



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Estudo Sobre o Cálculo de Áreas e Volumes Utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri †

por

Francisco do Nascimento Lima

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Novembro/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES.

Estudo Sobre o Cálculo de Áreas e Volumes Utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri

por

Francisco do Nascimento Lima

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG

Novembro/2013

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente em minha vida!

A Elvídio Ferreira de Lima, meu pai, mesmo não estando mais entre nós, sua lembrança me dá muita força; e à minha mãe, Maria Iris do Nascimento Lima, que sempre me incentivou ao estudo.

Aos meus queridos filhos, Iasmin Gabriela e Francisco Gabriel, que são os motivos da minha existência e dedicação ao trabalho.

À minha esposa, Cristiane Carvalho, pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos meus irmãos, Irimar Lima Batista, Luiz Alberto, Omar do Nascimento, Irmar do Nascimento e Irineide Lima, que sempre me apoiaram nos estudos da Matemática.

Aos professores da Universidade Federal da Paraíba, do departamento de Matemática, que lecionaram no PROFMAT, pois foram eles quem incentivaram a busca aos cabedais do conhecimento.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar este Trabalho de Conclusão de Curso, em especial ao professor Dr. Manassés Xavier de Souza que corrigiu e orientou, com muita dedicação, todo o meu trabalho.

Aos amigos Alysson Espedito, Aldeck Menezes, Marcelo Dantas, Dyego Aíllo e Ronaldo pelas verdadeiras amizades cultivadas, graças ao advento da matemática, em nossas vidas.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), dando oportunidade para que professores da educação básica possam melhorar os seus conhecimentos matemáticos e à Universidade Federal da Paraíba (UFPB) por abraçar esta ideia.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida.

Dedicatória

A Deus e ao maior presente que Ele me deu, minha família: Cristiane Carvalho (esposa), Iasmin Gabriela (filha), Francisco Gabriel (filho), Maria Iris (mãe) e Elvídio Ferreira de Lima (pai, in memoriam)...

Resumo

Este trabalho teve como objetivo demonstrar algumas fórmulas matemáticas usadas na geometria para servir de fonte de consulta para professores e alunos do Ensino Básico. Iniciamos com uma discussão da história da geometria, sobre os seus primórdios e alguns dos grandes pensadores da Grécia Antiga, a fim de entendermos seu surgimento, bem como seu desenvolvimento. Posteriormente, mostramos que a medida de um segmento é um número real, que o comprimento de uma circunferência é proporcional ao seu raio e que a área do círculo é proporcional ao quadrado do seu raio. Demonstramos que polígonos de áreas iguais podem ser equidecomponíveis e concluímos obtendo as fórmulas de como calcular o volume de alguns sólidos geométricos usando o método de exaustão e o princípio de Cavalieri.

Palavras chaves: Áreas; Volumes; Método de Exaustão; Princípio de Cavalieri.

Abstract

This study aimed to demonstrate some mathematical formulas used in geometry to serve as a reference source for teachers and students of Basic Education. We have begun with some of the great thinkers of Ancient Greece and with a discussion of the History of Geometry since its first days in order to understand its emergency and development. We, then, have showed that the measure of a segment is a real number, that the length of a circle is proportional to its radius and that the area of a circle is proportional to the square of its own radius. We also demonstrated that same-area polygons can be equally decomposed. In the end of this study we did obtain the formulas on how to calculate the volume of some geometric solids using the exhaustion method and Cavalieri principle.

Keywords: Areas; Volumes; Method of Exhaustion; Cavalieri principle.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Um Pouco de História	1
1.1 Primórdios da Geometria	1
1.2 Alguns Grandes Pensadores	2
2 Comprimento, Área e Volume	6
2.1 Comprimento de um Segmento	6
2.2 Área de um Retângulo	8
2.3 Polígonos Equidecomponíveis	10
2.4 Comprimento de uma Circunferência	16
2.5 Área de um Círculo	20
2.6 Volume de Corpos	22
2.6.1 Conceito de Volume	22
2.6.2 Volume de um Paralelepípedo retângulo	24
2.6.3 Volume de um Paralelepípedo Oblíquo	26
2.6.4 Volume de um Prisma	27
3 Algumas Aplicações do Método de Exaustão	29
3.1 Volume de uma Pirâmide	32
3.2 Volume de um Cone	34
3.3 Volume de uma Esfera	36
4 Algumas Aplicações do Princípio de Cavalieri	38
4.1 Volume de um Prisma	40
4.2 Volume de uma Pirâmide	40
4.3 Volume de um Cilindro	46
4.4 Volume de um Cone	47
4.5 Volume de uma Esfera	49
4.6 Área de uma Elipse	51
Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

1.1	Tales de Mileto.	2
1.2	Estátua de Arquimedes de Siracusa.	4
2.1	Segmento formado pelos pontos A , B e C	7
2.2	Segmento \overline{AB} formado por n segmentos congruentes a \overline{u}	7
2.3	Retângulo de lados $3m$ e $4m$	8
2.4	Quadrado de lado 1 dividido em N partes.	9
2.5	Retângulo de lados irracionais.	9
2.6	Polígonos P_1 e P_2	11
2.7	Polígonos equidecomponíveis.	12
2.8	Triângulo equidecomponível com um retângulo.	13
2.9	Polígonos $ABCD$ e $ABEF$	13
2.10	Paralelogramo $ABCD$	14
2.11	Paralelogramo $EFPQ$ e o paralelogramo $EFGH$	14
2.12	Polígono qualquer.	15
2.13	Polígono P e retângulo R	15
2.14	Polígono P' e retângulo R'	16
2.15	Triângulos semelhantes.	16
2.16	Polígonos inscrito e circunscrito na circunferência	17
2.17	Polígono inscrito e polígono circunscrito na circunferência λ	18
2.18	Polígono semelhantes.	19
2.19	Polígono inscrito na circunferência.	21
2.20	Triângulo isósceles.	22
2.21	Um cubo e um recipiente qualquer.	23
2.22	Cubo unitário e retângulo de lados inteiros.	24
2.23	Um cubo e um paralelepípedo retângulo.	24
2.24	Paralelogramo oblíquo.	26
2.25	Paralelepípedo oblíquo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$	26
2.26	Paralelepípedo oblíquo $ABCD A_2 B_2 C_2 D_2$	27
2.27	Paralelepípedo oblíquo $ABB_4 A_4 A_3 B_3 C_3 D_3$	27
2.28	Paralelepípedo de base triangular.	28
2.29	Prisma qualquer.	28
3.1	Pirâmide	32
3.2	Tronco da pirâmide e prisma de mesma base e mesma altura	32
3.3	Cone de altura H	34
3.4	Cilindro e tronco de um cone de mesma altura.	35
3.5	Cilindro de altura $\frac{H}{n}$	35
3.6	Semiesfera de raio R	36

4.1	Resma de papel	38
4.2	Figuras de áreas iguais.	39
4.3	Sólidos de mesmo volume	39
4.4	Paralelepípedo retângulo e um prisma de mesma área da base.	40
4.5	Pirâmide.	41
4.6	Pirâmide de altura H	42
4.7	Pirâmides de qualquer.	43
4.8	Pirâmides de mesma base triangular e mesma altura.	44
4.9	Prisma de base triangular.	44
4.10	Pirâmides de volumes iguais.	45
4.11	Polígono de base poligonal de n lados.	46
4.12	Prisma e cilindro de mesma área da base e mesma altura.	47
4.13	Cone.	47
4.14	Triângulos semelhantes.	48
4.15	Pirâmide e cone de mesma área da base e mesma altura.	48
4.16	Cilindro equilátero circunscrita em uma esfera.	49
4.17	Sólido L à esquerda e sólido L' à direita.	50
4.18	Elipse	51
4.19	Elipse e circunferência concêntricas	52

Introdução

A necessidade de saber sobre volumes de alguns sólidos geométricos vem desde a antiguidade, com as necessidades práticas e pelas curiosidades do homem em encontrar métodos que facilitassem o seu cálculo.

Grande parte dos livros do ensino médio não traz as demonstrações das fórmulas de como calcular volumes dos sólidos geométricos, como: prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera; em alguns, as demonstrações não estão tão claras e percebemos a dificuldade que grande parte dos alunos apresenta no entendimento das fórmulas.

A importância dessas demonstrações para a vida acadêmica dos alunos, pode ser observada nos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN+, (2002):

"Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas."(p. 123). "Compreender o significado de postulado e ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados"(p. 125).

Também notamos uma importância de se compreender esses conceitos relacionados às necessidades do cotidiano, pois percebemos essas figuras geométricas em "peças mecânicas, embalagens e construções; projeções, planificações, cortes e desenhos"(PCN+, 2002, p.125).

Pelo fato de percebermos que muitos professores da Educação Básica não dão ênfase a esses conteúdos que envolvem as figuras geométricas e pela falta de rigor em algumas demonstrações de algumas fórmulas encontradas nos livros didáticos, focamos nossa pesquisa nas demonstrações das fórmulas, sem fazer uso do cálculo integral.

Dessa forma nosso objetivo é mostrar como encontrar as fórmulas para o cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos geométricos usando o Método de Exaustão, criado por Eudócio e muito usado por Arquimedes de Siracusa, e o Princípio de Cavalieri.

Para este estudo dividimos nosso trabalho em quatro partes:

No capítulo 1, apresentamos um pouco dos primórdios da geometria, do de-

envolvimento e os primeiros indícios da geometria rudimentar. Abordamos sobre pensadores como Tales de Mileto, o qual iniciou com a geometria demonstrativa, e Pitágoras de Samos, que formou a escola pitagórica, criou a Teoria dos Números e o famoso Teorema de Pitágoras, que demonstra que a raiz de 2 não é racional. Abordamos também sobre Euclides de Alexandria, autor da obra *Elementos*, o qual foi professor da Universidade de Alexandria.

Arquimedes de Siracusa, que é considerado por alguns como o maior matemático da antiguidade, mostrou a fórmula para o cálculo da área de um círculo, usando o Método da Exaustão e a curva atualmente chamada de *Espiral de Arquimedes*. Outro pensador que aparece no nosso trabalho é Bonaventura Cavalieri, autor do princípio de Cavalieri, atuou como professor da Universidade de Bolonha e deixou obras na matemática, óptica e astronomia.

No capítulo 2, apresentamos o conceito de medida de um segmento e mostramos que a medida de um segmento pode ser igual a um número inteiro positivo, racional ou irracional. Definimos também, de forma construtiva, que a área de um retângulo é igual ao produto do comprimento do retângulo pela sua largura. Apresentamos também o Teorema de Bolyai - Gerwien, segundo o qual dois polígonos de áreas iguais são equidecomponíveis. Apresentamos o conceito de volume e demonstramos que o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto do comprimento, pela largura e pela altura, e que isso vale para qualquer prisma.

No capítulo 3, utilizamos um pouco sobre séries numéricas e suas aplicações nas demonstrações em que obtemos as fórmulas para o cálculo dos volumes de uma pirâmide, de um cone e de uma esfera. O método utilizado é chamado de Método de Exaustão, usado por Arquimedes. Esse método serve como uma opção de demonstração do cálculo de volume e é uma aplicação de um tipo de série estudada pelos alunos do Profmat.

No capítulo 4, apresentamos o Princípios de Cavalieri como axioma, já que sua demonstração é feita com a utilização de cálculo avançado, o qual foge à ideia deste trabalho que é mostrar uma matemática para ser utilizada no Ensino Médio. Nele, demonstramos como obter as fórmulas do volume de um Prisma, de um Cilindro, de um Cone e de uma Esfera. Mostramos também, através de um exemplo, que o Princípio de Cavalieri ajuda a encontrar áreas de figuras planas.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Nosso principal objetivo nesse capítulo é mostrar um pouco do desenvolvimento da geometria, o quanto ela evoluiu em termos científicos, bem como falar um pouco sobre alguns dos principais autores que tiveram parte nesse desenvolvimento, que se deu, principalmente, na Grécia Antiga.

1.1 Primórdios da Geometria

Os primeiros indícios da geometria rudimentar foram observadas no Egito antigo e na Babilônia. A geometria era usada de forma prática para calcular comprimentos, áreas e volumes. Com o avanço da sociedade, surgiram projetos de engenharia como drenagem de pântanos, controle das inundações e irrigações. Esses projetos fizeram com que a geometria se desenvolvesse de forma considerável. Era uma ciência prática que surgiu para auxiliar as atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades necessitavam de cálculos para um calendário utilizável, sistema de pesos e medidas para colheita, no armazenamento e na distribuição de alimentos, criação de agrimensura para construir canais e reservatórios para dividir a terra.

Esses cálculos eram investigados por sacerdotes que, no Egito antigo, adquiriam conhecimentos científicos ligados ao calendário e ao ano agrícola, através dos estudos da Astronomia.

Com o declínio das civilizações egípcia e babilônica, devido às mudanças políticas e econômicas, civilizações como a grega passaram a se destacar. O comércio foi muito incentivado, e por volta do século VIII a.C. os gregos dominavam a agricultura, fundiam ferro, esculpam o bronze e navegavam pelo Mediterrâneo.

Na matemática, queria-se algo além dos processos empíricos, para demonstrar algumas proposições. Foi nesse ínterim que o racionalismo se destacou, dando ênfase ao método demonstrativo, que, até então, não era usado pelos matemáticos, surgindo assim a matemática que conhecemos atualmente.

A utilização dos métodos demonstrativos pode ser encontrada nas obras de grandes matemáticos como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides entre outros. Destacaremos alguns dos mais importantes pensadores no campo da Geometria.

1.2 Alguns Grandes Pensadores

Tales de Mileto, considerado um dos sete sábios da Antiguidade, durante a primeira metade do século VI a.C., deu início à geometria demonstrativa. Ele, através de seu comércio, tornou-se rico e dedicou-se aos estudos e a algumas viagens. Foi durante uma de suas viagens pelo Egito que Tales conseguiu calcular a altura de uma pirâmide usando um pedaço de madeira. De volta a Mileto, ganhou fama, graças à sua inteligência versátil. Era filósofo, astrônomo e matemático. Foi o primeiro homem que demonstrou que os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

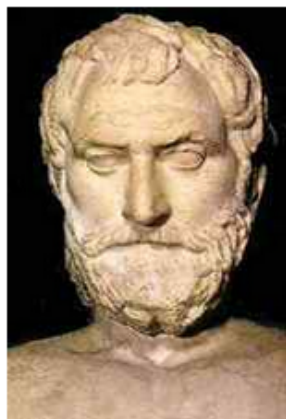


Figura 1.1: Tales de Mileto.

fonte: <http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/tales-de-mileto/tales-de-mileto-1.php>

Destacamos também o matemático, filósofo e místico Pitágoras que nasceu na ilha de Samos, por volta de 572 a.C. Provável discípulo de Tales, deixou Samos por causa do tirano Polícrates e foi para Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Pitágoras formou a escola pitagórica, a qual era um centro de filosofia, matemática e ciências naturais. Era também uma sociedade secreta.

É atribuído a Pitágoras e seus seguidores o mérito de ter dado os primeiros passos no desenvolvimento da Teoria dos Números, segundo a qual podemos identificar os números amigáveis, os números figurados, os números perfeitos e os números abundantes. Em termos geométricos, os números figurados expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, o que demonstram uma associação da geometria com a álgebra.

Os números figurados são descobertas que também foram atribuídas a Pitágoras e são representados pelos números quadrados, números pentagonais e assim por

diante. Com esses números, foram estabelecidos muitos teoremas interessantes de maneira puramente geométrica.

Também encontramos outras contribuições de Pitágoras no desenvolvimento da geometria utilizando o triângulo como objeto de estudo. Apesar dos Sumérios já saberem a relação métrica entre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, há uma tradição e unanimidade em atribuir a Pitágoras a descoberta dessa relação que leva o seu nome: Teorema de Pitágoras - que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Foi inclusive na aplicação deste teorema que os pitagóricos descobriram os números irracionais, em que verificaram que a diagonal de um quadrado de lado racional possui uma diagonal não racional, por exemplo, para um quadrado de lado 1, temos uma diagonal com medida igual a $\sqrt{2}$.

Ainda no Egito, Demétrio, que viveu em Atenas, mudando para Alexandria idealizou e criou um centro de saber e cultura. Para isso, procurou juntar grandes pensadores do mundo grego, dentre eles Euclides, matemático que passou a ensinar a geometria em Alexandria.

Euclides, autor da grande obra *Elementos*, formada por 13 livros, nasceu em Alexandria e escreveu seu livro por volta de 300 a.C. quando foi chamado para fazer parte do museu de Alexandria, que mais tarde passou a ser chamada de Universidade de Alexandria. Sua obra expõe resultados de vários tipos, organizados sistematicamente, muitos atribuídos a outros geômetras. Apesar disso, os *Elementos* não podem ser vistos apenas como uma compilação, pois essa obra propõe um tratamento sistemático e uniforme da Matemática grega básica.

Os *Elementos* de Euclides ofuscaram obras dos matemáticos gregos anteriores a ele, devido a sua ênfase, já que continha uma grande organização de toda a geometria que havia até então. Desta forma, podemos dizer que quase não se conhece fontes primárias da matemática grega, diferente da matemática primitiva egípcia e babilônica, que encontram-se em vários papiros.

Diferente de Arquimedes, Euclides adotou o método axiomático-dedutivo, em que eram usados definições, axiomas e postulados, que eram fatos aceitos como evidentes e intuitivos, e também proposições (teoremas) que devem ser demonstradas com bases em postulados, axiomas e resultados já demonstrados.

O relato das contribuições de Arquimedes para a matemática podem ser encontrados em Eves (2004). Natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nasceu por volta de 287 a.C. e foi morto em 212 a.C. por um centurião romano no momento que se dedicava a um cálculo que fazia na areia.

Arquimedes deixou um legado que foi usado e aperfeiçoado ao longo do tempo, pois construções com régua e compasso não permitiam resolver todos os problemas



Figura 1.2: Estátua de Arquimedes de Siracusa.
fonte: <http://forum.toribash.com/showthread.php?t=202153>

tratados pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides. Desta forma, surgem algumas curvas que contribuíram para resolver os problemas clássicos: a trisseção dos ângulos, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo, que foram resolvidos sem o uso de régua e compasso. Conferir ([7], 2004; [3], 2012; [4], 2008).

Arquimedes usava métodos que se diferenciavam dos métodos euclidianos e, por este motivo, ele não pode ser considerado o sucessor de Euclides. Para ele havia uma diferença entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstrações, que deveriam ser puramente geométricos.

Dentre esses problemas clássicos enfatizamos a quadratura do círculo, em que Arquimedes demonstrou que a área é igual a π vezes a medida do raio ao quadrado, usando a Curva chamada de Espiral de Arquimedes e também usando o método clássico que é conhecido como método da exaustão de Eudoxo.

Uma definição para o método de exaustão a qual admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis, a base do método de exaustão é a proposição: "Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, teremos, por fim, uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie."

Outro matemático que trabalhou com o conceito de indivisibilidade foi Bonaventura Cavalieri, que nasceu em Milão, em 1598, e foi aluno de Galileu aos 15 anos. Atuou como professor da Universidade de Bolonha até a sua morte, em 1647. Deixou algumas obras na matemática, óptica e astronomia. Porém, o que realmente o projetou foi o tratado *Geometria Indivisibilibus* publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho há uma apresentação do seu método dos indivisíveis, cuja ideia remonta a Demócrito e Arquimedes e a motivação, talvez, venha das tentativas de Kepler de encontrar as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, em que ele teve de recorrer a uma forma rudimentar de

cálculo integral (Vide, [7]).

Em seu tratado, Cavalieri conceituava o termo indivisível como: "um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido" ([7], p. 425). Dessa forma, considera que uma porção plana pode ser formada por uma infinidade de cordas paralelas e um sólido pode ser formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Essas ideias deram origem aos chamados princípios de Cavalieri.

Segundo Eves ([7], p. 426) "os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno". Depois da aceitação desses princípios, a matemática pôde resolver muitos problemas de mensuração que, até então, eram recorridos a técnicas avançadas de cálculo para a sua resolução.

A evolução das técnicas de resolução de problemas favoreceram o estudo da geometria, no sentido de contribuir para a evolução do homem na sociedade, tanto no aspecto econômico como cultural.

Na história da geometria encontramos alguns elementos que nos chamaram a atenção para um estudo mais detalhado, como, por exemplo, as áreas de algumas figuras planas e o volume de alguns sólidos geométricos. O seu estudo é algo fascinante e, por este motivo, que escolhemos nos aprofundar melhor acerca deste assunto.

Capítulo 2

Comprimento, Área e Volume

Podemos observar no capítulo anterior que a geometria ajudou no desenvolvimento de algumas civilizações como a egípcia e babilônica, e com o passar do tempo, ela passou a ser mais estudada de forma axiomática por alguns grandes pensadores da história.

Alguns elementos da geometria, como o comprimento e a área, foram muito utilizados na formação das primeiras civilizações, por isso daremos ênfase a esses conceitos, priorizando seu aspecto prático na construção de novos conceitos. Outra justificativa para estudarmos estes conceitos é que servirão de base para o estudo de volumes, que é um dos focos de nosso trabalho.

Esses conceitos serão definidos de forma a construir uma sequência didática flexível com aplicações que poderão servir de base para pesquisadores ou professores de áreas de interesses.

2.1 Comprimento de um Segmento

Nosso primeiro conceito a ser estudado é o comprimento de um segmento, que de forma hierárquica, introduz os demais conceitos.

Antes de iniciarmos as definições é interessante lembrarmos um conceito criado no século V a.C. pelos pitagóricos acerca da existência dos números irracionais, ou seja, números que não podiam ser escritos na forma p/q , com p e q inteiros, e $q \neq 0$.

Os pitagóricos verificaram que a diagonal de um quadrado de lado l , com l racional, não poderia ser escrita na forma p/q . Isso foi observado tomando um quadrado de lado racional p/q , então, pôde-se, por redução ao absurdo, mostrar que sua diagonal não podia ser escrita na forma p/q . Vejamos a demonstração.

Suponha que a diagonal do quadrado de lado p/q seja um número racional escrito na forma m/n , sendo m e n números inteiros positivos. Daí, usando o teorema de Pitágoras, teremos $(m/n)^2 = (p/q)^2 + (p/q)^2$, ou seja, $(m/n)^2 = 2 \cdot (p/q)^2$ em que obtemos $(qm)^2 = 2 \cdot (np)^2$. Todavia, observe que no primeiro membro só podemos

ter uma quantidade par de potências de 2 e no segundo membro uma quantidade ímpar de potências de 2 o que é um absurdo. Portanto, a diagonal do quadrado não pode ser escrita como p/q .

A descoberta dos números irracionais só foi possível graças aos pitagóricos que tinham conhecimento do conceito de comprimento de um segmento e que, de forma rigorosa, requer um cuidado mais específico para ser representado.

Vamos representar um segmento formado por dois pontos, A e B , por \overline{AB} e sua medida, ou comprimento, por AB . A medida do segmento \overline{AB} é um número que deve expressar quantas vezes o segmento \overline{AB} contém um segmento \overline{u} , o qual possui medida igual a 1 e, por este motivo, chamaremos de segmento unitário.

Exemplo: Se forem dados três pontos colineares A , B e C , onde \overline{AB} , \overline{BC} são congruentes a \overline{u} , então $AC = AB + BC = 2$.

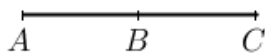


Figura 2.1: Segmento formado pelos pontos A , B e C .

Em geral, se for possível obter $n + 1$ pontos colineares $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, de segmentos congruentes ao segmento unitário \overline{u} , então a medida de $\overline{A_1A_{n+1}}$ será igual a n . Neste caso escrevemos.

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1} = n.$$

Tomando $A_1 = A$ e $A_{n+1} = B$, teremos assim $AB = n$, como ilustrado na Figura 2.2 a seguir.

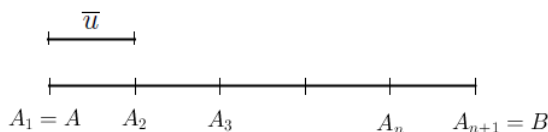


Figura 2.2: Segmento \overline{AB} formado por n segmentos congruentes a \overline{u} .

A medida do segmento \overline{AB} representa quantas vezes \overline{u} cabe no segmento \overline{AB} . Isto vale quando um segmento \overline{AB} é múltiplo de \overline{u} . Porém, se o segmento \overline{AB} for menor que o segmento unitário? Primeiro, suponha que exista um segmento \overline{w} , tal que esteja n vezes contida no segmento \overline{u} e esteja m vezes contida no segmento \overline{AB} , sendo m e n números inteiros. Dizemos que \overline{w} é submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{u} , e por este motivo, \overline{AB} e \overline{u} são chamados de comensuráveis, e $AB = m/n$, já que \overline{w} é $1/n$ parte de \overline{u} , e \overline{AB} é m vezes a parte de \overline{w} , ou seja, m vezes $1/n$.

Agora, se o segmento é incomensurável com o segmento unitário \bar{u} , ou seja, não é possível escrever sua medida na forma m/n , então sua medida é um número irracional. Mas, o que é um número irracional? Segundo Lima ([10], 2009, p. 4) "A resposta não é muito simples. Enquanto um número racional tem uma expressão "exata" como o quociente p/q de dois números inteiros, um número irracional fica determinado quando se conhecem seus valores aproximados."

Tomemos um segmento \overline{AB} que seja incomensurável com a unidade de comprimento \bar{u} , logo a medida de \overline{AB} é um número irracional.

Seja dado n um número inteiro positivo. Dividindo o segmento unitário \bar{u} em n partes iguais, que chamaremos de \bar{w} uma dessas partes. Existe um número inteiro positivo m , em que \overline{AB} possui uma quantidade m de segmentos congruentes e ainda falta algo para completar, porém, $m + 1$ quantidades de segmentos iguais a $1/n$ forma um segmento maior que o segmento \overline{AB} . Desta forma, obtemos:

$$\frac{m}{n} < AB < \frac{m + 1}{n}.$$

Logo, o número m/n é uma aproximação por falta para a medida do segmento \overline{AB} , com erro inferior a $1/n$. Da mesma forma, $(m + 1)/n$ é uma aproximação por excesso do número irracional \overline{AB} , com erro inferior a $1/n$.

2.2 Área de um Retângulo

A partir dos conceitos de comprimento de um segmento, podemos definir os elementos que compõe as dimensões de um retângulo. O conceito de área vem da comparação entre figuras planas, em que a área de qualquer figura é dada em função de um quadrado de lado 1. Por exemplo, a área de um retângulo de lados $3m$ e $4m$ cabem 12 quadrados de área igual a $1m^2$, como podemos ver na Figura 2.3.

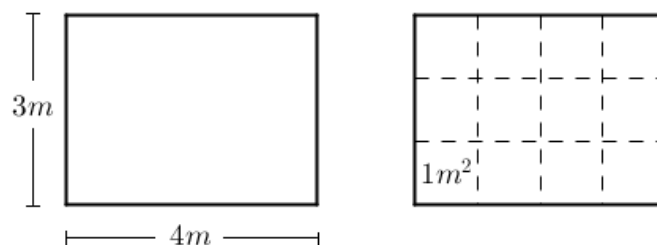


Figura 2.3: Retângulo de lados $3m$ e $4m$.

Os conceitos vistos nesse exemplo servirão de base para a demonstração da seguinte proposição.

Proposição 2.2.1 *A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura do retângulo.*

Prova: Considere um quadrado unitário, ou seja, de lado 1, que dividiremos em N partes iguais, em que N é um número natural. Seja q a medida do lado do quadrado menor formado pela divisão do quadrado unitário por N , ou seja, $q = \frac{1}{N}$, sendo assim, $q^2 = \frac{1}{N^2}$.

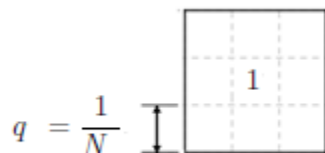


Figura 2.4: Quadrado de lado 1 dividido em N partes.

Dados x e y as medidas dos lados de um retângulo como podemos observar na Figura 2.5. Então podemos indicar por m o número inteiro da divisão de x por q e n o número inteiro da divisão de y por q , e o número de quadrados contidos no retângulo será, no mínimo, $m \cdot n$, enquanto que o número de quadrados que contém o retângulo não será maior que $(m + 1)(n + 1)$. Daí resulta que a área do retângulo está compreendida entre $m \cdot n \cdot q^2$ e $(m + 1) \cdot (n + 1) \cdot q^2$, ou seja,

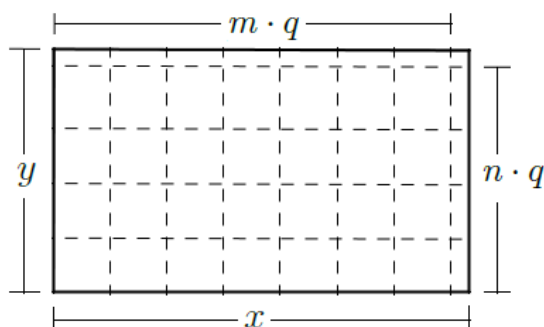


Figura 2.5: Retângulo de lados irracionais.

$$m \cdot n \cdot q^2 \leq \mathbf{A} < (mn + m + n + 1) \cdot q^2.$$

Demonstraremos agora que o produto de $x \cdot y$ está compreendido entre os mesmos números. Efetivamente, tem-se $m \cdot q \leq x < (m + 1) \cdot q$ e $n \cdot q \leq y < (n + 1) \cdot q$.

Por este motivo, temos:

$$m \cdot n \cdot q^2 \leq xy < (m + 1) \cdot (n + 1) \cdot q^2,$$

ou seja,

$$m \cdot n \cdot q^2 \leq xy < (mn + m + n + 1) \cdot q^2.$$

Logo,

$$m \cdot n \cdot q^2 \leq xy < (m \cdot n \cdot q^2 + m \cdot q^2 + n \cdot q^2 + q^2).$$

Sabendo que ambos os números, \mathbf{A} e $x \cdot y$, que estão compreendidos entre os números $m \cdot n \cdot q^2$ e $(m+1) \cdot (n+1) \cdot q^2$, diferem no máximo $(m+1) \cdot (n+1) \cdot q^2 - m \cdot n \cdot q^2$, ou seja, diferem no máximo $m \cdot q^2 + n \cdot q^2 + q^2$. Fazendo $N \rightarrow \infty$, o número $m \cdot q^2 + n \cdot q^2 + q^2 = \frac{m^2}{N^2} + \frac{n}{N^2} + \frac{1}{N^2}$ tende a zero. Portanto, a área do retângulo de lados x e y é:

$$\mathbf{A} = x \cdot y.$$

■

2.3 Polígonos Equidecomponíveis

Nesta seção, discutiremos sobre polígonos equidecomponíveis, que servirão para mostrar que se temos dois polígonos P e P' que possuem a mesma área, então podemos recortar um polígono P em polígonos menores e depois reagrupar estes polígonos pequenos, uns adjacentes aos outros, de modo a obter um polígono P' .

Iniciaremos nossa discussão com algumas definições que podemos encontrar em Lima ([12], p. 8-9) e em Boltianski ([2], p. 9) acerca do conceito de polígonos.

Definição 2.3.1 *Chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado é um segmento de reta que tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.*

Quando falamos em calcular a área de um polígono, é claro que estamos nos referindo em calcular a região poligonal, ou seja, região interna do polígono.

Definição 2.3.2 *Um polígono chama-se convexo quando o prolongamento de qualquer dos seus lados é uma reta de apoio, onde uma reta r é chamada de reta de apoio do polígono P quando P tem pelo menos um ponto em comum com r e está contida inteiramente numa das margens de r .*

Definição 2.3.3 *Dois polígonos são ditos semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspon-*

dentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Quando a constante de proporcionalidade entre os dois polígonos for igual a 1, dizemos que estes dois polígonos são congruentes.

Exemplo: Na Figura 2.6 temos dois polígonos P_1 e P_2 , em que P_1 é um polígono não convexo, já que o prolongamento de um de seus lados possui parte interna ao polígono, e P_2 é um polígono convexo, pois o prolongamento de qualquer um dos seus lados é uma reta de apoio e está contido inteiramente numa das margens de r .

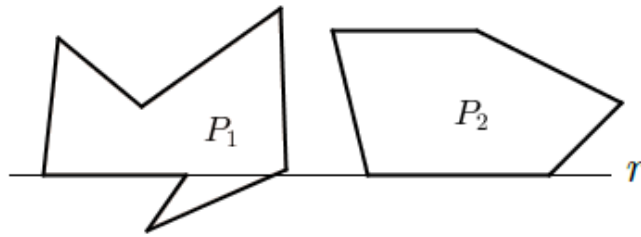


Figura 2.6: Polígonos P_1 e P_2 .

Agora, vamos mostrar que se dois polígonos têm mesma área, então um deles poder ser dividido em partes das quais é possível compor o outro polígono. Esta afirmação vem sendo usada desde o tempo de Euclides, em os *Elementos*, porém, esta afirmação é um teorema criado pelo matemático Farkas Wolfgang Bolyai (1832) e pelo matemático alemão Phillip Gerwien (1833), sendo demonstrado por ambos quase que simultaneamente.

Definição 2.3.4 *Dois polígonos P e P' dizem-se equidecomponíveis quando existem decomposições*

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

e

$$P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$$

de tal modo que cada polígono P_i é congruente ao polígono P'_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Além disso, exige-se que os polígonos P_i tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os P'_i .

É fácil ver que as figuras representadas na Figura 2.7, são equidecomponíveis.

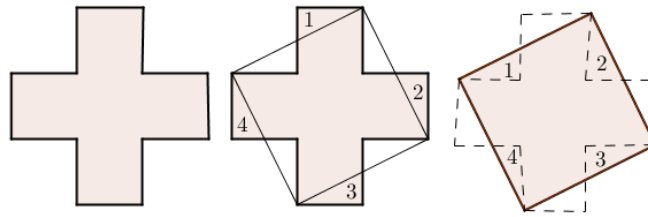


Figura 2.7: Polígonos equidecomponíveis.

Os lemas seguintes vão nos mostrar que dois polígonos são equidecomponíveis se, e somente se, são equivalentes. Para Muniz ([14], p. 239) "dois polígonos são chamados equivalentes se possuem mesma área". Vejamos os lemas.

Lema 2.3.1 *Se um polígono P é equidecomponível a um polígono P' , e o polígono P' é equidecomponível a um polígono P'' , então os polígonos P e P'' também são equidecomponíveis.*

Prova: Considere dois polígonos P e P' equidecomponíveis, isto significa que partindo de P podemos dividi-lo em algumas partes e formar P' . Então, considere $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ uma decomposição de P os quais reagrupados formam $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$, em que cada P_i é congruente a cada P'_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Ao recortar P' para obter P'' , os polígonos P'_i são decompostos em n polígonos ainda menores. Estes podem ser reagrupados de um modo para formar o polígono P e de outra formar P' . Logo, P e P'' são equidecomponíveis. ■

Lema 2.3.2 *Todo triângulo é equidecomponível com algum retângulo.*

Prova: Considere o triângulo ABC , de base \overline{AC} , em que a medida do ângulo $m(\widehat{ABC})$ é maior ou igual às medidas dos ângulos $m(\widehat{ACB})$ e $m(\widehat{BAC})$, sendo assim, o triângulo ABC terá sua projeção ortogonal entre os vértices A e C . Seja D o ponto de interseção da reta \overleftrightarrow{AC} com a altura do triângulo com relação à base \overline{AC} . Traçando uma reta r paralela ao segmento \overline{AC} que passa pelo ponto O , médio de \overline{BD} , chamaremos de E e F os pontos de interseção da reta r como os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} . Sendo assim, obtemos os triângulos retângulos EOB e FOB , e o trapézio $ACFE$, reposicionando os triângulos EOB e FOB , formamos o retângulo $AGHC$ como mostra a Figura 2.8.

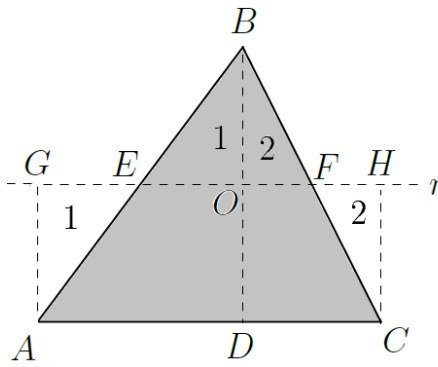


Figura 2.8: Triângulo equidecomponível com um retângulo.

■

Lema 2.3.3 *Dois paralelogramos que possuem mesma base e áreas iguais são equidecomponíveis.*

Prova: Sejam $ABCD$ e $ABEF$ dois paralelogramos que tem base comum \overline{AB} e igual área. Então, as alturas dos paralelogramos são idênticas, sendo assim, os segmentos \overline{CD} e \overline{EF} se encontram em uma mesma reta. Se os segmentos \overline{CD} e \overline{EF} são coincidentes, não há o que demonstrar. Se os segmentos \overline{CD} e \overline{EF} não são coincidentes, então tracemos na reta \overleftrightarrow{AB} , consecutivamente, uma série de segmentos iguais ao segmento \overline{AB} e por cada ponto de divisão se traçam retas paralelas aos segmentos \overline{AD} e \overline{AF} . Então, os feixes de retas paralelas formados por \overline{AD} e \overline{AF} formam uma série de polígonos, como podemos ver na Figura 2.9. Cada um destes polígonos de um paralelogramo pode ser deslocado para o outro paralelogramo. A figura abaixo mostra que os polígonos do paralelogramo $ABEF$ podem ser deslocados para o paralelogramo $ABCD$, já que o polígono $ABCD$ é composto pelos polígonos representados por 1, 2, 3, 4 e 5, assim como o polígono $ABEF$. Portanto, estes paralelogramos são equidecomponíveis.

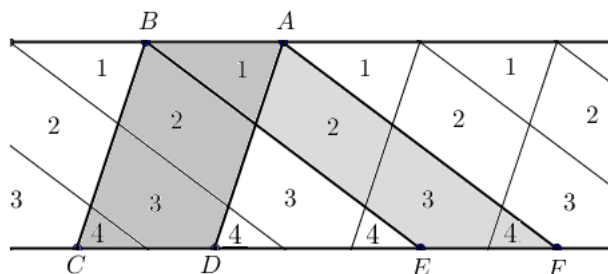


Figura 2.9: Polígonos $ABCD$ e $ABEF$.

■

Lema 2.3.4 *Dois retângulos de igual área são equidecomponíveis.*

Prova: Sejam $ABCD$ e $EFGH$ dois retângulos de mesma área, representados nas Figuras 2.10 e 2.11, respectivamente. Dentre os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{EF} , \overline{FG} considere o de maior medida o segmento \overline{AB} , sem perda de generalidade.



Figura 2.10: Paralelogramo $ABCD$.

Agora, considere o ponto P pertencente a reta \overleftrightarrow{GH} , em que P está a esquerda de H , como podemos ver na Figura 2.11. Considere uma circunferência de raio AB de centro em E . Como $AB > EH$, então teremos dois pontos de interseção da circunferência com a reta \overleftrightarrow{GH} . Seja Q o ponto a esquerda de H e seja \overline{PQ} um segmento de mesma medida que o segmento \overline{HG} . Daí temos que o paralelogramo $EFPQ$ tem mesma área e um lado comum ao retângulo $EFGH$. Como do **Lema 2.3.3** assegura que paralelogramos de mesma área e mesma base são equidecomponíveis, então $EFGH$ e $EFPQ$ são equidecomponíveis. Como no retângulo $ABCD$ e o paralelogramo $EFPQ$ tem mesma base e mesma área, então eles também são equidecomponíveis. Do **Lema 2.3.1**, temos que $ABCD$ e $EFGH$ também são equidecomponíveis.

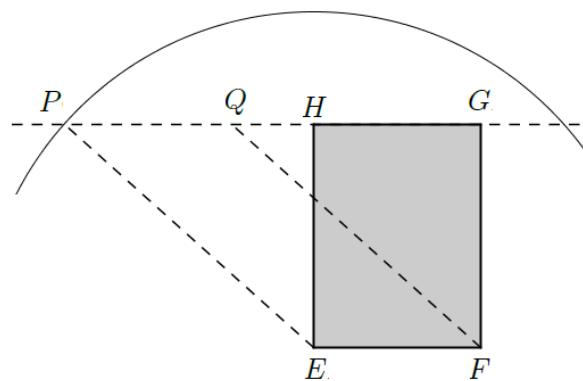


Figura 2.11: Paralelogramo $EFPQ$ e o paralelogramo $EFGH$.

■

Lema 2.3.5 *Todo polígono é equidecomponível com certo retângulo.*

Prova: Todo polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos, independente do polígono ser convexo ou não. Se o polígono é convexo, então fixamos

um certo vértice e , a partir dele traçamos segmentos que unem o vértice em questão a todos os outros vértices não adjacentes a ele. Contudo, se o polígono não é convexo, usaremos a mesma ideia, bastando para isto dividir o polígono em polígonos convexos. Logo, do **Lema 2.3.2** todo triângulo pode ser decomposto em algum retângulo e, como dois retângulos de mesma área são equidecomponíveis, então podemos formar todos os triângulos em retângulos de mesma base. Portanto, o polígono original pode ser escrito como um retângulo, bastando sobrepor todos os retângulos menores.

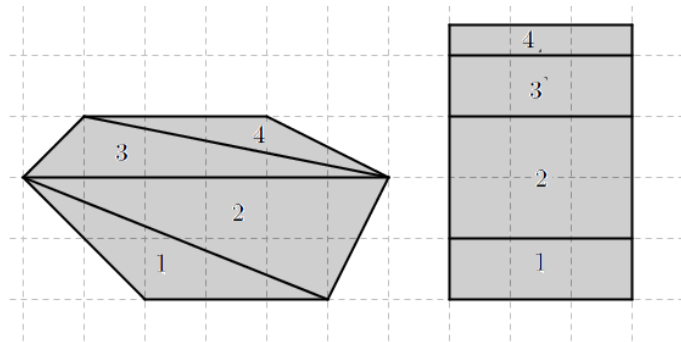


Figura 2.12: Polígono qualquer.

■

Teorema 2.1 (Teorema de Bolyai - Gerwien) *Dois polígonos de áreas iguais são equidecomponíveis.*

Prova: Dados dois polígonos de áreas iguais, P e P' , podemos decompor o polígono P em triângulos adjacentes uns aos outros. Esses triângulos são equidecomponíveis a retângulos, de acordo com o **Lema 2.3.2**, e cada um desses retângulos, sob a perspectiva do **Lema 2.3.4**, é equidecomponível a um retângulo de base b . Empilhando esses retângulos de base b uns sobre os outros, obtemos um retângulo R de base b , o qual é equidecomponível ao polígono P .

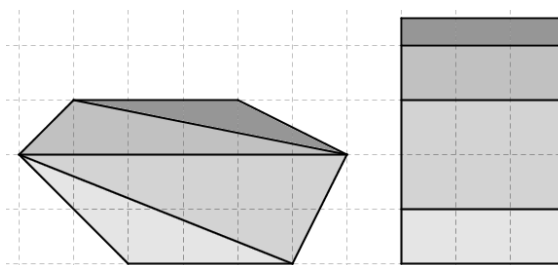


Figura 2.13: Polígono P e retângulo R .

De modo análogo, P' é equidecomponível com um retângulo R' de base b . Como R e R' têm áreas iguais, então, aplicando o **Lema 2.3.4**, R e R' são equidecomponíveis, e aplicando o **Lema 2.3.1**, P é equidecomponível a R , e R é equidecomponível ao retângulo R' , e R' é equidecomponível ao polígono P .

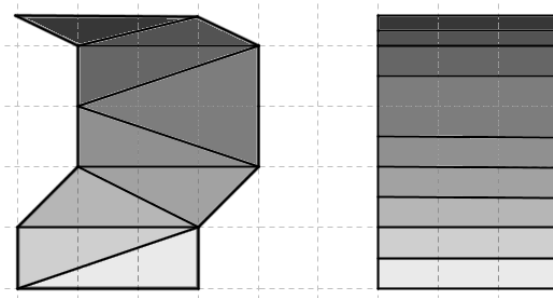


Figura 2.14: Polígono P' e retângulo R' .

Portanto, P é equidecomponível a P' . ■

Mais detalhes podem ser encontrados em Lima ([12], p. 25-33) e em Boltianski ([2]).

2.4 Comprimento de uma Circunferência

Vimos anteriormente o conceito de comprimento de um segmento e área de um polígono, por meio de figuras equidecomponíveis. Agora, vamos estudar o conceito de comprimento de uma circunferência e o conceito de área de um círculo.

Antes vejamos algumas definições e proposições que nos ajudarão nas demonstrações desta seção, as proposições sobre semelhança de triângulos não serão citadas, já suas demonstrações podem ser encontradas de forma clara em Barbosa ([1]), Dolce ([6]) e Muniz ([14]).

Definição 2.4.1 *Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Exemplo: Considere os triângulos ABC e DEF como na Figura 2.15. Escrevemos

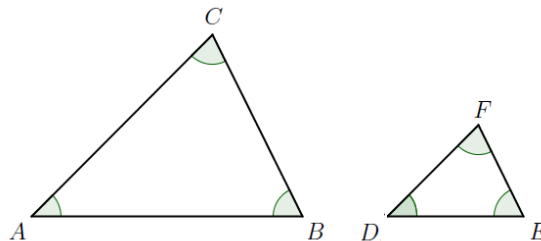


Figura 2.15: Triângulos semelhantes.

$ABC \sim DEF$ para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF , como a correspondência que leva A em D , B em E , e C em F . Sendo assim, se $ABC \sim DEF$, então $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ e $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Proposição 2.4.1 *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ e $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$, então $ABC \sim DEF$.*

Proposição 2.4.2 *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, então $ABC \sim DEF$.*

Proposição 2.4.3 *Se dois triângulos ABC e DEF são tais que seus lados satisfazem a relação $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, então $ABC \sim DEF$.*

Definição 2.4.2 *Polígono regular é todo polígono convexo cujos lados e ângulos são iguais.*

Definição 2.4.3 *Diz-se que um polígono está inscrito numa circunferência quando seus vértices estão sobre ela e seus lados são cordas, e, um polígono é dito circunscrito a circunferência quando seus lados são tangentes a ela.*

Definição 2.4.4 *Os vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência dividem a circunferência em partes iguais. A perpendicular baixada do centro da circunferência sobre o ponto médio do lado do polígono chama-se apótema e a distância do vértice do polígono ao centro da circunferência chama-se raio do polígono.*

A Figura 2.16 ilustra um polígono regular de vértices $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ e o apótema a inscrito no círculo, um polígono regular de vértices $A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$ circunscrito ao mesmo círculo e o apótema do polígono de vértices $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$,

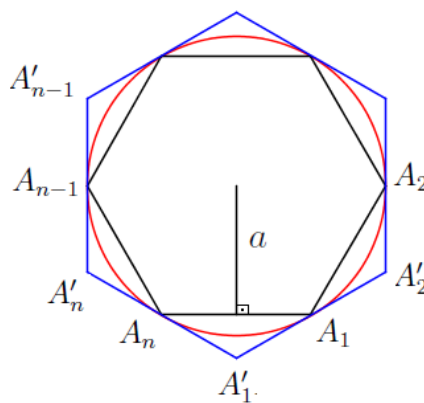


Figura 2.16: Polígonos inscrito e circunscrito na circunferência

Proposição 2.4.4 *O conjunto de todos os perímetros dos polígonos inscritos na circunferência λ é limitado superiormente.*

Prova: Seja P um polígono regular, como ilustra a Figura 2.17 a seguir, de vértices $A_1A_2\dots A_n$ inscrito numa circunferência λ de raio R , ou seja, o polígono possui todos os vértices na circunferência. Tomando um ponto B_1 da circunferência λ que divide o arco $\widehat{A_1A_n}$ em dois arcos de mesma medida $\widehat{A_1B_1}$ e $\widehat{B_1A_n}$. deste modo, o perímetro do polígono P , que será representado por p , é menor do que o perímetro do polígono P_1 de vértices $A_1A_2\dots A_nB_1$, já que $A_1A_n < A_1B_1 + B_1A_n$. Continuando com este raciocínio construiremos cada vez mais polígonos de perímetros maiores tais que $p < p_1 < p_3 < \dots < p_n < \dots$, porém, a sequência p_i é limitada por todos os perímetros dos polígonos circunscritos a circunferência λ .

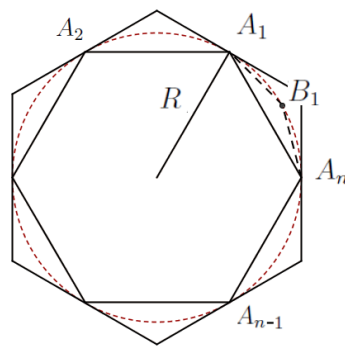


Figura 2.17: Polígono inscrito e polígono circunscrito na circunferência λ .

■

Motivado pela prova anterior, temos a seguinte definição:

Definição 2.4.5 Definiremos comprimento da circunferência l como o menor dos números maiores que o perímetro de qualquer polígono inscrito na circunferência, ou seja, $l = \sup P_\lambda$, em que P_λ é o conjunto formado por todos os perímetros dos polígonos inscritos na circunferência λ .

Observação 1 Qualquer que seja o número positivo ε , pode-se inscrever numa circunferência um polígono convexo cuja diferença entre seu perímetro e o comprimento da circunferência seja menor que ε . Logo, suponha que esta afirmação seja falsa. Então, o perímetro de qualquer polígono inscrito na circunferência não é maior do que $l - \varepsilon$. Assim, o número l não é o menor dos números maiores que o perímetro de qualquer polígono inscrito. O número $l - \varepsilon/2$ é menor que l e, portanto, maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito. Deste modo, chegamos a uma contradição.

Lema 2.4.1 A razão entre os raios de dois polígonos semelhantes é igual a razão entre seus perímetros.

Prova: Dados dois polígonos semelhantes $A_1A_2A_3\dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3\dots A'_n$ de raios r e r' e perímetros p e p' , respectivamente. Por definição, os lados são proporcionais e seus ângulos internos são congruentes. Como os lados são proporcionais, então $A_{i-1}A_i = kA'_{i-1}A'_i$, em que k é a constante de proporcionalidade. Consideremos, sem perda de generalidade, que os dois polígonos são polígonos inscritos em circunferências concêntricas de centro em O , como ilustra a Figura 2.18.

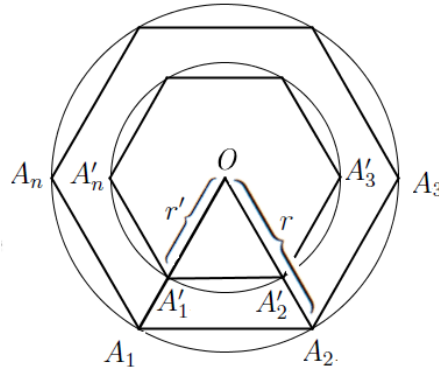


Figura 2.18: Polígono semelhantes.

Logo, temos que o triângulo $OA_{i-1}A_i$ é semelhante ao triângulo $OA'_{i-1}A'_i$, sendo assim

$$\frac{OA_{i-1}}{OA'_i} = \frac{A_{i-1}A_i}{A'_{i-1}A'_i},$$

em que $OA_i = r$ e $OA'_i = r'$. Logo

$$\frac{r}{r'} = \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}.$$

Portanto,

$$\frac{p}{p'} = \frac{\sum_{i=1}^n A_iA_{i-1}}{\sum_{i=1}^n A'_iA'_{i-1}} = \frac{nA_1A_2}{nA'_1A'_2} = \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{r}{r'}.$$

■

Proposição 2.4.5 *A razão dos comprimentos de duas circunferências é igual à razão de seus raios ou seus diâmetros.*

Prova: Considere duas circunferências λ_1 e λ_2 de raios R_1 e R_2 de comprimentos respectivamente iguais a l_1 e l_2 . Suponha que a afirmação $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$ não seja verdadeira, ou seja, que $R_1/R_2 < l_1/l_2$ ou $R_1/R_2 > l_1/l_2$. Tomemos como base a primeira desigualdade $R_1/R_2 < l_1/l_2$ já que para provar a segunda desigualdade, $R_1/R_2 > l_1/l_2$, usa-se a mesma ideia. Consideremos $R_1/R_2 = k$, então $k < l_1/l_2$ e logo $l_1 > kl_2$.

De acordo com a **Observação 1**, sabemos que podemos inscrever em λ_1 um polígono P_1 de perímetro p_1 , de maneira que a diferença entre seu perímetro p_1 e o

comprimento da circunferência l_1 seja menor que $l_1 - kl_2$, ou seja, $l_1 - p_1 < l_1 - kl_2$. Então, $p_1 > kl_2$.

Inscrevendo na segunda circunferência λ_2 um polígono P_2 semelhante a P_1 , em que o perímetro do P_2 é p_2 . Segundo o **Lema 2.4.1**, a razão dos perímetros dos polígonos P_1 e P_2 é igual à razão dos raios das circunferências, isto é, $p_1 = kp_2$. Usando $p_1 > kl_2$ e $p_1 = kp_2$, resulta $p_2 > l_2$. Porém, isso contradiz a **Definição 2.4.5** de número l_2 que deve ser maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito na segunda circunferência. Portanto, a razão dos comprimentos das circunferências é igual à razão dos seus raios ou de seus diâmetros:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

em que, d_1 e d_2 são os diâmetros de λ_1 e λ_2 , respectivamente. ■

Proposição 2.4.6 *O comprimento de uma circunferência de raio R é igual a $2\pi R$, em que π é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.*

Prova: Dadas duas circunferências de comprimentos l_1 e l_2 e raios medindo respectivamente R_1 e R_2 . Sabemos da proposição anterior que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Logo,

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2} = \pi.$$

Sendo assim,

$$l_1 = d_1\pi.$$

Como $d_1 = 2R_1$, segue que

$$l_1 = 2R_1\pi.$$

Portanto, para uma circunferência de raio R e comprimento l , temos:

$$l = 2R\pi.$$

■

2.5 Área de um Círculo

Proposição 2.5.1 *A área de um círculo de raio R é igual a $A = \pi R^2$.*

Prova: Dado um polígono regular P de n lados, inscrito numa circunferência de raio R , como mostra a Figura 2.19.

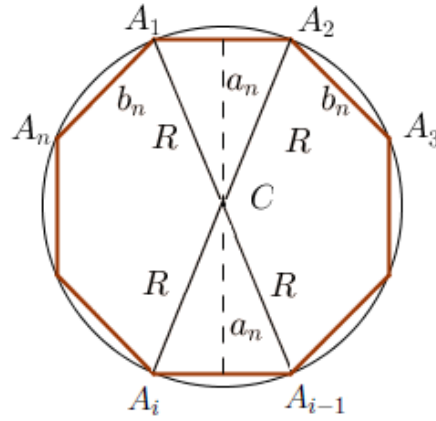


Figura 2.19: Polígono inscrito na circunferência.

Seja $b_n = A_{i-1}A_i$ a medida do lado de cada triângulo isósceles $A_{i-1}CA_i$ e a_n a medida do apótema, que é o segmento com uma extremidade no centro do polígono e a outra no ponto médio de um lado de cada triângulo deste polígono. Logo, a área de cada triângulo é dada por $\frac{a_n b_n}{2}$, então a área do polígono é dada por $A_P = n \cdot \frac{a_n b_n}{2}$.

Como $n b_n$ é o perímetro do polígono, então

$$n b_n \leq l,$$

em que l é o comprimento da circunferência de raio R e centro C . Portanto,

$$0 \leq b_n \leq \frac{l}{n}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = l \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = l \cdot 0 = 0$$

Segue-se pelo Teorema do confronto que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Por outro lado, considere o triângulo $A_{i-1}CM_i$, onde M_i é o ponto médio do segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$. Vemos que

$$R \leq a_n + b_n/2$$

pela desigualdade triangular, como ilustrada na Figura 2.20.

Portanto, segue que

$$R - \frac{b_n}{2} \leq a_n \leq R.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, então, pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = R$.

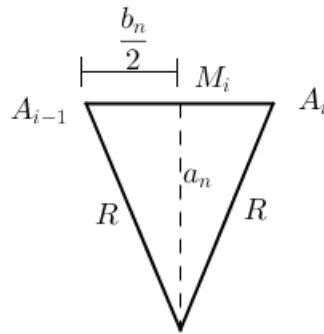


Figura 2.20: Triângulo isósceles.

Portanto, a área do círculo é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n \cdot b_n \cdot a_n = \frac{1}{2} l \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R.$$

Portanto, $\mathbf{A} = \pi R^2$. ■

2.6 Volume de Corpos

2.6.1 Conceito de Volume

Nesta seção, tomamos como base teórica as bibliografias de Barbosa ([1]), Dolce ([5]) e ([6]) e em especial Pogorélov ([16]) que é uma obra russa de prestígio no meio acadêmico.

O problema de determinar o volume de um corpo remonta a antiguidade. Surgiu em relação à necessidade prática do homem, como calcular o volume de grãos armazenados.

A ideia que temos de volume é do espaço ocupado por um objeto.

Exemplo: Como fazemos para calcular o volume de uma pessoa que pesa 120 kg?

A resposta é colocar esta pessoa dentro de um recipiente que tenha uma escala com a marcação dos volumes. Quando colocado dentro deste recipiente totalmente submerso, a pessoa deslocar um volume que será marcado pela escala. O volume que foi deslocado será o mesmo volume da pessoa. Porém, se formos calcular o volume de um objeto muito grande ou muito pequeno, esse método não pode ser considerado. Para calcular o volume de um objeto temos que usar uma unidade comum, como por exemplo o m^3 , cm^3 , litro, mililitro etc. Vejamos agora como calcular o volume de alguns sólidos mais simples, como um cubo e um paralelepípedo retângulo.

Imaginemos dois recipientes, um na forma de um cubo e outro em uma forma

arbitrária, como podemos ver na Figura 2.21.

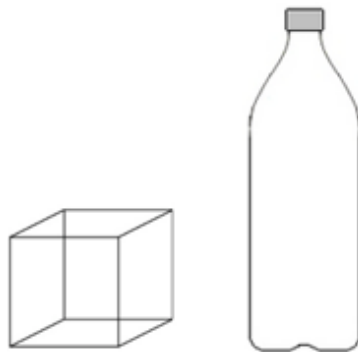


Figura 2.21: Um cubo e um recipiente qualquer.

Suponhamos que ambas estejam cheias do mesmo tipo de líquido, contendo no primeiro m litros deste líquido e n litros no segundo. Para saber quanto o segundo é maior que o primeiro, basta tomar a parte $1/m$ do primeiro, multiplicar por n , ou seja, o segundo recipiente é n/m vezes maior que o primeiro. Chamamos de volume do segundo recipiente o número que indica quantas vezes o segundo é maior que o primeiro. Neste caso, o primeiro recipiente é a unidade de medida, que vamos chamar de cubo unitário, pois o seu volume é igual a 1. Desta definição de volume se obtém as seguintes propriedades.

- Primeiro: uma vez que para encher todo o recipiente se necessita de uma quantidade determinada de líquido, resulta que todo recipiente tenha um volume (positivo) determinado;
- Segundo: para encher recipientes iguais necessita-se da mesma quantidade de líquido e, por isso, os recipientes iguais têm volumes iguais;
- Terceiro: se dividirmos o recipiente em duas partes, a quantidade de líquido necessária para encher todo o recipiente constará das quantidades de líquido necessárias para encher suas partes. Por isso, o volume de todo o recipiente é igual à soma dos volumes de suas partes.

De acordo com esta definição, para saber o volume de um recipiente é preciso enchê-lo de líquido. Porém, na prática, o que devemos saber é quanto de líquido cabe num recipiente sem enchê-lo. Logo, temos que conhecer o recipiente e conhecer as fórmulas que nos permita calcular seu volume.

A seguir vamos mostrar como calcular o volume de um prisma, mas para isso, vamos mostrar como calcular o volume de um paralelepípedo retangular e de um paralelepípedo oblíquo.

2.6.2 Volume de um Paralelepípedo retângulo

Determinemos primeiro o volume do bloco retangular ou paralelepípedo retângulo. Um paralelepípedo retângulo é um sólido limitado por 6 retângulos. Esses retângulos são as faces do paralelepípedo, e os lados dos retângulos são chamados de arestas do paralelepípedo. A Figura 2.22 representa um cubo com aresta igual a 1 e um paralelepípedo retangular cujo volume deve ser medido.

Se tomarmos um paralelepípedo retângulo cujas medidas das arestas são 3, 2 e 2, então o volume do paralelepípedo retângulo é igual a $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cubos unitários, como mostra a Figura 2.22.

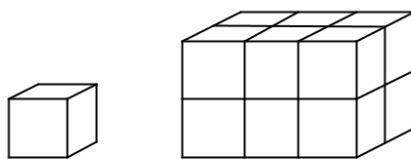


Figura 2.22: Cubo unitário e retângulo de lados inteiros.

Agora, se as arestas tiverem medidas não inteiras, ou seja, suas medidas forem números fracionários ou irracionais? Neste caso, vejamos a proposição seguinte.

Proposição 2.6.1 *O volume de um paralelepípedo retângulo de lados a , b e c é igual a $V = a \cdot b \cdot c$.*

Prova: Dados um cubo unitário e um paralelepípedo retângulo de lados a , b e c . Dividamos as arestas do cubo em N partes iguais e tracemos pelos pontos de divisão planos perpendiculares a estas arestas. O cubo será dividido em N^3 cubos pequenos. O volume do cubo grande é igual à soma dos volumes dos cubos pequenos, sendo assim, como volume do cubo grande é igual a 1 e temos um total de N^3 cubos pequenos, então o volume do cubo pequeno é igual a $1/N^3$.

Na Figura 2.23, as arestas do cubo foram divididas em quatro partes cada uma. Logo, o número de cubos pequenos é de $16 \cdot 4 = 4^3$ e, por conseguinte, o volume do cubo pequeno é $1/64$.

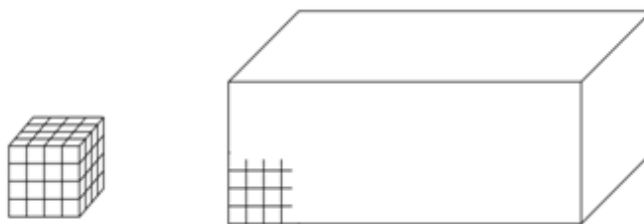


Figura 2.23: Um cubo e um paralelepípedo retângulo.

Seja q a aresta do cubo pequeno, então, $q = 1/N$ e, por isso, o volume do cubo pequeno é $q^3 = 1/N^3$.

Indiquemos por l o número inteiro da divisão de a por q , por m o número inteiro da divisão de b por q e por n o número inteiro que resulta da divisão de c por q . Então, o número de cubos que contém o paralelepípedo é lmn , enquanto que o número de cubos contidos no retângulo não será maior que $(l+1)(m+1)(n+1)$. Daí, resulta que o volume \mathbf{V} do paralelepípedo retângulo está entre os números $lmnq^3$ e $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, ou seja,

$$lmnq^3 \leq \mathbf{V} < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Demonstraremos agora que o produto $a \cdot b \cdot c$ está compreendido entre estes números. Como temos

$$l \cdot q \leq a < (l+1)q,$$

$$m \cdot q \leq b < (m+1)q$$

e

$$n \cdot q \leq c < (n+1)q.$$

Daí temos

$$lmnq^3 \leq a \cdot b \cdot c < (l+1)(m+1)(n+1)q^3,$$

ou seja,

$$lmnq^3 \leq abc < lmnq^3 + lmq^3 + lnq^3 + mnq^3 + mq^3 + nq^3.$$

Sabendo que ambos os números, \mathbf{V} e $a \cdot b \cdot c$ que estão compreendidos entre os números $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$ e $lmnq^3$, diferem no máximo $(l+1)(m+1)(n+1)q^3 - lmnq^3$, ou seja, diferem no máximo $lmq^3 + lnq^3 + mnq^3 + mq^3 + nq^3$. Tomando o número N suficientemente grande e usando que $lq \leq a$, $mq \leq b$ e $nq \leq c$ e que $q = 1/N$, temos

$$\frac{ab}{N} + \frac{ac}{N} + \frac{bc}{N} + \frac{a}{N^2} + \frac{b}{N^2} + \frac{c}{N^2} + \frac{1}{N^3} \longrightarrow 0.$$

Isso resulta que a diferença entre \mathbf{V} e abc é tão pequena quanto se queira. Assim, isso ocorre se, e somente se, eles forem iguais. Portanto, $\mathbf{V} = abc$. ■

2.6.3 Volume de um Paralelepípedo Oblíquo

Proposição 2.6.2 *O volume de um Paralelepípedo oblíquo é igual ao produto da área da base pela altura.*

Prova: Dado um paralelepípedo oblíquo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ de base $ABCD$ como ilustrado na Figura 2.24.

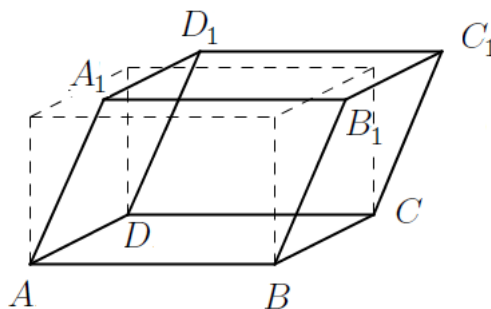


Figura 2.24: Paralelepípedo oblíquo.

Considere, sem perda de generalidade, a aresta $\overline{AA_1}$ e suas paralelas como sendo menores ou iguais às outras arestas.

Agora, tracemos um plano que passa pela aresta \overline{BC} e que é perpendicular à base $ABCD$. Um dos sólido formado é um paralelepípedo de base triangular $BB_1 B_2 C C_1 C_2$, em que B_2 e C_2 são pontos internos das arestas $\overline{A_1 B_1}$ e $\overline{C_1 D_1}$ respectivamente. Considere os pontos A_2 e D_2 que pertencem respectivamente a $\overleftarrow{A_1 B_1}$ e a $\overleftarrow{C_1 D_1}$ e ao plano perpendicular a $ABCD$, que passa pela aresta \overline{AD} , como podemos ver na Figura 2.25. Sendo assim, podemos recortar o paralelepípedo $BB_1 B_2 C C_1 C_2$.

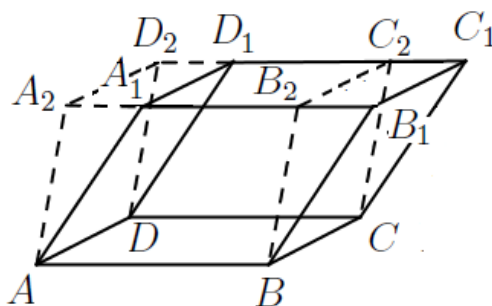


Figura 2.25: Paralelepípedo oblíquo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Separaremos agora o prisma $BB_1 B_2 C C_1 C_2$ obteremos um novo paralelepípedo $ABCD A_2 B_2 C_2 D_2$, o qual possui volume igual ao volume do paralelepípedo inicial. Ao realizar com o paralelepípedo as transformações assinaladas, a área da base e a altura se conservam. Também se conservam os planos de duas faces laterais, enquanto outros dois são perpendiculares à base. Aplicando mais uma vez essa transformação, obteremos um paralelepípedo de faces laterais perpendiculares à

base, bastando, para isso, traçar pelos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} planos perpendiculares ao plano $ABCD$ e, usando o mesmo raciocínio anterior, obteremos um paralelepípedo $ABCD A_3 B_3 C_3 D_3$, como podemos ver na Figura 2.26.

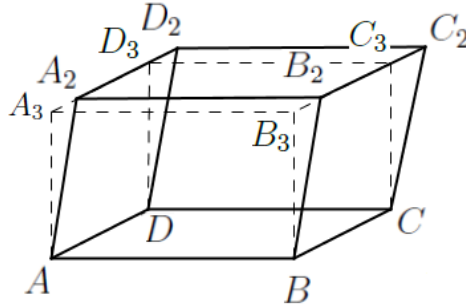


Figura 2.26: Paralelepípedo oblíquo $ABCD A_2 B_2 C_2 D_2$.

Por fim, tracemos pelos segmentos $\overline{AA_3}$ e $\overline{CC_3}$ planos perpendiculares ao plano $ABA_3 B_3$, obteremos o paralelepípedo retângulo $ABCD A_2 B_2 C_2 D_2$.

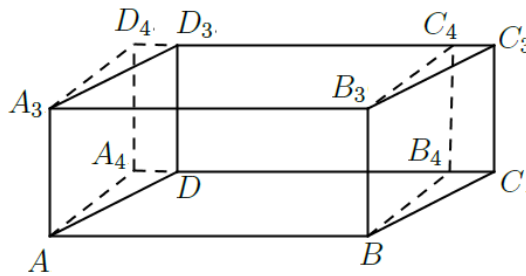


Figura 2.27: Paralelepípedo oblíquo $AB B_4 A_4 A_3 B_3 C_3 D_3$.

O volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto de suas dimensões lineares. O produto de duas dimensões lineares é a área da sua base e a terceira dimensão é sua altura. Logo, o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área de sua base pela altura. Portanto, o volume de todo paralelepípedo é igual ao produto da área base pela sua altura. ■

2.6.4 Volume de um Prisma

Proposição 2.6.3 *O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base por sua altura.*

Prova: Consideremos o volume de um prisma de base triangular ABC . Complementemos o prisma como indica a Figura 2.28. O ponto O é o centro de simetria do paralelepípedo. Por isso, o prisma agregado é simétrico ao ponto O e, por isso, seu volume é igual ao volume do prisma inicial. O volume do paralelepípedo construído é o dobro do volume do prisma inicial, que é igual ao produto da área da sua base pela altura.

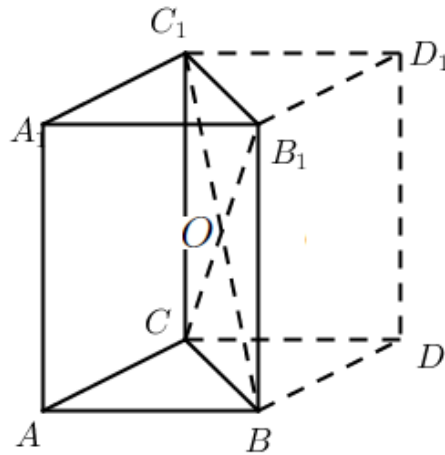


Figura 2.28: Paralelepípedo de base triangular.

A área da base é igual a área duplicada do triângulo ABC e a altura é igual a altura do prisma inicial. Daqui deduzimos que o volume do prisma inicial é igual ao produto da área da base pela altura.

Consideremos agora um prisma qualquer cuja base é um polígono de base n e altura h . Neste caso, o polígono pode ser dividido em $n - 2$ triângulos, formando assim $n - 2$ prismas de base triangular, como mostra a Figura 2.29.

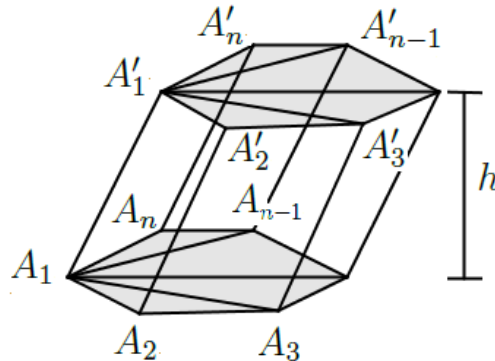


Figura 2.29: Prisma qualquer.

Logo, o volume do prisma é igual a somas dos volumes dos prismas, ou seja

$$V = \mathbf{A}_{A_1A_2A_3} \cdot h + \mathbf{A}_{A_1A_3A_4} \cdot h + \dots + \mathbf{A}_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot h.$$

Como h é um fator comum a todos os termos. Sendo assim, como

$$V = \mathbf{A}_{A_1A_2A_3} + \mathbf{A}_{A_1A_3A_4} + \dots + \mathbf{A}_{A_1A_{n-1}A_n} = \mathbf{A}_{base}.$$

Portanto, segue que

$$V = \mathbf{A}_{base} \cdot h.$$

■

Capítulo 3

Algumas Aplicações do Método de Exaustão

Uma das maneiras de se demonstrar as fórmulas usadas para o cálculo de alguns sólidos geométricos usados no Ensino Médio é o cálculo integral. Porém, o estudo do cálculo integral no Ensino Médio é difícil de ser aplicado, já que para utilizar desta ferramenta precisamos de várias ideias como limite, continuidade, derivada. O que faremos neste capítulo é utilizar uma soma de infinitos termos de partes infinitamente pequenas, que é uma ideia que precede a ideia de cálculo integral. Para tanto, faremos uma aplicação de séries numéricas do tipo

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

onde p é um número inteiro positivo. Precisaremos apenas das somas para $p = 1$ e $p = 2$, as quais serão usadas para demonstrar como encontrar as fórmulas usadas para calcular os volumes do cone, da pirâmide e da esfera. Esse método é chamado de Método de Exaustão e foi usado por Arquimedes para demonstrar as fórmulas que ele encontrava de forma prática. A assimilação deste conceito não requer muita preparação e, por sua vez, é útil, porque cria a possibilidade de resolver uma série de problemas importantes de geometria e, pode ser absorver mais profundamente a ideia de limite e serve de ótima introdução para o estudo cálculo integral.

Proposição 3.0.4 *A soma dos n primeiros números inteiros positivos é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, ou seja, a série $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$, para $p = 1$, é igual a S_1 .*

Prova: Sabemos que esta série $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é a soma dos termos de progressão aritmética de razão igual a 1. Todavia, vamos mostrar de maneira diferente que irá nos auxiliar no entendimento das outras demonstração para $p = 2$ e $p = 3$.

Tomemos a conhecida fórmula

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Substituindo sucessivamente n por $n-1$, depois por $n-2$, até chegarmos na unidade, obtemos como ilustrado abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ n^2 = (n - 1)^2 + 2(n - 1) + 1 \\ (n - 1)^2 = (n - 2)^2 + 2(n - 2) + 1 \\ \vdots \\ 2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1. \end{array} \right.$$

Somando todas essas igualdades, vemos que alguns termos do primeiro membro serão iguais a alguns termos do segundo membro da equação, cancelando, obtemos:

$$(n + 1)^2 = 1^2 + [2n + 2(n - 1) + 2(n - 2) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1] + (1 + 1 + 1 + \dots + 1).$$

Observe que de $2n$ até $2 \cdot 1$, temos um total de n termos, sendo assim,

$$2[n + (n - 1) + (n - 2) + 2 + 1] = 2S_1.$$

Logo,

$$(n + 1)^2 = 1 + 2S_1 + n.$$

Assim, segue que

$$2S_1 = (n + 1)^2 - (n + 1).$$

Portanto,

$$S_1 = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

■

Já era de nosso conhecimento esta fórmula e agora vamos ver as expressões para a soma parcial com $p = 2$.

Proposição 3.0.5 *A soma dos n primeiros números quadrados, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ é igual a $S_2 = \frac{n \cdot (n + 1)(2n + 1)}{6}$.*

Prova: Apliquemos agora o mesmo procedimento usado anteriormente para calcular a soma dos quadrados os primeiros n inteiros positivos, ou seja, queremos determinar

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Para isso, usaremos

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Substituindo sucessivamente n por $n - 1$, depois por $n - 2$ até chegarmos em 1. Como resultado teremos uma série de igualdades, como podemos observar abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 = (n - 1)^3 + 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1 \\ (n - 1)^3 = (n - 2)^3 + 3(n - 2)^2 + 3(n - 2) + 1 \\ \vdots \\ 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1. \end{array} \right.$$

Somando todas estas igualdades como no caso anterior, também podemos realizar simplificações, eliminando todos os termos do primeiro membro da equação, sobrando apenas um número cúbico $(n + 1)^3$ e 1^3 como sendo o único termo elevado ao cubo no segundo membro da equação, além, é claro, de sobrar os outros termos, que podemos notar abaixo.

$$(n+1)^3 = -1^3 + 3[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2] + 3[n + (n-1) + \dots + 2 + 1] + (1 + 1 + \dots + 1).$$

Substituindo

$$S_2 = n^2 + (n - 1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2,$$

e

$$S_1 = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1] + (1 + 1 + \dots + 1),$$

temos,

$$(n + 1) = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

Como

$$S_1 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

então

$$3S_2 = (n + 1)^3 - 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - (n + 1).$$

Colocando $(n + 1)$ em evidência

$$3S_2 = (n + 1)[(n + 1)^2 - 3 \cdot \frac{n}{2} - 1] = n \cdot (n + 1) \cdot \frac{2n + 1}{2}.$$

Portanto, a fórmula da soma dos n primeiros quadrados é:

$$S_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

■

De maneira, análoga podemos encontrar S_3, S_4, S_5, \dots

Agora, vejamos como obter as fórmulas referidas no início do capítulo.

3.1 Volume de uma Pirâmide

Proposição 3.1.1 *O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e altura, ou seja, $V = \frac{1}{3} \mathbf{A}_b \cdot H$, onde \mathbf{A}_b e H denotam a área da base e altura da pirâmide, respectivamente.*

Prova: Dada uma pirâmide $ABCDV$ de área da base igual a \mathbf{A}_b e altura H .

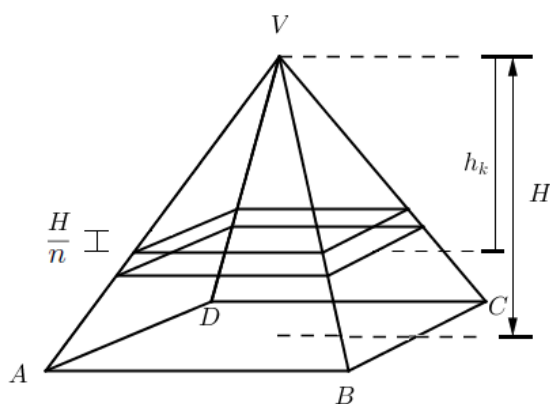


Figura 3.1: Pirâmide

Dividindo a altura da pirâmide em n partes paralelas à base, teremos $n - 1$ troncos de pirâmides. Os volumes desses troncos não são iguais aos volumes dos prismas de mesma base e mesma altura, como ilustra a Figura 3.2.

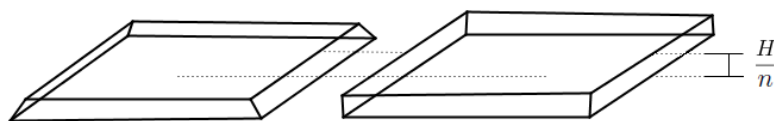


Figura 3.2: Tronco da pirâmide e prisma de mesma base e mesma altura

Contudo, para n suficientemente grande, os volumes são bem próximos. Vamos considerar esses troncos como sendo prismas de mesma base para simplificar o cálculo. Seja k um número inteiro positivo, em que k representa a quantidade de troncos acima do tronco de base \mathbf{A}_k da pirâmide de altura h_k , como podemos ver na Figura 3.1. Daí, temos que o volume de $V_k = \mathbf{A}_k \cdot \frac{H}{n}$. Considerando a pirâmide de base \mathbf{A}_b , temos que \mathbf{A}_k está para \mathbf{A}_b , assim como $(h_k)^2$ está para H^2 .

Como

$$\frac{\mathbf{A}_k}{\mathbf{A}_b} = \frac{h_k^2}{H^2} = \left(\frac{k \cdot \frac{H}{n}}{H} \right)^2,$$

então

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_b \left(\frac{k}{n} \right)^2,$$

assim, o volume do k -ésimo prisma, que representaremos por P_k , é

$$\mathbf{V}_{P_k} = \mathbf{A}_k \cdot \frac{H}{n},$$

ou seja,

$$\mathbf{V}_{P_k} = \mathbf{A}_b \cdot \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n},$$

logo

$$\mathbf{V}_{P_k} = \mathbf{A}_b \cdot H \cdot \frac{k^2}{n^3}.$$

Quando somarmos todos os volumes dos prismas de mesmas áreas bases \mathbf{A}_k e de mesmas alturas, teremos

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_{P_k},$$

que por sua vez é

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_b \cdot H \cdot \frac{k^2}{n^3}.$$

Daí temos

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{A}_b \cdot H}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Da **Proposição 3.0.5**, temos que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right).$$

Sendo assim,

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\mathbf{A}_b \cdot H}{n^3} \right) \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right).$$

Logo,

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\mathbf{A}_b \cdot H}{n^3} \right) \cdot \left(\frac{n^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right).$$

Simplificando, obtemos:

$$V = (\mathbf{A}_b \cdot H) \cdot \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right).$$

Portanto, para n suficientemente grande, temos

$$V = \frac{\mathbf{A}_b \cdot H}{3}.$$

Concluimos, assim, que o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. ■

3.2 Volume de um Cone

Proposição 3.2.1 *O volume de um cone é igual a 1/3 da área da base por sua altura.*

Prova: Para demonstrar esta proposição, usaremos a mesma ideia usada para calcular o volume de uma pirâmide.

Dado um cone de raio da base igual a R e altura igual a H . Cortando o cone em n capas paralelas à base, teremos dividido a altura H em n partes iguais, sendo assim, teremos $n - 1$ trocos de um cone, como ilustra a Figura 3.3.

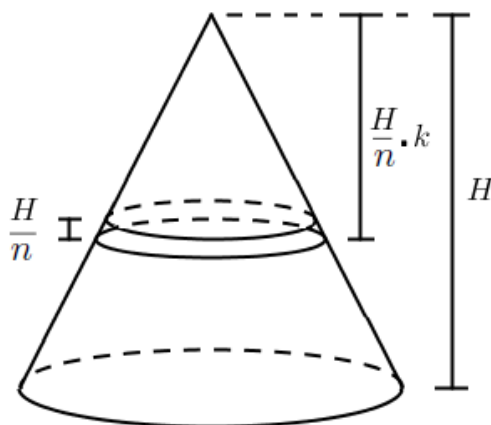


Figura 3.3: Cone de altura H .

É fato que o volume de um tronco de um cone é diferente do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. Porém, para n suficientemente grande, o volume do tronco de um cone é muito próximo do volume de um cilindro de mesma área da base e mesma altura, como ilustra a Figura 3.4.

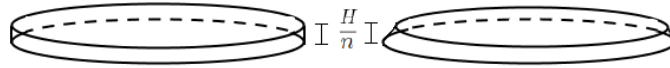


Figura 3.4: Cilindro e tronco de um cone de mesma altura.

Considere o cilindro de raio R_k e altura $\frac{H}{n}$, onde k representa a quantidade de troncos acima do cone de base \mathbf{A}_k . Sendo assim, o volume deste cilindro é dado por

$$V_{C_k} = \pi R_k^2 \cdot \frac{H}{n}.$$



Figura 3.5: Cilindro de altura $\frac{H}{n}$.

Como a razão entre os raios R e R_k é igual à razão entre as alturas H e $h_k = k \cdot \frac{H}{n}$, temos,

$$\frac{H}{\frac{H}{n} \cdot k} = \frac{R}{R_k},$$

ou seja,

$$R_k = R \cdot \frac{k}{n}.$$

Daí temos que o volume do cilindro é

$$V_{C_k} = \pi \frac{R^2 k^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n},$$

ou seja,

$$V_{C_k} = \pi R^2 H \cdot \frac{k^2}{n^3}.$$

Somando todos os volumes dos cilindros, temos:

$$V_C = \sum_{k=1}^n V_{C_k}.$$

Logo

$$V_C = \sum_{k=1}^n \pi R^2 H \cdot \frac{k^2}{n^3},$$

que podemos escrever na forma

$$V_C = \frac{\pi R^2 H}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2.$$

Sendo assim, obtemos

$$V_C = \sum_{k=1}^n \left(\pi \frac{Hk}{n^3} \right) \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right).$$

Logo, para n suficientemente grande, obtemos

$$V_C = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}.$$

Portanto, o volume de um cone de raio R e altura H é igual a $1/3$ do volume de um cilindro de mesmo raio e altura. ■

3.3 Volume de uma Esfera

Proposição 3.3.1 *O volume de uma esfera de raio R é igual $\frac{4\pi R^3}{3}$.*

Prova: Para demonstrar esta proposição vamos considerar uma semiesfera e depois vamos multiplicar o volume por dois para, assim, obter o volume desejado.

Dada uma semiesfera E de raio R , o qual vamos dividir em n partes iguais, obtendo assim n capas de mesma altura. Essas capas têm volume muito próximos do volume de um cilindro de raio r_k e altura $\frac{R}{n}$, para n suficientemente grande. Daí, o volume do cilindro é $V_k = \pi r_k^2 \cdot \left(\frac{R}{n}\right)$.

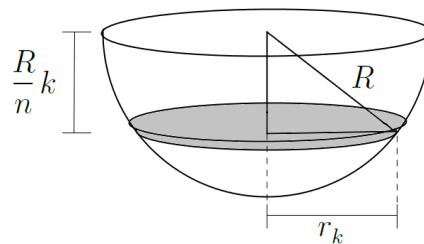


Figura 3.6: Semiesfera de raio R .

Como ilustra a Figura 3.6, sabemos que as alturas dos cilindros são dadas por

$$r_k^2 = R^2 - \left(\frac{R}{n}k\right)^2,$$

ou seja,

$$r_k^2 = R^2 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Logo, o volume de cada cilindro é dado por

$$V_k = \pi R^2 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{R}{n},$$

ou seja,

$$\mathbf{V}_k = \pi R^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} \right).$$

Somando todos os volumes dos cilindros obtemos o volume da semiesfera

$$\mathbf{V}_E = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k,$$

Sendo assim, calculando o somatório de todos os volumes dos prismas, obtemos

$$\mathbf{V}_E = \sum_{k=1}^n \pi R^3 \left(\frac{R}{n} - \frac{k^2}{n^3} \right),$$

ou seja,

$$\mathbf{V}_E = \pi R^3 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \right),$$

o qual podemos escrever na forma

$$\mathbf{V}_E = \pi R^3 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \right).$$

Logo,

$$\mathbf{V}_E = \pi R^3 \left(\frac{n}{n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right).$$

Tomando n suficientemente grande, obtemos

$$\mathbf{V}_E = \pi R^3 \left(1 - \frac{n^3(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6n^3} \right) = \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right).$$

Logo,

$$\mathbf{V}_E = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Portanto, o volume de uma esfera é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

■

Capítulo 4

Algumas Aplicações do Princípio de Cavalieri

Neste capítulo, vamos trabalhar com o princípio de Cavalieri. O princípio de Cavalieri é uma ferramenta muito poderosa usada para nos auxiliar em cálculos para encontrar as fórmulas que nos permite calcular áreas e volumes de algumas figuras, sem fazer uso do cálculo infinitesimal. O Método dos Indivisíveis é apenas uma versão da ideia anteriormente explorada por Demócrito, Eudoxo, Arquimedes e outros, que foi aperfeiçoada por Cavalieri. A ideia é imaginar as áreas e os volumes como formados por inúmeras fatias, tão pequenas que poderiam ser consideradas indivisíveis, segundo Garbi ([8]). Sua motivação vem das tentativas de Kepler de encontrar certas áreas e volumes.

Uma ideia prática do princípio de Cavalieri é considerar uma resma de papel arrumada na forma de paralelepípedo retângulo e, logo depois, deformar este paralelepípedo formando outra figura, com todas as cartas uma sobre as outras. Contudo, o volume do conjunto de cartas continua o mesmo, como mostra a Figura 4.1.

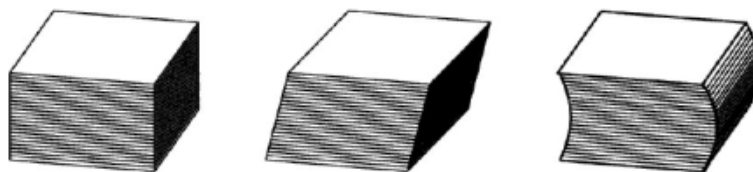


Figura 4.1: Resma de papel
Fonte: Lima ([11], p. 255)

É com essa ideia que vamos expor o princípio de Cavalieri que diz:

1. Sejam \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 duas figuras planas, se qualquer reta secante secciona \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , segundo segmentos de reta com medidas iguais, então a área de \mathbf{F}_1 é igual área de \mathbf{F}_2 , ou seja, $\mathbf{A}_{\mathbf{F}_1} = \mathbf{A}_{\mathbf{F}_2}$.

Podemos observar na Figura 4.2 que todos os segmentos seccionados por todas as retas secantes à \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 possuem medidas iguais como $DD' = AA'$, $EE' = BB'$, $FF' = CC'$, então pelo primeiro princípio de Cavalieri $\mathbf{A}_{\mathbf{F}_1} = \mathbf{A}_{\mathbf{F}_2}$.

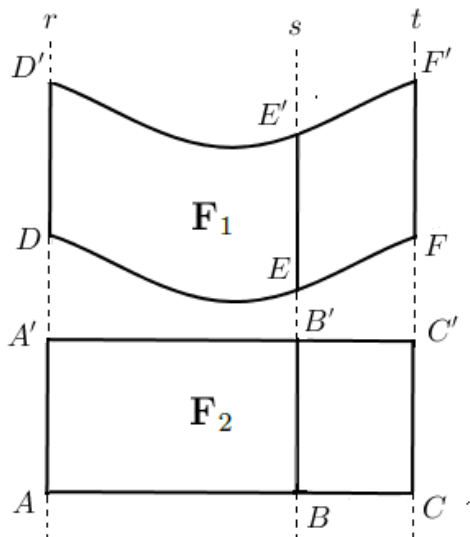


Figura 4.2: Figuras de áreas iguais.

2. Sejam \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 segundo figuras planas com áreas iguais, então o volume de \mathbf{S}_1 e o volume de \mathbf{S}_2 são iguais, ou seja, $\mathbf{V}_{\mathbf{S}_1} = \mathbf{V}_{\mathbf{S}_2}$.

Nestes sólidos a seguir, visualmente, percebemos que as seções paralelas de \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 possuem a mesma área, sendo assim, o segundo princípio afirma que possuem o mesmo volume.

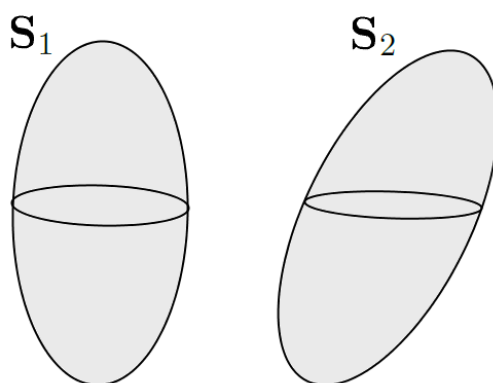


Figura 4.3: Sólidos de mesmo volume

Agora faremos algumas aplicações deste princípio.

4.1 Volume de um Prisma

Vejamos uma forma simples de encontrar, usando o princípio de Cavalieri, a fórmula do volume de um prisma qualquer.

Proposição 4.1.1 *O volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da área da base por sua altura.*

Prova: Dado um prisma de área da base \mathbf{A} e altura h , considere um paralelepípedo retângulo de mesma área da base e mesma altura que o prisma dado, os quais estão apoiados em um mesmo plano α_1 .

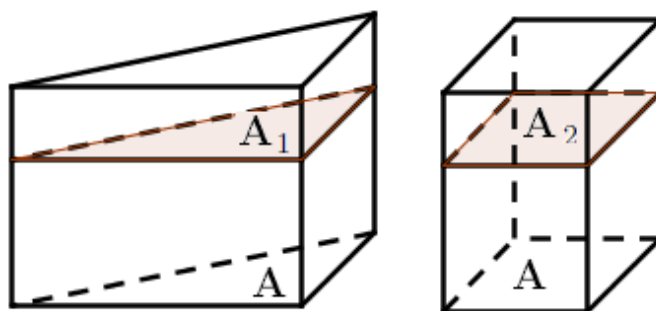


Figura 4.4: Paralelepípedo retângulo e um prisma de mesma área da base.

Seja α_2 um plano paralelo a α_1 que secciona o prisma e o paralelepípedo, formando duas seções de áreas \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 em cada prisma. Como as áreas das bases são iguais e suas seções são congruentes às bases, então as áreas das seções também são iguais, ou seja, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = \mathbf{A}_2$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo e, portanto, o volume do prisma é dado por

$$V = \mathbf{A} \cdot h.$$

■

4.2 Volume de uma Pirâmide

Proposição 4.2.1 *A razão entre as áreas da secção transversal paralela à base e da base de uma pirâmide de base triangular é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.*

Prova: Dada uma pirâmide de base triangular ABC e vértice V , cuja altura seja H , com A , B e C pertencentes ao plano α_1 . Agora, seja α_2 um plano paralelo a α_1 , que corta a pirâmide a uma distância h de V , onde os pontos correspondentes a A , B e C são A' , B' e C' , como ilustra a Figura 4.5.

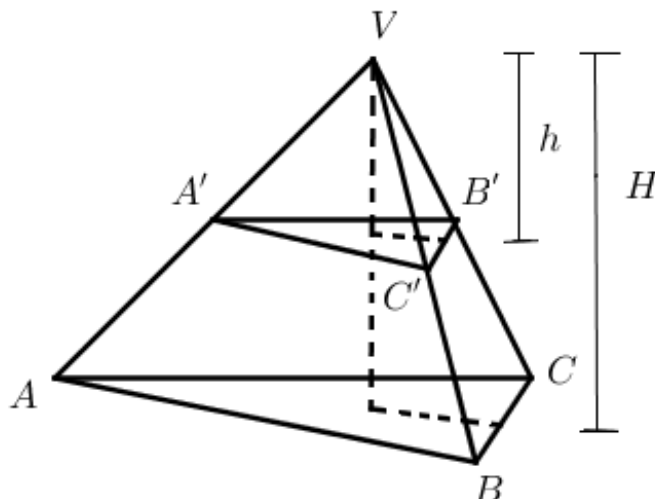


Figura 4.5: Pirâmide.

Percebemos que ABV e $A'B'V$ são semelhantes.

Observe que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, pois \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são segmentos que pertencem ao mesmo plano e também a planos paralelos, sendo assim, os ângulos correspondentes \widehat{VAB} e $\widehat{VA'B'}$ são congruentes (iguais), assim como \widehat{VBA} e $\widehat{VB'A'}$. Como V é um vértice comum aos dois triângulos, então os triângulos ABV e $A'B'V$ são semelhantes e portanto,

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{AB}{A'B'} = k,$$

em que k é a constante de proporcionalidade.

Usando a mesma ideia para os triângulos ACV e $A'C'V$, temos que

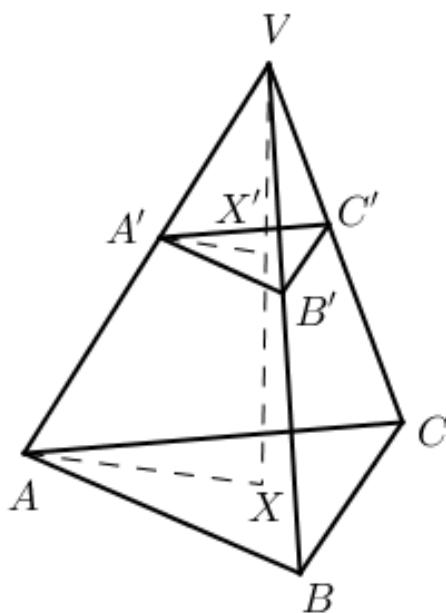
$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VC}{VC'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Concluimos assim, que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Seja X um ponto de α_1 tal que $XV = H$, os triângulos VXA e $VX'A'$ são triângulos retângulos, em que $X' \in \alpha_2 \cap \overleftrightarrow{VX}$, como na Figura 4.6. Seja L a altura do triângulo ABC relativa à base \overline{BC} , e seja l a altura do triângulo $A'B'C'$, relativa à base $\overline{B'C'}$. Como os triângulos AXV e $A'X'V$ são semelhantes, pela **Proposição 2.4.3**, obtemos que

$$\frac{L}{l} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{H}{h} = k \implies L = lk, H = hk.$$

Figura 4.6: Pirâmide de altura H .

A área de um triângulo ABC é dada por

$$\mathbf{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot L}{2}.$$

Como $BC = B'C' \cdot k$ e $L = l \cdot k$, então

$$\mathbf{A}_{ABC} = \frac{B'C' \cdot k \cdot l \cdot k}{2}.$$

Assim,

$$\mathbf{A}_{ABC} = \frac{B'C' \cdot l \cdot k^2}{2} = k^2 \cdot \mathbf{A}_{A'B'C'}.$$

Como $\frac{H}{h} = k$, então

$$\mathbf{A}_{ABC} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \cdot \mathbf{A}_{A'B'C'}.$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{A}_{ABC}}{\mathbf{A}_{A'B'C'}} = \left(\frac{H}{h}\right)^2.$$

■

Corolário 4.2.1 *A razão entre as áreas da seção transversal paralela à base, e da base de uma pirâmide qualquer, é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.*

Prova: Considere uma pirâmide tendo como base um polígono de n lados, $p_n = A_1A_2\dots A_n$, de área \mathbf{A} vértice V e altura H . Traçando um plano paralelo à base que corta a pirâmide P a uma distância h do vértice V , formando assim uma nova pirâmide de base $p'_n = A'_1A'_2\dots A'_n$, de área \mathbf{A}' , como ilustra a Figura 4.7.

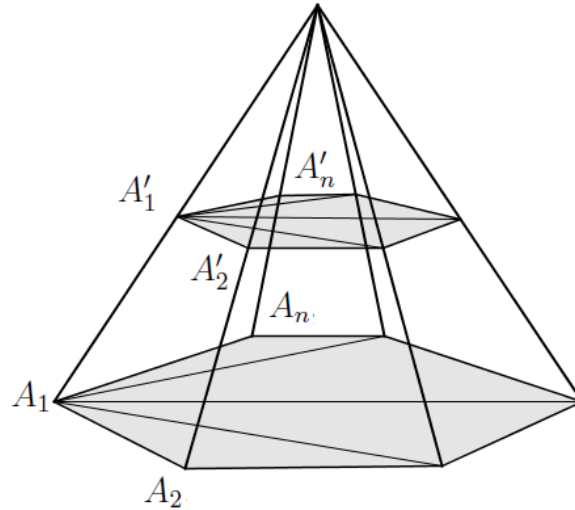


Figura 4.7: Pirâmides de qualquer.

Daí formamos $n - 2$ pirâmides de bases triangulares, da **Proposição 4.2.1**, obtemos

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}_{A'_1A'_2A'_3}}{\mathbf{A}_{A_1A_2A_3}} = \frac{\mathbf{A}_{A'_1A'_3A'_4}}{\mathbf{A}_{A_1A_3A_4}} = \dots = \frac{\mathbf{A}_{A'_1A'_{n-1}A'_n}}{\mathbf{A}_{A_1A_{n-1}A_n}}.$$

Pelas propriedades das proporções temos

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}_{A'_1A'_2A'_3} + \mathbf{A}_{A'_1A'_3A'_4} + \dots + \mathbf{A}_{A'_1A'_{n-1}A'_n}}{\mathbf{A}_{A_1A_3A_4} + \mathbf{A}_{A_1A_2A_3} + \dots + \mathbf{A}_{A_1A_{n-1}A_n}}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}'}{\mathbf{A}}.$$

■

Proposição 4.2.2 *Pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm mesmo volume.*

Prova: Considere duas pirâmides de mesma base triangular ABC e mesma altura H , cujos vértices são V' e V'' .

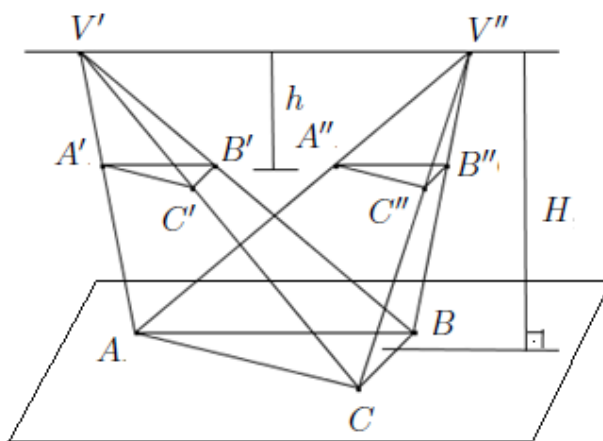


Figura 4.8: Pirâmides de mesma base triangular e mesma altura.

Traçando um plano paralelo à base, a uma distância h de V' e V'' obtemos duas seções $A'B'C'$ e $A''B''C''$ de mesma área. Na **Proposição 4.2.1**, vimos que

$$A_{\Delta A'B'C'} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \cdot A_{ABC} = A_{\Delta A''B''C''}.$$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que essas pirâmides têm o mesmo volume. ■

Proposição 4.2.3 *O volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Prova: O que faremos agora é mostrar que um prisma de base triangular pode ser dividido em três pirâmides de mesma área da base e mesma altura, ou seja, três pirâmides de mesmo volume.

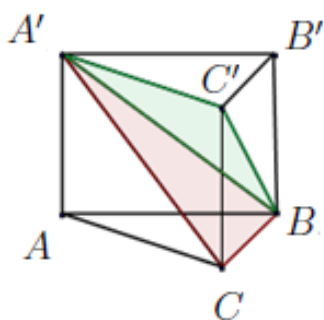


Figura 4.9: Prisma de base triangular.

Dado um prisma de base triangular ABC e de vértices A, B, C, A', B' e C' , como ilustra a Figura 4.9. Deste prisma podemos formar 3 pirâmides. Cortando o prisma nos vértices A', B, C , formando duas pirâmides, sendo uma pirâmide de base triangular $ABCA'$ e outra pirâmide de base quadrangular $CBB'C'A'$, o qual

podemos traçar um plano passando pelos vértices $C'BA'$, daí obtemos outras duas pirâmides $CBC'A'$ e $B'BC'A'$, formando um total de três pirâmides.

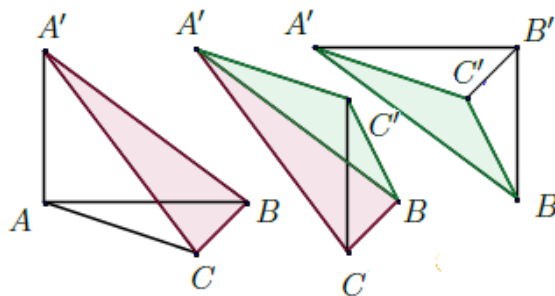


Figura 4.10: Pirâmides de volumes iguais.

É fácil ver que as três pirâmides possuem o mesmo volume, pois $CBC'A'$ e $B'BC'A'$ possuem a mesma área da base, já que $CBB'C'$ é um paralelogramo e sua diagonal $\overline{BC'}$ o divide em dois triângulos de mesma área, e também possuem a mesma altura, já que possuem um vértice comum. O mesmo vale para as pirâmides $ACA'B$ e $A'CC'B$, que possuem mesma área da base e mesma altura, já que possuem vértice comum. Sabendo que

$$\mathbf{V}_{ABCA'B'C'} = \mathbf{V}_{CBC'A'} + \mathbf{V}_{BB'C'A} + \mathbf{V}_{CBB'C'},$$

e que

$$\mathbf{V}_{CBC'A'} = \mathbf{V}_{BB'C'A} = \mathbf{V}_{CBB'C'},$$

logo,

$$\mathbf{V}_{CBC'A'} = \mathbf{V}_{BB'C'A} = \mathbf{V}_{CBB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{V}_{ABCA'B'C'}.$$

Da **Proposição 4.1.1** temos que o volume do prisma é igual ao produto da área base pela altura. Portanto, o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura. ■

Proposição 4.2.4 *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Prova: Considere P uma pirâmide, tendo como base um polígono de n lados, $p_n = A_1A_2\dots A_n$, vértice V e altura h .

Podemos formar, assim, $n-2$ pirâmides de base triangular, sendo assim o volume da pirâmide P é dado por:

$$\mathbf{V}_{A_1A_2A_3V} + \mathbf{V}_{A_1A_3A_4V} + \dots + \mathbf{V}_{A_1A_{n-1}A_nV} = \mathbf{V}_P.$$

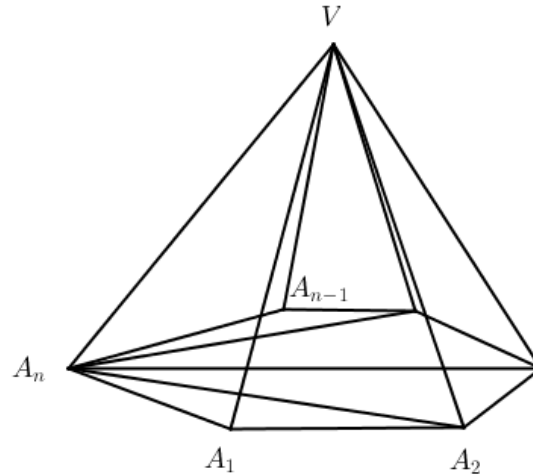


Figura 4.11: Polígono de base poligonal de n lados.

Como o volume de uma pirâmide de base triangular é dado por

$$V = \frac{1}{3} \mathbf{A}_{A_1 A_{i-1} A_i} \cdot h,$$

com $i > 2$, então,

$$\frac{1}{3} \cdot \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot h + \frac{1}{3} \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_3 A_4} \cdot h + \dots + \frac{1}{3} \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_{n-1} A_n} \cdot h = V_P$$

Ou seja,

$$\frac{1}{3} \cdot [\mathbf{A}_{\Delta A_1 A_2 A_3} + \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_3 A_4} + \dots + \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_{n-1} A_n}] \cdot h = V_P.$$

Sendo

$$\mathbf{A}_{p_n} = \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_2 A_3} + \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_3 A_4} + \dots + \mathbf{A}_{\Delta A_1 A_{n-1} A_n}.$$

Portanto,

$$V_P = \frac{1}{3} \mathbf{A}_{p_n} \cdot h$$

■

4.3 Volume de um Cilindro

Proposição 4.3.1 *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Prova: Dados um cilindro e um prisma de mesma área da base \mathbf{A} e mesma altura H , ambos apoiados em um mesmo plano horizontal α . Suponha que outro plano paralelo a α secciona os dois sólidos a uma altura h da base, daí teremos duas secções

de áreas A_1 e A_2 , que pertencem respectivamente ao cilindro e ao prisma, então $A_1 = A = A_2$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, temos que $V_{cilindro} = V_{prisma}$. Assim, da **Proposição 4.1.1**, temos que o volume do prisma é dado por $V = A \cdot h$, portanto $V_{cilindro} = A \cdot h$. ■

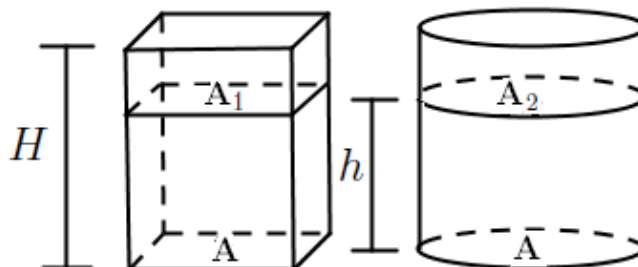


Figura 4.12: Prisma e cilindro de mesma área da base e mesma altura.

4.4 Volume de um Cone

Lema 4.4.1 *A razão entre as áreas da secção transversal paralela à base e da base de um cone é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.*

Prova: Dado um cone C de área da base A , raio R e altura H , e seja α um plano paralelo à base do cone, formando um novo cone C' de área da base A_1 , raio r e altura h , como ilustra a Figura 4.13.

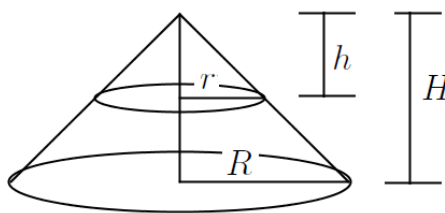


Figura 4.13: Cone.

O triângulo formado pelo vértice, centro O do cone C e um ponto A qualquer da circunferência da base do cone C , o triângulo formado pelo vértice do cone C' , centro O' do cone C' e um ponto B , colinear ao vértice e o ponto A , formam dois triângulos semelhantes, pela **Proposição 2.4.3**, sendo assim, temos que:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$\frac{h^2}{H^2} = \frac{r^2}{R^2},$$

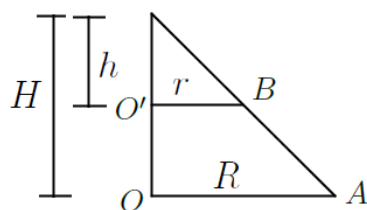


Figura 4.14: Triângulos semelhantes.

ou seja,

$$\frac{h^2}{H^2} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}}.$$

■

Proposição 4.4.1 *O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Prova: Para mostrar a **Proposição 4.4.1** vamos usar a mesma ideia da demonstração anterior. Considere um cone e uma pirâmide de mesma área da base \mathbf{A} e altura H , apoiados em um plano horizontal α . Suponha que um plano paralelo a α secciona os dois sólidos a uma mesma distância h de seus vértices, formando duas seções de áreas \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 , como podemos visualizar na Figura 4.15.

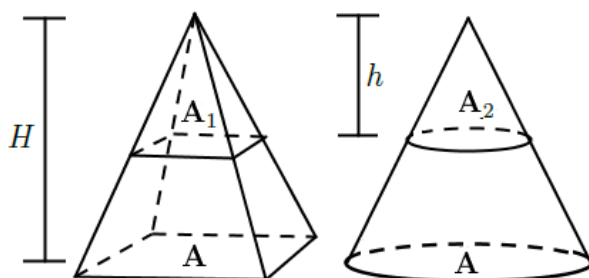


Figura 4.15: Pirâmide e cone de mesma área da base e mesma altura.

Do **Corolário 4.2.1** e do **Lema 4.4.1** temos que:

$$\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}}$$

ou seja, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$.

O princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos possuem o mesmo volume. Da **Proposição 4.2.4** temos que o volume da pirâmide é igual a um terço da área

da base pela altura, ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{A} \cdot H.$$

Portanto, o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{A} \cdot H$$

■

4.5 Volume de uma Esfera

Proposição 4.5.1 *O volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Prova: Para encontrar o volume de uma esfera, primeiro vamos circunscrevê-la em um cilindro equilátero (cilindro de altura igual ao diâmetro), como ilustra a Figura 4.16.

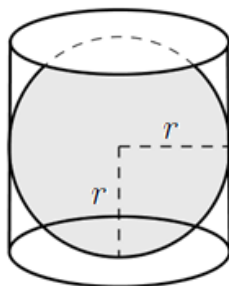


Figura 4.16: Cilindro equilátero circunscrito em uma esfera.

Seja K uma esfera de raio r e C o cilindro equilátero de altura $2r$, circunscrito na esfera K , e seja L o espaço entre C e K , ou seja $L = C - K$. Vimos como encontrar \mathbf{V}_C , que é

$$\mathbf{V}_C = \pi r^2 \cdot (2r)$$

em que πr^2 e $2r$ são as áreas da base e a altura do cilindro, respectivamente. Então,

$$\mathbf{V}_C = 2\pi r^3.$$

Portanto, se podemos encontrar \mathbf{L} , podemos calcular \mathbf{V}_K , pois $\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_C - \mathbf{V}_L$.

No cálculo \mathbf{V}_L , vamos usar o princípio de Cavalieri, da mesma forma como nas duas últimas seções, ou seja, veremos um sólido, cujo volume sabemos, que tem as mesmas áreas horizontais que L .

As áreas das seções horizontais iguais as de L são fáceis de calcular, basta para isso traçar um plano paralelo às bases a uma distância k do centro da esfera K ,

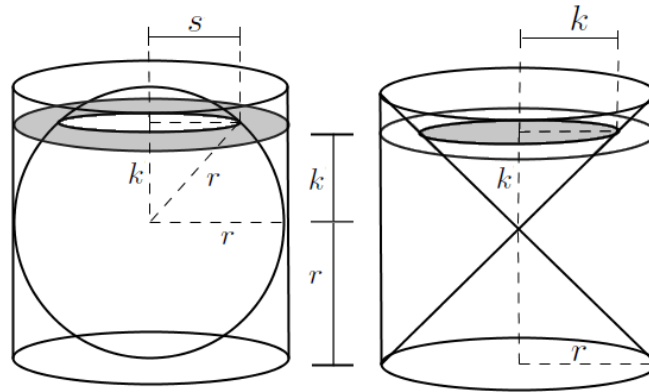


Figura 4.17: Sólido L à esquerda e sólido L' à direita.

como ilustra a Figura 4.17. Sendo o raio do círculo maior r , que é o raio da esfera, e s o raio do círculo menor, temos, usando o Teorema de Pitágoras, $s = \sqrt{r^2 - k^2}$.

Portanto, a área de secção horizontal de L , que vamos representar por \mathbf{S}_k , que está a uma altura k é:

$$\mathbf{S}_k = \pi r^2 - \pi s^2,$$

logo,

$$\mathbf{S}_k = \pi (r^2 - s^2),$$

daí temos

$$\mathbf{S}_k = \pi (r^2 - (r^2 - k^2)).$$

Portanto,

$$\mathbf{S}_k = \pi k^2.$$

Agora, considere o sólido L' como sendo dois cones tendo como bases as bases do cilindro equilátero de raio r e altura $2r$, como ilustra a Figura 4.17. A secção horizontal de L , a altura k , é um disco de raio k . Por conseguinte, a área do disco, que representamos por \mathbf{A}_k , é dada por $\mathbf{A}_k = \pi k^2$, então $\mathbf{A}_k = \mathbf{S}_k$ ou seja, $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{L'}$.

Logo, pela **Proposição 4.4.1**, temos que

$$\mathbf{V}_{L'} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3.$$

sendo assim,

$$\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_C - \mathbf{V}_L,$$

daí temos,

$$\mathbf{V}_K = 2\pi r^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3.$$

Portanto

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

■

Podemos também calcular áreas de algumas figuras planas como, por exemplo, a área de uma elipse usando o princípio de Cavalieri.

4.6 Área de uma Elipse

Uma aplicação do princípio de Cavalieri na geometria é encontrada em Garbi ([8]) e em Natansón ([15]) para calcular a área de uma Elipse. A ideia de elipse é de uma circunferência comprimida, porém, vejamos a definição segundo Iezzi ([9]).

Definição 4.6.1 *Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α , tal que a distância entre F_1 e F_2 é uma constante igual a $2c$, com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é igual a constante $2a$, com $2a > 2c$.*

A Figura 4.18 representa uma elipse.

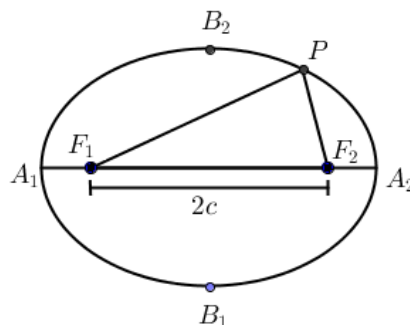


Figura 4.18: Elipse

Proposição 4.6.1 *A área de uma elipse de eixos iguais a $2a$ e $2b$, com $a > b$, é igual a πab .*

Prova: Chamaremos de área da elipse a área da região delimitada pela elipse. Considere uma elipse com semi-eixo maior igual a $a = \frac{A_1A_2}{2}$ e semi-eixo menor igual a $b = \frac{B_1B_2}{2}$, concêntrica com uma circunferência de raio, cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$ e a equação da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, como podemos ver na Figura 4.19.

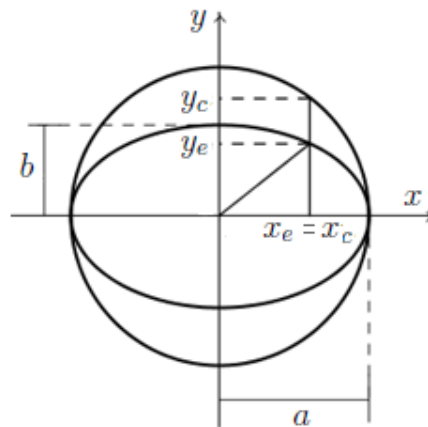


Figura 4.19: Elipse e circunferência concêntricas

Para todo valor de x , com $0 \leq x \leq a$, temos ainda que o y da circunferência que representaremos por y_c é expresso por:

$$y_c = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Agora, para y da elipse, que representaremos por y_e , com $0 \leq x \leq a$, sabendo que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

daí, temos

$$(b^2)(x^2) + (a^2)(y^2) = (a^2)(b^2).$$

Logo, obtemos

$$y_e = \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}},$$

ou seja,

$$y_e = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ainda na Figura 4.19, é fácil ver que

$$\frac{a}{b} = \frac{y_c}{y_e}.$$

Ou seja,

$$y_e = \frac{b}{a} y_c.$$

Como a área da elipse é igual à soma de todos dos segmentos y_e e a área do círculo é igual à soma de todos os y_c , então, como a área do círculo é igual a $\mathbf{A}_c = \pi a^2$, pelo

princípio de Cavalieri, temos que $\mathbf{A}_e = \frac{b}{a}\pi a^2$, ou seja,

$$\mathbf{A}(e) = \pi ab.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, 11 Ed. - Rio de Janeiro, SBM, (2012).
- [2] BOLTIANSKI, V. G., *Figuras Equivalentes y Equicompuestas*, Editora Mir, (1981).
- [3] CARVALHO, J. B. P., ROQUE, T., *Tópicos de História da Matemática*, SBM, (2012).
- [4] CONTADOR, P. R. M., *Matemática, uma breve história, vol. I*, São Paulo: Editora Livraria da Física, (2008).
- [5] DOLCE, O., POMPEO, J. N., *Fundamentos de Matematica Elementar: Geometria Plana*, 7 Ed. - São Paulo, Atual, (1993).
- [6] DOLCE, O., POMPEO, J. N., *Fundamentos de Matematica Elementar: Geometria Espacial, posição e métrica*, 5 Ed. - São Paulo, Atual, (1993).
- [7] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, (2004).
- [8] GARBI, G. G., *A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*, 5. Ed., São Paulo: Editora Livraria da Física, (2010).
- [9] IEZZI, G., *Fundamentos de Matematica Elementar: Geometria Analítica*, 7 Ed. - São Paulo, Atual, (1993).
- [10] LIMA, E.L., *Medida e Forma em Geometria*, Coleção do Professor de Matemática, 4 Ed.- Rio de Janeiro, SBM, (2009).
- [11] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*, Coleção do Professor de Matemática - volume 2, 6 Ed. - Rio de Janeiro, SBM, (2006).
- [12] LIMA, E. L., *Matemática e Ensino*, Coleção do Professor de Matemática, 3 Ed. - Rio de Janeiro, SBM, (2007).

- [13] MOISE, E.E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 3 ed. - New York, (1990).
- [14] MUNIZ NETO, A. C. N., *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, vol 2, Rio de Janeiro, SBM, (2012).
- [15] NATANSÓN, I. P., *Problemas Elementales de Máximos y Mínimo, Suma de Cantidades Infinitamente Pequeñas*, Editora Mir, (1977).
- [16] POGORÉLOV, A. V., *Geometría Elemental*, Editora Mir, (1974).