UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Igor Godoy Borges

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM FOCO NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM PARA ENSINO MÉDIO USANDO A PLATAFORMA DO CANVA

Santa Maria, RS
2024

Igor Godoy Borges

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM FOCO NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM PARA ENSINO MÉDIO USANDO A PLATAFORMA DO CANVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Fidelis Bittencourt

Santa Maria, RS
2024

Borges, Igor
UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM FOCO NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM PARA ENSINO MÉDIO USANDO A PLATAFORMA DO CANVA / Igor Borges.- 2024.
58 p.; 30 cm

Orientador: FIDELIS BITTENCOURT
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2024

1. Análise Combinatória 2. Canva 3. PFC I. BITTENCOURT, FIDELIS II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, IGOR BORGES, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Igor Godoy Borges

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM FOCO NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM PARA ENSINO MÉDIO USANDO A PLATAFORMA DO CANVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 28 de agosto de 2024:

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Pedro Fusieger, Dr. (UFSM)

Ana Marli Bulegon, Dra. (UFN)

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família por ter me dado a oportunidade, estrutura e incentivo para seguir estudando, aos professores que passaram pela minha vida e me mostraram a beleza do conhecimento.

Ao orientador Professor Dr Fidelis Bittencourt que aceitou o desafio de me orientar, me dar suporte e conhecimento para a elaboração do presente trabalho.

Aos Professores do PROFMAT por orientarem e estarem sempre dispostos para sanar minhas dúvidas.

RESUMO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM FOCO NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM PARA ENSINO MÉDIO USANDO A PLATAFORMA DO CANVA

AUTOR: Igor Godoy Borges
ORIENTADOR: Fidelis Bittencourt

A dissertação tem como objetivo a apresentação de uma proposta de ensino de Análise Combinatória com o foco no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para Ensino Médio, utilizando um caderno didático estilizado e elaborado com a plataforma do Canva. O material em questão tem por finalidade apresentar o PFC como base fundamental do estudo da análise combinatória, otimização do tempo escolar e uma tentativa de tornar o estudo na escola mais atrativo e aprofundado ao adolescente. Os alunos recebem a apostila e completam suas lacunas com os conceitos lecionados em aula pelo Professor. A primeira aplicação aconteceu com uma turma de uma escola pública de Santa Maria-RS no turno da manhã. A pesquisa tem caráter qualitativo. Os resultados obtidos foram positivos em relação a aprendizagem, opinião da maioria dos estudantes e na carga horária que foi necessária para apresentar os conceitos de forma efetiva, ou seja, foi necessário menos tempo para apresentar mais conceitos, além de oferecer mais espaço para os alunos participarem das aulas resolvendo exercícios ou dando sugestões para resolvê-los. As avaliações que os alunos fizeram sugerem como evidência que o material proposto foi benéfico para a aprendizagem.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Princípio Fundamental da Contagem. Plataforma Canva.

ABSTRACT

A PROPOSAL FOR TEACHING COMBINATORIAL ANALYSIS WITH A FOCUS ON FUNDAMENTAL PRINCIPLE OF COUNTING FOR HIGH SCHOOL USING THE CANVA PLATFORM

AUTHOR: Igor Godoy Borges
ADVISOR: Fidelis Bittencourt

The dissertation aims to present a teaching proposal on Combinatorial Analysis in high school, focusing on the Fundamental Counting Principle, using a stylized didactic notebook created with Canva software. The purpose of this material is to present the FCP as afundamental basis for the study of combinatorial analysis, optimizing school time andattempting to make the study in school more attractive and in-depth for adolescents. The students receive the workbook and fill in the gaps with the concepts taught in class by the teacher. The first application took place with a class from a public school in Santa Maria-RS in the morning shift. The research is qualitative in nature. The results obtained were positive regarding learning, the opinion of the majority of students, and the amount of time needed to effectively present the concepts. In other words, it required less time to present more concepts, as well as offering more space for students to participate in class by solving exercises or providing suggestions to solve them.

Keywords: Combinotorial Analysis. Fundamental Principle of Counting. Canva Plataform

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
PFC	Princípio Fundamental da Contagem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi parte importante de minha vida, o encanto com ela não é recente, vem desde os tempos em que comecei a estudar na escola, as aulas da matéria praticamente sempre foram um motivo de felicidade, também o fato de ser contemplado com excelentes professores também contribuiu para que eu escolhesse o mesmo caminho.

Iniciei a escolaridade do Ensino Fundamental na Escola Estadual de Ensino Fundamental Edi Tereza Flores Lippert, localizada em Santo Ângelo-RS e finalizei os estudos do Ensino Médio no Colégio Militar de Santa Maria. Durante os anos escolares a Matemática sempre foi a matéria favorita, sendo assim, praticamente não apresentei dificuldades.

Em 2013, com um apoio dos pais, ingressei no curso de Matemática na Universidade Federal de Santa Maria, logo em 2014, graças a Professora Dr.ª Maria Cecília Santarosa, tive a oportunidade de começar a lecionar Pré-cálculo na própria Universidade, a experiência me fez um apaixonado pelo ato de ensinar Matemática, desde então comecei a trabalhar em cursinhos pré-vestibulares também. Assim como praticamente qualquer jornada de desenvolvimento, cursar Matemática não foi muito fácil, teve tropeços e conquistas, tais falhas são também de muita relevância para refletirmos, amadurecermos e nos colocarmos no caminho das vitórias, apesar das dificuldades, o ato de se desenvolver é extremamente compensatório e pretendo seguir buscando. No ano de 2021 tive a oportunidade de começar a trabalhar no Colégio Estadual Coronel Pilar, localizado em Santa Maria- RS, no qual sou muito grato aos colegas e alunos.

No ano de 2022 tive a oportunidade de ser um estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, o fato do mercado de trabalho estar cada vez mais competitivo, a minha vontade em continuar me desenvolvendo como profissional e uma provável maior quantidade de oportunidades foram motivos que me levaram a fazer o exame do ENA, o qual fui aprovado. Graças aos Professores e organizadores o mestrado tem me auxiliado a me tornar um profissional mais qualificado e preparado.

Buscar o desenvolvimento profissional em questões técnicas está cada vez mais fundamental para competir no mercado de trabalho, além de se manter atualizado no ramo escolhido, pois a acomodação nos leva a estagnação, com a profissão de Professor de Ensino Médio não é diferente, a constante qualificação, estar atento as novas tecnologias, tendências e como tirar proveito dessas novas situações são características praticamente fundamentais do profissional desse século. Atualmente a Inteligência Artificial está muito em pauta, provavelmente será uma ferramenta que deveremos aprender a usar de forma significativa num futuro próximo.

A Análise Combinatória sempre foi uma das minhas matérias favoritas na Matemática, para estudar e lecionar, ela auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, ajudando as pessoas a pensar de forma mais estruturada e organizada, contribui para a tomada de decisões na vida cotidiana, desenvolve a criatividade e pensamento de forma mais estratégica para resolver os problemas. Na prática do ensino em escola a Análise Combinatória geralmente apresenta uma maior facilidade em relação aos fundamentos que o estudante precisa para compreender, pois são mais básicos comparada a outras matérias, além de apresentar inúmeras situações práticas que podem ser discutidas em aula e geralmente os problemas apresentam mais formas de resolução, incentivando a participação dos alunos.

O uso apenas das fórmulas para o ensino da Análise Combinatória pode prejudicar a aprendizagem do estudante, impedindo seu desenvolvimento potencialmente efetivo do raciocínio lógico referente ao objeto do conhecimento. A compreensão do uso do Princípio fundamental da contagem pode ser uma alternativa mais adequada para uma melhor aprendizagem.

A probabilidade é uma matéria muito dependente da Análise Combinatória, o meu Trabalho de Conclusão de curso da graduação foi sobre jogos de azar e vejo que na sociedade muitas pessoas não entendem muito sobre os perigos das apostas nesse ramo. Acredito que deveriam ser melhores orientadas em relação a Análise Combinatória e Probabilidade, uma melhor orientação fariam tomar melhores decisões em questões financeiras, evitando gastos completamente desnecessários.

A BNCC destaca algumas habilidades da Análise Combinatória que os estudantes precisam compreender:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p.529).
>
> (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades. (BRASIL, 2018, 529).

O Princípio fundamental da Contagem, chamado também de PFC, pode servir como pilar básico para a resolução de praticamente todos os problemas da Análise Combinatória, com esse fato surgiu a ideia de apresentar todos os conceitos e exercícios com ele, deduzindo as diversas fórmulas e apresentando através dessa base. As relações de combinação, arranjo, permutação com repetição e outras só foram destacadas por conta de vestibulares que os alunos pretendem fazer, muitas provas cobram suas respectivas notações.

Os desafios que os professores de escolas públicas enfrentam fazem com que sejam necessárias a tomada de algumas medidas com abordagens diferenciadas para apresentarem os conceitos de forma mais satisfatória para seus alunos. O fato de me deparar com apenas três períodos semanais para os segundos anos do ensino médio acabou me obrigando a preparar um material de completar lacunas, ou seja, o aluno recebe um caderno didático, comparece nas aulas e preenche os espaços em branco, assim o tempo de aula é extremamente otimizado, em vez de escrever cada problema na lousa, eles já recebem o material pronto, somente resolvemos os exercícios e debatemos sobre o assunto em questão. O presente trabalho tem como objetivo a apresentação de uma proposta de ensino de Análise Combinatória com o foco no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para Ensino Médio, utilizando um caderno didático estilizado e elaborado com o software do Canva.

Os primeiros materiais preparados em anos anteriores foram feitos apenas no word, os alunos gostaram da ideia e da abordagem. A experiência sempre foi mais positiva comparada as minhas aulas tradicionais, usando apenas a lousa, além de conseguir aprofundar mais os conceitos por questões de tempo, também reparei que diversos alunos gostavam de pintar o material didático. Em 2022 conheci a plataforma do Canva, então decidi unir as duas ideias, o material de completar lacunas com o software, o resultado foi excelente, porém inicialmente eu não conhecia muito bem a plataforma, fazendo com que os primeiros cadernos não fossem de muita qualidade estética, em 2024 ainda estou longe de ser profissional no uso, porém a evolução foi bastante nítida.

No ano de 2022 fiz as primeiras aplicações dos cadernos didáticos, o primeiro deles foi envolvendo os conceitos de conjuntos numéricos, o material ficou com alguns problemas estéticos, letras grandes, desenhos em locais inadequados, baixa visibilidade, mesmo assim os alunos relataram que estavam gostando do método. Em 2023 já tinha mais experiência no uso da plataforma do Canva, resultando em cadernos com uma estética muito mais aprimorada, um deles é o caderno de Análise Combinatória que será apresentado nesse trabalho.

Alguns materiais preparados para a escola não foram elaborados na plataforma, apenas no word, infelizmente o tempo para a preparação do material é longo, muitas vezes se tornando inviável. Em 2023 foram preparados materiais para aulas de reforço e preparação para o Enem na escola, esses materiais foram feitos com o uso somente do software Word, não serão descartados, em breve poderão ser replicados no Canva.

Pelo fato de ser conselheiro da turma 212 da escola, professor escolhido pela turma para certas responsabilidades, além de ser uma turma bem participativa nas aulas, decidi escolher tal turma para aplicar o trabalho da dissertação, outras turmas também poderiam ser escolhidas, os alunos costumam ser bem participativos durante as aulas de Matemática.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo serão abordados os principais conceitos desse objeto de conhecimento, algumas relações importantes como o próprio Princípio Fundamental da Contagem, a qual pode servir como base de toda a Análise Combinatória e foi utilizado como foco da proposta do presente trabalho, outros conceitos e relações também serão explicitadas. Os conceitos desde capítulo são fundamentados no livro Poliedro como referencial teórico para o presente trabalho.

2.1 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

O Princípio da Indução Matemática é um recurso para assegurar que dado um conjunto A, tal que A$\subset \mathbb{N}$ inclui, na verdade, todo o conjunto dos números Naturais. Este princípio é fundamental para construir definições e demonstrar teoremas relativos a números naturais.

O axioma da indução pode ser escrito usando linguagem de propriedades:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que

i)$P(1)$ é válida.

ii) Para todo n $\in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$, então $P(n)$ é válida para todo n $\in \mathbb{N}$. Exemplo 1 de aplicação de indução:

Mostre que dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

i)Mostrar validade de $P(1)$

$$1=\frac{(1+1)1}{2}=1$$

ii)Suponha $1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$ válida para um certo n e deve-se mostrar ii

Para o sucessor de n obtém-se $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)n}{2}+(\mathrm{n}+1)=\frac{((n+1)+1)(n+1)}{2}$ o que mostra a validade da expressão para todo o conjunto dos Naturais.

Exemplo 2 de aplicação de indução:

Mostre que dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$

i)Mostrar validade de $P(1)$

$$1^2=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{3}=1$$

ii)Suponha $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$

válida para um certo n e deve-se mostrar a veracidade para o sucessor de n.

De fato $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$ $\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ o que mostra a validade para o sucessor de n, portanto válido para o conjunto dos números Naturais.

2.2 O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

O estudo da análise combinatória tem por finalidade realizar a contagem do número de elementos de um conjunto que possui propriedades específicas, em alguns casos o conjunto em questão apresenta poucos elementos, podendo assim ser feita uma listagem facilmente, em outras situações a quantidade de elementos é muito grande, tornando inviável a estratégia anterior, então a necessidade de métodos especiais para realizar tal contagem.

Exemplo:

Determine a quantidade de números de dois algarismos que podemos formar com os números 1,3,5 sem repetição.

$$A = \{13, 15, 31, 35, 51{,}53\}$$

O conjunto A apresenta 6 elementos.

Princípio fundamental da contagem (PFC): há x modos de tomar uma decisão D1, há y modos de tomar uma decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é xy.

Exemplo:

1)Um motorista deseja sair da cidade A para a cidade C passando pelo município B. Sabendo que de A até B ele pode escolher entre 3 estradas, de B até C ele pode escolher dentre 4 estradas. De quantas maneira o motorista pode completar a sua viagem?

Resolução: Usando o conceito do princípio fundamental da contagem é possível obter $3.4 = 12$ maneiras de completar a viagem.

2)Miguel deseja ir à um evento festivo, para isso tem a sua disposição 2 pares de sapatos, 3 camisas e 3 calças sociais. De quantas maneiras ele pode se vestir para ir ao evento?

Resolução: Usando o conceito do princípio fundamental da contagem é possível obter $2.3.3 = 18$ maneiras diferentes de comparecer ao evento.

Fatorial: Seja n ∈ ℕ; o fatorial de n é denotado por n! e é definido por $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ e $(n+1)! = (n+1).n!$.

Exemplos:

a)5! = 5.4.3.2.1=120 b)3! = 3.2.1=6

Por definição: 1!=1 e 0!=1.

Permutação Simples: Quantidade de agrupamento formados por um conjunto de n elementos distintos e discerníveis por natureza e que se diferem por suas posições.

Exemplo: O número de maneiras diferente que podemos acomodar 5 pessoas em fila indiana:

Resposta: Uma forma de resolver o problema seria utilizar o PFC tratando cada acomodação individual de uma pessoa específica como uma etapa do Princípio Fundamental da Contagem 5.4.3.2.1=5!=120.

De forma geral, é possível fazer a contagem da quantidade de permutações simples de um conjunto com n elementos discerníveis e distintos por $P_n = n.(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$

Exemplo 2: O número de maneiras que podemos acomodar 5 amigos em 5 cadeiras consecutivas de modo que dois deles precisam sentar um ao lado do outro:

Resposta: Considere as pessoas A,B,C,D e E, suponha A e B como os amigos que sentam em cadeiras consecutivas, uma estratégia para resolver o problema em questão é considerar os dois como uma pessoa só, após isso devemos levar em conta também as permutações internas (entre A e B), assim 4!.2!= 48.

Permutação com repetição**:** Permutação de um conjunto com n elementos, nos quais o elemento a repete n_1 vezes, o elemento b repete n_2 vezes e assim sucessivamente.

Exemplo: O número de permutações da palavra CASA.

Resolução: Primeiramente é possível fazer uma permutação simples da palavra CASA, utilizando 4! que é igual a 24, porém a palavra em questão apresenta uma repetição da letra A, segue que é possível desconsiderar tal repetição efetuando a divisão de 24 (quantidade de permutações possíveis) por 2!, permutação da repetição da letra A, desconsiderando assim os anagramas repetidos. Efetuando os cálculos.

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

Generalização da permutação com repetição de n elementos, nos quais apresentam $n_1, n_2,\ldots n_k$ repetições de sucessivos elementos:

O problema apresenta n elementos, a quantidade de permutações simples seria da forma n!, como apresentam n_1, n_2,... n_k repetições de elementos, um método para desconsiderar as trocas de posições de n_1, n_2,... n_k entre eles é dividir a permutação simples dos n elementos por $n_1!\, n_2!\ldots n_k!$.

$$P_n^{n_1,n_2,n_3\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\dots n_k!}$$

Exemplo 1) De quantas maneiras podemos permutar as letras da palavra ARARA?

Resposta: $\frac{5!}{3!.2!} = 10$

Exemplo 2) O número de soluções inteiras não-negativas da equação $x + y + z = 4$, é igual a:

Resposta: Uma estratégia possível seria escrever o número 4 como quatro pontos .... e dividir os pontos em 3 regiões, cada região corresponde a uma incógnita, como exemplo ./../. (1+2+1), agora para verificar quantas são as possíveis maneiras diferentes basta permutar os pontos e traços utilizando o conceito de permutação com repetição.

$$A = \frac{6!}{4!.2!} = 15$$

Arranjo simples: Seja $A = \{a_1, a_{2,}a_3 \dots a_n\}$ um conjunto com n elementos, é chamado de arranjo de n elementos tomados p a p a qualquer sequência de p elementos diferenciados por sua ordem.

Exemplos:

1)Dentre 10 pessoas, 3 serão escolhidas para os cargos de diretor, vice-diretor e conselheiro. De quantas maneiras poderá ser feita essa escolha?

Resposta: Usando o princípio fundamental da contagem podemos resolver o problema

$10.9.8 = 720$.

Generalização da relação de arranjo de n elementos tomados p a p:

Usando o princípio fundamental da contagem, arranjo simples de n elementos tomados p a p seria da forma $A_{n,p} = n.(n-1)(n-2)\dots(n-(p+1))$, vale ressaltar que o problema apresenta p etapas no princípio fundamental da contagem e também pode ser escrito na forma

$$A_{n,p} = n.(n-1)(n-2)\dots\big(n-(p+1)\big) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação simples: Vale a observação que a permutação simples também pode ser tratada como um caso particular de um Arranjo simples de n elementos tomados n a n:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

1)O número de maneiras distintas que podemos organizar 6 livros diferentes em uma estante:

Resposta: $P_6 = 6! = 720$.

Combinação simples: Seja A um conjunto de n elementos, isto é, $A = \{a_1; a_{2;} a_{3;} \ldots a_n\}$ chamamos de combinação de n elementos tomados p a p, aos subconjuntos de A constituídos de p elemento. Observe a ideia abaixo:

Combinações dos 4 elementos tomados dois a dois no conjunto $A = \{a; b; c; d\}$

$\{a; b\}\{a; c\}\{a; d\}\{b; c\}\{b; d\}\{c; d\}$ o que nos indica 6 elementos.

Observe que a ideia acima apresenta pouco elementos, o que torna viável a listagem das possíveis combinações. Uma estratégia para determinar a quantidade de combinações é usar o princípio fundamental da contagem, o conjunto a apresenta 4 elementos, devemos verificar quantas combinações com dois deles é possível formar, para isso devemos dividir o problema em duas etapas, a escolha do primeiro elemento e a etapa seguinte a do segundo, como a ordem dos elementos não importa nessa situação, devemos dividir o produto por 2!:

$$C_{4,2} = \frac{4.3}{2!} = 6$$

Uma maneira geral que indica o número de combinações simples de n elementos p a p $(n \geq p)$, pode ser calculada por pela divisão do arranjo de n elementos tomados p a p por p! para que seja desconsiderada a ordem dos elementos $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$, ou então:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Exemplo: Dentre 10 pessoas, 3 serão escolhidas para formar uma comissão. De quantas maneiras poderá ser feita essa escolha?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!.3!} = 120$$

2)De quantos modos podemos fazer um sanduiche escolhendo um pão, 2 tipos de molho e 3 tipos de salada, sabendo que tínhamos disponíveis 4 tipos de pães, 5 tipos de molho e 6 tipos de salada?

Resposta: Uma estratégia seria dividir o problema em três etapas independentes, a escolha do pão, molho e salada. Resolvendo cada etapa como combinação e por fim utilizar o princípio fundamental da contagem.

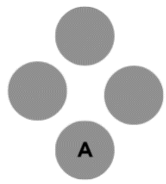
$$4.C_{5,2}.C_{6,3} = 4.10.20 = 800$$

Permutação circular: Estuda a quantidade de permutações de n elementos discerníveis que estão em forma circular, as configurações se diferenciam somente por suas posições internas.

Exemplo: O número de maneira distintas que as crianças A,B,C e D podem brincar de ciranda:

Resposta: Como o problema trata-se de uma permutação circular, a posições somente são relevantes no seu interior, então é possível tomar a criança A numa posição aleatória e trata-la como referencial para as demais crianças:

Figura 1– Exemplo de permutação circular



Fonte: Do autor

Usando o princípio fundamental da contagem para acomodar as três crianças restantes, obtém-se como solução 3!=6.

Generalização: Para uma permutação circular com n elementos, fixando um elemento como referencial e usando o Princípio fundamental da contagem para verificar de quantas formas é possível acomodar os n-1 elementos restantes:

$$P_{C\,n} = (n-1)!$$

Exemplo: Qual é o número de maneiras diferentes que é possível acomodar seis pessoas em uma mesa circular levando em conta somente suas posições internas?

Resposta:

$$P_{C\,6} = (6-1)! = 5! = 120$$

Combinação com repetição: Quantidade de agrupamentos que é possível formar escolhendo k entre n, sendo que um mesmo elemento pode se repetir. É concebível tratar o conceito como uma extensão de Permutação com Repetição, observe o exemplo:

1)Um colégio na cidade de Santa Maria-RS apresenta três turmas de ensino médio enumeradas por 111, 211 e 311. Sabe-se que será realizada uma gincana com 10 alunos escolhidos de forma aleatória. O número de maneiras diferentes que o evento pode ocorrer levando em conta apenas a quantidades de alunos escolhidos de cada turma?

Resposta: O exercício pode ser resolvido utilizando a estratégia de escrever os alunos como pontos e dividi-los em três regiões referentes as turmas 111, 211 e 213, tal método já foi apresentado em Permutação com repetição.

.../.../.... $P_{12}^{10,2} = C_{12,2} = \frac{12!}{10!.2!} = 66.$

2.3 BINÔMIO DE NEWTON

Seja um número natural n, é conhecido o desenvolvimento de $(a+b)^n$ para valores considerados pequenos como 1, 2 e 3. O subcapítulo apresentará ferramentas que facilitam o desenvolvimento para valores de n mais elevados (até mesmo os pequenos) evitando cálculos massivos focando na sua utilidade na análise combinatória.

Observe o exemplo abaixo:

Determine o coeficiente do desenvolvimento de $(a+b)^{10}$ que apresenta a^4:

Resposta: Observe que seria trabalhoso desenvolver $(a+b)^{10}$, para obter o coeficiente usaremos ferramentas da análise combinatória.

$$(a+b)^{10} = (a+b).(a+b).(a+b) \dots (a+b)$$

Imaginando a multiplicação, o termo que apresenta a^4 será o somatório *a.a.a.a.b.b.b.b.b.b* + *a.b.a.a.a.b.b.b.b.b*+ .... +*b.b.b.b.b.b.a.a.a.a* repare que apresenta todas as permutações possíveis das letras a e b contendo exatamente quatro termos iguais a a e seis termos iguais a *b*, o somatório de todas as *permutações com repetições* possíveis dará o coeficiente binomial com a^4:

$$P_{10}^{6,(10-6)} = C_{10,4} = 210$$

O termo que apresenta a^4 é $210a^4b^6$.

A generalização do problema para determinar o coeficiente de a^k do desenvolvimento de $(a+b)^n$ para $k \in N$ e $k \leq n$ é dada por:

$$(a+b)^n = (a+b).(a+b).(a+b) \dots (a+b) =$$

a.a...a.b.b....b + *a.b.a...a.b.b.b.b.b*+ .... +*b.a.b...b.a.a.a.a* com todos os termos apresentando o produto de a k vezes (a^k) e (n-k) vezes o produto de b (b^{n-k}), pois $k + (n-k) = n$, portanto o coeficiente mencionado pode ser calculado por $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Dado dois números inteiros não negativos n e p, n $\geq p$, é chamado de número binomial n sobre p ao número.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Assim é possível obter a expansão de $(a+b)^n$ por:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\,a^{n-k}.\,b^{k}.$$

Triângulo de pascal: O triângulo de Tartaglia ou Pascal surge quando os coeficientes binomiais são dispostos numa tabela. A configuração da tabela abaixo possui relações interessantes que serão estudadas.

Linha 0 $\binom{0}{0}$

Linha 1 $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

Linha 2 $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

Linha 3 $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

Linha 4 $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

Linha 5 $\binom{5}{0}\binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

... ...

Linha k $\binom{k}{0}\binom{k}{1}\ \binom{k}{2}\ \binom{k}{3}\ \binom{k}{4}\ \binom{k}{5}\ldots\binom{k}{k-1}\binom{k}{k}$

... ...

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

... ...

<u>Relação de Stifel:</u> A soma de dois números binomiais de uma linha e consecutivos é igual ao número que está abaixo do da direita.

$$\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}=$$

$$\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!}+\frac{n!}{(n-p)!p!}=\frac{p.n!}{p!(n-p+1)!}+\frac{(n-p+1)n!}{p!(n-p+1)!}=\frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}=\binom{n+1}{p}$$

Observe que o triângulo de Pascal é útil no desenvolvimento do binômio de Newton.

Uma consequência da relação de Stifel*:* A soma das linhas do triângulo de Pascal é dada por:

$1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2^0$

$1 \ + 1 \qquad\qquad\qquad\qquad =2^1$

$1 + \ 2 + \ 1 \qquad\qquad\qquad =2^2$

$1 \ + 3 + \ 3 \ + 1 \qquad\qquad =2^3$

$1 \ + 4 + \ 6 + \ 4 + \ 1 \qquad = \ 2^4$

$1 + \ 5 + \ 10 + 10 + 5 + 1= 2^5$

...

Mostrar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ \binom{n}{3} + \cdots + \ \binom{n}{n} = 2^n$ com $n \in N$.

Será usada a indução para mostrar a relação acima:

i)$P(0)$ é válida, pois $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$

ii) Para todo n ∈ N, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Supor a expressão $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ \binom{n}{3} + \cdots + \ \binom{n}{n} = 2^n$ válida para um certo n, basta mostrar a veracidade para n+1

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ \binom{n+1}{3} + \cdots + \ \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \ 2\binom{n}{3} + \cdots + \ \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ 2\binom{n}{3} + \cdots + \ 2\binom{n}{n} = 2.2^n = 2^{n+1}$$

Então $P(n)$ é válida para todo n ∈ ℕ.

Exemplo 1: Determine a cardinalidade do conjunto das partes de $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

Resposta: $n\big(P(A)\big) = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6} = 2^6$

Exemplo 2: Sendo A um conjunto com n elementos. Determinar a expressão que fornece a cardinalidade do conjunto das partes de A ($n(P(A))$.

Resposta: $n\big(P(A)\big) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Exemplo 2: Uma sala com 5 entradas apresenta n formas de estar aberta. Determine o valor de n.

Resposta: $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \ \binom{5}{5} - \binom{5}{0} = 2^5 - 1 = 63.$

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão abordados os aspectos metodológicos do trabalho, as características fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa como o local, o método utilizado, a escola, a criação do material e outros fatores. Vale destacar primeiramente o método de pesquisa.

3.1 MÉTODOS DE PESQUISA

Existem vários tipos de métodos para pesquisas, cada uma apresenta suas peculiaridades, apresentando suas vantagens, desvantagens e sendo adequado aos diferentes tipos de estudos. Elas norteiam as técnicas, coletas de dados e abordagens de uma pesquisa para um estudo formal e confiável. Neste trabalho será enunciado brevemente a pesquisa qualitativa.

3.2 A PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada por um método de coleta e análise de dados que tem por finalidade compreender os significados, experiências e interpretações de uma amostra de indivíduos, por meio de observações, entrevistas, coleta de dados e outros procedimentos, seus estudos geralmente apresentam interpretações mais subjetivas.

Para Bogdan (2008), os dados precisam ser recolhidos de uma forma que seja possível uma análise aprofundada dos sujeitos em seus contextos naturais e uma boa pesquisa qualitativa deve ser documentada com boas descrições descendentes dos dados para mostrar as asserções feitas. Por conta de uma natureza mais subjetiva não existe uma norma específica para caracterizar uma pesquisa qualitativa e também apresentam várias formas para organizar e mostrar os dados de uma pesquisa.

O presente trabalho pode ser caracterizado como uma pesquisa qualitativa, pois ele coleta os dados através de resoluções de questões dos alunos e faz interpretações objetivas sobre a aprendizagem.

3.3 MÉTODO DO TRABALHO

O presente trabalho pode ser classificado como uma pesquisa qualitativa e apresenta como objetivo apresentar uma proposta de ensino de Análise Combinatória para o ensino médio com o foco no Princípio Fundamental da Contagem e utilizando um material didático potencialmente apropriado.

Os participantes são 25 alunos matriculados na 2ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Coronel Pilar em Santa Maria-RS. O autor da pesquisa é o professor da turma na disciplina de Matemática.

Para o desenvolvimento da pesquisa foi elaborado um caderno didático contendo os conceitos de Análise Combinatória e exercícios a serem resolvidos em aula conforme indicado no Quadro 1.

Quadro 1 – Caderno didático: conteúdos e números de exercícios

Conteúdos	**Número de exercícios**
Princípio fundamental da contagem Permutação simples Permutação com repetição Arranjo Simples Combinação simples Princípio Aditivo Combinação com repetição Permutação circular Permutação Caótica Exercícios de fixação	15 2 4 2 4 2 4 3 2 29 29

Fonte: Da pesquisa

O caderno didático está apresentado de forma completa no APÊNDICE– CARDENO DIDÁTICO e também indica um conceito estratégico para a apresentação da matéria lecionada otimizando o tempo em sala de aula, pois os alunos apenas completam o material ao invés de copiar da lousa todo o conceito teórico, sobrando mais tempo para exercitar e debater sobre o assunto, além disso, o caderno didático apresenta uma estética diferenciada que pode ser mais atrativa a diversos estudantes.

Os dados referentes aos resultados obtidos foram coletados por meio da resolução de exercícios feitos pelos alunos durante as aulas e avaliações realizadas ao final do desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória.

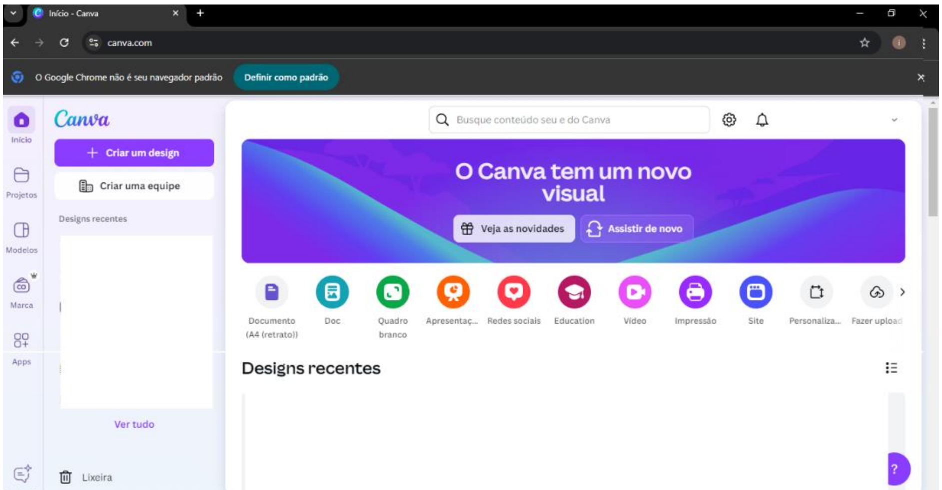
Para a verificação dos dados serão selecionadas nove atividades feitas por alunos, analisando a forma de fazer os exercícios, erros e suas possíveis justificativas.

3.4 A PLATAFORMA DO CANVA

O Canva é uma plataforma de design gráfico, ela permite que o cliente crie uma infinidade de materiais visuais como cartões, pôsteres, convites, abertura para vídeos e muito mais. Oferece muitos modelos de design prontos e personalizáveis de simples manipulação, atualmente é uma plataforma bastante popular. Podendo também ser utilizada na área da educação, principalmente para a elaboração de resumos para estudantes.

A plataforma tem sido muito usada por pequenos empreendedores, eles criam de forma facilitada suas artes para divulgação de serviços ou produtos. Na sequência a imagem apresenta a página inicial da plataforma.

Figura 2–: Site da plataforma do Canva



No site https://www.canva.com/ o leitor pode obter mais informações.

3.5 A ELABORAÇÃO DO MATERIAL

Para uma melhor organização, a produção do material didático precisou ser dividida em quatro etapas:

Etapa 1: O Professor autor decidiu a proposta pedagógica do material de Análise Combinatória usando como foco o Princípio Fundamental da Contagem como base de estudo, além de deixar algumas lacunas no material para serem preenchidas pelos alunos durante as aulas.

Etapa 2: A elaboração do material no Software Word, junto com a escolha de algumas referências de livros que são aprovados pelo MEC e a escolha de exercícios que são potencialmente efetivos para a explicação de cada tópico estudado da Análise Combinatória.

Etapa 3: É feita uma seleção de questões do conteúdo de Análise Combinatória para os alunos exercitarem os conceitos fora do horário de aula e sem o auxílio do Professor.

Etapa 4: O material produzido nas etapas 1 e 2 foram inseridos no Canva e é trabalhado na estética do produto educacional.

3.6 DINÂMICA DA PROPOSTA

Primeiramente o professor avisa com antecedência quando o material didático será utilizado e disponibilizado no xerox da escola para a coleta individual do mesmo pelos estudantes. As aulas são ministradas utilizando o caderno didático, cada lacuna contida nele é completada pelos alunos com os conceitos apresentados durante as diversas aulas.

3.7 COLETA DE DADOS

A coleta de dados é registrada com o envio de exercícios feitos pelos estudantes imediatamente após a apresentação de tópicos específicos da Análise Combinatória, ou seja, assim que o professor exibe um conceito, os alunos fazem um determinado exercício e posteriormente o educador avalia a estratégia utilizada pelo aluno, investigando possíveis erros e acertos. A investigação segue sendo feita nas avaliações trimestrais que ocorrem em sala de aula.

3.8 DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE APLICAÇÃO

As aulas são norteadas com base na sequência didática feita pelo professor sendo entregue ao aluno o caderno didático com suas lacunas, futuramente completadas pelo estudante. Primeiramente um conceito amplo de análise combinatória é revelado, mostrando diversas situações que o conceito é útil para a resolução de problemas, assim os alunos podem compreender a importância da matéria a ser lecionada no ensino médio, em seguida é exibido um problema que é possível ser resolvido utilizando uma contagem simples utilizando uma "árvore" de possibilidade com a intenção de mostrar a ideia do Princípio Fundamental da Contagem, que serve como uma base sólida para a os diversos conceitos que aparecerem na sequência, dando aporte teórico para os alunos resolverem diversos problemas do conteúdo apenas com o Princípio Fundamental da contagem.

As relações, como combinação simples, arranjo simples, permutação com repetição entre outras são deduzidas utilizando o Princípio Fundamental da Contagem e expostas pelos motivos de oferecerem uma segunda alternativa e também por serem cobradas em vários vestibulares de universidade ou provas militares que vários alunos almejam fazer.

3.9 APÓS A APLICAÇÃO

Vale ressaltar que o material didático deve estar em constante evolução, então o professor precisa fazer anotações durante as aulas com algumas alterações que podem aprimorar o mesmo. Sendo assim o educador deve preparar uma nova versão aperfeiçoada para o ano seguinte. O diálogo com os alunos é fundamental para esse processo ser feito de forma efetiva.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo serão apresentadas algumas resoluções de questões propostas pelo professor autor durante as aulas ou avaliações feitas pelos estudantes, tais exercícios foram retirados do material didático ou de provas que eles fizeram durante o ano letivo. Para a coleta desses dados, primeiramente o professor explicava cada conceito e posteriormente solicitava a entrega da resolução de forma detalhada, ou seja, pedindo para que o estudante escrevesse o que pensou durante o processo de resolução. Na coleta das questões que faziam parte da avaliação o professor não dava nenhuma instrução para os alunos resolverem, o estudante precisava ler a questão, descobrir sobre qual conceito da análise combinatória se tratava e por fim resolver com bases nos seus conhecimentos do momento.

Vale destacar que a intenção do capítulo também é mostrar a realidade sobre a aprendizagem dos estudantes, ou seja, não foi tomado apenas resoluções corretas ou que apresentavam uma boa organização, também foram tomadas resoluções incorretas ou de difícil compreensão pelo avaliador, sendo também um convite a reflexão sobre os motivos dos erros dos estudantes.

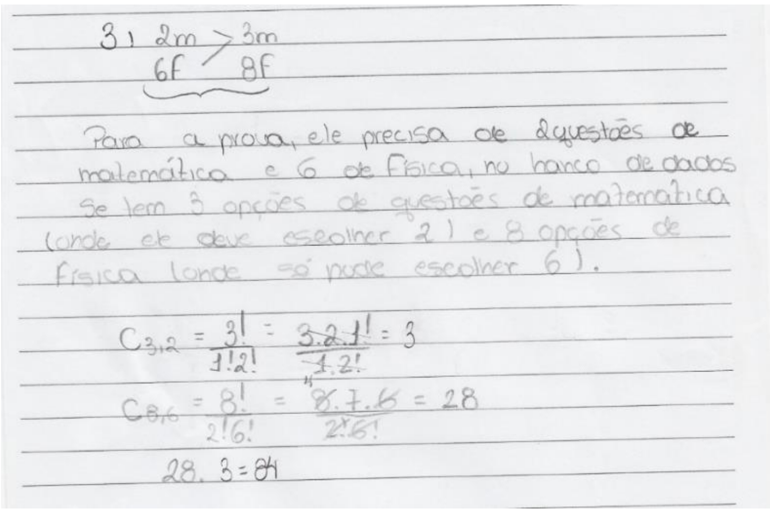
Algumas questões e resoluções foram escolhidas pelo autor para estarem presentes e analisadas neste trabalho, com a finalidade de preservar a identidade dos adolescentes cada estudante foi enunciado como um pseudônimo.

Para facilitar a leitura da presente dissertação, será apresentada a questão proposta pelo professor, em seguida a imagem com a resolução feita pelo estudante e finalmente a interpretação do professor autor baseada na imagem ou diálogo com o aluno.

Questão 1: (FUVEST 2023) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é:

a)42 b) 54 c) 62 d) 72 e) 84

Figura 3–: Resolução do aluno A1 para a questão do material didático



3) 2m > 3m
6F 8F

Para a prova, ele precisa de 2 questões de matemática e 6 de Física, no banco de dados se tem 3 opções de questões de matemática (onde ele deve escolher 2) e 8 opções de Física (onde só pode escolher 6).

$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3.2.\cancel{1!}}{1.2!} = 3$

$C_{8,6} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7.\cancel{6}}{2!\cancel{6}!} = 28$

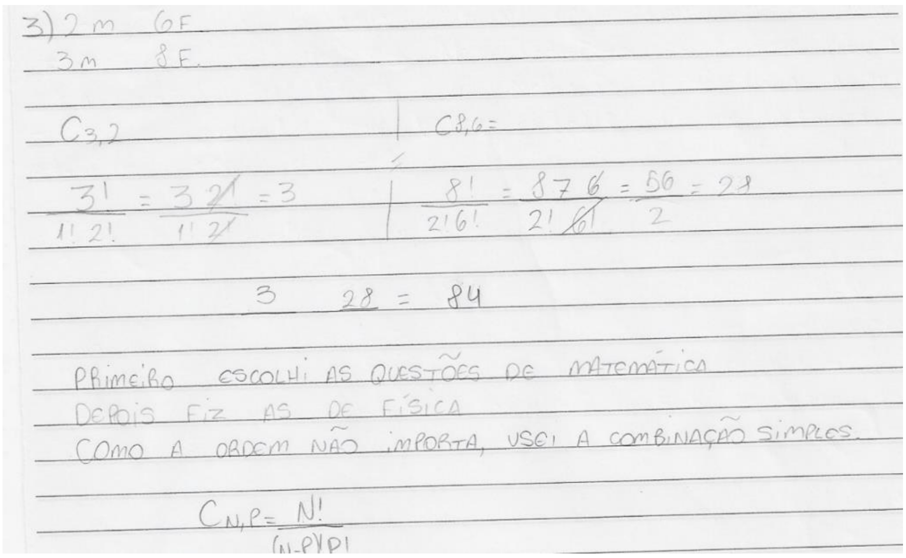
$28.3 = 84$

Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta: A1 dividiu o problema em duas etapas, uma para a escolha das questões de Matemática e outra para as questões de Física, percebeu que cada etapa ocorre de forma independente e que o problema se tratava de uma combinação simples, pois a ordem das questões não influenciava. O estudante recorreu à fórmula para a resolver o problema e usou o PFC.

Na sequência, a figura 3 apresenta a mesma questão feita por outro aluno de forma similar:

Figura 4–: Resolução do aluno A2 para a mesma questão anterior



3) 2m 6F
3m 8F

$C_{3,2}$ | $C_{8,6} =$

$\frac{3!}{1!2!} = \frac{3\ \cancel{2!}}{1!\ \cancel{2!}} = 3$ | $\frac{8!}{2!6!} = \frac{8\ 7\ \cancel{6}}{2!\ \cancel{6!}} = \frac{56}{2} = 28$

$3 \quad 28 = 84$

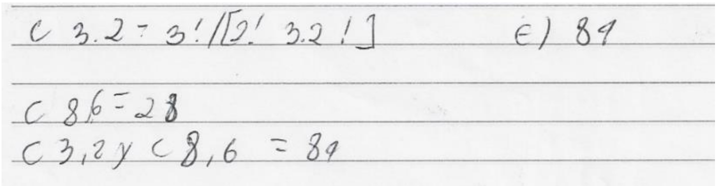
PRIMEIRO ESCOLHI AS QUESTÕES DE MATEMÁTICA
DEPOIS FIZ AS DE FÍSICA
COMO A ORDEM NÃO IMPORTA, USEI A COMBINAÇÃO SIMPLES.

$C_{N,P} = \frac{N!}{(N-P)!P!}$

Fonte: Da pesquisa

A figura a seguir apresenta a resolução da mesma questão proposta feita pelo aluno A3:

Figura 5– Resolução do aluno A3 para a mesma questão anterior



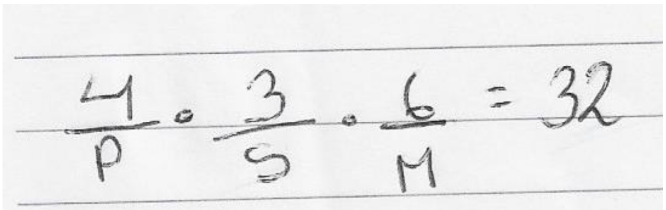
Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta: A resolução em questão é de difícil análise ao primeiro ponto, o que é comum em avaliações de diversos alunos. Olhando com mais cautela é possível perceber que o aluno tratou cada etapa de forma independente e fez o uso de fórmulas, mesmo sem apresentar os cálculos como solicitado e finalmente usou o PFC.

Questão 2: Na festa junina do Colégio Estadual Coronel Pilar, a barraca de cachorro quente, o freguês tem a possibilidade de escolher um entre quatro tipos de pães, uma entre três tipos de salsichas e um entre seis tipos de molhos. Identifique a quantidade de cachorros quentes diferentes que podem ser feitos.

A imagem que será apresentada na sequência se trata da resolução da questão 2 feita por A4.

Figura 6 – Resolução do aluno A4 para a questão do material didático



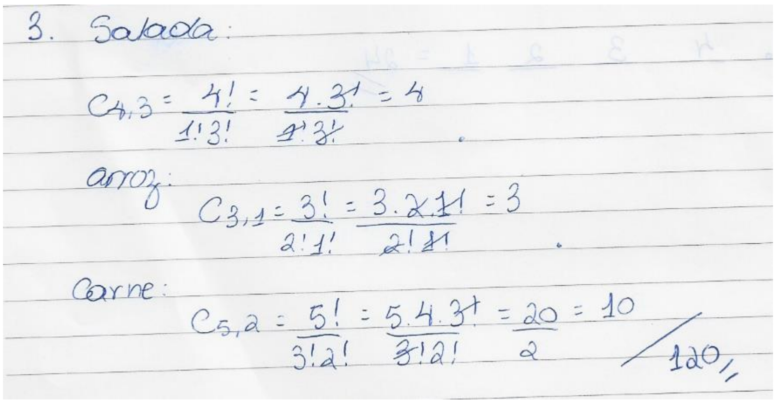
Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta: O aluno teve a ideia de dividir o problema em três etapas diferentes, a escolha do pão, salsicha e molho, analisou a quantidade de possibilidades em cada uma, além disso ele identificou que se tratavam de etapas independentes e por fim se equivocou somente na multiplicação no uso do PFC. O que também leva ao leitor Professor um convite a reflexão sobre outro tema, como correções de provas, sobre o quanto de conhecimento o aluno tinha no momento, porém se equivocou na multiplicação.

Questão 3 de avaliação: No restaurante “comida boa” o cliente pode optar pela curiosa modalidade “faça seu prato”, tal serviço faz com que a pessoa escolha dois tipos de carne, um tipo de arroz e três tipos de salada. Sabendo que o restaurante tem a disposição 5 tipos de carne, 3 tipos de arroz e 4 tipos de salada. O número de maneiras que um cliente pode montar o seu prato é:

Na sequência será apresenta da resolução da questão 3 feita pelo aluno A5.

Figura 7– Resolução do aluno A5 para a questão da avaliação.

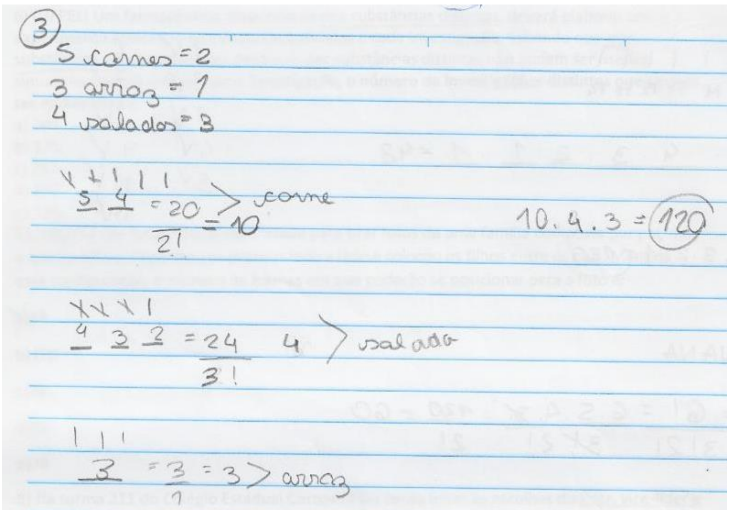


Fonte: Da pesquisa

O estudante A5 teve a ideia de dividir o problema em três etapas independentes, escolha da salada, arroz e carne, percebeu que se tratava de um problema que utilizava o conceito de combinação e por fim fez o uso do PFC. Curiosamente o aluno usou a fórmula de combinação para calcular a etapa do arroz e da salada, o que não está incorreta, mas não era necessário.

Outra resolução da mesma questão anterior, feita pelo aluno A6 na figura 7.

Figura 8– Resolução do aluno A6 para a questão da avaliação.

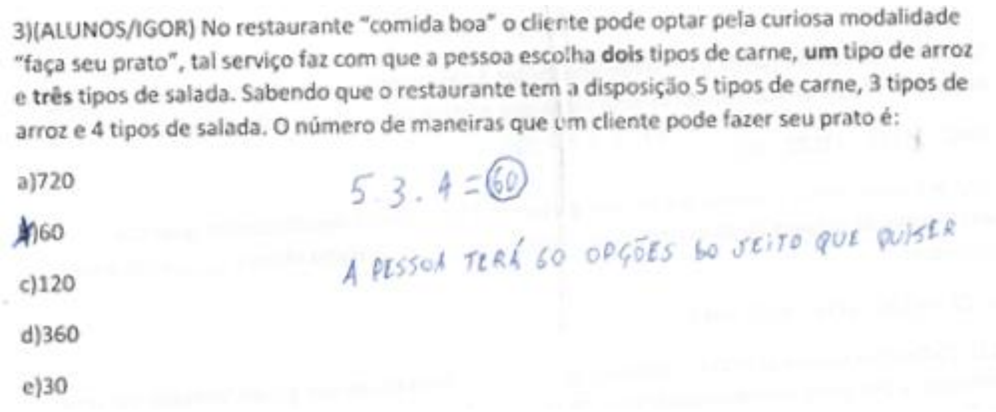


Fonte: Da pesquisa

O estudante usou uma estratégia muito similar ao anterior, porém não usou fórmula de combinação simples para descobrir a quantidade de possibilidades em cada etapa, usou somente o PFC.

Na sequência será explicitada por meio da figura 8 a resolução da mesma questão feita em avaliação pelo aluno A10.

Figura 9– Resolução do aluno A10 para a questão da avaliação.


3)(ALUNOS/IGOR) No restaurante "comida boa" o cliente pode optar pela curiosa modalidade "faça seu prato", tal serviço faz com que a pessoa escolha **dois** tipos de carne, **um** tipo de arroz e **três** tipos de salada. Sabendo que o restaurante tem a disposição 5 tipos de carne, 3 tipos de arroz e 4 tipos de salada. O número de maneiras que um cliente pode fazer seu prato é:

a)720

b)60

c)120

d)360

e)30

$5 . 3 . 4 = 60$

A PESSOA TERÁ 60 OPÇÕES DO JEITO QUE QUISER

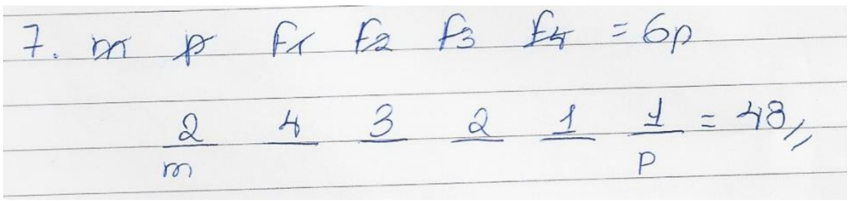
Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta: A10 dividiu o problema em três etapas, porém se equivocou no cálculo de cada uma delas, ignorou o fato de que entre 5 tipos de carne a pessoas deverá escolher 2 deles, sendo um exercício que envolve o conceito de combinação simples, mesmo de forma equivocada, o aluno usou o PFC.

Questão 4: (PUC/RS) Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mão e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais. Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é:

A figura seguinte apresenta a resolução da questão 4 feita pelo do aluno A7.

Figura 10– Resolução do aluno A7 para a questão do material didático

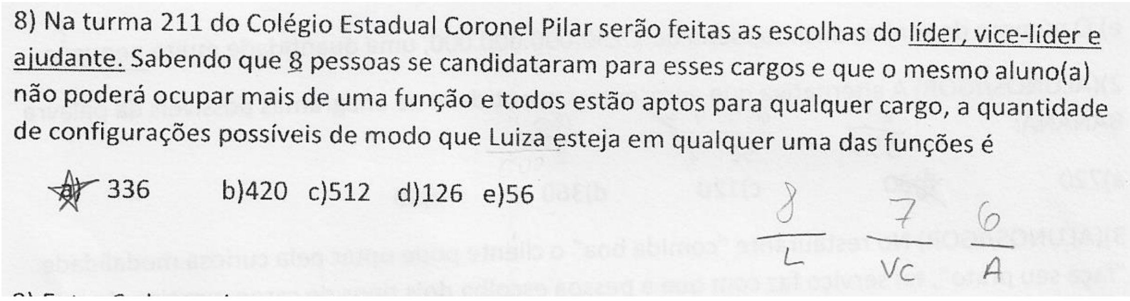


Fonte: Da pesquisa

Após questionar A7, ele disse que primeiramente dividiu o problema em 6 etapas, posteriormente preencheu as etapas que apresentavam restrições, ou seja, os extremos (posição dos pais), por fim usou o PFC.

A figura seguinte consta a questão 5 de avaliação e a resolução feita pelo aluno A8.

Figura 11– Resolução do aluno A8 para uma questão da avaliação.


8) Na turma 211 do Colégio Estadual Coronel Pilar serão feitas as escolhas do líder, vice-líder e ajudante. Sabendo que 8 pessoas se candidataram para esses cargos e que o mesmo aluno(a) não poderá ocupar mais de uma função e todos estão aptos para qualquer cargo, a quantidade de configurações possíveis de modo que Luiza esteja em qualquer uma das funções é

a) 336 b)420 c)512 d)126 e)56

8 7 6
L VC A

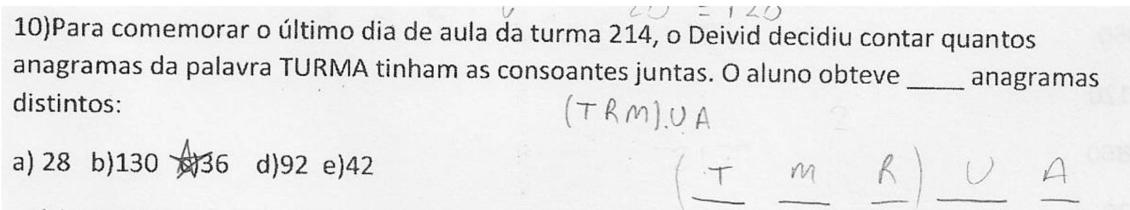
Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta: A8 dividiu o problema em três etapas independentes, analisou cada uma delas e multiplicou sem o uso da fórmula de arranjo, usando apenas o princípio fundamental da contagem, porém ignorou o fato da personagem Luiza precisar estar presente em alguma função qualquer. Para terminar a resolução seguindo a mesma linha de raciocínio ele poderia efetuar a multiplicação 8.7.6 =336 e retirar o caso em que a Luiza não está presente, podendo ser calculado por 7.6.5=210, logo 336-210=126.

Uma outra forma de resolver o problema em questão seria a divisão em três casos diferentes e posteriormente usar o princípio da adição. Primeiramente fixando a Luiza como líder e verificando as possibilidades para vice e ajudante 1.7.6= 42, em seguida deve-se fixar a aluna em questão como vice 7.1.6=42 e de forma análoga para o cargo de ajudante. Por fim executando a soma 42+42+42=126.

Na sequência será apresentada a questão 10 da avaliação, junto com a resolução do aluno A8.

Figura 12– Resolução do aluno A8 para questão da avaliação.


10)Para comemorar o último dia de aula da turma 214, o Deivid decidiu contar quantos anagramas da palavra TURMA tinham as consoantes juntas. O aluno obteve ____ anagramas distintos:

(TRM).UA

a) 28 b)130 c)36 d)92 e)42

(T M R) U A

Fonte: Da pesquisa

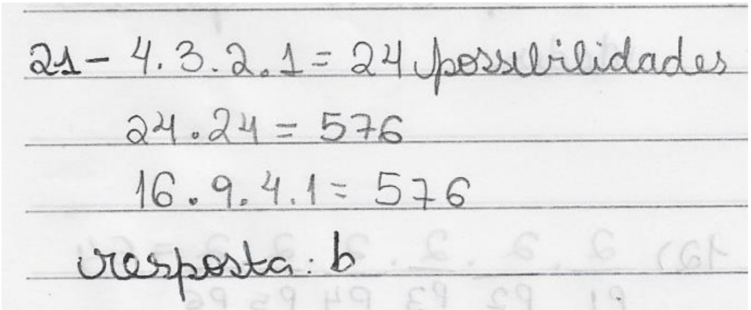
Analisando a resolução do aluno, podemos perceber que ele fixou como um bloco inseparável as consoantes, método discutido em aula para resolver problemas dessa natureza, porém não é possível tirar conclusões sobre a resolução, visto que apresenta uma ausência de mais cálculos.

Questão 5: (EsPCEx- Modificada) Um tabuleiro possui casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar 4 peças diferentes nesse tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?

a)4096 b)576 c)256 d)64 e)16

A figura seguinte apresenta a resolução da questão 5 apresentada por A9.

Figura 13–: Resolução do aluno A9 para a questão do material didático.



Fonte: Da pesquisa

A9 sem enunciar, utilizou dois métodos de resolução, no primeiro ele dividiu o problema em dois momentos, levando em conta que as peças eram iguais e fazendo o uso do PFC 4.3.2.1=24 e posteriormente verificou quantas permutações dessas peças “iguais” poderiam ser feitas para levar em conta o fato de serem distintas entre si, 4!=24, por fim usou o Princípio fundamental da contagem novamente 24.24=576.

Na segunda resolução A9 fez de forma direta já levando em conta o fato das peças serem distintas, separou o problema em 4 etapas, verificou quantas possibilidades cada peça teria para acomodar no tabuleiro usando o PFC.

Questão 6: (UPF/2014) Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

Figura 14– Parte do enunciado do exercício 6

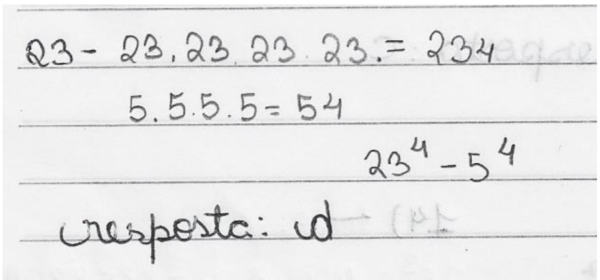
Fonte: Vestibular Universidade de Passo Fundo

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

a)23^4 b)$23^3.18$ c)$23^3.72$ d)23^4-5^4 e)18^4+5^4

A figura posterior indica a resolução do aluno A9 em relação a questão 6.

Figura 15– Resolução do aluno A9 para a questão do material didático.



Q3- $23.23.23.23.= 23^4$

$5.5.5.5= 5^4$

$23^4 - 5^4$

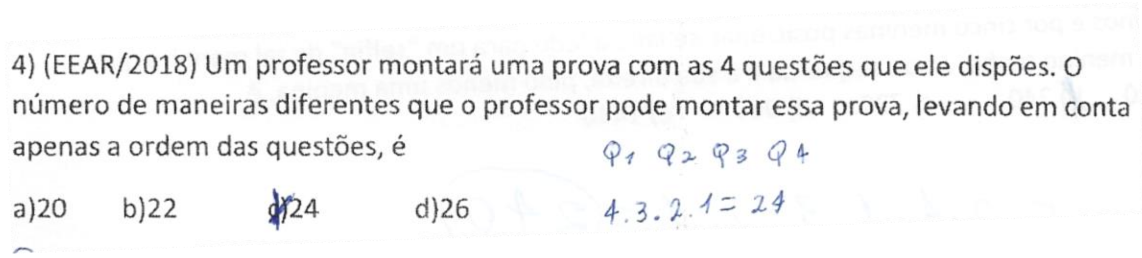
resposta: d

Fonte: Da pesquisa

A9 verificou quantas eram as possibilidades de senhas utilizando as 23 letras do alfabeto e retirou os casos que apresentavam as senhas compostas somente de vogais, usando o PFC nos dois momentos.

A figura posterior apresenta a questão 4 da avaliação e a resolução do aluno A10.

Figura 16– Resolução do aluno A10 para a questão da avaliação.



4) (EEAR/2018) Um professor montará uma prova com as 4 questões que ele dispões. O número de maneiras diferentes que o professor pode montar essa prova, levando em conta apenas a ordem das questões, é

a)20 b)22 c)24 d)26

$Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$

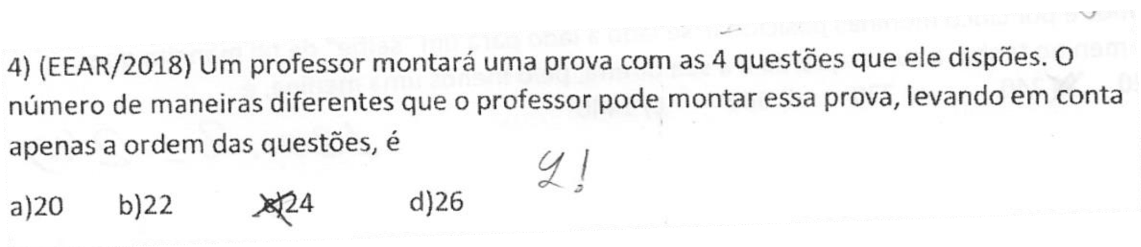
$4.3.2.1 = 24$

Fonte: Da pesquisa

Analisando a resposta de A10 é provavel que ele tenha feito a questão utilizando o PFC, sem o uso de fórmulas.

A mesma questão é exibida na figura seguinte, porém feita pelo aluno A11, usando possivelmente uma ideia distinta.

Figura 17– Resolução do aluno A11 para a questão da avaliação.



4) (EEAR/2018) Um professor montará uma prova com as 4 questões que ele dispões. O número de maneiras diferentes que o professor pode montar essa prova, levando em conta apenas a ordem das questões, é

a)20 b)22 c)24 d)26

$4!$

Fonte: Da pesquisa

Observando a resolução verificamos que A11 provavelmente usou a fórmula de permutação simples.

A figura seguinte revela a questão 8 e a resposta marcada pelo aluno A6.

Figura 18– Exercício 8

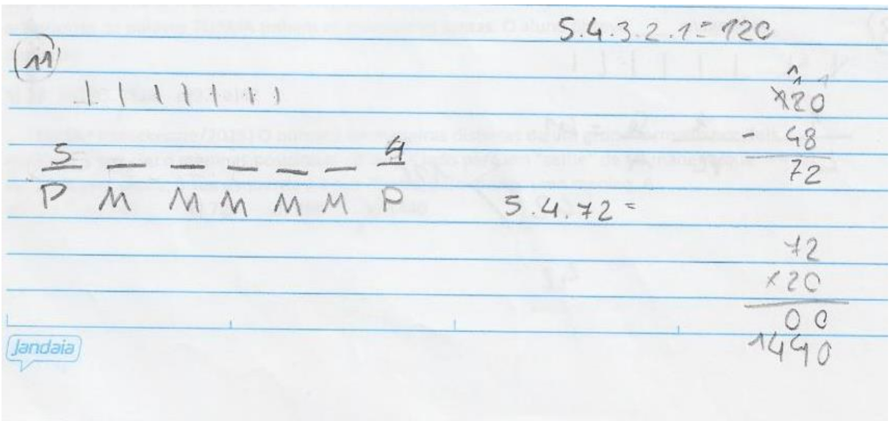
11) (EXTRA)(Mackenzie/2015) O número de maneiras distintas de um grupo formado por dois meninos e por cinco meninas posicionar-se lado a lado para um "selfie" de tal maneira que cada menino tenha, à sua esquerda e à sua direita, pelo menos uma menina, é

a) 120 b) 240 c) 720 d) 960 e) 1440

Fonte: Da pesquisa

A imagem seguinte revela a forma que o aluno A6 chegou na resposta, em seguida, fora da imagem, a interpretação que o professor autor fez em relação ao processo de resolução feito pelo aluno.

Figura 19– Resolução do aluno A6 para questão da avaliação.

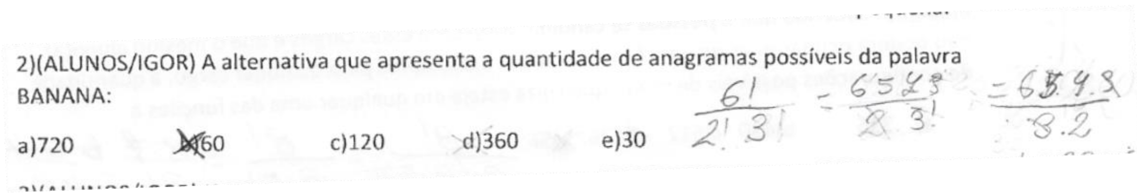


Fonte: Da pesquisa

Análise da resposta do aluno: Aparentemente o aluno começou separando o problema em 7 etapas, cada uma representa uma pessoa, reparou que era necessário que os extremos da foto fossem ocupados por meninas, sendo assim, duas restrições, após preencher essas duas etapas, o estudante focou nas pessoas que estivessem entre as meninas dos extremos, para isso ele usou a estratégia de verificar quantas seriam as possibilidades de permutações das pessoas, sem restringir a possibilidade de obter dois meninos juntos, resultando em 5! =120 então retirou as possibilidades que apresentavam dois meninos juntos, o qual poderia ser calculado por 4!.2!=48, logo entre os extremos haveria 120-48=72 possibilidades. Provavelmente o aluno trocou de estratégia no meio do exercício, o que eram 7 etapas, viraram 3, o extremo da esquerda, direita e o bloco de pessoas no centro da foto. Efetuando o PFC obtém-se 5.72.4=1440 possibilidades.

A questão 9 e a resolução dela feita por A12 está mostrada na figura seguinte.

Figura 20– Resolução do aluno A12 para a questão da avaliação.


2)(ALUNOS/IGOR) A alternativa que apresenta a quantidade de anagramas possíveis da palavra BANANA:

a)720 b)60 c)120 d)360 e)30

Fonte: Da pesquisa

Vale mencionar que A12 acertou a resposta, porém não é possível observar se foi feito ou não o uso da fórmula de Permutação com repetição.

4.1 CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES SOBRE A RESOLUÇÃO DOS ALUNOS

Destacando que a matéria de análise combinatória apresenta um conceito mais isolado comparada aos outros objetos do conhecimento, sendo assim o estudante precisa dominar como fundamentos o processo de multiplicação e adição, em seguida ele precisa entender a ideia por trás do Princípio fundamental da contagem, o que torna diferente da aprendizagem de outros conceitos como função polinomial, o qual o aluno precisa ter uma bagagem de fundamentos muito mais amplo, por consequência o pesquisador esperava uma facilidade maior na aprendizagem dos alunos, o que se mostrou realidade ao fim da aplicação.

A grande maioria da turma colaborou com as aulas e com a entrega dos exercícios, facilitando bastante o processo, também vale mencionar que por se tratar de uma escola pública existem oscilações grandes nas individualidades em relação a bagagem de conhecimento, realidade social e facilidades, tendo evidentes diferenças no processo de aprendizagem, alguns apresentavam mais facilidade em expressar o que resolviam e outros com extrema dificuldade na resolução ou em enunciar como estava de fato resolvendo a atividade, dificultando o ambiente de trabalho do professor.

Na resolução das questões é possível perceber que em alguns momentos os alunos preferem o uso de fórmulas e outros preferem o uso do PFC, em quase todos os casos das questões que envolvem o conceito de arranjo os alunos resolveram usando o Princípio Fundamental da Contagem, já nos exercícios que envolvem combinação simples a maioria fez o uso da fórmula que também foi apresentada durante as aulas, vale destacar que vários alunos não conseguiram fazer nada das questões, outros acertaram parte dos exercícios e terceiros fizeram de forma adequada, o que também nos coloca questões sobre a abordagem da didática ou organização escolar em turmas que apresentam alunos com grandes diferenças em questões sobre a facilidade na aprendizagem.

5 CONCLUSÕES

Com a disposição de trazer um método para lecionar os conceitos de Análise Combinatória utilizando como foco o Princípio Fundamental da Contagem, sem excluir a apresentação das fórmulas, além de preparar um material didático estilizado, elaborado pelo Canva e contendo lacunas para serem preenchidas pelos estudantes. Neste capítulo serão abordados os potenciais resultados da aplicação deste trabalho para uma turma de uma escola pública localizada em Santa Maria-RS, observando possíveis vantagens e desvantagens dessa abordagem diferenciada, como também possíveis melhorias a serem implementadas em novas aplicações, visto que é importante que todos os profissionais da área da educação básica precisam estar em constante evolução, acompanhar novos métodos de ensino, procurar entender as gerações de estudantes que são renovadas de tempos em tempos, acompanhar as novas tecnologias que se apresentam em disposição e tomar serventia delas como benefício na aprendizagem. Sendo fundamental o discernimento sobre ferramentas tecnológicas que auxiliam na aprendizagem e aquelas que atrasam ou distraem os estudantes.

O uso do Princípio fundamental da Contagem como pilar básico da aprendizagem é uma das propostas focais do presente trabalho e pode sustentar praticamente todo o conceito da Análise Combinatória, tal propositura se mostrou bastante eficaz para a turma em que foi aplicada a pesquisa, como as duas propostas foram exibidas em aula, tanto o uso de fórmulas como o uso do PFC, vale mencionar que alguns alunos tiveram preferência pelo uso de fórmulas, principalmente em combinação simples e permutação com repetição, já em arranjo quase todos os alunos resolviam os exercícios pelo Princípio fundamental da contagem, um percentual pequeno destes estudantes não obtiveram uma aprendizagem minimamente satisfatória com nenhum método, alguns deles provavelmente por conta da baixa frequência em sala de aula, outros por motivos que devem ser analisados mais profundamente, algo que não é possível com a quantidade de tempo disponível para as atividades de classe.

A proposta pedagógica se mostrou bastante eficaz e facilmente pode ser recomendada pelo autor, uma vez que praticamente todas as fórmulas são oriundas do PFC. A simples didática com base apenas na aplicação de fórmulas de forma mecânica não pode ser recomendada, pois o aluno não estaria aprendendo efetivamente o objeto do conhecimento, apenas executando as relações.

A elaboração do material não faz parte da aplicação e também é uma etapa fundamental do trabalho em questão, o que se mostrou muito trabalhosa e satisfatória. O uso do software word como começo de elaboração se mostrou fundamental, pois ele apresenta o uso de ferramentas para elaboração de equações matemáticas, algo que o Canva ainda é muito deficitário. Após a preparação do material no Word, o processo para replicar de forma mais estilizada foi feito no Canva, o qual é rico em ferramentas para tornar o caderno didático mais atrativo ao estudante, vale mencionar que o professor autor não apresenta nenhum curso para o uso de tal software, estando em constante aprendizagem sobre a plataforma. A elaboração do caderno didático se tornou algo positivo ao Professor também, pois ele poderá adaptar e aprimorar o material para mais aplicações futuras, pois é de fácil manipulação.

O material didático proposto se mostrou mais atrativo para os estudantes comparado as aulas tradicionais, que usam somente o uso da lousa, além de realmente apresentar uma otimização do tempo em sala de aula, dando a oportunidade para os estudantes receberem os conceitos de forma mais aprofundada para um melhor desempenho e desenvolvimento, além disso o fato do material ser conceituado na forma de completar lacunas acabou oferendo uma aula mais ativa em relação a participação dos estudantes, menos tempo copiando e mais tempo pensando em soluções para problemas propostos e discussões sobre a matéria com o professor autor. Vale ressaltar que apesar do material apresentar várias vantagens como as demonstradas anteriormente, existem algumas desvantagens que precisam ser expostas, como o custo do material, a impressão do caderno custou a escola ou ao estudante que teria condições de pagar um total de R$1,50 por caderno, alguns alunos pagaram e outros a escola ofereceu para cobrir tais investimentos, além do problema citado, existe o fato de que o rendimento da aula acaba sendo maior que uma aula convencional e alguns alunos, por motivos que não cabem neste trabalho, não conseguem comparecer em algumas aulas, perdendo muito conteúdo. De fato, os pontos positivos acabaram se sobressaindo com muita diferença.

A geração de adolescentes que está em idade escolar atualmente nasceu numa era digital, em que qualquer busca pode ser feita rapidamente através da internet, a maior parte deles carregam um celular e estão conectados durante todo o dia, possuem ferramentas para sanar dúvidas de forma extremamente rápida como o Youtube, redes sociais e inteligências artificiais, o que os diferem das pessoas de outras gerações e apresentam uma característica mais imediatista. Cabe o desafio ao professor do século 21 reconhecer e se adaptar ao novo público de estudantes, mantendo atualizado das tecnologias que surgem o tempo todo para não ficar ultrapassado, isso não implica que todo conhecimento didático seja descartado e sim utilizado e adaptado para uma nova época. O material didático proposto também é uma tentativa para se nortear à nova geração de estudantes.

Novas versões do material didático serão elaboradas e aplicadas pelo professor autor em outras turmas, sendo assim levando a novas reflexões sobre o aperfeiçoamento do mesmo, levando em conta a carga horária que os estudantes terão acesso a Matemática no ano letivo e a possíveis mudanças na BNCC, podendo acarretar em mudanças significativas no caderno. Com base na aplicação recente, algumas ideias surgem para a implementação para anos seguintes, como separar espaços para colorir, muitos alunos recebem ou imprimem o material em preto e branco e acabam pintando como um momento de relaxamento, a inclusão de algum jogo de tabuleiro envolvendo o conteúdo também seria bem-vinda, a utilização de QR codes para encaminhar os estudantes para algumas resoluções de questões em vídeos na internet, além da utilização de inteligência artificial para criação de artes, novas questões e outras ferramentas que podem ser utilizadas em benefício da elaboração do material.

REFERÊNCIAS

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta. 3.ed**. Rio de Janeiro: SBM Sociedade brasileira de Matemática, 2022. Coleção PROFMAT.

MALANGA, Umberto César Chacon. Matemática livro 3.1. ed. São José dos Campos: **Poliedro**, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CANVA. Canva: Faça designs incríveis. Disponível em: https://www.canva.com/ acesso em: 15 de fev. 2024

SAMPIERI, Roberto Hernández; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Maria del Pilar Baptista. **Metodologia da Pesquisa. 5 ed**. Porto Alegre:Penso, 2013

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teorias e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 2008.

APÊNDICE A– CARDENO DIDÁTICO

Na página seguinte será apresentado o caderno didático feito pelo Professor, uma das propostas centrais do presente trabalho, tal material é idêntico ao recebido pelos alunos.

COLÉGIO ESTADUAL CORONEL PILAR

MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PROF IGOR

23
AGOSTO

COLÉGIO ESTADUAL CORONEL PILAR

ENSINO MÉDIO
2ª SÉRIE

Professor
IGOR GODOY

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Estudo da Matemática que estuda a contagem do número de elementos de um conjunto, sendo que estes elementos possuem propriedades discerníveis.

Fatorial: Seja n pertencente ao conjunto dos números Naturais n! é definido por n! = n.(n-1)(n-2)...1

Exemplos:

a)3! =

b)5!=

c) $\frac{6!}{4!} =$

d) $\frac{12!}{9!3!} =$

Definição:

0! = 1

1!=1

e)Determine o valor de n na expressão:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = 6$$

F)(ESPM)O valor de $\frac{100!+99!}{101!}$

a) 10^{-2}

b) 10^{2}

c) 10^{12}

d) 10^{15}

e) 10^{20}

Princípio fundamental da contagem: O PFC diz que se há x modos de tomar uma decisão D1, há y modos de tomar uma decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é xy.

Exemplo:

1)Miguel deseja ir ao evento festivo de formatura, para isso tem a sua disposição 2 pares de sapatos, 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras ele pode se vestir para ir ao evento?

Ramificações:

PFC

2)Um motorista deseja sair da cidade A para a cidade C passando pelo município B. Sabendo que de A até B ele pode escolher entre 3 estradas, de B até C ele pode escolher dentre 4 estradas. De quantas maneira o motorista pode completar a sua viagem?

3) Na festa junina do Colégio Estadual Coronel Pilar, a barraca de cachorro quente, o freguês tem a possibilidade de escolher um entre quatro tipos de pães, uma entre três tipos de salsichas e um entre seis tipos de molhos. Identifique a quantidade de cachorros quentes diferentes que podem ser feitos.

4)(Enem 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.
O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:
A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

5)(AMAN) Uma família composta de 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. De quantos modos poderão ser acomodar no automóvel para uma viagem, sabendo-se que apenas o pai e a mãe sabem dirigir:
a)24 b)48 c)120 d)240 e)480

6) A quantidade de números distintos, com 4 algarismos, sem repetição, que pode ser obtida com os algarismos 1,2,3,4:

6.1)(AFA)A quantidade de números distintos, com 4 algarismos, sem repetição, que pode ser obtida com os algarismos 0,1,2,3,4,5:
a) 5 b)60 c)240 d)300 e)360

Método 2: Usando o complementar

7) (UNICAMP 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a
a) 48. b) 72. c) 96. d) 120.

8)Quantas senhas de 3 dígitos podemos formar utilizando apenas algarismos distintos?

9)Um prédio tem 3 andares, cada andar tem 2 quartos. De quantas maneiras podemos abrigar 3 famílias sendo uma em cada andar?

10) Quantas maneiras distintas podemos organizar 15 livros, sendo 8 deles de Matemática, 4 de português e 3 de literatura, de modo que não se misture as matérias.

a)15! B)15!8!4!3!c)8!.4!3!3! d)8!4!3!

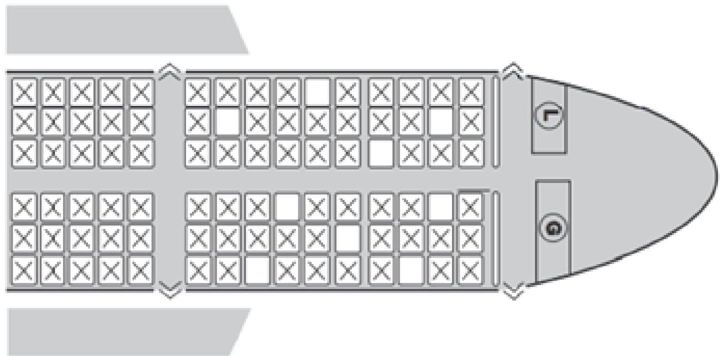
11)Uma turma de 5 amigos irá ao cinema, para isso reservaram 5 poltronas consecutivas, de quantas maneiras eles poderão se acomodar de modo que um casal está entre as pessoas e desejam sentar em poltronas consecutivas?

a)48 b)36 c) 120 d)240 e)72

12)(FAG) Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

a) 10 b)20 c)120 d)320 e)625

13)(ENEM/2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a)$\frac{9!}{2!}$ b)$\frac{9!}{7!.2!}$ c) $7!$ D) $\frac{5!.4!}{2!}$ e) $\frac{5!}{4!}\frac{4!}{3!}$

14)A quantidade de anagramas da palavra DISCRETA, onde as vogais aparecem em ordem alfabética, é:

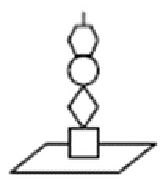
a)$\frac{8!-5!}{3!}$ b)$\frac{8!}{3!}$ c)$8!$ d)$\frac{(8!+3!)}{5!}$ e)$8! + 4!$

<u>Permutação simples</u>

Número de possibilidade de permutação de n elementos que são diferenciados pela ordem.

Exemplo:

1) (EEAR/2014) Um determinado brinquedo possui uma haste onde devem ser colocadas 4 peças de formatos diferentes. O número de maneiras diferentes de se montar esse brinquedo é



a)4 b)12 c)24 d)36

Observe que o problema pode ser resolvido utilizando apenas o princípio fundamental da contagem

A permutação simples de n elementos pode ser dada por:
Pn= n!

2)De quantas maneiras podemos permutar as letras da palavra PILAR?

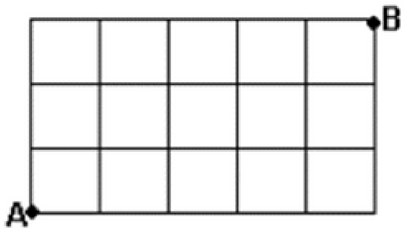
Observe que a palavra PILAR não apresenta letras repetidas, uma situação particular. Como calcularíamos a quantidade de anagramas da palavra CASA?

Chamamos esse conceito que envolve o problema de **PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO**

$$P_n^{n_1,n_2,n_3\ldots} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots}$$

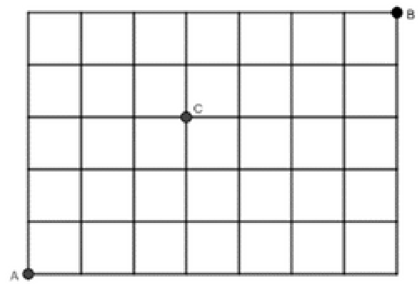
Exemplo:
1)A quantidade de anagramas possíveis da palavra ARARA:

2) (UPF/2016/VER) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



a)40.320 b)6.720 c)256 d)120 e)56

3) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é
a) 28. b) 35.c) 100. d) 300. e) 792.

4) Em uma prova composta de 20 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos doze respostas V e oito respostas F?

a)$\frac{12!}{8!}$ b) $\frac{20!}{8!}$ c) $\frac{20!}{8!12!}$ d) $\frac{12!}{12}$ e)20!

<u>**Arranjo simples:**</u> Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados p a p, a qualquer sequência ordenada de p elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

1)Dentre 10 pessoas, 3 serão escolhidas para os cargos de diretor, vice-diretor e conselheiro. De quantas maneiras poderá ser feita essa escolha?

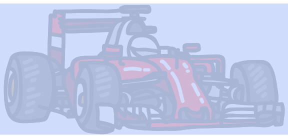
Observe que o problema pode ser resolvido utilizando apenas o princípio fundamental da contagem

Um problema que requer o conceito de Arranjo Simples também pode ser resolvido pela relação:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

"Arranjo de n elementos tomados de p a p"

2)Sabendo que numa corrida automobilística com 20 pilotos, apenas os três primeiros comparecem ao pódio. De quantas maneiras diferentes um pódio pode ser formado?



<u>Combinação simples</u>: Dado um conjunto A com n elementos, chama-se combinação dos n elementos de A, tomados p a p, qualquer subconjunto de A formado por p elementos.

Exemplo:

1)Dentre 10 alunos, 3 serão escolhidos para formar uma comissão representativa. Determine o número de maneiras diferentes que se pode escolher tais grupos de estudante:

Observe que o problema pode ser resolvido utilizando apenas o princípio fundamental da contagem

Um problema que requer o conceito de Combinação Simples também pode ser resolvido pela relação:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

"Combinação de n elementos tomados de p a p"

2)De quantos modos podemos fazer um sanduíche escolhendo um pão, 2 tipos de molho e 3 tipos de salada, sabendo que tínhamos disponíveis 4 tipos de pães, 5 tipos de molho e 6 tipos de salada?

3) (FUVEST 2023) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é:

a)42 b) 54 c) 62 d) 72 e) 84

4) (ENEM 2010) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus Nacionais	Museus Internacionais
Masp – São Paulo	**Louvre** – Paris
MAM – São Paulo	**Prado** – Madri
Ipiranga – São Paulo	**British Museum** – Londres
Imperial – Petrópolis	**Metropolitan** – Nova York

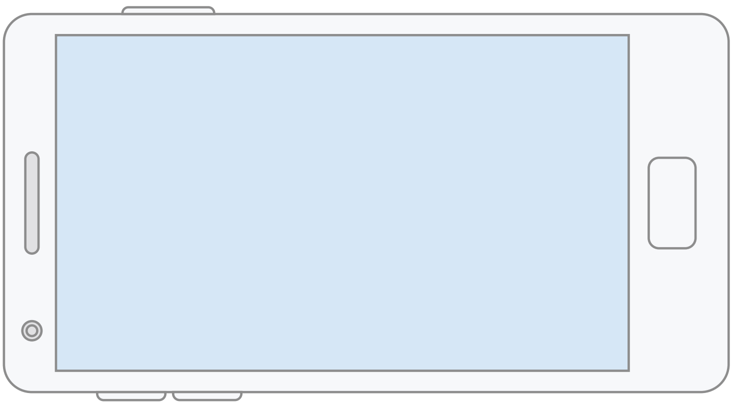
De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

a) 6   b) 8   c) 20   d) 24   e) 36

Princípio aditivo: união de dois ou mais elementos de um conjunto, na análise combinatória é usado quando devemos somar os casos.

Exemplos:

1) João esqueceu a senha para desbloquear seu celular. Ele lembra que a senha do telefone apresenta 4 algarismos e apenas utiliza os números 1,3,7 para efetuar o desbloqueio. Qual é o número máximo de tentativas que precisará fazer para desbloquear?



2)(UPF 2018) Uma equipe esportiva composta por 5 jogadoras está disputando uma partida de dois tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo, podem ser feitas até 3 substituições, e, para isso, o técnico dispõe de 4 jogadoras na reserva. O número de formações distintas que podem iniciar o segundo tempo é:

a) 120

b) 121

c) 100

d) 40

e) 36

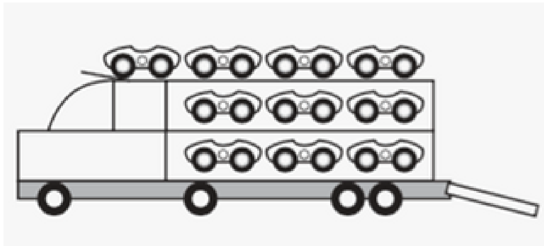
APROFUNDANDO OS CONCEITOS

__Combinação com repetição__

Quantidade de agrupamentos que podemos formar escolhendo k entre n, sendo que um mesmo elemento pode se repetir.

Exemplo:

1)(ENEM/2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a)$C_{6,4}$ b) $C_{9,3}$ c) $C_{10,4}$ d)6^4 e)4^6

2) (CESGRANRIO) Em um supermercado são vendidas 5 marcas diferentes de refrigerante. Uma pessoa que deseja comprar 3 latas de refrigerante, sem que haja preferência por uma determinada marca, pode escolhê-las de N formas. O valor de N é:

a) 3   b)10   c)15   d)35   e)125

Observe que o problema pode ser resolvido utilizando a estratégia dada em aula e a Permutação com repetição

Um problema que requer o conceito de Combinação com repetição também pode ser resolvido pela relação:

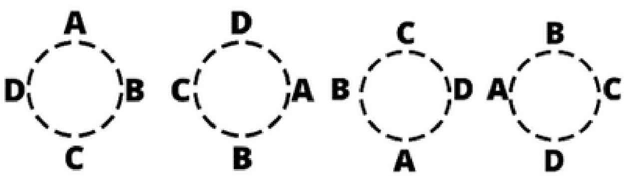
$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

CR – Combinação com repetição
n- quantidade de elementos do conjunto
k- quantidade de elementos em cada reagrupamento.

3) (AFA) O número de soluções inteiras não-negativas da equação x +y+ z + t =6 , é igual a:
a)84 b)86c)88 d)90 e)n.r.e

4)O número de soluções inteiras não-negativas e diferentes de zero da equação x+y+z=8
, é igual a:

<u>Permutação circular</u>: Quantidade de permutações de n elementos em ordem circular que se diferenciam somente por suas posições internas.
Exemplo:
As crianças A,B,C e D estão brincando de ciranda:



Observe que a situação não se altera se fixarmos a criança A como referencial.

O número de maneiras que podemos permutar os 4 elementos será calculado por:

$$P_c = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Generalizando para n elementos numa permutação circular:

$$P_c = (n-1)!$$

Exemplos:
1)De quantas maneiras podemos permutar 5 crianças em uma ciranda?

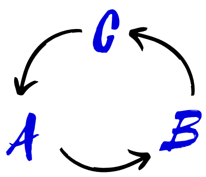
2)Seria possível fazer uma brincadeira de amigo secreto entre 3 pessoas?

3) Qual é o número de formas distintas que pode se executar um amigo secreto de 5 pessoas?

<u>Permutação caótica</u>: Uma permutação de uma lista de n elementos é chamada de permutação caótica, quando nenhum dos elementos da permutação está na posição original.
Exemplo: Quantas são as permutações de ABC de modo que nenhuma letra fique em sua posição original:

ABC, ACB,BAC, BCA, CAB, CBA

Observe que além de resolvermos esse problemas em questão usando a listagem das possibilidades, também podemos resolve-lo através de uma permutação circular (caso particular).



Podemos ler a seta como "Letra A vai para posição de B". Além disso observe que o caso "Letra A vai para posição de B" e "letra B vai para posição de A" é um caso que não satisfaz a permutação caótica, pois C permaneceria na mesma posição, por conta disso o problema pode ser resolvido com uma permutação circular.

Observe que o problema pode ser resolvido utilizando a permutação circular

Um problema que requer o conceito de Permutação Caótica também pode ser resolvido pela relação:

$$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Dn= Permutação caótica de n elementos.
n= Quantidade de elementos que sofrerão uma permutação caótica.

1)(FUVEST/2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é:

A) ¼ B) 7/2 C) 1/3 d) 3/8 E) 5/12

Método de resolução usando os casos possíveis

Método de resolução usando a relação dada

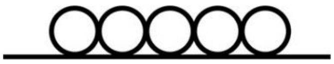
2)Determine o número de possibilidade de efetuar um amigo secreto entre 5 pessoas:

Método de resolução usando os casos possíveis

Método de resolução usando a relação dada

Lista de exercícios

1) (MACKENZIE 2011) Cada um dos círculos da figura deverá ser pintado com uma cor, escolhida dentre três disponíveis. Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, o número de formas de se pintar os círculos é



a) 72 b) 68 c) 60 d) 54 e) 48

2)Joana deseja convidar 5 amigos dos 10 que possui para uma confraternização, de quantas maneiras ela pode convidar seus amigos, de modo que Jaqueline e Roberto precisam comparecer?

a)56

b)72

c)120

d)31

e)96

2.1) Jaqueline brigou com Roberto e eles não podem ser chamados juntos na festa, ou seja, não pode convidar os dois simultaneamente. De quantos modos Joana pode convidar os 5 amigos?

a)200

b)320

c)81

d)196

e)86

3)Com os números 1,2,3,4 e 5. Quantos múltiplos de 5 de 3 algarismos podemos formar?

a)25 b)144 c)125 d)5 e)35

3.1) Com os números 1,2,3,4 e 5. Quantos múltiplos de 5 de 3 algarismos distintos podemos formar?

a)20 b)12 c)10
d)52 e)16

4)(UNIFRA) Uma escola dispõe de 16 professores, dentre os quais deverá ser escolhido um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. A quantidade de maneiras em que pode ser feita essa escolha é de:
a)560 b)3360 c)3200
d)2160 e)6600

5)(ENEM/2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.
A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por
a)6. b)8. c)12. d)16. e)24.

6) (PUC-GO 2011) Assinale a alternativa que corresponde corretamente ao número de permutações distintas usando-se o nome HELIODORO:

a) 120960 b) 9 c) 362880 d) 60480

7) (EsSA/2013) Um colégio promoveu numa semana esportiva um campeonato interclasses de futebol. Na primeira fase, entraram na disputa **8** times, cada um deles jogando uma vez contra cada um dos outros times. O número de jogos realizados na 1ª fase foi

A) 8 jogos B) 13 jogos C) 23 jogos
D) 28 jogos E) 35 jogos

8) (ENEM 2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o

slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa.
Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas? a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972

9) O número de anagramas diferentes com as letras da palavra PILAR que não possuem consoantes consecutivas que se pode obter é:
A) 12
B) 72
C) 120
D) 42
E) 30

10)(ENEM/2021) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.
Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.
De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por
a)5
b)5 · 3
c)5!/(5 − 3) !
d)5!/(5 − 3) !2!
e)5!/(5 − 3) !3!

11)(ENEM/2021) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".
Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras. Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A)9! B)4! 5! C)2.4! 5! D)9!/2 E)4! 5!/2

12)(UNIFRA) Um salão tem 6 portas. O número de maneiras distintas para que esse salão possa estar aberto é
a)720 b)120 c)64 d)63 e)1

13) (MACKENZIE 2011) Considere todos os possíveis telefones celulares, com números de 8 algarismos e primeiro algarismo 9. Mantido o primeiro algarismo 9, se os telefones passarem a ter 9 algarismos, haverá um aumento de
a) 10^7 números telefônicos.
b) 10^8 números telefônicos.
c) $9 .10^7$ números telefônicos.
d) $9 .10^8$ números telefônicos.
e) $9 .10^9$ números telefônicos.

14)Quantas placas de carro (3 letras seguidas de 4 números) podemos fazer de modo que sejam palíndromos, ou seja, a leitura da esquerda para a direita é igual a leitura da direita para esquerda, exemplo: ABA 1001
A)26.25.10.9 b)26.26.10.10
c)26.25.24.10.9.8.7 d)26!10!

15)(EsSA/2008) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sem repeti-los, podemos escrever “x” números de 4 algarismos, maiores que 3200. O valor de “x” é:
a)210

b)228

c)240

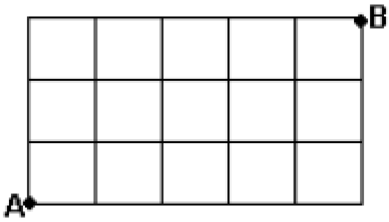
d)300

e) 320

16)Dado duas retas paralelas r e s, tomamos os pontos r_1, r_2, r_3 pertencentes a reta r e os pontos $s_1\ e\ s_2$pertencentes a reta s. Quantos triângulos podemos formar com esses pontos?
a)8
b)12
c)10
d)15
e)9

17) (UFRGS/2015)Para fazer a aposta mínima na mega-sena uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira. Com esse critério, é correto afirmar que
a) essa pessoa apostou no número 1.
b) a razão da PG é maior do que 3.
c) essa pessoa apostou no número 60.
d) a razão da PG é 3.
e) essa pessoa apostou somente em números ímpares.

18) (UPF/2016/VER) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo
ligando **A** a **B** é:



a)40.320
b)6.720
c)256
d)120
e)56

19) (EsSA/2016) Sendo n um número natural, n! equivale a n.(n – 1).(n – 2). ... .2.1 e ainda 0! = 1 e 1! = 1, então identifique a afirmativa verdadeira.
A) 5! = 120 B) 4! = 10. C) 3! = 7.
D) 2! = 3. E) 6! = 600.

20)(UFPA) Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 12 jogadores, dos quais somente Pedro atua como goleiro. Quantos times de 5 jogadores podem ser formados?
a)792
b)485
c)330
d)110
e)98

21)(EsPCEx) Um tabuleiro possui casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar 4 peças diferentes nesse tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?
a)4096
b)576
c)256
d)64
e)16

22)(EsFAO) Um total de 28 apertos de mão foram trocados no fim de uma reunião. Sabendo-se que cada pessoa cumprimentou todas as outras, o número de pessoas presentes à reunião foi
a)8
b)15
c)10
d)9
e)11

23) (UPF/2014) Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

a)23^4

b)$23^3.18$

c)$23^3.72$

d)23^4-5^4

e)18^4+5^4

24) (ENEM/2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, dentre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a)$\frac{10!}{2!.8!}-\frac{4!}{2!.2!}$

b) $\frac{10!}{8!}-\frac{4!}{.2!}$

c) $\frac{10!}{2!.8!}-2$

d) $\frac{6!}{4!}-4.4$

$e)\frac{6!}{4!}-6.4$

25) (UFPEL) Um farmacêutico, dispondo de dez substâncias distintas, deverá elaborar um experimento utilizando seis dessas substâncias a cada investigação. Sabendo que três substâncias predeterminadas dentre as dez substâncias distintas não podem ser usadas simultaneamente em nenhuma investigação, **o número de investigações distintas que podem ser elaboradas é**

a) 203.

b) 175.

c) 252.

d) 152.

e) 126.

f) I.R.

26)O número de triângulos que podemos formar com 7 pontos, sendo 3 deles colineares.

a)34 b)23 c)56 d)110 e)30

27)(UERJ 2019) Seis times de futebol disputaram um torneio no qual cada time jogou apenas uma vez contra cada adversário. A regra de pontuação consistia em marcar 0 ponto para o time perdedor, 3 pontos para o vencedor e, no caso de empate, 1 ponto para cada time. A tabela mostra a pontuação final do torneio.

Times	A	B	C	D	E	F
Pontos	9	6	4	2	6	13

O número de empates nesse torneio foi igual a:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

1-e	2-a	2.1d	3-a	3.1b	4-b
5-d	6-d	7-d	8-“e”	9-a	10e
11e	12d	13c	14b	15b	16e
17a	18e	19a	20c	21b	22a
23d	24a	25b	26a	27b	