as retas da geometria esférica. Por isso, usaremos indistintamente os termos *circunferência máxima* e *reta esférica*, na geometria esférica.

Ao longo desta seção, estabelecemos os fundamentos da geometria esférica através dos axiomas que definem suas relações fundamentais. Agora, avançaremos para o estudo dos ângulos esféricos.

1.3 ÂNGULOS ESFÉRICOS

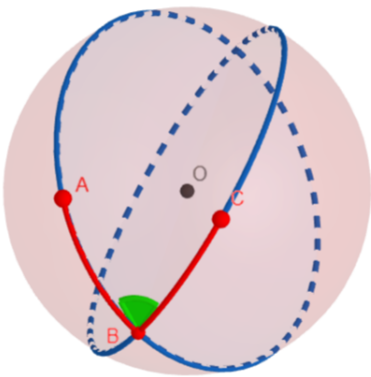
Nesta seção, exploraremos os ângulos esféricos, conceito fundamental para compreender as medidas e relações geométricas específicas na esfera. Iniciaremos, com a definição de semirretas na geometria esférica.

Definição 8 (Semirreta esférica)**.** *Sejam A e B dois pontos em uma esfera que não são antípodas. A semirreta esférica $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os pontos C na circunferência máxima $\bigcirc AB$, em que a distância entre A e C é menor do que π tal que: ou C está em $\overset{\frown}{AB}$; ou B está em $\overset{\frown}{AC}$. Dizemos que A é a origem da semirreta esférica.*

Com a definição de semirretas esféricas, podemos definir ângulo esférico.

Definição 9 (Ângulo esférico)**.** *Sejam A, B e C pontos de uma esfera que não estão em uma mesma circunferência máxima. Então, o ângulo (esférico) $\angle ABC$ com vértice B é a união das semirretas esféricas, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Essas semirretas são chamadas de lados do ângulo.*

Figura 6 – Ângulo esférico $\angle ABC$ com vértice em B

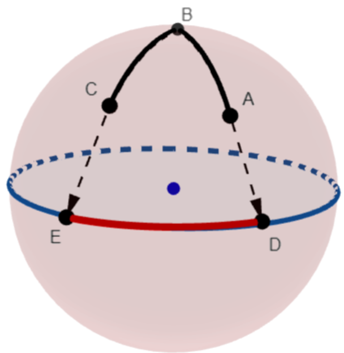


Fonte: O autor (2024).

A definição a seguir formaliza o conceito de medida de um ângulo esférico, determinando-o, por meio de arcos na esfera.

Definição 10 (Medida de ângulo)**.** *Seja $\angle ABC$ um ângulo esférico. Escolha os pontos D e E em $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, que estão ambos a um quarto de circunferência de B. Então, a medida de $\angle ABC$ é definida como $m\left(\overset{\frown}{DE}\right)$.*

Figura 7 – Medida do ângulo $\angle ABC$



Fonte: O autor (2024).

Assim, como na Geometria Euclidiana, dizemos que $\angle ABC$ é agudo, reto ou obtuso se sua medida for, respectivamente, menor, igual ou maior do que $\pi/2$.

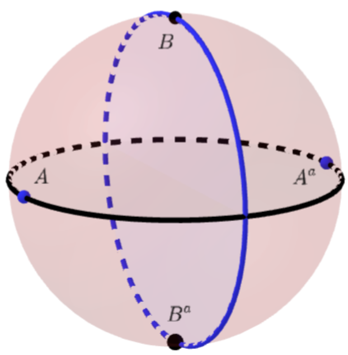
Agora que estabelecemos as definições fundamentais das semirretas esféricas e dos ângulos esféricos, exploraremos suas propriedades.

Definição 11. *Dois ângulos esféricos são considerados congruentes se suas medidas forem as mesmas. Se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são congruentes, então escrevemos $\angle ABC \approx \angle DEF$. Os ângulos são ditos suplementares se suas medidas somam π e, os ângulos são ditos complementares se suas as medidas somam $\pi/2$.*

A próxima proposição é uma propriedade importante envolvendo circunferências máximas na geometria esférica. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 10.12.

Proposição 5. *Se duas circunferências máximas são perpendiculares, então cada uma delas passa pelos pólos da outra. Reciprocamente, se uma circunferência máxima passa pelos pólos da outra, as duas circunferências máximas são perpendiculares.*

Figura 8 – Circunferências máximas perpendiculares



Fonte: O autor (2024).

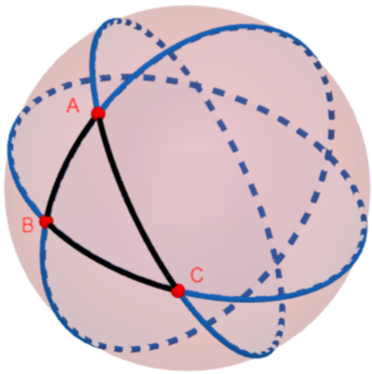
1.3.1 Triângulos esféricos

Agora, vamos explorar os fundamentos dos triângulos esféricos, começado com sua definição.

Definição 12 (Triângulo Esférico)**.** *Sejam A, B e C pontos distintos não contidos numa mesma reta esférica. A união dos três segmentos de reta* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ *e* $\overset{\frown}{BC}$ *será dito triângulo esférico de vértices A, B e C, e lados* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ *e* $\overset{\frown}{BC}$*, e será representado por* $\Delta^s ABC$*. Os ângulos esféricos* $\angle ABC$, $\angle ACB$ *e* $\angle BAC$ *são seus ângulos internos.*

Para simplificar a notação, usaremos apenas $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ para nos referirmos a ângulos.

Figura 9 – Triângulo Esférico ABC

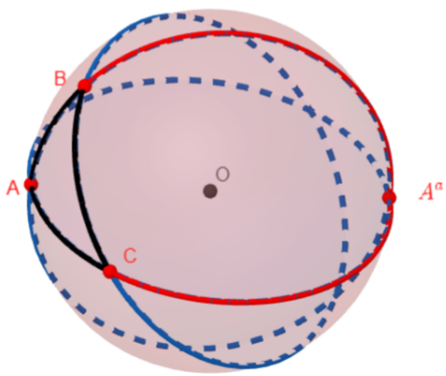


Fonte: O autor (2024).

Uma classe especial de triângulos esféricos é a de triângulos colunares.

Definição 13. *Dois triângulos são ditos colunares se eles têm dois vértices em comum e os vértices não comuns são antípodas. Ou seja, os triângulos têm a forma* $\Delta^s ABC$ *e* $\Delta^s A^a BC$*, em que A e* A^a *são antípodas.*

Figura 10 – Triângulos Colunares



Fonte: O autor (2024).

Triângulos colunares, como ilustrado na Figura 10, ilustram uma configuração especial que exploraremos na seguinte proposição. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 11.1.

Proposição 6. *Se três pontos A, B e C em uma esfera não pertencem a uma única circunferência máxima, então nenhum par dentre os pontos A, B e C são antípodas.*

Agora, apresentamos a definição de triângulos antípodas e suas propriedades.

Definição 14. *Dois triângulos são ditos antípodas se puderem ser expressos como* $\Delta^s ABC$ *e* $\Delta^s A^a B^a C^a$*, em que* A^a*,* B^a*, e* C^a *são antípodas dos pontos A, B e C, respectivamente.*

Exploraremos uma propriedade fundamental dos triângulos antípodas em relação à congruência de seus lados e ângulos. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 11.6.

Proposição 7. *Dado* $\Delta^s ABC$*, os três antípodas* A^a*,* B^a*, e* C^a *formam um triângulo esférico cujos lados e ângulos são congruentes aos lados e ângulos correspondente em* $\Delta^s ABC$*.*

Em seguida, damos o conceito de triângulos retângulos na geometria esférica

Definição 15. *Um triângulo esférico é considerado um triângulo retângulo se pelo menos um de seus ângulos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa do triângulo retângulo, já o lado que não é uma hipotenusa é dito ser um cateto do triângulo.*

Na próxima proposição, exploramos a condição fundamental para identificar ângulos retos em triângulos esféricos. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 11.11. Assim como nos ângulos, dizemos que um lado do triângulo esférico é agudo, reto ou obtuso, se sua medida for, respectivamente, menor, igual ou maior do que $\pi/2$.

Proposição 8. *Um par de ângulos em um triângulo são ângulos retos se, e semente se, os lados opostos são lados retos.*

A demonstração da proposição a seguir, encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 11.12.

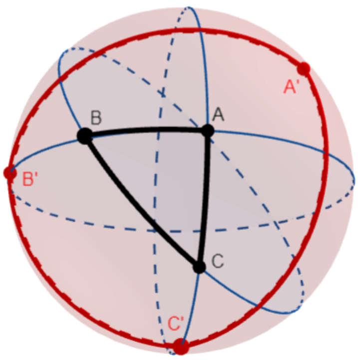
Proposição 9. *Suponha que o triângulo ABC tenha um ângulo reto em B. Então, um dos outros ângulos de ABC é agudo, reto ou obtuso, se e somente se, o lado oposto for agudo, reto ou obtuso, respectivamente.*

Após discutir as propriedades dos triângulos com ângulos retos, vamos explorar o conceito de triângulo polar.

Definição 16. *Seja $\Delta^s ABC$ um triângulo esférico. Definimos o triângulo polar de $\Delta^s ABC$, denotado por $\Delta^e A'B'C'$, como segue:*

- *A' é o polo da reta $\bigcirc BC$ que está do mesmo lado de A em relação à reta $\bigcirc BC$;*
- *B' é o polo da reta $\bigcirc AC$ que está do mesmo lado de B em relação à reta $\bigcirc AC$;*
- *C' é o polo da reta $\bigcirc AB$ que está do mesmo lado de C em relação à reta $\bigcirc AB$.*

Figura 11 – Triângulo Polar



Fonte: O autor (2024).

Apresentamos, na sequência, um teorema que relaciona os ângulos do triângulo esférico com os ângulos do triângulo polar. A demonstração desse teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 11.19.

Teorema 10. *Se $\Delta^s ABC$ é um triângulo esférico e $\Delta^e A'B'C'$ é o polar do triângulo $\Delta^s ABC$, então*

$$m(\angle A') = \pi - m(\overset{\frown}{BC}),\ m(\angle B') = \pi - m(\overset{\frown}{AC}) \text{ e } m(\angle C') = \pi - m(\overset{\frown}{AB})$$

e

$$m(\overset{\frown}{A'B'}) = \pi - m(\angle C),\ m(\overset{\frown}{A'C'}) = \pi - m(\angle B) \text{ e } m(\overset{\frown}{B'C'}) = \pi - m(\angle A)$$

Já explorarmos os conceitos dos triângulos esféricos, em que os princípios familiares da geometria euclidiana são reinterpretados em uma esfera, agora vamos investigar como acontece a congruência de triângulos esféricos.

1.3.2 Congruência de Triângulos Esféricos

A seguir, examinaremos as condições necessárias para que os lados e ângulos de dois triângulos garantam que esses dois triângulos sejam congruentes. Começamos por apresentar a definição de congruênica, que é a mesma que na geometria euclidiana.

Definição 17. *Dois triângulos esféricos $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s DEF$ são congruentes se $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DF}$, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$. Dizemos que os lados e ângulos congruentes são correspondentes.*

Todas as nossas propriedades de congruência para triângulos esféricos serão estabelecidas como teoremas.

Teorema 11 (Congruência LLL). *Suponha que nos triângulos esféricos $\Delta^s A_1B_1C_1$ e $\Delta^s A_2B_2C_2$, temos*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \cong \overset{\frown}{A_2B_2},\ \overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2}\ \ e\ \ \overset{\frown}{A_1C_1} \cong \overset{\frown}{A_2C_2}\ .$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \cong \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 12 (Congruência LAL). *Suponha que nos triângulos esféricos $\Delta^s A_1B_1C_1$ e $\Delta^s A_2B_2C_2$, temos*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \cong \overset{\frown}{A_2B_2},\ \overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2}\ \ e\ \ \angle B_1 \cong \angle B_2.$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \cong \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 13 (Congruência ALA). *Suponha que nos triângulos esféricos $\Delta^s A_1B_1C_1$ e $\Delta^s A_2B_2C_2$, temos*

$$\overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2}, \angle B_1 \cong \angle B_2\ e\ \angle C_1 \cong \angle C_2.$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \cong \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 14 (Congruência AAA). *Suponha que nos triângulos esféricos $\Delta^s A_1B_1C_1$ e $\Delta^s A_2B_2C_2$, temos*

$$\angle A_1 \cong \angle A_2,\ \angle B_1 \cong \angle B_2\ e\ \ \angle C_1 \cong \angle C_2.$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \cong \Delta^s A_2B_2C_2$.

As próximas duas definições e dois colorários apresentam dois casos de congruência para triângulos retângulos

Definição 18. *Dois Triângulos esféricos $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s DEF$ são considerados tendo uma correspondência de hipotenusa-cateto se eles têm: ângulos retos (correspondentes) em B e E; as hipotenusas relativas a esses ângulos congruentes; e um par de catetos (não reto) congruentes.*

Corolário 1 (Teorema hipotenusa-cateto). *Dois triângulos que têm uma correspondência entre hipotenusa-cateto são congruentes.*

A demonstração deste corolário encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Corolário 12.8.

Definição 19. *Dois triângulos esféricos $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s DEF$ são considerados como tendo uma correspondência hipotenusa-ângulo se eles têm: ângulos retos (correspondentes) em B e E; as hipotenusas relativas a esses ângulos congruentes; e um par de ângulos não retos congruentes.*

Corolário 2 (Teorema hipotenusa-ângulo)**.** *Dois triângulos esféricos que têm uma correspondência de hipotenusa-ângulo devem ser congruentes.*

A demonstração deste corolário encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Corolário 12.10.

1.3.3 Desigualdades

Após analisarmos diversas situações em que objetos na geometria esférica são idênticos ou congruentes, passaremos agora a considerar situações em que desigualdades se fazem presentes.

Uma dessas desigualdades é sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Na geometria esférica, ao contrário da geometria euclidiana, as somas dos ângulos de um triângulo não são fixadas em um valor constante, como no caso do triângulo plano. Em vez disso, a soma dos ângulos de um triângulo esférico depende de sua forma e tamanho.

Portanto, temos o seguinte teorema:

Teorema 15. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π radianos ($180°$).*

A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.2.

Outra desigualdade importante em triângulos esféricos é relacionada à soma das medidas dos lados. Ao contrário da soma dos ângulos, que é maior que π, a soma das medidas dos lados de qualquer triângulo esférico é sempre menor que 2π, como enunciado no próximo teorema.

Teorema 16. *Em qualquer triângulo esférico, a soma das medidas dos lados é menor que 2π.*

A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.3.

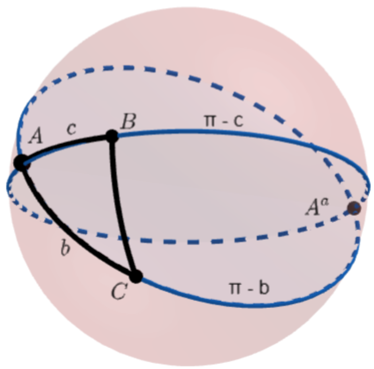
Além dessa limitação sobre a soma dos lados, existe uma outra propriedade fundamental relacionada às comparações entre os lados de um triângulo esférico. O próximo teorema explora como a soma de dois lados se relaciona com o terceiro.

Teorema 17. *A soma das medidas de quaisquer dois lados de um triângulo esférico é maior do que a medida do terceiro lado.*

A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.4.

A seguir, ilustramos o teorema com a representação gráfica de um triângulo esférico, onde é possível visualizar a relação entre os lados do triângulo.

Figura 12 – Relação dos lados de um triângulo esférico



Fonte: O autor (2024).

O próximo teorema generaliza a ideia da soma das distâncias entre três pontos na esfera.

Teorema 18. *Se A, B e C são três pontos (distintos) em uma esfera, então d(A, C) $\leq$ d(A,B) + d(B, C), onde a igualdade ocorre se, e somente se, B estiver entre A e C ou A = C^a*

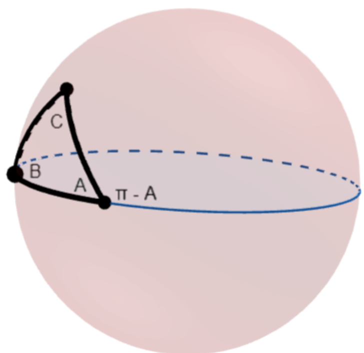
A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.5.

O próximo teorema, o Teorema do Ângulo Exterior Esférico, trata das desigualdades envolvendo os ângulos de um triângulo esférico. Ele estabelece uma relação entre os ângulos externos e internos de um triângulo esférico, oferecendo uma compreensão sobre as propriedades angulares em geometria esférica.

Teorema 19 (Teorema do Ângulo Exterior Esférico)**.** *A medida de qualquer ângulo externo de um triângulo esférico é menor que a soma das medidas dos ângulos internos opostos e maior que o valor absoluto de diferença entre essas medidas.*

A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.9.

Figura 13 – $|B - C| < \pi - A < B + C$



Fonte: O autor (2024).

Um conceito essencial da geometria esférica é que os ângulos e os lados de um triângulo estão diretamente relacionados. O próximo teorema descreve como a relação entre os lados e os ângulos de um triângulo esférico pode ser deduzida a partir das desigualdades mencionadas.

Teorema 20. *Dado dois lados de um triângulo cujas medidas são desiguais e os ângulos opostos a eles, então os ângulos também são desiguais em medida, e o maior ângulo é oposto ao lado mais longo. De forma similar, dados dois ângulos de um triângulo cujas medidas são desiguais, os lados opostos têm medidas desiguais, e o lado mais longo é oposto ao maior ângulo.*

A demonstração deste teorema encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 13.10.

1.4 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

A trigonometria esférica proporciona relações úteis entre os ângulos e lados de um triângulo esférico, permitindo o cálculo de três desses elementos quando os outros três são conhecidos.

A trigonometria esférica desempenha um papel fundamental na análise precisa das relações entre distâncias e ângulos em uma esfera. No cerne desse estudo está a conexão entre as distâncias e os ângulos de um triângulo. Mas, o que diferencia essas relações das correspondentes no plano?

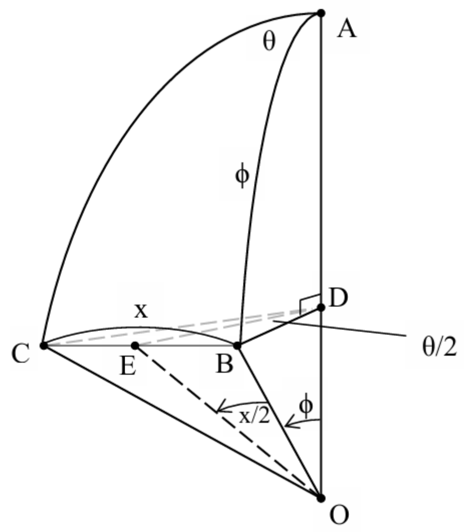
A diferença geométrica crucial entre o plano e a esfera é, evidentemente, a curvatura da esfera. Em um plano, quando tomamos duas semirretas com a mesma origem, elas se afastam do ponto de origem. No entanto, em uma esfera, as semirretas inicialmente se afastam do ponto de origem por "algum tempo", mas convergem no antípoda da origem.

A próxima proposição relaciona distâncias esféricas e ângulos entre semirretas. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 15.1.

Proposição 21. *Suponha que duas semirretas formem um ângulo com medida θ. Seja x a distância esférica entre dois pontos (um em cada semirreta) a uma distância esférica Φ do vértice. Então,*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}(\Phi)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Figura 14 – Proposição 21.



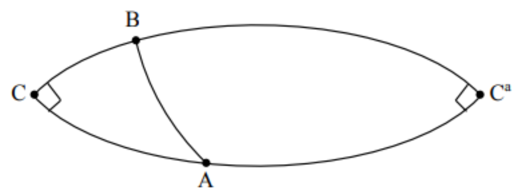
Fonte: (WHITTLESEY, 2020)

A proposição a seguir mostra como o seno de um ângulo em um triângulo retângulo esférico se relaciona com os senos do lado oposto a esse ângulo. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) na Proposição 15.2.

Proposição 22. *Se $\Delta^s ABC$ tem um ângulo reto em C, então*

$$\text{sen}(A) = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(c)}.$$

Figura 15 – $\Delta^s ABC$ com ângulo reto em C.



Fonte: (WHITTLESEY, 2020)

Além da proposição anterior, existem outras relações importantes que descrevem a geometria de triângulos esféricos retângulos. O teorema a seguir apresenta duas dessas relações envolvendo cossenos de ângulos e lados do triângulo esférico. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 15.3.

Para facilitar a compreensão das fórmulas a seguir de trigonometria esférica, temos que, as letras maiúsculas A, B e C representam os ângulos de um triângulo esférico, enquanto as letras minúsculas a, b e c representam os lados opostos a esses ângulos, respectivamente.

Teorema 23. *Se $\Delta^s ABC$ esférico tem um ângulo reto em C, então temos:*

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) \tag{2}$$

e

$$\cos(B) = \operatorname{sen}(A) \cdot \cos(b). \tag{3}$$

A primeira equação do teorema acima é chamada de **Teorema de Pitágoras Esférico**. A segunda equação é chamada de **Teorema de Geber**.

Em uma esfera “grande”, um pequeno triângulo esférico é quase planar, então o Teorema de Pitágoras da Geometria Euclidiana plana quase se sustentaria.

1.4.1 Lei esférica dos senos e dos cossenos

Na geometria esférica, existem leis que relacionam os lados e ângulos dos triângulos. Exemplo disso, são as leis esféricas dos senos e dos cossenos que são fundamentais para resolver problemas envolvendo triângulos esféricos, como os encontrados na navegação e astronomia.

A lei esférica dos senos estabelece uma proporção constante entre os senos dos lados de um triângulo esférico e os respectivos senos dos ângulos opostos a cada um desses lados. Esta lei é análoga à lei dos senos na geometria plana. Ela é utilizada quando se conhecem dois ângulos e um lado, ou dois lados e um ângulo e quer encontrar um lado ou um ângulo. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 15.3.

Teorema 24 (A lei esférica dos senos)**.** *Em qualquer $\Delta^s ABC$ esférico,*

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(C)}$$

A lei esférica dos cossenos é uma versão para esfera da lei dos cossenos da geometria euclidiana plana. Ela relaciona os cossenos e senos de dois lados de um triângulo esférico com o cosseno do terceiro lado e o cosseno do ângulo oposto a este lado. Ela é utilizada quando se conhecem os três lados de um triângulo e deseja-se encontrar um dos ângulos, ou quando se conhecem dois lados e o ângulo entre eles e deseja-se encontrar o terceiro lado. Sua demonstração encontra-se no livro (WHITTLESEY, 2020) no Teorema 16.1.

Teorema 25 (A lei esférica dos cossenos)**.** *Em qualquer $\Delta^s ABC$ esférico,*

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(C).$$

A partir do Teorema anterior, obtemos também as seguintes fórmulas

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(B)$$

e

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A).$$

A trigonometria esférica, com suas leis e teoremas, é uma ferramenta importante para compreender e resolver problemas em superfícies esféricas. Ela encontra aplicações em diversas áreas, como Navegação, Astronomia, Geodésia[2] e Física. Com essas relações mencionadas, podemos calcular distâncias e ângulos de forma precisa, facilitando a compreensão e a exploração do nosso mundo e do universo.

[2] Geodésia é a ciência que estuda a forma e as dimensões da Terra, a posição de pontos sobre sua superfície e a modelagem do campo de gravidade.

2 PRIMEIRA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISES PRÉVIAS

Na escola, do sexto ano do ensino fundamental a terceira série do ensino médio, a geometria é ensinada de forma progressiva e abrangente, abordando diferentes conceitos e aplicações ao longo dos anos.

No sexto ano, os alunos começam com noções básicas de geometria como identificação de formas geométricas simples (quadrados, retângulos, triângulos e círculos), cálculo de perímetro e área, além de introdução aos sólidos geométricos.

Nos anos seguintes, os alunos avançam para conceitos mais complexos, como estudo de razões e proporções, Teorema de Pitágoras, semelhança de figuras geométricas, geometria analítica (no ensino médio), cálculo de volumes e áreas de figuras mais complexas, além de introdução à trigonometria.

2.1 ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS (6º AO 9º ANO)

Segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), a geometria é dividida da seguinte forma nos anos finais do ensino fundamental.

2.1.1 Objetos de conhecimento da geometria do 6º Ano

Plano cartesiano: Associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.

Prismas e pirâmides: Planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).

Polígonos: Classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.

Construção de figuras semelhantes: Ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.

Ângulos: Noção, usos e medida.

Grandezas e medidas: Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume

2.1.2 Objetos de conhecimento da geometria do 7º Ano

Plano cartesiano: Associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.

Simetria e Transformações: Introdução aos conceitos de simetria, translações, rotações e reflexões.

Ângulos: Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma reta transversal.

Triângulos: Construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.

Polígonos regulares: Quadrado e triângulo equilátero.

Equivalência de área de figuras planas: Cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.

Grandezas e medidas: Problemas envolvendo medições e cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais.

2.1.3 Objetos de conhecimento da geometria do 8º Ano

Construções geométricas: Ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°, e polígonos regulares.

Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: Construção e problemas.

Congruência e Propriedades de Figuras Planas: Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.

Transformações geométricas: Simetrias de translação, reflexão e rotação.

Sólidos Geométricos: Exploração dos sólidos geométricos (cubos, prismas, cilindros) e cálculo de volume e área de superfície.

2.1.4 Objetos de conhecimento da geometria do 9º Ano

Trigonometria: Introdução às razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) e suas aplicações em triângulos retângulos.

Relações Métricas: Estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Teorema de Pitágoras: Verificações experimentais e demonstração.

Geometria Analítica: Noções iniciais de geometria analítica, incluindo o sistema de coordenadas cartesianas e a distância entre pontos.

Geometria Espacial: Estudo de sólidos geométricos mais complexos (pirâmides, cones, esferas).

2.2 ENSINO MÉDIO (1ª A 3ª SÉRIE)

No Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aborda competências específicas e habilidades. As competências específicas referem-se ao que os estudantes devem desenvolver na área de Matemática e suas Tecnologias. Enquanto, as habilidades são as capacidades que os estudantes devem demonstrar para alcançar essas competências.

Segundo a BNCC, embora cada habilidade esteja associada a uma competência específica, as habilidades não seguem uma ordem seriada. Desta forma, as habilidades de geometria ao longo do ensino médio são:

- EM13MAT103 - Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

- EM13MAT201 - Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- EM13MAT307 - Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- EM13MAT105 - Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- EM13MAT313 - Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- EM13MAT314 - Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- EM13MAT504 - Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- EM13MAT505 - Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

- EM13MAT506 - Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
- EM13MAT509 - Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

2.3 POR QUE ENSINAR GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA ESFÉRICAS?

É fundamental transmitir a nossos alunos que o estudo da geometria e da trigonometria vai além das formas planas convencionais. Ao contrário, há uma diversidade de geometrias, dentre elas a geometria esférica. A trigonometria esférica desempenha um papel significativo nesse contexto, revelando uma ampla gama de aplicações práticas. Por meio dela, somos capazes de calcular sistemas de coordenadas terrestres, que estão interligados com conceitos de Geografia, como meridianos, longitude e latitudes. Isso ilustra de maneira concreta como a Matemática está intrinsecamente ligada às disciplinas do currículo, realçando sua relevância em diferentes áreas do conhecimento.

Aprender trigonometria esférica no ensino fundamental e médio é uma oportunidade para os alunos ampliarem seu conhecimento geométrico e sua perspectiva de mundo.

Assim, a sequência didática criada será implementada em duas turmas de escolas e cidades diferentes, sendo uma no nono ano do ensino fundamental e outra no terceiro ano do ensino médio. No nono ano, os estudantes estão em fase de transição para o ensino médio, possuindo conhecimentos básicos de geometria plana e trigonometria. No terceiro ano do ensino médio, os alunos se preparam para exames finais e vestibulares, contando com uma base sólida em matemática e maior capacidade de abstração.

O estudo da geometria esférica é um conteúdo novo para ambas as turmas, pois ao longo dos anos escolares, eles não tiveram a oportunidade de explorar esse tópico. No entanto, acreditamos que a turma do terceiro ano, devido à sua maturidade matemática, terá mais facilidade em compreender os conceitos apresentados na sequência didática.

A abstração e a visualização espacial são habilidades essenciais para a compreensão dos conceitos esféricos. Para desenvolvê-las, utilizaremos modelos físicos, como esferas de isopor, que oferecem uma compreensão tátil e visual. Além disso, faremos uso de simulações digitais com o *software* GeoGebra, criando representações dinâmicas que facilitam a compreensão das transformações e relações esféricas.

3 SEGUNDA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISE A PRIORI

Nesta etapa da pesquisa foi construída uma Sequência Didática dividida em 8 momentos, com total de 12 aulas de 45 minutos cada.

O objetivo deste projeto é desenvolver uma compreensão sólida e profunda dos princípios e aplicações da trigonometria esférica, capacitando os alunos a utilizar conceitos geométricos e trigonométricos em superfícies curvas, como esferas.

Esperamos que, por meio dessas atividades, os alunos possam explorar a diversidade da geometria e expandir seus conhecimentos nessa área.

Habilidades envolvidas no processo são:

EF09MA11 Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunfer encia, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

A sequência didática apresentada aos alunos tem 17 páginas, nove seções e está no Anexo A.

3.1 OBJETIVOS UTILIZADOS PARA ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os objetivos da sequência didática foram planejados para garantir uma compreensão progressiva da geometria esférica. Cada atividade foi estruturada para desenvolver gradualmente o conhecimento dos alunos, começando pelos conceitos fundamentais da geometria euclidiana e avançando até os princípios mais complexos da geometria e trigonometria esféricas.

Atividade 1: Revisão de geometria plana e espacial

A Atividade 1 teve duração de 2 aulas e seguiu o objetivo de revisar a geometria euclidiana, plana e espacial, antes de iniciar o estudo da geometria esférica e assegurar que os alunos tenham uma base nos conceitos fundamentais, facilitando a compreensão e aplicação dos princípios mais complexos da geometria esférica.

Foi apresentado aos alunos a Seção 1 do anexo A.

Atividade 2: Axiomas básicos da geometria esférica

A Atividade 2 teve duração de 2 aulas e seguiu os objetivos: compreender o que é a geometria esférica e como ela difere da geometria euclidiana plana; identificar os axiomas fundamentais da geometria esférica; e aplicar os axiomas básicos da geometria esférica.

Foi apresentado aos alunos a Seção 2 do anexo A.

Atividade 3: Ângulos Esféricos

A Atividade 3 teve duração de 1 aula e seguiu os objetivos: compreender o conceito de ângulos esféricos e como eles diferem dos ângulos da geometria euclidiana plana; identificar os elementos envolvidos em ângulos esféricos, como os vértices e arcos; e saber calcular medidas de ângulos esféricos em graus e radianos.

Foi apresentado aos alunos a Seção 3 do anexo A.

Atividade 4: Triângulos Esféricos

A Atividade 4 teve duração de 1 aula e seguiu o objetivo de resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

Foi apresentado aos alunos a Seção 4 do anexo A.

Atividade 5: Congruência de Triângulos Esféricos

A Atividade 5 teve duração de 1 aula e seguiu o objetivo de identificar os critérios que indicam que dois triângulos esféricos são congruentes e compreender o significado de dois triângulos esféricos serem congruentes.

Foi apresentado aos alunos a Seção 5 do anexo A.

Atividade 6: Desigualdades

A Atividade 6 teve duração de 1 aula e seguiu os objetivos: compreender o conceito de desigualdade de triângulos esféricos e suas diferenças com triângulos planos; identificar as propriedades dos ângulos e lados de triângulos esféricos que influenciam as relações de desigualdade; e aplicar inequações específicas para demonstrar as relações de desigualdade.

Foi apresentado aos alunos a Seção 6 do anexo A.

Atividade 7: Trigonometria Esférica: Lei esférica dos senos e lei esférica dos cossenos

A Atividade 7 teve duração de 2 aulas e seguiu o objetivo de compreender o que é a trigonometria esférica e suas definições básicas e como ela difere da trigonometria plana.

Foram apresentadas aos alunos as Seções 7 e 8 do anexo A.

Atividade 8: Triângulo Retângulo Esférico

A Atividade 8 teve duração de 2 aulas e seguiu os objetivos: compreender o que é um triângulo retângulo e como suas propriedades são influenciadas pela curvatura da superfície; saber identificar os elementos presentes em um triângulo retângulo esférico, como os ângulos retos, os lados adjacentes ao ângulo reto e a hipotenusa; e resolver problemas que envolvam a aplicação das relações trigonométricas esféricas em triângulos retângulos.

Foi apresentado aos alunos a Seção 9 do anexo A.

4 TERCEIRA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: EXPERIMENTAÇÃO

Nessa fase, aplicamos a sequência didática em duas turmas. Uma turma de 3ª série do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Tereza Cristina, localizada na cidade de Laurentino, Santa Catarina, e outra turma de 9º ano da Escola de Ensino Fundamental Luis Ledra, situada em Rio do Sul, Santa Catarina. A turma da 3ª série tinha 20 alunos e a turma do 9º ano tinha 11 alunos.

Este projeto foi submetido e aprovado junto ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UFSC, sob o número CAAE 73646523.4.0000.0121.

Durante esta fase da pesquisa, aplicou-se uma Sequência Didática, organizada em 8 momentos, totalizando 13 aulas, cada uma com duração de 45 minutos.

Com o objetivo de tornar mais acessível para os alunos, foi desenvolvida uma apostila contendo um resumo dos axiomas, teoremas e definições para a compreensão dos temas que serão abordados pelo professor, além de apresentar as atividades programadas para a sequência didática.

A seguir serão descritas e analisadas as atividades desenvolvidas em cada turma.

4.1 MOMENTO 1 - REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

O objetivo dessa aula foi realizar uma revisão sobre a Geometria Plana e a Geometria Espacial.

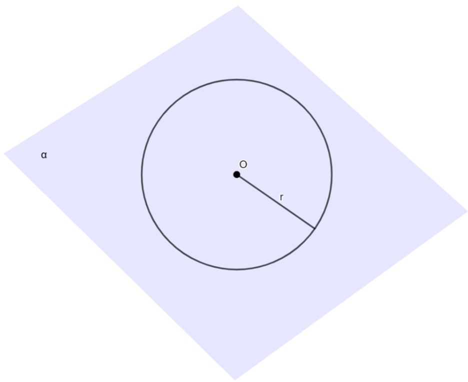
Inicialmente, os estudantes foram apresentados a alguns termos fundamentais e seus significados, sendo eles: Axioma, Teorema, Definição, Lema e Postulado. Em seguida, os Postulados de Euclides para a Geometria Plana foram apresentados, sendo eles, o Postulados das Retas, da Continuidade das Retas, da Circunferência, dos Ângulos e das Paralelas.

Cada postulado foi explicado aos alunos em detalhe. Além disso, esse momento foi aproveitado para relembrar conceitos como raio, circunferência, ângulo reto e retas paralelas

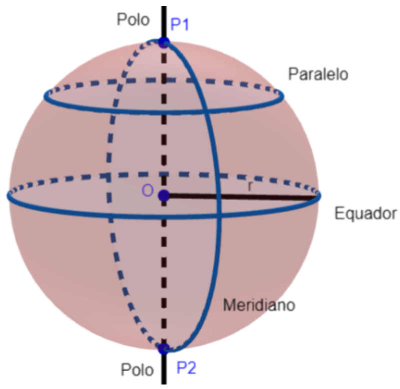
Após a discussão, foi apresentada aos alunos a representação da circunferência por meio do *software* GeoGebra, como mostrado na Figura 16a. Com a imagem projetada, foi apresentada aos alunos a definição de circunferência e seus principais elementos, raio, corda, diâmetro, comprimento da circunferência e área da circunferência.

Ainda utilizando o GeoGebra, foi apresentada aos alunos a representação de uma esfera, ver Figura 16b. Por meio da imagem, foi apresentada a definição de esfera, e seus principais elementos, eixo, equador, paralelos, meridianos e polos.

Figura 16 – Representações



(a) Circunferência



(b) Esfera

Fonte: O autor (2024).

Depois disso, foram apresentados os seguintes exemplos que foram resolvidos junto com os alunos:

Exemplo 1. *O comprimento da circunferência de uma moeda de R$ 1,00 mede aproximadamente 8,6 centímetros. Utilize* π *= 3,14 e calcule a medida da área da face da moeda.*

Exemplo 2. *Suponha que você tenha uma esfera de vidro com um raio de 6 centímetros. Essa esfera é derretida e transformada em pequenas esferas de raio 1,5 centímetros cada. Quantas pequenas esferas podem ser formadas a partir da esfera de vidro. (Use* π *= 3,14)*

Após os exemplos, durante os 30 minutos restantes, os alunos resolveram a seguinte lista de exercícios.

EXERCÍCIOS

1 – Sobre a circunferência, responda:
a) Em suas palavras, o que é uma circunferência?
b) Qual característica é compartilhada por todos os pontos de uma circunferência?
c) Como são as medidas de comprimento de todos os raios de uma circunferência?
d) Qual é a relação entre a medida de comprimento de um diâmetro e a medida de comprimento de um raio de uma mesma circunferência?
e) O centro é um ponto da circunferência?
f) Qual é a corda de maior medida de comprimento em uma circunferência?

2 – Utilizando régua e compasso, desenhe uma circunferência que possua 12 cm de diâmetro.

3 – Sobre a esfera, responda:

a) Em suas palavras, o que é uma esfera?
b) O que é um pólo em uma esfera? Como você descreve a localização de um polo em relação ao centro?
c) Se você dobrar o raio de uma esfera, como isso afeta o tamanho da esfera? E se você cortar o raio pela metade?
d) Suponha que o raio de uma esfera seja de 5 cm. Qual é o comprimento do equador e de um meridiano dessa esfera?
e) Se você cortar uma esfera com um plano perpendicular ao eixo que não passa pelo centro, qual forma será criada?
f) Se você se mover ao longo de um meridiano, como a distância do centro da esfera a você muda?

4 – Uma esfera de ferro com raio de 4 cm é derretida e transformada em pequenas esferas de raio 2 mm. Quantas pequenas esferas podem ser formadas?

4.1.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte.

Na questão 1, no item a) a maioria dos alunos descreveu a circunferência como um conjunto de pontos que estão a mesma distância do centro. No item b), eles destacaram que todos os pontos estão à mesma distância do centro, embora não utilizassem frequentemente o termo "equidistância". No item c), os alunos reconheceram que todos os raios têm o mesmo comprimento. No item d), identificaram corretamente a relação “diâmetro = 2 · raio”. No item e), compreenderam que o centro não faz parte da circunferência e, no item f), identificaram o diâmetro como a maior corda.

Na questão 2, a maioria dos alunos conseguiu desenhar uma circunferência de 12 cm de diâmetro utilizando régua e compasso, embora alguns tenham encontrado dificuldades em manusear o compasso corretamente.

Sobre a esfera, na questão 3 no item a) os alunos descreveram a esfera como uma bola. No item b), tiveram dificuldades em descrever pólos, mas mencionaram que estão nas extremidades de um eixo imaginário. No item c), perceberam que dobrar o raio aumenta significativamente o tamanho da esfera, mas precisaram de orientação para entender a relação do volume com o raio. No item d), muitos necessitaram de ajuda para calcular o comprimento do equador e meridiano. No item e), descreveram a forma criada como um círculo e, no item f), perceberam que a distância ao centro permanece constante.

Na questão 4, este exercício de volume foi desafiador, mas com orientação, os alunos conseguiram resolver utilizando a relação de volumes das esferas, embora a conversão de unidades tenha causado algumas dificuldades.

4.1.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série do Ensino Médio, analisamos o seguinte:

Na questão 1, No item a) a maioria dos alunos descreveram a circunferência de maneira técnica, como “conjunto de pontos equidistantes de um ponto central”. No item b), usaram corretamente o termo "equidistância". No item c), entenderam claramente que todos os raios são congruentes e, no item d), aplicaram diretamente a fórmula “diâmetro = 2 · raio”. No item e), tiveram compreensão precisa de que o centro não faz parte da circunferência e, no item f), identificaram corretamente o diâmetro como a maior corda.

Na questão 2, a habilidade prática com régua e compasso foi mais refinada, permitindo que desenhassem a circunferência de forma precisa.

Sobre a esfera, na questão 3 item a), a maioria dos alunos deu uma descrição técnica e detalhada da esfera. Um dos alunos descreveu: “Uma esfera é uma superfície tridimensional perfeitamente simétrica em relação ao seu centro. Todos os pontos de sua superfície estão à mesma distância de um ponto central.” No item b), entenderam claramente os polos e sua relação com o centro. No item c), compreenderam a relação do volume com o raio, usando fórmulas de volume. No item d), realizaram cálculos precisos do comprimento do equador e meridiano usando a fórmula $C = 2\pi r$. No item e), identificaram corretamente a forma criada ao cortar a esfera como um círculo e, no item f), compreenderam que a distância ao centro permanece constante ao longo do meridiano.

Na questão 4, os alunos tiveram facilidade em resolver problemas de volume, aplicando corretamente a fórmula de volume da esfera, alguns alunos tiveram dificuldades na conversão de unidades, mas na maioria a conversão de unidades foi realizada sem problemas.

4.2 SEGUNDA ATIVIDADE - GEOMETRIA ESFÉRICA

O objetivo dessa aula foi apresentar a geometria esférica por meio de definições e axiomas, para isso, foi pensado em duas aulas de 45 minutos cada. Mas, quando apresentado os exemplos, foi identificado que os alunos não possuiam o conhecimento geográfico necessário, então, a fim de garantir que os alunos compreendessem os exemplos, foi necessário realizar uma revisão sobre latitude, longitude e os pontos cardeais. Para isso, o planejamento inicial que eram 2 aulas de 45 minutos cada, teve que ser alterado para 3 aulas de 45 minutos cada.

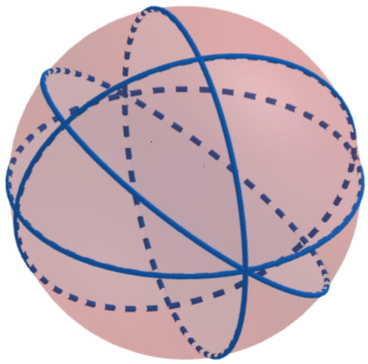
Primeiramente, enfatizou-se aos alunos que na Geometria Esférica não supomos que uma esfera seja formada por pontos equidistantes de um centro no espaço. Na verdade, nem consideramos a existência de um centro. Na abordagem da Geometria

Esférica, a esfera é concebida como o nosso próprio universo.

Em seguida, com auxílio do *software* GeoGebra, uma esfera foi construída, conforme mostrado na Figura 17. A imagem foi exibida no projetor e a partir dela foi explicado o que é circunferência máxima e pontos antípodas.

Também foi utilizado uma esfera de isopor para mostrar aos alunos o que são círculos máximos e pontos antípodas, utilizando um marcador.

Figura 17 – Circunferências Máximas



Fonte: O autor (2024).

Em seguida, foi apresentado aos alunos os princípios fundamentais da geometria esférica, destacando os axiomas que servem como base para essa geometria.

Após a realização dessa construção axiomática, foram apresentados aos alunos dois exemplos, que foram resolvidos em conjunto com a turma.

Exemplo 1. *Encontre o antípoda do ponto que possui as seguintes coordenadas: latitude 45°N e longitude 120°E.*

Exemplo 2. *Um navio parte da posição 36°30' S, 150°45' E. Ele viaja 500 milhas para o Norte e 300 milhas para o Oeste. Qual é a sua posição final?*

Após os exemplos, foi dado uma lista de exercícios para os alunos resolverem nos 20 minutos restantes de aula.

EXERCÍCIOS

1 - Responda:

a) Como a geometria esférica difere da geometria plana em relação a pontos, grandes círculos e esferas?

b) Em suas palavras, o que é uma circunferência máxima em uma esfera?

c) Qual é o comprimento de uma circunferência máxima em termos de π e do raio (r) da esfera?

d) O que significa dois pontos serem antípodas?

e) Qual é a relação entre um polo e seu antípoda?

2 - Dois círculos máximos da Terra interceptam-se no ponto latitude: 58° 15' S e longitude 169° 42' E. Quais são as coordenadas geográficas do outro ponto de encontro desses círculos máximos?

3 - Um navio deixa a posição 29° 15' N, 28° 10' W. Viaja 360 milhas em direção ao norte, 360 outras para leste, 360 para o sul e, finalmente, 360 para o oeste. Ache a posição final desse navio.

4.2.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte:

Na Questão 1, no item a) os alunos tiveram dificuldade em articular as diferenças de forma técnica. Eles conseguiram entender que, na geometria esférica, as linhas retas são representadas por grandes círculos. No item b), muitos alunos descreveram a circunferência máxima como "a maior circunferência que pode ser desenhada em uma esfera", e alguns alunos associaram corretamente ao equador. No item c), alguns alunos reconheceram que o comprimento é $2\pi r$, mas precisaram de ajuda para entender a relação entre π e o raio. No item d), a maioria dos alunos compreendeu que são pontos diretamente opostos em uma esfera, embora alguns tivessem dificuldade em expressar isso de forma clara. No item e), os alunos entenderam que os polos são antípodas, mas explicaram de maneira simples que "estão em lados opostos da esfera".

Na Questão 2, os alunos encontraram dificuldade em calcular o segundo ponto de interseção, necessitando de orientação para entender que ele está diametralmente oposto ao primeiro ponto. Mas com orientação, conseguiram fazer o exercício.

Na Questão 3, os alunos tiveram dificuldade em visualizar o trajeto do navio e em calcular a posição final. Com assistência, entenderam que o navio retorna à posição inicial.

4.2.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série do Ensino Médio, analisamos o seguinte:

Na Questão 1, no item a) os alunos descreveram de forma técnica, explicando que na geometria esférica, os grandes círculos representam as "linhas retas" e que não existem linhas paralelas. No item b), descreveram a circunferência máxima como a maior circunferência em uma esfera, localizada no plano que passa pelo centro da esfera. No item c), os alunos identificaram corretamente que o comprimento é $2\pi r$, demonstrando compreensão clara da relação entre π e o raio. No item d), explicaram de maneira precisa que são pontos diametralmente opostos na superfície da esfera.

No item e), descreveram tecnicamente que os polos são pontos antípodas e exemplificaram usando coordenadas geográficas.

Na Questão 2, os alunos calcularam corretamente as coordenadas geográficas do segundo ponto de interseção, demonstrando precisão ao entender que o segundo ponto é diametralmente oposto ao primeiro.

Na Questão 3, os alunos entenderam a trajetória do navio e calcularam que a posição final é a mesma da posição inicial, demonstrando boa compreensão dos movimentos sobre a superfície da Terra. Inclusive, muitos já entenderam de imediato que o navio voltaria a posição inicial.

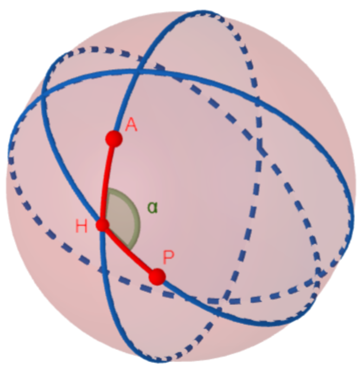
4.3 TERCEIRA ATIVIDADE - ÂNGULOS ESFÉRICOS

O objetivo desta aula foi apresentar os conceitos e definições dos ângulos esféricos. Para isso, foi utilizada uma aula de 45 minutos.

Inicialmente, foi apresentado aos estudantes a figura de um ângulo esférico, criada no *software* GeoGebra, ver Figura 18. Esta ferramenta permitiu uma visualização clara do que é um ângulo esférico e de como ele é formado por semirretas que se encontram em um ponto na superfície de uma esfera.

Para complementar a explicação, também foi utilizado uma esfera de isopor como recurso didático. Aproveitamos para relembrar que um ângulo chama-se agudo, reto ou obtuso se sua medida for, respectivamente, menor, igual ou maior do que $\pi/2$ $(90°)$.

Figura 18 – Ângulo esférico



Fonte: O autor (2024).

Após as explicações, foi apresentado aos estudantes o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Qual é o comprimento em milhas marítimas do arco na latitude de 60°N, determinado pelos meridianos de 70°E e 100°E?*

Nos 25 minutos finais da aula, foi passado os seguintes exercícios para os alunos:

EXERCÍCIOS

1 – Dada uma esfera, defina o que é um ângulo esférico e explique como ele é formado.

2 – Qual é o comprimento em milhas marítimas do arco de paralelo na latitude 50° N, determinado pelos meridianos de 100° E e 138° E?

3 - Determine a medida do ângulo esférico entre os meridianos de 30° E e 45° E na latitude de 60° N. Em seguida, determine se esse ângulo é congruente, suplementar ou complementar a um ângulo esférico entre os meridianos de 120° W e 135° W na latitude de 30° S.

4.3.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte:

Na Questão 1, os alunos conseguiram explicar a formação dos ângulos esféricos de maneira adequada.

Na Questão 2, alguns alunos tiveram dificuldades de calcular corretamente o comprimento do arco de paralelo. Outra dificuldade, foi a tranformação para milhas marítimas. Mas a maioria da turma consguiu chegar ao resultado.

Na Questão 3, a maioria dos alunos conseguiu chegar à resposta sem maiores dificuldades. No entanto, houve algumas ressalvas: embora tenham identificado corretamente que os ângulos eram iguais, alguns se confundiram nos conceitos de ângulos congruentes, suplementares e complementares.

4.3.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série, analisamos o seguinte:

Na Questão 1, os alunos conseguiram explicar a formação dos ângulos esféricos de maneira adequada.

Na Questão 2, a maioria dos alunos conseguiu encontrar o resultado correto. No entanto, alguns estudantes cometeram erros ao calcular o comprimento do arco de paralelo.

Na Questão 3, todos os alunos conseguiram encontrar a medida do ângulos e determinar corretamente a relação entre eles.

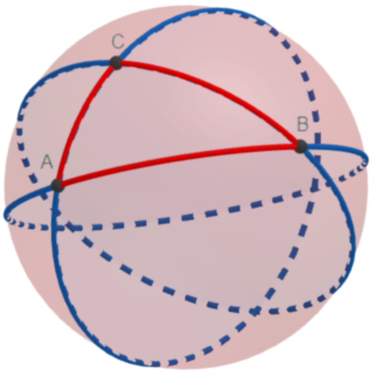
4.4 QUARTA ATIVIDADE - TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

O objetivo desta aula foi apresentar os conceitos e definições dos triângulos esféricos. Para isso, foi utilizado uma aula de 45 minutos.

Os alunos já possuíam conhecimento prévio sobre o conceito de círculos máximos, que foi estudado na aula anterior. Com base nisso, foi explicado que os triângulos esféricos são formados pelos pontos de interseção de três círculos máximos. Desta forma, um triângulo esférico é composto por seis ângulos: três ângulos internos e três ângulos que são os lados.

Após essa breve introdução, os estudantes foram apresentados à definição formal dos triângulos esféricos, acompanhada por um desenho feito no GeoGebra, ver Figura 19. Esta ferramenta permitiu uma visualização clara e precisa, facilitando o entendimento dos conceitos.

Figura 19 – Triângulo Esférico



Fonte: O autor (2024).

Ainda com o auxílio do GeoGebra, foi mostrado os diferentes tipos de triângulos esféricos, entre eles, os triângulos colunares, triângulos antípodas e triângulos polares.

Para solidificar o conhecimento, foi apresentado o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Dado* $\Delta^s ABC$ *com* $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$ *e* $\angle C = 100°$. *Determine os ângulos do triângulo polar* $\Delta^e A'B'C'$.

Nos 20 minutos finais da aula, os alunos foram desafiados a resolver os seguintes exercícios.

EXERCÍCIOS

1 – Existe o triângulo esférico ABC de ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ e lados a, b e c, se:

a) a = 150°, b = 160° e c = 170°

b) $\widehat{A}$ = 87°, $\widehat{B}$ = 108° e $\widehat{C}$ = 145°

2 - Os lados de um triângulo esférico medem 75°, 100° e 150°. Calcule os ângulos do seu triângulo polar.

3 - Os ângulos internos de um triângulo esférico medem 100°, 110° e 120°. Calcule a medida dos lados do seu triângulos polar.

4 - Dois ângulos de um triângulo esférico medem 50° e 100°, respectivamente, entre que valores deve estar o valor do terceiro ângulo? Justifique.

4.4.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte.

Na Questão 1, nos itens a) e b) a maioria do alunos conseguiram identificar se com as medidas dadas existe ou não um triângulo esférico.

Na Questão 2, os alunos conseguiram chegar ao valor correto dos ângulos do triângulo polar.

Na Questão 3, a maioria os alunos conseguiram encontrar a medida dos lados do triângulo polar corretamente.

Na Questão 4, a maioria dos alunos não conseguiu justificar corretamente a medida do terceiro ângulo.

4.4.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série do Ensino Médio, analisamos o seguinte.

Na Questão 1, nos itens a) e b) a maioria do alunos respondeu corretamente o que era pedido.

Na Questão 2, os alunos conseguiram chegar ao valor correto dos ângulos do triângulo polar.

Na Questão 3, a maioria dos alunos conseguiram encontrar a medida dos lados do triângulo polar corretamente.

Na Questão 4, a maioria respondeu corretamente e conseguiu justificar a resposta com base na soma dos ângulos esféricos.

4.5 QUINTA ATIVIDADE - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

O objetivo dessa aula foi mostrar os tipos de congruência dos triângulos esféricos. Para isso, foi utilizada uma aula de 45 minutos.

Inicialmente, foi relembrado com os alunos o conceito de triângulos congruentes. Os alunos foram incentivados a compartilhar o que lembravam sobre o assunto, promovendo uma discussão e permitindo que expressassem seus conhecimentos prévios. Após essa troca de ideias, a definição formal de triângulos congruentes foi apresentada, esclarecendo quaisquer dúvidas que ainda restavam.

Em seguida, foi relembrado com os alunos os critérios de congruência de triângulos na geometria euclidiana. Os critérios abordados incluíram os conhecidos Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ângulo-Lado (LAL) e Ângulo-Lado-Ângulo (ALA).

Após essa revisão, a aula prosseguiu com a apresentação dos critérios de congruência dos triângulos esféricos. Os critérios para triângulos esféricos são: LLL (lado-lado-lado), LAL (lado-ângulo-lado), ALA (ângulo-lado-ângulo), e AAA (ângulo-ângulo-ângulo).

Logo após, foi apresentado o seguinte exemplo para os alunos.

Exemplo 1. *Considere os triângulos esféricos* $\Delta^s ABC$ *em que* $a = 50°$, $b = 80°$ *e* $C = 90°$ *e* $\Delta^s DEF$ *em que* $d = 50°$, $e = 80°$ *e* $F = 90°$

Após o exemplo, durante os quinze minutos que restavam os alunos resolveram os seguintes exercícios.

EXERCÍCIOS

1 - Seja ABC um triângulo esférico com lados $\overset{\frown}{AB} = 50°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ e $\overset{\frown}{AC} = 70°$. Determine se o $\Delta^s ABC$ é congruente ao $\Delta^s XYZ$, com lados $\overset{\frown}{XZ} = 50°$, $\overset{\frown}{YZ} = 60°$ e $\overset{\frown}{XY} = 70°$.

2- Em um $\Delta^s LMN$, temos $\overset{\frown}{LM} = 40°$, $\overset{\frown}{MN} = 85°$ e $\overset{\frown}{NL} = 55°$. Seja o $\Delta^s OPQ$ com $\overset{\frown}{OP} = 40°$, $\overset{\frown}{PQ} = 85°$ e $\overset{\frown}{QO} = 55°$. Os triângulos XYZ e ABC são congruentes?

3 - Dados os triângulos esféricos $\Delta^s DEF$ e $\Delta^s GHI$, onde $\overset{\frown}{DE} = 30°$, $\overset{\frown}{EF} = 65°$, $\overset{\frown}{FD} = 85°$, $\overset{\frown}{GH} = 30°$, $\overset{\frown}{HI} = 65°$, e $\overset{\frown}{IG} = 85°$. Verifique se os $\Delta^s DEF$ e $\Delta^s GHI$ são congruentes.

4.5.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos que os alunos conseguiram identificar os casos de congruência entre os triângulos esféricos sem grandes dificuldades, demonstrando habilidade em comparar lados e ângulos dos triângulos esféricos para determinar a congruência.

4.5.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 3ª série, analisamos que assim como a turma do nono ano, os alunos não tiveram dificuldade em encontrar os casos de congruência e resolver os exercícios propostos.

4.6 SEXTA ATIVIDADE - DESIGUALDADE

O objetivo dessa aula foi mostrar os casos de desigualdade em triângulos esféricos, para isso, foi utilizado uma aula de 45 minutos.

Foi discutido inicialmente a diferença entre a geometria euclidiana e a geometria esférica, enfatizando como as propriedades e teoremas se adaptam ao formato curvo de uma esfera.

Sendo assim foi apresentado para os alunos as seguintes desigualdades, por meio de teoremas: Teorema da soma dos ângulos;, teorema da soma dos lados; teorema da desigualdade dos lados; teorema da distância; Teorema do ângulo externo; e Teorema dos lados e ângulos opostos.

Em seguida, foi apresentado aos alunos os seguintes exemplos.

Exemplo 1. *No triângulo esférico $\Delta^S ABC$ temos que A = 60°, B = 80° e C = 85°. Calcule a medida do ângulo externo relacionado ao ângulo C.*

Exemplo 2. *Verifique se o teorema da soma dos lados do triângulo esférico é válida para o seguinte triângulo esférico $\Delta^S ABC$ em que a = 95°, B = 120° e C = 70°.*

Após os exemplos, durante os quinze minutos que restavam os alunos resolveram os seguintes exercícios.

EXERCÍCIOS

1 - No triângulo esférico $\Delta^S ABC$, temos A = 80°, B = 75° e C = 40°. Calcule a medida do ângulo externo em relação ao C.

2 - Se A, B e C são pontos distintos em uma esfera e o ponto B encontra-se entre os pontos A e C, temos que d(A,B) = 40° e d(B,C) = 50°, calcule a distância d(A,C).

3 - Verifique se o Teorema da soma dos lados de um triângulo esférico é valido para o $\Delta^S ABC$, com lados a = 50°, b = 60° e c = 70°.

4.6.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte.

Na Questão 1, a maioria dos alunos conseguiu calcular corretamente a medida do ângulo externo em relação ao ângulo C, utilizando a soma dos ângulos internos. Alguns alunos confundiram a aplicação do teorema do ângulo exterior e incluiram o ângulo C na soma.

Na Questão 2, os alunos conseguiram calcular corretamente a distância, utilizando o teorema da distância

Na Questão 3, os alunos conseguiram verificar corretamente que o teorema da soma dos lados de um triângulo esférico é válido para o triângulo esférico $\Delta^S ABC$, com lados a = 50°, b = 60° e c = 70°.

4.6.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série, analisamos o seguinte.

Na Questão 1, a maioria do alunos conseguiu calcular corretamente a medida do ângulo externo em relação ao ângulo C. Alguns se confundiram e colocaram a medida do ângulo C no lugar dos ângulos A ou B.

Na Questão 2, os alunos calcularam corretamente a distância, utilizando o teorema da distância entre pontos.

Na Questão 3, os alunos conseguiram verificar corretamente que o teorema da soma dos lados de um triângulo esférico é válido para o triângulo esférico $\Delta^{s}ABC$, com lados a = 50°, b = 60° e c = 70°.

4.7 SÉTIMA ATIVIDADE - TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: LEI ESFÉRICA DOS SENOS E DOS COSSENOS

Após termos estudado os tipos de congruência e os casos de desigualdade dos triângulos esféricos, decidimos aprofundar nosso conhecimento aplicando a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos em triângulos esféricos. Para isso, utilizamos duas aulas de 45 minutos cada, permitindo uma abordagem detalhada e prática dos conceitos.

Em seguida, discutimos a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos para triângulos esféricos. Essas leis foram explicadas detalhadamente, com ênfase nas diferenças e semelhanças com as leis correspondentes na trigonometria plana.

Após a apresentação das fórmulas, os alunos foram apresentados aos exemplos a seguir, que mostram como aplicar a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos em triângulos esféricos.

Exemplo 1. *Em um $\Delta^{s}ABC$, temos que A = 40°, B = 60°, C = 110° e c = 50°. Encontre a medida de b.*

Exemplo 2. *Em um $\Delta^{s}ABC$, temos que a = 40°, b = 65°, C = 130° e c = 50°. Encontre a medida de c.*

Exemplo 3. *Encontre o comprimento do arco do grande círculo de Los Angeles (latitude 34.05° N, 118.25° W) e Jacarta (latitude 6.2° S, 106,8° E).*

Após a apresentação dos exemplos, os 30 minutos finais da aula foram dedicados para os alunos resolverem os seguintes exercícios.

EXERCÍCIOS

1 – Em um $\Delta^{s}ABC$, temos que A = 60°, B = 100°, C = 120° e b = 80°. Encontre a medida dos lados a e c.

2 – Em um $\Delta^{s}ABC$, temos que as medidas dos lados são a = 100°, b = 80° e c = 75°. Ainda temos que o ângulo B = 95°, encontre a medida dos ângulos A e C.

3 - Suponha que no $\Delta^{s}ABC$, b = 35°, c = 80° e A = 100°. Determine o valor de a.

4 - Encontre o comprimento do arco do grande círculo de Moscou (latitude 55.75° N, 37.62° W) e Tóquio (latitude 35.69° S, 139.7° E).

4.7.1 Turma do 9º ano

Após corrigir a atividade aplicada na turma do 9º ano, analisamos o seguinte.

Nas Questões 1, 2 e 3 os alunos precisavam apenas aplicar a fórmula correta e desenvolver os cálculos. Teve alguns alunos que se equivocaram com a fórmula e não conseguiram chegar ao resultado. Mas, a maioria conseguiu colocar os valores corretamente na fórmula e realizar os cálculos corretamente.

Na Questão 4, os alunos tiveram um pouco mais de dificuldade, muitos se equivocaram nas coordenadas geográficas das cidades, errando a distância em grau até o pólo da esfera.

4.7.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

Após corrigir a atividade aplicada na turma da 3ª série, analisamos o seguinte.

Nas Questões 1, 2 e 3 os alunos precisavam apenas aplicar a fórmula correta e desenvolver os cálculos. Os alunos do terceiro ano não tiveram dificuldade em aplicar a fórmula correta. No entanto, alguns ainda cometeram erros aritméticos.

Na Questão 4, os alunos do terceiro ano, também tiveram maior dificuldade nessa questão em relação as outras questões. Assim como no nono ano, a problemática maior foi a parte das coordenadas geográficas. Mas, de modo geral, na turma do terceiro ano teve uma porcentagem maior de acerto.

4.8 OITAVA ATIVIDADE - TRIÂNGULO RETÂNGULO ESFÉRICO

O objetivo desta aula foi apresentar o conceito de triângulo retângulo esférico e aplicar as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica. Para isso, foram utilizadas duas aulas de 45 minutos cada.

Na primeira aula, começamos relembrando com os estudantes o que é um triângulo retângulo na geometria euclidiana e o que caracteriza um ângulo reto. Após essa revisão, foi apresentado o conceito de triângulo retângulo esférico. Foi explicado que, em uma esfera, um triângulo retângulo é formado por três arcos de círculos máximos, onde um dos ângulos internos é reto.

Em seguida, foi apresentado as relações trigonométricas específicas dos triângulos retângulos esféricos. Essas fórmulas foram aplicadas com os alunos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1. *Dado $\Delta^{s}ABC$, com ângulo reto em C, sabemos que $a = 20°$ e $c = 40°$. Encontre os valores de b, A e B.*

Exemplo 2. *Dado $\Delta^{s}ABC$, com ângulo reto em C, sabemos que $a = 30°$ e $b = 40°$. Encontre os valores de c, A e B.*

Após os exemplos, foram passados os seguintes exercícios para os alunos resolverem durante os 30 minutos restantes da aula.

EXERCÍCIOS

1 - Em um $\Delta^{S}ABC$ com ângulo reto em C, temos que a = 20° e c = 40°. Encontre a medida de b, A e B.

2 - Em um $\Delta^{S}ABC$ com ângulo reto em C, temos que a = 30° e b = 40°. Encontre a medida de c, A e B.

3 - Em um $\Delta^{S}ABC$ com ângulo reto em C, temos que A = 60° e B = 80°. Encontre a medida de a, b e c.

4.8.1 Turma do 9º ano

A maioria dos alunos conseguiu resolver as questões corretamente, embora alguns tenham cometido pequenos erros de cálculo. Eles aplicaram as fórmulas da trigonometria esférica com sucesso para encontrar o que as questões pediam.

4.8.2 Turma da 3ª série do Esino Médio

A maioria dos alunos resolveu as questões corretamente e demonstrou uma compreensão clara das relações trigonométricas esféricas. Eles conseguiram aplicar as fórmulas apropriadas para determinar os valores corretos, mostrando uma compreensão dos conceitos envolvidos.

5 QUARTA FASE DA ENGENHARIA DIDÁTICA: ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA PROPOSTA

Após a implementação da sequência didática proposta, foi realizada uma análise a posteriori para avaliar a eficácia e a validade da proposta. Esta análise incluiu a coleta de dados através de observações de aula, exercícios e atividades aplicados aos alunos.

A abordagem de aplicar em duas turmas distintas, sendo uma do ensino fundamental e uma do ensino médio, tinha como objetivo avaliar a compreensão e a capacidade dos alunos de diferentes níveis de escolaridade em assimilar conceitos novos, especificamente em um campo da matemática que não é explorado no ensino básico.

Durante a aplicação da sequência didática foi observado que ambas as turmas compreenderam os conceitos apresentados e demonstraram habilidade em realizar os cálculos. O desempenho semelhante entre as duas turmas foi notável, pois os alunos do nono ano do ensino fundamental, geralmente considerados menos experientes em tópicos avançados da matemática, mostraram o mesmo nível de entendimento que os alunos da terceira série do ensino médio.

Tal constatação desafia a noção tradicional de que tópicos mais complexos devem ser reservados para os níveis mais avançados de ensino. Desta forma, percebe-se que quando um novo conteúdo é apresentado e este não requer uma base prévia, ou pré-requisitos específicos para a sua compreensão, este conteúdo pode ser apresentado no ensino fundamental, pelo menos nos anos finais.

Durante a aplicação, percebeu-se que tanto os alunos do ensino fundamental quanto do ensino médio não possuíam uma compreensão sólida dos conceitos geográficos, como latitude, longitude e pontos cardeais, bem como na conversão da parte decimal de grau para suas subunidades minuto e segundo, e vice-versa.

Os conceitos geográficos e as conversões (decimal - minuto e segundo) não foram inicialmente incluídos na sequência didática, pois assumimos que, de acordo com o currículo do ano em que a sequência seria aplicada, os alunos já deveriam ter conhecimento desses tópicos.

Portanto, para futuras implementações dessa sequência didática de geometria esférica, sugerimos que se faça uma revisão dos conceitos geográficos de latitude, longitude, pontos cardeais e na conversão de decimais de graus em suas subuniddes, e vice-versa. Isso não apenas garantirá que todos os alunos estejam no mesmo nível de entendimento, mas também tornará a transição para os tópicos de geometria esférica mais suave e eficaz.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A.; SILVA, M.J.F.R. Engenharia didática: evolução e diversidade –Didactic engineering: evolution and diversity. **Revemat**, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012. Acesso em: nov. 2024.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CATARINA, Santa. **Currículo Base da Educação Infantil e do Ensino Fundamental do Território Catarinense**. [*S.l.*]: Secretaria de Estado da Educação, 2019.

COUTINHO, Lázaro. **Trigonometria esférica: a matemática de um espaço curvo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 9° ano; ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; ALMEIDA, Nilze de; PÉRIGO, Roberto. **Matemática: Ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2016.

OSVALDO DOLCE, José Nicolau Pompeo. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

VALCANAIA, Egino. **Introdução à Geometria Esférica no Ensino Médio**. 2022. Diss. (Mestrado) – UFSC, Blumenau.

WHITTLESEY, Marshall A. **Spherical Geometry and Its Applications**. Boca Raton, FL: CRC Press, 2020.

ANEXO A – MATERIAL APLICADO

Geometria Esférica

Natã Pereira Germano

Novembro de 2023

1 Revisão da Geometria Plana e Espacial

1.1 Termos importantes

Na matemática frequentemente usamos termos para descrever diferentes tipos de proposições ou afirmações. Alguns desses termos iremos utilizar ao longo de nosso estudo, sendo eles: Axioma, Teorema, Definição, Lema e Postulado. Para ficar claro nosso estudo, é necessário compreender o que significa cada termos.

Definição Uma declaração que atribui um significado preciso a um conceito matemático. As definições são usadas para estabelecer a terminologia e a compreensão de termos matemáticos.

Axioma São afirmações fundamentais ou princípios básicos que são aceitos como verdadeiros sem necessidade de prova. Eles servem como a base para a construção de teorias matemáticas.

Postulado Um termo que pode ser substituído por axioma. Também se refere a uma afirmação fundamental que é aceita sem prova em um sistema matemático.

Proposição É uma afirmação matemática que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa, mas não ambas ao mesmo tempo.

Teorema Uma proposição que pode ser demonstrada como verdadeira com base em axiomas, definições e outros teorema previamente provados. A prova de um teorema é um argumento lógico que segue rigorosamente as regras da lógica e da matemática. Teorema são resultados importantes que estendem nosso conhecimento matemático.

Lema Um resultado intermediário ou auxiliar usado na prova de um teorema maior. Lemas são teoremas menores que podem não ser particularmente significativos por si só, mas desempenham um papel importante na construção da prova de um teorema mais amplo. Eles são usados para "quebrar" um problema complexo em partes mais gerenciáveis.

Corolário É uma proposição ou resultado que é uma consequência direta de um teorema ou de uma proposição anteriormente estabelecida. Em outras palavras, um corolário é uma afirmação que segue naturalmente do que foi provado anteriormente.

1.2 POSTULADOS DE EUCLIDES

Os *Postulados de Euclides* são um conjunto de axiomas geométricos formulados pelo matemático grego Euclides no livro *Elementos*, que é uma das obras mais influentes na história da matemática. Esses postulados estabelecem os princípios fundamentais da geometria euclidiana, que é a geometria tradicional baseada nos trabalhos de Euclides. Os cinco postulados de Euclides são:

Postulado 1 (Postulado das retas). *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém. Em outras palavras, dois pontos determinam uma e apenas uma reta.*

Postulado 2 (Postulado da Continuidade das Retas). *Uma reta pode ser estendida indefinidamente em ambas as direções.*

Postulado 3 (Postulado da Circunferência). *Dado um ponto qualquer e um raio, é possível traçar uma única circunferência com centro no ponto e raio dado.*

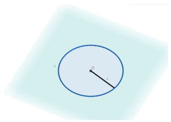
Postulado 4 (Postulado dos ângulos). *Todos os ângulos retos são iguais entre si.*

Postulado 5 (Postulado das Paralelas). *Dada uma reta e um ponto fora dela, é possível traçar uma única reta paralela à reta dada e que passa pelo ponto.*

1.3 CIRCUNFERÊNCIA

Definição 1 (Circunferência)**.** *Dados um plano α, um ponto O desse plano e um número real positivo r, denominaremos circunferência em α, de centro O e raio r, ao conjunto de pontos de α que estão à distância r de O.*

Figura 1: Representação da circunferência



Principais elementos de uma circunferência:

• **Corda:** É todo segmento de reta que suas extremidades são dois pontos da circunferência.

• **Diâmetro:** É o segmento de reta que passa pelo centro da circunferência e tem extremidades em pontos opostos da circunferência. O diâmetro é sempre igual a duas vezes o raio.

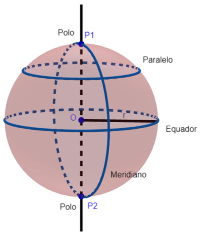
• **Circunferência:** É o próprio limite da figura, formado por todos os pontos que estão a uma distância igual do centro. O comprimento da circunferência é dado por 2π vezes o raio ($C = 2\pi r$), onde π (pi) é uma constante matemática aproximadamente igual a 3,14159.

• **Área da Circunferência:** A área contida dentro da circunferência é igual a π vezes o quadrado do raio ($A = \pi r^2$).

1.4 ESFERA

Definição 2 (Esfera)**.** *Sejam dados um ponto O do espaço e um número real positivo r. A esfera de centro O e raio r, denotada por $\Sigma(O, r)$, é o lugar geométrico dos pontos do espaço euclidiano que distam r de O.*

Figura 2: Representação de uma esfera



Na esfera acima podemos destacar os seguintes elementos:

• A reta que contém o centro da esfera é o **eixo**;

• A circunferência determinada ao seccionar a esfera por um plano perpendicular ao eixo e que contém o centro O chama-se **equador**;

• As circunferências determinadas ao seccionar a esfera por planos paralelos ao equador chamam-se **paralelos**;

• As circunferências determinadas ao seccionar a esfera por plano que contêm o eixo chamam-se **meridianos**;

• Os pontos P1 e P2 determinados na intersecção entre o eixo e a superfície da esfera chamam-se **polos**.

EXERCÍCIOS

1 – Sobre a circunferência, responda:

a) Em suas palavras, o que é uma circunferência?

b) Qual característica é compartilhada por todos os pontos de uma circunferência?

c) Como são as medidas de comprimento de todos os raios de uma circunferência?

d) Qual é a relação entre a medida de comprimento de um diâmetro e a medida de comprimento de um raio de uma mesma circunferência?

e) O centro é um ponto da circunferência?

f) Qual é corda de maior medida de comprimento em uma circunferência?

2 – Utilizando régua e compasso, desenhe uma circunferência que possua 12cm de diâmetro.

3 – Sobre a esfera, responda:

a) Em suas palavras, o que é uma esfera?

b) O que é um polo em uma esfera? Como você descreve a localização de um polo em relação ao centro?

c) Se você dobrar o raio de uma esfera, como isso afeta o tamanho da esfera? E se você cortar o raio pela metade?

d) Suponha que o raio de uma esfera seja de 5cm. Qual é o comprimento do equador e de um meridiano dessa esfera?

e) Se você cortar uma esfera com um plano perpendicular ao eixo que não passa pelo centro, qual forma será criada?

f) Se você se mover ao longo de um meridiano, como a distância do centro da esfera a você muda?

4 – Uma esfera de ferro com raio de 4 cm é derretida e transformada em pequenas esferas de raio 2 mm. Quantas pequenas esferas podem ser formadas?

2 Geometria Esférica

Após o legado de Euclides, que transformou a geometria plana, o matemático David Hilbert desempenhou um papel crucial ao reformular a geometria plana. Ele introduziu o conceito de termos indefinidos, Hilbert revolucionou a abordagem geométrica ao permitir que axiomas e definições fossem adaptados ao contexto específico. Os termos indefinidos refletem a flexibilidade da geometria, onde propriedades e relações dependem do sistema geométrico em uso.

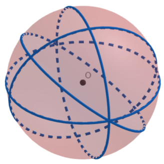
Na geometria esférica axiomática certos termos, como ponto, reta e esfera, são considerados indefinidos, e nossa compreensão desses conceitos depende unicamente dos axiomas estabelecidos.

Na Geometria Esférica, não supomos que uma esfera seja formada por pontos equidistantes de um centro no espaço. Na verdade, nem consideramos a existência de um centro. Na abordagem da Geometria Esférica, a esfera é concebida como o nosso próprio universo.

Para construir a geometria esférica temos:

Definição 3 (Circunferência máxima). *Denominaremos circunferências máximas da esfera* Σ *as circunferências contidas nessa esfera que possuam comprimento* $2\pi r$.

Figura 3: Círculos Máximos



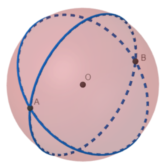
Teorema 1. *Duas circunferências máximas distintas de uma esfera Σ possuem exatamente dois pontos distintos em comum, os quais pertencem a uma reta que passa pelo centro da esfera.*

Axioma 1. *Uma esfera e um grande círculo são conjuntos de pontos. Há pelo menos dois pontos da esfera.*

Axioma 2. *Existe uma correspondência um-um entre os pontos de um grande círculo e os pontos de $R/2\pi$*

Definição 4 (Antípodas)**.** *Dois pontos A e B de uma esfera serão ditos antípodas se estão contidos numa reta que passa pelo centro dessa esfera. Diz-se ainda que A é antípoda de B, ou que B é antípoda de A.*

Figura 4: Pontos Antípodas



Axioma 3. *Cada ponto da esfera possui apenas um antípoda.*

Axioma 4. *Se dois pontos distintos em uma esfera não são antipoda/is então existe um grande círculo único passando por eles*

Definição 5. *Se dois pontos distintos A e B não são antipodais, o único grande círculo que passa por A e B é denotado por $\bigcirc AB$.*

Proposição 1. *Duas circunferências máximas distintas se encontram em exatamente dois pontos que são antípodas.*

Axioma 5. *Para qualquer circunferência máxima existe um ponto tal que a circunferência máxima consiste em pontos a uma distância esférica de um quarto de círculo do dado ponto. Tal ponto é definido como sendo um pólo do grande círculo.*

Proposição 2. *O antípoda de um pólo no Axioma 5 é o único outro ponto que satisfaz a mesma propriedade.*

Teorema 2. *O menor caminho entre dois pontos na esfera é um arco de circunferência máxima.*

EXERCÍCIOS

1 – Responda:

a) Como a geometria esférica difere da geometria plana em relação a pontos, grandes círculos e esferas?

b) Em suas palavras, o que é uma circunferência máxima em uma esfera?

c) Qual é o comprimento de uma circunferência máxima em termos de π e do raio (r) da esfera?

d) O que significa dois pontos serem antípodas?

e) Qual é a relação entre um polo e seu antípoda?

2 - Dois círculos máximos da Terra insterceptam-se no ponto latitude: 58° 15' S e longitude 169° 42' E. Quais são as coordenadas geográficas do outro ponto de encontro desses círculos máximos?

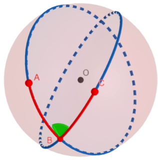
3 – Um navio deixa a posição 29° 15' N, 28° 10' W. Viaja 360 milhas em direção ao norte, 360 outras para leste, 360 para o sul e, finalmente, 360 para o oeste. Ache a posição final desse navio.

3 Ângulos Esféricos

Definição 6. *Denomina-se ângulo esférico sendo à união de duas semirretas de mesma origem não contidas numa mesma reta esférica.*

Definição 7. *Sejam A, B e C pontos de uma esfera que não um único grande círculo. Então o ângulo (esférico) $\angle ABC$ com vértice B é a união dos raios esféricos, $\vec{BA}$ e, $\vec{BC}$. Esses raios são conhecidos como os lados do ângulo.*

Figura 5: Ângulo esférico $\angle ABC$ com vértice em B



Dizemos que $\angle ABC$ é agudo, reto ou obtuso se sua medida for, respectivamente, menor, igual ou maior do que $\pi/2$ (90○).

Definição 8. *Dois ângulos esféricos são considerados congruentes se suas medidas forem as mesmas. Se os ângulos são $\angle ABC$ e $\angle DEF$ então escrevemos $\angle ABC \cong \angle DEF$. Os ângulos são ditos suplementares se suas medidas somam π radianos (180°). Os ângulos são ditos complementares se suas as medidas somam $\pi/2$ radianos (90°).*

Proposição 3. *Se duas circunferências máximas são perpendiculares, então cada um deles passa pelos pólos do outro. Inversamente, se um grande círculo passa pelos pólos de outro, os dois grandes círculos são perpendiculares.*

EXERCÍCIOS

1 – Dada uma esfera, defina o que é um ângulo esférico e explique como ele é formado.

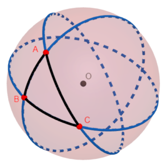
2 – Qual é o comprimento em milhas marítimas do arco de paralelo na latitude 50° N, determinado pelos meridianos de 100° E e 138° E?

3 - Determine a medida do ângulo esférico entre os meridianos de 30° E e 45° E na latitude de 60° N. Em seguida, determine se esse ângulo é congruente, suplementar ou complementar a um ângulo esférico entre os meridianos de 120° W e 135° W na latitude de 30° S.

4 Triângulos Esféricos

Definição 9 (Triângulo Esférico)**.** *Sejam A, B e C pontos distintos não contidos numa mesma reta esférica. A união dos três segmentos de reta $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$ será dito triângulo esférico de vértices A, B e C e lados $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$, e será representado por $\Delta^e ABC$. Os ângulos esféricos $\angle ABC$, $\angle ACB$ e $\angle BCA$ são seus ângulos internos.*

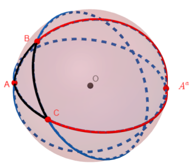
Figura 6: Triângulo e Esférico ABC



Teorema 3. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π e menor que 3π.*

Definição 10. *Dois triângulos são ditos colunares se eles têm dois vértices em comum e um par de vértices que são antípodas. Ou seja, os triângulos têm a forma $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s A^a BC$ onde A e A^a são antípodas.*

Figura 7: Triângulos Colunares



Proposição 4. *Se três pontos A, B, C em uma esfera não pertencem a um único círculo máximo, então nenhum dos pontos A, B, C são antípodas.*

Definição 11. *Dois triângulos são ditos antipodas se puderem ser expressos como $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s A^a B^a C^a$, onde A^a, B^a, e C^a são antípodas dos pontos A, B e C, respectivamente.*

Proposição 5. *Dado $\Delta^s ABC$, os três antípodas A^a, B^a, e C^a formam um triângulo esférico cujos lados e ângulos são congruentes aos lados e ângulos em $\Delta^s ABC$.*

Definição 12. *Um triângulo esférico é considerado um triângulo retângulo se pelo menos um de seus ângulos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa do triângulo retângulo, já o lado que não é uma hipotenusa é dito ser um cateto do triângulo.*

Proposição 6. *Um par de ângulos em um triângulo são ângulos retos se, e semente se, os lados opostos são lados retos.*

Proposição 7. *Suponha que o triângulo ABC tenha um ângulo reto em B. Então, um dos outros ângulos de ABC é agudo, reto ou obtuso, se e somente se o lado oposto for agudo, reto ou obtuso, respectivamente.*

Definição 13. *Seja $\Delta^s ABC$ um triângulo esférico. Definimos o triângulo $\Delta^e A'B'C'$, chamado de triângulo polar de $\Delta^s ABC$, como segue:*

- *A' é o polo da reta $\bigcirc BC$ que está do mesmo lado de A em relação à reta $\bigcirc BC$.*
- *B' é o polo da reta $\bigcirc AC$ que está do mesmo lado de B em relação à reta $\bigcirc AC$.*
- *C' é o polo da reta $\bigcirc AB$ que está do mesmo lado de C em relação à reta $\bigcirc AB$.*

Teorema 4. *Se $\Delta^s ABC$ é um triângulo esférico e $\Delta^e A'B'C'$ é o polar do triângulo $\Delta^s ABC$, então:*

$$m\angle A' = \pi - m(\overset{\frown}{BC})$$

$$m\angle B' = \pi - m(\overset{\frown}{AC})$$

$$m\angle C' = \pi - m(\overset{\frown}{AB})$$

$$m(\overset{\frown}{A'B'}) = \pi - m\angle C$$

$$m(\overset{\frown}{A'C'}) = \pi - m\angle B$$

$$m(\overset{\frown}{B'C'}) = \pi - m\angle A$$

Propriedades dos triângulos esféricos

1 - Qualquer lado de um triângulo esférico é menor que a soma dos outros dois lados.

2 - O menor ângulo aumentado de $180°$ torna-se maior que a soma dos outros dois ângulos.

3 - A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π $(180°)$ e menor que 3π $(540°)$.

4 - Em um triângulo esférico, a medida de cada ângulo interno é menor do que π $(180°)$, assim como seus lados.

5 - O triângulo esférico é retângulo se pelo menos um de seus ângulos for de $90°$.

6 - A soma dos lados de um triângulo esférico é maior que $0°$ e menor do que $360°$.

7 - Nos triângulos esféricos, se dois ângulos são retos, os lados opostos, também o são.

EXERCÍCIOS

1 – Existe o triângulo esférico ABC de ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ e lados a, b e c, se:

a) a = 150°, b = 160º e c = 170°

b) $\widehat{A} = 87°$, $\widehat{B} = 108°$ e $\widehat{C} = 145°$

2 - Os lados de um triângulo esférico medem 75°, 100° e 150°. Calcule os ângulos do seu triângulo polar.

3 - Os ângulos internos de um triângulo esférico medem 100º, 110° e 120°. Calcule a medida dos lados do seu triângulos polar.

4 - Dois ângulos de um triângulo esférico medem 50º e 100°, respectivamente, entre que valores deve estar o valor do terceiro ângulo? Justifique.

5 Congruência de Triângulos Esféricos

Nesta seção, examinamos as condições necessárias para que os lados e ângulos de dois triângulos sejam tais que esses dois triângulos sejam congruentes. Começamos por apresentar a definição, que é a mesma que na geometria plana.

Definição 14. *Dois triângulos esféricos $\Delta^s ABC$ e $\Delta^s DEF$ são congruentes se $\widehat{AB} \approx \widehat{DE}$, $\widehat{AC} \approx \widehat{DF}$,*

$\overset{\frown}{BC} \approx \overset{\frown}{EF}$, $\angle A \approx \angle D$, $\angle B \approx \angle E$ *e* $\angle C \approx \angle F$. *Dizemos que os lados e ângulos correspondentes são todos congruentes.*

Todas as nossas propriedades de congruência para triângulos esféricos serão estabelecidas como teoremas.

Teorema 5 (Congruência LLL)**.** *Suponha que nos triângulos esféricos* $\Delta^s A_1B_1C_1$ *e* $\Delta^s A_2B_2C_2$*, temos:*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \approx \overset{\frown}{A_2B_2},\ \overset{\frown}{B_1C_1} \approx \overset{\frown}{B_2C_2},\ \overset{\frown}{A_1C_1} \approx \overset{\frown}{A_2C_2}$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \approx \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 6 (Congruência LAL)**.** *Suponha que nos triângulos esféricos* $\Delta^s A_1B_1C_1$ *e* $\Delta^s A_2B_2C_2$*, temos:*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \approx \overset{\frown}{A_2B_2},\ \overset{\frown}{B_1C_1} \approx \overset{\frown}{B_2C_2},\ \angle B_1 \approx \angle B_2.$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \approx \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 7 (Congruência ALA)**.** *Suponha que nos triângulos esféricos* $\Delta^s A_1B_1C_1$ *e* $\Delta^s A_2B_2C_2$*, temos:*

$$\overset{\frown}{B_1C_1} \approx \overset{\frown}{B_2C_2},\ \angle B_1 \approx \angle B_2,\ \angle C_1 \approx \angle C_2.$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \approx \Delta^s A_2B_2C_2$.

Teorema 8 (Congruência AAA)**.** *Suponha que nos triângulos esféricos* $\Delta^s A_1B_1C_1$ *e* $\Delta^s A_2B_2C_2$*, temos:*

$$\angle A_1 \approx \angle A_2,\ \angle B_1 \approx \angle B_2,\ \angle C_1 \approx \angle C_2$$

Então, $\Delta^s A_1B_1C_1 \approx \Delta^s A_2B_2C_2$.

EXERCÍCIOS

1 - Seja ABC um triângulo esférico com lados $\overset{\frown}{AB} = 50°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ e $\overset{\frown}{AC} = 70°$. Determine se o $\Delta^s ABC$ é congruente ao $\Delta^s XYZ$, com lados $\overset{\frown}{XZ} = 50°$, $\overset{\frown}{YZ} = 60°$ e $\overset{\frown}{XY} = 70°$.

2- Em um $\Delta^s LMN$, temos $\overset{\frown}{LM} = 40°$, $\overset{\frown}{MN} = 85°$ e $\overset{\frown}{NL} = 55°$. Seja o $\Delta^s OPQ$ com $\overset{\frown}{OP} = 40°$, $\overset{\frown}{PQ} = 85°$ e $\overset{\frown}{QO} = 55°$. Os triângulos XYZ e ABC são congruentes?

3 - Dados os triângulos esféricos $\Delta^s DEF$ e $\Delta^s GHI$, onde $\overset{\frown}{DE} = 30°$, $\overset{\frown}{EF} = 65°$, $\overset{\frown}{FD} = 85°$, $\overset{\frown}{GH} = 30°$, $\overset{\frown}{HI}$ $= 65°$, e $\overset{\frown}{IG} = 85°$. Verifique se os $\Delta^s DEF$ e $\Delta^s GHI$ são congruentes.

6 Desigualdade

Após analisarmos diversas situações em que objetos na geometria esférica são idênticos ou congruentes, passaremos agora a considerar situações em que desigualdades se fazem presentes.

Teorema 9. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico é maior que π radianos (180°).*

Teorema 10. *Em qualquer triângulo esférico, a soma das medidas dos lados é menor que 2π.*

Teorema 11. *A soma das medidas de quaisquer dois lados de um triângulo esférico é maior do que a medida do terceiro lado.*

Teorema 12. *Se A, B e C são três pontos (distintos) em uma esfera, então d(A, C) $\leq$ d(A,B) + d(B, C), onde a igualdade ocorre se e somente se B estiver entre A e C ou A = C^a*

Teorema 13 (Teorema do Ângulo Exterior Esférico)**.** *A medida de qualquer ângulo externo de um triângulo esférico é menor que a soma das medidas dos ângulos internos opostos e maior que o (valor absoluto de diferença entre essas medidas.*

Teorema 14. *Dados dois lados de um triângulo cujas medidas são desiguais e os ângulos opostos a eles, então os ângulos são desiguais em medida e o maior ângulo é oposto ao maior lado. Da mesma forma, dados dois ângulos de um triângulo cujas medidas são desiguais, os lados opostos têm medidas desiguais e o lado maior é oposto ao ângulo maior.*

EXERCÍCIOS

1 - No triângulo esférico $\Delta^s ABC$, temos $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$ e $\angle C = 40°$. Calcule a medida do ângulo externo em relação ao $\angle C$.

2 - Se A, B e C são pontos distintos em uma esfera e o ponto B encontra-se entre os pontos A e C, temo que d(A,B) = 40° e d(B,C) = 50°, calcule a distância d(A,C).

3 - Verifique se o Teorema 11 é valido para o $\Delta^s ABC$, com lados $\overset{\frown}{AB} = 50°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ e $\overset{\frown}{AC} = 70°$.

7 Trigonometria Esférica

A trigonometria esférica proporciona relações úteis entre os seis elementos de um triângulo esférico (que incluem 3 lados e 3 ângulos), permitindo o cálculo de três desses elementos quando os outros três são conhecidos.

A trigonometria esférica desempenha um papel fundamental na análise precisa das relações entre distâncias e ângulos em uma esfera. No cerne desse estudo está a conexão entre as distâncias e os ângulos de um triângulo. Mas o que diferencia essas relações das correspondentes no plano?

A diferença geométrica crucial entre o plano e a esfera é, evidentemente, a curvatura da esfera. Em um plano, quando tomamos dois raios com o mesmo ponto de partida, eles se afastam do ponto de origem. No entanto, em uma esfera, esses raios inicialmente se afastam do ponto de origem por algum tempo, mas eventualmente convergem no antípoda desse ponto de partida.

8 Lei esférica dos senos e dos cossenos

Teorema 15 (A lei esférica dos senos). *Em qualquer $\Delta^s ABC$ esférico,*

$$\frac{sen(a)}{sen(A)} = \frac{sen(b)}{sen(B)} = \frac{sen(c)}{sen(C)}$$

Teorema 16 (A lei esférica dos cossenos). *Em qualquer $\Delta^s ABC$ esférico,*

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b) \cdot cos\ (C)$$

Podemos girar as letras para obter fórmulas semelhantes:

$$\mathrm{cos(b) = cos(a) \cdot cos(c) + sen(a) \cdot sen(c) \cdot cos\ (B)}$$

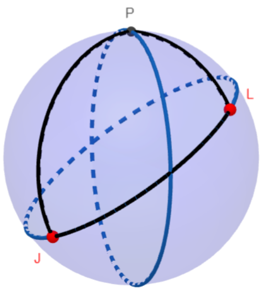
$$\mathrm{cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos\ (A)}$$

Exemplo: Encontre o comprimento do arco do grande círculo de Los Angeles (latitude 34.05° N, 118.25° W) e Jacarta (latitude 6.2° S, 106,8° E).

Solução:

Indicando a cidade de Los Angeles pelo ponto L e a cidade de Jacarta pelo ponto J e o polo pelo ponto P, no globo terrestre temos a seguinte situação:

Figura 8: Distância entre Los Angeles e Jacarta



Usando a convenção de sinais, as coordenadas de latitude e longitude de Los Angeles são (+ 34,05°, 118,25°), e Jacarta tem coordenadas (- 6,2° + 106,8°). Então, para Los Angeles, a distância em graus até o pólo norte é 90° 34,05° = 55,95°. Para Jacarta, a distância em grau para o pólo norte será 90° + 6,2° = 96,2°.

A diferença de longitude é 106,8° (118,25°) = 225,05°.

Considerando o $\Delta^s LPJ$, vamos utilizar a lei esférica dos cossenos, sendo p a distância esférica entre as duas cidades, temos:

$$\cos(\text{p}) = \cos(\text{l}) \cdot \cos(\text{j}) + \text{sen}(\text{l}) \cdot \text{sen}(\text{j}) \cdot \cos\,(\text{P})$$

$$\cos(\text{p}) = \cos(96{,}2^{\underline{o}}) \cdot \cos(55{,}95^{\underline{o}}) + \text{sen}(96{,}2^{\underline{o}}) \cdot \text{sen}(55{,}95^{\underline{o}}) \cdot \cos\,(225{,}05^{\underline{o}})$$

Então, se c é a distância esférica entre duas cidades,

$$\cos(\text{c}) = \cos(55{,}95°)\,\cos(96{,}2°) + \text{sen}(55{,}95°)\,\text{sen}(96{,}2°)\,\cos(225{,}05°).$$

Obtemos,

cos(c) $\approx$ 0,6424.

Como c representa o lado de um triângulo esférico, temos que c varia de 0° a 180°.

Logo,

c $\approx$ 129,97°.

Para encontrar a distância em milhas, primeiro convertemos c em radianos: c $\approx$ 2,2684.

Então, para encontrar a distância entre as cidades em milhas, usamos a fórmula do comprimento de um arco circular (o comprimento é o raio vezes a medida do arco) para obter a distância $(3963) \cdot (2{,}2684) \approx 8{,}990$ milhas.

EXERCÍCIOS

1 – Em um $\Delta^s ABC$, temos que A = 60°, B = 100°, C = 120° e b = 80°. Encontre a medida dos lados a e c.

2 – Em um $\Delta^s ABC$, temos que as medidas dos lados são a = 100°, b = 80° e c = 75°. Ainda temos que o ângulo B = 95°, encontre a medida dos ângulos A e C.

3 - Suponha que no $\Delta^s ABC$, b = 35°, c = 80° e A = 100°. Determine o valor de a.

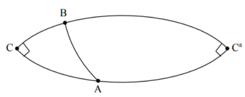
4 - Encontre o comprimento do arco do grande círculo de Moscou (latitude 55.75° N, 37.62° W) e Tóquio (latitude 35.69° S, 139.7° E).

9 Triângulo retângulo esférico

Proposição 8. *Se $\Delta^s ABC$ tem um ângulo reto em C, então*

$$sen(A) = \frac{sen(a)}{sen(c)}$$

Figura 9: $\Delta^s ABC$ com ângulo reto em C



Teorema 17. *Se $\Delta^s ABC$ esférico tem um ângulo reto em C, então temos:*

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos\ (b)$$

$$cos(B) = sen(A) \cdot cos\ (b)$$

A primeira equação do teorema acima é chamada de **Teorema de Pitágoras Esférico**. A segunda equação é chamada de **Teorema de Geber**.

Em uma esfera grande, um pequeno triângulo esférico é quase planar, então o plano teorema de Pitágoras quase se sustentaria.

Na trigonometria plana, estudamos várias fórmulas relacionadas às medidas de ângulos e lados em triângulos retângulos. Existem conjuntos correspondentes de fórmulas para triângulos esféricos. No teorema abaixo veremos essas fórmulas:

Teorema 18. *Seja $\Delta^s ABC$ um triângulo esférico com um ângulo reto em C. Então, as cinco equações a seguir são válidas.*

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b)$$

$$sen(a) = sen(A) \cdot sen(c)$$

$$cos(B) = sen(A) \cdot cos(b)$$

$$sen(b) = sen(B) \cdot sen(c)$$

$$cos(A) = sen(B) \cdot cos(a)$$

EXERCÍCIOS

1 - Em um $\Delta^s ABC$ com ângulo reto em C, temos que a = 20° e c = 40°. Encontre a medida de b, A e B.

2 - Em um $\Delta^s ABC$ com ângulo reto em C, temos que a = 30° e b = 40°. Encontre a medida de c, A e B.

3 - Em um $\Delta^s ABC$ com ângulo reto em C, temos que A = 60° e B = 80°. Encontre a medida de a, b e c.